UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE ALGUNAS CLASES DE GRUPOS MINIMALES NO ABELIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

PRESENTA:

JOEL CRUZ RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1993

CONTENIDO

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es dar una caracterización de los grupos finitos no abelianos que tienen todos sus subgrupos propios abelianos. A estos grupos se les llama grupos minimales no abelianos. Una caracterización de estos grupos la dieron G. A. Miller y H. Moreno, la cual se publicó en 1903 [4]. La exposición que se da aquí se debe esencialmente a Reinholdt Baer [1].

En la primera parte del presente trabajo se enuncian definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grupos, que son necesarios para el estudio de los grupos minimales no abelianos. Con excepción de un teorema de Frobenius, los demás resultados que se enuncian en esta parte, se encuentran en cualquier libro de Algebra Abstracta, por ejemplo en [2] o en [5].

En la segunda parte se caracterizan los grupos minimales no abelianos y se dan algunos ejemplos. Concretamente se demuestran los siguientes resultados:

Teorema 1. Sea G un grupo finito. Las siguientes proposiciones (a) y (b) son equivalentes.

(a): a.1 G no es abeliano, pero todo subgrupo propio de G es abeliano, a.2 G tiene al menos dos subgrupos normales maximales.

(b): b.1 $Z(G) = \phi(G)$,

b.2 G es un p-grupo,

b.3 $G/_{Z(G)}$ es abeliano elemental de orden p^2.

Teorema 2. Sea G un grupo finito. Las siguientes proposiciones (a) y (b) son equivalentes.

(a): a.1 G no es abeliano, pero todo subgrupo propio de G es abeliano,

a.2 G tiene sólo un subgrupo normal maximal.

(b): b.1 $Z(G) = \phi(G)$,

b.2 $C_G(G') = G' \times Z(G)$ es el único subgrupo normal maximal en G y $[G : C_G(G')] = q$ es un primo,

b.3 $G/_{G'}$ es un q-grupo cíclico,

b.4 G' es un subgrupo normal minimal de G, G' es un p-grupo abeliano elemental no trivial con p un primo y $p \neq q$.

Parte I

DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS

En esta primera parte se recuerdan algunas definiciones y se enuncian sin demostración los resultados que se emplean para el estudio de los grupos minimales no abelianos.

GRUPOS Y SUBGRUPOS

Definición. Un *grupo* G es un conjunto no vacío en el cual está definida una operación binaria (*), que cumple las siguientes propiedades:

i) * es asociativa, es decir, para toda a, b, $c \in G$, se tiene

$$a*(b*c) = (a*b)*c.$$

ii) Existe $e \in G$, llamado elemento neutro de G, tal que para toda $a \in G$, $a*e = a$.

iii) Para cada $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$, llamado elemento inverso de a, tal que $a*a^{-1} = e$.

La expresión $a*b$ se denota con ab.

Si en un grupo G se tiene que ab = ba para toda a, $b \in G$, entonces al grupo G se llama *conmutativo* o *abeliano*.

Definición. El *orden* de un grupo G, es el número de elementos del conjunto G, y se denota con $o(G)$ o con $|G|$.

Definición. Si G es un grupo finito, $g \in G$, entonces el *orden* de g es el mínimo entero positivo n tal que $g^n = e$, y se denota con $o(g)$.

Definición. Un *subgrupo* H de un grupo G, es un subconjunto H de G que también es un grupo con la misma operación dada en G.

Notación. Si A es un *subconjunto* de B, se denota con $A \subseteq B$, si A es un *subconjunto propio* de B, se denota con $A \subset B$. Si H es un *subgrupo* de G, se denota con $H \leq G$, y si H es un *subgrupo propio* de G, se denota con $H < G$.

Teorema. *Sea* $H \subseteq G$. H *es un subgrupo de* G *si, y sólo si,*

i) $e \in H$,

ii) si $a, b \in H$ *entonces* $ab^{-1} \in H$.

Teorema. *Si para cada* $i \in I$, H_i *es un subgrupo de un grupo* G, *entonces* $\bigcap_{i \in I} H_i$ *es un subgrupo de* G. *En particular si* H *y* K *son subgrupos de un grupo* G, *entonces* $H \cap K$ *es un subgrupo de* G.

Definición. El *centro* de un grupo G, es el conjunto

$$Z(G) = \{ x \in G \mid xa = ax \text{ para toda } a \in G \}.$$

$Z(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

Definición. Si G es un grupo y $a \in G$, el *normalizador* de a en G es el conjunto

$$\mathbf{N}_G(a) = \{ x \in G \mid xax^{-1} = a \} = \{ x \in G \mid xa = ax \},$$

$\mathbf{N}_G(a)$ es un subgrupo de G. Es inmediato que $\mathbf{N}_G(a) = G$ si, y sólo si, $a \in \mathbf{Z}(G)$.

Definición. Si G es un grupo y $H \leq G$, el *normalizador* de H en G es el conjunto

$$\mathbf{N}_G(H) = \{ x \in G \mid xHx^{-1} = H \}$$

donde $xHx^{-1} = \{ xhx^{-1} \mid h \in H \text{ y } x \in G \}$.

$\mathbf{N}_G(H)$ es un subgrupo de G y $H \leq \mathbf{N}_G(H)$. Si $H \trianglelefteq G$ entonces $H \trianglelefteq \mathbf{N}_G(H)$.

Definición. Si G es un grupo y $B \leq G$, el *centralizador* de B en G es el conjunto

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_G(B) &= \{ x \in G \mid xbx^{-1} = b \text{ para toda } b \in B \} \\ &= \{ x \in G \mid xb = bx \text{ para toda } b \in B \} \end{aligned}$$

Si $B = \{ b \}$, se escribe $\mathbf{C}_G(B) = \mathbf{C}_G(b)$. En este caso $\mathbf{C}_G(b)$ coincide con $\mathbf{N}_G(b)$. Si $x \in \mathbf{Z}(G)$ entonces $xb = bx$ para toda $b \in G$, en particular $xb = bx$ para toda $b \in B \leq G$ lo que implica que $x \in \mathbf{C}_G(B)$, y por lo tanto $\mathbf{Z}(G) \leq \mathbf{C}_G(B)$.

Definición. Si $A, B \leq G$ y $ab = ba$ para toda $a \in A$ y $b \in B$, entonces se dice que A está *centralizado* por B, o que B *centraliza* a A.

Definición. Un *grupo minimal* no abeliano, es un grupo no abeliano en el que todos sus subgrupos propios son abelianos.

Definición. Si A es un subgrupo propio de G, entonces se dice que A es un *subgrupo maximal* de G si no existe un subgrupo M de G, tal que

$$A < M < G.$$

Definición. Si B es un subgrupo de G diferente de $\{e\}$, entonces se dice que B es un *subgrupo minimal* de G si no existe un subgrupo N de G tal que

$$\{e\} < N < B.$$

Definición. Un subgrupo H de G es *normal* en G, si $H = g^{-1}Hg$ para toda $g \in G$.

A partir de la definición de $g^{-1}Hg$, se tiene que si $g^{-1}Hg = H$, entonces $Hg = gH$. El conjunto $Hg = \{ hg \mid h \in H \text{ y } g \in G \}$ se llama *clase lateral derecha* de H en G, el conjunto $gH = \{ gh \mid h \in H \text{ y } g \in G\}$ se llama *clase lateral izquierda* de H en G. De esta manera tenemos que si H es un subgrupo normal de G, entonces toda clase lateral derecha de H es una clase lateral izquierda de H en G. Si H no es un subgrupo normal de G, entonces no toda clase lateral derecha es una clase lateral izquierda.

Teorema. *Si* G *es un grupo y* H *un subgrupo de* G, *entonces existe una biyección entre el conjunto de las clases laterales derechas de* H *en* G *y el conjunto de las clases laterales izquierdas de* H *en* G.

Notación. Si G es un grupo y H un subgrupo de G, entonces el conjunto $\{ gH \mid g \in G \}$ de todas las clases laterales izquierdas de H en G se denota con $G/_{H}$.

Definición. Al número de elementos de $G/_{H}$ se llama el *índice* de H en G y se denota con [G ; H].

Teorema (Lagrange). *Si* G *es un grupo finito y* H *un subgrupo de* G, *entonces* $o(G) = o(H)[G : H]$.

Teorema. *Si los únicos subgrupos de un grupo* G *son los triviales, entonces el orden del grupo* G *es un número primo.*

Teorema. *Si* H *es normal en* G, *entonces* $G/_{H}$ *es un grupo con la operación binaria* $(aH)(bH) = abH$, *para cada* aH *y* $bH \in G/_{H}$.

Se tiene que si K es normal en G y H es un subgrupo de G tal que $K \leq H$, entonces $H/_{K}$ es un subgrupo de $G/_{K}$.

Si G es un grupo se tiene que:

a) $\mathbf{Z}(G)$ es normal en G.

b) Si H es un subgrupo de G entonces H es normal en $\mathbf{N}_G(H)$.

c) Si G es un grupo abeliano y H es un subgrupo de G, entonces H es normal en G.

d) Si H es normal en G y K es normal en G, entonces $H \cap K$ es normal en G.

e) Si N es normal en G y H un subgrupo de G, entonces $N \cap H$ es normal en H.

f) Si M y N son subgrupos de G, entonces MN es un subgrupo si, y sólo si, $MN = NM$, donde $MN = \{ mn \mid m \in M, n \in N \}$.

g) Sea G un grupo finito. Si S y T son subgrupos de G, entonces

$$|ST| = \frac{|S|\ |T|}{|S \cap T|}.$$

h) Si M y N son subgrupos normales de G, entonces NM también es un subgrupo normal de G.

i) Si H y K son subgrupos normales de un grupo G, tal que $H \cap K = e$, entonces $hk = kh$ para toda $h \in H$ y $k \in K$.

Teorema. *Si* G *es un grupo y* X *un subconjunto de* G, *entonces la intersección de todos los subgrupos de* G *que contienen a* X *es el subgrupo mínimo de* G *que contiene a* X.

Notación. El subgrupo del teorema anterior se denota con $\langle X \rangle$, y se llama el *subgrupo generado* por X.

Definición. Sea G un grupo y $X \subset G$, si $\langle X \rangle = G$ se dice que X *genera* a G, y a los elementos de X se le llaman *generadores* de G.

Definición. Si existe Y subconjunto finito de un grupo G tal que $\langle Y \rangle = G$, se dice que G es *finitamente generado.* Si G es generado por un sólo elemento, G se llama *cíclico.*

Teorema. *Si un grupo finito* G *tiene sólo un subgrupo maximal, entonces* G *es cíclico.*

Teorema. *Si* X *es un subconjunto no vacío de un grupo* G*, entonces el subgrupo generado por* X*, está formado por los elementos de* G *que son producto de potencias con exponente entero de elementos de* X*.*

Notación. Si M y N son subgrupos de un grupo G, entonces el subgrupo generado por $M \cup N$ se denota con $M \vee N$.

Definición. Si G es un grupo y $a, b \in G$, entonces el elemento $aba^{-1}b^{-1}$ se llama *conmutador* de a y b, y se denota con $[a,b]$.

Definición. Sea $X = \{ [a,b] \mid a, b \in G \}$, el subgrupo generado por X, se llama *subgrupo derivado* de G o *subgrupo conmutador* de G, y se denota con G'.

Si G es un grupo abeliano, entonces $xyx^{-1}y^{-1} = e$ para cada $x, y \in G$. Por lo tanto G no es abeliano si, y sólo si, $G' \neq \{e\}$.

Teorema. *Si* G *es un grupo, entonces* G' *es normal en* G*.*

Teorema. *Sea* G *un grupo y* H *un subgrupo de* G*.* $G' \leq H$ *si, y sólo si,* H *es normal en* G *y* $G/_H$ *es abeliano.*

Teorema. *Si* G *es un grupo y* H *un subgrupo de* G *tal que* $H \leq Z(G)$ *y* $G/_H$ *es cíclico, entonces* G *es abeliano.*

Teorema. *Sea G un grupo y M un subgrupo de G tal que* $Z(G) \leq M$. *Si* $M/_{Z(G)}$ *es cíclico entonces M es abeliano.*

Corolario. *Si* $G/_{Z(G)}$ *es cíclico, entonces G es abeliano.*

Definición. Si A es un subgrupo normal propio de G, tal que no existe subgrupo normal propio de G entre A y G, se dice que A es *normal maximal*.

Definición. Si B es un subgrupo normal de G diferente de {e}, tal que no existe subgrupo normal entre {e} y B, entonces se dice que B es *normal minimal*.

Definición. Si un grupo G no tiene subgrupos normales propios diferentes de {e}, se llama *simple*.

HOMOMORFISMOS

Definición. Sean G y N grupos, y $f : G \longrightarrow N$ una función. Se dice que f es un *homomorfismo*, si para toda $a, b \in G$ se tiene que

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Si G y N son grupos y $f : G \longrightarrow N$ es un homomorfismo, entonces:

a) si H es un subgrupo de G, entonces $f(H)$ es un subgrupo de N,

b) si H es un subgrupo de N, entonces $f^{-1}(H)$ es un subgrupo de G, *c*) si H es un subgrupo normal de G, entonces f(H) es normal en f(G),

d) si f sobre y H es un subgrupo normal de G, entonces f(H) es normal en N,

e) si H es un subgrupo normal de N, entonces $f^{-1}(H)$ es normal en G,

f) si e' es la identidad de N, el conjunto

$$K = \{ x \in G \mid f(x) = e' \} = f^{-1}(e'),$$

se llama el *núcleo del homomorfismo* f. Usualmente se le denota con Ker f. Como {e'} es un subgrupo normal de N, se tiene que Ker f es un subgrupo normal de G.

Si el homomorfismo $f : G \longrightarrow N$ es una función inyectiva, se dice que f es un *monomorfismo*. Si f es una función sobre, se dice que f es un *epimorfismo*. Si f es un monomorfismo y epimorfismo, se dice que f es un *isomorfismo*.

Si existe un isomorfismo entre los grupos G y N, entonces se dice que G y N son *isomorfos* y se denota con $G \cong N$.

Si K es un subgrupo normal de G, entonces $p : G \longrightarrow G/_K$, definida por $p(g) = gK$, es un epimorfismo.

Si $f : G \longrightarrow S$ y $g : S \longrightarrow N$ son homomorfismos, entonces la composición $g \circ f : G \longrightarrow N$ es un homomorfismo.

Si $f : G \longrightarrow N$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : N \longrightarrow G$ es un isomorfismo.

Teorema (primer teorema de isomorfismo). *Si* G *y* H *son grupos y* $f : G \longrightarrow H$ *es un homomorfismo con núcleo* K, *entonces* $G/_K \cong \mathrm{Im}(f)$.

Si T *es normal en* G, *entonces existen un grupo* H *y un epimorfismo* $p : G \longrightarrow H$ *cuyo núcleo coincide con* T.

Teorema (segundo teorema de isomorfismo). *Si* G *es un grupo y* H, K *subgrupos de* G *con* K *normal en* G, *entonces* $HK/_K \cong H/_{H\cap K}$.

Teorema (tercer teorema de isomorfismo). *Sea* G *un grupo, y sean* H, K *subgrupos normales de* G, $K \leq H$. *Entonces,* $H/_K$ *es un subgrupo normal de* $G/_K$ *y además*

$$\left(G/_K\right)/\left(H/_K\right) \cong G/_H$$

Teorema (de la correspondencia). *Si* K *es un subgrupo normal de* G, L(G,K) *el conjunto de los subgrupos de* G *que contienen a* K *y* $L(G/_K)$ *el conjunto de los subgrupos de* $G/_K$, *entonces la función*

$$F : L(G,K) \longrightarrow L(G/_K)$$

tal que $F(H) = H/_K$, *es una función biyectiva. Además, si* T, $H \in L(G,K)$ *se tiene que*

(i) $T \leq H$ *si, y sólo si,* $F(T) \leq F(H)$, *y en este caso* $[H : T] = [F(H) : F(T)]$.

(ii) T *es normal en* H *si, y sólo si,* F(T) *es normal en* F(H), *y en este caso* $H/_T \cong F(S)/_{F(T)}$.

Si A es un subgrupo normal maximal del grupo G, entonces $G/_A$ no tiene subgrupos propios.

AUTOMORFISMOS

Si X es un conjunto, el conjunto de las funciones biyectivas de X en X, con la composición de funciones como operación binaria, es un grupo. Este grupo se denota con S(X).

Si G es un grupo, el conjunto $\mathcal{A}(G) = \{ \alpha \in S(G) \mid \alpha$ es un homomorfismo $\}$, es un subgrupo de S(G). $\mathcal{A}(G)$ se llama el grupo de automorfismos de G.

Definición. Si G es un grupo y $g \in G$, la función $i_g : G \longrightarrow G$, tal que $i_g(x) = g^{-1}xg$ para toda $x \in G$, es un automorfismo, llamado el *automorfismo interior* inducido por g.

El conjunto de todos los automorfismos interiores de G, es un subgrupo de $\mathcal{A}(G)$ y se denota con $\mathcal{I}(G)$.

Notación. Si A es un subgrupo del grupo G y $g \in G$, el conjunto $g^{-1}Ag$ se denota con A^g.

La función $f : G \longrightarrow \mathcal{I}(G)$, definida como $f(g) = i_g$, es un epimorfismo, cuyo núcleo K, resulta ser el *centro* de G, y por lo tanto se tiene que $G/_{Z(G)} \cong \mathcal{I}(G)$.

Sea H un subgrupo de un grupo G. H es normal en G si, y sólo si, $f(H) \subseteq H$ para toda $f \in \mathcal{I}(G)$.

Definición. Si K es un subgrupo de G, tal que $f(K) \subseteq K$ para cada $f \in \mathcal{A}(G)$, entonces se dice que K es un *subgrupo característico* de G.

Si K es un subgrupo característico de un grupo G, entonces K es un subgrupo normal de G.

Si K es un subgrupo característico de M y M es normal en G, entonces K es normal en G. En efecto, para $g \in G$, g induce un automorfismo interior i_g en M, y como K es característico en M se tiene que $i_g(k) = gkg^{-1} \in K$ para toda $k \in K$, es decir, K es normal en G.

Definición. Si G es un grupo, el *subgrupo de Frattini* de G es la intersección de todos los subgrupos maximales de G. El subgrupo de Frattini de G se denota con $\phi(G)$.

Definición. Un elemento $x \in G$ es un *no generador* del grupo G, si $G = \langle \{ x \} \cup T \rangle$ con $T \subset G$, implica $G = \langle T \rangle$.

Teorema. *Si* G *es un grupo,* $\phi(G)$ *coincide con el conjunto de los no generadores de* G. *Se tiene también que* $\phi(G)$ *es un subgrupo característico de* G. (ver [2] p. 168)

Para cada subgrupo A del grupo G, se define $A_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Ag$. Se tiene que $A_G \subset A$ y si A es normal en G entonces $A_G = A$. A_G es un subgrupo normal de G, ya que si i_h es un automorfismo interior de G,

$$\begin{aligned} i_h(A_G) = i_h\left(\bigcap_{g\in G} g^{-1}Ag\right) &= \bigcap_{g\in G} (i_h(g^{-1}Ag)) \\ &= \bigcap_{g\in G} (h^{-1}g^{-1}Agh) \end{aligned}$$

$$= \bigcap_{g\in G} ((gh)^{-1}Agh) = A_G.$$

Si B es un subgrupo normal de G con $B < A$, entonces $B \leq A_G$. En efecto, dado que B es normal en G se tiene que $B = g^{-1}Bg$ para toda $g \in G$ y como $B \subset A$ se tiene que $g^{-1}Bg \subseteq g^{-1}Ag$ para toda $g \in G$ y por lo tanto $B \subseteq \cap(g^{-1}Ag) = A_G$ para toda $g \in G$.

Para cada subgrupo A de G, A_G es el subgrupo normal de G más grande contenido en A.

Definición. Si H y K son subgrupos de G, se dice que H y K son *conjugados* en G, si $K = x^{-1}Hx$ para alguna $x \in G$.

Teorema. *Sean* G *un grupo finito y* H *un subgrupo de* G. *Si* $\mathbf{H}$ *es el conjunto de subgrupos de* G *que son conjugados de* H, *entonces* $|\mathbf{H}| = [G : N_G(H)]$.

Definición. Sea G un grupo y p un primo, se dice que G es un p-*grupo* si cada elemento $x \in G$ tiene orden una potencia de p.

Teorema. *Un grupo finito* G *es un* p-*grupo* si, *y sólo si, el orden de* G *es una potencia de* p.

Definición. Sean p un número primo, G un grupo finito de orden $p^m s$ con $(p,s) = 1$, y P un subgrupo de G. Se dice que P es un p-*subgrupo de Sylow* de G si $|P| = p^m$.

Teorema (primer teorema de Sylow). *Sean* G *un grupo finito y* p *un primo. Si* p^r *divide a* $|G|$, *entonces* G *tiene un subgrupo de orden* p^r.

Corolario. *Si* G *es un grupo finito* y p *es un primo que divide al orden de* G, *entonces* G *tiene un* p-*subgrupo de Sylow.*

Teorema (segundo teorema de Sylow). *Sean* G *un grupo finito y* p *un primo que divide a* $|G|$ *y* P *un* p-*subgrupo de Sylow de* G. *Entonces todos los* p-*subgrupos de Sylow de G son conjugados de* P.

Teorema (tercer teorema de Sylow). *Sean* G *un grupo finito y* p *un primo que divide a* $|G|$. *Si* s *es el número de* p-*subgrupos de Sylow de* G, *entonces* $s \equiv 1 \pmod p$, *y* s *divide al orden de* G.

Teorema. *Si* G *es un* p-*grupo finito no trivial, entonces* $Z(G) \neq \{e\}$. *Si* N *es un subgrupo normal de* G, *entonces* $N \cap Z(G) \neq \{e\}$. *Si* $|N| = p$, *entonces* $N \leq Z(G)$.

Observación. Si G es un grupo finito de orden $p^{\alpha}m$ con $(p,m) = 1$, y H es un subgrupo normal de G de índice q con $(p,q) = 1$, entonces H contiene todos los p-subgrupos de Sylow de G. En efecto, ya que p^{α} divide a $|G| = [G : H]|H| = q|H|$ y $(p, q) = 1$, entonces p^{α} divide a $|H|$. Luego, si L es un p-subgrupo de Sylow de H, L es un p-subgrupo de Sylow de G, y como todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados a L, se tiene que H contiene a todos los p-subgrupos de Sylow de G.

Definición. Sea G un p-grupo abeliano. Se dice que G es un p-*grupo abeliano elemental*, si $g^p = e$ para toda $g \in G$.

Notación. Sea G un grupo. Denotamos con $G^{(1)}$ al subgrupo derivado de G, e inductivamente con $G^{(i+1)}$ al grupo derivado de $G^{(i)}$.

Definición. Un grupo G es *soluble*, si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots \geq G^{(r)} = \{e\}.$$

Teorema. *Si* G *es un grupo soluble, y* H *es un subgrupo de* G, *entonces* H *es soluble. Si* N *es un subgrupo normal de* G, *entonces* $G/_N$ *es un grupo.*

Teorema : *Si un grupo* G *tiene un subgrupo normal* H *tal que* H *y* $G/_H$ *son solubles, entonces* G *es soluble.*

Definición. Una *serie de composición* de un grupo G, es una colección finita de subgrupos $\{ A_0, A_1, \ldots , A_r \}$ de G tal que

$$G = A_0 > A_1 > \ldots > A_r = \{e\},$$

con A_i normal en A_{i-1} y $A_{i-1}/_{A_i}$ simple, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$.

Teorema. *Un grupo* G *de orden finito es soluble si, y sólo, existe una serie de composición* $\{ A_0, A_1, \ldots , A_r \}$ *tal que* $A_i/_{A_{i+1}}$ *son cíclicos de orden primo.*

Teorema (P. Hall). *Si* G *es un grupo finito soluble de orden* mn *con* $(m, n) = 1$, *entonces* G *posee al menos un subgrupo de orden* m, *y dos subgrupos cualesquiera de* G *de orden* m *son conjugados.*

Definición. Sea G un grupo finito. Un subgrupo H de G es un *subgrupo de Hall* si, y sólo si, $(|H|, [G : H]) = 1$.

Definición. Sean A y B grupos. El *producto directo* (*externo*) de A y B denotado con $A \times B$ es el grupo, cuyos elementos son las parejas ordenadas (a,b) con $a \in A$ y $b \in B$, con la operación

$$(a,b)*(c,d) = (ac,bd).$$

Definición. Un grupo G es *producto directo* (interno) de sus subgrupos A y B, si A y B son subgrupos normales de G, $G = AB$ y $A \cap B = \{e\}$.

Teorema. *Si un grupo G es producto directo (interno) de sus subgrupos A y B, entonces G es isomorfo a $A \times B$.*

Teorema. *Sean A y B grupos, A_1 subgrupo normal de A, B_1 subgrupo normal de B. Entonces $A_1 \times B_1$ es normal en $G = A \times B$ y*

$$G/_{A_1 \times B_1} \cong A/_{A_1} \times B/_{B_1} \quad y \quad G/_{A \times \{e\}} \cong B.$$

Definición. G es *producto semidirecto* de A y B si, y sólo si, A es normal en G, $G = AB$ y $A \cap B = \{e\}$.

Teorema (de la descomposición primaria). *Si G es un grupo abeliano finito, entonces G es producto directo interno de sus subgrupos de Sylow.*

Definición. Si un primo p divide al orden de un grupo abeliano G, el p-subgrupo de Sylow de G se llama la *p-componente primaria* de G.

Teorema. *Todo p-grupo abeliano finito es producto directo interno de p-subgrupos cíclicos.*

Teorema. *Si* G *es un p-grupo abeliano finito, entonces cualesquiera dos descomposiciones de* G *en producto directo interno de p-grupos cíclicos tienen el mismo número de factores de cada orden.*

Teorema. *Si* G *es un grupo abeliano finito, entonces* G *es producto directo interno de subgrupos cíclicos* $H_1, H_2, \dots, H_s$, *de* G *con* $o(H_{i+1}) | o(H_i)$, $i = 1, \dots, s-1$. *Si* $G \cong K_1 \times K_2 \times, \dots, \times K_r$ *con* K_j *subgrupos cíclicos de* G *y* $o(K_{j+1}) | o(K_j)$ $j = 1, \dots, r-1$, *entonces* $r = s$ *y* $o(H_i) = o(K_i)$ *con* $i = 1, \dots, r$.

Teorema. *Si* K *es un campo, y* G *es un subgrupo finito del grupo multiplicativo* $K - \{0\}$, *entonces* G *es cíclico.*

Corolario. *El grupo multiplicativo de un campo finito es cíclico.*

Teorema (Frobenius). *Sean* G *un grupo finito y* A *un subgrupo propio de* G. *Si* $A \cap A^g = \{e\}$ *para toda* $g \in G \setminus A$, *entonces el conjunto*

$$B = \{e\} \cup \{ h \in G \mid h \in G \setminus A^g \text{ para toda } g \in G \},$$

es un subgrupo normal de G, $G = AB$ *y* $A \cap B = \{e\}$. (ver [6] vol. II p. 348)

Definición. Un grupo finito G que contenga un subgrupo A como en el teorema anterior, se llama *grupo de Frobenius.*

Definición. El subgrupo B del teorema anterior, se llama *núcleo de Frobenius* del grupo G. El subgrupo A y cada uno de sus conjugados, se llama *complemento de Frobenius.*

Definición. Un grupo finito G es *nilpotente*, si G es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Teorema (Thompson). *El núcleo de Frobenius de un grupo de Frobenius es nilpotente.* (ver [6] vol. II p. 349)

Teorema. *Si* $G \neq \{e\}$ *es un grupo finito nilpotente, entonces* $Z(G) \neq \{e\}$.

Teorema. *Si* $G \neq \{e\}$ *es un grupo finito nilpotente y* $N \neq \{e\}$ *es un un subgrupo normal de* G, *entonces* $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.

Definición. Una relación $\leq$, en un conjunto P, es un orden parcial si

i) $\leq$ es reflexiva, es decir, si $a \leq a$ para toda $a \in P$.

ii) $\leq$ es transitiva, es decir, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$, para toda a, b, $c \in P$. .

iii) $\leq$ es antisimétrica, es decir, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$, para toda a, $b \in P$.

Un conjunto P, con un orden parcial $\leq$, se llama *conjunto parcialmente ordenado.* Si el orden parcial $\leq$, es un orden total, es decir, si $a \leq b$ ó $b \leq a$ para toda $a, b \in P$, entonces el conjunto P se llama una *cadena*.

Si P es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset P$, entonces $m \in A$ se llama elemento *máximo* de A, si $a \leq m$ para toda $a \in A$. $n \in A$ es elemento *mínimo* de A, si $n \leq a$ para toda $a \in A$. $b \in P$ es *cota superior* de A, si $a \leq b$ para toda $a \in A$. $c \in P$ es *cota inferior* de A, si $a \geq c$ para toda $a \in A$. Si existe un elemento máximo en A, tal elemento es cota superior de A.

Si el conjunto de cotas superiores de A tiene mínimo, éste mínimo se llama *mínima cota superior* de A o *supremo* de A. Si el conjunto de cotas inferiores de A tiene máximo, éste máximo se llama *máxima cota inferior* de A o *ínfimo* de A.

Definición. Una *red* es un conjunto parcialmente ordenado L, tal que si $a, b \in L$, el conjunto $\{ a, b \}$ tiene supremo e ínfimo.

Si L es una red y $a, b \in L$, al supremo e ínfimo de $\{ a, b \}$ se les denota con $a \vee b$ y $a \wedge b$ respectivamente. Las funciones $\vee$ y $\wedge$ de LxL en L definidas por

$$\vee\,(a, b) = a \vee b, \quad \wedge\,(a, b) = a \wedge b,$$

son operaciones binarias en L.

Definición. Una red L es *modular*, en caso de que satisfaga la siguiente condición, llamada *condición de modularidad*

para toda $a, b, c \in P$, con $a \geq b$, se tiene que

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c).$$

La condición de modularidad, es llamada también *ley modular de Dedekind*.

Si G es un grupo, el conjunto S de los subgrupos de G, con la relación de contención de conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado.

Para A, B $\in S$ se tiene que $A \vee B$ es el subgrupo generado por $A \cup B$, y que $A \wedge B = A \cap B$. Por lo tanto S es una red.

Si A, B $\in S$ y AB = BA, entonces $A \vee B = AB$.

Teorema. *Si* A, B, C *son subgrupos de un grupo* G, *tal que* $B \subseteq A$ *y* BC = CB, *entonces* $A \cap (B \vee C) = B \vee (A \cap C)$.

Teorema. *Los subgrupos normales de un grupo* G *forman una red modular.*

Definición. Sea G un grupo y P una familia de subgrupos de G. Se dice que P es una *partición* de G, si G es la unión de los elementos de P, y si A, B $\in P$, entonces $A \cap B = \{e\}$.

Parte II

GRUPOS FINITOS MINIMALES NO ABELIANOS

Lema 1. *Si $G \neq \{e\}$ es un grupo finito con subgrupos propios y cada subgrupo propio de G es abeliano, entonces G no es simple.*

Demostración. Supongamos que G es simple.

Si $Z(G) \neq \{e\}$, entonces $Z(G) = G$ porque $Z(G)$ es un subgrupo normal de G. Como G es abeliano y tiene subgrupos propios, estos subgrupos son normales y resulta que G no es simple, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Z(G) = \{e\}$.

G tiene al menos dos subgrupos maximales, ya que de otra forma, G resulta cíclico con subgrupos propios, lo que contradice que G es simple.

Si M y N son dos subgrupos maximales de G con $M \neq N$, entonces

$$G = M \vee N = \langle M \cup N \rangle.$$

Como $M \cap N \leq M$ y $M \cap N \leq N$, se tiene que $M \leq C_G(M \cap N)$ y $N \leq C_G(M \cap N)$, lo cual implica que $M \vee N \leq C_G(M \cap N)$, de donde se sigue que $C_G(M \cap N) = G$, así $M \cap N \leq Z(G) = \{e\}$, y $M \cap N = \{e\}$.

Como cada elemento $e \neq g \in G$ pertenece a algún subgrupo maximal, se tiene que los subgrupos maximales de G forman una partición de G.

Si M es un subgrupo maximal de G, entonces $M = \mathbf{N}_G(M)$, porque G es simple. Además para cada $g \in G$, $M^g = g^{-1}Mg$ es también un subgrupo maximal de G.

Sea R la clase de los subgrupos conjugados de M, entonces

$$|R| = [G : \mathbf{N}_G(M)] = [G : M]$$

ya que $M = \mathbf{N}_G(M)$.

Si A es el conjunto de subgrupos maximales de G, se tiene que

$$|G| = 1 + \sum_{M \in A} (|M| - 1).$$

Sea $\mathfrak{T}$ la partición de A inducida por la conjugación y sea T un conjunto de representantes de $\mathfrak{T}$. Así tenemos que

$$|G| = 1 + \sum_{M \in T} (\sum_{X \in R} (|X| - 1)).$$

Si $X \in R$ entonces $|X| = |M|$, ya que X es conjugado de M, y como en R existen $[G : \mathbf{N}_G(M)] = [G : M]$ subgrupos conjugados a M, entonces

$$|G| = 1 + \sum_{M \in T} (\sum_{X \in R} (|X| - 1)),$$

$$|G| = 1 + \sum_{M \in T} ([G : M](|M| - 1)),$$

$$|G| = 1 + \sum_{M \in T} ([G : M]|M| - [G : M]),$$

$$|G| = 1 + \sum_{M \in T} (|G| - \sum_{M \in T} [G : M]).$$

Si en T hay j elementos se tiene que

$$|G| = 1 + j|G| - \sum_{M \in T} [G : M],$$

$$\sum_{M \in T} [G : M] = -|G| + j|G| + 1.$$

Como $1 < |M|$, $2 \leq |M|$ y entonces $[G : M]2 \leq [G : M]|M| = |G|$, lo que implica $[G : M] \leq (1/2)|G|$, por lo tanto

$$-|G| + j|G| + 1 = \sum_{M \in T} [G : M] \leq (1/2)j|G|,$$

$$(j - 1)|G| + 1 \leq (1/2)j|G|,$$

$$(j - 1)|G| < (1/2)j|G|,$$

$$(j - 1) < (1/2)j,$$

$$2j - 2 < j,$$

$$j < 2.$$

Como $j > 0$, entonces $j = 1$, y se tiene que $[G : M] = 1$, es decir, $G = M$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto G no es simple. ■

Lema 2. *Si* $G \neq \{e\}$ *es un grupo finito con subgrupos propios y cada subgrupo propio de* G *es abeliano, entonces* G *tiene un subgrupo normal propio de índice primo.*

Demostración. Supongamos que existen grupos finitos $G \neq \{e\}$ con todos sus subgrupos propios abelianos, y que no tienen subgrupos normales de índice primo. De estos grupos sea G uno de orden mínimo.

Como G no es simple, existe $N \neq \{e\}$ subgrupo normal propio de G tal que

$$1 < [G : N] < |G|.$$

Sea $T/_N \neq \{\bar{e}\}$ un subgrupo propio de $G/_N$, entonces $N < T < G$, T es abeliano y así $T/_N$ es abeliano. Como cada subgrupo propio de $G/_N$ es abeliano, y $1 < [G : N] < |G|$, entonces $G/_N$ tiene un subgrupo $S/_N$ que es normal en $G/_N$ tal que $[G/_N : S/_N] = p$, con p un primo. Dado que $S/_N$ es normal en $G/_N$, S es normal en G y se tiene que

$$[G : S] = [G/_N : S/_N] = p,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto el lema es verdadero. ■

Corolario. *Si* $G \neq \{e\}$ *es un grupo finito con subgrupos propios y cada subgrupo propio de* G *es abeliano, entonces* G *es soluble.*

Demostración. Sea N un subgrupo propio normal de G de índice primo, entonces $G/_N$ y N son solubles, Por lo tanto G es soluble. ■

Lema 3. *Sea* $G \neq \{e\}$ *un grupo finito. Si* G *tiene un subgrupo maximal* $A \neq \{e\}$, *abeliano y la identidad es el único subgrupo normal de* G *que está contenido en* A, *entonces* A *es cíclico y existe* B *subgrupo normal minimal de* G, *abeliano elemental tal que* $G = AB$ *y* $A \cap B = \{e\}$.

Demostración. Dado que $A \neq \{e\}$ y del hecho de que la identidad es el único subgrupo normal de G que está contenido en A, se tiene que A no es normal en G.

Dado que $A \leq N_G(A) < G$ y A es maximal en G se tiene que $A = N_G(A)$. Sea $g \in G \setminus A$, entonces $A \neq A^g = g^{-1}Ag$, y $G = \langle A \cup A^g \rangle$. Cada elemento de $A \cap A^g$ está centralizado por A y por A^g, ya que A y A^g son abelianos, por lo tanto G centraliza a $A \cap A^g$, esto es, $A \cap A^g \leq Z(G)$ y por consiguiente $A \cap A^g$ es normal en G y como está contenido en A, se tiene que $A \cap A^g = \{e\}$ para toda $g \in G \setminus A$, y por lo tanto G es un grupo de Frobenius y existe un subgrupo B, normal de G, tal que $G = AB$ y $A \cap B = \{e\}$, (B es el núcleo de Frobenius de G, y B es nilpotente).

Probaremos que B es un subgrupo normal minimal, abeliano elemental y que A es cíclico.

Si N es un subgrupo normal de G con $\{e\} < N \leq B$, entonces $A < AN \leq G$.

Como A es maximal en G, tenemos que $AN = G$, y ya que $G = AB$ y $A \cap B = \{e\}$, se tiene que $N = B$, por lo tanto B es normal minimal.

Como $B \neq \{e\}$ es nilpotente, se tiene que $Z(B) \neq \{e\}$. $Z(B)$ es un subgrupo característico de B, y como B es normal en G, $Z(B)$ es normal en G. Por lo tanto $Z(B) = B$, es decir, B es abeliano.

Dado que $B \neq \{e\}$, existe un primo p que divide a $o(B)$. $B^p = \{ b^p \mid b \in B \}$ es un subgrupo de B porque B es abeliano. Si f es un automorfismo de B, entonces $f(B^p) = (f(B))^p = B^p$ y por lo tanto B^p es un subgrupo característico en B, y por consiguiente normal en G. Como B es normal minimal en G, se tiene que $B^p = \{e\}$, es decir, B es un p-grupo abeliano elemental.

Para terminar la demostración del lema sólo falta hacer notar que A es cíclico.

Dado que B es abeliano, $B \leq C_G(B)$, y $C_G(B) = BC_A(B)$ porque

$$C_G(B) = C_G(B) \cap G = C_G(B) \cap (BA) = C_G(B) \cap (B \vee A) = B \vee (C_G(B) \cap A)$$
$$= B \vee (C_A(B)) = BC_A(B), \text{ por la ley modular de Dedekind.}$$

Como A es abeliano, $C_A(B)$ está centralizado por A. $C_A(B)$ también está centralizado por B, por lo tanto $G = AB$ centraliza a $C_A(B)$, es decir, $C_A(B) < Z(G)$, por consiguiente $C_A(B)$ es normal en G. Como $C_A(B) \subseteq A$, y ya que $\{e\}$ es el único subgrupo normal de G que está contenido en A, se tiene que $C_A(B) = \{e\}$, Por lo tanto $B = BC_A(B)$ y $B = C_G(B)$

Dado que $C_G(B) = B$ y $C_A(B) = \{e\}$, resulta que A y el subgrupo Γ de los automorfismos internos de B inducidos por G en B, son isomorfos, en efecto, la función $f : A \longrightarrow \Gamma$ tal que $f(a) = i_a$ donde $i_a(b) = a^{-1}ba$ es un isomorfismo.

Como A es abeliano, Γ también es abeliano.

Dado que B es abeliano, el conjunto End(B), de los homomorfismos de B en B, es un anillo, y es finito porque B lo es. Como cada elemento de Γ es invertible, Γ es un subgrupo del grupo de unidades de End(B).

El subanillo K de End(B) generado por Γ, es abeliano porque Γ lo es. Además, K tiene idéntico y es finito porque Γ lo es.

Sea $0 \neq \theta \in K$ y S el núcleo de θ. Como $\theta \neq 0$ entonces $S < B$.

S es normal en G. En efecto, como $G = AB$, si $g = ba$ con $b \in B$ y $a \in A$, y se tiene que

$$S^g = S^{ba} = \{ (ba)^{-1}sba \mid s \in S \} = \{ a^{-1}b^{-1}sba \mid s \in S \}$$

$= \{ a^{-1}sa \mid s \in S \} = S^a$. Además se tiene que

$S^a \subseteq S = \ker \theta$, ya que

$$\theta(a^{-1}sa) = \theta(a^{-1})\theta(s)\theta(a) = \theta(a^{-1})e\theta(a) = \theta(a^{-1}a) = \theta(e) = e,$$

esto es, $a^{-1}sa \in S$, y así se tiene que S es normal en G.

Como B es normal minimal y $S < B$, entonces $\operatorname{Ker} \theta = S = \{e\}$. Por lo tanto, θ es un automorfismo, y así cada elemento de K diferente de O tiene inverso, por lo tanto, K es un campo finito y K^{*}, el grupo multiplicativo de K, es cíclico. Como $\Gamma \leq K^{*}$, se tiene que Γ es cíclico, y por consiguiente A es cíclico, ya que A es isomorfo a Γ. ■

Proposición. *Un grupo finito G tiene al menos un subgrupo maximal abeliano si, y sólo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones.*

(a) G tiene un subgrupo normal abeliano H de índice primo.

(b) $G/_{Z(G)} = MC$ *con M normal minimal en* $G/_{Z(G)}$, *M es un p-grupo abeliano elemental, C es cíclico,* $M \cap C = \{\bar{e}\}$, *C no contiene subgrupos normales de* $G/_{Z(G)}$ *diferentes de* $\{\bar{e}\}$ *y además* $(o(C), p) = 1$.

Demostración. Supongamos que se cumple la condición *(a)*.

Dado que los subgrupos de índice primo son maximales, H es un subgrupo maximal abeliano de G.

Ahora supongamos que se cumple *(b)*.

Si S un subgrupo de $G/_{Z(G)}$ tal que $C < S$, $C < S \leq G = MC$, aplicando la ley modular de Dedekind,

$$S = S \cap (MC) = C(M \cap S),$$

por consiguiente $M \cap S \neq \{\bar{e}\}$.

Como M es normal en $G/_{Z(G)}$, tenemos que $M \cap S$ es normal en S, y como $M \cap S$ está centralizado por el subgrupo abeliano M, se tiene que $M \cap S$ es normal en $MS = G/_{Z(G)}$. Dado que $\{\bar{e}\} \neq M \cap S \leq M$, y como M es normal minimal se tiene que $M \cap S = M$, luego

$$S = C(M \cap S) = CM = G/_{Z(G)} ,$$

por lo tanto C es un subgrupo maximal de $G/_{Z(G)}$.

Existe un subgrupo D de G con $Z(G) \leq D$ tal que $D/_{Z(G)} = C$. Ya que C es cíclico, se tiene que D es abeliano, y como C es maximal se tiene que D es maximal. Por lo tanto G tiene un subgrupo maximal que es abeliano.

Se demostrará ahora que si G tiene al menos un subgrupo maximal abeliano, entonces se cumple *a)* o *b)*.

Caso 1) Algún subgrupo maximal abeliano A de G es normal.

$G/_A$ no tiene subgrupos propios y por lo tanto tiene orden primo, es decir, A es de índice primo en G, y se cumple *b)*.

Caso 2) Ningún subgrupo maximal abeliano de G es normal en G.

Sea A un subgrupo maximal abeliano. $A_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Ag$ es normal en G, y como A no es normal en G entonces $A_G < A$. Sean $G^* = G/_{A_G}$ y $A^* = A/_{A_G}$, como A es maximal en G, entonces A^* es maximal en G^*. A^* es abeliano porque A es abeliano, además se tiene que $A^* \neq \{\bar{e}\}$, ya que $A_G < A$.

Si N es un subgrupo normal de G^* con $N \leq A^*$, y si $A_G \leq J \leq A$ es tal que $J/_{A_G} = N$, se tiene que J es un subgrupo normal de G, y como $A_G \leq J \leq A$ se tiene que $J \leq A_G$ y por lo tanto $J = A_G$, luego

$$N = J/_{A_G} = A_G/_{A_G} = \{\bar{e}\},$$

y resulta que $\{\bar{e}\}$ es el único subgrupo normal de G^* que está contenido en A^*. En virtud del lema 3, se tiene que A^* es cíclico y que existe M, subgrupo normal minimal de G^* tal que $G^* = MA^*$ con $M \cap A^* = \{\bar{e}\}$, y M es un p-grupo abeliano elemental.

Si $B \neq \{e\}$ es un p-subgrupo de A^*, entonces MB es un p-subgrupo normal en G^*. En efecto, tenemos que $G^*/_M \cong A^*$ que es cíclico, y por lo tanto cada subgrupo de $G^*/_M$ es normal, luego cada subgrupo de G^* que contenga a M es normal en G^*.

Dado que MB es un p-grupo se tiene que $Z(MB) \neq \{e\}$ y que $M \cap Z(MB) \neq \{e\}$.

Como MB es normal en G^* y $Z(MB)$ es característico en MB, se tiene que $Z(MB)$ es normal en G^*, por lo tanto $M \cap Z(MB)$ es normal en G^*, y como M es normal minimal en G^*, se tiene que $M \cap Z(MB) = M$ y $M \leq Z(MB)$, por lo tanto B está centralizado por M.

Como B está centralizado por A^*, ya que $B < A^*$ y A^* es abeliano, se tiene que B está centralizado por $MA^* = G^*$, y así B es normal en G^* con $B \leq A^*$, y por lo tanto $B = \{\bar{e}\}$, porque A^* no contiene subgrupos normales de G diferentes de $\{\bar{e}\}$. Así se tiene que $\{\bar{e}\}$ es el único subgrupo de orden una potencia de p de A^*, lo cual es equivalente a que p no divide a $o(A^*)$, es decir, $(p, o(A^*)) = 1$.

Si $Z(G) \not\leq A$, entonces $G = AZ(G)$ ya que A es maximal. Como A está centralizado por A y A está centralizado por $Z(G)$, se tiene que A es normal en $AZ(G) = G$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Z(G) < A$ y como $Z(G)$ es normal en G, se tiene que $Z(G) \leq A_G$.

Cada subgrupo conjugado de A es abeliano y maximal en G. Como A no es normal en G, tenemos que G está generado por todos los A^g con $g \in G$. Como $A_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Ag = \bigcap_{g \in G} A^g$, y los A^g son abelianos se tiene que

A_G está centralizado por cada A^g, y se tiene que A_G está centralizado por G, esto es, $A_G \leq Z(G)$. Por lo tanto

$$A_G = Z(G) \quad \text{y} \quad G^* = G/_{A_G} = G/_{Z(G)} = A^*M,$$

con M p-grupo abeliano elemental y normal minimal en G^*, A^* cíclico, $A^* \cap M = \{\bar{e}\}$ y $\{\bar{e}\}$ es el único subgrupo normal en $G^* = G/_{Z(G)}$ que es parte de A^*, además $(p, o(A^*)) = 1$, y se cumple *b)*. ∎

Corolario. *Si un grupo finito* G *tiene al menos un subgrupo maximal abeliano, entonces* $G'' \leq Z(G)$.

Demostración. **Caso 1.** G tiene un subgrupo maximal abeliano A normal en G. Entonces $G/_A$ no tiene subgrupos propios. Por lo tanto $G/_A$ es de orden primo, y $G' \leq A$ lo que implica

$$G'' \leq A' = \{e\} \leq Z(G).$$

Caso 2. Ningún subgrupo maximal abeliano de G es normal en G.

Si A es un subgrupo maximal abeliano de G, entonces por la proposición anterior, $G^* = MA^*$, con A^* cíclico, M normal minimal en G^* y $M \cap A^* = \{\bar{e}\}$, por consiguiente

$$G^*/_M \cong A^* \text{ que es cíclico,}$$

luego $(G^*)' \leq M$, es decir, $(G/_{Z(G)})' \leq M$, que es abeliano, por lo tanto

$$(G/_{Z(G)})'' \leq M' = \{\bar{e}\} = Z(G),$$

lo que implica $G'' \leq Z(G)$. ∎

Corolario. *Si un grupo finito* G *tiene al menos un subgrupo maximal abeliano, entonces* G *es soluble.*

Demostración. Dado que G tiene un subgrupo maximal abeliano entonces $G'' \leq Z(G)$ y por lo tanto $G''' = \{e\}$. ■

Lema 4. *Si* G *es un grupo finito no abeliano, pero todos sus subgrupos propios son abelianos, entonces*

$$\phi(G) = Z(G) = S \cap T$$

para cualquier S, T *subgrupos maximales de* G, $S \neq T$.

Demostración. Sea S un subgrupo maximal de G, si $Z(G) \nleq S$, entonces $SZ(G) = G$. Como S está centralizado por S y por $Z(G)$, S está centralizado por $SZ(G) = G$, por lo tanto $S \leq Z(G)$. Como S es maximal y $Z(G) \neq G$ se tiene que $S = Z(G)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $Z(G) \leq S$.

Dado que $Z(G) \leq S$ para todo subgrupo maximal S de G, se tiene que $Z(G) \leq \phi(G)$. Como G no es cíclico, G tiene al menos dos subgrupos maximales S, T y $G = \langle S \cup T \rangle$. Como S, T son abelianos se tiene que $T \cap S$ está centralizado por S y por T, por lo tanto está centralizado por $\langle T \cup S \rangle = G$, esto es, $S \cap T \leq Z(G)$ y se tiene que $\phi(G) \leq T \cap S \leq Z(G) \leq \phi(G)$, y $\phi(G) = Z(G) = S \cap T$. ■

Teorema 1. *Sea* G *un grupo finito. Las siguientes proposiciones* (a) *y* (b) *son equivalentes.*

(a): a.1 G *no es abeliano, pero todo subgrupo propio de* G *es* *abeliano,*

a.2 G *tiene al menos dos subgrupos normales maximales.*

(b): b.1 $Z(G) = \phi(G)$,

b.2 G *es un p-grupo,*

b.3 $G/_{Z(G)}$ *es abeliano elemental de orden* p^2.

Demostración. Veamos que (b) implica (a).

Como $G/_{Z(G)}$ es de orden p^2, G no es abeliano. Como $Z(G) = \phi(G)$, entonces $Z(G) \leq M$ para cada subgrupo maximal M de G. $M/_{Z(G)}$ es un subgrupo maximal de $G/_{Z(G)}$, lo que implica que $M/_{Z(G)}$ es cíclico de orden p, por lo tanto M es abeliano. Dado que cada subgrupo de G está contenido en algún subgrupo maximal, se tiene que todos los subgrupos de G son abelianos.

Como $G/_{Z(G)}$ es abeliano elemental de orden p^2, $G/_{Z(G)}$ tiene dos subgrupos $M/_{Z(G)}$ y $N/_{Z(G)}$ diferentes, de orden p. Estos subgrupos son maximales y normales en $G/_{Z(G)}$, por consiguiente M y N son subgrupos normales maximales de G.

Ahora demostraremos que (a) implica (b).

Si M y N, son subgrupos normales maximales de G, diferentes, entonces $[G : M] = p$ y $[G : N] = q$ con p y q primos, ya que G es soluble. Por lo tanto M y N son subgrupos maximales de G, y por el lema 4, se tiene que $M \cap N = Z(G) = \phi(G)$.

$G' \leq M$ y $G' \leq N$, porque $G/_M$ y $G/_N$ son abelianos, por lo tanto $G' \leq M \cap N$ y se tiene que $G/_{M\cap N} = G/_{Z(G)}$ es abeliano.

$$[G : M\cap N] = |G/_{M\ N}| = |\ MN/_{M\cap N}| = \frac{|M\ N|}{|M\cap N|} = \frac{|M|\ |N|}{|M\cap N|\,|M\ N|} = \frac{|M|}{|M\cap N|}\ \frac{|N|}{|M\cap N|}$$

$= |MN/_N||MN/_M| = |G/_N||G/_M| = [G : N][G : M] = pq$. Por consiguiente $|G/_{Z(G)}| = pq$.

Si $p \neq q$, siendo $G/_{Z(G)}$ abeliano, se tiene que $G/_{Z(G)}$ es cíclico, lo que implica que G es abeliano, que es una contradicción, por lo tanto $p = q$, y $G/_{Z(G)}$ es un p-grupo abeliano elemental de orden p^2.

Para demostrar que G es un p-grupo, sólo es necesario probar que $Z(G)$ es un p-grupo.

Supongamos que el primo q divide a $o(Z(G))$, con $q \neq p$, entonces todos los q-elementos de G están en $Z(G)$, porque $G/_{Z(G)}$ es de orden p^2. Cada subgrupo de Sylow de G que no sea un p-grupo, es un subgrupo de $Z(G)$, por lo tanto, los subgrupos de Sylow de G que no son p-grupos, generan un subgrupo L contenido en $Z(G)$. Es claro que L es un p-complemento de G, esto es, si K es un p-subgrupo de Sylow de G, entonces $G = KL$ y $K \cap L = \{e\}$. K es abeliano y está centralizado por L, por lo tanto $K \leq Z(G)$ y $G = Z(G)$, lo que es una contradicción. Por consiguiente $Z(G)$ es un p-grupo. ■

Corolario 1. *Sea* G *un grupo finito. Las siguientes proposiciones* (a) *y* (b) *son equivalentes.*

(a): a.1 G *no es abeliano, pero todo subgrupo propio de* G *es abeliano,*

a.2 G *tiene al menos dos subgrupos normales maximales,*

a.3 *cada imagen homomorfa propia de* G *es abeliana.*

(b): b.1 $Z(G) = \phi(G)$,

b.2 G *es un* p-*grupo*,

b.3 $G/_{Z(G)}$ *es abeliano elemental de orden* p^2,

b.4 G' *es el único subgrupo normal minimal.*

Demostración. Veamos que (a) implica (b). En virtud del teorema anterior, sólo es necesario probar b.4. Si N es normal en G y $N \neq \{e\}$, entonces $G/_N$ es abeliano y $G' \leq N$. Como $G' \neq \{e\}$ porque G no es abeliano, se tiene que G' es el único normal minimal de G.

Ahora veamos que (b) implica (a). Sólo es necesario probar a.3. Sea $\{e\} \neq N$ un subgrupo normal propio de G, entonces $G' \leq N$ y $G/_N$ es abeliano. ■

Observación. Con las hipótesis del corolario 1, $Z(G)$ resulta ser cíclico. En efecto, si $Z(G)$ no es cíclico, entonces $Z(G)$ es producto directo de subgrupos cíclicos, es decir, $Z(G) = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_s$ con cada A_i cíclico. Como $A_i \subset Z(G)$ tenemos que A_i es normal en G, y luego $G' \subseteq A_i$ para toda i, $i = 1, 2, \ldots, s$, lo que implica $G' \subseteq \cap A_i = \{e\}$, lo cual es una contradicción, ya que G' es un subgrupo normal minimal de G .

Teorema 2. *Sea G un grupo finito. Las siguientes proposiciones* (a) *y* (b) *son equivalentes.*

(a): a.1 G *no es abeliano, pero todo subgrupo propio de* G *es abeliano,*

a.2 G *tiene sólo un subgrupo normal maximal.*

(b): b.1 $Z(G) = \phi(G)$,

b.2 $C_G(G') = G' \times Z(G)$ *es el único subgrupo normal maximal en* G *y* $[G : C_G(G')] = q$ *es un primo,*

b.3 $G/_{G'}$ *es un q-grupo cíclico,*

b.4 G' *es un subgrupo normal minimal de* G, G' *es un p-grupo abeliano elemental no trivial con* p *un primo y* $p \neq q$.

Demostración. Veamos que (b) implica (a).

Dado que G' es no trivial, se tiene que G no es abeliano.

Si S es un subgrupo maximal de G tal que $G' \subset S$, entonces $C_G(G') = G' \times Z(G) \subset S$ porque $Z(G) = \phi(G) \subset S$, Como $C_G(G')$ es maximal se tiene que $C_G(G') = S$ y S es abeliano ya que es producto directo de dos subgrupos abelianos.

Si $G' \subsetneq S$, entonces $G'S = G$. Dado que $G' \cap S$ es normal en S y está centralizado por G', se tiene que $G' \cap S$ es normal en G. Como G' es normal minimal se tiene que $G' \cap S = \{e\}$ y

$$G/_{G'} = G'S/_{G'} \cong S/_{G' \cap S} \cong S,$$

y como $G/_{G'}$ es cíclico, S es abeliano.

Como cada subgrupo propio de G está contenido en un maximal, se tiene que cada subgrupo propio de G es abeliano. Además por b.2 se tiene que G sólo tiene un subgrupo normal maximal.

Ahora demostraremos (a) implica (b).

Dado que G contiene al menos dos subgrupos maximales, porque de otra forma G resultaría cíclico, existe un subgrupo A maximal de G que no es normal en G. Como A_G es el subgrupo normal de G más grande contenido en A y $A_G \subseteq A$, entonces $A_G \subset A$.

Sea $G^* = G/_{A_G}$ y $A^* = A/_{A_G}$. A^* es un subgrupo maximal abeliano G^* y $\{\bar{e}\}$ es el único subgrupo normal de G^* contenido en $A^* \neq \{e\}$, entonces por el lema 3, A^* es cíclico y existe M, subgrupo normal minimal de G, abeliano elemental tal que

$$G^* = MA^* \text{ y } M \cap A^* = \{\bar{e}\}.$$

Existe un subgrupo P de G con $A_G \subset P$ tal que $P/_{A_G} = M$. P es normal en G porque M es normal en G^*, P es abeliano porque $P \neq G$, $G = PA$ y $A \cap P = A_G$.

$Z(G) = \phi(G)$ en virtud del lema 4, $Z(G) \subseteq A$, y ya que $Z(G)$ es normal en G, se tiene que $Z(G) \subseteq A_G$.

Como A no es normal en G, existe $g \in G \setminus A$ tal que $A \neq A^g$, dado que A y A^g son subgrupos maximales de G, se tiene que

$$Z(G) \subseteq A_G \subseteq A \cap A^g = Z(G), \text{ por lo tanto}$$

$$Z(G) = A_G = \phi(G).$$

Si S es un subgrupo de G tal que $A_G \subseteq S \subset A$, entonces $PS \subset G$. En efecto, si $PS = G$, entonces $P/_{A_G} S/_{A_G} = PS/_{A_G}$ y como $S/_{A_G} \subset A/_{A_G}$, se tiene $P/_{A_G} \cap S/_{A_G} \subset P/_{A_G} \cap A/_{A_G} = \{\bar{e}\}$, lo cual implica $P/_{A_G} \cap S/_{A_G} = \{\bar{e}\}$ y así

$$P \cap S = A_G = P \cap A,$$

por lo tanto

$$|PS| = \frac{|P|\ |S|}{|P \cap S|} = \frac{|P|\ |S|}{|P \cap A|} < \frac{|P|\ |A|}{|P \cap A|} = |PA| = |G|,$$

que es una contradicción. Por lo tanto $PS \subset G$.

Como PS es abeliano, S está centralizado por P, también S está centralizado por A, así S está centralizado por $PA = G$, por lo tanto $S \leq Z(G) = A_G$ y $S = A_G$, lo que prueba que A_G es un subgrupo maximal de A, esto es, $A/_{A_G}$ no tiene subgrupos no triviales, por lo tanto

$$[A : A_G] = q, \quad q \text{ un primo.}$$

$|P/_{A_G}| = |M| = p^s$ para algún primo p, porque M es un grupo abeliano elemental.

Si $p = q$ entonces $G^* = P/_{A_G} A/_{A_G} = MA^*$ es un p-grupo, y como M es un subgrupo normal minimal de G^*, se tiene que $M \leq Z(G^*)$. A^* está centralizado por A^* ya que A^* es cíclico, y A^* está centralizado por $M \leq Z(G^*)$, por consiguiente A^* está centralizado por $MA^* = G^*$, así se tiene que $A^* \leq Z(G^*)$. Por lo tanto $G^* = MA^* \leq Z(G^*)$ y G^* resulta ser abeliano lo que implica que A^* es normal en G^* y A es normal en G, lo que es una contradicción, por lo tanto $p \neq q$.

Dado que P es abeliano, el p-subgrupo de Sylow $\bar{P}$ de P es un subgrupo característico de P y por lo tanto es normal en G, por consiguiente $\bar{P}A_G$ es normal en G, y $\bar{P}A_G/_{A_G}$ es normal en G^*. Además $\bar{P}A_G/_{A_G} \leq P/_{A_G}$ y, como $P/_{A_G}$ es normal minimal, se tiene que $\bar{P}A_G/_{A_G} = P/_{A_G}$, y por lo tanto $\bar{P}A_G = P$.

Como A es abeliano, A es producto directo de subgrupos cíclicos, cada uno de ellos de orden una potencia de algún primo. Si A_G contiene a todos los subgrupos cíclicos de orden una potencia de q, entonces A_G contiene a la q-componente primaria de A. Como $o(A) = |A_G|[A : A_G]$, entonces q no divide a $[A : A_G]$, lo que es una contradicción porque $[A : A_G] = q$, por consiguiente existe un subgrupo cíclico C de orden una potencia de q que no está contenido en A_G. Como A_G es un subgrupo maximal de A, se tiene que $A = CA_G$. De lo anterior se concluye que

$$G = PA = \bar{P}A_GCA_G = \bar{P}CA_G = \bar{P}C\phi(G) = \bar{P}C.$$

Dado que C es cíclico se tiene que $C = \langle c\rangle$. c induce en $\bar{P}$ un automorfismo interior σ, ya que $\bar{P}$ es normal en G. Como $\bar{P}$ es abeliano $\sigma - 1$ es un endomorfismo de $\bar{P}$, y $(\bar{P})^{\sigma-1}$ es un subgrupo de $\bar{P}$. Tenemos que $(\bar{P})^{\sigma-1}$ está centralizado por $\bar{P}$, además

$$((\bar{P})^{\sigma-1})^{c} = ((\bar{P})^{\sigma-1})^{\sigma} = (\bar{P})^{(\sigma-1)\sigma} = (\bar{P})^{\sigma(\sigma-1)} = (\bar{P})^{\sigma-1},$$

así tenemos que $(\bar{P})^{\sigma-1}$ está normalizado por c y por $\langle c\rangle = C$. Por lo tanto $(\bar{P})^{\sigma-1}$ está normalizado por $\bar{P}C = G$ y $(\bar{P})^{\sigma-1}$ es normal en G.

$P/_{A_G}$ es un subgrupo normal minimal de $G/_{A_G}$ y como $(\bar{P})^{\sigma-1} \leq \bar{P} \leq P$, entonces

$$(A_G(\bar{P})^{\sigma-1})/_{A_G} = \{\bar{e}\} = A_G \quad ó \quad (A_G(\bar{P})^{\sigma-1})/_{A_G} = P/_{A_G},$$

es decir, $A_G(\bar{P})^{\sigma-1} = A_G$ ó $A_G(\bar{P})^{\sigma-1} = P$.

Supongamos que $(\bar{P})^{\sigma-1} \leq A_G$,

Si $x \in \bar{P}$, como P es abeliano, se tiene que

$$x^{-1}c^{-1}xc = x^{-1}x^{c} = x^{-1}x^{\sigma} = x^{\sigma}x^{-1} = x^{\sigma-1} \in A_G \text{ , por lo tanto}$$

$$[\overline{P}, C] = \langle\{\, x^{-1}c^{-1}xc \mid x \in \overline{P},\ c \in C \,\}\rangle \leq A_G.$$

$A = CA_G$ está normalizado por $P = \overline{P}A_G$. En efecto, si $ca_1 \in CA_G$ con $c \in C$, $a_1 \in A_G = Z(G)$ y $a \in \overline{P}A_G$, entonces $a^{-1}(ca_1)a = a^{-1}(a_1c)a$, y como $a = pa_2$, con $p \in \overline{P}$, $a_2 \in A_G = Z(G)$, tenemos que $a^{-1}(a_1c)a = (pa_2)^{-1}(a_1c)pa_2$ y como a_1, $a_2 \in A_G = Z(G)$,

$$(pa_2)^{-1}(a_1c)pa_2 = a_2^{-1}p^{-1}a_1cpa_2 = p^{-1}cpa_1 = c(c^{-1}p^{-1}cp)a_1 \in CA_G.$$

Como A está normalizado por P y por A, se tiene que A está normalizado por G = PA, es decir, A es normal en G, lo cual es una contradicción, por lo tanto $(\overline{P})^{\sigma-1}$ A_G y por consiguiente

$$A_G(\overline{P})^{\sigma-1} = P.$$

Como $P/_{A_G}$ es un p-grupo abeliano elemental, se tiene que $(P/_{A_G})^{p} = P^{p}/_{A_G} = A_G = \{\overline{e}\}$, y por lo tanto $P^{p} \leq A_G = Z(G)$. Si $x \in \overline{P}$, entonces

$$x^{(\sigma-1)p} = x^{p(\sigma-1)} = x^{p\sigma}x^{-p} = x^{pc}x^{-p}$$

$$= c^{-1}x^{p}cx^{-p} = e, \text{ porque } x^{p} \in A_G = Z(G),$$

por lo tanto $((\overline{P})^{\sigma-1})^{p} = \{e\}$, esto es, $(\overline{P})^{\sigma-1}$ es un p-grupo abeliano elemental.

Como $G = PC$ y $P = A_G(\overline{P})^{\sigma-1}$, se tiene que $G = (\overline{P})^{\sigma-1}C$. En efecto,

$$G = PC = A_G(\overline{P})^{\sigma-1}C = \phi(G)(\overline{P})^{\sigma-1}C = (\overline{P})^{\sigma-1}C.$$

Dado que $(\overline{P})^{\sigma-1} \leq \overline{P} \leq G = (\overline{P})^{\sigma-1}C$, aplicando la ley modular de Dedekind, se tiene que

$\overline{P} = \overline{P}\cap G = \overline{P}\cap((\overline{P})^{\sigma-1}C) = \overline{P}\cap((\overline{P})^{\sigma-1}\vee C) = (\overline{P})^{\sigma-1}\vee(\overline{P}\cap C) = (\overline{P})^{\sigma-1}(\overline{P}\cap C)$, de donde se sigue que $\overline{P} = (\overline{P})^{\sigma-1}(\overline{P}\cap C)$. Como $\overline{P}$ es un p-grupo y C es un q-grupo con $p \neq q$, se tiene que $\overline{P} \cap C = \{e\}$ y $\overline{P} = (\overline{P})^{\sigma-1}$, por lo tanto $\overline{P}$ es un p-grupo abeliano elemental, ya que $(\overline{P})^{\sigma-1}$ lo es.

Si $x \in \overline{P}$, entonces $x^{\sigma-1} = x^c x^{-1} = c^{-1}xcx^{-1} \in G'$ y como $\overline{P} = (\overline{P})^{\sigma-1}$, se tiene que $\overline{P} \leq G'$.

Como $G = \overline{P}C$ con $\overline{P}$ normal en G, se tiene que

$$G/_{\overline{P}} = \overline{P}C/_{\overline{P}} \cong C/_{(C\cap\overline{P})} \cong C,$$

y como C es cíclico, $G/_{\overline{P}}$ es abeliano lo que implica que $G' \leq \overline{P}$. Por lo tanto $G' = \overline{P}$, y G' es un p-grupo abeliano elemental.

Demostraremos que $Z(G) \cap G' = \{e\}$. Supongamos que $Z(G)\cap G' \neq \{e\}$, esto implica que $G'A_G/_{A_G} \cap Z(G/_{A_G}) = H \neq \{\overline{e}\}$, H es un subgrupo normal de G^*, ya que es un subgrupo de $Z(G/_{A_G})$. Se tiene que

$$G'A_G/_{A_G} = \overline{P}A_G/_{A_G} = P/_{A_G} = M \ ,$$

que es un subgrupo normal minimal de G^*, por lo tanto

$$H = P/_{A_G} = G'A_G/_{A_G} = G'A_G/_{A_G} \cap Z(G/_{A_G}) \subset Z(G/_{A_G}).$$

$$\left(G/_{A_G}\right)\Big/_{\left(P/_{A_G}\right)} \cong G/_P = PC/_P \cong C/_{P\cap C} \ ,$$

que es un subgrupo cíclico y como $P/_{A_G} \subset Z(G/_{A_G})$, se tiene que $G/_{A_G}$ es abeliano, que $A^* = A/_{A_G}$ es normal en $G/_{A_G}$ y que A es normal en G, lo cual es una contradicción, por lo tanto $Z(G) \cap G' = \{e\}$ y

$$P = \overline{P}A_G = G'Z(G) = G' x Z(G).$$

Veamos que G' es un subgrupo normal minimal. Si suponemos que K es un subgrupo normal de G contenido en G', entonces $Z(G)K$ es un subgrupo normal de G, luego $Z(G)K/_{Z(G)}$ es normal en $G/_{Z(G)}$.

$$Z(G)K/_{Z(G)} \subset Z(G)G'/_{Z(G)} = P/_{Z(G)} = P/_{A_G}$$

que es un subgrupo normal minimal de $G/_{A_G}$. Por lo tanto $K = \{e\}$ y G' es un subgrupo normal minimal de G.

También se tiene que

$[G : P] = [PA : P] = [A : P\cap A] = [A : A_G] = q$, con q un primo,

es decir, P es un subgrupo maximal de G. Como P es normal en G y G sólo tiene un subgrupo normal maximal, entonces $P = G' \times Z(G)$ es el único subgrupo normal maximal de G.

G' está centralizado por G' y por $Z(G)$, por lo tanto G' está centralizado por $P = G' \times Z(G)$ que es maximal en G. Como G' no está centralizado por G ya que $G' \cap Z(G) = \{e\}$ se tiene que

$C_G(G') = G' \times Z(G) = P$ y por consiguiente $[G : C_G(G')] = q$. ■

Corolario 2. *Sea* G *un grupo finito. Las siguientes proposiciones* (a), (b) y (c) *son equivalentes.*

(a): a.1 G *no es abeliano, pero todo subgrupo propio de* G *es abeliano,*

a.2 G *tiene sólo un subgrupo normal maximal,*

a.3 *cada imagen homomorfa propia de* G *es abeliana.*

(b): b.1 G' *es el único subgrupo normal no trivial de* G,

b.2 $[G: G'] = q$, *con* q *un primo,*

b.3 G' *es un* p-*grupo abeliano elemental, con* $p \neq q$.

(c): c.1 G' *es el único subgrupo normal no trivial de* G,

c.2 G' *es abeliano.*

Demostración. Veamos que (a) implica (b).

En virtud del teorema anterior, sólo es necesario probar que $Z(G) = \{e\}$ y que G' es el único subgrupo minimal de G.

Si $Z(G) \neq \{e\}$, entonces $G/_{Z(G)}$ es abeliano y $G' \leq Z(G)$, lo que es una contradicción, por lo tanto $Z(G) = \{e\}$.

Si N es normal en G, con $\{e\} \neq N \neq G$, entonces $G/_N$ es abeliano y $G' < N$, por lo tanto G' es el único subgrupo normal minimal de G.

Que (b) implica (c) es inmediato.

Demostración de que (c) implica (a).

En virtud de c.1 es inmediato que G no es abeliano y que se cumplen a.2 y a.3, así que sólo es necesario probar que cada subgrupo propio de G es abeliano, y para probar esto, es suficiente demostrar que cada subgrupo maximal de G es abeliano.

Sea A un subgrupo maximal de G.

Si $G' = A$, entonces A es abeliano.

Si $G' \neq A$, entonces $G'A = G$, y $G/_{G'} = G'A/_{G'} \cong A/_{G' \cap A}$. Como $G' \cap A$ es normal en A y G' es abeliano, entonces $G' \cap A$ es normal en G. Siendo G' normal minimal en G se tiene que $G' \cap A = \{e\}$, por lo tanto A es isomorfo a $G/_{G'}$, que es abeliano, y así cada subgrupo maximal de G es abeliano. ■

Observaciones y ejemplos.

Hemos visto que si G es un grupo finito no abeliano, pero tiene todos sus subgrupos propios abelianos, entonces G tiene las siguientes propiedades:

1) G no es simple,
2) G tiene un subgrupo normal de índice primo,
3) G es soluble,
4) $Z(G) = \phi(G) = S \cap T$, para cualesquiera dos subgrupos maximales S y T de G.

En particular, dado que los grupos no abelianos de orden p^3 y pq, con p y q primos diferentes, y el grupo A_4, tienen todos sus subgrupos propios abelianos, dichos grupos tienen las propiedades anteriores.

Si un grupo G pertenece a la clase de los grupos que se desciben en el teorema 2, entonces el orden de G es $p^s q^t$ con p y q primos diferentes y s, $t \geq 1$.

Si un grupo G pertenece a la clase de los grupos que se desciben en el corolario 2, entonces el orden de G es $p^s q$ con p y q primos diferentes y $s \geq 1$.

Siguiendo la demostración del teorema 1, se puede observar que si G es un grupo no abeliano de orden pq, con p y q primos diferentes, entonces, G tiene sólo un subgrupo normal maximal. Así G satisface las condiciones del corolario 2, y resulta que G' es el único subgrupo normal de G y que $Z(G) = \{e\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] **Baer, Reinholdt :** *Topics in finite groups, minimal classes.*
Corso della Scuola di perfezionamento in Matematica.
Universitá Degli Studi di Firenze. 1974-75, vol 6.

[2] **Hall Jr., Marshall :** *Teoría de los grupos.*
Trillas. México, 1973.

[3] **Laszlo, Redei :** *Das ,,schiefe Produts'' in der Gruppentheorie.*
Coment. Math. Helv. (1947), 20, pp. 225-264.

[4] **Miller, G. A. H. Moreno :** *Non-abelian groups in which every subgroups is abelian.*
Transactions of the American Mathematical Society,
vol. 4 (1903), pp. 398-404.

[5] **Rotman, Joseph J. :** *An introduction to the theory of groups.*
3 ed. Wm. C. Brown Publisher Dubugue, Iowa. 1988.

[6] **Zappa, Guido :** *Fondamenti di teoria dei gruppi.* Volume II.
Monografie Matematiche a cura del Consiglio Nazionale
delle Ricerche. Edizione: Cremonese, Roma 1970.

LISTA DE SIMBOLOS

$Z(G)$	centro del grupo G
$M \vee N$	subgrupo generado por $M \cup N$
$N_G(M)$	normalizador de M en G
$[G : H]$	índice de H en G
$o(G)$	orden de G
$G/_N$	conjunto de las clases laterales de N en G
$G \setminus A$	diferencia de conjuntos
$End(B)$	conjunto de los homomorfismos de B en B
A_G	conjunto formado por $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Ag$
$\{\bar{e}\}$	elemento neutro del grupo $G/_N$
$\phi\ (G)$	grupo de Frattini
$\lvert A \rvert$	cardinalidad del conjunto A
G'	grupo derivado
$A \times B$	producto cartesiano de A y B
$\cong$	ser isomorfo
$[A, B]$	grupo generado por $a^{-1}b^{-1}ab$, con $a \in A$ y $b \in B$