8

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PLANTEAMIENTO Y EXPERIMENTACION SOBRE PROBLEMAS DE ALGEBRA EN EL NIVEL MEDIO Y MEDIO SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

GABRIELA BUENDIA ABALOS

DIRECTOR DE TESIS :

M. EN C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ

MEXICO, D. F. 1993

INDICE

INTRODUCCION

El presente trabajo presenta una serie de problemas para la enseñanza del Algebra en el nivel medio y medio superior.

Estos problemas aspiran a poner en contacto al alumno con la realidad y a que éste se sienta más atraído para resolver el problema, utilizando un contexto agradable e interesante.

En el primer capítulo se presentan algunas consideraciones generales sobre la resolución de este tipo de problemas.

En los tres restantes capítulos se presentan los problemas propuestos junto con los resultados y observaciones de la experimentación que se llevó a cabo con algunos de ellos.

Además cada capítulo va acompañado de observaciones particulares sobre lo que se aborda en cada uno de ellos.

En el capítulo II están los problemas destinados al primer curso de Algebra; en el capítulo III, aquéllos destinados al segundo curso de Algebra; en el capítulo IV, se presentan los problemas elaborados por los propios alumnos.

Los problemas presentados a lo largo de este trabajo provienen de diferentes fuentes:

- Al plantear los problemas tomados directamente de libros se señala su fuente.

- Los problemas del capítulo IV son problemas inventados por los propios alumnos bajo condiciones que se mencionarán en su oportunidad.

-El resto de los problemas, si no se hace ninguna observación en particular, son problemas de invención propia; tomando como base en la mayoría de ellos problemas semejantes o contextos similares.

Ojalá que este trabajo sea de utilidad para aquéllos profesores verdaderamente interesados en la enseñanza de las matemáticas.

CAPITULO I

CONSIDERACIONES GENERALES

Algebra. Esta materia tiene características propias dentro del gran mundo de las matemáticas.

Los alumnos que por primera vez van a tomar este curso ya han recibido varias opiniones, así que entran, en su mayoría con una idea fija: el álgebra es difícil pero muy necesaria pues se utiliza siempre y en todo.

La abstracción que representa el álgebra, y las matemáticas en general, es uno de los problemas del estudiante para la captación de nuevos conceptos.

Lauren B. Resnick afirma acerca de la naturaleza del aprendizaje lo siguiente:

Primero. La comprensión se construye a partir de las cosas. Los alumnos buscan el significado de ellas.

Segundo. Comprender algo implica conocer relaciones pues el conocimiento humano es almacenado en bloques y organizado dentro de un esquema que las personas utlizan para interpretar situaciones familiares.

Tercero. Todo aprendizaje depende de conocimientos previos. Los estudiantes tratan de relacionar cualquier información nueva en términos de esquemas establecidos.

Los puntos anteriores conforman una base para este trabajo.

Cuando los alumnos reciben información que están acostumbrados a manejar, que les resulta familiar, es posible que el concepto matemático que se trata de inculcar, ya sea por primera vez o para confirmarlo y afianzarlo, sea mucho más fácil de asimilar.

Por otra parte, el álgebra bien puede ser considerada como un idioma; un idioma que enlaza la abstracción de la ciencia con la comprensión humana.

Como tal, las dificultades que presenta son lógicas tanto al traducir del lenguaje común al algebraico como al tratar de traducir el problema algebraico al lenguaje común.

He aquí cómo la realidad personal puede ayudar a saltar este obstáculo, tratando de expresar lo que continuamente se vive en un lenguaje algebraico o realizando el proceso contrario.

Este trabajo pretende mostrar al estudiante que las matemáticas, y en especial el álgebra, no es algo que está muy alejado de su realidad continua.

Los problemas presentados aspiran a ser una ayuda para la comprensión de conceptos que son por primera vez presentados o que se pretende reforzar y ampliar, y sobre todo, una motivación para ir más allá de la situación que se plantea por medio de la profundización y ampliación del conocimiento general.

Se debe tener siempre presente que por lo menos alguna vez en su vida la mayoría de las personas tendrán algo que ver con las Matemáticas.

Para lamento de muchos y alegría de pocos, esta materia está presente en mayor o menor grado en cualquier aspecto de nuestra realidad.

De esta vinculación han surgido tanto aspectos positivos como negativos ya que lleva implícitas dos ideas fundamentales, totalmente opuestas:

1. Llevar las matemáticas hacia el medio ambiente

2. Traer el medio ambiente a las matemáticas

Llevar las matemáticas hacia el medio ambiente es posible, pero peligroso: se pretende encajonar algo tan infinito como la vida misma.

Alcalá y Rezc hablan claramente acerca del alto precio que se ha pagado por la matematización de la realidad.

La causa es que invariablemente se incluye también en este proceso al componente más importante de la sociedad: las personas.

Así, por ejemplo, la informática facilita el acopio de datos cuando se manejan grandes volúmenes de información, característica que no se puede negar.

Entonces, los seres humanos dejan de ser individuos para convertirse en una masa uniforme, identificable sólo por un número.

No se pretende hacer culpable a las Matemáticas por haber convertido nuestra sociedad en sólo un número.

Simplemente por la facilidad con la que permiten algunos procesos, se ha llegado a un aspecto negativo de la matematización del medio ambiente como, por citar un ejemplo, sucede en las grandes Universidades en las que el estudiante no es más que un simple número.

Con base en esta utilidad bien conocida de las Matemáticas, en el sector educativo, como otro ejemplo, suele suceder que las clases de Matemáticas son totalmente áridas al tratar de que el alumno desarrolle su habilidad matemática.

Una vez que se considera suficientemente desarrollada esta habilidad y sin mayor preámbulo, se propone un problema para aplicar lo visto.

Los estudiantes, como seres humanos plenos que son, tienen muchas maneras de abordar el problema: tan distintas como número de estudiantes sean.

Por supuesto, si el tema nunca se vinculó con la realidad no se puede esperar una resolución favorable -que satisfaga al espíritu matemático del profesor- y entonces por necesidades evaluativas del tema, se tendrán que dar recetas para simular una correcta comprensión.

En este caso, el precio pagado es por todos conocido: el alto índice de reprobación justificando que al alumno se le dificulta pensar matemáticamente.

El mismo alumno empezará a cerrarse las puertas argumentando su incapacidad para entender el abstracto mundo de las matemáticas.

Veamos ahora la situación contraria, donde sí existen aspectos positivos cuando se parte del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección.

Es decir, lo incorrecto es enseñar los algoritmos de las matemáticas y de repente pretender ir hacia el medio ambiente para matematizarlo.

La visión correcta se basa en la idea de que enseñar, significa enseñar algo; algo digno de ser enseñado.

La realidad es tan rica en elementos que nos proporciona todas las herramientas necesarias para estimular nuestros pensamientos, para poner en práctica la mayor parte posible de conocimientos adquiridos, para decidir y actuar en una realidad cambiante, sin olvidar nuestra responsabilidad ante la naturaleza.

El objetivo de una clase de Matemáticas, y de cualquier otra materia, es , entre otros muchos, crear en el alumno una actitud positiva hacia esa materia.

Situaciones reales que son vividas por cualquier persona de cualquier edad, sexo o posición pueden resultar verdaderos problemas matemáticos.

Esta vinculación con temas conocidos y vividos hace que el contexto de la enseñanza sea más concreto; además, será agradable trabajar dentro de él.

Todo lo que se aprende sirve para algo. Sin embargo, no es posible convencer sólo con argumentos a un estudiante de esta utilidad.

Algunos ejemplos de esta utilidad real pueden presentarse si se le da una visión global de las relaciones de las matemáticas con las demás materias, con la vida misma y del papel que juegan.

Y no sólo presentarse, sino estimular al alumno para que él mismo encuentre y desarrolle estas relaciones.

Podría resultar, entonces, que la educación impartida se enriqueciera considerablemente.

No se obliga a un dominio absoluto de las matemáticas, sino al contrario, que se vea en ellas una herramienta posible para que el alumno y cualquier miembro de la sociedad se sienta capaz de utilizarlas en caso necesario o por lo menos de comprender varios aspectos del desarrollo moderno.

Es importante que nunca se pierda la oportunidad de nuevas experiencias tanto de acción como de conocimiento sólo porque éstas incluyen algo de Matemáticas.

Sin embargo, hay temas de Matemáticas , sobre todo al principio de la formación del estudiante, que son difíciles de ligar con la experiencia diaria.

Es, entonces, cuando la experiencia del profesor debe aplicarse para intentar crear un entorno adecuado para la enseñanza de esos temas.

Posiblemente parezca que de esta manera se esté falseando un poco la realidad abstracta de las Matemáticas y que en lugar de darle a conocer al alumno esta abstracción, se le presente una Matemática totalmente alterada.

Aun así, y esto en opinión estrictamente personal, es indispensable que sobre todo en los primeros niveles se desarrolle una actitud favorable hacia esta materia.

A medida que el interés se vaya despertando, la abstracción que representan las Matemáticas podrá ir dejando de ser un pozo obscuro y sin fondo en el que muchos estudiantes caen innevitablemente.

De otra manera, empujando al alumno desde un principio en ese mundo nuevo y sin ningún lazo que lo conecte con lo que él siempre ha vivido, no se podrá esperar jamás que tenga éxito en su vida escolar.

Por otra parte, uno de los aspectos que se presentan en el proceso de la resolución de problemas y que debería considerarse como parte inherente a él, es el error.

El error que el alumno comete al resolver un problema o llevar a cabo un algoritmo merece ser considerado como fuente de conocimiento.

Al maestro le permite detectar dificultades conceptuales de las que no había sido conciente y que pueden afectar a buena parte de sus alumnos, o dificultades de comprensión en la lectura, incluyendo términos desconocidos para los alumnos.

Con este fin, en algunos de los problemas que a continuación se presentan, se incluyen los resultados de la aplicación de esos problemas a un grupo de alumnos junto con comentarios acerca de las dificultades generales que se observaron tanto en relación al contexto como a la resolución del problema.

Esto puede ser de gran ayuda para el maestro pues él es un factor esencial para que la resolución de problemas se convierta en una actividad interesante y productiva.

Es importante que el maestro anime a los estudiantes a explorar cualquier idea o estrategia que pueda ayudar a entender y/o resolver el problema, sin censurar ideas generales ni forzar el surgimiento de la resolución que él cree correcta.

Asi pues, el proceso de resolución de problemas se convierte en un círculo que envuelve al maestro, alumno y medio ambiente.

CAPITULO II

MATEMATICAS II

II.1 TEMARIO

El temario de acuerdo a la Universidad Nacional Autónoma de México para el curso de Matemáticas II en Segundo de Bachillerato (Segundo de Secundaria de acuerdo a la Secretaría de Educación Pública) es el siguiente:

I. Conjuntos

- -Idea intuitiva de conjunto
- -Conjunto unitario, vacío, universal
- -Definición de conjunto. Notación y simbolismo
- -Conjuntos iguales, diferentes, ajenos y equivalentes.
- -Subconjunto propio e impropio
- -Unión, interseción, complemento
- -Diagramas de Venn

II. Relaciones

- -Pares ordenados y producto cartesiano
- -Correspondencia y correspondencia biunívoca
- -Números cardinales, naturales, reales
- -Recta o eje numérico

III. Funciones

-Concepto de función, dominio y contradominio

-Valor de una función en un punto

-Gráficas de funciones lineales y cuadráticas

IV. Lenguaje algebraico

-Expresión algebraica

-Traducción de expresiones algebraicas al lenguaje llano y viceversa. Término algebraico, coeficiente y exponente

-Clasificación de expresiones de acuerdo con el número de términos

-Valor numérico de expresiones algebraicas

V. Operaciones con monomios y polinomios

-Suma, resta, multiplicación, división

-Productos notables

VI. Factorización

-Factor común

-Diferencia de cuadrados

-Trinomio de segundo grado y trinomio cuadrado perfecto

-Fracciones algebraicas

VII. Ecuaciones de primer grado

-Propiedades fundamentales de las igualdades

-Desigualdades

-Aplicación de las operaciones fundamentales a las ecuaciones

-Ecuaciones con paréntesis y denominadores

-Problemas de aplicación

VIII. Sistema de ecuaciones de primer grado

-Resolución por reducción, igualación, sustitución, determinantes y método gráfico

-Problemas de aplicación

IX. Exponentes y radicales

-Definición y elementos de una potencia

-Exponentes positivos, negativos, unitario, nulo y fraccionario

-Leyes generales de los exponentes

-Conversión de exponentes fraccionario a radicales y viceversa

-Introducir un coeficiente al radicando

-Simplificación radicales

-Radicales semejantes

-Reducir radicales de distinto índice a otros de igual índice

-Operaciones con radicales

-Racionalización

X. Ecuaciones de segundo grado

-Clasificación de las ecuaciones de segundo grado

-Resolución de ecuaciones completas e incompletas

XI. Logaritmos

- Definición, propiedades y su demostración
- Uso de tablas
- Aplicación a las operaciones aritméticas.

En función de la limitación de tiempo al impartir el curso y para los fines algebraicos de este trabajo, lo que abordan los problemas propuestos es del tema IV al VII con alguna mención del tema I y III.

De ninguna manera, esto es restrictivo pues esos temas son lo que constituyen la base para el siguiente grado; además, en Matemáticas IV los temas son esencialmente los mismos.

II.2 PROBLEMAS

Todos los problemas son considerados modelo. Las situaciones pueden ser mucho más diversas, aumentando o disminuyendo el grado de dificultad de acuerdo a las necesidades que se vayan presentando.

Así, uno de los propósitos es que al elegir algún problema de los que se presentan, el propio profesor pueda modificar el contexto de tal manera que sea adecuado a los intereses del grupo que tenga en esos momentos enfrente.

No sería posible escribir todas las diferentes formas en las que puede presentarse un problema debido a que es muy probable que siempre exista un grupo al que no le interese ninguna de ellas. Por lo tanto, reitero que estos problemas deben cosiderarse única y exlusivamente como modelos que sirvan para la propia creatividad del profesor.

Por otra parte, se intenta que el contexto del problema infiera una solución, y no que ésta se encuentre a simple vista.

Es decir, se evita hasta donde es posible, utilizar palabras "matemáticas" y en su lugar se menciona el uso o definición de esa palabra.

Lo anterior es con el objetivo de crear un verdadero problema, es decir, que los problemas provoquen la interacción del alumno con situaciones que los obliguen a comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos o rechazarlos para formar conocimiento nuevo.

Así, la estructura de estos problemas difiere de la de los propuestos en los libros de texto: los datos para su solución no están presentados de forma inmediata, sino que el alumno tiene que buscarlos dentro del contexto, rechazar muchos que están de más e incluso obtener datos necesarios que no se encuentran implícitamente en el contexto.

Algunos de estos problemas fueron experimentados directamente con los alumnos con el fin de observar las dificultades que se presentan en cuanto al entendimiento del contexto y la manera cómo son resueltos.

La experimentación se llevó a cabo de dos maneras: resolviendo el problema por escrito o conjuntamente por el profesor y la clase.

En el primer caso se presenta una gráfica con el vaciado de datos y en el último, se hace una reconstrucción lo más apegada posible del diálogo del proceso de resolución que siguieron los alumnos y, en ambos, se hacen los comentarios pertinentes.

En los diálogos, los alumnos son representados por medio de letras, y el profesor queda indicado tal cual.

La mayoría de estos problemas experimentados se aplicaron cuando se estaba viendo el tema correspondiente, con el propósito de aclararlo lo más posible; en este caso se supone que los alumnos conocen la parte previa del programa mencionado con anterioridad.

Otros fueron aplicados algún tiempo después con el propósito de analizar las herramientas utilizadas.

Hay otros casos en los que se introdujo el tema con un problema determinado; si así sucedió se hacen los comentarios respectivos.

Finalmente, para cerrar el problema, se anexa la solución sugerida por el autor del presente trabajo sin que por ello se entienda ni que es la mejor ni la única solución, simplemente como un ejemplo de solución.

El hecho de poner la solución al final del problema pretende motivar al lector a tratar de resolverlo con sus propios recursos comparando sus respuestas incluso con las de los estudiantes y finalmente con la solución sugerida.

Es claro, nuevamente, que de ninguna manera la solución sugerida es universal y cualquier otra solución distinta dada puede considerarse como un aumento en la capacidad propia de resolución de problemas.

TEMA I. Conjuntos

PROBLEMA 1

Ponchito, experimentado guía de turistas, estaba apuradísimo haciendo cuentas cuando llegó su compadre:

-¡Qué tal compadre! Te veo preocupado.¿Qué haces?

-Pues aquí, por boquiflojo estoy metido en un lío.

-¡A qué compadre! ¿Qué fue lo que hiciste?

-Mañana voy a llevar a mi grupo a recorrer 3 lugares y me ofrecí a comprar los boletos de entrada para ellos por adelantado.

-¡Qué bueno es mi compadre!

-¡Ni tanto! Les pedí que me apuntaran quiénes querían ir a esos tres lugares y yo recopilé esto:

14 personas quieren ir a la Torre Latinoamericana
13 personas quieren ir al Museo de la Ciudad de México
11 personas quieren ir a la Torre y al Museo
12 personas quieren ir a la Torre y al Templo Mayor
10 personas quieren ir al Museo y al Templo Mayor
10 personas quieren ir a los tres lados

Para acabarla de amolar, uno de mis clientes me dijo que mañana iba a ir a ver a su tía y no va a estar con nosotros.

-¡Con razón compadre! Con tantos clientes, cómo no se va a revolver.

-Pues si sólo son 20 turistas. ¿Cómo voy a saber cuántos boletos comprar si además no puedo volver a preguntar pues ya todos se fueron de parranda?

-Está difícil, compadre.

-Eso no es todo. Para que los que van a ir a un sólo lado no se aburrieran, les prometí llevarlos a un buen lugar para comer. ¿Cuántas reservaciones tendré que hacer, incluyendo la mía? ¿Quién podrá ayudarme?

EXPERIMENTACION.

Este problema se aplicó a 19 equipos compuestos cada uno por 5 alumnos y entregaron la solución por escrito. Ninguno de ellos obtuvo una solución totalmente correcta.

Los métodos utilizados fueron principalmente a base de dibujos, representando por medio de barras a los clientes y agrupándolos conforme al contexto.

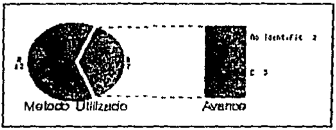
Ninguno de ellos se acercó a la solución correcta (caso A).

Hubo equipos que decidieron utilizar conjuntos para encontrar la solución. (caso B)

De los equipos que no utilizaron ni conjuntos ni dibujos, únicamente se limitaron a escribir cantidades al azar para determinar la solución.

En cuanto a los que utilizaron conjuntos, la mayoría identificó la intersección de los tres conjuntos (caso C); sin embargo, al obtener las demás intersecciones no se tomó en cuenta que ya existía una cantidad en la intersección de los tres.

Los datos anteriores están reflejados en la siguiente gráfica:



Después de este análisis es conveniente comentar que la idea de conjuntos, la solución con la que se obtuvieron los mayores avances, es manejada en forma vaga por el alumno pues, aunque los diagramas los manejan de manera adecuada, la idea de intersección no se toma en cuenta cuando se trata de hallar los números restantes de los conjuntos que conforman la intersección.

SOLUCION PROPUESTA

Tenemos sólo 20 turistas y los siguientes planes:

Plan A: Torre Latinoamericana

Plan B: Museo de la Ciudad de México

Plan C: Templo Mayor

La solución que se propone es utilizar conjuntos.

Cada plan será representado por un conjunto.

El guía de turistas tiene 10 personas que desean ir a los tres lugares. Por lo tanto, la intersección de los tres conjuntos serán esas 10 personas. (Diagrama 1)

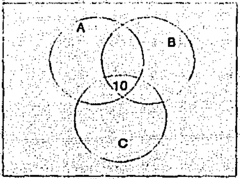


DIAGRAMA 1

Se sabe que las personas que van a ir a A y C (Torre y Templo) son 12 y representan la intersección de estos dos conjuntos.

Tenemos ya marcados en esta intersección los 10 anteriores, por lo tanto sólo 2 personas (12-10) asistirán sólo a A y C. (Diag. 2)

Analizando la intersección de B y C (Museo y Templo) vemos que son 10. Ya tenemos 10 marcados, por lo tanto los que asistirán sólo a B y C son cero (10-10). (Diag. 2)

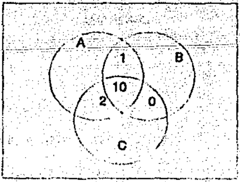


DIAGRAMA 2

En cuanto a intersecciones sólo falta obtener la de A y B (Torre y Museo) que, según los datos, es 11. En el diagrama 2 hay marcados 10 en esta intersección, por lo tanto, falta 1 para completar la intersección.

Obtendremos ahora cada conjunto por separado.

Para B (Museo) tenemos según los datos 13. En el diagrama 3 hay marcados para el conjunto B, 11 (10+1), por lo tanto faltan 2 para completarlo.

Para A (Torre) tenemos por los datos 14. Marcados en el conjunto A del diagrama 3 son 13 (10 + 2 +1) por lo tanto falta 1 para completar al conjunto A.

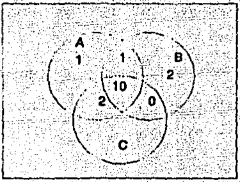


DIAGRAMA 3

No tenemos el dato de los que sólo van a ir a C (Templo).

Sumemos los datos obtenidos hasta ahora según el diagrama 3:

1 + 1 + 2 + 2 + 10 + 0 = 16

Tenemos 16 turistas. El grupo es de 20 turistas pero uno de ellos se fue y sólo quedan 19.

Por lo tanto faltan 3 personas (19 - 16) que son los que sólo van a ir a C. (Diagrama 4)

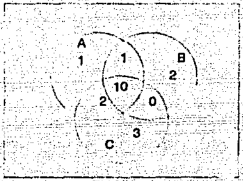


DIAGRAMA 4

De este último diagrama tenemos que:

Para la Torre Latinoamericana (Conjunto A), Ponchito comprará 14 boletos (10 + 2 + 1 + 1 = 14)

Para el Museo de la Ciudad de México (Conjunto B), comprará 13 boletos (10 + 2 +1 +0 =13)

Para el Templo Mayor, comprará 15 boletos (10+ 2 + 3 + 0 =15)

De este mismo diagrama se obtiene que:

Asistirán sólo a la Torre (A): 1 persona

Asistirán sólo al Museo (B): 2 personas

Asistirán sólo al Templo (C): 3 personas

Por lo tanto, los que sólo asistirán a un lugar serán 6 personas (1 + 2 + 3)

Ponchito tendrá que hacer 6 reservaciones; más la suya serán 7 reservaciones en total.

OTRAS OPCIONES

Dentro del mismo contexto pueden plantearse otros problemas que resulten también cotidianos, como el siguiente ejemplo:

PROBLEMA 2

El jefe de reparto del grupo editorial Matemático estaba desesperado pues tenía que repartir entre los suscriptores las diferentes publicaciones del Grupo: Revista Matemática Educativa, Periódico Interés Matemático y Anuario Curiosidades Matemáticas.

La lista que tiene de suscriptores es la siguiente:

14 de la Revista

13 del Periódico

11 de la Revista y del Periódico

12 de la Revista y el Anuario

10 del Periódico y el Anuario

10 de las tres publicaciones

El sabe que el Grupo Editorial sólo tiene 20 suscriptores.

Además a las personas que sólo reciben una publicación tiene que enviarles unos folletos publicitarios de las otras dos.

¿Alguien podría decirle cuántas revistas, anuarios y periódicos tiene que pedir a imprenta?

Y, ¿cuántos folletos de cada publicación tiene que también pedir a la imprenta?

SOLUCION

La solución es exactamente la misma que la anterior salvo por dos variaciones:

1. El total de los suscriptores es 20 sin ninguna disminución, así que los que pertenecen sólo a C son uno más: 4.

2. Los folletos publicitarios que tiene que enviar.

Recordemos el diagrama resultado incluyendo los nuevos datos:

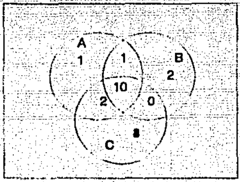


DIAGRAMA 5

El conjunto A es la Revista, el conjunto B es el Periódico y el conjunto C es el Anuario.

Existe un sólo suscriptor de la Revista (A) por lo tanto se le enviarán 2 folletos publicitarios. (uno del periódico y otro del anuario)

Del conjunto B tenemos 2, por lo tanto a cada uno se le enviarán 2 folletos y serán enviados 4 folletos en total. (dos de la revista y dos del anuario)

En el conjunto C existen 4 suscriptores y cada uno recibirá 2 folletos. Serán enviados 8 folletos. (4 de la revista y 4 del periódico)

Así, en total el editor debe pedir 14 folletos a la imprenta; 5 folletos publicitarios del periódico, 3 del anuario y 6 de la revista.

TEMA III. Funciones

Dentro de la resolución de problemas, el alumno enfrenta diversas situaciones que le son ajenas. Una de ellas es la comparación de soluciones posibles para obtener la respuesta que se pide que lo cual lo lleva a un análisis más completo.

En el siguiente problema se maneja el concepto de función partiendo de una relación y además se presenta la posible existencia de más de una solución.

PROBLEMA 3

La nueva agencia de viajes estaba por fin dando servicio. Sin embargo, tenía muy pocos clientes.

El gerente decidió reunir a sus promotores y encargarles el diseño de un atractivo paquete de viaje para grupos rumbo a Europa.

Todos los paquetes fueron diseñados para ofrecerlo a una o dos personas y éstas serían las encargadas de juntar el grupo. La única limitante en cuanto al cupo era la capacidad del vuelo charter contratado: 40 personas.

Estos fueron tres de los planes que se presentaron:

PAQUETE 1

El viaje a cada persona del grupo costará 1 000 dólares, pero si logran juntar más de 20 personas, cada persona extra que vaya contribuirá no con su pago sino con un descuento del 5% aplicado siempre sobre la tarifa que hubieran pagado los 20 pasajeros.

PAQUETE 2

El viaje a cada integrante del grupo le sale en 1 000 dólares.

Por cada 10 personas que se junten se hará un descuento del 50% a uno de los integrantes.

PAQUETE 3

El viaje a cada persona le cuesta 1 000 dólares. Por cada 20 personas que se junten, la agencia de viajes regalará un boleto con destino a cualquier playa con validez por un año contando a partir de la fecha del regreso del viaje a Europa.

El promotor que propuso este último paquete aclaró en su presentación que el costo de ese boleto es a lo más de 500 dólares.

El gerente después de escuchar los paquetes y analizarlos detenidamente decidió correr a uno de los promotores y de los otros dos, al mejor le subió el sueldo.

¿A quién corrió y a cuál le subió el sueldo?

DIALOGO DE LA RESOLUCION CONJUNTA

A: Vamos a ver primero el primer paquete. Yo obtuve el 5% de cada boleto de las veinte personas extras; es decir, multipliqué 0.05 por 1000, el precio del boleto, lo cual me da 500. Eso lo multipliqué por las 20 personas y me da 10 000.

B: O sea que con esos 1 000 dólares va una persona gratis.

Prof: Según esta solución, las 20 personas extras pagan lo mismo sólo que con un cinco por ciento de descuento cada una.

C: Pero el contexto del problema dice que el descuento es sobre la tarifa que pagarían los veinte iniciales, no sobre el precio del boleto de cada nuevo comprador, porque de hecho cada nuevo comprador no paga nada.

Prof: Veamos, si van 20 personas, ¿cuánto dinero tienen que entregar a la agencia?

Varios: 20 000 dólares

D: Entonces, la persona 21 ya pagaría los 1 000 dólares con el 5% de descuento.

C: No, pues es lo mismo que hace rato. El 5% de descuento se hace pero sobre los 20 000 dólares de las 20 personas y la persona 21 no paga nada.

Prof: Así, si van 21 personas, cuánto recibirá la agencia.

C: Multiplicamos 20 000 por 0.05 y nos da 1 000 dólares de descuento por lo que la agencia recibirá 19 000 dólares.

Prof: Ahora analicemos si van 22 personas.

E: La agencia recibirá 18 000 dólares

A: No es verdad, porque si sacamos el 5% de descuento sobre los 19 000 dólares que teníamos me da 950 dólares de descuento, por lo que para una persona más se pagará 19 000 menos 950, es decir 18 050 dólares.

C: Claro que no, pues otra vez el descuento debe hacerse sobre la tarifa de los 20 sólo que ahora son dos personas extras. Sacamos el descuento dos veces sobre la misma tarifa y efectivamente nos da 18 000 dólares.

A: O sea, un descuento de 1 000 sobre los 20 000 dólares por cada persona extra.

Prof: Así es, ahora sigamos y llenemos el cupo.

C: Si van los cuarenta pasajeros, el grupo no pagará nada.

(risas generales...)

Prof: ¿Podrías escribir lo que estamos platicando?

D: (Escribe)

Pasajeros	Dinero que entregará el grupo a la agencia
1	1 000
2	2 000
:	:
:	:
19	19 000
20	20 000
21	21 000
:	:
40	0

B: Seguro a este promotor lo corrieron

Prof: Antes de sacar conclusiones acabemos con las otras opciones.

X: En la segunda opción si van 10 personas, se juntan 10 000 y sólo a una de esos diez se le va a hacer el descuento.

Y: Por lo tanto, entre los diez van a pagar 9 500, pues sólo uno de ellos paga 500 y los demás los 1 000.

Z: Multipliquemos 9 500 por cuatro.

Prof: ¿Por qué por cuatro?

Z: Porque se van a formar a lo más cuatro grupos de 10 personas.

Y: Tenemos que la agencia recibirá 38 000 y sin el descuento debió haber recibido 40 000, por lo que regaló 2 000.

X: En la tercera opción sólo tenemos que restar al final el costo de dos boletos.

C: La agencia perderá 1 000 a lo más.

B: Bueno, hay diferentes modos de pensarlo pues en el tercer paquete, la agencia recibe los 40 000 y el boleto es un regalo a parte, mientras que en los anteriores no. Si lo vemos desde el punto de vista de las ganancias netas de la compañía, entonces efectivamente pierde sólo 1 000

A: De cualquier modo el tercer paquete realmente es el mejor mientras que al promotor del primero lo corrieron.

B: Y también está muy bien que después de llegar de Europa a los dos que les toquen los boletos, se puedan ir a la playa.

SOLUCION PROPUESTA

Analizaremos cada uno de los paquetes propuestos:

PAQUETE 1

Estableceremos, primero, el precio hasta los 20 turistas:

$P(x) = 1\ 000\ x$

donde x representa el número de turistas y P(x) denota el precio a pagar que depende del número de turistas.

El descuento es del 5% sobre la tarifa que pagarán los 20 turistas (20 000) por cada persona extra que asista:

El descuento es: $0.05x * 20\ 000$

Entonces lo que el grupo tiene que entregar a la agencia es:

$D(y)= 20\ 000 - (0.05y)(20\ 000)$

Donde, " y " es el número de personas extra a partir de 20 que irá, y D(y) es el precio que pagará el grupo incluyendo el descuento. Veamos, ahora, cuándo se pagó, por ejemplo, 10 000.

Si vemos la primera relación P(x), tenemos que si x = 10 entonces P(10) = 10 000.

Si vemos la segunda relación D(y), tenemos que si y = 10 entonces D(10) = 10 000. Es decir, que si van 10 personas más de las 20 (30 personas) entonces se pagará en ambos casos 10 000.

A partir de aquí, se espera que el alumno se percate de que a medida que aumente el número de personas el precio irá disminuyendo tal y como iba aumentando antes de los 20 turistas.

Así, vemos que si el múmero de personas es de 40 entonces

y = 20 y D(y) = 0.

Es decir, si van 40 personas al viaje entonces todo el grupo irá gratis.

PAQUETE 2

En este paquete al juntar 10 personas hay un descuento del 50% para uno de los integrantes.

Es decir, en lugar de pagar 10 000, se pagaría 9 500 en total.

Si se logran juntar otros 10 entonces se deberían pagar 19 500 dólares y con el descuento se van a pagar 19 000 dólares.

Al juntar otros 10 (30 personas en total) se deben pagar 29 000 y con el descuento se pagan 28 500 dólares.

Finalmente, al llegar al límite máximo, entonces se deberían pagar 38 500 dólares, pero con el descuento se pagan 38 000 dólars.

Sin ningún tipo de descuento, la agencia debería recibir 40 000 dólares por el grupo de 40 personas y sólo recibirá 38 000 dólares, por lo que ha regalado 2 000 dólares.

PAQUETE 3

Si se llegan a juntar las 40 personas entonces la agencia a lo más desembolsará 1 000 dólares por concepto de dos boletos gratis.

•En este tercer paquete la agencia pierde menos y puede resultar más atractivo y novedoso regalar un viaje que hacer un descuento.

Así, el promotor del paquete 1 fue despedido y al promotor del paquete 3 se le aumentó el sueldo.

La solución que dieron los alumnos dista de ser formal; sin embargo, la lógica que van siguiendo es muy adecuada y es a partir de ella se pueden -y deben- ir formalizando la escritura de resultados, como por ejemplo, establecer la expresión de la realización de pagos.

El siguiente problema problema fue tomado textualmente de El Hombre que Calculaba

Algunas modificaciones como datos extra fueron hechas para facilitar a los alumnos encontrar el problema.

PROBLEMA 4

Hace algún tiempo un par de hermanos árabes pidieron la ayuda de un mercader para poder vender sus melones en el mercado local. Este mercader era un buen hombre y aceptó el trato.

Fue al mercado y realizó la venta. Sin embargo, al entregar cuentas no todo salió bien. He aquí su relato:

"Los dos hermanos, Harim y Hamed, me encargaron que vendiera en el mercado dos grupos de melones.

"Harim me entregó 30 melones que debían ser vendidos al precio de 3 por 1 dinar; Hamed me entregó también 30 melones pero estipuló un precio más alto: 2 melones por 1 dinar.

"Lógicamente, una vez efectuada la venta Harim tendría que recibir 10 dinares (30 melones en grupos de 3 hacen 10 grupos de un dinar cada uno) y su hermano 15 dinares (30 melones en grupos de 2 hacen 15 grupos de un dinar cada uno) .

"El total de la venta serían, pues, 25 dinares (10+15=25).

"Sin embargo, al empezar la venta pensé que si ofrecía primero los melones más caros, iba a perder los clientes y si empezaba por los más baratos, me iba a costar trabajo sacar los demás.

"Lo mejor era vender los dos grupos al mismo tiempo. Reuní los 60 melones y los vendí en lotes de 5 melones indistintamente por 2 dinares porque si tenía que vender 3 por 1 y luego 2 por 1 entonces era lo mismo vender 5 por 2.

"Vendí los 60 melones (30 + 30) en 12 lotes de cinco cada uno y recibí 24 dinares. (60 melones en grupos de 5 hacen 12 grupos de 2 dinares cada uno)

"Se suponía que a un hermano le tenía que dar 10 y al otro 15. Hay una diferencia de 1 dinar, es decir, me falta 1 dinar, pues gané 24 y tenía que pagar 25.

"No me explico esta diferencia pues el negocio se efectuó con el mayor cuidado; ¿qué no es lo mismo vender 3 por 1 y luego 2 por 1 que vender 5 por dos dinares; es decir, juntar los melones de dos grupos distintos y sumar el dinero? "

Esta es la historia. El mercader, repito, es un hombre honrado.

¿Qué fue, entonces, lo que hizo mal este hombre?

SOLUCION PROPUESTA

(NOTA: En algunos problemas se presenta la solución propuesta antes de la experimentación debido a que dicha solución contempla las diferentes maneras como los equipos resolvieron el problema y el análisis de la experimentación hace referencia a tales métodos; este es uno de ellos)

Sin recurrir al Algebra y razonando el problema se puede encontrar el error: el mercader no debió formar los grupos de 5 melones usando indistintamente los melones de los dos conjuntos.

Lo que debió haber hecho, continuando con esta PRIMERA versión del error, es lo siguiente:

Supongamos que * son los melones de Harim (3 por 1) y # son los de Hamed (2 por 1). Los grupos de cinco debieron haber sido

*** *** *** *** *** *** *** *** *** *** = 30 melones

\## ## ## ## ## ## ## ## ## ## = 20 melones

Es decir, los melones de Harim se acaban antes y faltan 10 de Hamed por vender. Si el precio por grupo es de 2 dinares, hasta aquí la ganancia es 20 dinares.

Los cinco dinares restantes para entregar buenas cuentas podrían salir de los 10 melones que faltan: dos grupos de dos y medio dinar cada uno.

Esto es una buena versión para mostrar lo que el mercader debió haber hecho si es que quería juntar los dos conjuntos de melones; pero, no es una explicación clara del porqué no es lo mismo vender 3 por 1 y 2 por 1 que 5 por 2 dinares.

Es aquí donde el Algebra, con su uso de letras que denotan cantidades generales, facilita el entender la diferencia. TIPO DE RESPUESTA 2:

Denotemos con "x" el precio de cada melón de Harim; y con "y" el precio de cada melón de los de Hamed. Esta asignación de letras es totalmente arbitraria; pero, facilita la formulación de dos igualdades que incluyan el precio por grupo de melones:

Si "x" es el precio de cada melón de Harim y 3 melones cuestan 1 dinar, entonces si multiplicamos 3 melones por su precio obtenemos un dinar. En notación algebraica, esto queda así:

$$3x=1$$

Si "y" es el precio de cada melón de Hamed y 2 melones cuestan 1 dinar, entonces al hacer la misma multiplicación obtenemos: $2y=1$

En Algebra, recordando, sólo se pueden sumar términos semejates.

Volviendo a las igualdades ($3x=1$; $2y=1$) lo que hizo el mercader fue sumar $3x$ (3 melones de Harim) con $2y$ (2 melones de Hamed), operación que según las leyes del Algebra no se puede hacer porque $3x$ y $2y$ no son términos semejantes.

Esta es una mejor explicación de la equivocación del mercader.

Sin embargo, podría pensarse que esta explicación está un poco "fabricada" ya que desde un principio se estableció la notación de los dos grupos de melones con letras distintas.

Vamos ahora, entonces, a hacer unas pequeñas operaciones en las que el Algebra será también importante. TIPO DE SOLUCION 3:

Supongamos que el precio de cada melón de ambos grupos sea "x". Tendremos las siguientes igualdades:

$3x=1$ (3 melones de Harim a "x" dinares cada uno, dan 1 dinar)

$2x=1$ (2 melones de Hamed a "x" dinares cada uno, dan 1 dinar)

En este caso nada impide juntar (sumar) los dos grupos.

$$\begin{array}{r} 3x = 1 \\ +\quad 2x = 1 \\ \hline 5x = 2 \end{array}$$

Para que 5x sea igual a 2, forzosamente x tiene que valer 2/5, ya que cinco melones a 2/5 cada uno dan 1 dinar:

5 * (2/5) = 10/5 = 2 (el signo * indica multiplicación)

Recordemos el precio que estipulaba Harim al principio:

3x = 1 (3 melones por el precio de cada uno deben dar 1 dinar)

Para que esto sea cierto, "x" debe ser igual a 1/3; ya que, 3 melones de 1/3 de dinar cada uno, hacen 1 dinar.

Tenemos ahora dos diferentes precios:

-el cstipulado, donde x = 1/3

-el creado por el mercader, donde x= 2/5

Sin duda, no puede haber dos precios para el mismo artículo, por lo que el precio obtenido por el mercader es erróneo.

Lo mismo pasa si en lugar de "x" denotamos por "y" el precio de cada melón de ambos grupos.

3y = 1 (Harim)

2y = 1 (Hamed)

La suma es 5y = 2, de donde y = 2/5.

Pero el precio estipulado por Hamed para cada uno de sus melones es de 1/2:

2y = 1 (Hamed), entonces "y" debe ser 1/2 para que dos melones de 1/2 de dinar cada uno, den 1 dinar.

Nuevamente, tenemos precios diferentes: el estipulado (1/2 de dinar) y el calculado por el mercader (2/5), lo que no puede ser posible.

Así, la diferencia entre la cantidad final que entregó el mercader y la que los hermanos le pedía, queda explicada.

Si cada melón de Harim costaba 1/3 ("x") y cada melón de

Hamed costaba 1/2 ("y") entonces la venta total de melones debía ser de 25 dinares:

$30 * (1/3) + 30 * (1/2) = 15 + 10 = 25$

Es decir, 30 melones de Harim a 1/3 cada uno más 30 melones de Hamed a 1/2 cada uno dan un total de 25 dinares.

En cambio, la venta que realizó el mercader con su precio creado (2/5 de dinar) es:

$(30 + 30) * 2/5 = 60 * 2/5 = 24$

Es decir, juntó los melones y vendió 60 melones a 2/5 cada uno, obteniendo sólo 24 dinares.

Como vemos, el uso del Algebra, no es totalmente indispensable. Uno podría vivir perfectamente sin conocerla.

Pero para aquéllos a quienes no les satisfacen las respuestas superfluas "porque sí", "porque así salió" ,el Algebra y las Matemáticas, en general, representan una poderosa herramienta para comprender mejor el mundo en el que vivimos.

Esta es una idea que seguramente será aceptada por cualquier estudiante.

EXPERIMENTACION

Para llevar a cabo la experimentación del problema anterior se aplicaron 10 problemas a equipos de 5 integrantes.

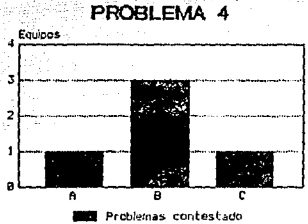
Las soluciones que les dieron fueron muy variadas, aunque principalmente se basaron en los dibujos. Los datos numéricos obtenidos se reflejan en la siguiente ilustración.

De los 10 equipos, 1 equipo contestó la primera de las respuestas propuestas por la solución anterior de este trabajo, aquélla en relación a que después de organizar los grupos hay dos de ellos que deben ser vendidos a 2.5 dinares. (A)

Tres equipos más identificaron los dos tipos de melones como términos no semejantes que no se pueden sumar. (B)

Un equipo más obtuvo el precio de cada melón, a partir de la idea anterior y lo identificó como no semejante con el otro precio y por lo tanto no se pueden sumar. (C)

El resto no contestó nada, aunque sus intentos se basaron en dibujos.



Es importante recalcar que los primeros intentos de todos los equipos giraron en torno a los dibujos y la agrupación de los distintos grupos de melones, aunque después no hayan sido capaces de concluir nada o hayan ido hacia otros métodos.

Esto hace pensar como el alumno tiende casi instintivamente a tratar de dibujar lo que está sucediendo en el problema ya que eso le permite aclarar sus ideas y darse cuenta, por lo menos, de que efectivamente existe problema que resolver.

TEMA VI Factorización y fracciones algebraicas

El tema de factorización es donde se centra gran parte del curso debido a que asienta las bases para el álgebra en general.

PROBLEMA 5

Sergio iba caminando por la ciudad se topó con la estatua de un hombre de la historia que vivió en el siglo XV.

En el pedestal estaba la siguiente inscripción firmada por el escultor:

"Para aquellos muchachos de cuarto de Bachillerato que admiren a este hombre de la historia va este acertijo:

"Si se multiplica el día en el que ese hombre realizó su hazaña por el número de meses enteros que faltaban para terminar el año y por el número que forman las dos últimas cifras de ese año, obtenemos $23\ x^3 + 138\ x^2 - 368\ x$.

"Esta "x" representa tu grado de estudios. ¿Serás capaz de saber quién es sin ver su nombre? "

Por supuesto, Sergio aceptó el trato y se sintió feliz cuando comprobó que su respuesta era acertada. ¿Cómo lo hizo?

EXPERIMENTACION

Para llevar a cabo la experimentación del problema anterior, éste se aplicó a 19 equipos de 3 a 5 integrantes cada uno que reportaron sus respuestas por escrito.

De ellos, 14 obtuvieron la solución de la siguiente manera:

* 2 equipos sustituyeron directamente x=4 en la expresión y dado que se refería a un hecho del siglo XV supusieron que se trataba del descubrimiento de América y al ver que los datos de esa fecha multiplicados entre sí daban el resultado pedido, sugirieron la solución correcta. (A)

* 12 de ellos factorizaron la expresión (B), sustituyeron el valor de x= 4 y obtuvieron la solución de la siguiente manera:

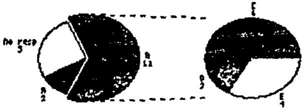
* 6 equipos deciden que los datos obtenidos (92, 2, 12) son, respectivamente, año, mes y día sin mayor explicación. (C)

* 2, decide que 92 es el año pues el descubrimiento de América es el suceso más relevante de ese siglo y por lo tanto, los otros dos datos concuerdan. (D)

* 4, dan un razonamiento similar al propuesto en el presente trabajo. (E)

Estos datos los reflejamos en una gráfica de la siguiente manera:

PROBLEMA 5



El caso de las respuestas tipo A (suponer la respuesta y dado que esa respuesta cumple con los requisitos, entonces es la correcta) es muy común al resolver un problema.

Es decir, en muchas ocasiones cuando se le pide a un alumno explicar porqué tal respuesta es correcta y tal otra es falsa, su justifación gira en torno a que la que es falsa lo es debido a que no cumple los requisitos.

Por ejemplo, en el caso del problema si yo hubiera supuesto cualquier otro evento de ese mismo siglo, como al multiplicar el día, mes y las dos últimas cifras no obtengo el número pedido, entonces no es la respuesta.

En este caso, lo único que se hizo ver a los alumnos es que era un poco fácil suponer una fecha inicial debido a que el evento más notable de ese siglo fue el Descubrimiento de América, pero que no siempre el contexto nos lleva a suponer la solución correcta de inmediato, lo cual hace que el hallarla sea un arduo proceso de ensayo y error.

Sin embargo, esta tendencia natural a suponer datos y probarlos puede y debe ser encauzada positivamente hacia métodos más elaborados y completos de búsqueda y comprobación de soluciones como lo plantea Imre Lakatos en su libro de Pruebas y Refutaciones (1982).

En este libro se demuestra una proposición (en los polígonos regulares el número de vértices, menos el de aristas más el números de caras es la constante 2) de una manera conjunta entre el profesor y los alumnos. La manera como la hacen es precisamente proponiendo pruebas y refutar lo que halla de refutable en ellas, hasta que poco a poco la proposición se va enunciando de una manera mejor con la prueba adecuada.

SOLUCION PROPUESTA

Sabemos que los datos buscados nos dan multiplicándolos

$$23x^3+138x^2-368x$$

Hay que encontrar, entonces, los números que multiplicados nos dan esta expresión, es decir encontrar sus factores.

El alumno puede relacionar que al factorizarse se encuentran precisamente los factores mínimos de una expresión.

Por lo tanto factorizamos:

$$\begin{aligned} &23x^3+138x^2-368x \\ &=23x(x^2+6x-16) \\ &=23x(x+8)(x-2) \end{aligned}$$

Por los datos, se sabe que "x" es 4 ya que el acertijo es para los muchachos de cuarto de Bachillerato.

Si sustituimos x=4 en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} &23x(x+8)(x-2) \\ &=(23\times4)(4+8)(4-2) \\ &=(92)(12)(2) \end{aligned}$$

obtendremos los factores buscados.

El texto dice "... el día en que realizó su hazaña..."

Por los datos obtenidos (92, 12, 2) el día sólo puede ser el 12 ó el 2:

(92) (12) (2)

Continuando, "... por el número de meses enteros que faltaran para terminar el año..."

En este caso, el 12 queda eliminado pues no puede ser que faltaban 12 meses enteros para terminar el año.

El 2, entonces, es el único dato posible para el mes, que sería Octubre (faltan 2 meses enteros para terminar el año.)

Volviendo al día, teníamos la posibilidad del 12 y del 2. El 2 ya quedó eliminado para ser el mes, por lo tanto se trata del 12.

La fecha es el 12 de Octubre.

El tercer dato es, entonces, las dos últimas cifras del año.

Sabemos que la hazaña ocurrió en el siglo XV, por lo tanto las dos primeras cifras son 14.. y las dos últimas serán el factor restante (92) quedando 1492.

La fecha es 12 de Octubre de 1492. Indudablemente se trata de la estatua de Cristóbal Colón.

PROBLEMA 6

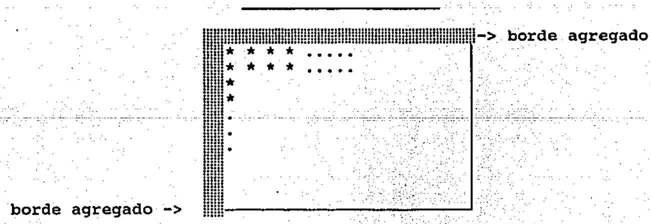
Unas horas antes de que el transbordador Discovery fuera lanzado, la NASA decidió que fuera un tripulante más pues necesitaban datos especiales sobre vida celular. Entre los preparativos que fueron cambiados estuvo el compartimiento de las provisiones alimenticias: una especie de charola cuadrada.

Fue extraída de su compartimiento y se vió que las raciones formaban un cuadro, es decir había el mismo número de columnas que de filas.

Le ajustaron a la charola unos bordes extras a las orillas originales de tal manera que quedó ahora de 1 m^2.

Sobre la nueva charola se agregaron 51 raciones encapsuladas y quedó saturada. Cada ración debe estar separada de las demás y de dos de los bordes que hacen esquina, por 1 dm^2 para poderse manipular y cada ración semeja a la vista humana un punto.

El supervisor checó personalmente cómo había quedado el compartimiento alimenticio:



¿De cuántas raciones disponían antes y después de este cambio?

DIALOGO SOBRE LA RESOLUCION CONJUNTA

Se dibuja una figura en el pizarrón mientras se lee el problema.

Prof: ¿Qué hacemos primero? ¿Cuál es la pregunta?

Varios: Que de cuántas raciones se disponía antes y después.

X: Podría ser a + 51.... (Duda)

Prof: Qué es "a" para tí?

X: "a" es la charola antes de que le pusieran los nuevos bordes.

Varios: No, más bien número de raciones.

Prof: De acuerdo sea "a" el número de raciones antes del nuevo tripulante.

X: Ahora sí, le sumamos 51.

Prof: Le sumamos 51, y qué nos da?

X: Igual a un metro cuadrado.

Prof: Analicemos las unidades. Qué es "a" y "51"

Varios: raciones

Prof: Al sumarlas, qué nos tiene que dar.

X: Bueno, por supuesto no me puede dar como resultado un metro cuadrado.

Y: Es el número de raciones de "b" donde "b" es la nueva charola que mide un metro cuadrado.

Prof: Tenemos la siguiente igualdad:

$$a + 51 = b$$

Qué hacemos ahora?

...(Silencio)...

Prof: Si alguien está pensando algo distinto puede proponerlo.

Z: Veamos, si yo hice un cuadrado de diez por diez en el cuaderno porque se supone que un metro tiene 10 decímetros, entonces lo llené de puntitos y da 100 puntitos. Y le resto 51... (duda). Bueno, el caso es que 100 es el total.

Prof: Ya habíamos planteado algo parecido en una ecuación con dos incógnitas.

Z: Sí, donde "b" era el total; o sea, que b es 100.

Prof: Están de acuerdo todos los demás.

Varios: Sí.

A: Pero como las raciones están separadas de las orillas un decímetro, ¿no tenemos que descontarle una a cada fila?

Prof: Dibuja la fila completa dentro de un cuadrito con las característica pedidas;¿es necesario?

A: No, según el dibujo.

Prof: Ahora hazlo sin la separación que se pide.

A: Entonces, aumenta uno; por lo que entonces sí está bien que se pida la separación.

Z: Tenemos la nueva ecuación: a + 51 = 100 y por lo tanto a es 49.

Prof: ¿Cuál es el resultado finalmente?

Varios: Que antes había 49 raciones y después, 100.

SOLUCION PROPUESTA

Debido a que es una charola cuadrada se puede manejar indistintamente por hileras o columnas.

Denotemos con x el número de raciones que había en una hilera antes del nuevo tripulante y con "y" el número de raciones en una hilera después del nuevo tripulante.

Ya que antes y después la cantidad de raciones formaban un cuadrado, el total de alimentos antes del nuevo tripulante era de x^2.

El total de alimentos después es de y^2.

La diferencia después del agregado es de 51. Es decir,

$$y^2-x^2=51$$

Se busca el valor de "x" y de "y". Para resolver esta ecuación, factorizamos como una diferencia de cuadrados:

$$(y-x)(y+x)=51$$

El número 51 es, entonces, el producto de dos factores. Sólo existen dos posibilidades:

$$1.\ (y-x)(y+x)=(17)(3)$$
$$2.\ (y-x)(y+x)=(51)(1)$$

Se forman así dos sistemas de ecuaciones:

$$1.\ \begin{array}{l} y+x=17 \\ y-x=3 \end{array}$$

$$2.\ \begin{array}{l} y+x=51 \\ y-x=1 \end{array}$$

Si en cada sistema las ecuaciones se acomodan al revés se obtienen resultados negativos, inservibles para nuestro problema.

Sería conveniente que el mismo alumno se percatara de esto probando cada una de las diferentes opciones.

Al resolver el primer sistema de ecuaciones, se obtiene que $x = 7 \quad y = 10$

Del segundo sistema, $x = 25 \quad y = 26$

Para decidir cuál de los dos grupos de datos son los correctos recordemos que después de agregar las raciones se completó 1 m^2 que son 10 000 dm^2

Además la separación entre las raciones es de 10 dm^2.

DESPUES (y)

Sistema 1. $y = 10$ Ocupan 100 cm^2 por lado (10*10)

Ocupan en total 10 000 cm^2

Sistema 2. $y = 26$ Ocupan 260 cm por lado (10*26)

Ocupan en total 26 000 cm^2

Vemos que el sistema 2 sobrepasa el área que se tiene, por lo tanto estos últimos datos deben eliminarse.

Los datos correctos son, entonces, $x = 7 \quad y = 10$

Como "x" es el número de raciones en una hilera, el total de raciones antes del nuevo tripulante era $x^2 = 49$.

Después, fue de $y^2 = 100$

Así que antes se disponía de 49 raciones y ahora de 100. Efectivamente se agregaron 51 raciones.

SOLUCION PROPUESTA ALTERNATIVA:

Denotemos por x los decímetros que ocupaban las raciones antes del nuevo tripulante.

Como cada ración está separada de las demás por 1 dm^2 entonces se agregaron 51 dm^2.

Al final se completó 1 m^2, es decir 100 dm^2. Se deduce que al final había 100 raciones.

Si establecemos la ecuación correspondiente:

$x^2 + 51 = 100$

Al resolverla, tenemos que $x^2 = 49$, de donde $x = 7$.

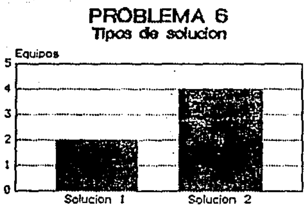
Es decir, había 49 raciones y al final hubo 100 raciones.

EXPERIMENTACION

Este problema se aplicó a 10 equipos de 3 a 5 personas cada uno, los cuales reportaron su solución por escrito.

De éstos, 2 dieron una solución similar a la primera que se propone y 4 dieron la respuesta que aquí se propone como la segunda opción.

Estos datos se reflejan en el siguiente histograma:



Cabe mencionar que este problema se aplicó en un principio sin el diagrama del compartimiento de alimentos y se notó que hubo dificultad para entender la configuración de la charola, es decir que dos de las orillas deben quedar libres y también lo de los bordes extras que se agregan.

Esto da pie a pensar que definitivamente es importante ayudar al alumno con referencias visuales cuando la descripción verbal sea difícil de descifrar. Esto se ratificó cuando fue aplicado nuevamente el problema (del cual se extrajo el diálogo) incluyendo en el planteamiento el diagrama lo cual facilitó la comprensión y se pudo comenzar a resolverlo sin trabas de comprensión de texto.

El siguiente problema es muy interesante pues además de ilustrar la simplificación de fracciones, es un buen ejemplo de la división entre cero.

El hecho de dividir las preguntas, es para facilitar al alumno el orden que debe seguir para averiguar qué es lo que está pasando.

PROBLEMA 7

Se cuenta que el sabio geómetra, y algebrista, Bhaskhara tenía una hija llamada Lilavati. Cuando esta pequeña nació, su padre consultó a un astrólogo para conocer su futuro.

Después de consultar a las estrellas, el astrólogo , encontró que la vida marital de Lilavati estaba determinada por la siguiente expresión algebraica:

"El cuadrado del número de maridos (x) menos uno y todo, sobre ese número (x) menos uno"

El astrólogo no entendía nada de Matemáticas pero aún así se dio cuenta de la desgracia que le esperaba a Lilavati pues sabía que la poliandria estaba prohibida entre las mujeres árabes y la viudez también era un pésimo porvenir.

La única respuesta que se atrevió a dar fue que la vida amorosa de la chica estaba indeterminada.

¿Por qué dice el astrólogo que Lilavati no va a ser afortunada?

Sin embargo, Bhaskhara después de estudiar la expresión decidió que no todo estaba perdido.

¿Qué fue lo que hizo ese gran matemático para salvar a su hija de las predicciones?

¿Lilavati se casará?

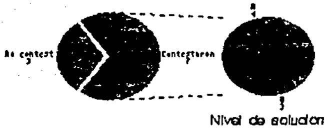
EXPERIMENTACION

Este problema se aplicó a 10 equipos de 5 persona cada uno, reportando su respuesta por escrito.

De estos 10 equipos, 4 solamente identificaron el problema que tiene Lilavati pues al sustituir x=1 en la expresión obtenían una división entre cero y no pudieron determinar el resultado (A) y 3 le dieron la solución correcta factorizando y simplificando la expresión (B).

En la siguiente gráfica podemos ver los datos anteriores:

PROBLEMA 7



Cabe mencionar que al momento de aplicar este problema, los alumnos nunca se habían preguntado el resultado de una división entre cero, por lo que entre las respuestas no surge la palabra indeterminación, sino simplemente que al no poderse hacer, Lilavati no se podía casar.

Posteriormente, esto sirvió de ejemplo para hablar un poco acerca del cero en el denominador de una fracción y cómo, en algunos casos, puede evitarse.

SOLUCION PROPUESTA

La expresión algebraica que determina el destino de Lilavati es:

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

donde "x" es el número de maridos que al menos debe ser mayor o igual que cero.

La poliandria está prohibida, por lo tanto "x" debe también ser menor o igual que 1. En caso de viudez podría ser mayor que 1 pero este pronóstico también es desfavorable.

Si "x" es cero implica que Lilavati no se casará. Entonces, tomando todas las restricciones, $x = 1$

Sustituyendo este valor en la expresión, se obtiene:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

El resultado de la división de cero entre cero está indeterminado, una total desgracia para el astrólogo, pues ignoraba totalmente qué podría resultar o qué podía hacer.

Sin embargo, Baskara se dió cuenta que factorizando se destruye este indeterminación:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

La expresión queda en una equivalente x+1 pero en esta expresión, "x" sí puede ser 1.

PROBLEMA 8

¡Por fin Camila encontró trabajo¡ Junto con sus amigos, organizó una Distribuidora Computacional. El sueldo anual de Camila se fijó en 8 millones y una computadora.

El negocio no resultó muy bueno y a los dos meses Camila fue despedida. Le pagaron por todo el tiempo que estuvo 500 000 y la computadora. Este pago fue justo pues si hubiera continuado trabajando todo el año, hubiera obtenido lo mismo.

¿Cuánto costó la computadora?

DIALOGO SOBRE LA RESOLUCION CONJUNTA

X: Bueno, pues la resolución del problema es muy clara pues simplemente a los 8 millones los 500 000 que le pagaron y entonces la computadora habrá costado 7 500 000.

Prof: De acuerdo. Y los demás, qué opinan?

Varios: ¡No!

Prof: ¿Alguien que me de una buena razón para decir que no?

Y: Porque le iban a pagar los 8 millones más aparte la computadora y no nada más los 8 millones.

Prof: Entonces, ¿qué hacemos?

Z: Pues yo opinio que debemos dividir los 8 millones entre los doce meses del año para saber cuánto le iban a pagar cada mes. Esto nos da 666 666 cada mes. A esto le restamos 500 000 que sí le dieron...

Y: Pero no estás tomando en cuenta que los 500 000 son de dos meses.

Z: Es verdad; entonces, sumamos lo que corresponde a dos meses, ... 1 333 333 y le restamos los 500 000 para obtener el valor de la computadora que es de 833 333.

Prof: Si eso fuera verdad, ¿cómo lo podríamos comprobar?

A: Podríamos ver lo que le iban a dar al año, es decir 8 millones más 833 333 de la computadora y lo dividimos entre doce para compararlo con lo que le dieron.

Y: Nuevamente están en el mismo error de decir que la paga fue de un mes siendo que fue de dos.

A: De acuerdo, entonces lo dividimos entre seis. Esto es, 8'833,333 entre seis.

Y: Bueno, sería lo mismo multiplicar 1 333 333 que son los 500 000 más la computadora, por 6. Y esto nos da... 7 999 999. Podríamos decir que son los 8 millones.

B: Sí, pero al año le iban a dar los 8 millones más la computadora, por lo que el precio de la máquina no puede ser eso. No está tan mal, pero no es ese.

Prof: Para que la respuesta fuera correcta, qué tengo que obtener.

Varios: Así como lo tratamos de rectificar, cantidades iguales.

B: Es decir, que los 500 000 más la computadora multiplicados por 6 debe ser igual a los 8 millones más la computadora.

Prof: ¿Podrías escribir eso?

B: (escribe) 6(500 000 + c) debe ser igual a 8 + c

Prof: ¿Qué es c?

Varios: Es el precio de la computadora.

Prof: No podrías poner ese "debe ser igual" de una forma matemática para que vaya de acuerdo a todo lo demás que escribiste?

B: Podría ser con el signo "="

Varios: Sí!

B: (escribe) 6(500 000 + c) = 8 + c

Prof: Y ahora díganme, cómo resolvemos eso.

A: Es una ecuación y lo primero que hacemos es quitar el paréntesis,...., despejamos c y para eso acomodamos las incógnitas de un lado y los números del otro,..., sumamos términos semejantes,...,despejamos c,... y obtenemos que c = 1'000 000.

Varios: Por lo tanto, el precio de la computadora es de un millón de pesos.

COMENTARIOS

En el diálogo anterior vemos que el error que están cometiendo es que simplemente comparan los pagos en efectivo convirtiendo el anual a un equivalente de dos meses pero el precio de la computadora se está dejando intacto.

Posteriormente, en otro grupo a otro alumno se le ocurrió también dividir el precio de la computadora (x) entre 6 y efectuar así la comparación y aunque la solución no fue hallada al final correctamente, esto también derivó en el planteamiento de la ecuación anterior.

SOLUCION PROPUESTA

Como se está suponiendo que el pago fue justo, este pago y lo que iba a recibir al final del año deben ser iguales.

Denotemos por "x" el valor de la computadora

Por los datos, se sabe que :

8 millones + x es el sueldo anual acordado

500 000 + x es el sueldo que recibió por dos meses trabajados

Para poderlos igualar, se tienen que expresar ambos de la misma manera; digamos, mensual.

$$\frac{8\ 000\ 000+x}{12} \text{ es el sueldo anual pactado}$$

$$\frac{500\,000+x}{2} \text{ es el sueldo de dos meses}$$

La igualación es la siguiente:

$$\frac{8\,000\,000+x}{12}=\frac{500\,000+x}{2}$$

Lo único que falta por hacer es resolver la ecuación para encontrar el valor de x. Quitando denominadores:

$16\ 000\ 000 + 2x = 6\ 000\ 000 + 12x$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$x = 1\ 000\ 000$

Entonces, la computadora costó $1 000 000.

El siguiente problema fue tomado en esencia del Hombre que Calculaba.

PROBLEMA 9

La historia ha coservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático.

Reproducimos esta inscripción:

"Caminante, aquí fueron sepultados los restos de Diofanto y los números pueden demostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando de vello cubriose su barbilla y la séptima parte de su existencia trancurrió en un matrimonio estéril.

Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, cuya hermosa existencia duró tan sólo la mitad de la de su padre en la tierra.

Y con profunda pena, Diofanto descendió a la sepultura habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.

¿Puedes deducir estos datos biográficos de Diofanto? "

RESPUESTA SUGERIDA

Sea x el número de años que vivió Diofanto.

Los principales sucesos de su vida están dados por:

Infancia: $x/6$

Barbilla: $x/6 + x/12$

Matrimonio estéril: $x/6 + x/12 + x/7$

Fue padre: $x/6 + x/12 + x/7 + 5$

Su hijo vivió: $x/2$

Murió: $x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$

Esta última expresión representa todo lo que vivió Diofanto, por lo tanto:

$$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $x=84$

Y entonces obtendremos los demás datos:

Su infancia duró 14 años.

La barba le salió a los 21 años.

A los 38 años fue padre.

Su matrimonio estéril duró 33 años.

Su hijo vivió 42 años.

TEMA VIII Sistema de ecuaciones

PROBLEMA 10

Un ladrón de fama internacional fue localizado cuando intentaba abordar su avión. Sin embargo, sus cómplices lograron abordarlo huyendo con su parte correspondiente ddel botín.

El preso fue llevado a declarar y sólo obtuvieron N$7000 del botín y el nombre de sus dos compañeros: Jonás y Filiberto.

La policía entró al avión y mediante identificación fueron sacados del avión Jonás y Filiberto Perez, Jonás y Filiberto Martinez.

Fueron registrados y el dinero que cada uno traía fue puesto en un sobre con el nombre respectivo. Entre los 4 se juntó N$ 40 000.

Para colmo, los Filibertos traían la misma cantidad y lo mismo pasó con los Jonases por su parte. Lo que sí se fijó el comandante fue que los Filibertos traían 3 veces más dinero que los Jonases.

El comandante decidió preguntarle a cada pareja cuánto dinero traían.

Los Perez declararon que la cantidad que traían era exactamente divisible entre ellos. Los Martínez declararon lo mismo, para despistar.

El comandante observó de nuevo las identificaciones de cada pareja y se percató de su origen étnico. Recordó que debido a este origen cada pareja al hablar incluiría a todos los que salieron juntos de la etnia.

Desesperado, preguntó acerca del dinero que traían , cuánto le tocaría a cada uno de ellos.

Los Perez contestaron N$10 000 y los Martínez N$ 9 000, pensando que era un dato irrelevante. El comandante sonrió y ordenó que se llevaran a los ladrones. Al ser interrogado sobre cómo lo decidió, él sólo contestó:

-¡Creyéndoles!

SOLUCION PROPUESTA

Hagamos las siguientes igualaciones sobre el dinero que traía cada uno de los sospechosos:

$x1$ = Filiberto Martinez

$x2$ = Filiberto Perez

$y1$ = Jonás Martinez

$y2$ = Jonás Perez

De acuerdo a las averiguaciones, tenemos que la cantidad que traían los Filibertos era la misma; llamemosla X:

$x1 = x2 = X$

La cantidad que traían los Jonases era la misma; llamesmola Y:

$y1 = y2 = Y$

Tenemos, también, que entre todos juntan 40 000:

$$2X + 2Y = 40\ 000$$

Simplificando esta expresión:

$$X + Y = 20\ 000$$

Además, los Filibertos traían 3 veces más que los Jonases:

$$X = 3\ Y$$

Tenemos, entonces un sistema de ecuaciones:

$$X + Y = 20\,000$$

$$X = 3Y$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$X = 15\,000$

$Y = 5\,000$

Para aclarar la situación hagamos un vaciado de datos:

	Martinez	Perez
Filiberto	x1 15 000	x2 15 000
Jonás	y1 5 000	y2 5 000
SUMA	20 000	20 000

Si dividimos N$ 20 000 entre 2, a cada uno le tocaría N$ 10 000. Si sumamos el botín (N$ 7 000) obtenemos N$ 27 000 y ésto dividido entre 3, a cada uno le tocaría N$ 9 000.

Por lo tanto, los que contestaron 9 000 son los culpables. Es decir, los Martinez son los culpables.

El siguiente problema se obtuvo tomando el original del libro de Alvares Díaz, la pregunta de los azotes fue agregada para que la solución no fuera tan obvia, además de hacer el problema más llamativo.

PROBLEMA 11

Hierón, rey de Siracusa, mandó construir una corona de oro, para lo cual le dió al orfebre 7465 gr. de oro. La corona, lógicamente pesaría esa cantidad.

Cuando le fue devuelta, empezó a sospechar que el orfebre había reemplazado algo de oro por plata. Furioso,declaró que por cada gramo de oro que el trabajador hubiera suplantado, le sería dado un azote.

Arquímedes, encargado de la investigación, sumergió la corona en agua, en donde perdió 467 gr. de su peso.

Si el oro pierde en el agua 52/1000 de su peso por gramo y la plata 95/1000 por gramo, ¿cuántos azotes recibió el orfebre?

SOLUCION PROPUESTA

Denotemos por X los gramos de oro de la corona.

Denotemos por Y los gramos de plata de la corona.

Entonces el peso de la corona es de

$$X + Y = 7465$$

Si el oro pierde al sumergirse 52/1000 por gramo entonces la corona perdió $(52/1000)X$ de oro.

Si la plata pierde al sumergirse 95/1000 por gramo entonces la corona perdió (95/1000)Y de plata.

La pérdida total fue entonces de:

$$\frac{52}{1000}x+\frac{95}{1000}y=467$$

Tenemos, ya, el sistema de ecuaciones formado por:

$$x+y=7465$$

$$\frac{52}{1000}x+\frac{95}{1000}y=467$$

Al resolverlo, se obtiene:

X = 6589.2

Y = 875.78

Es decir, la corona sólo tenía 6589.2 gr. de oro en contraposición de los 7465 gr. que debería tener. Lo que tiene de plata es lo que el orfebre suplantó.

Por lo tanto, se le darán 875 azotes.

El siguiente problema fue obtenido por los alumnos y consta básicamente de un poema, por lo que hay que leerlo -y resolverlo- teniendo en cuenta el uso especial del lenguaje en cuanto a metáforas.

PROBLEMA 12

Dos profesores, uno de inglés y otro de matemáticas, estaban tomando un café en la cafetería de la facultad.

-Es sorprendente que algunos poetas sean capaces de escribir un verso inmortal y absolutamente nada más que merezca la pena- decía el profesor de inglés.

-Tomemos el caso de John Williams Burgon. Sus poesías son tan mediocres que hoy nadie les presta atención. Burgon escribió uno de sus mejores versos de la lengua ingles: "Una ciudad roja y rosa que el tiempo dobla en edad"

El matemático, aficionado a importunar a sus amigos con acertijos improvisados estuvo pensando unos momentos; se levantó y exclamó:

Una ciudad roja y rosa
que el tiempo dobla en edad
Mil millones de años hace
que tenía la ciudad
dos quintos exactamente
de los que el tiempo tendrá
cuando hayan transcurrido
mil millones de años más
¿Podría decirme usted

cuál es su edad actual?

SOLUCION PROPUESTA

Como en el problema se están mezclando los tiempos pasado y futuro, lo mejor es plantear el problema en la época actual.

Llamémosle X a la edad actual de la ciudad Roja y Rosa.

Llamémosle Y a la edad actual del tiempo.

Todo lo vamos a expresar en miles de millones de años, para evitar todos los ceros.

Por lo tanto, "hace mil millones de años" se expresa como

X - 1

La edad del tiempo dentro de mil millones de años es:

Y + 1

La relación entre estas dos cantidades es:

$$x-1=\frac{2}{5}(y+1)$$

También sabemos que "... que el tiempo dobla en edad"

Es decir,

2X = Y

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones:

$$x-1=\frac{2}{5}(y+1)$$
$$2x=y$$

Resolviendo este sistema se obtiene que:

X = 7

Y = 14

Por lo tanto, la edad actual de la ciudad es de 7 000 millones de

años y la edad del tiempo en el momento presente es de 14 millones de años.

El siguiente problema es un cuestionario. Resulta interesante el enfrentamiento que tiene el estudiante con la incertidumbre de la última pregunta.

El tema sobre el que se presente es totalmente flexible y tiene la facilidad de poderse aplicar al tema que se esté impartiendo en ese momento.

Puede ser útil cuando, por ejemplo, el planteamiento de un problema no resulte tan fácil debido al tipo de tema. Este ejemplo en particular aborda el tema de factorización y en el siguiente capítulo de este trabajo se presentará otro con otro tipo de preguntas.

PROBLEMA 13

Analiza cada una de las afirmaciones siguientes. Si son verdaderas escribe un 1 a su lado.

1. $2x^2-6x-8$ *no tiene factor común*
2. *Cuando factorizamos* $25x^4y-81y^3$ *obtenemos tres factores*
3. $x+4$ *es uno de los factores de* $3x^5-9x^3-12x$
4. x^2+4 *lo factorizamos en* $(x+2)(x-2)$
5. *Factorizar es encontrar las expresiones que multiplicadas nos da la expresión original*
6. $y^2-14y+49$ *es un trinomio cuadrado perfecto*
7. *Si factorizamos* $m^2(m+3)-16(m+3)$ *queda como resultado* $(m+3)(m+4)(m-4)$
8. *El cumpleaños de la mamá de mi amiga es el domingo*

Ahora suma todos los 1 obtenidos. Ese número (x) elevado al cuadrado y restándole 4 nos debe dar 21. Pregunta: El cumpleaños de la mamá de mi amiga, es el domingo?

EXPERIMENTACION

Este cuestionario se aplicó a 10 equipos de 5 integrantes cada uno. Las respuestas se entregaron por escrito y los resultados obtenidos se reflejan en la siguiente gráfica.

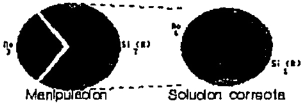
De los 10 equipos, 7 comprendieron que podían manipular la última pregunta (A), y los tres equipos restantes se limitaron a resolver las operaciones pedidas sin un objetivo previo y sólo debido a que vieron que el resto de sus compañeros estaba trabajando en él.

De los 7 que sabían para qué tenían que saber decir si las preguntas eran falsas o verdaderas no obtuvieron la solución correcta pues se equivocaron al analizar alguna de las 8 propuestas.

Solamente 1 equipo de los 7 anteriores respondió correctamente. (B)

Estos resultados se reflejan en la siguiente gráfica:

PROBLEMA 13



El hecho de que la mayoría de los equipos haya trabajado el cuestionario con un objetivo predeterminado es mucho más importante que el hecho de alcanzar la respuesta correcta y esa capacidad de analizar hacia dónde debe ir dirigido el esfuerzo es lo que se debe fomentar arduamente entre los estudiantes antes de lanzarlos a ejecutar simples algoritmos.

SOLUCION PROPUESTA

Las preguntas verdaderas son la número dos, cinco, seis y siete, por lo tanto sumándo esos unos nos da que $X = 4$

Según el planteamiento final del problema tenemos:

$x^2 - 4 = 21$

Resolviendo la ecuación tenemos que $X=5$. Sin embargo, no es necesario ni siquiera resolverla pues de acuerdo al número de "unos" que se obtuvieron $X = 4$.

Sustituyendo este valor en la ecuación obtenemos un resultado de 12 lo cual no es igual a 21.

Para que se cumpliera la igualdad es necesario que exista un uno más.

La única pregunta que los alumnos pueden manipular, decidiendo si es verdadera o no, es la número 8.

Si la hacemos verdadera, entonces $x = 5$ lo cual cumple con la desigualdad.

Por lo tanto, el cumpleaños de la mamá de mi mejor amiga es el domingo.

CAPITULO III

MATEMATICAS IV

III.1 TEMARIO

El temario dado por la Universidad Nacional Autónoma de México para el curso de Matemáticas en cuarto de Bachillerato es el siguiente:

I. Operaciones en R
-Números
-Clasificación
-Propiedades de los reales
-Valor absoluto
-Desigualdades

II. Operaciones con expresiones algebraicas
-Suma, Resta, Multiplicación, División
-Productos Notables

III. Factorización
-Factor común monomio y polinomio
-Diferencia de cuadrados
-Trinomios

-Suma y diferencia de potencias iguales

IV. Fracciones algebraicas

-Simplificación

-Suma y resta

-Multiplicación y división

-Fracciones complejas

V. Radicales

-Simplificación

-Suma y resta

-Multiplicación y división

-Números imaginarios y complejos

VI. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

-Ecuaciones

-Inecuaciones

-Lenguaje algebraico

-Problemas

VII. Aplicaciones matemáticas

-Física (movimiento)

-Tanto por ciento

-Mezclas

VIII. Línea recta

-Plano cartesiano

-Pendiente

-Paralelismo y perpendicularidad

-Formas de la ecuación de la recta

IX. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

-Método gráfico

-Métodos algebraicos: igualación, sustitución, reducción, determinantes

-Problemas

X. Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado

-Definición

-Clasificación

-Métodos de resolución: factorización, trinomio cuadrado perfecto

-Inecuaciones

-Gráfica

-Problemas

Al igual que en Matemáticas II, por limitación del tiempo y para los objetivos del presente trabajo, los problemas se limitan a la parte puramente algebraica del temario.

III.2 PROBLEMAS

A los alumnos de este grado se les puede aplicar los mismos problemas mencionados anteriormente.

Los que a continuación se mencionan involucran más que conocimentos nuevos, un manejo más claro del álgebra: despejes, igualaciones, además de un poco de lógica.

Al igual que en Matemáticas II,algunos de los siguientes problemas fueron experimentados. Si es el caso, se presentan al final los resultados junto con los comentarios pertinentes.

Tema II. Operaciones con expresiones algebraicas

PROBLEMA 14

Sergio estaba preocupado por el examen del día siguiente. Eran casi las diez de la noche y él no había abierto un sólo libro.

Deambulando por su casa, llegó al pequeño laboratorio de su tío. Entró y al curiosear encontró un libro titulado "Cómo obtener mejores calificaciones".

El tema, le interesó bastante y cuando lo hojeaba encontró la siguiente receta:

SUMA DE CUADRADOS

"De los frascos numerados del 1 al 4 se tomarán tantos gramos como sea el cuadrado del número de ingrediente.

."En el recipiente rojo se pondrá el ingrediente 1 y el 2. En el recipiente azul, el ingrediente 3 y 4. Después, en el recipiento blanco se pondrán por cada gramo que haya en el recipiente azul tantos gramos como haya en el rojo.

"Finalmente, el resultado de todo esto, 125 gr., se diluye en agua y se toma."

A Sergio le pareció una idea genial y buscó los frascos. Los encontró llenos de polvo y al tomarlos, las etiquetas se cayeron. Pero por supuesto, no iba a perder esta oportunidad y como la receta se titula Suma de Cuadrados pensó que si mezclaba de otra manera los ingredientes ,efectuaba algunos cuadrados y obtenía 125 gr. con los 4 frascos, sería lo mismo.

Así lo hizo. Se tomó la mezcla y lo único que consiguió fue reprobar el examen pues se pasó toda la noche con un dolor de estómago terrible.

¿Cómo pudo haber obtenido Sergio de todas maneras 125 gr?

¿Podrías decir alguna alteración de las muchas que hizo?

SOLUCION PROPUESTA

Es conveniente el uso de letras para los números de los frascos. Una vez hecho esto, efectuar las operaciones pedidas con letras y hasta el final sustituir.

Denotemos entonces los frascos de la siguiente manera:

Frasco 1: A

Frasco 2: B

Frasco 3: C

Frasco 4: D

El principio de la receta dice que se toman tantos gramos como sea el cuadrado del número de ingrediente.

Entonces del frasco 1, tomara 1^2 gramos. Utilizando la notación sugerida, del frasco 1 tomará A^2 gramos.

Lo mismo toma de los demás:

B^2 gramos del frasco 2

C^2 gramos del frasco 3

D^2 gramos del frasco 4

Hasta aquí Sergio hizo todo bien.

Según la receta en el recipiente rojo se reúnen los ingredientes 1 y 2 por lo que tendremos:

$$A^2+B^2 \text{ gramos}$$

Y en el recipiente azul se reúnen los ingredientes 3 y 4, teniendo:

$$C^2+D^2 \text{ gramos}$$

En el recipiente blanco por cada gramo del rojo se pondrá tantos gramos como haya en el azul. Esto involucra una multiplicación de la cantidad de gramos que hay en cada recipiente:

$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2) \qquad Ec.\ 1$$

Si hacemos la sustitución del número de ingrediente correspondiente, tenemos:

Recipiente rojo: 1^2+2^2

Recipiente azul: 3^2+4^2

Recipiente blanco: (5) (25) = 125 gramos.
Efectivamente se obtienen 125 gr.
Para saber lo que hizo Sergio manipulemos la expresión algebraica:

De 1 tenemos que

$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2)=A^2C^2+A^2D^2+B^2C^2+B^2D^2$$

Reacomodando términos y sumando-restando 2ABCD obtenemos:

$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2)=A^2C^2+2ABCD+B^2D^2+A^2D^2-2ABCD+B^2C^2$$
$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2)=(AC+BD)^2+(AD-BC)^2$$

O bien, reacomodando de otra manera:

$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2)=A^2C^2-2ABCD+B^2D^2+A^2D^2+2ABCD+B^2C^2$$
$$(A^2+B^2)*(C^2+D^2)=(AC-BD)^2+(AD+BC)^2$$

Sustituyendo los valores de las incógnitas en la primera opción:

$$(AC+BD)^2+(AD-BC)^2=(1*3+2*4)^2+(1*4-2*3)^2=125\ gr.$$

O bien, tomando la otra opción:

$$(AC-BD)^2+(AD+BC)^2=(1*3-2*4)^2+(1*4+2*3)^2=125\ gr.$$

Es decir, combinando de otra manera los ingredientes y haciendo algunos cuadrado sí se puede obtener 125 gr.

Entre las modificaciones que hizo está que no tomó el cuadrado de cada uno de los números de los frascos, sino que los mezcló de los maneras diferentes efectuando multiplicaciones entre dos y estas dos maneras fue las que elevó al cuadrado y las sumó para que fueran de acuerdo al título de la receta.

TEMA VI Ecuaciones e Inecuaciones de primer grado

Los dos problemas siguientes giran sobre la misma idea.

En el primero, el dato de las 15 monedas fue añadido para facilitar el planteamiento de la ecuaciones y fue tomada de <u>El Hombre que Calculaba</u>.

El segundo problema es importante pues incluye, además, el conocimiento de la eliminación de paréntesis correspondiente al Tema II de este curso, o bien dado que hay dos opciones de solución, la simplificación de fracciones y fue tomado del libro de Alvarez Diaz.

PROBLEMA 15

El barco estaba a punto de naufragar: la tormenta era demasiado violenta. Sin embargo, gracias a la valentía de tres marineros, todo el resto de la tripulación se salvó.

El capitán decidió recompensar a los hombres. Dispuso que al día siguiente, cuando llegran a tierra, se repartiera un cofre lleno de monedas de oro entre los tres marineros por partes iguales.

Al llegar la noche, el primer marinero decidió tomar su parte para evitar problemas al día siguiente. Fue hacia el cofre, dividió el contenido en tres parte iguales y vió que sobraba una moneda.

-Por culpa de este moneda iba a haber discusiones mañana. Así que mejor la tiro al mar- pensó.

Tomó su parte, tiró la moneda al mar y se fue a acostar.

El segundo marinero pensó lo mismo. Al dividir en tres partes iguales el resto del tesoro, volvió a sobrar una. Tiró esa moneda al mar, tomó su parte y se fue a acostar.

Al tercer se le ocurrió exactamente lo mismo. Dividió en tres lo que encontró, tiró al mar la que sobró, tomó su parte y se fue a acostar.

Al llegar a tierra, el cofre fue abierto. Las monedas que había fueron repartidas en tres partes iguales; sobró una moneda que se la quedó el chico que hizo la repartición.

Cada marinero tomó su parte que constaba de 15 monedas y se fueron muy contentos, pensando que cada uno tenía lo que le correspondía.

¿Cuántas monedas tenía inicialmente el cofre?

SOLUCION PROPUESTA

Para facilitar un poco el planteamiento de la ecuación puede sugerirse lo siguiente:

Calcular primero cuánto se repartieron finalmente los marineros, tomando en cuenta la moneda que se quedó el repartidor.

Por otro lado, obtener la expresión de todas las divisiones hechas pensando que si X es la cantidad inicial, ¿Cuánto dejó-encontró cada marinero?

Si eran tres marineros, entonces finalmente se repartieron 45 monedas (15 x 3). Más una moneda que sobró tenemos que había 46 monedas.

Por el otro lado, si eran "X" monedas iniciales, el primer marinero tomó 1/3 de "X-1" (ya que se tiró una para que fuera exacta la división).

Como el dato que tenemos (46) es lo que se repartieron finalmente, entonces lo que nos interesa es lo fue dejando cada marinero.

Entonces, si el primero tomó 1/3 de X-1, lo que dejó fue:

$$2/3\ (x-1)$$

El segundo marinero hizo lo mismo: se deshizo de una moneda y dejó 2/3:

$$2/3\ [\ 2/3\ (X-1)\ -\ 1]$$

Finalmente, el tercer marinero:

$$2/3\ \{\ 2/3\ [\ 2/3\ (X-1)\ -\ 1]\ -\ 1\}$$

Lo que dejó este marinero fue lo que encontraron:

$$2/3\ \{\ 2/3\ [\ 2/3\ (X-1)\ -\ 1]-\ 1\}\ =\ 46$$

Al resolver esta ecuación obtenemos X=160

Es decir, el cofre contenía 160 monedas.

PROBLEMA 16

Al llegar Ulises a la tierra de los Cíclopes, desembarca seguido de los más valientes de sus hombres. Poco después caen prisioneros de Polifemo, el terrible hijo de Neptuno.

Una vez en la gruta del Cíclope, se come éste la sexta parte de los viajeros; desayuna a la mañana siguiente la quinta parte del resto y por último, en la tarde del mismo día hace su merienda con la cuarta parte de los guerreros que quedaban.
Ulises y cinco compañeros más logran cegar al Cíclope y salr de su gruta. Hallar el número de hombres que desembarcaron con Ulises.

EXPERIMENTACION

Cuando el alumno se enfrenta a la resolución de un problema de una forma libre, es decir sin que se le exija la utilización específica de determinado conocimiento, suele utilizar no lo nuevo que ha estado aprendiendo, sino lo que aprendió hace varios años y que por lo tanto, está más afirmado.

En este problema en particular sale a relucir lo anterior.
Se aplicó a 16 equipos de 4 a 5 integrantes cada uno, de los cuales 8 respondieron correctamente.

Lo que es muy importante hacer notar es que de estos 8 ninguno lo resolvió estableciendo una ecuación, como podría ser la idea inmediata del profesor; sólo dos equipos intentaron plantear alguna ecuación (ver más adelante análisis de errores) y el resto no contestó nada.

Las soluciones correctas se basaron en:

Primera opción: 3 equipos utilizaron regla de tres.

Si 3/4 de la última comida se salvaron y son 6, entonces 1/4, los que se comió, equivale a X. Se resuelve y tenemos que X=2. Entonces antes de la última comida había 8 tripulantes vivos.

Segunda comida: 8 = 4/5

x = 1/5

Se resuelve y x=2 por lo que había, antes de la segunda comida, 10 tripulantes vivos.

Primera comida: 10 = 5/6

x = 1/6

De donde, x = 2 por lo que antes de la comida, es decir los que desembarcaron, había 12 hombres.

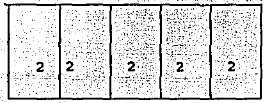
Segunda opción :

2 equipos utilizaron esquemas de enteros:

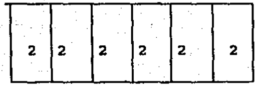
2	2
2	2

Sabemos que 3/4 de los que se salvaron después de la última comida equivale a 6, por lo que cada cuarto (diagrama anterior) vale 2 para que sea un número entero. (Este dato en realidad se obtiene también por regla de 3: si 3/4 equivalen a 6, un cuarto equivale a x)

Tenemos que antes de la última comida sobraban 8 hombres (en el esquema 4 pedazos con valor de dos); si después de la segunda comida sobraban 4/5 (pues se comió un quinto), entonces 4/5 = 8, y el entero queda divido en quintos:



Nuevamente cada pedazo vale 2 para obtener enteros (el dato puede obtenerse también por regla de tres como en el caso anterior) y tenemos, así, 10 hombres antes de la segunda comida.
Finalmente, 5/6 (lo que sobró de la primera comida) es igual a 10, entonces cada pedazo vale 2:



Sumando cada pedazo de este último esquema, tenemos que antes de la primera comida había 12 hombres; es decir, desembarcaron 12 hombres.

Tercera opción.

* 3 equipos lo resolvieron por adivinanza.

Como en realidad no es un número muy grande, es fácil suponer varios números e irlos probando de acuerdo al contexto del problema.

Así, si suponemos que la solución es 12 y se reconstruye el problema a partir de este dato, vemos que la solución propuesta es la correcta.

La utilización de las soluciones A y B es totalmente justificable pues los alumnos entran en contacto con la regla de 3 y los diagramas de enteros desde varios años atrás por lo que ese conocimiento ha tenido el tiempo suficiente para madurar.

Vemos entonces que en el nuevo conocimiento no se ve una herramienta mejor y tardará algún tiempo para que se vea. En cuanto a las suposiciones sucede algo similar a lo comentado anteriormente en relación a que este método es muy socorrido por los alumnos.

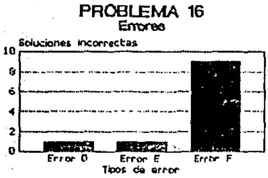
Del total de los 16 problemas aplicados, sólo 2 intentaron plantear la ecuación sin mucho éxito.

Entre los errores cometidos reflejados en la siguiente gráfica, se encuentran:

-No tomar en cuenta que la segunda y tercer comida es sobre el resto y no sobre el número original de los que desembarcaron (Error D)

-En lugar de tomar la quinta parte (1/5)x se toma cinco veces esa cantidad: 5x. (Error E)

-Se toman las fracciones sin aplicarlas a X, es decir x-1/6 sin pensar que es un sexto de la misma x. Este error está ligado a una suma de términos no semejantes. (Error F).



SOLUCION PROPUESTA

Denotemos por X el número de hombres que desembarcaron con Ulises.

La primera pérdida es 1/6 (una sexta parte).

Sabemos que sobraron seis hombres, por lo tanto lo que se debe obtener es lo que "sobró" después de cada alimento.

Entonces después de la primera, sobró 5/6 de X.

El siguiente alimento es de la quinta parte del resto:

$$1/5\ (5/6\ X)$$

Lo que sobró fue

$$4/5\ (5/6\ X)$$

Finalmente, lo que sobró de la merienda es:

$$3/4\ [\ 4/5\ (5/6\ X)\ ]$$

Haciendo la igualación obtenemos la ecuación a resolver:

$$3/4\ [\ 4/5\ (5/6\ X)\ ] = 6$$

Eliminando denominadores y resolviendo la ecuación obtenemos que $X = 12$.

Es decir, 12 hombres desembarcaron.

Otra manera de resolverlo, también aplicable al problema de las monedas, aunque más complicada es la siguiente:

X sigue representando el número de marineros que desembarcaron originalmente.

Primera comida: $X/6$

Segunda comida: El resto es $X - X/6$

Un quinto es $1/5\,(X - X/6)$

Merienda: El resto es $X - X/6 - 1/5\,(X - X/6)$

Un cuarto es $1/4\,[X - X/6 - 1/5\,(X - X/6)]$

Entonces si al número de marineros que desembarcaron le restamos los de las comidas, se obtienen los sobrevivientes:

$$X - \{ X/6 + 1/5\,(X - X/6) + 1/4\,[X - X/6 - 1/5\,(X - X/6)] \} = 6$$

Quitando paréntesis y efectuando las multiplicaciones obtenemos que $X = 12$

Es decir, desembarcaron 12 hombres.

PROBLEMA 17

El arqueólogo Wilfrido Schroeder lejano discípulo de Champolion, cavando en las ruinas de Gimenfistán que datan del año 3 000 en un lugar cercan al Pago Pago, encontró un viejo manuscrito que explicaba el misterio de Banshee:

"En el año 5555, el príncipe Damwick subirá al trono de Banshee ya que tendrá exactamente la mitad de la edad de su padre y éste es un requisito para asumir el cargo"

El misterio de la edad de Damwick era casi imposible de resolver. El único dato que se tenía era que en el año 5537, Damwick tenía exactamente la tercera parte de la edad de su padre, el rey Ororoh.

El arqueólogo se preguntaba la edad exacta de Damwick al subir el trono de Bashee.

SOLUCION PROPUESTA

En el año 5555, Damwick tiene x años y Ororoh 2x.

En el año 5537, es decir 18 años antes, cada uno tenía 18 años menos:

Ororoh: $2x- 18$

Damwick: $x-18$

En ese tiempo Ororoh era 3 veces mayor que Damwick:

$3(x-18) = 2x-18$

Resolviendo la ecuación obtenemos que $x=36$

Es decir, en el año 5555, año en que Damwick sube al trono, éste tiene 36 años y el rey Ororoh tiene 72 años.

El siguiente problema en cuanto al álgebra utilizada resulta sencillo. Sin embargo, debido a la presentación de los datos, la resolución pudiera complicarse en algunos puntos.

Sería conveniente seguir al alumno paso por paso insistiendo constantemente en la comprensión exhaustiva del problema y sobre todo teniendo siempre en cuenta qué es lo que se quiere obtener finalmente.

PROBLEMA 18

Camila paseaba con su vecino de al lado, Sergio, por el parque.

-Pero, ¿por qué no quieres ser mi novia?

-Porque en mi casa no me dejan tener novio hasta que no cumpla 16 años.

-Pero, ¿qué tiene de malo? Ya ves, mi vecina es de tu misma edad y ha tenido como tres novios.

-Por eso a mi mamá no le cae bien. Además, cuando se enteren de tu edad, !me matan!

-!Qué te pasa! Cuando uno ya pasó de los 24 apenas empieza a vivir.

Cuando llegaron a la calle donde vivían, cruzaron, pues vivían del lado de los números impares. Emocionado, Sergio comentó:

-¿No te encanta esta casualidad? Si multiplicamos el número de tu casa por tu edad, obtenemos lo mismo que si multiplicamos el número de la mía por mi edad.

Si el número de la casa de Camila es mayor que el de la casa de Sergio, ¿cuáles son esos números? Y,¿ cuántos años tienen ambos?

SOLUCION PROPUESTA

Estamos concientes que estas solución propuesta involucra mucho manejo y comprensión de planteamiento de igualdades y desigualdades. Hay que recordar que es simplemente una propuesta.

Para facilitar las operaciones, denotemos:

A: edad de Camila — a: número de la casa de Camila

B: edad de Sergio — b: número de la casa de Sergio

La casualidad que menciona Sergio es:

$$A*a = B*b \qquad (1)$$

De acuerdo a los datos que nos da el problema, sabemos que:

$$a > b$$

Y como son vecinos $\quad b + 2 = a \qquad (2)$

Sustituyendo (2) en (1) :

$$A\ (\ b+2\ ) = B\ b$$

$$A\ b + 2\ A = B\ b$$

$$2\ A = b\ (B - A) \qquad (3)$$

Por otro lado, sabemos que $\quad B > A$

$$A \leq 16$$

$$-A > -16$$

$$B > 24$$

Entonces

$$B - A > 24 - 16$$

$$B - A > 8$$

$$b(B - A) > 8\ b \qquad (4)$$

Retomando la ecuación número 3 y añadiendo la 4:

$$2\ A = b\ (B - A) > 8\ b$$

$$2\ A > 8\ b$$

$$2\ A\ /\ 8 > b$$

Como $A < 16$

$2\ A < 32$

$2\ A\ /\ 8 < 32\ /\ 8 \qquad 2\ A\ /8 < 4$

Por lo tanto, $b < 4$

Así, las opciones para b son 1, 2 ,3.

Se sabe que Sergio vive del lado de los números impares, por lo que b sólo puede ser 3 ó 1.

Pero, además se sabe que Sergio tiene una vecina (del otro lado de Camila); entonces, para que la vecina pueda exitir, b debe ser igual a 3.

Si $b = 3$, entonces $a = 5$.

Sustituimos en (3) (puede hacerse también en 1) estos valores:

$$2\ A = 3\ (\ B - A)$$

$$5\ A = 3\ B$$

Como $B > 24$, entonces

$$5A/3 = B > 24$$

$$5A/3 > 24$$

Sabemos que $A < 16$

Si $A = 14$, entonces $5A/3 = 23.3$

Si $A = 15$, entonces $5A/3 = 25 > 24$

O bien, despejamos directamente A:

$A > (24*3) / 5$

$A > 14$

Por lo que A, entonces, será 15.

Así, $A = 15$ y $B = 25$

Obtenemos que Sergio tiene 25 años y vive en el número 3; Camila tiene 15 años y vive en el número 5.

TEMA IX Sistema de Ecuaciones Lineales

PROBLEMA 19

Se descubrió un fraude en el mercado.

-Sí, señor Regente. Este hombre es un tramposo. Tiene arreglada su balanza.

-Calma, señora. Explíquese.

-Yo llegué con este mercader para vender mis paquetes de canela y pimienta. Este señor equilibró 3 paquetes de pimienta y dos de canela con sólo 20 medidas de esas que utilizan todos los comerciantes. Como empecé a sospechar, hicimos dos pesadas más: un paquete de canela con un paquete de pimienta y dos medidas; y la otra fue un paquete de canela con 5 medidas.

Como ese tramposo se dio cuenta que yo sospechaba las últimas dos medidas las hizo bien. De todos modos me fui con otro mercader. Hicimos la primera pesada y fue cuando me aseguré de que el primero era un ratero. Bueno, en realidad no es mucho.

-No hay fraudes pequeños, señora. Es una verguenza que a los 60 años este hombre sea tan tramposo. El tiempo que permanecerá en la cárcel será en la misma proporción en la que estafaba, aplicada a su edad.

El carcelero nunca entendió cómo la mujer se dió cuenta de la estafa y, por lo tanto, no estaba seguro de la condena que habría que darle de acuerdo a su edad.

¿De cuánto es el fraude? ¿ Cuál es la condena?

DIALOGO SOBRE LA RESOLUCION CONJUNTA.

Prof: ¿Alguna sugerencia?

X: Como en la tercera pesada se equilibró un paquete de canela con cinco medidas, entonces multipliqué cinco por dos.

Prof: ¿Podrías ser un poco más explícita.?

X: En la primera pesada, se habla de que se equilibraron tres de pimienta con dos de canela y en la tercera 1 de canela con cinco medidas, entonces multipliqué cinco medidas por dos paquetes de canela y me da 10.

Y: Entonces, en la primera pesada las 10 medidas s equivalen a los 3 paquetes de pimienta. Ahora, si dividimos 10 entre tres nos da a 3.3; si eso se multiplica por 3, nos da 9.9 y ahí está el error.

Prof: No precisamente pues tu estás tomando sólo una décima de una división no exacta; si lo dejas como diez tercios, verás que no hay error.

Z: Mejor, veamos la segunda y terceras pesadas que se supone son las justas. De la tercera ya sabíamos que un paquete de canela equivale a cinco medidas. Viendo la segunda pesada, tenemos que si se está equilibrando un paquete de canela con uno de pimienta y dos medidas, forzosamente, un paquete de pimienta equivale a 3 medidas.

Prof: Bien, y estas últimas equivalencias son justas.

A: Ahora sí ya podemos analizar la primera pesada fraudulenta. Teníamos que se equilibraron 3 paquetes de pimienta y dos de canela; es decir 3 de pimienta equivalen a 9 medidas y dos de canela a 10 medidas. Entonces la suma es de 19 medidas.

Varios: El mercader se está clavando una medida. Y ya terminamos.

Prof: Ya terminamos, pero hay un pequeño detalle. La condena dice que se le castigará en la misma proporción en la que estafaba. Cómo podremos saber qué proporción es de fraude si se queda con una medida?

Varios: Es el uno por ciento.

Varios: No. Es el cinco por ciento.

Prof: Por qué precisamente el cinco por ciento?

B: Porque veinte medidas sería una estafa del cien por ciento y entonces una medida es del 5% por regla de tres.

C: Eso equivale a pensar que si de un todo debería poner 20 medidas y pone sólo 19, entonces con lo que estafa es un veintavo

Varios: Y se le condena a tres años de cárcel, pues es la veintava parte de 60.

SOLUCION PROPUESTA

La solución propuesta gira en torno al planteamiento de un sistema de 3 ecuaciones y si vemos la respuesta de las alumnas, ésta no plantea ninguna ecuación explícitamente.

Cabe mencionar que el diálogo se obtuvo al aplicar este problema mucho antes de estudiar ecuaciones o sistemas de ecuaciones, practicamente al principio del curso, por lo que las alumnas no sintieron la "obligación" de emplear para la resolución lo que se estaba viendo en ese momento.

La solución propuesta es la siguiente·

Para el mejor planteamiento de ecuaciones, sería bueno recalcar que sólo en la primera pesada es cuando hay sospecha.

Esta sospecha de alteración de pesos será denotada por X.

Definamos los datos de la siguiente manera:

Pimienta: P

Canela: C

Medida: M

X representa la proporción de la equivalencia sospechosa.

De acuerdo a la primera pesada:

$$3\,P + 2\,C = X\,20\,M$$

Las otras dos pesadas que estuvieron bien hechas fueron:

$$C = P + 2\,M$$

$$C = 5\,M$$

Tenemos, entonces, un sistema de tres ecuaciones: (1)

$$3\,P + 2\,C = X\,20\,M$$

2 $C = P + 2\,M$

3 $C = 5\,M$

Sustituyendo 3 en 2:

$$5M = P + 2M$$

$$P = 3\,M$$

Sustituyendo en 1 los valores de C y P:

$3 * (3\,M) + 2 * (5\,M) = X * 20\,M$

$9\,M + 10\,M = X * 20\,M$

$19\,M / 20\,M = X$

Obtenemos que $X = 19 / 20$

Entonces, de acuerdo a al primera sospecha, 3 paquetes de pimienta y dos de canela equivalen a sólo 19 / 20 de las medidas. Es decir,

el comerciante se queda con 1 / 20 de ganancia.

Entonces la condena será 60 (1 /20) = 3

Tendrá 3 años de cárcel.

El siguiente problema está considerado como aquellos problemas con "autorrestricción", es decir, restricciones que aquél que resuelve un problema se impone a sí mismo aunque el contexto del problema no diga nada acerca de eso, por lo que la solución, aunque matemáticamente sea inmediata, requiere un poco más de análisis.

PROBLEMA 20

El vecino de la familia Clou es de lo más chismoso que existe. La última curiosidad que le asaltó fue saber cuántos años tenía cada miembro de la familia, pero sólo pudo averiguar lo siguiente:

La suma de las edades de todos los miembros de la familia es en este momento de 73 años y está compuesta por el papá, Clovis, que es tres años mayor que su esposa; la hija, Camila, que es dos años mayor que su hermano.

Hace cuatro años la suma de las edades era de 58.

Al tratar de resolver este acertijo pensó que había obtenido mal uno de los datos. Así que tuvo que preguntarle directamente a Clovis las edades. Este, para darle una lección a su vecino, no le dijo nada más que los datos que tenía sí eran los correctos.

Porqué pensó el vecino que los datos eran erróneos?

Cuál es la edad actual de cada uno de los miembros de la familia Clou?

SOLUCION PROPUESTA

Hagamos, primero, las siguientes notaciones:

Edad actal de Clovis: x

Edad actual de su esposa: y

Edad actual de Camila: a

Edad actual de su hermano: b

Tenemos las siguientes relaciones:

$x = y+3$ (2)

$a= b+2$

$x + y + a + b = 73$ (1)

Hace cuatro años cada miembro de la familia tenía:

Clovis: $x-4$

Esposa: $y-4$

Camila: $a-4$

Hermano: $b-4$

Entonces,

$x - 4 + y - 4 + a - 4 + b - 4 = 58$

Manipulando esta última expresión:

$x + y + a + b - 16 = 58$

$x + y + a + b = 74$

Lo que nos lleva a una contradicción con la primera expresión pues hay una diferencia de uno.

Es aquí cuando sale a relucir la autorestricción: en ninguna parte del problema se especifica que hace cuatro años todos los miembros de la familia ya habían nacido.

Como sólo hay un año de diferencia entonces el menor de la familia hace cuatro años no había nacido por lo que su edad actual es de 3 años.

Entonces $b=3$ y por lo tanto $a=5$.

Sustituyendo estos valores en la primera expresión, tenemos:

$x + y + 5 + 3 = 73$

$x + y = 65$

Esta última expresión constituye junto con la número 2 un sistema de ecuaciones:

$x + y = 65$

$x - y = 3$

De donde, $x = 34$

$y = 31$

Entonces las edades son las siguientes:

Clovis: 34 años

Esposa: 31 años

Camila: 5 años

Hermano: 3 años

Al igual que en Matemáticas II, para este curso se propone un cuestionario donde la última pregunta se puede manipular. En este caso, se propone para el tema de fracciones complejas sin olvidar que el tema es totalmente flexible.

PROBLEMA 21

Analiza cada una de las afirmaciones siguientes. Escribe un 1 a la derecha de las que son verdaderas.

Suma el total de unos obtenidos. Ese número (x) multiplicado por 3, dividido entre doce y restándole uno, debe ser cero.

Pregunta. El chico que vive al lado de mi casa, ¿es amigo del vecino de la mejor amiga de mi primo?

1. *El resultado de* $\frac{3}{x(5-x)}-\frac{5}{(x-5)^2}$ *es* $\frac{8x+5}{x(x-5)^2}$

2. *En la fracción compleja* $\dfrac{y+\frac{2y}{y-2}}{1+\frac{4}{y^2-4}}$

el resultado del denominador es $\frac{y^2}{(y+2)(y-2)}$

3. *Al simplificar la fracción compleja* $\dfrac{x-\frac{2u^2}{x-u}}{x+\frac{u^2}{x+2u}}$

obtenemos $\frac{x^2-4u^2}{x-u}$

4. *El resultado de* $\frac{5}{2s+4}-\frac{3}{s^2+s-2}-\frac{5}{s-1}$

es $\frac{-5s-21}{2(s+2)(s-1)}$

5. *Para resolver la fraccion compleja de la pregunta 2, se resuelve primero la división de* $\frac{y}{x}$

6. *Una fracción compleja es aquélla que tiene fracciones tanto en el numerador como en el denominador.*

7. $\frac{x-2}{x-7}$ *es lo mismo que* $-\frac{2-x}{x-7}$

8. *El chico que vive al lado de mi casa es amigo del vecino de la mejor amiga de mi primo.*

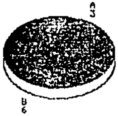
Pregunta. El chico que vive al lado de mi casa, ¿es amigo del vecino de la mejor amiga de mi primo?

EXPERIMENTACION

Se aplicó el cuestionario a 9 equipos de los cuales 3 no

entendieron la manipulación de la última pregunta (A). Los 6 restantes contestaron correctamente. (B).

PROBLEMA 21



Solucion cuestionario

SOLUCION

Las preguntas que son ciertas son la número dos, seis, siete.

Según el planteamiento del problema:

$(3x /12) - 1 = 0$

Por lo que $X = 4$.

Si sumamos el número de unos obtenidos, tenemos que $X = 3$ por lo tanto se requiere que una pregunta más sea verdadera. La única pregunta manipulable es la número 8.

Si la hacemos verdadera, entonces $X = 4$ y se cumple la ecuación.

Por lo tanto, el chico que vive al lado de mi casa es amigo del vecino de la mejor amiga de mi primo.

CAPITULO IV

PROBLEMAS CREADOS POR LOS ALUMNOS

IV.1 DIFICULTADES GENERALES

Carolyn Kieran afirma que las dificultades que el estudiante tiene con el algebra están relacionadas principalmente con:

a) El significado de las letras

b) El cambio de estructuras aritméticas a las algebraicas

c) El reconocimiento y uso de estas nuevas estructuras

Es claro que la característica principal del álgebra es precisamente el uso de letras, por lo que su aprendizaje requiere de una notación totalmente distinta a la que utilizó el alumno en la enseñanza elemental.

Sin embargo, de todas estas nuevas ideas el aspecto crítico, como afirma Lesley R. Booth, es entender lo que el enunciado algebraico representa; es decir, qué es lo que se busca en él.

Así, el problema en el aprendizaje del álgebra radica en la manipulación adecuada de los símbolos.

La experiencia previa que los alumnos tienen en aritmética les dificulta encontrar un verdadero significado en las expresiones algebraicas.

Esto va mucho más allá de la simple traducción a términos algebraicos. Es difícil para los estudiantes visualizar en estas nuevas expresiones, respuestas "legítimas". Para ellos, obtener un resultado con letras equivale a no obtener nada concreto.

Todas estas ideas se concretizan claramente en los problemas que los alumnos presentaron cuando vemos que son capaces de formular un enunciado en términos de expresiones algebraicas pero que la solución queda dada en términos también de expresiones algebraicas, habiéndose limitado a realizar una suma de fracciones o cualquier otra operación, pero sin que el enunciado tenga un verdadero sentido y cuya respuesta sea de alguna utilidad.

También se concretizan algunos malos manejos de las variables cuando el alumno pretende sumar determinadas cantidades con incógnitas que resultan no ser términos semejantes y que no se pueden sumar, pero que al estar "escondido" bajo una incógnita, el alumno no percibe que está pretendiendo sumar "peras con manzanas".

En estos problemas veremos estas y algunas otras dificultades presentes que se comentarán en su oportunidad.

IV.2 Consideraciones generales de la experimentación

En cada grado, se organizaron grupos de 2 a 4 alumnos. Se les pidió un problema cuyo único requisito era que utilizara álgebra en su resolución.

El problema podía ser original, inventado por ellos; o bien, consultando cualquier libro siempre y cuando fueran transformados para que fueran perfectamente claros para el nivel respectivo.

Además, el problema tenía que ser interesante, acompañado de un contexto atractivo, que reflejara, de preferencia, situaciones comunes. No era necesario un problema difícil en cuanto a su solución algebraica, sino en cuanto a deducir del contexto esa solución.

En la primera parte se presentan los problemas en los que existe algún error y se comenta.

En la segunda parte se presentan problemas correctos que, como se verá en su oportunidad, utilizaron contextos muy diversos. Al igual que en los capítulos anteriores, las soluciones pueden ser muchas, presentándose aquí las que los alumnos le dieron a su propio problema.

La mayoría de estos problemas fueron recopilados prácticamente al final del año escolar, por lo que se supone que los alumnos han estudiado lo correspondiente al temario de su nivel.

IV.3 Matemáticas II

IV.3.1 ERRORES MAS COMUNES

En Segundo de Bachillerato el error más común en los problemas entregados fue precisamente lo que se mencionó con anterioridad.

Para los alumnos es difícil manejar un resultado que tenga letras. Aunque la operación está bien realizada, el resultado no tiene significado por la errónea manipulación de las letras.

Tenemos como ejemplo los siguientes problemas:

Problema 22

Una señora quiere vender masa para pastel; pero es necesario que la masa tenga un peso de

$$\frac{7x-15}{x^2-5x+6}\ gr.$$

Si la masa lleva los siguientes ingredientes y cantidades:

$$\textit{Harina}: \frac{x}{x^2-5x+6}\ gr.$$

$$\textit{Huevos}: \frac{1}{x-2}\ gr.$$

$$\textit{Azúcar}: \frac{2x}{x^2-4x+3}\ gr.$$

$$\textit{Leche en polvo}: \frac{1}{x-1}\ gr.$$

¿Tiene el peso necesario?

De no ser así, ¿qué se debe hacer para obtener el peso necesario?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

Sumando los ingredientes de la masa obtenemos lo siguiente:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{x(x-1)+(x-3)(x-1)+2x(x-2)+(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{5x^2-14x+9}{(x-3)(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{5x-9}{(x-3)(x-2)}$$

Vemos, entonces, que no tiene la densidad necesaria. Para saber lo que falta realizamos una resta:

$$\frac{7x-15}{(x-3)(x-2)}-\frac{5x-9}{(x-3)(x-2)}=\frac{2}{x-2}$$

El faltante equivale al doble de gramos de huevos y sería lo que hay que sumarle para obtener la densidad requerida.

Para los efectos de la resta, si ésta se realiza al contrario, se obtiene una cantidad igual pero negativa, por lo que podría introducirse el concepto de valor absoluto para los fines interpretativos del problema.

La solución de los alumnos es correcta; sin embargo, queda en el aire la pregunta, ¿qué es x? , ¿qué representa? debido a que si uno dice: "Le faltan al pastel 2/(x-2) mg. de peso" resulta no ser en lo absoluto claro y sí es carente de significado.

Podemos decir que los alumnos están limitándose a resolver un ejercicio algorítmico bajo un contexto algo más elaborado; pero que no se trata en realidad de plantear y resolver un verdadero problema (ver comentarios al respecto en el primer capítulo).

PROBLEMA 23

Las fórmulas para fabricar ciertos cosméticos son:

Para el rubor:

Color artificial: $\frac{3t-1}{10}$ *mg.*

Aceite natural: $\frac{5-2t}{15}$ *mg.*

¿Cuál es el contenido neto del rubor?

Para el rimel:

Color artificial: $\frac{a}{a+b}$ *mg.*

Proteínas: $\frac{2a^2}{a^2+b^2}$ *mg.*

Aceite: $\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$ *mg.*

¿Cuál es el contenido neto de este producto?

Y finalmente para la pintura de labios:

Glicerina: $\frac{x}{x+3}$ *mg.*

Color artificial: $\frac{x^2}{x^2-9}$ *mg.*

¿Cuál es su contenido neto?

SOLUCION SUGERIDA POR LOS ALUMNOS

El contenido neto de cada cosmético se obtiene mediante la suma

de sus ingredientes.

Realizando las sumas correpondientes obtenemos:

Densidad del rubor:

$$\frac{3t-1}{10}+\frac{5-2t}{15}=\frac{5t+7}{30}$$

La densidad de la pintura de labios es de

$$\frac{x}{x+3}+\frac{x^2}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^2-}{x^2-}$$

La densidad del rimel:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$$

$$=\frac{3a^4+3a^2b^2-a^3b-ab^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}$$

Este problema requiere una solución que se consiste únicamente en realizar la operación algebraica (un algoritmo) sin necesidad de algún análisis o resultado concreto.

Nuevamente vemos la falta de sentido en los resultados debido a que no se especifican los valores o el significado de las letras contenidas en ellos.

PROBLEMA 24

Biblos tenía en la antiguedad el monopolio del papiro. Tenían en su fábrica $(x-1) / (x^2 -2x -3)$ de ese material.

Un día fueron los Hebreos y les pidieron $x / (6-2x)$ para hacer su Biblia.

El rey quería saber cuánto le quedaba de Papiro en su fábrica; así que hizo la siguiente operación:

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{x-1}{(x-3)(x+1)}-\frac{x}{2(3-x)}=\frac{2(3-x)(x-1)-x(x-3)(x+1)}{2(x-3)(x+1)(3-x)}$$

Como eran muchas las operaciones que hacer y el rey no era muy inteligente, llamó al contador y le advirtió que si no resolvía bien la operación le cortaba la cabeza.

El contador se espantó al ver una operación tan grande, así que se ingenió un método para hacer la operación más corta y salvar su cabeza.

¿Cuál fue ese método?

RESPUESTA SUGERIDA POR LOS ALUMNOS

Lo que hizo el contador, fue darse cuenta que si cambiaba el signo al segundo denominador, el común denominador era más más fácil de manejar pues quedan sólo tres factores, lo que simplificaba las operaciones:

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3}+\frac{x}{2x-6}=\frac{2(x-1)+x(x+1)}{2(x-3)(x+1)}=\frac{x^2+3x-2}{2(x-3)(x+1)}$$

Y ese fue el residuo de papiro.

CORRECCION

Nuevamente vemos que el problema no tiene sentido ya que se ignora qué es "x".

Es posible que al ignorar la importancia de saber el valor de "x", tampoco se tomen en cuenta las unidades en las que está dado el problema.

Es decir, no se especifica si el resultado final de cantidad de papiro está dado en rollos de papiro o kilogramos o en cualquier otra unidad.

Para este problema propongo una corrección que en la que se pretende: que el alumno se enfrente a la interpretación de resultados de acuerdo al contexto del problema entre los que están la división entre cero y los resultados negativos.

La propuesta es:

El guardia del almacén del papiro era un hombre muy celoso de su deber y nadie más que él conocía la cantidad de papiro que se tenía.

La clave que usaba era la siguiente:

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3}$$

La cantidad obtenida representaba el número de rollos de papiro que se tenían en el almacén; "x" era un número clave solamente por él conocido.

Cuando llegaron los hebreos a comprar papiro, el guardia registró la venta también por medio de una clave:

$$\frac{x}{6-2x}$$

Cuando el rey quiso saber lo que quedaba, se encontró sólo con las claves.

El contador, bajo la amenaza de perder la cabeza, se enfrentó con dos problemas: la operación era demasiado larga y no sabía qué era "x"

El guardia se negaba rotundamente a descifrar su secreto hasta que a fuerza de tortura, el contador logró saber que el número secreto era un número menor que cinco pero mayor que 0.

¿Qué puede hacer el contador?

SOLUCION PROPUESTA

La operación que se realiza para saber el resto es la misma que en el problema original:

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3}+\frac{x}{2x-6}=\frac{2(x-1)+x(x+1)}{2(x-3)(x+1)}=\frac{x^2+3x-2}{2(x-3)(x+1)}$$

Según la confesión, X era mayor que cero y menor que 5.

Para X= 1 y para X=2, el denominador de la fracción es negativo lo que no concuerda con el dato pedido.

Para X= 3, el denominador se hace cero, por lo que el resultado es indeterminado.

Por lo tanto sólo queda que X=4; si se sustituye, obtenemos que sobran 6 rollos y medio de papiro.

IV.3.2 PROBLEMAS CORRECTOS

Entre los problemas correctos, hay desde el que presenta un caso de historia internacional reciente hasta aquél sobre cuestiones cotidianas en alumnos de este nivel.

PROBLEMA 25

Durante el periodo de la guerra del Golfo Pérsico, la cadena de televisión RMB mandó a sus corresponsales a cubrir las consecuencias económicas entre Irak y Kuwait.

-Vamos con nuestro corresponal Mikulenko Klug

-Buenas tardes amigos de RMB, saludándolos desde el hotel Fermon que nos sirve de refugio.

(Se oye un gran estallido)

Nuevamente, el locutor de RMB:

- Toda la información recabada se nos ha estado transmitiendo por medio de un radio pero desgraciadamente por fallas técnicas, la información no fue recibida en su totalidad. Lo que nuestro corresponsal alcanzó a transmitir fue:

Debido a la guerra del Golfo Pérsico, Irak y Kuwait sufrieron pérdidas materiales por 54 000 000 dólares.

Japón, Estados Unidos y la Unión Soviética van a cooperar para reembolsar esa cantidad. Sus aportaciones fueron:

Japón: cierta cantidad que no se logró captar

Estados Unidos: con el doble de Japón

URSS: con la mitad de todo lo que dieron Estados Unidos y Japón.

¿Cuántos millones de dólares dio cada uno?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

La cantidad con la que cooperó Japón es desconocida, por lo que la llamaremos X.

Con base en esta X, tenemos las siguientes cooperaciones:

Japón: X

Estados Unidos: 2X

URSS: (X + 2X)/2

Igualando la suma de las aportaciones con el total aportado podemos plantear una ecuación:

$$x+2x+\frac{x+2x}{2}=54\,000\,000$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que:

X = 12 000 000

Por lo tanto, las aportaciones fueron las siguientes:

Japón: 2 000 000 dólares

Estados Unidos: 24 000 000 dólares

URSS: 18 000 000 dólares

RESPUESTAS ALTERNATIVAS

Este problema fue posteriormente presentado a otro grupo de estudiantes de características similares (edad, bases teóricas) al grupo que lo creó, aunque todavía no habían llevado nada sobre teoría de ecuaciones en Matemáticas II aunque cabe mencionar que en Matemáticas I manejaron ecuaciones simples y planteamiento de igualdades sencillas.

El problema fue planteado por el profesor y resuelto conjuntamente con la clase. La primera respuesta que surgió, y la que fue mucho más clara para el resto de los estudiantes, fue la siguiente:

"Sabemos que Japón aportó una parte del dinero; que Estados Unidos aportó el doble que Japón, es decir, dos partes del dinero; y que la URSS aportó la mitad de la suma de los otros dos, esto es, tres parte entre dos, lo que nos da 1.5.

Tenemos entonces que el total de partes en las que se dividió el dinero fueron 4.5 partes; dividimos ahora 54 millones entre 4.5 para saber cuánto vale cada parte.

Efectuando la división, tenemos que cada parte equivale a 12 millones, que fue lo que dió Japón. Estados Unidos, entonces, dio 24 millones y la URSS dió 18 millones, pues dividimos 12 millones entre dos, 6 millones, y se lo sumamos a la parte entera"

Posteriormente, algunos otros alumnos empezaron a formular la ecuación y finalmente también se llegó a la respuesta correcta resolviendo la ecuación planteada tal y como se propone en la solución del primer grupo de alumnos.

PROBLEMA 26

En una fiesta estaban cinco alegres doncellas . Tenían tres de ellas la misma edad y de las otras dos, una un año más y la otra un años menos.

Sólo aceptaron a 3 galanes de 5 que les ofrecieron compañía. pues los tres aceptados tenían la misma edad de la mayor; de los otros dos uno tiene 5 veces la edad de la menor y el otro es 5 años menor que la menor de las doncellas.

¿Puedes decir por qué rechazaron a dos de los galanes y además la edad de cada uno de los integrantes de este problema, si la suma de las edades de las doncellas es de sólo 75?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

La edad de cada una de las doncellas de igual edad es desconocida y en base a ella encontraremos la de los demás. Por lo tanto, la llamaremos X.

La edad de la doncella mayor es X+1

La edad de la doncella menor es X-1

Sabemos que la suma de las edades de las doncellas es de sólo 75, por lo que:

$X + X + X + (X+1) + (X-1) = 75$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$5X = 75$

Entonces,

La edad de las tres doncellas que tienen la misma es: 15 años

La edad de la doncella mayor es 16 años

La edad de la doncella menor es 14 años

La edad de los tres galanes aceptados es de 16 años

La edad de los galanes rechazados es:

Uno tiene cinco veces la edad de la menor, es decir tiene 70 años. El otro tiene cinco años menos que la menor, es decir, tiene 9 años.

De los galanes rechazados uno estaba muy viejito y el otro era demasiado joven; por eso fueron rechazados.

RESPUESTAS ALTERNATIVAS

Al igual que el problema anterior, este problema fue posteriormente presentado a otro grupo de características similares con el había creado aunque todavía no habían llevado teoría de ecuaciones, salvo los casos simples vistos en Matemáticas I.

Se plantearon dos soluciones -una de ellas estableciendo la ecuación que se sugiere en la solución- y, a diferencia del anterior, ambas fueron suficientemente claras para el resto de los alumnos.

La solución alternativa al planteamiento de la ecuación consistió en:

"Dividimos 75 entre las cinco doncellas. Eso me da que cada una tiene 15 años, pero como sabemos que una tiene un año más, se lo ponemos, quedando de 16 años, y ese que agregamos se lo quitamos a la que tiene un año menos, quedando de 14 años, y entonces se sigue cumpliendo que la suma de las edades de las doncellas es 75".

PROBLEMA 27

"EL DILEMA DE LOS NOVIOS"

Estaba a punto de casarme... (gran dilema) Mi novio Leogobildo esta AFERRADO en saber cuántos novios había tenido antes que él.. pero a mí sinceramente me avergonzó que lo supiera, y yo no me hubiera podido resignar a que ya no me quisiera como esposa.

Así que, esribíle una notita que poco tiempo después le dí. Yo, obviamente, no se lo quise decir en forma tan directa; lo puse a trabajar un poquito, planteándole este asunto de la siguiente manera:

"Febrero 14, 1991.

Amorcito corazón:

Yo tengo tentación de un beso... por eso, contestaré a tu pregunta.

Bien. Pongámosle "x" al número de novios que he tenido. Ahora, mi amor, buzo caperuzo: cuatro veces el número de novios que he tenido dividido entre tres, es el número de novios que ha tenido mi hermana Paca, ¿OK?

Bueno. Le sumamos el doble del número de novios que he tenido dividido entre tres y ese es el número de novios que ha tenido mi prima Macuca.

Ahora, corazón... AGARRATE: Auméntale a la cuenta cuatro veces el número de novios que he tenido, dividido entre dos, es el número de novios que tuvo mi mejor amiga Buruleta; y si a todo esto le restamos el número de novios que he tenido, nos da un total de tres.

Ya podrás contestar la pregunta que te carcome; y además sabrás los secretos de las vidas amorosas de Paca, Macuca y Buruleta.

Por siempre tuya,

Monina Lisa"

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

El "número de novios que he tenido" se denotará por X

El número de novios de la hermana Paca es 4X / 3

El número de novios de la prima Macuca es 2X / 3

El número de novios de la amiga Buruleta es 4X / 2

Haciendo la suma de todo lo anterior y restándole nuevamente X , obtenemos 3. Es decir,

$$\frac{4x}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{4x}{2}-x=3$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que X = 1

Es decir, ha tenido un sólo novio antes que Leogobildo.

Buruleta ha tenido dos novios.

En cuanto a los novios de las otras dos, no da un número exacto: Paca: 4/3 y Macuca 2/3. Como se refiere a los secretos de ambas, el alumno podría dar diversas interpretaciones como por ejemplo que

Paca tuvo un novio y otro que no llegó a serlo.

PROBLEMA 28

Se escucha una voz en el noticiero que dice: "Nos ha llegado un noticia de última hora. Ayer a la media noche fue asesinado el millonario Sir Patrick Mc. Neal, considerado uno de los 10 hombres más ricos del mundo. Se cree que fue asesinado por alguno de sus sirvientes o por su primo Norman Mc. Neal, todos ellos sabían muchos de sus secretos"

Los sospechosos son: La secretaria, el ama de llaves, el jardinero, el chofer, el mayordomo, la cocinera, Sir Norman Mc. Neal.

El cuerpo del millonario fue encontrado en la biblioteca de su residencia junto con una hoja de libreta que decía:

"Estaban dos insectos junto con # multiplicándose entre sí, sin saber que menos tres insectos urgían otro plan para superar su condición, y a la vez sin sospechar que de todo el grupo sólo habría un ganador"

Llegaron los detectives e investigaron en cada habitación.

Hallaron una pistola en el despacho, la cual tenía un trozo de pañuelo en el gatillo; se lo dieron a un sabueso y éste encontró unos documentos enterrados en el jardín, los cuales contenían el orden de las contrataciones de cada uno de los sirvientes.

Interrogando a los sospechosos se obtuvieron los siguientes datos:

Cocinera y ama de llaves: en su recámara se encontró el pañuelo roto.

Secretaria: era amante de Patrick Mc. Neal y éste la dejó. Ella sabía cuánto dinero tenía

Chofer: dueño del pañuelo

Jardinero: él enterró los documentos

Norman Mc. Neal: dueño de la pistola

La forma de comunicación entre ellos era de acuerdo a su fecha de contratación (el primero en contratarse sería el número uno)

Enero 1977 - cocinero

Septiembre 1981 - secretaria

Octubre 1980 - ama de llaves

Mayo 1978 - mayordomo

Noviembre 1985 - jardinero

Diciembre 1982 - chofer

Febrero 1987 - Norman llegó a vivir con su primo

¿Quién es el asesino?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

Lo primero que hay que descifrar es el acertijo, en el cual hay un dato (#) que no se conoce, por lo que éste será la incógnita X.

El acertijo es el siguiente:

$2X - 3$

"...sin saber que al final sólo habría un ganador"

$2X - 3 = 1$

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$X = 2$

Por lo tanto, el asesino es aquél que está relacionado con el número dos.

De todas las pistas encontradas, vemos que sólo la lista de fechas de contratación establece una relación con números. Por lo tanto, al que le correponda el número dos, será el asesino, es decir, la secretaria.

PROBLEMA 29

Se van a repartir 9 154 000 toneladas de maíz entre unas entidades del Estado de Morelos afectadas por una tormenta.

A cada entidad le tocarán tantas tonelas como número de habitantes tenga.

En Jojutla hay el doble de habitantes que en Alpuyeca; en Puente de Ixtla hay la misma cantidad de habitantes de Alpuyeca disminuída en 100 000; en Tlapenchi hay la quinta parte de los habitantes de Puente de Ixtla; en Panchimalco hay los mismo habitantes que en Alpuyeca aumentados en 200 000.

¿Cuántas toneladas de maíz le tocan a cada entidad?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

Todos los datos de la repartición dependen del número de habitantes de Alpuyeca, por lo que este número será nuestra incógnita X.

Con base en este X estableceremos las demás relaciones de habitantes de los demás pueblos:

Alpuyeca	X
Jojutla	2X
Puente de Ixtla	X - 100 000
Tlapenchi	(X - 100 000) / 5
Panchimalco	X + 200 000

El número de habitantes que tiene cada entidad es igual al número de toneladas de maíz que recibirá, por lo que podemos hacer la siguiente igualdad:

$$x+2x+x-100\,000+\frac{x-100\,000}{5}+x+200\,000=9\,154$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que X = 1 745 000

Por lo tanto, cada entidad recibirá las siguientes toneladas de maíz:

Alpuyeca: 1 745 000 toneladas

Jojutla: 3 490 000 toneladas

Puente de Ixtla: 1 645 000 toneladas

Tlapenchi: 329 000 toneladas

Panchimalco: 1 945 000 toneladas

IV.4 MATEMATICAS IV

IV.4.1 ERRORES

El manejo de letras es mejor manipulado en este nivel; sin embargo, sigue estando presente un error del cual ya se ha comentado algo en el capítulo anterior: la falta de identificación de las unidades.

Es decir, el alumno cae fácilmente en el error de sumar y restar cantidades de diferentes unidades.

Como ejemplo tenemos el siguiente problema:

PROBLEMA 30

RECETA DEL SUPER-PASTELITO

1. Mezclar pastelitos con un taza de leche.
2. Agregue canela y azúcar al gusto
3. Reparta 2/3 de la mezcla en 5 moldes previamente engrasados y enharinados. Guarde el resto de la mezcla y posteriormente utilícela para decoración.

O bien si no quiere utilizar leche:

1. Mezclar la misma cantidad de pastelitos quitando 6 tiras de mermelada de algunos de ellos.
2. Agregue canela y azúcar al gusto.
3. Reparte 3/4 partes de la mezcla en 3 moldes previamente engrasados y enharinados. Guarde el resto para decoración.

En ambas recetas se obtiene la misma porción de postre por molde.

Refrigere en ambos casos 3 horas antes de servirse.

FIN

Toda la receta se ve deliciosa, sin embargo, a la cocinera se le olvidó un pequeño detalle: ¿cuántos paquetes de pastelitos, de los que trae cada uno, dos, se necesitan?

RESPUESTA SUGERIDA POR LOS ALUMNOS

Como no sabemos cuántos pastelitos se necesitan, denotemos como X esta cantidad.

Mezclando los pastelitos con una taza de leche, se obtiene

$X + 1$

Separamos dos tercios de esta mezcla

$(2/3)\ (X + 1)$

En uno de los cinco moldes tendremos

$(1/5)\ (2/3)\ (X+1)$

Si realizamos esta última operación, obtenemos:

$(2X + 2)\ /\ 15$

La otra opción es la siguiente:

Le quitamos 6 tiras de mermelada

$X - 6$

Separamos 3/4 de esta mezcla

$(3/4)\ (X - 6)$

Lo que obtenemos en uno de los tres moldes es

$(1/3)\ (3\ /4)\ (X - 6)$

Haciendo esta operación, obtenemos:

$(X - 6)\ /\ 4$

Como la receta afirma que se obtiene en cada molde la misma cantidad, entonces podemos igualar ambos resultados:

$$\frac{2x+2}{15}=\frac{x-6}{4}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que

X = 14

Por lo tanto, se necesitan 14 pastelitos, es decir, 7 paquetitos de dos pastelitos cada uno.

OBSERVACIONES

Según el planteamiento del problema X es la cantidad de pastelitos.

"Mezclando los pastelitos con una taza de leche se obtiene X + 1"

Si analizamos la expresión X + 1 en realidad aumentarle un pastelito más y no una taza de leche por la definición inicial de X.

Cuando se menciona la otra opción de quitarle seis tiras de mermelada: X - 6 se comete de nuevo el mismo error pues se le quitan 6 pastelitos y no tiras de mermelada.

Vemos, entonces, que aunque los alumnos de este nivel manejan mejor los planteamientos, la representación de cantidades desconocidas por medio de letras carece también de las unidades respectivas.

IV.4.2 PROBLEMAS CORRECTOS

PROBLEMA 31

Hace mucho tiempo, dos musulmanes que se dirigían a Bagdad, se detuvieron en una pequeña aldea para vender las velas que traían.

Cuando ya se disponían a vender, se les unió un forastero lo cual les molestó mucho. Le pidieron que se fuera a vender a otro lugar, ya que daba muy mal aspecto y podía alejar a la clientela.

Después de una acalorada discusión, el forastero, muy listo, aceptó retirarse sólo si los musulmanes adivinaban la cantidad de velas que tenía, dándoles los siguientes datos:

El primer musulmán tenía 4 veces el cuadrado del número de velas del forastero menos el resultado de la suma de la cantidad de velas de los dos musulmanes, y todo lo anterior elevado a la 1/2.

El segundo musulmán tenía el doble de las velas del forastero.

La suma de las velas de los dos musulmanes es igual a 15.

¿Cuántas velas tenía el forastero?

SOLUCION SUGERIDA POR LOS ALUMNOS

Denotemos por x la cantidad de velas que tenía el forastero.

La cantidad de velas del primer forastero es:

$$\sqrt{4x^2-15}$$

La cantidad de velas del segundo forastero es 2x

Si sumamos ambas, nos da un total de 15

$$\sqrt{4x^2-15}+2x=15$$

Resolviendo la ecuación obtenemos que x=4; por lo que el forastero tenía 4 velas.

PROBLEMA 32

El domingo pasado en un partido de baseball se enfrentaron los Atléticos de Oakland contra los Medias Rojas de Boston.

Un par de amigos llegaron tarde y para saber el marcador final le preguntaron a un joven matemático que les dijo:

-Sólo hubo dos entradas.

-En la primera entrada los Atléticos anotaron 4 carreras más que los Medias Rojas

-El número de carreras que anotaron los Medias Rojas en la primera entrada, es el mismo número de carreras que anotaron los Atléticos en la segunda entrada.

-La diferencia de las carreras en la primera entrada es el doble de la diferencia de carreras en la segunda.

-Si a la diferencia del marcador final le aumentamos uno, nos da el número de carreras que anotaron los Medias Rojas en la segunda entrada.

Después de todo esto, ¿cuál fue el marcador final?

RESPUESTA SUGERIDA POR LOS ALUMNOS

Hagamos las siguientes notaciones:

A1: Carreras de los Atléticos en la primera entrada

A2: Carreras de los Atléticos en la segunda entrada

R1: Carreras de los Medias Rojas en la primera entrada

R2: Carreras de los Medias Rojas en la segunda entrada

De acuerdo a los datos tenemos las siguientes ecuaciones:

EC. 1 $A1 = R1 + 4$

EC. 2 $R1 = A2$

EC. 3 $A1 - R1 = 2\,(A2 - R2)$

O bien, dado que en la segunda entrada no se sabe quién ganó:

EC. 3* $A1 - R1 = 2\,(R2 - A2)$

Continuando con los datos:

EC. 4 $A1 + A2 - (R1 + R2) + 1 = R2$

Nuevamente, tenemos otra posibilidad pues no sabemos quién ganó el partido:

EC. 4* $R1 + R2 - (A1 + A2) + 1 = R2$

Tenemos, tomando en cuenta las combinaciones de las diversas posibilidades, cuatro sistemas de ecuaciones:

Sist A	Sist B	Sist C	Sist D
EC.1	EC.1	EC.1	EC.1
EC.2	EC.2	EC.2	EC.2
EC.3	EC.3*	EC.3	EC.3*
EC.4	EC.4	EC.4*	EC.4

SISTEMA A:

En la ecuación 3 sustituímos la 1 y 2:

$A1 - R1 = 2\,(A2 - R2)$

$R1 + 4 - R1 = 2\,(A2 - R2)$

$A2 + 4 - A2 = 2A2 - 2R2$

$-2A2 + 2R2 = -4$ (EC. 5)

En la ecuación 4 hacemos las mismas sustituciones:

$A1 + A2 - (R1 + R2) + 1 = R2$

$R1 + 4 + A2 - R1 - R2 + 1 = R2$

$A2 + 4 + A2 - A2 - R2 + 1 = R2$

$A2 - 2R2 = -5$ (EC. 6)

Las ecuaciones 5 y 6 forman un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

$A2 = 9$

$R2 = 7$

A partir de ellas obtenemos las faltantes:

$A1 = 13$

$R1 = 9$

Al resolver los tres sistemas restantes, se obtendrán resultados negativos lo cual conduce a su eliminación.

Tenemos entonces el siguiente marcador final:

	PRIMERA ENTRADA	SEGUNDA ENTRADA	MARCADOR FINAL
MEDIAS ROJAS	9	7	16
ATLETICOS	13	9	22

PROBLEMA 33

Un grupo de estudiantes realizó una encuesta en Guadalajara el día de las elecciones en las que participaron 7 500 000 votantes. Sin embargo, sus resultados no coincidieron con los oficiales.

En el reporte que elaboraron decidieron incluir ambos resultados junto con unas suposiciones que ellos plantearon con el fin de obtener los resultados oficiales.

Estas suposiciones toman en cuenta los dos partidos más fuertes: PRI y PAN que correspondieron a las dos terceras partes del total de los participantes:

"Si un determinado número de personas hubieran votado por el PRI en vez de votar por el PAN, los votos del PRI hubieran resultado el cuádruplo de los del PAN. Por otro lado, si el doble de este determinado número de peronas hubiera votado por el PAN, en vez de por el PRI, hubiera resultado un empate"

Cuáles fueron los resultados oficiales suponiendo que no hubo abstencionismo?

SOLUCION PROPUESTA POR LOS ALUMNOS

Denotemos:

X: determinado número de personas

a: votos efectivos por el PRI

b: votos efectivos por el PAN

Sabemos que 2/3 de los votantes se inclinan por el PRI y por el PAN, es decir,

5 000 000 votantes del PRI y PAN

2 500 000 votantes de partidos diversos

La primera suposición es:

$a + x = 4(b - x)$

$a - 4b = -5x$ EC. 1

La segunda suposición es basada en que hubo empate, es decir 2 500 000 votos para cada partido:

$b + 2x = 2\ 500\ 000$

$a - 2x = 2\ 500\ 000$

De donde,

$a = 2\ 500\ 000 + 2x$

$b = 2\ 500\ 000 - 2x$

Sustituyendo estos valores en la ecuación número 1:

$(2\ 500\ 000 + 2x) - 4(2\ 500\ 000 - 2x) = -5x$

Obtenemos:

$$x = 500\ 000$$

Sustituyendo, encontramos los valores de a, b:

$a = 3\ 500\ 000$

$b = 1\ 500\ 000$

Por lo tanto, tenemos que:

Votos del PRI: 3 500 000

Votos del PAN: 1 500 000

Votos de partidos diversos: 2 500 000

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se presentaron problemas que pretenden complementar y ayudar a la enseñanza del Algebra tanto en el nivel medio como medio superior.

Esta materia resulta indispensable para el estudiante, por lo que es importante que sus conceptos principales queden claros y entendidos así como también su utilidad.

Muchos de los problemas presentados pudieran considerarse verdaderamente ficticios. Sin embargo, la ciencia de la Matemática en general consta de muchos problemas cuyo contexto no es real siendo el único propósito que el alumno desarrolle su habilidad para enfrentarse a problemas no rutinarios.

La experimentación presentada muestra los puntos débiles frecuentes de los estudiantes entre los que destacan lo difícil que puede resultar la utilización de letras por primera vez.

Esta dificultad radica en no relacionar una letra como representación de algo y limitarse a realizar un algoritmo nuevo necesario para manejar letras y números al mismo tiempo; esto origina errores como sumar términos no semejantes.

Así, se espera que la experimentación sea de gran utilidad para la aplicación de los problemas y para la creación de nuevas estrategias propias de enseñanza, pues al cuidar los puntos en donde los estudiantes tienden a fallar, puede lograrse un éxito mayor.

Los diálogos presentados son un bosquejo de cómo las soluciones se van gestando en las mentes estudiantiles y sobre las ideas intuitivas de los alumnos.

El conocimiento previo e intuiciones pueden, entonces, utilizarse para generar nuevo conocimiento pues resulta más productivo que un estudiante vea que sus intuiciones poco a poco van siendo reconstruídas por las matemáticas formales que destruídas por completo y vueltas a crear a partir de la nada.

Por otra parte, una de las principales objeciones que puede ponerse al utilizar problemas para presentar un tema, para profundizarlo, hacerlo atractivo o para concluirlo es que lleva mucho más tiempo que el hacerlo de la manera tradicional.

No entraremos aquí en detalles sobre la eterna discusión entre el poco tiempo que se tiene para desarrollar las amplias currículas impuestas en contra de la necesidad de que los temas que alcancen a exponerse sean plenamente comprendidos, sino simplemente se menciona que el utilizar problemas puede convertirse en una herramienta para llegar al justo medio o por lo menos pretender alcanzarlo.

FACULTAD DE CIENCIAS

México, 1993.

INDICE DE PROBLEMAS

BIBLIOGRAFIA

ALCALA, Ignacio; REZC, Yamil. "Matemáticas y Realidad"; Revista Educación Matemática (Vol. 3, No. 1); México: Abril, 1991; pp. 77-81

ALEM, Jean-Pierre. Juegos de Ingenio y Entretenimiento Matemático ;México: Ed. Gedisa, 1988.

ALEM, Jean-Pierre. Nuevos Juegos de Ingenio y Entretenimiento Matemático; México: Ed. Gedisa, 1989.

ALVAREZ Díaz, Eugenio. Problemas de Aritmética y Algebra sobre Temas de Mitología; México: Gráfica panamericana, 1944.

FREUDENTHAL, Hans. "Mayor problems of Mathematics Education". Conferencia dada en la sesión plenaria del ICME el 10 de Agosto de 1980. Traducción de Alejando López Yañez.

LAKATOS, Imre. Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Editorial Alianza, 1982'

PARRA, Blanca M. "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas"; Revista Educación Matemática (Vol. 2, No. 3): México, 1990; pp. 22-31

RESNICK, B. Laurean "Una nueva concepción del aprendizaje de la Ciencia y de las Matemáticas". Boletín del Centro de Didáctica de la Universidad Iberoamericana. Primavera, 1987.

TAHAN, Malba. El Hombre que Calculaba ; México: Ed. Trillas,1988.

WAGNER, Sigrid; KIERAN, Carolyn. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra; USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.