

MODELO BIVARIADO DE VALORES EXTREMOS PARA EL ANALISIS DE  
VALORES MINIMOS Y SUS APLICACIONES HIDROLOGICAS

1  
201

MODESTO ANTONIO ACOSTA GODINEZ

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

( APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS )

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F., 1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## RESUMEN

### MODELO BIVARIADO DE VALORES EXTREMOS PARA EL ANALISIS DE VALORES MINIMOS Y SUS APLICACIONES HIDROLOGICAS.

En la República Mexicana, como en la mayor parte del mundo, la disponibilidad del agua fluctúa entre la escasez o el exceso de agua. Estos extremos han originado el inicio de una política hidráulica orientada hacia una rigurosa planeación para el futuro, la cual requiere del perfeccionamiento de los métodos y técnicas de los análisis hidrológicos.

Dentro de esta línea de investigación hidrológica, el análisis de eventos extremos es de particular importancia para el tópico que se trata en este trabajo, más específicamente lo es la aplicación del modelo bivariado de valores extremos al análisis de gastos mínimos.

Con el fin de determinar si los estimadores basados en la aproximación bivariada son mejores que aquellos calculados mediante la aproximación univariada, fueron calculadas las matrices de varianza-covarianza.

Para establecer si los resultados asintóticos bivariados son utilizables a muestras pequeñas, se emplearon técnicas de muestreo distribucional para garantizar dicha condición.

Las distribuciones bivariadas fueron aplicadas al análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales de varias estaciones hidrométricas ubicadas en la República Mexicana.

Los resultados demuestran que se tienen mejoras significativas en la fases de estimación de parámetros, obtención de eventos de diseño y límites de confianza para periodos de retorno específicos, cuando se utilizan las distribuciones bivariadas.

Se puede concluir que las distribuciones bivariadas de valores extremos representan una buena alternativa en el análisis de valores mínimos.

# INDICE

	PAGINA
<b>CAPITULO 1. INTRODUCCION</b>	
1.1 Conceptos Generales	1
1.2 Descripción del Problema	2
1.3 Objetivos del Trabajo	4
1.4 Descripción de Capítulos	5
<b>CAPITULO 2. DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS</b>	
2.1 Introducción	6
2.2 Desarrollo de las Distribuciones de Valores Extremos	7
2.3 Génesis, Características y Propiedades de las Distribuciones Univariadas de Valores Extremos	9
2.4 Génesis de la Distribución General de Valores Extremos	12
<b>CAPITULO 3. MODELOS BIVARIADOS DE VALORES EXTREMOS</b>	
3.1 Introducción	22
3.2 Génesis, Características y Propiedades de las Distribuciones Bivariadas de Valores Extremos	23
3.3 Construcción del Modelo Matemático	30
3.4 Características y Propiedades del Modelo Bivariado	36
<b>CAPITULO 4. ESTIMACION DE PARAMETROS</b>	
4.1 Introducción	38
4.2 Propiedades de los Parámetros Estimados	38
4.3 Método de Máxima Verosimilitud para Funciones de Distribución de Probabilidad Bivariadas	40
4.4 Función Logarítmica de Verosimilitud de la Distribución Bivariada de Valores Extremos	43
<b>CAPITULO 5. CONFIABILIDAD EN LA ESTIMACION DE PARAMETROS</b>	
5.1 Introducción	45

<b>CAPITULO 5. . . .</b>	
5.2 Propiedades Asintóticas de los Estimadores de Máxima Verosimilitud	47
5.3 Varianzas Asintóticas Univariadas	48
5.4 Varianzas Asintóticas Bivariadas	49
5.5 Contenido de Información Relativa	53
5.6 Aplicación a Muestras Pequeñas	57
<b>CAPITULO 6. APLICACIONES EN HIDROLOGIA</b>	
6.1 Introducción	64
6.2 Selección del Tipo de Distribución de Valores Extremos	66
6.3 Límites de Confianza de Eventos de Diseño	74
6.4 Comparación con otras Distribuciones Univariadas	79
<b>CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	90
<b>REFERENCIAS</b>	93
<b>APENDICE A</b>	98
<b>APENDICE B</b>	105

## LISTA DE TABLAS

Tabla		PAGINA
5.1	Coefficientes de la matriz de Varianza-Covarianza de la distribución univariada general de valores extremos para mínimos	50
5.2	Contenidos de información relativa asintóticos para los parámetros del distribución bivariada de valores extremos para mínimos	56
5.3	Combinaciones propuestas para las muestras en la fase de simulación	60
5.4	Varianzas asintóticas y simuladas para la distribución bivariada de valores extremos para mínimos (Caso A)	61
5.5	Varianzas asintóticas y simuladas para la distribución bivariada de valores extremos para mínimos (Caso B)	61
5.6	Varianzas asintóticas y simuladas para la distribución bivariada de valores extremos para mínimos (Caso C)	62
5.7	Varianzas asintóticas y simuladas para la distribución bivariada de valores extremos para mínimos (Caso D)	62
6.1	Estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas para este trabajo	68
6.2	Coefficientes de correlación y tamaños de muestra relativa de las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas para este trabajo	68
6.3	Estimados univariados de momentos y máxima verosimilitud de los parámetros de las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas. Distribución Log-Normal-3	69
6.4	Estimados univariados de momentos de los parámetros de las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas. Distribuciones valores extremos tipo I (Gumbel) y tipo III (Weibull)	69

6.5	Estimados univariados de momentos y máxima verosimilitud de los parámetros de las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas. Distribución general de valores extremos	70
6.6	Estimados bivariados de máxima verosimilitud de los parámetros de las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas. Distribución bivariada general de valores extremos (VEB22)	70
6.7	Error estándar de ajuste para las distribuciones bivariada y univariada de valores extremos.	71
6.8	Errores estándar de ajuste para las distribuciones univariadas y bivariadas usadas en las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas	72
6.9	Parámetros finales para las estaciones hidrométricas de la región 10 seleccionadas	73
6.10	Eventos de diseño de las distribuciones univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas	81
6.11	Eventos de diseño de la mejor distribución univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas.	83
6.12	Límites al 95% de confianza para las distribuciones univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas.	85
6.13	Límites al 95% de confianza para la mejor distribución univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas.	88

## LISTA DE FIGURAS

Figura		PAGINA
B.1	Localización de las estaciones hidrométricas	88
B.1	Análisis de frecuencias de gastos mínimos. Distribución general de valores extremos; estación: Urique	106
B.2	Análisis de frecuencias de gastos mínimos. Distribución general de valores extremos; estación: Palo Dulce	107
B.3	Análisis de frecuencias de gastos mínimos. Distribución general de valores extremos; estación: Huites	108
B.4	Análisis de frecuencias de gastos mínimos. Distribución general de valores extremos; estación: Choix	109
B.5	Análisis de frecuencias de gastos mínimos. Distribución general de valores extremos; estación: Chinipas	110

## NOMENCLATURA

a	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
$\alpha$	parámetro de asociación del modelo mezclado
b	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
c	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
Cov ( $\theta$ )	covarianza de $\theta$
E ( $\theta$ )	valor esperado de $\theta$
exp ( $\theta$ )	exponencial de $\theta$
f	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
$f_i$	elemento del vector $\xi_i$
f ( $\theta$ )	función de densidad de probabilidad
F ( $\theta$ )	función de distribución de probabilidad acumulada
g	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
$g_i$	elemento del vector $\xi_i$
$g_s$	coeficiente de asimetría
g ( $\theta$ )	función de densidad de probabilidad
G ( $\theta$ )	función de distribución de probabilidad acumulada
h	coeficiente de la matriz de varianza-covarianza GVE
I	matriz de información de Fisher
$I_i$	indicador
$I_r$ ( $\theta$ )	Contenido de información relativa
Ln ( $\theta$ )	Logaritmos naturales
L ( $\theta$ )	función de verosimilitud
LL ( $\theta$ )	función de verosimilitud logarítmica
m	parámetro de asociación del modelo logístico
$m_i$	parámetro de asociación bivariada
n	tamaño de muestra
$n_e$	longitud efectiva
$n_i$	tamaño de muestra relativo
$n_g$	número de años ganados
$N_i$	tamaños de muestra univariada
$Q_T$	gasto para un periodo de retorno T específico
R	coeficiente de correlación múltiple
$R_i$	número aleatorio con distribución ( 0,1 )

$\sigma^2$	varianza de la muestra
T	periodo de retorno ( años )
$u_i$	parámetro de ubicación
Var (e)	varianza
$V_{jk}$	jkésimo elemento de la matriz de varianza-covarianza de valores extremos bivariado
W	variable reducida general de valores extremos
y	variable reducida Gumbel
$y^*$	mediana de la variable reducida GVE
$y^\#$	moda de la variable reducida GVE
Z (e)	valor de la ordenada normal estándar
$\alpha_1$	parámetro de escala
$\beta_1$	parámetro de forma
$\Gamma (e)$	función gamma
$\partial$	derivada parcial
$\xi_i$	vector
$\theta_i$	vector de parámetros
$\mu$	media poblacional
$\nu$	grados de libertad
$\pi$	3.1415927
$\pi(x,y)$	función de densidad de probabilidad bivariada
N	
$\prod_{i=1}$	operador de producto desde $i = 1, \dots, N$
$\Pi(X,Y)$	función de distribución de probabilidad bivariada
$\rho$	coeficiente de correlación poblacional
$\sigma^2$	varianza poblacional
$\Sigma$	operador suma
$\chi^2$	percentil de la distribución Chi-cuadrada

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1 Conceptos Generales

El agua es uno de los elementos esenciales para la existencia del hombre. Desde el primer momento de la vida humana en la Tierra, la dependencia del hombre al agua ha quedado firmemente marcada y aún en la actualidad sigue inalterada.

En los tiempos actuales, el agua es un elemento importante, pues prové el sustento vital del hombre, y apoya los procesos de manufactura de artículos industriales, la generación de energía eléctrica, en la producción de alimentos... En muchas partes del mundo, el agua es un importante medio de transporte y un factor significativo en las actividades recreativas.

Se estima que la cantidad de agua que hay en la hidrósfera es de unos 1359 millones de kilómetros cúbicos, de los cuales el 97.5% es agua salada y el 2.5% dulce. Del agua dulce, el 87.3% se encuentra en forma de hielo o nieve, el 12.3% en el agua subterránea y sólo el 0.4% en agua superficial y atmosférica líquida. Por lo anterior, sólo el 0.2% del agua total de la hidrósfera es potencialmente aprovechable por el hombre.

En México, en particular, existe una gran variedad de climas y condiciones hidrometeorológicas que van desde las condiciones desérticas, como las existentes en el Norte y Noroeste del País, hasta las del trópico húmedo prevaecientes en el Sureste del

Territorio Nacional. Así pues, se tienen regiones con precipitaciones medias anuales menores a los 250mm, en el primer caso, y lluvias medias anuales superiores a los 5000mm en el segundo caso. Por otra parte, hay una gran parte del Territorio Nacional que se ve afectado año tras año con la ocurrencia de tormentas tropicales, ciclones o huracanes, de diversa intensidad, que producen daños de diferente magnitud en cuanto a pérdida de vidas humanas y daños económicos y sociales.

## 1.2 Descripción del Problema

Las sequías pueden definirse de diversas maneras; por ejemplo, desde el punto de vista meteorológico, agrícola, hidrológico, económico, social, etc. Para los fines de este trabajo, el criterio hidrológico será el prevaleciente, en lo general; y la sequía se definirá como: el gasto medio diario mínimo anual en una estación hidrométrica en particular.

Es bien sabido que una sequía es muy difícil de predecir, ya que al ser un fenómeno regional, la mayor parte de las veces, la precisión de la extensión territorial que abarca y el periodo de tiempo que dura, son dos variables que a menudo difícilmente son determinadas hasta que la sequía termina y se evalúan los daños que ha causado.

Dentro del análisis de sequías hay diversas metodologías para su estudio que persiguen objetivos diversos y que producen resultados que son aplicados también para fines diferentes. Para los términos en que se ha planteado el trabajo que aquí se

presenta, el estudio se concretará al análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales al usar la distribución de valores extremos bivariada del tipo logístico.

Existen muchos métodos de análisis de frecuencias regionales (Cunnane, 1988); uno de ellos es, mediante el empleo de distribuciones multivariadas.

Muchas contribuciones han sido publicadas en la literatura relacionadas al problema de mejorar la estimación de parámetros usando distribuciones multivariadas. Sin embargo, la mayoría de ellas se han concentrado en la distribución normal (Anderson, 1957).

Recientemente, la aproximación multivariada de valores extremos ha sido aplicada a la solución de problemas hidrológicos. Los fundamentos teóricos de tal aproximación fueron dados hace más de 30 años (Gumbel, 1958, 1959, 1960a, 1960b, 1967; Tiago de Oliveira, 1958, 1975a, 1975b; Galambos, 1975, 1978), pero ellos han tenido muy poco impacto en el campo de la hidrología. Después de estos trabajos, muchos modelos bivariados de valores extremos comenzaron a aparecer en la literatura (Tiago de Oliveira, 1982). Un grupo particular entre ellos son los modelos diferenciables, los cuales fueron estudiados por Rueda (1981), Raynal (1985, 1987a, 1987b), y Escalante (1991); sus resultados demuestran que se obtienen mejoras significativas en la fase de estimación de parámetros, en la reducción de la variabilidad de los gastos de diseño y el cálculo de límites de confianza para valores de diseño, por lo que el análisis de frecuencias a través de distribuciones multivariadas de valores extremos representa un

campo prometedora de investigación, además de que está, en gran parte, inexplorado en el sentido de aplicaciones hidrológicas.

### 1.3 Objetivos del Trabajo

El objetivo general de este trabajo es desarrollar una alternativa para el análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, en el ámbito del análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales, a través de la distribución bivariada del tipo logístico de valores extremos.

Los objetivos específicos son:

- a. Desarrollar la función de distribución de probabilidad bivariada de valores extremos para el análisis de valores mínimos.
- b. Determinar la confiabilidad en la estimación de parámetros por la estimación conjunta bivariada en comparación con la univariada.
- c. Aplicar la metodología propuesta al análisis de frecuencias de gastos mínimos de datos provenientes de estaciones hidrométricas de la República Mexicana.

La contribución general de la investigación propuesta, es la de demostrar que la aplicación de las distribuciones bivariadas de valores extremos, al análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, en particular el estudio de valores mínimos, mejora las fases de estimación de parámetros, cálculo de eventos de diseño y de sus correspondientes límites de confianza.

## 1.4 Descripción de Capítulos

El trabajo se ha estructurado de la siguiente forma:

En este Capítulo , se hace una introducción a la problemática del análisis de frecuencias de eventos extremos y su importancia con respecto a las actividades humanas.

En el Capítulo 2, son presentadas, en primer término, una descripción del desarrollo de la teoría de los valores extremos; posteriormente, se incluyen las características y propiedades de las distribuciones univariadas y bivariadas de valores extremos.

En el Capítulo 3, se muestran las características y propiedades del modelo bivariado de valores extremos del tipo logístico.

En el Capítulo 4, se desarrolla un algoritmo para determinar los estimados de máxima verosimilitud de los parámetros de las funciones de distribución de probabilidad bivariadas, propuestas en el Capítulo 3.

La confiabilidad de los estimados de los parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos se analiza en el Capítulo 5. Su aplicación a pequeñas muestras, es probada a través de técnicas de muestreo distribucional.

En el Capítulo 6, se incluyen las aplicaciones de las distribuciones bivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos mínimos, con datos provenientes de estaciones hidrométricas ubicadas en la República Mexicana.

Las conclusiones y recomendaciones, se presentan en el Capítulo 7.

## CAPITULO 2

### DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

#### 2.1 Introducción

En el análisis de gastos mínimos anuales se han manejado diversas funciones de distribución de probabilidad como opciones para modelar a las muestras que se están analizando. Dentro de ese grupo de distribuciones de probabilidad, destaca la muy conocida distribución de valores extremos Weibull (Tipo III). Las otras dos distribuciones extremas, son menos usadas para este tipo de análisis: Fréchet (Tipo II) y Gumbel (Tipo I).

Todas ellas son soluciones particulares de la ecuación funcional que deben satisfacer los extremos. La solución general de esta ecuación ha sido encontrada por Jenkinson (1955) y a tal solución se le ha llamado distribución General de Valores Extremos (GVE).

El nombre de valores extremos se asigna a estas distribuciones debido a que pueden ser obtenidas como distribuciones límite ( $n \rightarrow \infty$ ) de los valores más grandes, o más pequeños, entre  $n$  variables aleatorias independientes; cada una debe tener la misma distribución continua.

Las condiciones básicas que definen a las distribuciones asintóticas extremas son:

- a) Las observaciones de las cuales los valores extremos son seleccionados, deben ser independientes,
- b) Las observaciones deben ser confiables y estar hechas en idénticas condiciones,

- c) El número de observaciones extremas,  $n$ , debe ser grande. El qué tan grande debe ser  $n$ , depende de la distribución inicial y del grado de precisión buscado, y
- d) La distribución inicial de la cual son tomados los valores extremos, deben pertenecer a uno de los tres tipos mencionados anteriormente.

En general, las distribuciones univariadas de valores extremos han sido usadas ampliamente para analizar la distribución de eventos hidrológicos extremos. Por ejemplo, el Natural Environment Research Council ( NERC, 1978 ), proporciona los procedimientos de estimación y aplicaciones de las tres distribuciones univariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de valores máximos. Así mismo, contiene el estado del arte en el análisis de frecuencias de avenidas cuando se usan otras distribuciones univariadas.

## 2.2 Desarrollo de las Distribuciones de Valores Extremos

La teoría de los valores extremos describe el comportamiento aleatorio de los  $n$ -ésimos valores más grandes o más pequeños de una muestra de datos.

La historia de los estadísticos de valores extremos comenzó en 1922, en Alemania, con un artículo de L. Von Bortkiewicz, donde se pone de manifiesto que los valores más grandes de muestras tomadas de poblaciones normales, son variables que tienen una nueva distribución.

En 1923, R. Von Mises, también en Alemania, introduce el concepto matemático fundamental del valor esperado del elemento

más grande de una muestra de datos, y da con ésto el inicio al estudio de la distribución asintótica de valores extremos en muestras de distribuciones normales. Los valores más grandes en muestras diferentes a la normal, fueron estudiadas por E. L. Dodd en 1923.

En 1925, L. H. C. Tippet obtuvo las probabilidades de los valores más grandes para diferentes tamaños de muestra de una distribución normal.

En 1927, M. Fréchet publicó el primer artículo donde describe la obtención de la distribución asintótica del valor más grande de una clase de distribución individual.

En 1928, R. A. Fisher y L.H.C. Tippet publicaron el artículo que es considerado el cimiento de la teoría asintótica de las distribuciones de valores extremos. Ellos encontraron, en forma independiente, la distribución asintótica de Fréchet, y construyeron las otras dos.

R. Von Mises (1936) y B. Gnedenko (1943) contribuyeron al dar las condiciones necesarias y suficientes para validar las distribuciones asintóticas para los valores más grandes.

Los desarrollos teóricos de los años veintes, fueron seguidos en los años treintas, por aplicaciones prácticas al usar los estadísticos de valores extremos de distribuciones del tiempo de duración de la vida humana (Gumbel, 1937 ), y resistencia de materiales (Weibull, 1939).

Desde entonces, estos procedimientos han sido aplicados extensivamente a otros campos que incluyen: sismos, datos meteorológicos, efectos de corrosión, tiempos de sobrevivencia de

microorganismos, ...

Con respecto a sus aplicaciones en el análisis de frecuencias de gastos máximos y mínimos, están los artículos hechos por Gumbel (1941, 1944, 1946, 1947 y 1954).

En artículos pioneros, Gumbel (1959, 1980a ) propone algunos tipos de distribuciones exponenciales bivariadas. Después, Gumbel (1980b, 1982, 1987) extendió su teoría a las distribuciones multivariadas de valores extremos; sin embargo, muy poca de esta teoría ha sido aplicada al estudio de eventos hidrológicos extremos.

Los trabajos de Clarke (1980), Rueda (1981) , Raynal (1985) y Escalante (1991), reportan reducciones significativas en la variabilidad de los parámetros estimados mediante las distribuciones bivariadas y trivariadas.

En adición a estos trabajos, se han reportado (Takahashi, 1987,1988) algunas propiedades de las distribuciones multivariadas de valores extremos.

### 2.3 Génesis, Características y Propiedades de las Distribuciones Univariadas de Valores Extremos

Las distribuciones de valores extremos fueron obtenidas como distribuciones límite de los valores más grandes o más pequeños de una muestra.

Si  $X(1), X(2), \dots, X(n)$ , es una muestra aleatoria de una población continua  $F(x)$ , el  $r$ -ésimo valor más grande es llamado el estadístico de orden  $r$ -ésimo; su valor será denotado como  $x[r]$ . Por lo que, el más pequeño valor muestral es  $x[1]$  y el más grande

es  $x[n]$ . Puesto que la distribución de las  $X$ 's,  $F(x)$ , puede ser interpretada como la probabilidad de que  $X$  tenga un valor menor o igual a algún valor específico,  $x$ , la probabilidad de que exactamente  $j$  de las  $X$ 's caiga dentro del intervalo cerrado  $(-\infty, x]$  y  $(n-j)$  caiga en el intervalo abierto  $(x, \infty)$  es obtenida substituyendo  $F(x)$  por la probabilidad en la serie Binomial:

$$\binom{n}{j} F^j(x) (1 - F(x))^{n-j} \quad (2.1)$$

el evento  $x[r] \leq Z$  ocurre si y solamente si,  $r$  o más de las  $X(i)$ 's caen en el intervalo  $(-\infty, Z]$ . Por lo que:

$$P(x[r]) = P(x[r] \leq Z) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} F^j(Z) (1 - F(Z))^{n-j} \quad (2.2)$$

En particular, la función de distribución de los miembros más grandes de la muestra de una población con distribución  $F(x)$  es:

$$P(x[n]) = (F(x))^n \quad (2.3)$$

Si existe una forma límite para los valores más grandes de  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x[n]) = L(x) \quad (2.4)$$

esta es llamada la distribución asintótica de los valores más grandes.

Se dice que  $P(x[n])$  es una distribución estable para los valores más grandes, si existen coeficientes de atracción  $a_n$  y  $b_n > 0$  tal que:

$$(F(x))^n = F(a_n x + b_n) \quad (2.5)$$

Esta ecuación fue obtenida por Fréchet (1927) y es llamada el Postulado de Estabilidad.

Las distribuciones límites fueron obtenidas al resolver la ecuación (2.5), al considerar el valor de  $a_n = 1$  para la distribución Tipo I (Gumbel) y  $a_n \neq 1$  para las distribuciones Tipo II (Fréchet) y Tipo III (Weibull); su forma final es:

Distribución Gumbel

$$F(x) = \exp(-\exp^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.6)$$

Distribución Fréchet

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0 \quad (2.7)$$

$$F(x) = \exp(-x^{-\beta}) \quad \text{si } x \geq 0, \beta < 0 \quad (2.8)$$

Distribución Weibull

$$F(x) = 1 \quad \text{si } x \geq 0 \quad (2.9)$$

$$F(x) = \exp(-(-x)^\beta) \quad \text{si } x < 0, \beta > 0 \quad (2.10)$$

En 1955, Jenkinson obtuvo la solución general de la ecuación funcional que debe satisfacer los valores extremos (ecuación 2.5). La solución resultante, ha sido llamada la distribución "general de valores extremos" (GVE), la cual representa directamente a las distribuciones II y III. La distribución tipo I, resulta como un condición límite de la distribución general de valores extremos, cuando  $\beta \rightarrow 0$ .

Cada distribución está caracterizada por el valor que toma el parámetro de forma  $\beta$ ; específicamente:

- a) distribución tipo I (Gumbel) para  $\beta = 0$
- b) distribución tipo II (Fréchet) para  $\beta < 0$
- c) distribución tipo III (Weibull) para  $\beta > 0$

## 2.4 Génesis de la Distribución General de Valores Extremos (GVE)

Considérese  $N$  muestras, cada una de tamaño  $n$ , que han sido tomadas de la misma población. En cada muestra hay un valor máximo y el valor máximo en las  $Nn$  observaciones es el máximo de los  $N$  máximos valores tomados de muestras de tamaño  $n$ . La distribución del valor máximo en las  $Nn$  observaciones tenderá hacia la misma expresión asintótica tal y como la distribución del valor máximo en las muestras de tamaño  $n$ , siempre y cuando tal asintota exista.

Dado que una transformación lineal no cambia la forma de la distribución, la probabilidad de que el valor máximo sea menor que  $X$ , debe ser igual a la probabilidad de una función lineal de  $X$ , (Gumbel, 1958), la cual es representada por la ecuación (2.5).

Al suponer que  $F = \exp(-e^{-y(x)})$  y tomar dos veces el logaritmo natural en (2.5), se tiene que:

$$\ln(\ln n - y(x)) = -y(a_n X + b_n) \quad (2.11)$$

Si se expande (2.11) en potencias de  $(X - X_0)$ , donde  $y(X_0) = 0$ , se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(\ln n) = & -y(b_n + a_n X_0) + (X - X_0) \left\{ y'(X_0) - a_n y'(b_n + a_n X_0) \right\} + \\ & + \frac{(X - X_0)^2}{2!} \left\{ y''(X_0) - a_n^2 y''(b_n + a_n X_0) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

y dado que la ecuación (2.12) es válida para el rango de valores de  $X$ , se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$-y(b_n + a_n X_0) = \ln(\ln n) \quad (2.13)$$

$$y'(X_0) - a_n y'(b_n + a_n X_0) = 0 \quad (2.14)$$

$$y^{(t)}(X_0) - a_n^t y^{(t)}(b_n + a_n X_0) = 0 \quad (2.15)$$

donde (t) está asociada al orden de la derivada y para  $t \geq 1$ , al usar (2.13), (2.14) y (2.15):

$$\frac{y^{(t)}(b_n + a_n X_0)}{\{y'(b_n + a_n X_0)\}^t} = \frac{y^{(t)}(X_0)}{\{y'(X_0)\}^t} \quad (2.16)$$

El miembro de la derecha de la ecuación (2.16), depende sólo de t y puede escribirse como  $C_t$ . Dado que para valores que varían de n,  $(b_n + a_n X_0)$  toma todos los valores en el rango de X, tenemos que para  $t \geq 1$ , generalmente, (2.16) se transforma en:

$$y^{(t)}(X) = C_t \{y'(X)\}^t \quad (2.17)$$

que al diferenciarla con respecto a X queda:

$$y^{(t+1)}(X) = t C_2 C_t \{y'(X)\}^{t+1} \quad (2.18)$$

y la relación recursiva para  $C_t$  es:

$$C_{t+1} = t C_2 C_t \quad \text{para } t \geq 1 \quad (2.19)$$

de donde se obtiene:

$$C_t = (t-1)! C_2^{t-2} \quad (2.20)$$

de las ecuaciones (2.17) y (2.20):

$$y^{(t)}(X_0) = (t-1)! C_2^{t-2} \{y'(X_0)\}^t \quad (2.21)$$

la expansión de  $y(x)$  en potencias de  $(X-X_0)$  es:

$$y(X) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(X-X_0)^t}{t!} y^{(t)}(X_0) \quad (2.22)$$

y al sustituir  $y^{(1)}(X_0)$  como aparece en (2.21) y al hacer los cambios de variable de  $y'(X_0)$  por  $W$ ,  $CL$  por  $k$  y  $1/kW$  por  $a$ , se tiene que:

$$y(X) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^n \frac{(X - X_0)^t}{t a^t} \quad (2.23)$$

esto es:

$$y(X) = -\frac{1}{k} \ln \left( 1 - \frac{(X - X_0)}{a} \right) \quad (2.24)$$

$$(X - X_0) = a \left( 1 - e^{-ky} \right) \quad (2.25)$$

$$y'(X) = \frac{1}{k} \left( a - (X - X_0) \right) \quad (2.26)$$

y de (2.13) y (2.14) finalmente se tiene:

$$a_n = n^k \quad (2.27)$$

$$b_n = (X_0 + a)(1 - n)^k \quad (2.28)$$

La ecuación (2.5) puede ser escrita como:

$$F^k \left[ X_0 + (X - X_0) \right] = P \left[ X_0 + a(1 - n^k) + n^k(X - X_0) \right] \quad (2.29)$$

la cual de situar arbitrariamente el origen de  $X$  donde  $y = 0$ , produce finalmente la solución general a partir de (2.25):

$$X = a \left( 1 - e^{-ky} \right) \quad (2.30)$$

o bien su inversa:

$$y(X) = -\frac{1}{k} \ln \left( 1 - \frac{X}{a} \right) \quad (2.31)$$

Si en esta solución se considera la existencia de un parámetro de ubicación  $u$  y si la constante  $a$  representa el cociente del

parámetro de forma  $\beta$  sobre el parámetro de escala  $\alpha$ , se tiene que la forma final de la función de distribución de probabilidad de la distribución general de valores extremos (GVE) es:

$$F(X) = e^{-\left(1 - \left(\frac{x-u}{\alpha}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} \quad (2.32)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{x-u}{\alpha}\right)^\beta\right)^{1/\beta-1} \exp\left(-\left(1 - \left(\frac{x-u}{\alpha}\right)^\beta\right)^{1/\beta}\right) \quad (2.33)$$

donde:

- $u$  es el parámetro de ubicación
- $\alpha$  es el parámetro de escala,  $\alpha > 0$
- $\beta$  es el parámetro de forma

Las características y propiedades de las distribuciones Gumbel y GVE son de acuerdo con NERC (1975):

a. Distribución de valores extremos tipo I (Gumbel)

La función de distribución acumulada es:

$$F(X) = e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \quad (2.34)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \cdot e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \quad (2.35)$$

donde:

$u$  es el parámetro de ubicación

$\alpha$  es el parámetro de escala,  $\alpha > 0$

la moda está en  $x^{\#} = u$ , la media, varianza y el sesgo son:

$$\text{Media} = \mu = E(x) = u + C \alpha = u + 0.5772 \alpha \quad (2.36)$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = E(x - E(x))^2 = \frac{\pi^2 \alpha^2}{6} \quad (2.37)$$

$$\text{Sesgo} = g_3 = 1.14 \quad (2.38)$$

La variable reducida o estandarizada,  $y$ , está relacionada a  $x$  por:

$$y = \frac{x - u}{\alpha} \quad (2.39)$$

La función de distribución acumulada de la variable reducida es:

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad (2.40)$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-y} - e^{-y} \quad (2.41)$$

la media y varianza de la variable reducida son:

$$\mu = 0.5772 \quad (2.42)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.43)$$

#### b. Distribución general de valores extremos (GVE)

Las características y propiedades para esta distribución deben ser establecidas para cada una de sus ramas.

La relación entre la GVE y la variable reducida de valores extremos tipo I es:

$$x = u + \alpha W \quad (2.44)$$

y :

$$W = \frac{1 - e^{-\beta y}}{\beta} \quad (2.45)$$

donde W es la variable reducida general de valores extremos.

La distribución general de valores extremos es del Tipo II cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta < 0; \quad u + \alpha/\beta < x \leq \omega \quad (2.46)$$

si la variable reducida y, para la distribución de valores extremos tipo II, se escribe como:

$$y = 1 - \left( \frac{x - u}{\alpha} \right) \beta; \quad 0 \leq y \leq \omega \quad (2.47)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-y^{1/\beta}} \quad (2.48)$$

y :

$$g(y) = - \frac{y^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-y^{1/\beta}} \quad (2.49)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = \Gamma(1 + \beta) \quad (2.50)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (2.51)$$

donde  $\Gamma(x)$  representa la función gamma completa.

El sesgo correspondiente es:

$$g_s = \frac{\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)} \beta^{3/2} \quad (2.52)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y^* = (0.69315)^{\beta} \quad (2.53)$$

$$\text{moda} = y^{\#} = (1 - \beta)^{\beta} \quad (2.54)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = \Gamma(1 + r\beta), \quad \beta < 0 \quad (2.55)$$

La distribución general de valores extremos es del Tipo III cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad - \leq x \leq u + \alpha/\beta \quad (2.56)$$

si la variable reducida  $y$ , para la distribución de valores extremos tipo III, se escribe como:

$$-y = 1 - \left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\beta; \quad - \leq y \leq 0 \quad (2.57)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (2.58)$$

y:

$$g(y) = -\frac{(-y)^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (2.59)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = -\Gamma(1 + \beta) \quad (2.60)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (2.61)$$

El sesgo correspondiente es:

$$g_3 = \frac{-\Gamma(1+3\beta) + 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) - 2\Gamma^3(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)} \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.62)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y_m = - (0.69315)^{\beta} \quad (2.63)$$

$$\text{moda} = y^{\#} = - (1 - \beta)^{\beta} \quad (2.64)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = (-1)^r \Gamma(1 + r\beta), \quad \beta > 0 \quad (2.65)$$

c. Distribución general de valores extremos (GVE) para mínimos

Las características y propiedades para esta distribución deben ser establecidas para cada una de sus ramas.

La relación entre la GVE y la variable reducida de valores extremos tipo I, ambas para mínimos, es:

$$x = \omega + \alpha W \quad (2.66)$$

y :

$$W = \frac{e^{\beta y} - 1}{\beta} \quad (2.67)$$

donde W es la variable reducida general de valores extremos, para mínimos.

La distribución general de valores extremos para mínimos es del Tipo II cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta < 0; \quad -\infty < x \leq \omega - \alpha/\beta \quad (2.68)$$

si se define a la variable reducida y, para la distribución de valores extremos tipo II, como:

$$-y = 1 - \left( \frac{\omega - x}{\alpha} \right) \beta; \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.69)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (2.70)$$

y :

$$g(y) = - \frac{(-y)^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (2.71)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = -\Gamma(1 + \beta) \quad (2.72)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (2.73)$$

donde  $\Gamma(\theta)$  representa la función gamma completa.

El sesgo correspondiente es:

$$g_s = \frac{-\Gamma(1+3\beta) + 3\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) - 2\Gamma(1+\beta)^2}{\left[\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)\right]^{3/2}} \quad (2.74)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y^* = - (0.89315) \beta \quad (2.75)$$

$$\text{moda} = y^\# = - (1 - \beta) \beta \quad (2.76)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = (-1)^r \Gamma(1+r\beta), \quad \beta < 0 \quad (2.77)$$

La distribución general de valores extremos es del Tipo III cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \omega - \alpha/\beta \leq x < \omega \quad (2.78)$$

si se define a la variable reducida y, para la distribución de valores extremos tipo III para mínimos, como:

$$y = 1 - \left(\frac{x - u}{\alpha}\right) \beta; \quad 0 \leq y < \omega \quad (2.79)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-y^{1/\beta}} \quad (2.80)$$

$$g(y) = \frac{y^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-y^{1/\beta}} \quad (2.81)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = \Gamma(1 + \beta) \quad (2.82)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (2.83)$$

El sesgo correspondiente es:

$$g^* = \frac{\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) + 2\Gamma^2(1+\beta)}{[\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta)]^{3/2}} \quad (2.84)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y^* = (0.89318)^\beta \quad (2.85)$$

$$\text{moda} = y^\# = (1 - \beta)^\beta \quad (2.86)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = \Gamma(1+r\beta), \quad \beta > 0 \quad (2.87)$$

## CAPITULO 3

### MODELOS BIVARIADOS DE VALORES EXTREMOS

#### 3.1 Introducción

El uso de la probabilidad y la estadística en hidrología, debe proveer los modelos matemáticos, llamados funciones de distribución de probabilidad, y la forma para estimar sus parámetros, llamada estimación estadística, respectivamente, a fin de hacer el mejor uso de la información de que se disponga, para los fines de diseño y operación de las estructuras hidráulicas.

Debido a que la mayoría de los datos hidrológicos forman muestras finitas de una población, los parámetros y distribuciones de estas variables no pueden ser determinados exactamente. Una forma de mejorar su estimación, es mediante la construcción de modelos regionales, los cuales consideran la información proveniente de otras fuentes que están correlacionadas con el fenómeno en estudio.

Como ya se ha mencionado, el objetivo de este trabajo es el de proporcionar un medio que mejore el análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos. Con este propósito, se desarrolla la función bivariada de valores extremos, cuyas características y propiedades se muestran en la sección 3.2 .

En general, la construcción de un modelo matemático requiere de cierta metodología, la cual se presenta en la sección 3.3 .

Así mismo, en la sección 3.4, se incluyen las características y propiedades del modelo bivariado.

### 3.2 Génesis, Características y Propiedades de las Distribuciones Bivariadas de Valores Extremos

Las distribuciones univariadas han sido desarrolladas y aplicadas ampliamente en el análisis de frecuencias en hidrología; poca atención se le ha dado al estudio de la aproximación multivariada.

Los artículos pioneros de Finkelstein (1953), Gumbel (1958) y Tiago de Oliveira (1958), dieron los fundamentos teóricos para el análisis de las distribuciones bivariadas de valores extremos.

Una distribución asintótica bivariada se caracteriza por las siguientes propiedades:

- a) Las distribuciones marginales son asintóticas extremas,
- b) Es estable (cumple el postulado de estabilidad),
- c) Posee una función de densidad, y
- d) Se elimina el caso trivial donde la distribución multivariada es el producto de las distribuciones marginales extremas.

Sean  $(X_i, Y_i)$  pares de variables aleatorias independientes, cada una con la misma distribución conjunta  $F(x,y)$ . Puesto que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, es posible encontrar transformaciones lineales:

$$X_n = a_n X_{\max} + b_n \quad (3.1)$$

tal que  $X_n$  tenga una distribución límite ( para  $n \rightarrow \infty$  ) que sea uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos. Habrá también una transformación:

$$Y_n = c_n Y_{\max} + d_n \quad (3.2)$$

con propiedades similares.

La función de distribución conjunta de  $(\max X_i, \max Y_i)$  es:

$$\Pr \left\{ \max X_i \leq x, \max Y_i \leq y \right\} = F^n(x, y) \quad (3.3)$$

Al denotar la función de distribución acumulada bivariada por  $F(x, y)$ , se tiene:

$$F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n x + b_n, c_n y + d_n] \quad (3.4)$$

Esta ecuación es una extensión de la ecuaciones (2.4) y (2.5)

La distribución conjunta límite de  $X_n$  y  $Y_n$  (para  $n \rightarrow \infty$ ) es una distribución bivariada de valores extremos

Entre las distribuciones bivariadas se encuentran los llamados modelos diferenciables (aquellos que cuentan con una función de densidad) y los no diferenciables. Entre los de la última clase, se encuentran (Tiago de Oliveira, 1982): el modelo biextremo, el modelo Gumbel y el modelo Natural. Estos modelos no cuentan con una función de densidad de probabilidad explícita, lo cual hace que la estimación de parámetros sea muy complicada.

Entre los modelos diferenciables, se tienen: el modelo logístico y el modelo mezclado. Tales nombres les fueron asignados debido a que, en el primer caso, la diferencia de las variables reducidas, cuando ambas marginales son distribuciones Gumbel, tiene una distribución logística estándar. En el segundo caso, el modelo tiene una función de dependencia que parte de una mezcla de las funciones marginales para los casos de independencía y dependencia, cuando éstas son distribuciones Gumbel.

( i ) El modelo Logístico

Este modelo tiene la forma:

$$F(x,y,m) = \exp \left\{ - \left[ (-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m \right]^{1/m} \right\} \quad ( 3.5 )$$

donde:

m es el parámetro de asociación

F(u) es la función de distribución marginal de u

$$m \geq 1; \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Para m = 1, la función de distribución bivariada se reduce al producto de sus marginales :

$$F(x,y,m) = F(x) F(y) \quad ( 3.6 )$$

el cual representa el caso de independencia.

( ii ) El modelo mezclado

Este modelo es de la forma:

$$F(x,y,\alpha) = F(x) F(y) \exp \left\{ \alpha \left[ \frac{1}{-\ln F(x)} + \frac{1}{-\ln F(y)} \right]^{-1} \right\} \quad ( 3.7 )$$

donde:

$\alpha$  es el parámetro de asociación

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

para  $\alpha = 0$ , se tiene el caso de independencia, similar a la ecuación (3.6).

Dado que el modelo logístico bivariado tiene mayor versatilidad que el modelo mezclado ( amplios rangos del coeficiente de correlación y del índice de dependencia, los cuales permiten alternativas más allá del caso de independencia ), es

aconsejable ( Raynal, 1985 ) su aplicación a la solución de problemas de análisis de frecuencias en hidrología.

Gumbel (1962) mostró seis posibles funciones de distribución bivariada, mediante el empleo de las tres asíntotas, como funciones marginales dentro del modelo logístico. Raynal (1985) redujo las posibles combinaciones a tres, al utilizar a la distribución general de valores extremos como función marginal. A estas combinaciones, Raynal (1985) les ha asignado los nombres siguientes :

- a) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 11 (VEB11) o Distribución Bigumbel.
- b) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 12 (VEB12) o Distribución Gumbel-GVE.
- c) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 22 (VEB22) o Distribución Bigeneral de Valores Extremos.

Además propone el empleo de las siguientes funciones de distribución acumulada y funciones de densidad, para las tres combinaciones de funciones marginales del modelo logístico bivariado:

a. DISTRIBUCION VEB11

$$F(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \exp \left\{ - \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + e^{-m \frac{y - u_2}{\alpha_2}} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.8)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} e^{-m \frac{y - u_2}{\alpha_2}}$$

$$\exp \left\{ - \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + e^{-m \frac{y - u_2}{\alpha_2}} \right]^{1/m} \right\}$$

$$\left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + e^{-m \frac{y - u_2}{\alpha_2}} \right]^{1/m - 2}$$

$$\left\{ m - 1 + \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + e^{-m \frac{y - u_2}{\alpha_2}} \right]^{1/m} \right\}$$

( 3.9 )

b. DISTRUBUCION VEB12

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

( 3.10 )

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}}$$

$$1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2 - 1} \exp \left\{ - \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

$$\left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2}$$

$$\left\{ m - 1 + \left[ e^{-m \frac{x - u_1}{\alpha_1}} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.11)$$

c. DISTRIBUCION VEB22

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[ 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1^{m/\beta_1} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.12)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1^{m/\beta_1 - 1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2 - 1} \right] \exp \left\{ - \left[ 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1^{m/\beta_1} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \left[ 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1^{m/\beta_1} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2}$$

$$\left\{ (m-1) + \left[ 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1^{m/\beta_1} + 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.13)$$

d) Distribución BEV22 para mínimos

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (3.14)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1 - 1} \\ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2 - 1} \\ \exp \left\{ - \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \\ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2} \\ \left\{ (m-1) + \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right\}^{1/m} \right\} \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.14) y (3.15), representan a las funciones de distribución y de densidad de probabilidad correspondientes a mínimos, las cuales serán usadas en capítulos posteriores, para proponer el análisis bivariado de sequías, al usar la distribución bivariada de valores extremos contenida en dichas ecuaciones.

### 3.3 Construcción del Modelo Matemático

Los modelos estadísticos facilitan la predicción, en términos probabilísticos, de las ocurrencias futuras de experimentos u observaciones, y son considerados como la forma más condensada de información acerca de las variables aleatorias en estudio.

El proceso para resolver problemas estadísticos prácticos, requiere de las siguientes etapas:

- 1a. Planteamiento del problema
- 2a. Selección del modelo matemático
- 3a. Estimación de los parámetros del modelo
- 4a. Verificación de la confiabilidad del modelo
- 5a. Derivación de conclusiones proporcionadas por el modelo

De acuerdo con la problemática planteada en este trabajo, su solución requerirá de la siguiente metodología:

#### 3.3.1 Selección del modelo matemático

En hidrología es raro contar con series lo suficientemente grandes para garantizar que los parámetros de la distribución por aplicar, pueda ser estimada de la manera más eficiente.

El estudio de los gastos mínimos anuales ha sido analizado, entre otros, a través del uso de distribuciones univariadas de valores extremos; como una forma de reducir la variabilidad en la estimación de parámetros, se proponen las distribuciones bivariadas de valores extremos. De acuerdo con

los resultados obtenidos en el campo de las distribuciones multivariadas de valores extremos, se concluye que de las cinco distribuciones bivariadas de valores extremos conocidas, sólo dos tienen función de densidad explícita, lo que representa una forma adecuada para obtener sus parámetros. De estos modelos, el logístico bivariado ha mostrado ser la mejor alternativa, ya que puede reducir la variabilidad de los parámetros del orden de un 15%, comparativamente con los resultados obtenidos al aplicar las distribuciones univariadas de valores extremos. De acuerdo con lo anterior, el modelo que se pretende desarrollar, es del tipo logístico bivariado de valores extremos para mínimos.

Las distribuciones marginales de la distribución bivariada de valores extremos, serán del tipo de general de valores extremos.

### 3.3.2 Estimación de parámetros del modelo logístico bivariado

Las funciones de distribución de probabilidad contienen parámetros los cuales deben ser estimados de la muestra de datos. Estos parámetros deben cumplir con ciertas propiedades: sesgo nulo, consistencia, eficiencia y suficiencia; de las cuales, la más importante es la eficiencia.

En hidrología, son usados varios métodos de estimación de parámetros, los cuales pueden ser ordenados de menor a mayor eficiencia como:

- a. Método gráfico
- b. Método de mínimos cuadrados
- c. Método de los momentos
- d. Método de máxima verosimilitud

De acuerdo con esto, el método seleccionado para la estimación de parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos, será el de máxima verosimilitud; el cual será estructurado de manera tal, que pueda cubrir todos los posibles arreglos de las muestras analizadas.

El método de máxima verosimilitud, selecciona el valor de los parámetros  $\theta$ , para los cuales la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias (función de verosimilitud) se maximiza.

La forma de solución del método es:

- a. Obtener la función logarítmica de verosimilitud asociada a la función de densidad estudiada.
- b. Obtener las derivadas parciales de la función logarítmica de verosimilitud con respecto a cada uno de los parámetros del modelo.
- c. Cada una de las derivadas resultantes son igualadas a cero; con esto, se tiene un sistema de tantas ecuaciones como parámetros existan.
- d. Resolver el sistema resultante mediante procesos iterativos.

De acuerdo con el tipo de funciones de verosimilitud resultantes, para las distribuciones bivariadas de valores extremos, el paso d, representa una forma muy complicada de solución. En lugar de ésta, el problema será resuelto a través de un algoritmo de optimación no lineal multivariado restringido, el cual ya ha dado buenos resultados en su aplicación al análisis de series de tiempo hidrológicas.

### 3.3.3 Confiabilidad en la estimación de parámetros

Con el fin de establecer si hay o no mejoras en la fase de estimación de parámetros, se requiere determinar la varianza de los parámetros a través del cálculo de su matriz de varianza-covarianza. Sus elementos son obtenidos mediante la expresión:

$$V_{rs} = \left[ - E \left( \frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \right]^{-1} \quad (3.16)$$

donde:

$E [ . ]$  = valor esperado de [ . ]

$V_{rs}$  = rs-ésimo elemento de la matriz de varianza-covarianza

$\text{Ln } L$  = Función de verosimilitud logarítmica

$\theta_i$  = i-ésimo parámetro

La complejidad de las funciones de verosimilitud logarítmica, prevé el uso de esquemas de integración numérica unidimensional y bidimensional, para el cálculo de los valores esperados.

Una vez que las matrices de varianza-covarianza han sido obtenidas, el contenido de información relativa puede ser calculado para mostrar si existe mejora en la estimación de parámetros:

$$I = \frac{\text{Var } \hat{\theta}_u}{\text{Var } \hat{\theta}_B} \quad (3.17)$$

donde:

$I$  = Contenido de información relativa. La mejora es alcanzada para  $I > 1$ .

$\text{Var } \hat{\theta}_u$  = Varianza del parámetro estimado a través de

la aproximación univariada.

$\text{Var } \hat{\theta}_B =$  Varianza del parámetro estimado a través de  
la aproximación bivariada.

Con el fin de mostrar en cuáles casos tales mejoras son obtenidas, se requiere obtener la matriz de varianza-covarianza para la alternativa de la distribución bivariada de valores extremos.

Como los resultados anteriores están basados en resultados asintóticos ( $n \rightarrow \infty$ ), se requiere determinar si éstos son aplicables a muestras pequeñas. Con tal propósito, se utilizarán técnicas de muestreo distribucional. En general, dichas técnicas requieren:

- a. Generar muestras bivariadas de tamaño específico ( a través de distribuciones condicionales )
- b. Obtener para cada una de las muestras generadas, el conjunto de parámetros de la distribución.
- c. Calcular la varianza de los parámetros de las muestras simuladas.
- d. Comparar las varianzas asintóticas de los parámetros, con sus varianzas simuladas para, determinar un tamaño de muestra mínimo.

Este procedimiento se realizará para la opción de la distribución bivariada de valores extremos para mínimos.

### 3.3.4 Aplicación al análisis de sequías

Las distribuciones bivariadas de valores extremos se aplicarán al análisis de sequías en varias estaciones de aforos,

ubicadas en la República Mexicana. La secuencia de análisis será la siguiente:

- a. Seleccionar, de acuerdo con el criterio de error estándar de ajuste, la mejor distribución para una muestra de datos. Los modelos en competencia serán las distribuciones univariadas y bivariadas de valores extremos. Esta etapa se hace con el fin de determinar en qué medida las muestras son mejor ajustadas, por cuáles de estos modelos.
- b. Obtener los gastos de diseño y sus correspondientes límites de confianza, para periodos de retorno específicos. En esta etapa se requiere determinar si la aplicación de las distribuciones bivariadas reducen la variabilidad de los gastos de diseño. Para esto, se requiere comparar las varianzas asintóticas de los eventos diseño, con sus correspondientes varianzas simuladas. Para obtener estas últimas, nuevamente se requiere del uso de técnicas de muestreo distribucional.
- c. Comparar los resultados obtenidos al aplicar las distribuciones bivariadas, con aquéllos proporcionados al aplicar otras distribuciones univariadas. Las distribuciones consideradas en este análisis serán:

Distribución Lognormal de 3 parámetros

Distribución de Valores Extremos tipos I y III

Distribución General de Valores Extremos

Los métodos de estimación de parámetros de estas distribuciones, son el de momentos y/o el de máxima verosimilitud. Con esto, se tendrán varias opciones univariadas, las cuales serán comparadas con la opción bivariada. El criterio de

selección del mejor ajuste será el del error estándar.

La aplicación y comparación de las distribuciones bivariadas con las univariadas, darán el horizonte de aplicación de estas distribuciones.

### 3.4 Características y Propiedades del Modelo Bivariado

Sean  $(X_i, Y_i)$  parejas variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución conjunta  $F(x, y)$ . Puesto que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, es posible encontrar transformaciones lineales:

$$X_n = a_n X_{\max} + b_n \quad (3.18)$$

tal que  $X_n$  tenga una distribución límite ( para  $n \rightarrow \infty$  ), que sea uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos. Habrá también una transformación:

$$Y_n = c_n Y_{\max} + d_n \quad (3.19)$$

con propiedades similares.

La función de distribución conjunta de  $(\max X_i, \max Y_i)$  es:

$$\Pr \left\{ \max X_i \leq x, \max Y_i \leq y \right\} = F^n(x, y) \quad (3.20)$$

Si denotamos la función de distribución acumulada bivariada por  $F(x, y)$ , se tiene:

$$F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [ a_n x + b_n, c_n y + d_n ] \quad (3.21)$$

La distribución conjunta límite de  $X_n$  e  $Y_n$  (para  $n \rightarrow \infty$ ), es una distribución bivariada de valores extremos, la cual tiene las mismas propiedades básicas presentadas en la Sección 2.4. Para la distribución logística, la distribución límite tiene la forma:

$$[-\ln FC(x,y)]^m = [-\ln FC(x)]^m + [-\ln FC(y)]^m \quad (3.22)$$

donde:

$m$  es el parámetro de asociación  
 $FC(u)$  es la función marginal de  $u$

El modelo debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$FC(x_1) \dots FC(x_n) \leq FC(x_1, \dots, x_n) \leq \min FC(x_1), \dots, FC(x_n) \quad (3.23)$$

$$\left\{ \sum_{i \neq j} FC(x_i, x_j) \right\}^{\frac{1}{2(n-1)}} \leq FC(x_1, \dots, x_n) \leq \left[ \sum_{i \neq j} FC(x_i, x_j) \right]^{1/2} \left[ \sum_i FC(x_i) \right]^{n-2} \quad (3.24)$$

El modelo bivariado se desarrollará a partir de la ecuación (3.22). Al tomar como funciones marginales la distribución general de valores extremos para mínimos, se tendrá la distribución bivariada general de valores extremos (BGVE).

Las funciones de distribución de probabilidad y de densidad, para la distribución de valores extremos bivariada propuesta, son las contenidas en las ecuaciones (3.14) y (3.15), previamente mostradas.

## CAPITULO 4

### ESTIMACION DE PARAMETROS

#### 4.1 Introducción

La parte más importante, desde el punto de vista ingenieril, del uso de las distribuciones de probabilidad para modelar eventos extremos en hidrología, es la estimación de los parámetros de la función de distribución, que producirán los gastos de diseño y sus correspondientes límites de confianza.

Existen varios métodos de estimación de parámetros, entre los que se encuentran: gráficos, mínimos cuadrados, momentos (de probabilidad pesada), máxima entropía o máxima verosimilitud. La elección de cualquiera de ellos depende, principalmente, de las características de la distribución y de los instrumentos computacionales a que se tenga acceso.

La descripción del método seleccionado para estimar los parámetros de las distribuciones bivariadas, que es el de máxima verosimilitud, se muestra en la sección 4.3, donde además se presentan las funciones logarítmicas de verosimilitud para las distribuciones bivariadas de valores extremos para mínimos.

En la sección 4.4, se incluye la función de verosimilitud logarítmica por optimizar, para la distribución bivariada de valores extremos que se propone.

#### 4.2 Propiedades de los Parámetros Estimados

Cuando una función de distribución de probabilidad se utiliza para describir el comportamiento de cierta muestra de datos, se requiere determinar el valor de sus parámetros, los cuales deben

cumplir con las siguientes propiedades:

a. Sesgo nulo

Un estimador  $\hat{\theta}$  de un parámetro poblacional  $\theta$  se dice que tiene sesgo nulo si  $EC(\hat{\theta}) = \theta$ . El sesgo es obtenido por  $EC(\hat{\theta}) - \theta$

b. Consistencia

Un estimador  $\hat{\theta}$  de un parámetro  $\theta$  se dice consistente si  $|\hat{\theta} - \theta|$  se aproxima a cero, conforme el tamaño de la muestra tiende a infinito

c. Eficiencia

Un estimador  $\hat{\theta}$  se dice el más eficiente para  $\theta$ , si tiene sesgo nulo y su varianza es al menos tan pequeña, como cualquier otro estimador no sesgado para  $\theta$

d. Suficiencia

$\hat{\theta}$  se considera un estimador suficiente para  $\theta$ , si  $\hat{\theta}$  usa toda la información relevante contenida en la muestra.

Hay muchos métodos para determinar los parámetros de una función de distribución de probabilidad a través de la muestra de datos.

Como se mencionó, el método seleccionado para la estimación de parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos, será el de máxima verosimilitud.

El método es aplicable a funciones de densidad complicadas y produce estimadores que cumplen con las propiedades ya mencionadas.

Estas características no sólo son importantes en la fase de obtención de parámetros, sino también, para la etapa de

determinación de la confiabilidad de estimadores.

#### 4.3 Método de Máxima Verosimilitud para Funciones de Distribución de Probabilidad Bivariadas

La función de verosimilitud de  $n$  variables aleatorias está definida como la densidad conjunta de esas  $n$  variables, y es una función de los parámetros.

Si  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  es una muestra aleatoria de una densidad bivariada, la correspondiente función de verosimilitud es:

$$L(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(X_i, Y_i, \underline{\theta}) \quad (4.1)$$

donde:

$f(\cdot)$  es la función de densidad bivariada

$\underline{\theta}$  es el conjunto de parámetros

Dado que las muestras que se analizan no tienen igual longitud de registro, es necesario tener una formulación suficientemente flexible para cubrir todos los posibles arreglos de los datos. Tal formulación, está basada en la generalización hecha por Anderson (1957). La formulación propuesta puede manejar, por ejemplo, los siguientes arreglos muestrales con longitudes diferentes de registro, (Raynal, 1985):

$$1) \quad \begin{array}{l} x_1, \dots, x_{n_2} \\ y_1, \dots, y_{n_2}, y_{n_2+1}, \dots, y_{n_2+n_3} \end{array} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2} \\
 & y_1, \dots, y_{n_1}, y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad & x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2} \\
 & y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}, \dots, y_{n_1+n_2+n_3}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad & x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2} \\
 & y_1, \dots, y_{n_1}, y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}, \dots, y_{n_1+n_2+n_3}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La correspondiente función de verosimilitud para los tipos de arreglos mostrados anteriormente es:

$$\begin{aligned}
 L(x, y, \theta) = & \left[ \prod_{i=1}^{n_1} f(p_i, \theta_1) \right]^{I_1} \left[ \prod_{i=1}^{n_2} f(x_i, y_i, \theta_2) \right]^{I_2} \\
 & \left[ \prod_{i=1}^{n_3} f(r_i, \theta_3) \right]^{I_3}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde:

- $L(\cdot)$  es la función de verosimilitud de  $(\cdot)$
- $n_1$  es la longitud del registro univariado, antes del periodo común  $n_2$ .
- $n_2$  es la longitud del registro con relación bivariada, en el periodo común  $n_2$ .
- $n_3$  es la longitud del registro univariado, después del periodo común  $n_2$ .
- $p$  es la variable del registro univariado, antes del

registro común.

$(x, y)$  son las variables relacionadas en forma bivariada, durante el período común de registro.

$r$  es la variable del registro univariado, después del registro común.

$I_i$  es un número indicador con valor :

$$I_i = 1 \quad \text{si} \quad n_i > 0 \quad ; \quad I_i = 0 \quad \text{si} \quad n_i = 0$$

$$\underline{\theta}_i \quad \text{vector de parámetros} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

Dada la propiedad de que el máximo de una función y de su logaritmo ocurren en el mismo punto y debido al hecho que las expresiones que se obtienen al sacar el logaritmo de la ecuación (4.6), son mucho más fáciles de manipular que aquéllas producidas por tal ecuación, la función de verosimilitud logarítmica se utilizará, en lugar de su versión original.

La ecuación (4.6) se transforma en:

$$\begin{aligned} LL(x, y, \underline{\theta}) = & I_1 \left[ \sum_{i=1}^{n_1} \text{Ln } f(p_i, \underline{\theta}_1) \right] + I_2 \left[ \sum_{i=1}^{n_2} \text{Ln } f(x_i, y_i, \underline{\theta}_2) \right] + \\ & + I_3 \left[ \sum_{i=1}^n \text{Ln } f(r_i, \underline{\theta}_3) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos, son aquéllos para los cuales la ecuación (4.7) se maximiza. Para obtener dichos estimadores, se requiere de un procedimiento de optimación del tipo de búsqueda directa, ya que el método indirecto

proporcionado por el cálculo diferencial no puede llegar a soluciones analíticas, debido a la complejidad de las funciones asociadas a las densidades de probabilidad bivariadas.

Dadas las características de la función a optimizar, el procedimiento seleccionado es el algoritmo de optimación no lineal multivariado restringido de Rosenbrock (Rosenbrock 1980; Kuester y Mize, 1973 ), el cual ha demostrado ser, (Raynal, 1985), mucho más rápido y menos sujeto a complicaciones, que algunos otros que pudieran ser considerados para el mismo fin.

#### 4.4 Función Logarítmica de Verosimilitud de la Distribución Bivariada de Valores Extremos

A continuación, se presentan la función de verosimilitud logarítmica a ser optimizadas, para la distribución bivariada de valores extremos propuesta.

$$\begin{aligned}
 LLC(x, y, \omega_1, \alpha_1, \beta_1, \omega_2, \alpha_2, \beta_2, m) = I_1 \left\{ -n_1 \ln \alpha_p + \right. \\
 \left. + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ - \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - p_i}{\alpha_p} \right)^{\beta_p} \right)^{1/\beta_p} + \ln \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - p_i}{\alpha_p} \right)^{\beta_p} \right)^{1/\beta_p - 1} \right] \right\} + I_2 \\
 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ -n_2 (\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2) + \ln \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} + \ln \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2 - 1} \right. \\
 \left. + \ln \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Ln} \left[ m - 1 + \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right] \\
& - \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \Big\} \\
& + I_3 \left\{ - n_3 \text{Ln } \alpha_r + \sum_{i=1}^{n_3} \left[ - \left( 1 - \left( \frac{\omega_r - r_i}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{\omega_r - r_i}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{1/\beta_r - 1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

( 4.8 )

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos, se desarrolló el programa de cómputo "MALEMIN". Este algoritmo será utilizado en los capítulos de confiabilidad de estimadores y de aplicaciones en hidrología.

## CAPITULO 5

### CONFIABILIDAD EN LA ESTIMACION DE PARAMETROS

#### 5.1 Introducción

Los parámetros de las funciones de distribución de probabilidad de gastos mínimos anuales, en una estación cualquiera, pueden ser estimados al utilizar los registros históricos en esa estación o al usar, en adición, los registros de estaciones vecinas. La pregunta que surge es: ¿Cuáles estimados son más confiables?

La confiabilidad del estimador de un parámetro, si el parámetro poblacional es desconocido, es el grado de confianza de que tal estimador sea una representación cercana del parámetro poblacional. La confiabilidad puede ser medida a través del sesgo, el error medio cuadrático o de la varianza; es decir, el utilizar las propiedades estadísticas de los estimadores (sección 5.2).

El indicador de confiabilidad empleado en este trabajo, es el contenido de información relativa, y es definido como: la relación de las varianzas de dos estimadores del mismo parámetro. En este caso, el contenido de información es la relación de la varianza univariada del parámetro en consideración, sobre su varianza bivariada.

Con el fin de evaluar los contenidos de información relativa, para cada uno de los parámetros involucrados, es necesario calcular el valor de los elementos de la matriz de varianza-covarianza de los parámetros para los casos univariado y

bivariado.

Debido a que la varianza exacta de los parámetros de las distribuciones univariadas y bivariadas de valores extremos es desconocida, se obtendrán las varianzas asintóticas con el fin de cuantificar el contenido de información relativa, de cualquier parámetro  $\theta$ .

Las matrices de varianza-covarianza univariadas para la distribución general de valores extremos, que es presentada en la sección 5.3, han sido obtenidas por Kimball (1949) y Jenkinson (1969), respectivamente. Las matrices asintóticas bivariadas se calculan mediante el algoritmo numérico desarrollado en la sección 5.4.

Los contenidos de información relativa de los parámetros, sección 5.5, se obtienen numéricamente mediante la aplicación del programa de cómputo "VACONIN".

Dado que los resultados asintóticos bivariados son aplicables a grandes muestras, se debe verificar si estos pueden ser usados en muestras pequeñas. Para tal efecto, se requiere el empleo de técnicas de muestreo distribucional. El proceso de simulación, para las distribuciones bivariadas de valores extremos, se llevó a cabo mediante la aplicación del algoritmo desarrollado en la sección 5.8.

## 5.2 Propiedades Asintóticas de los Estimadores de Máxima Verosimilitud

Los parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud, tienen propiedades óptimas en muestras grandes. Una propiedad de este tipo, es aquella que está definida en términos de los tamaños de muestra que tienden a infinito.

Tales propiedades pueden resumirse en:

Si  $\hat{\theta}$  es el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ , entonces:

- a.  $\hat{\theta}$  está distribuida en forma asintóticamente normal, con media 0 y varianza igual a la inversa de la matriz de información de Fisher:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \cong \frac{1}{n} E_{\theta} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } f(X; \theta) \right]^2 \right\}^{-1} \quad (5.1)$$

- b. La secuencia de estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ , es la mejor asintóticamente; esto es, para grandes tamaños de muestra, otros estimadores de  $\theta$  pueden ser sólo tan buenos como los estimadores de máxima verosimilitud, pero no mejores (Mood et al, 1974).

La primera propiedad puede ser extendida al caso de muchos parámetros  $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$  y muchas variables en  $X_1, \dots, X_k$ , donde:  $i$  es el número de parámetros;  $k$  es el número de variables, y cada variable tiene el tamaño de muestra  $n$ . En este caso, el vector de estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  está distribuido en forma normal multivariada, con media  $\theta$  y matriz de varianza-covarianza igual a la inversa de la matriz de información de Fisher:

$$V \cong \frac{1}{n} \left\{ E \left[ - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_j} \right] \right\}^{-1} \quad (5.2)$$

o bien

$$V \cong \frac{1}{n} \left\{ E \left[ \frac{\partial \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_j} \right] \right\}^{-1} \quad (5.3)$$

### 5.3 Varianzas Asintóticas Univariadas

La matriz de varianza-covarianza asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución general de valores extremos para mínimos es, (Raynal y Douriet, 1987c):

$$V = \begin{bmatrix} \text{Var}_\alpha(\hat{\omega}) & \text{Cov}_\alpha(\hat{\omega}, \hat{\alpha}) & \text{Cov}_\alpha(\hat{\omega}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}_\alpha(\hat{\omega}, \hat{\alpha}) & \text{Var}_\alpha(\hat{\alpha}) & \text{Cov}_\alpha(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}_\alpha(\hat{\omega}, \hat{\beta}) & \text{Cov}_\alpha(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{Var}_\alpha(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \alpha^2 b & \alpha^2 h & \alpha f \\ \alpha^2 h & \alpha^2 a & \alpha g \\ \alpha f & \alpha g & c \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde:

$\hat{\omega}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de ubicación

$\hat{\alpha}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de escala

$\hat{\beta}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de forma

a, b, c, f, g, h son coeficientes que dependen del parámetro de forma

Las varianzas asintóticas son:

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\omega}) = b \frac{\alpha^2}{N}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}) = a \frac{\alpha^2}{N}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\beta}) = \frac{c}{N} \quad (5.5)$$

Los coeficientes de la matriz, fueron obtenidos por Raynal et al (1993), los cuales son presentados en la Tabla S.1.

#### 5.4 Varianzas Asintóticas Bivariadas

Cada elemento de la matriz de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros, para la función bivariada de valores extremos propuesta, se obtiene a partir de la ecuaciones (4.6), (4.7) y (5.3), de la forma siguiente:

$$V_{jk} = \frac{1}{n_2} \left\{ -I_1 \frac{n_1}{n_2} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(p, \theta_1)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] - I_2 E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } \tilde{f}(x, y, \theta_2)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] \right.$$

$$\left. - I_3 \frac{n_3}{n_2} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(r, \theta_3)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] \right\}^{-1}$$

(5.6)

Tabla S.1 Coeficientes de la matriz de Varianza-Covarianza de la distribución univariada general de valores extremos para mínimos.

$\beta$	a	b	c	f	g	h
-0.7	0.2889	2.0586	0.4998	0.5909	-0.2948	-0.0313
-0.6	0.1921	1.9434	0.1788	0.2708	-0.0827	0.2879
-0.5	0.2122	1.9186	0.1585	0.2855	-0.0738	0.2988
-0.4	0.2128	1.9130	0.1294	0.2700	-0.0392	0.3148
-0.3	0.2243	1.8983	0.1096	0.2851	-0.0112	0.3327
-0.2	0.2337	1.8463	0.0881	0.2460	0.0129	0.3271
-0.1	0.2385	1.7554	0.0668	0.2129	0.0343	0.3019
0.0	0.2065	4.2553*	0.3790	1.1039*	0.0834	0.3209
0.1	0.8084	1.2274	0.4015	0.2424	0.1851	-0.2224
0.2	0.8133	1.2243	0.4493	-0.2893	0.2529	-0.1004
0.3	0.8018	1.2025	0.4035	-0.2517	0.2895	0.0314
0.4	0.8075	1.1844	0.3938	-0.2558	0.2885	0.1411
0.5	0.8898	1.1112	0.3935	-0.2248	0.3234	0.2575
0.6	0.9933	1.1101	0.8183	-0.4028	0.8768	0.1829

Si se utiliza la identidad siguiente ( Kendall y Stuart, 1979):

$$E \left[ - \frac{\partial^2 LL}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] = E \left[ \frac{\partial LL}{\partial \theta_j} \frac{\partial LL}{\partial \theta_k} \right] \quad (5.7)$$

Los elementos de la matriz de varianza-covarianza para cada alternativa serán calculados como:

$$V_{jk} = \frac{1}{n_2} \left\{ I_1 \frac{n_1}{n_2} E \left[ \frac{\partial \ln f(p, \theta_1)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln f(p, \theta_1)}{\partial \theta_k} \right] + I_2 E \left[ \frac{\partial \ln f(x, y, \theta_2)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln f(x, y, \theta_2)}{\partial \theta_k} \right] \right\}$$

$$+ I_3 \frac{n_3}{n_2} E \left[ \left. \begin{array}{c} \frac{\partial \text{Ln } f(r, \underline{\theta}_3)}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial \text{Ln } f(r, \underline{\theta}_3)}{\partial \theta_k} \end{array} \right] \right\}^{-1} \quad (5.8)$$

Las derivadas parciales de primer orden de las funciones de verosimilitud logarítmica, con respecto a cada parámetro, para la distribución bivariada de valores extremos propuesta, aparecen en el Apéndice A.

Para obtener las varianzas asintóticas, se utilizará el esquema de integración numérica bidimensional de Gauss-Legendre de 16 puntos (Stroud, 1988, 1971); así como, el algoritmo de integración por intervalos de O'hara y Smith (O'hara y Smith, 1980).

La matriz asintótica de varianza-covarianza, de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de esta distribución, tiene la forma de la ecuación (5.9).

$$V_3 \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{w}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\alpha}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\alpha}_3) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\alpha}_1) & \text{Var}(\hat{\alpha}_1) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{w}_1, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_3) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{w}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\alpha}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{w}_2) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\alpha}_3) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\beta}_2) \\ \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_1) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\alpha}_2) & \text{Var}(\hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_2, \hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2) & \text{Var}(\hat{\beta}_2) & \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) \\ \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{w}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{\alpha}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{\alpha}_2) & \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{\alpha}_3) & \text{Cov}(\hat{w}_3, \hat{\beta}_2) & \text{Var}(\hat{w}_3) \end{bmatrix}$$

(5.9)

Si se utilizan las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud logarítmica, para la distribución bivariada de valores extremos propuesta, dadas en el Apéndice A, la matriz de varianza-covarianza puede ser expresada como en la ecuación (B.10).

$$V = \frac{1}{n_2} \begin{bmatrix} \alpha_1^2 C_{11} & \alpha_1^2 C_{12} & \alpha_1 C_{13} & \alpha_1 \alpha_2 C_{14} & \alpha_1 \alpha_2 C_{15} & \alpha_1 C_{16} & \alpha_1 C_{17} \\ \alpha_1^2 C_{12} & \alpha_1^2 C_{22} & \alpha_1 C_{23} & \alpha_1 \alpha_2 C_{24} & \alpha_1 \alpha_2 C_{25} & \alpha_1 C_{26} & \alpha_1 C_{27} \\ \alpha_1 C_{13} & \alpha_1 C_{23} & C_{33} & \alpha_2 C_{34} & \alpha_2 C_{35} & C_{36} & C_{37} \\ \alpha_1 \alpha_2 C_{14} & \alpha_1 \alpha_2 C_{24} & \alpha_2 C_{34} & \alpha_2^2 C_{44} & \alpha_2^2 C_{45} & \alpha_2 C_{46} & \alpha_2 C_{47} \\ \alpha_1 \alpha_2 C_{15} & \alpha_1 \alpha_2 C_{25} & \alpha_2 C_{35} & \alpha_2^2 C_{45} & \alpha_2^2 C_{55} & \alpha_2 C_{56} & \alpha_2 C_{57} \\ \alpha_1 C_{16} & \alpha_1 C_{26} & C_{36} & \alpha_2 C_{46} & \alpha_2 C_{56} & C_{66} & C_{67} \\ \alpha_1 C_{17} & \alpha_1 C_{27} & C_{37} & \alpha_2 C_{47} & \alpha_2 C_{57} & C_{67} & C_{77} \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

Los coeficientes de la matriz (B.10), son una función de los tamaños de muestra  $(n_1, n_2, n_3)$  y del parámetro de asociación  $m$ .

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza, corresponden a los valores de las varianzas asintóticas bivariadas de los parámetros.

Las varianzas asintóticas de los parámetros de la distribución bivariada de valores extremos propuesta son:

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\omega}_{1,B}) = c_{1,1} \frac{\alpha_1^2}{n}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{1,B}) = c_{2,2} \frac{\alpha_1^2}{n_2}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\beta}_{1,B}) = c_{3,3} \frac{1}{n_2}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\omega}_{2,B}) = c_{4,4} \frac{\alpha_2^2}{n_2}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{2,B}) = c_{5,5} \frac{\alpha_2^2}{n_2}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\beta}_{2,B}) = c_{6,6} \frac{1}{n_2}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}) = c_{7,7} \frac{1}{n_2}$$

( 5.11 )

### 5.5 Contenido de Información Relativa

De acuerdo con Fisher ( Yevjevich, 1972 ), el concepto de información en cualquier estadístico  $\hat{\theta}$ , estimado de una muestra, está definido como la inversa de la varianza de ese estadístico:

$$I = \frac{1}{\text{Var} \hat{\theta}}$$

( 5.12 )

Puesto que la varianza siempre es positiva, la información  $I$ , varía de cero a infinito.

Una vez que se ha obtenido la matriz de varianza-covarianza, el contenido de información relativa puede ser calculado para mostrar si existe o no mejora en la estimación de los parámetros (Salas, 1980):

$$I_a(\theta) = \frac{\text{Var}_\alpha(\hat{\theta}_u)}{\text{Var}_\alpha(\hat{\theta}_B)} \quad (5.13)$$

donde:

- $I_a(\theta)$  contenido de información relativa asintótica.  
 $\text{Var}_\alpha(\hat{\theta}_u)$  Varianza asintótica de los parámetros estimados a través de la aproximación univariada.  
 $\text{Var}_\alpha(\hat{\theta}_B)$  Varianza asintótica de los parámetros estimados a través de la aproximación bivariada.

Se obtiene una mejora en la estimación de los parámetros para valores de  $I_a > 1$ .

Para obtener los contenidos de información relativa, para esta distribución, se requieren las ecuaciones (5.5), (5.7) y (5.11). Las relaciones resultantes son:

$$I_a(\omega_1) = \frac{b_1}{c_{1,1}} \frac{n_2}{N_1}$$

$$I_a(\alpha_1) = \frac{a_1}{c_{2,2}} \frac{n_2}{N_1}$$

$$I_a(\beta_1) = \frac{c_1}{c_{B,B}} \frac{n_2}{N_B}$$

$$I_a(\omega_2) = \frac{b_2}{c_{4,4}} \frac{n_2}{N_2}$$

$$I_a(\alpha_2) = \frac{a_2}{c_{B,B}} \frac{n_2}{N_2}$$

$$I_a(\beta_2) = \frac{c_2}{c_{\sigma,\sigma}} \frac{n_2}{N_2}$$

(5.14)

donde:

$N_1$  es el tamaño de muestra univariada  
 $c_{i,i}$  son los coeficientes de la matriz de varianza-covarianza bivariada asintótica, definidos en la ecuación (5.10)

a,b,c son los coeficientes de la matriz de varianza-covarianza asintótica de la distribución GVE univariada

Para calcular los contenidos de información relativa, se empleará el arreglo elegido, en las mismas condiciones. Adicionalmente, se proponen los valores siguientes para los parámetros poblacionales de la función de distribución bivariada propuesta:

$$\omega_1 = 10; \alpha_1 = 4; \beta_1 = 0.10; \omega_2 = 5; \alpha_2 = 2; \beta_2 = 0.15$$

con los siguientes valores del parámetro de asociación:

$$m = 1.5, 2.0, 3.0 \text{ y } 5.0$$

Los resultados se presentan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Contenidos de información relativa asintóticos para los parámetros de la distribución bivariada de valores extremos para mínimos

Parámetro	m	$N_2 + N_3$			
		25	50	75	100
$\omega_1$	1.5	1.02	1.13	1.17	1.20
	2.0	1.05	1.32	1.45	1.53
	3.0	1.09	1.62	1.94	2.16
	5.0	1.19	1.98	2.58	3.05
$\alpha_1$	1.5	0.93	0.99	1.01	1.02
	2.0	0.97	1.10	1.16	1.19
	3.0	1.06	1.37	1.52	1.60
	5.0	1.30	1.84	2.18	2.40
$\beta_1$	1.5	0.98	1.00	1.02	1.03
	2.0	1.14	1.24	1.29	1.31
	3.0	1.26	1.46	1.55	1.60
	5.0	1.25	1.57	1.72	1.81
$\omega_2$	1.5	1.02	1.01	1.00	1.00
	2.0	1.05	1.02	1.01	1.01
	3.0	1.09	1.05	1.03	1.02
	5.0	1.19	1.11	1.08	1.06
$\alpha_2$	1.5	0.94	0.94	0.94	0.94
	2.0	0.97	0.96	0.96	0.95
	3.0	1.06	1.01	0.99	0.98
	5.0	1.28	1.14	1.08	1.05
$\beta_2$	1.5	0.98	0.97	0.97	0.97
	2.0	1.16	1.07	1.04	1.02
	3.0	1.29	1.14	1.09	1.06
	5.0	1.28	1.15	1.10	1.07

De los resultados de la Tabla 5.2 se tiene:

- a. Los contenidos de información relativa de los parámetros de la estación 1, aumentan conforme el tamaño de muestra de la

estación 2 se incrementa, por lo que existe una ganancia en información al utilizar una muestra larga de datos en la obtención de parámetros de series más cortas.

b. Hay una ganancia en información para la serie más larga (estación 2), cuando las dos estaciones se usan. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativa a la serie más corta, la ganancia en información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es factible utilizar la serie con registro corto ( estación 1 ) para estimar los parámetros de la serie más larga ( estación 2 ).

### 5.6 Aplicación a Muestras Pequeñas

Los resultados de las secciones precedentes, son aplicables a muestras grandes. Para demostrar si éstos pueden ser utilizados en muestras pequeñas, se procederá a calcular las varianzas bivariadas mediante técnicas de muestreo distribucional ( Buslenko, 1988; Kleijnen, 1974 ).

Los pares de valores aleatorios bivariados  $(X_i, Y_i)$ , serán obtenidos de la forma siguiente :

a. Transformar el número aleatorio  $R_i$  con distribución uniforme, sobre el intervalo  $(0,1)$  a  $Y_i$ , el cual tiene la distribución marginal  $F(y)$ .

$$Y_i = \omega_2 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \left\{ \left[ - \ln F(y) \right]^{\beta_2} - 1 \right\}$$

( 5.15 )

b. Sustituir  $Y_i$  y un nuevo número aleatorio  $R_2$ , el cual tiene la misma distribución de  $R_1$ , en la función de distribución condicional (B.16), que será resuelta para  $Y$ .

$$F(x|y_i) = \frac{1}{f(y_i)} \left. \frac{\partial F(x, y_i)}{\partial y_i} \right|_{x=w} \quad (\text{B.16})$$

$w$  es una variable de integración.

El valor bivariado  $Y$ , para esta distribución, será calculado mediante la ecuación anterior:

$$F(x|y, \theta) = \exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}$$

$$\left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_1 - x}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 1}$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right]^{(m-1)/\beta_2} \exp \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega_2 - y}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{1/\beta_2} \right] \quad (\text{B.17})$$

Dadas las características de las funciones analizadas, la ecuación (B.17) no tiene solución explícita; para resolverla, se utilizará el esquema numérico de Regula Falsi para búsqueda de raíces de ecuaciones algebraicas (Carnahan, 1969).

Una vez que se han obtenido las secuencias de valores bivariados, los estimadores de los parámetros de máxima verosimilitud univariados, se calculan al usar dichas muestras por separado. Estos parámetros serán utilizados como valores iniciales en el esquema de obtención de estimadores de máxima

verosimilitud bivariados.

Las varianzas de los parámetros así estimados, son determinados por la siguiente ecuación:

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 \quad (5.18)$$

donde:

$S^2$  es la varianza de la muestra

$n$  es el tamaño de la muestra

$\bar{e}$  es la media de la muestra

Si se considera que las varianzas están distribuidas de acuerdo con una distribución Chi-cuadrada, se pueden establecer los siguientes límites de confianza (Haan, 1977):

$$\text{Prob} \left\{ \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, N-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, N-1}} \right\} = 1 - \alpha \quad (5.19)$$

donde:

$\sigma^2$  es la varianza poblacional

$\chi^2_{\beta, \nu}$  es el percentil de la distribución chi-cuadrada con  $\nu$  grados de libertad y probabilidad  $\beta = 1 - \alpha/2$

$\alpha$  es el nivel de probabilidad elegido

Los percentiles de la distribución chi-cuadrada son calculados mediante la aproximación (Kendall y Stuart 1979):

$$\chi^2_{\beta, \nu} \approx \nu \left( 1 - \frac{2}{9\nu} + Z(\beta) \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3 \quad (5.20)$$

donde:

$Z(\beta)$  valor de la ordenada de la distribución normal estándar, para el nivel de probabilidad  $\beta$

La distribución considerada tiene el conjunto de parámetros:  $\omega_1 = 10.0$ ,  $\alpha_1 = 4.0$ ,  $\beta_1 = 0.10$ ,  $\omega_2 = 5.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\beta_2 = 0.15$  y  $m = 2.0$ .

Tabla 5.3 Combinaciones propuestas para las muestras en la fase de simulación

Caso	Longitud			Muestras generadas
	$n_1$	$n_2$	$n_3$	
A	0	25	0	100
B	0	25	25	100
C	0	25	50	100
D	0	25	75	100

La comparación de las varianzas asintóticas y simuladas para cada caso son presentadas en las Tablas 5.4 a la 5.7, de acuerdo con los arreglos propuestos en la Tabla 5.3. Los valores obtenidos sugieren que aún para tamaños de muestra de 50, los resultados asintóticos dan un buen estimado de las varianzas de los parámetros de la distribución bivariada de valores extremos propuesta.

Tabla S.4 Varianzas Asintóticas y Simuladas para la Distribución Bivariada de Valores Extremos para Mínimos (Caso A)

Caso	Varianzas Asintóticas	Límite de Confianza Inferior	Varianzas Simuladas	Límite de Confianza Superior
	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{1,B}) = 0.7581$	0.3656	0.6327	1.2244
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{1,B}) = 0.4197$	0.2792	0.4581	0.8885
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{1,B}) = 0.0171$	0.0147	0.0242	0.0488
A	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{2,B}) = 0.1876$	0.1123	0.1843	0.3686
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{2,B}) = 0.1026$	0.0835	0.1371	0.2653
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{2,B}) = 0.0161$	0.0168	0.0276	0.0534
	$\text{Var}_a(\hat{m}) = 0.1628$	1.4707	2.4127	4.8692

Tabla S.5 Varianzas Asintóticas y Simuladas para la Distribución Bivariada de Valores Extremos para Mínimos (Caso B)

Caso	Varianzas Asintóticas	Límite de Confianza Inferior	Varianzas Simuladas	Límite de Confianza Superior
	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{1,B}) = 0.5992$	0.5891	0.9337	1.8089
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{1,B}) = 0.3679$	0.3290	0.5398	1.4046
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{1,B}) = 0.0157$	0.0070	0.0115	0.0222
B	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{2,B}) = 0.0961$	0.0991	0.1627	0.1323
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{2,B}) = 0.0518$	0.0398	0.0653	0.0998
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{2,B}) = 0.0067$	0.0059	0.0097	0.0183
	$\text{Var}_a(\hat{m}) = 0.1373$	1.4333	2.3512	3.0005

Tabla 5.6 Varianzas Asintóticas y Simuladas para la Distribución Bivariada de Valores Extremos para Mínimos (Caso C)

Caso	Varianzas Asintóticas	Límite de Confianza Inferior	Varianzas Simuladas	Límite de Confianza Superior
	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{1,B}) = 0.5458$	0.8993	1.1473	2.2203
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{1,B}) = 0.3509$	0.2978	0.4888	0.9455
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{1,B}) = 0.0152$	0.0069	0.0114	0.0220
C	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{2,B}) = 0.0647$	0.0476	0.0782	0.1513
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{2,B}) = 0.0347$	0.0257	0.0423	0.0816
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{2,B}) = 0.0060$	0.0031	0.0051	0.0099
	$\text{Var}_a(\hat{m}) = 0.1290$	0.8258	1.0283	1.9882

Tabla 5.7 Varianzas Asintóticas y Simuladas para la Distribución Bivariada de Valores Extremos para Mínimos (Caso D)

Caso	Varianzas Asintóticas	Límite de Confianza Inferior	Varianzas Simuladas	Límite de Confianza Superior
	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{1,B}) = 0.5189$	0.8093	1.3276	2.5693
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{1,B}) = 0.3423$	0.3713	0.8092	1.1789
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{1,B}) = 0.0149$	0.0069	0.0114	0.0220
D	$\text{Var}_a(\hat{\omega}_{2,B}) = 0.0487$	0.0391	0.0643	0.0758
	$\text{Var}_a(\hat{\alpha}_{2,B}) = 0.0261$	0.0166	0.0273	0.0528
	$\text{Var}_a(\hat{\beta}_{2,B}) = 0.0045$	0.0021	0.0035	0.0067
	$\text{Var}_a(\hat{m}) = 0.1249$	0.3162	0.5188	1.0040

De los datos contenidos en las tablas 5.4 a 5.7, pueden hacerse los siguientes comentarios:

a) La concordancia entre los datos asintóticos y los simulados, se establecen mejor para los parámetros de la muestra con registro más largo (estación 2)

b) A medida que el registro de la segunda muestra se hace más grande, los resultados asintóticos y simulados correspondientes a la muestra con registro más pequeño (estación 1), tienden a parecerse más

c) Debe tenerse cuidado al extrapolar estos resultados a casos no previstos en el trabajo que se presenta, ya que los resultados son altamente dependientes de los arreglos considerados y no necesariamente podrán aplicarse en otro tipo de arreglos. Se recomienda que cada caso en particular, sea analizado convenientemente.

## CAPITULO 6

### APLICACIONES EN HIDROLOGIA

#### 6.1 Introducción

En este capítulo se presenta la aplicación de las distribuciones bivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales, en la región Noroeste de la República Mexicana, conocida como Región Hidrológica 10.

En la región seleccionada, Figura 6.1, de las 7 estaciones hidrométricas existentes, las cuales están localizadas en la cuenca del río El Fuerte, se seleccionaron 5, que se ubican en los estados de Chihuahua y Sinaloa.

La tabla 6.1, presenta los nombres, localización, áreas y periodos de registro de las estaciones ubicadas en la región seleccionada.

La secuencia de análisis será la siguiente:

- a. Selección de la distribución que mejor se ajusta a la muestra de datos en cada estación de la región en estudio (Sección 6.2).
- b. Cálculo de los límites de confianza de eventos de diseño para periodos de retorno específicos (Sección 6.3).
- c. Comparación de resultados obtenidos mediante las distribuciones bivariadas, con aquellos proporcionados por las distribuciones univariadas más usadas en la práctica hidrológica (Sección 6.4).

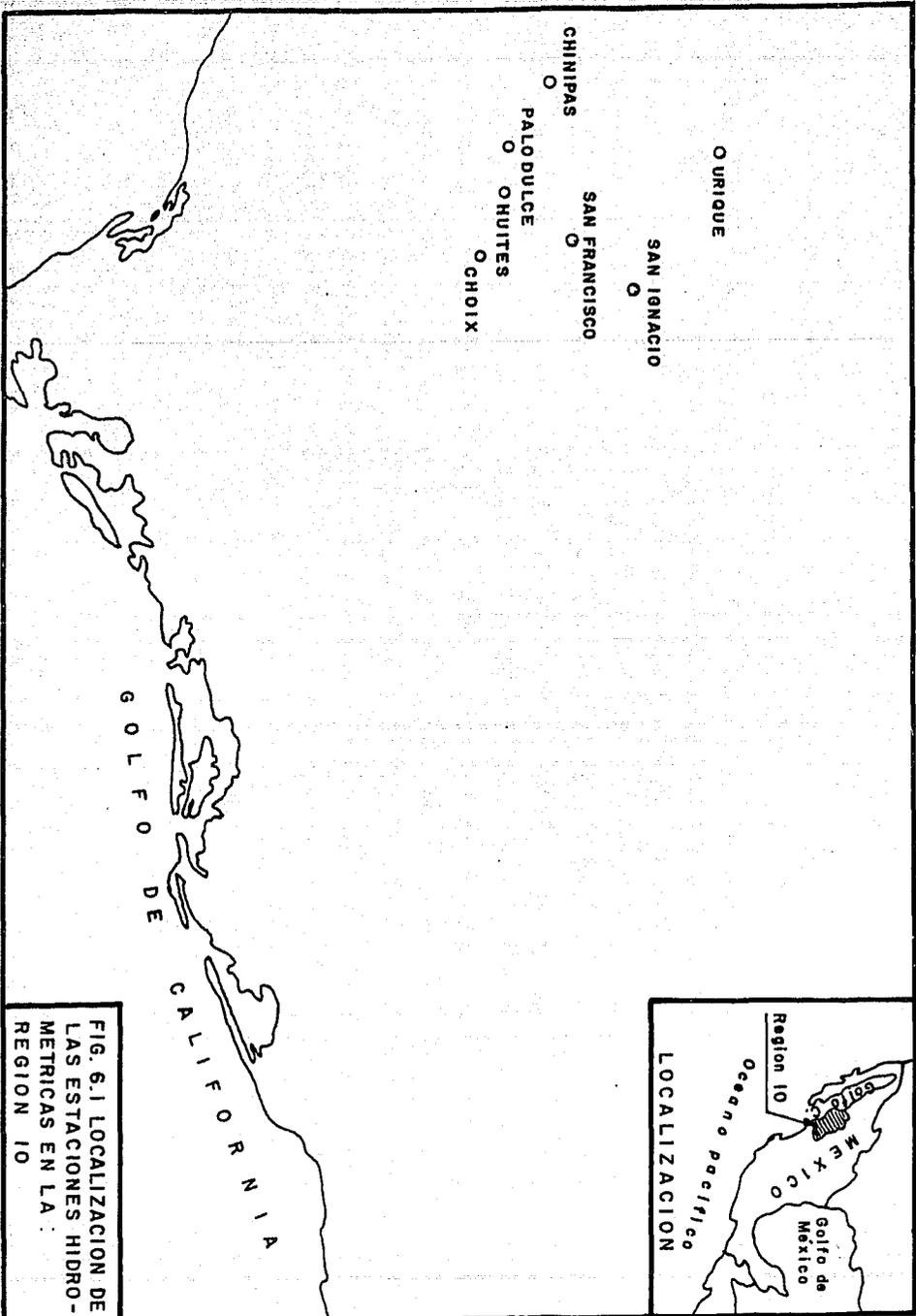


FIG. 6.1 LOCALIZACION DE LAS ESTACIONES HIDROMETRICAS EN LA REGION 10

Tabla 6.1 Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas para este Trabajo

Nombre de la Estación	Cuenca	Corriente	Período
Huites	Río Fuerte	Río Fuerte	1941-1981
Choix	Río Fuerte	Río Choix	1955-1979
Chinipas	Río Fuerte	Río Oteros	1985-1980
Palo Dulce	Río Fuerte	Río Chinipas	1957-1981
Urique II	Río San Miguel	Río Urique	1988-1981

## 6.2 Selección del Tipo de Función de Distribución de valores extremos

El criterio elegido para seleccionar el tipo de función de distribución que mejor se ajusta a la muestra de datos, es el del error estándar (Kite, 1977):

$$EE_j = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n - m_j} \right]^{1/2} \quad (6.1)$$

donde:

- $x_i$  son los datos históricos para  $i = 1, \dots, n$
- $y_i$  son los eventos calculados a través del modelo matemático y para niveles de probabilidad iguales a los de los datos históricos ordenados en forma decreciente de magnitud para  $i = 1, \dots, n$
- $n$  es el tamaño de la muestra
- $m_j$  es el número de parámetros que describen al modelo matemático:  $m_1 = 2$  para la distribución Gumbel ;  $m_2 = 3$  para las distribuciones GVE, Weibull, Log-Normal-3

La distribución elegida, será aquella que proporcione el mínimo valor del error estándar de ajuste.

Para aplicar las distribuciones bivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos mínimos de la región seleccionada (Tabla 8.1 ), las estaciones fueron agrupadas en pares. Tal agrupamiento se llevó a cabo al considerar aquellas estaciones vecinas con el más alto coeficiente de correlación simple.

La medida de correlación está dada por la expresión:

$$r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}} \quad (8.2)$$

donde:

r	coeficiente de correlación simple
$s_x^2$	varianza de la variable x
$s_y^2$	varianza de la variable y
$\text{Cov}(x,y)$	covarianza entre x e y

La tabla 8.2, proporciona los coeficientes de correlación y los tamaños de muestra relativa de las combinaciones óptimas de las estaciones en la región seleccionada.

Tabla 6.2 Coeficientes de Correlación y Tamaños de Muestra Relativa de las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas para este Trabajo.

Pareja	Coeficiente de Correlación	Tamaños de Muestra Relativa
Huites-Palo Dulce	0.3957	$N_1 = 16$ $N_2 = 25$ $N_3 = 0$
Huites-Choix	0.2231	$N_1 = 14$ $N_2 = 25$ $N_3 = 2$
Urique-Chinipas	0.5818	$N_1 = 3$ $N_2 = 13$ $N_3 = 1$

Los estimados univariados de momentos y máxima verosimilitud de los parámetros de las distribuciones Log-Normal-3, Gumbel y GVE, se obtuvieron mediante la aplicación del paquete de cómputo "FLODRO" (Raynal y Escalante, 1991). Los estimados para la región seleccionada en estudio, se presentan en las Tablas 6.3 a la 6.5.

El algoritmo desarrollado en el capítulo 3, se utilizó para obtener los estimados de máxima verosimilitud de los parámetros bivariados, estos estimados se presentan en la tabla 6.6.

Una vez que se obtuvieron los parámetros bivariados, se procedió a cuantificar la bondad de ajuste de los modelos propuestos.

Tabla 8.3 Estimados Univariados de Momentos y Máxima Verosimilitud de los Parámetros de las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas. Distribución Log-Normal-3

Estación	Momentos			Máxima Verosimilitud		
	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
Huites	0.5412	0.5798	1.1897	1.8888	1.0997	0.3959
Choix	- 0.1350	0.2988	- 1.8102	- 0.0088	0.9273	- 2.8948
Palo Dulce	- 0.4918	0.3538	0.0857	- 0.1181	0.5551	- 0.3899
Chinipas	- 0.2397	0.3582	- 0.2858	- 0.0573	0.4801	- 0.5923
Urique II	- 0.2485	0.5699	0.9853	0.7180	0.9670	0.3713

Tabla 8.4 Estimados Univariados de Momentos de los Parámetros de las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas. Distribuciones Valores Extremos tipo I (Gumbel) y tipo III (Weibull)

Estación	Distribución					
	VEI		VEIII			
	$\omega$	$\alpha$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	
Huites	5.8589	2.4222	2.0140	4.3339	0.7947	
Choix	0.1055	0.0539	- 0.0284	0.0801	1.5157	
Palo Dulce	0.8752	0.3534	0.0681	0.6995	1.3443	
Chinipas	0.7016	0.2421	0.1488	0.5815	1.3509	
Urique II	4.1650	2.0247	0.9673	2.8877	0.7888	

Tabla 8.8 Estimados Univariados de Momentos y Máxima Verosimilitud de los Parámetros de las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas. Distribución General de Valores Extremos

Estación	Momentos			Máxima Verosimilitud		
	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
Huites	4.1587	2.6992	1.2631	4.1083	2.2346	1.0509
Choix	0.0892	0.0751	0.8398	0.0757	0.1122	1.4825
Palo Dulce	0.7297	0.4902	0.7247	0.7311	0.4829	0.7188
Chinipas	0.6024	0.3359	0.7218	0.5989	0.3357	0.7338
Urique II	2.7353	2.2386	1.2734	2.6855	2.5092	1.4518

Tabla 8.8 Estimados Bivariados de Máxima Verosimilitud de los Parámetros de las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas. Distribución Bivariada General de Valores Extremos (VEB22)

Estación	Máxima Verosimilitud		
	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
Huites	4.1083	2.2346	1.0509
Choix	0.0829	0.1059	1.2732
Palo Dulce	0.8089	0.5172	0.6803
Chinipas	0.6189	0.3970	0.8475
Urique II	2.7889	2.5973	1.4585

Tabla 6.7 Error Estándar de Ajuste para las Distribuciones Bivariada y Univariada de Valores Extremos.

---

Estación	Distribución	
	GVEUML	VEB22
Huites	1.4590	1.4590
Choix	0.0530	0.0392
Palo Dulce	0.0934	0.0909
Chinipas	0.0803	0.0492
Urique II	0.9182	0.8152

---

En la Tabla 6.7, se presentan los valores del error estándar de ajuste para las versiones univariada y bivariada de valores extremos para cada una de las estaciones de la región elegida; se observa que en todos los casos el ajuste bivariado es mejor al ajuste univariado.

En la Tabla 6.8, se presentan los valores del mínimo error estándar de ajuste para cada una de las aproximaciones: univariada y bivariada de valores extremos; así mismo, se determina cuál de estos modelos se ajusta mejor a la muestra de datos para cada una de las estaciones de la región seleccionada.

Tabla 8.8 Errores Estándar de Ajuste para las Distribuciones Univariadas y Bivariadas Usadas en las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas.

Estación	Distribución						
	LN3M	LN3ML	VEI	VEIII	GVEUM	GVEUML	VEB22
Huites	1.4153	0.7147*	2.2889	0.8413	0.9408	1.4590	1.4590
Choix	0.0225	0.0224	0.0387	0.0208	0.0185*	0.0530	0.0392
Palo Dulce	0.1194	0.0922	0.2205	0.1073	0.0894*	0.0934	0.0909
Chinipas	0.0914	0.0812	0.1427	0.0898	0.0737	0.0803	0.0492*
Urique II	1.5437	1.2712	1.8798	1.0581	1.1870	0.9182	0.8152*

\* Mínimo error estándar

**Simbología:**

LN3M Log-Normal de 3 Parámetros (Momentos)

LN3ML Log-Normal de 3 Parámetros (Máxima Verosimilitud)

VEI Valores Extremos tipo I (Gumbel) (Momentos)

VEIII Valores Extremos tipo III (Weibull) (Momentos)

GVEUM General de Valores Extremos Univariada (Momentos)

GVEUML General de Valores Extremos Univariada (Máxima Verosimilitud)

VEB22 General de Valores Extremos Bivariada (Máxima Verosimilitud)

De las Tablas 8.7 y 8.8 se observa:

a) Para las parejas seleccionadas, los resultados obtenidos muestran una preferencia por la distribución bivariada de valores extremos, cuando los coeficientes de correlación son relativamente altos.

b) Para muestras de periodo mucho más largo que su contraparte de registro corto, el conjunto de parámetros bivariados no mejora la estimación univariada, como fue el caso de la estación Huites.

c) Cuando el coeficiente de correlación es muy bajo, por ejemplo en la pareja Huites-Choix, el conjunto de parámetros para la

muestra con registro corto no se mejora con el uso de la distribución bivariada de valores extremos para mínimos. Este hecho se refleja en el caso de Choix.

De lo anterior, se puede señalar que la aproximación bivariada mejora la calidad de los estimadores de los parámetros; y la inclusión de una segunda muestra, representa una ganancia significativa en la precisión de tales estimadores, siempre y cuando el coeficiente de correlación entre ambas muestras sea suficientemente grande, valor a determinar con los resultados del análisis que se realice. La mayor mejora se observa en la muestra con registro corto, ya que para la que tiene el registro más grande, la mejora es modesta o nula.

En la Tabla 8.9, se muestran los parámetros finales de las mejores distribuciones para cada una de las aproximaciones bivariada y univariada de valores extremos en la región .

Tabla 8.9 Parámetros Finales para las Estaciones Hidrométricas de la Región 10 Seleccionadas.

Estación	Parámetros			Distribución Final
	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	
Huites	2.0140	4.3339	0.7947	LN3ML
Choix	0.0859	0.0733	0.8504	GVEUM
Palo Dulce	0.7297	0.4902	0.7447	GVEUM
Chinipas	0.8189	0.3970	0.8474	BEV22
Urique II	2.7889	2.8973	1.4865	BEV22

La comparación gráfica entre la distribuciones teóricas e históricas, son presentadas en el apéndice B.

Los resultados demuestran que las distribuciones bivariadas representan una buena alternativa en el análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales.

### 6.3 Límites de Confianza de Eventos de Diseño

El análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales se usa para proveer la magnitud y frecuencia de eventos de diseño, con el fin de definir las medidas estructurales y no estructurales ante la presencia de una sequía; y sirve como ayuda en la planeación y manejo de las cuencas hidrológicas. Los eventos de diseño, pueden ser definidos analíticamente si se usan funciones de distribución de probabilidad, pero sus correspondientes límites de confianza no se obtienen tan fácilmente.

Los límites de confianza se usan para estimar las incertidumbres asociadas con la determinación de los eventos de diseño, para periodos de retorno específicos.

Puesto que una distribución de frecuencia es únicamente un estimado de la muestra de cierta población, es probable que otra muestra de igual longitud de la misma corriente, pero tomada en diferente tiempo, produjera una diferente curva de frecuencias. Los límites de confianza, o más correctamente, los intervalos de confianza, definen el rango dentro del cual estas curvas de frecuencias se esperan sean ubicadas con cierto nivel de confianza.

Antes de determinar los límites de confianza, se obtendrán los eventos de diseño.

Los eventos de diseño para la distribución general de valores extremos se calculan con:

$$\hat{Q}_T = \hat{\omega} + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \left\{ [ \text{Ln } T - \text{Ln } (T - 1) ]^{\hat{\beta}} - 1 \right\} \quad (8.3)$$

donde:

$\hat{\omega}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución GVE

Si se considera que los parámetros estimados están normalmente distribuidos (Sección 5.2), los límites de confianza se pueden escribir como (Mood et al, 1974):

$$\text{LC} ( \hat{Q}_T ) = \hat{Q}_T \pm Z_{\alpha} \text{Var}_a ( \hat{Q}_T ) \quad (8.4)$$

donde:

$\text{LC} ( \hat{Q}_T )$  es el límite de confianza superior o inferior para el valor del gasto  $\hat{Q}_T$  (m<sup>3</sup>/s)

$Z_{\alpha}$  es la variable normal estándar para un nivel de confianza  $\alpha$

$\text{Var}_a ( \hat{Q}_T )$  es la varianza asintótica del gasto  $\hat{Q}_T$

Las varianzas asintóticas univariadas de los eventos de diseño se calculan como (NERC, 1975):

Para la distribución GVE:

$$\begin{aligned} \text{Var}_a ( \hat{Q}_T ) = & \text{Var}_a ( \hat{\omega} ) + 2 W \text{Cov}_a ( \hat{\omega}, \hat{\alpha} ) + W \text{Var}_a ( \hat{\alpha} ) + \\ & + \left[ \frac{dW}{d\hat{\beta}} \right] \text{Var}_a ( \hat{\beta} ) + 2 \frac{dW}{d\hat{\beta}} \left[ \text{Cov}_a ( \hat{\omega}, \hat{\beta} ) + \text{Cov}_a ( \hat{\alpha}, \hat{\beta} ) W \right] \end{aligned} \quad (8.5)$$

donde:

$\text{Var}_a(\cdot)$  y  $\text{Cov}_a(\cdot)$  son las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros de la distribución general de valores extremos, definidas en la ecuación (5.4)

W es la variable reducida GVE:

$$W = \frac{e^{\hat{\beta} Y_T} - 1}{\hat{\beta}} \quad (6.6)$$

y:

$$\frac{dW}{d\hat{\beta}} = \frac{Y_T e^{\hat{\beta} Y_T} - W}{\hat{\beta}} \quad (6.7)$$

$Y_T$  está definida por la siguiente ecuación:

$$Y_T = \text{Ln}(\text{Ln} T) \quad (6.8)$$

Las varianzas asintóticas bivariadas de los gastos de diseño se obtienen de acuerdo al procedimiento propuesto por Boes (1983):

a. Se considera que los estimadores de los parámetros de las distribuciones bivariadas de valores extremos vienen de una distribución multivariada normal:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k \end{bmatrix} \sim \text{NMV} \left[ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}; I_n^{-1}(\hat{\theta}) \right] \quad (6.9)$$

donde:

$\hat{\theta}_1$  es la variable aleatoria que representa a cada estimador

$\theta_1$  representa el valor medio de  $\hat{\theta}_1$

$I_n^{-1}(\hat{\theta})$  representa la matriz de varianza - covarianza de los estimadores de los parámetros de la distribución bivariada de valores extremos

b. Se encuentra la función de distribución de los valores de diseño dado que ellos son una función de los parámetros estimados. Así:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(\hat{\theta}) \\ \vdots \\ \xi_r(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \sim \text{NMV} \begin{bmatrix} \xi_1(\hat{\theta}) \\ \vdots \\ \xi_r(\hat{\theta}) \end{bmatrix} ; \underline{\xi}' I_n^{-1}(\hat{\theta}) \underline{\xi} \quad (8.10)$$

donde:

$\xi_1(\hat{\theta})$  es la variable aleatoria que representa a los valores de diseño

$\xi_1(\hat{\theta})$  representa el valor medio de  $\xi_1(\hat{\theta})$

$\underline{\xi}' I_n^{-1}(\hat{\theta}) \underline{\xi}$  representa la matriz de varianza-covarianza de los valores de diseño

$\underline{\xi}$  es un vector definido por la relación:

$$\underline{\xi} = \left[ \frac{\theta_i(\hat{\theta})}{\theta \theta_j} \right] \quad (8.11)$$

Para la distribución VEB22 para mínimos  $\underline{\xi}$  es:

$$\underline{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & f_2 & s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(8.12)

donde:

$$f_1 = \frac{e^{\beta_1 Y_T} - 1}{\beta_1} \quad (8.13)$$

$$s_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} Y_T e^{\beta_1 Y_T} - \frac{\alpha}{\beta_1} \left[ e^{\beta_1 Y_T} - 1 \right] \quad (8.14)$$

Para obtener las varianzas de los valores de diseño, se requiere realizar la multiplicación matricial  $\xi^{-1} I(\hat{\theta}) \xi'$  como se indica en la ecuación (8.10).

Los resultados obtenidos al resolver la ecuación (8.10), son aplicables únicamente a muestras grandes, ya que están basados en la matriz asintótica de varianza-covarianza de los parámetros.

Para demostrar su aplicación a muestras pequeñas, se requiere del procedimiento planteado en la sección 5.8. Para esto, se obtendrán las varianzas de los valores de diseño, mediante técnicas de muestreo distribucional; así mismo, los correspondientes límites al 95% de confianza, de acuerdo con la ecuación (8.19), para las condiciones propuestas en la sección 5.8.1.

De lo obtenido, se confirma que los resultados asintóticos son aplicables a muestras de tamaño mayores de 50 años.

A continuación, tabla 8.13, se presentan los cuadros que contienen los límites al 95% de confianza univariados y bivariados para eventos de diseño con período de retorno específico, de las estaciones que tienen una ganancia significativa en información  $(I_r(\hat{\theta}_1) > 1)$  de la región seleccionada.

#### 6.4 Comparación con otras Distribuciones Univariadas.

Los resultados de la sección 6.2, demuestran que la aplicación de las distribuciones bivariadas al análisis de frecuencias de gastos mínimos representan, para todos los casos analizados, una mejor opción dentro del contexto de las distribuciones univariadas de valores extremos.

Con el propósito de determinar si las distribuciones bivariadas mejoran el ajuste proporcionado por otras distribuciones univariadas, disponibles en la práctica hidrológica, se realizó el siguiente análisis:

A los registros de gastos mínimos anuales de la estaciones ubicadas en la región seleccionada se les ajustaron diferentes funciones de distribución, univariada (Lognormal con tres parámetros, Gamma tres parámetros, Valores Extremos tipos I y III y GVE), a través de los métodos de momentos y/o máxima verosimilitud; y se eligió como la mejor, aquella de produjera el mínimo valor del error estándar, de acuerdo a la ecuación (6.1). La Tabla 6.9 presenta los parámetros de la distribución univariada elegida para cada una de las estaciones de la región seleccionada. Las características y propiedades de las distribuciones univariadas consideradas en este análisis, pueden encontrarse en muchos libros de estadística (Kite, 1977; Yevjevich, 1972; etc.).

En la Tabla 6.7, se compara el valor del error estándar de ajuste para la mejor distribución univariada con el de la mejor distribución bivariada de valores extremos; adicionalmente, se selecciona la distribución final para cada estación. En esta

tabla, se observa que el 100% de los casos analizados, se ajusta mejor a través de una distribución bivariada de valores extremos, por lo que este tipo de distribución representa una excelente alternativa en el análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales.

En la Tabla 8.8 se compara el valor del error estándar de ajuste para la mejor distribución univariada con el de la mejor distribución bivariada de valores extremos, adicionalmente, se selecciona la distribución final para cada estación. En esta tabla se observa que el 40% de los casos analizados son mejor ajustados a través de una distribución bivariada de valores extremos, por lo que este tipo de distribución representa una excelente alternativa en el análisis de frecuencias de gastos mínimos anuales.

En la Tabla 8.10 se muestran los eventos de diseño, para periodos de retorno específico, de la mejor distribución univariada y de la aproximación bivariada de valores extremos. Se puede observar que las diferencias en magnitud de los gastos calculados pueden ser significativos, incluso para pequeños periodos de retorno.

Las curvas de frecuencia empírica y teórica, para el caso del mejor ajuste obtenido, se presentan para cada una de las estaciones de la región en el Apéndice B (B.1 a B.6).

Tabla 8.10 Eventos de Diseño de las Distribuciones Univariada y Bivariada de Valores Extremos para las Estaciones de la Región 10 Seleccionadas.

ESTACION: HUITES	D I S T R I B U C I O N	
	GEVUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)
2	3.43	3.43
5	2.42	2.42
10	2.18	2.18
20	3.08	3.08
50	2.02	2.02
100	2.00	2.00
500	1.99	1.99
1000	1.98	1.98

ESTACION: CHOIX	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)
2	0.04	0.05
5	0.01	0.01
10	0.00	0.01
20	0.00	0.00
50	0.00	0.00
100	0.00	0.00
500	0.00	0.00
1000	0.00	0.00

ESTACION: PALO DULCE	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	0.58	0.82
5	0.29	0.31
10	0.19	0.21
20	0.14	0.14
50	0.10	0.10
100	0.08	0.08
500	0.07	0.08
1000	0.08	0.08

ESTACION: CHINIPAS	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	0.49	0.80
5	0.28	0.28
10	0.22	0.21
20	0.19	0.17
50	0.17	0.15
100	0.16	0.14
500	0.15	0.13
1000	0.15	0.13

ESTACION: URIQUE II	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	2.02	2.02
5	1.15	1.15
10	1.01	1.01
20	0.98	0.98
50	0.94	0.94
100	0.94	0.94
500	0.94	0.94
1000	0.94	0.94

Tabla 6.11 Eventos de Diseño de la Mejor Distribución Univariada y Bivariada de Valores Extremos para las Estaciones de la Región 10 Seleccionadas.

ESTACION: HUITES	D I S T R I B U C I O N	
PERIODO RETORNO T (años)	LN3ML	VEB22
	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)
2	3.35	3.43
5	2.46	2.42
10	2.23	2.19
20	2.11	2.08
50	2.02	2.02
100	1.98	2.00
500	1.93	1.99
1000	1.92	1.98

ESTACION: CHOIX	D I S T R I B U C I O N	
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUM	VEB22
	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)
2	0.08	0.05
5	0.02	0.01
10	0.00	0.01
20	0.00	0.00
50	0.00	0.00
100	0.00	0.00
500	0.00	0.00
1000	0.00	0.00

ESTACION: PALO DULCE	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUM	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	0.57	0.82
5	0.28	0.31
10	0.19	0.21
20	0.13	0.14
50	0.09	0.10
100	0.08	0.08
500	0.06	0.06
1000	0.06	0.05

ESTACION: CHINIPAS	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	0.49	0.50
5	0.28	0.28
10	0.22	0.21
20	0.19	0.17
50	0.17	0.15
100	0.15	0.14
500	0.15	0.13
1000	0.15	0.13

ESTACION: URIQUE II	D I S T R I B U C I O N	
	GVEUML	VEB22
PERIODO RETORNO T (años)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)	$\hat{Q}_T$ (CM3/S)

2	2.02	2.02
5	1.15	1.15
10	1.01	1.01
20	0.98	0.98
50	0.94	0.94
100	0.94	0.94
500	0.94	0.94
1000	0.94	0.94

En la tabla 6.12, se presentan los límites de confianza a un nivel del 95% entre la distribución univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas.

Se puede comentar de los valores contenidos en dicha tabla, del análisis bivariado, que no produce los resultados tan espectaculares como los obtenidos por las versiones bivariadas y trivariadas para análisis y gastos máximos anuales, referenciados en este trabajo.

Tabla 6.12 Límites al 95% de Confianza para las Distribuciones Univariada y Bivariada de Valores Extremos para las Estaciones de la Región 10 Seleccionadas.

ESTACION: HUITES	D I S T R I B U C I O N			
	GVEUML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS
PERIODO RETORNO T (años)				
2	2.84	4.02	2.32	4.54
5	1.80	3.04	0.88	3.98
10	1.55	2.81	0.49	3.97
20	1.43	2.72	0.30	3.85
50	1.37	2.68	0.19	3.85
100	1.35	2.65	0.15	3.85
500	1.33	2.64	0.12	3.85
1000	1.33	2.64	0.11	3.85

ESTACION: CHOIX	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS
2	0.04	0.05	0.05	0.05
5	0.01	0.01	0.01	0.02
10	0.00	0.00	0.00	0.01
20	0.00	0.00	0.00	0.01
50	0.00	0.00	0.00	0.01
100	0.00	0.00	0.00	0.00
500	0.00	0.00	0.00	0.00
1000	0.00	0.00	0.00	0.00

ESTACION: PALO DULCE	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS
2	0.28	0.87	0.43	0.82
5	0.00	0.89	0.03	0.58
10	0.00	0.85	0.00	0.51
20	0.00	0.84	0.00	0.47
50	0.00	0.84	0.00	0.45
100	0.00	0.84	0.00	0.44
500	0.00	0.84	0.00	0.44
1000	0.00	0.84	0.00	0.44

ESTACION: CHINIPAS	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS
2	0.29	0.70	0.28	0.72
5	0.00	0.58	0.00	0.58
10	0.00	0.54	0.00	0.53
20	0.00	0.53	0.00	0.54
50	0.00	0.52	0.00	0.54
100	0.00	0.52	0.00	0.54
500	0.00	0.52	0.00	0.54
1000	0.00	0.52	0.00	0.54

ESTACION: URIQUE II	D I S T R I B U C I O N			
	GVEUML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS
PERIODO RETORNO T (años)				

2	2.00	2.05	2.00	2.05
5	1.12	1.18	1.11	1.15
10	0.98	1.04	0.97	1.05
20	0.93	0.99	0.92	1.00
50	0.91	0.97	0.90	0.98
100	0.91	0.97	0.90	0.98
500	0.91	0.97	0.90	0.98
1000	0.91	0.97	0.90	0.98

LI Límite inferior

LS Límite superior

En la Tabla 8.13, se presentan los límites de confianza a un nivel del 95%, entre la mejor distribución univariada y bivariada de valores extremos para las estaciones de la región 10 seleccionadas.

Como puede observarse de los valores contenidos en dicha tabla, el análisis bivariado no produce resultados tan espectaculares como los obtenidos en los análisis bivariados y trivariados para análisis de gastos máximos anuales, referenciados en este trabajo.

Tabla 8.13 Límites al 95% de Confianza para la Mejor Distribución Univariada y Bivariada de Valores Extremos para las Estaciones de la Región 10 Seleccionadas.

ESTACION: HUITES	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	LN3ML		VEB22	
	LI	LS	LI	LS

2	2.84	4.02	2.32	4.54
5	1.80	3.04	0.88	3.98
10	1.55	2.81	0.49	3.87
20	1.43	2.72	0.30	3.85
50	1.37	2.68	0.19	3.85
100	1.35	2.65	0.15	3.85
500	1.33	2.64	0.12	3.85
1000	1.33	2.64	0.11	3.85

ESTACION: CHOIX	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUM		VEB22	
	LI	LS	LI	LS

2	0.04	0.05	0.05	0.05
5	0.01	0.01	0.01	0.02
10	0.00	0.00	0.00	0.01
20	0.00	0.00	0.00	0.01
50	0.00	0.00	0.00	0.01
100	0.00	0.00	0.00	0.00
500	0.00	0.00	0.00	0.00
1000	0.00	0.00	0.00	0.00

ESTACION: PALO DULCE	D I S T R I B U C I O N			
PERIODO RETORNO T (años)	GVEUM		VEB22	
	LI	LS	LI	LS

2	0.28	0.87	0.43	0.82
5	0.00	0.89	0.05	0.58
10	0.00	0.85	0.00	0.51
20	0.00	0.84	0.00	0.47
50	0.00	0.84	0.00	0.45
100	0.00	0.84	0.00	0.44
500	0.00	0.84	0.00	0.44
1000	0.00	0.84	0.00	0.44

ESTACION: CHINIPAS	D I S T R I B U C I O N			
	GVEML		BEV22	
PERIODO RETORNO T (años)	LI	LS	LI	LS

2	0.29	0.70	0.28	0.72
5	0.00	0.58	0.00	0.58
10	0.00	0.54	0.00	0.55
20	0.00	0.53	0.00	0.54
50	0.00	0.52	0.00	0.54
100	0.00	0.52	0.00	0.54
500	0.00	0.52	0.00	0.54
1000	0.00	0.52	0.00	0.54

ESTACION: URIQUE II	D I S T R I B U C I O N			
	GVEML		BEV22	
PERIODO RETORNO T (años)	LI	LS	LI	LS

2	2.00	2.05	2.00	2.05
5	1.12	1.18	1.11	1.18
10	0.98	1.04	0.97	1.05
20	0.93	0.99	0.92	1.00
50	0.91	0.97	0.90	0.98
100	0.91	0.97	0.90	0.98
500	0.91	0.97	0.90	0.98
1000	0.91	0.97	0.90	0.98

LI Limite inferior

LS Limite superior

## CAPITULO 7

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### *Conclusiones*

El desarrollo de la aproximación bivariada para el caso de valores extremos mínimos, amplía el conocimiento de las funciones de distribución de probabilidad de valores extremos.

Se demostró, a través del contenido de información relativa (relación entre las varianzas de dos estimadores de un parámetro), que el uso de las distribuciones bivariadas puede mejorar la estimación de parámetros de distribuciones de valores extremos.

En general, los contenidos de información relativa de las series más cortas, aumentan conforme el tamaño de la muestra más grande se incrementa, por lo que existe una ganancia en precisión en la obtención de parámetros de muestras cortas, cuando se utiliza una muestra más grande. En forma similar, hay una ganancia en información, para la serie más larga, cuando se utiliza la información de las dos estaciones. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativo a la serie más corta, la información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es recomendable utilizar las series con registro corto para estimar los parámetros de la serie más larga.

De acuerdo a los experimentos de muestreo distribucional, se concluye que los resultados asintóticos pueden ser aplicables a muestras pequeñas, del orden de 50, para las distribuciones bivariadas de valores extremos para mínimos.

El ajuste proporcionado por las distribuciones bivariadas de valores extremos resultó ser, para un buen número de los casos analizados (100% con respecto a la distribución univariada general de valores extremos y el 40% con referencia a las distribuciones univariadas Lognormal-3 parámetros, valores extremos tipos I y III, GVE (momentos), y de acuerdo al criterio de selección propuesto, una buena opción entre los modelos en competencia, por lo que representan una buena alternativa para reducir la incertidumbre en la estimación de frecuencias de gastos mínimos anuales.

Como los límites de confianza son función de las varianzas asintóticas de los parámetros, y éstas son mejor estimadas por la aplicación de la aproximación bivariada, se demostró que cuando los contenidos de información relativa son más grandes que uno, los límites de confianza son más estrechos en comparación con los obtenidos por la aproximación univariada de valores extremos.

#### *Recomendaciones*

El trabajo que se incluye aquí, no considera la existencia de valores cero en el registro histórico; caso común en zonas áridas y semi-áridas de nuestro País, por lo que, cuando éste sea el caso, se requerirá utilizar otro tipo de modelo univariado existente en la literatura estadística, ya que extender el modelo bivariado de valores extremos para mínimos y poder considerar la existencia de ceros, representa una complejidad de análisis y de cómputo, más allá de lo razonable.

Es recomendable la aplicación de las distribuciones bivariadas en el caso de que la muestra analizada tenga una longitud relativamente corta, cuando la estación con registro largo posea las cualidades estadísticas que hagan conveniente su asociación con la estación de menor registro.

Para evitar obtener un óptimo local, en el procedimiento de obtención de parámetros bivariados, se recomienda que los valores de arranque del procedimiento propuesto sean los estimadores univariados de los parámetros de ubicación, escala y forma de la GVE de mínimos. Con respecto al parámetro de asociación bivariada, se recomienda utilizar el valor de 2.

El análisis trivariado de gastos mínimos anuales, puede extenderse al estudio de gastos mínimos anuales.

Puesto que hay una ganancia significativa en información, al usar distribuciones bivariadas, se puede suponer que se obtendrán mayores ganancias mediante el uso de la aproximación trivariada en el estudio de gastos mínimos anuales.

## REFERENCIAS

- Anderson, T. W., "Maximum Likelihood Estimates for a Multivariate Normal Distribution with some Observations are Missing", Journal of the American Statistical Association. Vol. 52, pp. 220-223. 1957.
- Beard, L. R., "Statistical Methods in Hydrology", U. S. Army Engineer District. Corps of Engineers. Sacramento, Cal. 1962.
- Boes, D. C., "Class Notes for ST530 Mathematical Statistics", Department of Statistics, Colorado State University. 1983.
- Bortkiewicz, L., Von, "Variationsbreite und Mittlerer Fehler". Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 21, 3-11.1922.
- Buslenko, N. P. et al, "The Monte Carlo Method. The Method of Statistical Trials", Pergamon Press. 381 págs. 1988.
- Carnahan, B. et al., "Applied Numerical Methods", John Wiley and Sons. 604 p. 1969.
- Clarke, R. T., "Bivariate Gamma Distributions for Extending Annual Streamflow Records from Precipitation: Some Large Sample Results". Water Resources Research. Vol. 16, No. 5, pp. 863-870. 1980.
- Cunnane, C. "Methods and Merits of Regional Flood Frequency Analysis", Journal of Hydrology. Vol 100, No. 1-4, pp.289-290,. 1988.
- Dodd, E. L., "The Greatest and the Least Variate Under General Laws of Error", Transactions of the American Mathematical Society, 25: p. 525. 1923
- Escalante Sandoval, Carlos A., "Funciones de Distribución de Probabilidad Trivariadas de Valores Extremos y sus Aplicaciones en Hidrología", Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F., 1991.
- Finkelstein, B. V., "On the Limiting Distributions of the Extreme Terms of a Variational Series of a two-dimensional random quantity". Doklady Akad, S.S.S.R. 91, No. 2, p. 209. 1953.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C., "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample", Proc. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XXIV. Part II. pp. 180-190. 1928.

- Fréchet, M., " Sur la Loi de Probabilite de l'ecart Maximum ",  
Annales de la Societe Plonaise de Mathematique. Cracovie.  
Vol. 8, pp. 93-116. 1927.
- Galambos, J., " Order Statistics of Sample from Multivariate  
Distributions ", Journal of the American Statistical  
Association. Vol. 70, pp. 874-880. 1975.
- Galambos, J., " The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics"  
John Wiley and Sons. 352 p. 1978.
- Gnedenko, B. U., " Sur la distribution limite du terme maximum  
d'une serie aleatoire ", Ann. Math.. Vol 44, pp. 423-453.  
1943.
- Gumbel, E. J., " La Duree Extreme de la Vie Humaine ", Actualites  
Scientifiques et Industrielles. Paris: Herman et Cie. 1937.
- Gumbel, E. J., " The Return Period of Flood Flows ", Annals of  
Mathematical Statistics. Vol. 12, pp. 183-190, 1941.
- Gumbel, E. J., " On the Plotting of Flood Discharges ",  
Transactions of the American Geophysical Union. Vol. 25, pp.  
699-719. 1944.
- Gumbel, E. J., " Floods Estimated by Probability Methods ",  
Engineering News Record. Vol. 134, pp. 97-101. 1945.
- Gumbel, E. J., " The Distribution of the Range ", Annals of  
Mathematical Statistics. Vol. 18, pp. 384-412. 1947.
- Gumbel, E. J., " Statistical Theory of Droughts ", Proceedings  
American Society of Civil Engineers. Vol. 80, No. 439. 1954.
- Gumbel, E. J., " Statistics of Extremes ", Columbia University  
Press. 375 p. 1958.
- Gumbel, E. J., " Multivariate Distributions with Given Margins ",  
Revista da Faculdade de Ciencias. 2 Serie A. Vol. II, No. 2.  
pp. 178-218. 1959.
- Gumbel, E. J., " Multivariate Distributions with Given Margins and  
Analytical Examples ", Bulletin of the International  
Statistical Institute. Vol. 37, No. 3. pp. 363-373. 1980a.
- Gumbel, E. J., " Distributions des Valeurs Extremes en Plusieurs  
Dimensions ", Publications de L'Institute de Statistique.  
Vol. 9, pp. 171-173. 1980b.
- Gumbel, E. J., " Statistical Theory of Extreme Values (Main  
Results) ", Chapter 6, Contribution to Order Statistics,  
Sarhan, A. S. and Greenberg, B. G., editors. pp. 59-93. John  
Wiley and Sons. 1962.

- Gumbel, E. J. y Mustafi, C. K., " Some Analytical Properties of Bivariate Extremal Distributions ", Journal of the American Statistical Association. Vol. 82, pp. 569-589. 1987.
- Haan, C. T., " Statistical Methods in Hydrology ", The Iowa State University Press, 378 p. 1977.
- Jenkinson, A. F., " The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements", Quaterly Journal of the Royal Meteorological Society. Vol 87, pp. 158-171. 1958.
- Jenkinson, A. F., " Estimation of Maximum Floods ", Chapter 5, World Meteorological Organization Technical. Note 98. pp. 183-227. 1969.
- Kendall, M. G. y Stuart, A., " The Advanced Theory of Statistics " 4th. Ed. Vol. 2, Macmillan. 748 p. 1979.
- Kimball, B. F., " An Approximation to the Sampling Variances of an Estimated Maximum Value of Given Frequency Based on the Fit of the Doubly Exponential Distribution of Maximum Values ", Annals of Mathematical Statistics. Vol. 20, pp. 110-113. 1949.
- Kite, G. W., " Frequency and Risk Analyses in Hydrology ", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado. 1977.
- Kleijnen, J. P. C., " Statistical Techniques in Simulation ", Parte 1. Marcel Dekker Inc. 288 p. 1974.
- Kuester, J. L. y Mize, J. H., " Optimization Techniques with Fortran ", McGraw-Hill Book Co. 500 p. 1973.
- Mood, A. M., Graybill, F. y Boes, D. C., " Introduction to the Theory of Statistics ", McGraw-Hill Inc. Third Edition. 384 p. 1974.
- Natural Environment Research Council, " Flood Studies Report ". Vol 1, pp. 41-52 y 81-97. 1975.
- O'Hara, H. y Smith, F. J., " The Evaluation of the Definite Integrals by Interval Subdivision", Computer Journal. Vol. 12. 1980.
- Raynal, J. A., " Parameter Estimation Efficiency in Extreme Value Distributions Type I and II ", Report of a Special Study, Civil Engineering Department. Colorado State University. 1982.
- Raynal, J. A., " Bivariate Extreme Value Distributions Applied to Flood Frequency Analysis ", PhD dissertation, Colorado State University. Fort Collins, Colorado, USA. 1985.

- Raynal, J. A., " A Bivariate Extreme Value Model Applied to Drought Frequency Analysis ", Multivariate Analysis of Hydrologic Processes, H.W. Shen, J. T. B. Obeysekera, V. Yevjevich and D. G. DeCoursey, editors, Fort Collins, Colorado, USA., pp 717-731, 1985.
- Raynal, J. A. y Salas, J. D., " Multivariate Extreme Value Distributions in Hydrological Analyses ", Proceedings of the Rome Symposium, April 1987. IAHS Publications. No. 184, pp. 111-119. 1987a.
- Raynal, J. A. y Salas, J. D., " A Probabilistic Model for Flooding Downstream of the Junction of two rivers ", Hydrological Frequency Modeling. Reidel Publishing Company, pp. 595-602. 1987b.
- Raynal J.A. and Douriet, J.C., "The GEV Distribution in Drought Frequency Analysys", Engineering Hydrology, Arlen Feldman, ed., American Society of Civil Engineers, pp 332-337. 1987c.
- Raynal, J. A. y Escalante, C. A., " FLODRO: A User Friendly Personal Computer Package for Flood and Drought Frequency Analyses Education and Training ", Proc. International Symposium on Hydrology and Water Resources. 1991.
- Raynal-Villaseffor, J.A. et al, "computation of Maximun Likelihood Estimates of the Parameters of the General Extreme value Distribution for the Minima", Hydrology Science and Technology: Short Papers Journal. Submitted for publication. 1993.
- Rosenbrock, H. H., " An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function ". Computer Journal. Vol. 3. pp.178-184. 1960.
- Rueda, E., " Transfer of Information for Flood Related Variables " M. Sc. Thesis. Civil Engineering Department, Colorado State University. 112 p. Spring 1981.
- Salas J. D., " Transfer of Information to Improve Estimates of Flood Frequencies". Chapter 17 in Hydrology for Transportation Engineers ". Ed. T. G. Sanders. U. S. Dept. of Transportation. pp. 592-653. 1980.
- Stroud, A. H. y Secrest, D., " Gaussian Quadrature Formulas ". Prentice Hall. 374 p. 1969.
- Stroud, A. H., " Approximate Calculation of Multiple Integrals ". Prentice Hall. 431 p. 1971.
- Takahashi, R., " Some Properties of Multivariate Extreme Value Distributions and Multivariate Equivalence ". Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 39, Part A. pp. 637-647. 1987.
- Takahashi, R., " Characterizations of a Multivariate Extreme Value Distribution ". Adv. Appl. Prob. Vol. 20. pp. 235-236. 1988.

- Tiago de Oliveira, J., "Extremal Distributions", Revista Faculdade de Ciências. 2 Serie A, Vol. 7. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. pp. 219-228. 1988.
- Tiago de Oliveira, J., "Bivariate Extremes; Extensions", Proc. of the 40th. Session. Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 46, Book 2. pp. 241-251. 1975a.
- Tiago de Oliveira, J., "Bivariate and Multivariate Extreme Distributions", Statistical Distributions in Scientific Work. Vol. 1. G. P. Patil et al, editors. D. Reidel Publishing, Company. pp. 355-361. 1975b.
- Tiago de Oliveira, J., "Bivariate Extremes; Models and Statistical Decision", Technical Report No. 14. Center for Stochastic Processes, Department of Statistics, University of North Carolina, at Chapel Hill. June 1982.
- Tippet, L. H. C., "On the Extreme Individuals and the Range of Sample taken from a Normal Distribution", Biometrika. Vol. 17, Parts 3 and 4, pp. 384-387. 1925.
- Von Mises R., "Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe" Berliner Math gesellschaft, t.22, p. 3. 1923.
- Von Mises R., "La distribution de la plus grande de n valeurs", Rev. Math de L'Union Interbalkanique. Athens. No. 1, pp. 1-20. 1938.
- Weibull, W., "The Phenomenon of Rupture in Solids", Ingenior Vetenskaps Akademiens Handliger. Vol. 153, p. 2. 1939.
- Yevjevich, V., "Probability and Statistics in Hydrology", Water Resources Publications. 302 p. 1972.

**APENDICE A**

DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN DE LA FUNCION LOGARITMICA DE VEROSIMILITUD PARA LA DISTRIBUCION BIVARIADA DE VALORES EXTREMOS PARA MINIMOS (MODELO LOGISTICO)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{LLC}(x, y, \theta)}{\partial \omega_1} &= \frac{I_2}{\alpha_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} \beta_1 \right]^{m/\beta_1} \right. \\
 &+ \left. \left[ 1 - \frac{w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 1} \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} \\
 &- (m - \beta_1) \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1}} \\
 &\quad \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} \\
 &- (1 - 2m) \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} \left( 1 - \frac{w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2}}{\left[ \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]} \\
 &- \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\left[ \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 1}}{\left\{ m - 1 \left[ \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}} \\
 &\quad \left( 1 - \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} \left. \right\} + \frac{I_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \left[ 1 - \frac{w_p - q_1}{\alpha_p} \right]^{\beta_p - 1} \right. \\
 &- (1 - \beta_p) \left[ 1 - \frac{w_p - q_1}{\alpha_p} \right]^{\beta_p - 1} \left. \right\} + \frac{I_3}{\alpha_1} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \left[ 1 - \frac{w_r - r_1}{\alpha_r} \right]^{\beta_r - 1} \right.
 \end{aligned}$$

$$- (1 - \beta_r) \left[ 1 - \frac{w_r^{-r_1}}{\alpha_r} \beta_r \right]^{-1} \} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{LLC}(x, y, \theta)}{\partial \alpha_1} &= \frac{I_2}{\alpha_1} \left\{ -n_2 - \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( 1 - \frac{w_2^{-y_1}}{\alpha_2} \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m-1} \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1-1} \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \right. \\ &+ (m - \beta_1) \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \right)}{\left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)} + (1 - 2m) \sum_{i=1}^{n_2} \\ &+ (1 - 2m) \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1-1} \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1}}{\left[ \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2^{-y_1}}{\alpha_2} \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]} \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2^{-y_1}}{\alpha_2} \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m-1}}{\left\{ m - 1 \left[ \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{w_2^{-y_1}}{\alpha_2} \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}} \\ &\left. \left( 1 - \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1-1} \frac{w_1^{-x_1}}{\alpha_1} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{I_1}{\alpha_1} \left\{ -n_1 - \sum_{i=1}^1 \left[ \left( 1 - \frac{w_p^{-q_1}}{\alpha_p} \beta_p \right)^{1/\beta_p-1} \left( \frac{w_p^{-q_1}}{\alpha_p} \right) \right. \right.$$

$$+ (\beta_p - 1) \left[ 1 - \frac{w_p - q_1}{\alpha_p} \beta_p \right]^{-1} \left( \frac{w_p - q_1}{\alpha_p} \right) \left. \right\}$$

$$+ \frac{I_3}{\alpha_1} \left\{ -n_3 - \sum_{i=1}^3 \left[ \left[ 1 - \frac{w_r - q_1}{\alpha_r} \beta_r \right]^{1/\beta_r - 1} \left( \frac{w_r - q_1}{\alpha_r} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\beta_r - 1) \left[ 1 - \frac{w_r - q_1}{\alpha_r} \beta_r \right]^{-1} \left( \frac{w_r - q_1}{\alpha_r} \right) \right] \right\}$$

(A. 2)

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, \theta)}{\partial \beta_1} = \frac{I_2}{\beta_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]^{m/\beta_1} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 1} \left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]^{m/\beta_1} \right.$$

$$\left. \left[ \frac{1}{\beta_1} L_n \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right) + \frac{\left( \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)}{\left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]} \right] \right.$$

$$\left. \frac{\left( \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)}{\left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]} \right\}$$

$$- \frac{m}{\beta_1} \sum_{i=1}^{n_2} L_n \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right) - c^{m-\beta_1} \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\left( \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)}{\left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]}$$

$$\left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]$$

$$- (1 - 2m) \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\left( \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right)^{m/\beta_1 - 1}}{\left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]}$$

$$\left[ \left[ 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \beta_1 \right]^{m/\beta_1} + \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \beta_2 \right]^{m/\beta_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{\beta_1} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right] + \frac{\left( \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)}{\left[ 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right]} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\left[ \left( 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{(w_2 - y_1)^{\beta_2}}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 1}}{\left\{ m - 1 \left[ \left( 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{(w_2 - y_1)^{\beta_2}}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\}} \\
& \left. \left( 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} \left[ \frac{1}{\beta_1} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right] + \frac{\left( \frac{w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)}{\left[ 1 - \frac{(w_1 - x_1)^{\beta_1}}{\alpha_1} \right]} \right] \right\} \\
& + \frac{I_1}{\beta_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ (c\beta_1 - 1) \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \left[ 1 - \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \right]^{-1} + \left[ 1 - \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \right]^{1/\beta_p} \right. \\
& \quad \cdot \left. \left\{ \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \left[ 1 - \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \right]^{-1} + \frac{1}{\beta_p} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \right] \right\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\beta} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{w_p - p_i}{\alpha_p} \right] \right\} + \frac{I_3}{\beta_1} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ (c\beta_1 - 1) \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right. \\
& \quad \left[ 1 - \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right]^{-1} + \left[ 1 - \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right]^{1/\beta_r} \left\{ \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \left[ 1 - \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right]^{-1} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\beta_r} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right] \right\} - \frac{1}{\beta_r} \operatorname{Ln} \left[ 1 - \frac{w_r - r_i}{\alpha_r} \right] \right\}
\end{aligned}$$

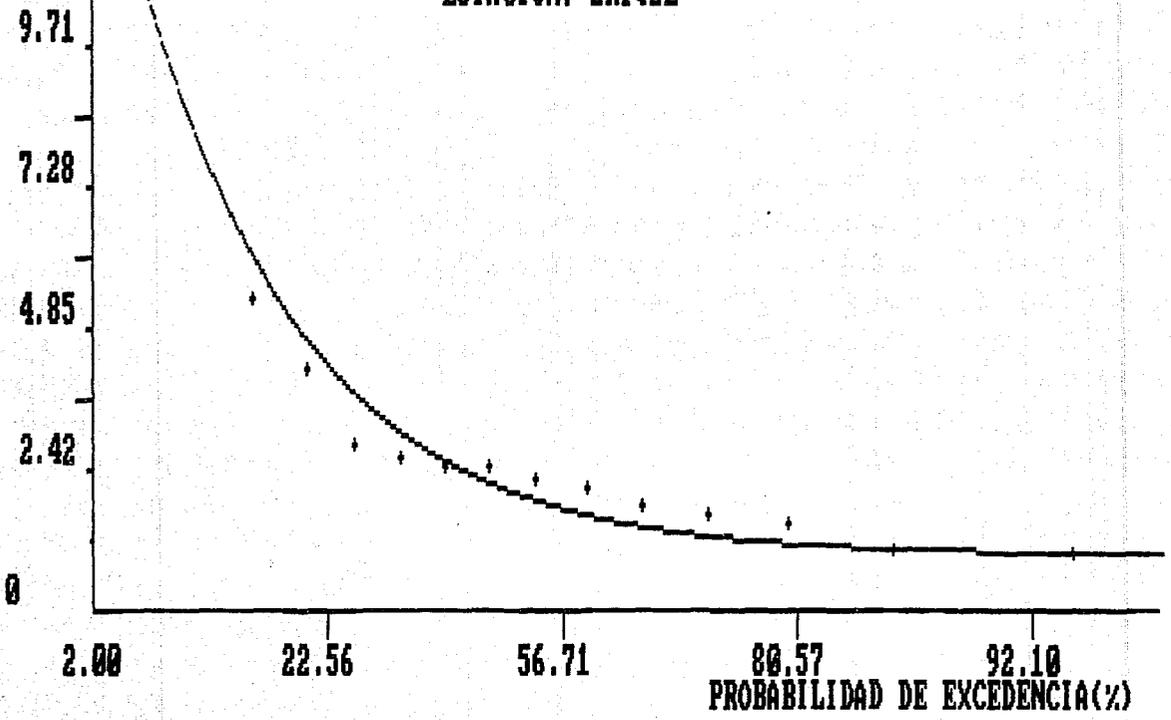
$$\begin{aligned}
\frac{\partial LL(x, y, \theta)}{\partial m} = & I_2 \left\{ \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \right. \right. \\
& + \left. \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right]^{1/m} \left[ \frac{1}{m^2} L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \right. \\
& + \left. \left. \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right] - \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{\beta_1} \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \right. \\
& L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] + \frac{1}{\beta_2} \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \\
& L_n \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right] \left. \right] \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \\
& + \left. \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right]^{-1} \right\} + \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \frac{1}{\beta_1} L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] \right. \\
& + \left. \frac{1}{\beta_2} L_n \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right] \right] - \frac{1}{m^2} L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \\
& + \left. \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right] + \frac{(1-2m)}{m} \sum_{i=1}^{n_2} \left[ \frac{1}{\beta_1} \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right]^{m/\beta_1} \\
& L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right] + \frac{1}{\beta_2} \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \\
& L_n \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right] \left. \right] \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right]^{-1} \\
& + \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \left[ 1 + \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right]^{1/m} \right] \right. \\
& \left. \left[ \frac{1}{m^2} L_n \left[ \left( 1 - \frac{c w_i - x_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left[ 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right]^{\beta_2} \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{\beta_1} \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} L_n \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\beta_2} \left( 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} L_n \left( 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] \\
& \left[ \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{-1} \left[ m - 1 \right. \\
& \left. \left[ \left( 1 - \frac{c w_1 - x_1}{\alpha_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \frac{c w_2 - y_1}{\alpha_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right] \} \quad \text{(A. 4)}
\end{aligned}$$

## APENDICE B

Q(M<sup>3</sup>/S)

FIG. B.1.- ANALISIS DE FRECUENCIAS DE GASTOS MINIMOS  
, GENERAL DE VALORES EXTREMOS (MAXIMA VEROSIMILITUD)  
ESTACION: URIQUE



Q(M<sup>3</sup>/S)

FIG.B.2.-ANALISIS DE FRECUENCIAS DE GASTOS MINIMOS  
GENERAL DE VALORES EXTREMOS (MOMENTOS)  
ESTACION: PALO DULCE

1.58

1.18

.79

.39

0

.68

20.60

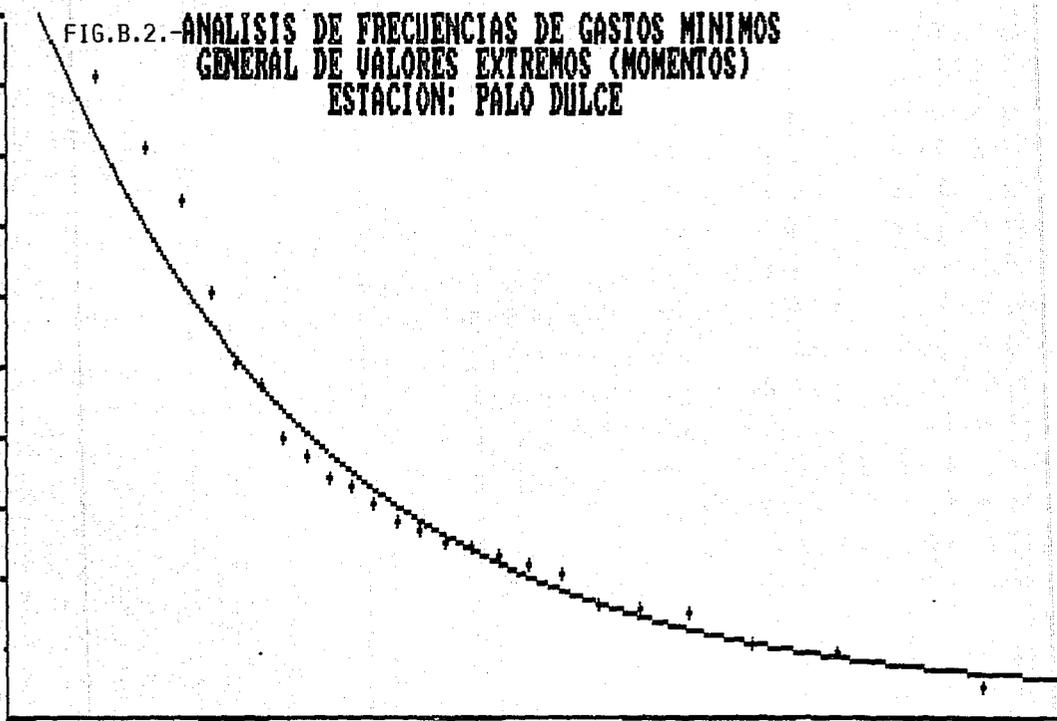
60.60

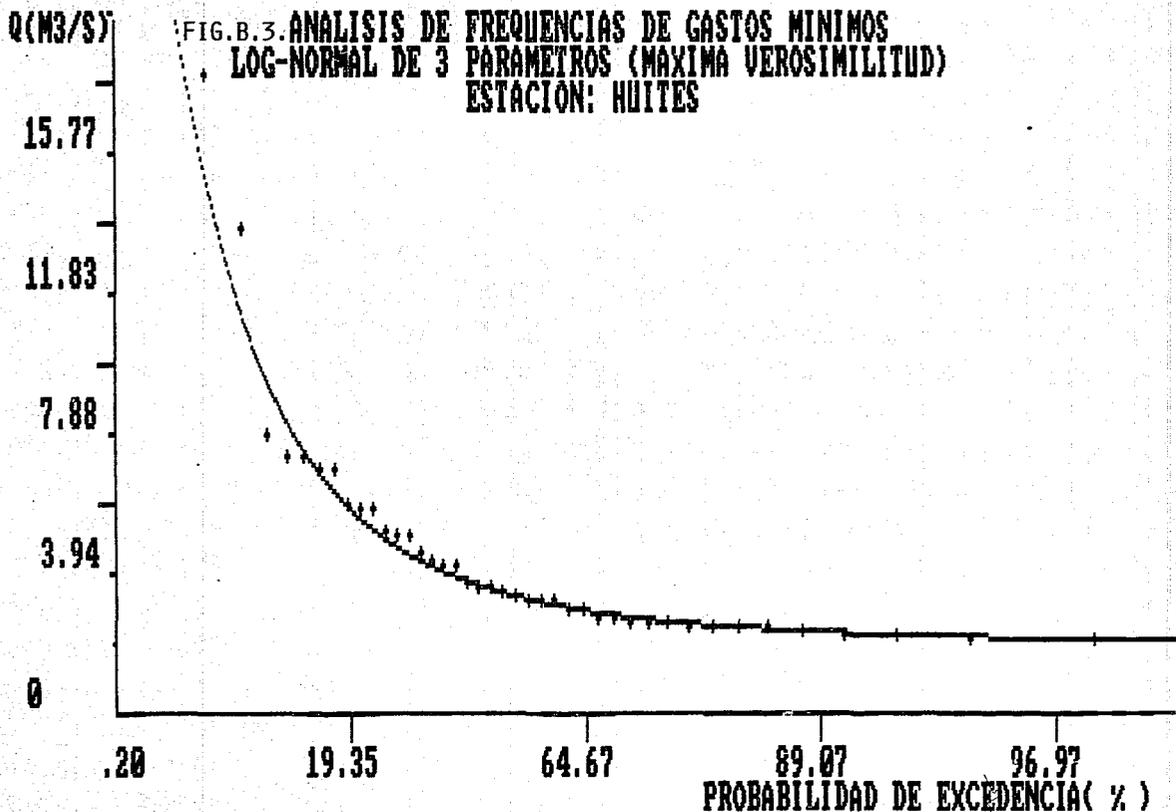
85.32

95.09

PROBABILIDAD DE EXCEDENCIA(%)

107





Q(M<sup>3</sup>/S)

FIG. B.4. ANALISIS DE FRECUENCIAS DE GASTOS MINIMOS  
GENERAL DE VALORES EXTREMOS (MOMENTOS)  
ESTACION: CHOIX

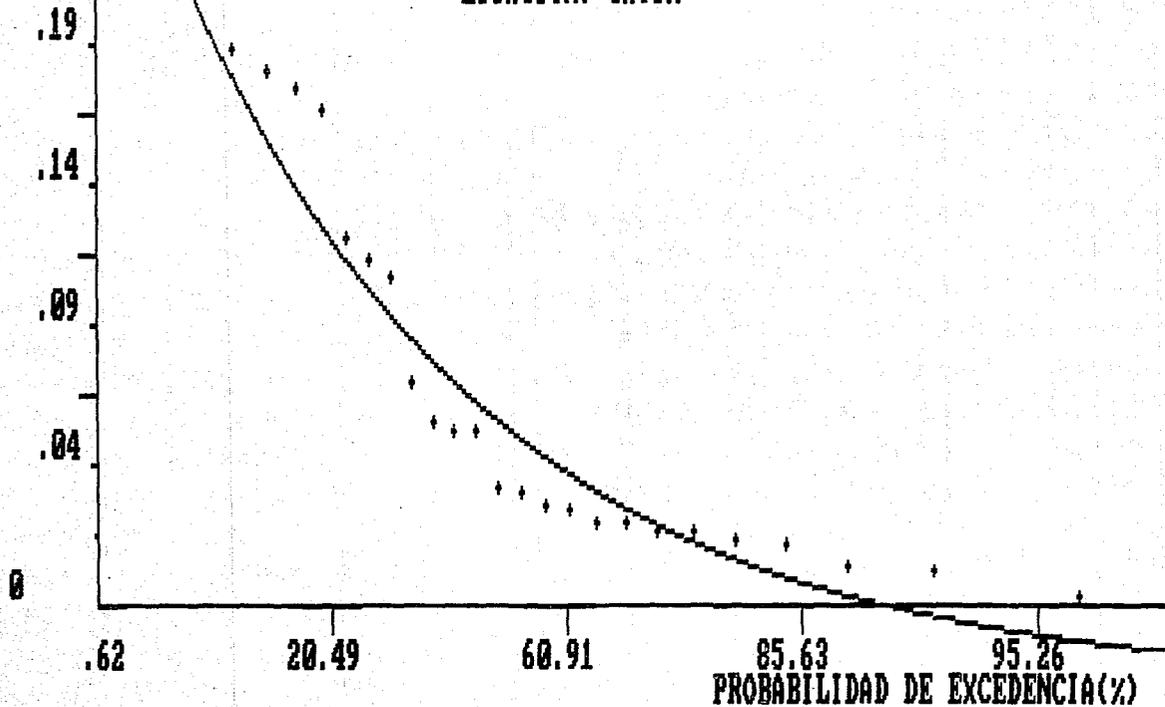


FIG.B.5.- ANALISIS DE FRECUENCIAS DE GASTOS MINIMOS  
 , GENERAL DE VALORES EXTREMOS (MAXIMA VEROSIMILITUD)  
 ESTACION: CHINIPAS

