



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

9
2es

Caos Acústico

TESIS

que para obtener el grado académico de

FÍSICO

presenta

María Gabriela Báez Juárez

DIRECTOR: DR. ARMANDO ANTILLON DIAZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

México, D.F.

Marzo de 1993

FALLA DE ORIGEN
TESIS CON



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

Introducción	1
1 Clasificación de sistemas	3
1.1 Sistemas Integrables	3
1.2 Sistemas Caóticos	4
1.3 Billares Clásicos	5
1.4 Billares Cuánticos	7
1.5 Billares Acústicos	9
1.6 Billar de Sinai	10
1.7 Estadio de Bunimovich	12
2 Estadística Espectral	15
2.1 Las Funciones de Número de Niveles y Densidad de Estados	15
2.2 Fluctuaciones Espectrales	17
2.3 La Estadística Espectral del Estadio de Bunimovich	20
3 El Método del Elemento Finito	25
4 Resultados Numéricos	30
Conclusiones	35
Bibliografía	36
Tablas	38
Pies de Figuras	44
Figuras	47

INTRODUCCION

Durante los últimos años, ha habido gran interés en estudiar las consecuencias del comportamiento regular y caótico de sistemas clásicos en mecánica cuántica. Gran parte del trabajo que se ha hecho, se refiere a cavidades con paredes de potencial infinito, conocidas como billares. En este caso, la analogía entre óptica de rayos y mecánica clásica es clara, ya que la dinámica de ambas está gobernada por reflexiones especulares.

Se han estudiado también ondas electromagnéticas en cavidades tan planas, que son sistemas casi bidimensionales; entonces el problema es equivalente al de mecánica cuántica en dos dimensiones [1,2]. En estos casos, el problema estacionario consiste en resolver la ecuación de Helmholtz con condiciones a la frontera de Dirichlet.

En el caso acústico, la dinámica de rayos sonoros es la misma que en óptica de rayos, pero al pasar al tratamiento ondulatorio, la situación cambia. Usando el potencial de velocidades[21] para describir el problema, se encuentra que el sistema acústico también se describe con la ecuación de Helmholtz, pero con condiciones en la frontera de Neumann.

El propósito de este trabajo es averiguar si las relaciones que se han encontrado entre la dinámica de rayos (regular y caótica) y las propiedades espectrales del problema de ondas en los casos cuántico y electromagnético persisten en el caso acústico. Nos concentraremos en obtener algunos resultados sobre las propiedades del espectro acústico del estadio de Bunimovich y del rectángulo.

En el capítulo 1 hacemos una clasificación sencilla de los sistemas clásicos con la finalidad de entender las principales propiedades de los billares. Posteriormente analizamos los billares como sistemas clásicos y su análogo cuántico tomando como caso particular el estadio de Bunimovich.

En el segundo capítulo se explica en qué consiste la estadística espectral y el sig-

nificado físico de las cantidades que se obtienen a partir de un espectro de frecuencias, y se muestran los resultados que se han obtenido para algunos sistemas. Asimismo, se explica la forma en que se hace la estadística de niveles del espectro del estadio de Bunimovich. Las herramientas numéricas que se emplearon para obtener los espectros numéricos y su funcionamiento, se explican en el capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 4 se muestran los resultados que fueron obtenidos para el estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Neumann y se comparan con la estadística de niveles de un sistema integrable, como es el rectángulo.

1 CLASIFICACION DE SISTEMAS

1.1 Sistemas Integrables

Si se tiene un sistema con N grados de libertad cuyo movimiento es integrable, existen en el espacio fase correspondiente de $2N$ dimensiones $((p, q) = (q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N))$ N constantes de movimiento $F_i(p, q)$ con $i = 1, 2, \dots, N$ (que incluyen al Hamiltoniano H si éste es independiente del tiempo).

Entonces

$$\frac{dF_i(p, q)}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial q} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Si sustituimos en la ecuación anterior las ecuaciones de Hamilton para p, q tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial F_i}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial F_i}{\partial p} = \{H, F_i\} = 0,$$

es decir, el paréntesis de Poisson de H con F_i se anula.

Geoméricamente podemos decir que el vector de campo $(-\frac{\partial F_i}{\partial q}, \frac{\partial F_i}{\partial p})$ es tangente a la superficie de energía $H(p, q) = E$ o, de otra forma, que el vector de campo $(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})$ es perpendicular a la superficie $F_i(p, q) = k$ con E y k constantes.

Si hay N constantes de movimiento que son linealmente independientes y cumplen con

$$\{F_i, F_j\} = 0 \text{ para } i \neq j$$

entonces la superficie en el espacio fase se reduce a un toro N -dimensional. En estos casos es posible encontrar explícitamente $q_i(t)$ y $p_i(t)$ por eliminación e integración.

En algunos casos es posible resolver las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable si se le describe desde un sistema de coordenadas adecuado que separe las ecuaciones correspondientes. A este proceso se le llama separación de variables. De hecho todo sistema separable en el espacio de configuración es integrable, pero la afirmación inversa no se cumple, es decir: no todo sistema integrable es separable.

1.2 Sistemas Caóticos

La gran mayoría de sistemas conocidos no son integrables porque además del Hamiltoniano no existen suficientes constantes de movimiento que permitan acotar la dinámica del sistema a una superficie N -dimensional del espacio-fase. Dentro de estos sistemas no integrables, existe una clase de sistemas a los cuales se les llama *ergódicos*, pues tienen la propiedad de que la mayoría de las condiciones iniciales generan una trayectoria en el espacio fase que explora casi toda una superficie de $2N - 1$ dimensiones caracterizada por $H(p, q) = k$ (con k una constante).

El caso no trivial más sencillo de sistemas no integrables y *ergódicos* se da con $N = 2$, ya que para $N = 1$ todas las trayectorias del espacio son *ergódicas* a la vez que el sistema es integrable.

Ejemplos de este tipo de sistemas son los billares planos. Los dos más conocidos son: el billar de Sinai, y el estadio de Bunimovich. Este último es objeto de estudio en este trabajo. Existen otros billares que deben sus propiedades de ergodicidad a su geometría de curvatura total negativa, pero de ellos no nos ocuparemos.

Otro tipo de sistemas que no son ni integrables ni *ergódicos*, son los que se caracterizan porque su Hamiltoniano se puede expresar en dos partes: la suma de un Hamiltoniano integrable H_0 (usualmente, se supone que H_0 es una función suave y continua en p y q), más un segundo término perturbativo H_1 multiplicado por un parámetro $\epsilon \ll 1$

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \epsilon H_1(p, q).$$

Si $\epsilon = 0$ el sistema es integrable. Sobre este tipo de sistemas hay varios trabajos referentes al comportamiento de las trayectorias en el espacio fase [16]. Sucede que para casi cualquier H_1 , el toro correspondiente al sistema integrable está deformado en alguna de sus partes. Los efectos de los términos perturbativos sobre Hamiltonianos integrables

han sido estudiados por Kolmogorov[3], Arnol'd[4] y Moser[5], quienes establecieron el teorema llamado KAM: " bajo perturbaciones suficientemente pequeñas, sólo una fracción finita de los toros sobrevive en el espacio-fase "[16].

En el caso de los billares en general, la herramienta matemática desarrollada por Kolmogorov, Arnol'd y Moser no puede ser aplicada, debido a que el Hamiltoniano de estos sistemas es discontinuo (H_0 no es una función continua y suave de p y q). En los casos en que la no integrabilidad de un billar se debe a la existencia de algún parámetro distinto de cero en el Hamiltoniano correspondiente, la perturbación introducida por tal parámetro es infinita y destruye totalmente el toro existente en el espacio fase para cualquier valor del parámetro, por pequeño que éste sea.

1.3 Billares Clásicos

Los billares son sistemas bidimensionales, que consisten en una partícula confinada a moverse libremente dentro de una región simplemente conexa limitada por una curva continua. El Hamiltoniano de estos sistemas puede expresarse en general en la forma siguiente:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \begin{cases} (p_x^2 + p_y^2)/2, & \text{dentro de una frontera } \partial R, \\ \infty, & \text{fuera de } \partial R. \end{cases}$$

La expresión anterior para el Hamiltoniano de billares se puede entender mejor si notamos que a una partícula confinada a moverse libremente en una región R le corresponde la energía de una partícula libre dentro de R y afuera le corresponde un potencial infinito que impide que la partícula salga de su confinamiento. Para el caso de billares clásicos, el potencial V no tiene que ser necesariamente infinito; basta que éste sea mayor que la energía cinética de la partícula.

Normalmente se supone que las múltiples dispersiones de la partícula debidas a choques con la pared son elásticas. Podemos expresar esto diciendo que si la partícula

es dispersada por cualquier punto P de la frontera del billar, entonces la velocidad de la partícula tangente a la frontera ∂R en este punto no sufre ningún cambio, mientras que la componente normal de la misma cambia de signo, es decir, pasa por una discontinuidad

$$\vec{v}_i \cdot \hat{l} = \vec{v}_f \cdot \hat{l}$$

$$\vec{v}_i \cdot \hat{n} = -\vec{v}_f \cdot \hat{n},$$

donde los subíndices i y f se refieren a la velocidad antes y después del choque, respectivamente, y \hat{l} y \hat{n} son los vectores unitarios tangencial y normal a la frontera ∂R en el punto P . Entonces, las trayectorias que describe una partícula en un billar consisten en segmentos de línea recta unidos por reflexiones especulares en la frontera ∂R .

Hemos dicho ya que el comportamiento de las trayectorias de una partícula en un billar dependen de la geometría de éste. Ahora podemos ver más claramente que esto es cierto si construimos algunas de las posibles trayectorias que sigue una partícula adentro del billar si usamos la ley de la reflexión.

Dada una geometría, es fácil distinguir varias trayectorias periódicas, que se pueden clasificar en dos tipos: algunas de ellas son órbitas inestables no aisladas, otras son órbitas inestables aisladas.

El criterio de estabilidad al que nos referimos es simple: la trayectoria que describe una partícula dentro del billar, depende del ángulo inicial de choque con la pared o frontera (dirección inicial de la velocidad), y del punto de contacto con ésta en una colisión. Si la órbita que describe la partícula es aislada, cualquier pequeña variación del ángulo de incidencia provocará que la partícula describa una trayectoria que se aleja exponencialmente de la órbita original. Si la órbita no es aislada, la partícula se quedará atrapada un tiempo largo dentro de la región de órbitas no aisladas.

En la figura 1 se muestran algunas órbitas para un billar con geometría rectangular.

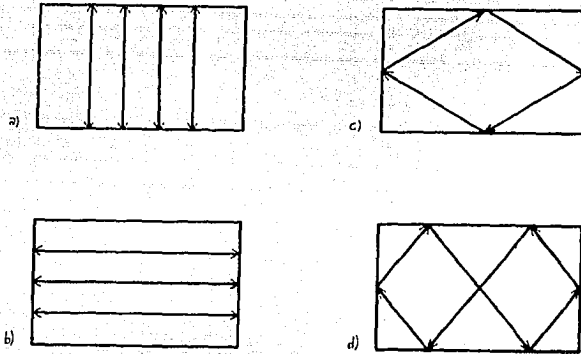


Figura 1. Trayectorias periódicas en un billar rectangular

1.4 Billares Cuánticos

Recordemos, por otro lado, que en mecánica cuántica un ejemplo típico a resolver es el de una partícula dentro de una caja cuadrada bidimensional, la cual se representa por un potencial infinito $V = \infty$ fuera de la caja y cero dentro de ella. Como sabemos, en este caso lo que se estudia son las eigenfunciones de la partícula dentro de la caja.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es una ecuación de eigenvalores $H\psi_n = E_n\psi_n$ con $n = 1, 2, \dots$. Esto nos indica que, dentro de la caja la partícula no puede tener cualquier energía, sino un conjunto infinito de energías discretas bien definidas a las cuales se asocian las funciones propias.

En coordenadas cartesianas, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial bidimensional dado es

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V - E_n) \psi_n = 0. \quad (1.4.1)$$

Para el caso de una partícula confinada en una caja cuadrada bidimensional, esta ecuación lineal se puede escribir como

$$\nabla^2 \psi_n(x, y) = \lambda_n \psi_n(x, y) \text{ con } \lambda_n = \frac{-2mE_n}{\hbar^2}, \quad (1.4.2)$$

con condiciones en la frontera

$$\psi_n|_{\partial R} = 0 \quad (1.4.3)$$

dentro de la región de confinamiento. La ecuación de eigenvalores (1.4.2), es la ecuación de Helmholtz. Esta ecuación tiene otras interpretaciones; por ejemplo, es también la ecuación de los modos normales de una membrana bidimensional que ocupa un dominio R en el plano.

Lo anterior lo podemos entender si partimos de la ecuación de onda bidimensional

$$\nabla^2 \phi(x, y, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (1.4.4)$$

y usamos el método de separación de variables para hacer la ecuación de onda independiente del tiempo; proponemos que

$$\phi(x, y, t) = \psi(x, y)\tau(t). \quad (1.4.5)$$

y de aquí obtenemos directamente la dependencia temporal de la función de onda así como la ecuación de Helmholtz cuyas soluciones nos dan la dependencia espacial de la onda

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -k^2\tau \quad (1.4.6)$$

$$\nabla^2\psi + \omega^2\psi = 0, \quad (1.4.7)$$

donde $-k^2$ es la constante de separación y $\omega^2 = \frac{k^2}{v^2}$. Integrando directamente la ecuación (1.4.6) tenemos que la dependencia temporal es

$$\tau = e^{ikt}, \quad (1.4.8)$$

mientras que de la ecuación (1.4.7) que es la ecuación de Helmholtz, no podemos obtener información hasta que se defina una geometría concreta. Ello dará en algunos casos un problema separable y en otros casos no, pero independientemente de lo anterior,

la ecuación de Helmholtz da los modos normales de vibración de membranas bidimensionales con una geometría dada.

Ahora sólo falta tomar en cuenta las condiciones a la frontera de Dirichlet (1.4.3), lo cual implica que estamos tratando con una membrana bidimensional con extremos fijos, o sea un tambor.

1.5 Billares Acústicos

En un fluido la existencia de perturbaciones acústicas (ondas longitudinales) genera tanto variaciones alrededor de la presión de equilibrio P_0 , como desplazamiento de los elementos de volumen del fluido. La dinámica de un sistema de este tipo puede plantearse en términos del desplazamiento $\vec{\rho}(\vec{r}, t)$ provocado por la perturbación.

De los estudios sobre fluidos [21], se sabe que la variación en la presión, o exceso de presión $P_{ex}(\vec{r}, t)$, como a veces se le llama, cumple con una ecuación de onda. El desplazamiento del fluido $\vec{\rho}$, está relacionado con $P_{ex}(\vec{r}, t)$ de la siguiente manera:

$$-\nabla P_{ex} = \alpha \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2}, \quad (1.5.1)$$

donde α es la densidad del fluido. Así que la dinámica del fluido puede obtenerse resolviendo, ya sea la ecuación de onda que cumple P_{ex} , o las ecuaciones de movimiento de los elementos de volumen del fluido. La segunda opción es un poco más complicada debido al carácter vectorial del desplazamiento. Sin embargo, el estudio de un sistema acústico se hace más sencillo si lo planteamos en términos del potencial de velocidades ϕ , el cual guarda una relación con el vector de desplazamiento dada por

$$\vec{\rho}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi(\vec{r}, t), \quad (1.5.2)$$

que también satisface la ecuación de onda escalar (1.4.4). Cuando el fluido se confina a una región, es decir, a un recipiente, los elementos de volumen del fluido no pueden atravesar la pared del recipiente

$$\vec{\rho} \cdot \hat{n}|_{\partial R} = 0. \quad (1.5.3)$$

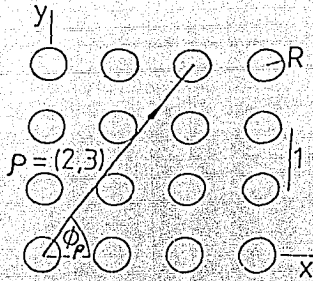


Figura 2: Distribución periódica de discos rígidos confinados a un plano

Esto equivale a que el potencial de velocidades ϕ cumpla condiciones a la frontera de Neumann

$$\nabla\phi \cdot \hat{n}|_{\partial R} = 0. \quad (1.5.4)$$

sobre ∂R . Si la geometría del recipiente que confina al fluido es separable en una de sus componentes espaciales, el resto del problema estacionario que queda por resolver equivale a obtener el espectro de frecuencias y las eigenfunciones de un billar acústico bidimensional. Esto se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz en la región R definida por la geometría bidimensional elegida con condiciones a la frontera de Neumann para las eigenfunciones correspondientes.

1.6 Billar de Sinai

Sinai estudió una mezcla de gas, simulado con bolas elásticas (problema de Krylov) y lo confinó a un plano. Cuando el problema se reduce a un caso muy simple, tenemos una distribución periódica de discos rígidos de radio R , todos ellos fijos en un plano entre los cuales se encuentra rebotando elásticamente una partícula que se considera libre y puntual (fig. 2).

Este problema es equivalente al problema de una partícula que se mueve en un

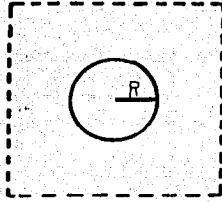


Figura 3. Billar dispersor con condiciones periódicas en la frontera cuadrada

tablero o billar dispersor cuadrado, con un estorbo circular en el centro y con condiciones periódicas en la frontera cuadrada (ver fig. 3). Las condiciones a la frontera se expresan de la siguiente manera:

$$\psi(\vec{r} + \vec{\rho}) = \psi(\vec{r}) \text{ (periódicidad)} \quad (1.6.1)$$

$$\psi(|\vec{r}| = R) = 0. \text{ (disco duro)} \quad (1.6.2)$$

La ecuación (1.6.1), nos da las condiciones de periodicidad. La ecuación (1.6.2), nos indica que los discos rígidos son una frontera física interna del billar de Sinaï.

Sinaï probó [6] que las trayectorias de una partícula moviéndose dentro de este billar cuadrado, con un obstáculo circular en el centro, son ergódicas para cualquier radio R del obstáculo distinto de cero.

Este sistema, ha sido clasificado como un sistema K , es decir, dadas dos condiciones iniciales muy cercanas, las trayectorias descritas se separan con divergencia exponencial.

En la figura 4, se muestran algunas órbitas inestables aisladas y no aisladas correspondientes a este billar.

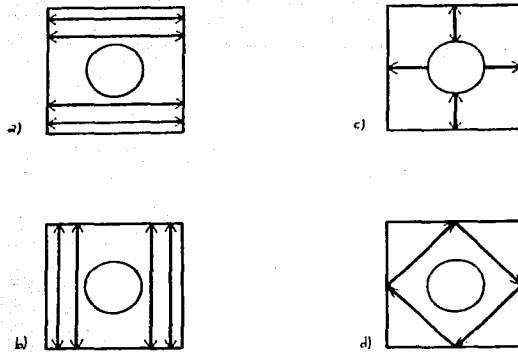


Figura 4. Orbitas periódicas no aisladas (a y b) y aisladas (c y d) del billar de Sinai

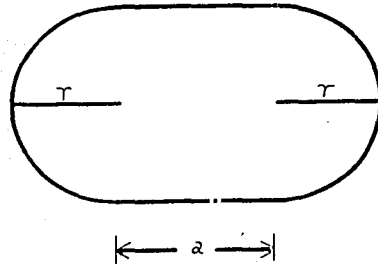


Figura 5. Estadio de Bunimovich

1.7 Estadio de Bunimovich

La geometría del estadio de Bunimovich, corresponde a un par de rectas paralelas de longitud a unidas por dos semicírculos de radio r , como se muestra en la figura 5. Nuevamente, en este billar tenemos trayectorias periódicas inestables aisladas y no aisladas, de las cuales se muestran algunas en la figura 6.

A pesar de que la geometría de este billar es sencilla, también es un sistema ergódico y K como el billar de Sinai. Una trayectoria típica que describe una partícula dentro de este billar nunca se cierra y barre casi toda el área encerrada por el estadio de

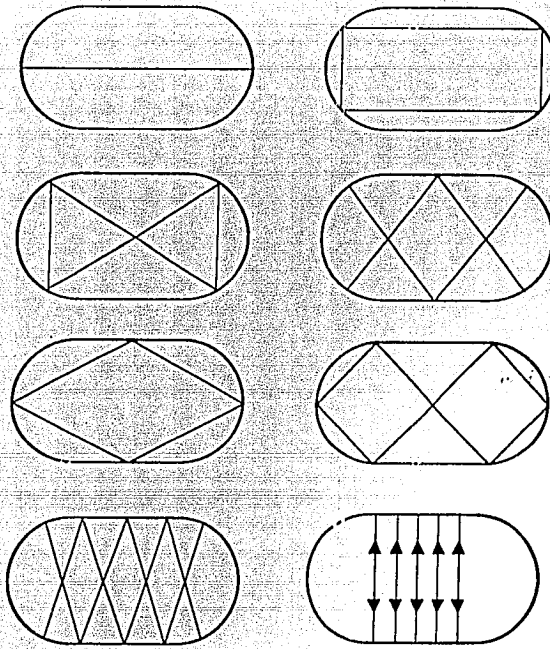


Figura 6. Órbitas periódicas aisladas y no aisladas del Estadio de Bunimovich (Tomado de Heller en la ref. [17])

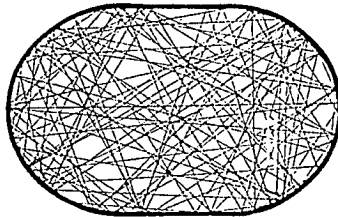


Figura 7. Trayectoria ergódica típica del estadio de Bunimovich

Bunimovich. Este tipo de trayectoria (ver figura 7) es una clara manifestación del comportamiento ergódico del sistema, el cual ha sido comprobado por el propio Bunimovich[7].

Tanto el billar de Sinai como el estadio de Bunimovich son sistemas no separables, es por esto que las eigenfunciones de ambos sistemas así como sus espectros de frecuencias sólo pueden ser conocidos con cierta aproximación, usando métodos numéricos.

2 ESTADISTICA ESPECTRAL

En los últimos años se ha encontrado que la Teoría de Matrices Aleatorias (R.M.T.) introducida por Cartan parece tener una estrecha relación con el estudio de las fluctuaciones espectrales de sistemas con diferentes propiedades de regularidad [8,9,10,15].

Las aplicaciones de la R.M.T. tuvieron su origen en el estudio de la estructura de espectros de neutrones que dio lugar al análisis estadístico de las propiedades generales del espectro de varios tipos de *ensembles* de matrices aleatorias (Poisson, G.O.E., G.U.E. entre otros), tales como la densidad de niveles y sus fluctuaciones.

La conexión con el estudio de otros sistemas físicos se sugirió a partir de los resultados obtenidos de la estadística espectral de sistemas cuyo análogo clásico presenta comportamiento integrable o caótico.

Para entender más claramente las ideas anteriores, comenzaremos por caracterizar las fluctuaciones de un espectro de frecuencias y posteriormente describiremos las técnicas estadísticas usadas por Bohigas [11,17] para obtener la información del comportamiento global de los niveles del espectro.

Debido a que la energía del sistema correspondiente a cada nivel del espectro es proporcional a la frecuencia, nos referiremos a cualquiera de ellas indistintamente.

2.1 Las Funciones de Número de Niveles y Densidad de Estados

El espectro de energías de un sistema dado puede ser descrito en términos de la función escalera $N(E)$, que cuenta el número de niveles del espectro considerado, con energías $E_i, i = 1, 2, \dots, n$ menores o iguales a E

$$N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i), \quad (2.1.1)$$

donde Θ es la función Heaviside con saltos de tamaño unitario. La función $N(E)$ se incrementa en uno cada vez que E toma el valor de alguna de las energías del espectro.

Para un valor dado de E , $N(E)$ nos da el número de niveles de energía cuyo valor está por debajo de E . La derivada de esta función nos da la densidad de estados por intervalo de energía

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \sum_i \delta(E - E_i). \quad (2.1.2)$$

Para nuestros fines, $N(E)$ puede ser expresada como la suma de dos términos, uno que es el comportamiento promedio $\langle N(E) \rangle$ que debe ser aproximado por una curva suave, y el otro que es la parte fluctuante $N_{fluc}(E)$ así,

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{fluc}(E). \quad (2.1.3)$$

Para hacer una estimación analítica de $\langle N(E) \rangle$ se aplica la regla semiclásica: a cada estado cuántico se le asocia un volumen $(2\pi\hbar)^d$ en el espacio fase

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int \int \Theta(E - H(p, q)) dpdq. \quad (2.1.4)$$

Aquí d es la dimensión del sistema y \hbar la constante de Planck.

Usando la ecuación (2.1.2) obtenemos la expresión para el promedio de la densidad de estados en el espacio fase

$$\langle \rho(E) \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int \int \delta(E - H(p, q)) dpdq. \quad (2.1.5)$$

Además del término (2.1.4) pueden haber correcciones. Para el caso de una partícula en un billar, éstas se pueden evaluar y $\langle N(E) \rangle$ puede llevarse a la forma conocida como la fórmula de Weyl [11].

$$\langle N(E) \rangle \sim \frac{1}{4\pi} [SE \mp L\sqrt{E} + K] \quad (2.1.6)$$

donde S es el área encerrada por el billar, L es el perímetro de la frontera correspondiente, y K es un término constante que contiene información de las propiedades de la topología del billar:

$$K = \frac{1}{12} \int_{\partial R} \kappa(\ell) d\ell, \quad (2.1.7)$$

con $\kappa(\ell)$ la curvatura local de la frontera.

En la ecuación (2.1.6) el signo menos o más se usa en el caso de condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann, respectivamente. Se ha hecho la comparación entre $N(E)$ y $\langle N(E) \rangle$ para muchos sistemas y se ha encontrado que $\langle N(E) \rangle$, calculada a partir de la ecuación (2.1.6), reproduce muy aceptablemente el comportamiento de $N(E)$.

2.2 Fluctuaciones Espectrales

Una vez que hemos encontrado la forma explícita aproximada para $\langle N(E) \rangle$, es posible eliminar este término y quedarnos únicamente con las fluctuaciones. Para esto es necesario desdoblarse (*unfold*) el espectro original E_i , lo cual se hace a través del mapeo siguiente:

$$E_i \rightarrow x_i$$

$$x_i = \langle N(E_i) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

La nueva secuencia x_i obtenida, tiene un espaciamento promedio de niveles igual a la unidad y es independiente de la forma de $\langle N(E) \rangle$ pues por construcción

$$\langle x(i) \rangle = i - 1/2. \quad (2.2.2)$$

Podemos entonces decir que las fluctuaciones de los niveles están dadas por la desviación de los valores de x_i respecto de $\langle x_i \rangle$

$$\delta_i = x_i - (i - 1/2), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.2.3)$$

Con la secuencia $\{x_i\}$ se pueden obtener diferentes medidas que caracterizan al espectro del sistema. La más común es la distribución del espaciamento de niveles entre primeros vecinos. Esta medida nos da la probabilidad $P(s)ds$ de que el espaciamento entre niveles consecutivos del espectro de energías se encuentre en el intervalo $(s, s +$

ds). Cuando hacemos estadística del espaciamiento entre primeros vecinos, estamos “mirando” el espectro de energías a una escala que es del orden del espaciamiento promedio entre niveles, es decir, del orden de h^d , como se puede ver de la ecuación (2.1.5)

$$dE = \langle \rho \rangle^{-1} d < N(E) \rangle \propto h^d. \quad (2.2.4)$$

Es importante analizar algunos límites sencillos de la función $P(s)$ como es el caso $P(s) \rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow 0$. Este límite nos revela la existencia de una “repulsión” entre niveles, es decir, la probabilidad de encontrarnos dos niveles consecutivos extremadamente juntos es pequeña. Los espectros nucleares presentan este tipo de comportamiento y el tipo de distribución de la $P(s)$ correspondiente tiene la forma aproximada

$$P(s) \sim (\pi/2)s \exp(-(\pi/4)s^2). \quad (2.2.5)$$

Esta expresión fue propuesta por Wigner en 1957 cuando trató de modelar los niveles de energía de núcleos atómicos con los eigenvalores de matrices aleatorias cuyos elementos eran generados a partir de *ensembles* Gaussianos, por lo cual, este tipo de distribución de la función $P(s)$ es conocida en Teoría de Matrices Aleatorias (R.M.T), como una distribución de tipo G.O.E (Gaussian Orthogonal Ensemble).

Un ejemplo de otro sistema ajeno al de los espectros de núcleos atómicos y cuya $P(s)$ tiene una distribución G.O.E., es el billar de Bunimovich con condiciones a la frontera de Dirichlet. Como se puede apreciar en la figura 8 (tomada de [17]), la distribución del espaciamiento de niveles es una distribución de Wigner. Un hecho notable es que este sistema tiene evidencias de comportamiento caótico y se le ha asociado con una distribución de niveles de un ensemble de R.M.T tipo G.O.E. A nosotros nos toca averiguar, entre otras cosas, cuál es la forma de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ que caracteriza el espectro del mismo billar de Bunimovich con condiciones a la frontera de Neumann.

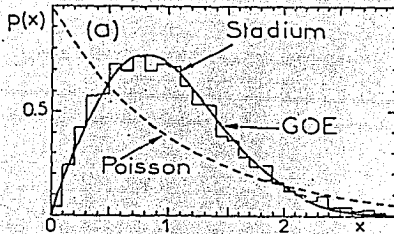


Figura 8. Distribución del espaciamento de primeros vecinos para el estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Dirichlet (tomada de [17])

Se sabe que si el conjunto de x_i es una secuencia de números al azar, el patrón de fluctuaciones de la $P(s)$ es de tipo Poisson

$$P(s) = \rho e^{-\rho s}. \quad (2.2.6)$$

Se ha encontrado que las distribuciones de tipo Poisson caracterizan a los espectros de energías de sistemas integrables. Nuevamente ésto no debe sorprendernos porque, aunque a primera vista su espectro no tiene nada que ver con series de números aleatorios, el espectro de un sistema integrable está conformado por la superposición de secuencias de energías totalmente descorrelacionadas y éste es un buen método para generar números aleatorios. Los sistemas separables son claros ejemplos de este hecho, el cual ha sido probado por Berry y Tabor [12].

Existen otras cantidades estadísticas auxiliares que caracterizan a cada tipo de distribución $P(s)$, como la varianza $\Sigma^2(L)$ respecto al número estadístico $n(\alpha, L)$ que cuenta el número de niveles de energía del espectro contenidos en el intervalo $[\alpha, \alpha + L]$

$$\Sigma^2(L) = \langle n^2(\alpha, L) \rangle - \langle n(\alpha, L) \rangle^2. \quad (2.2.7)$$

Se usa la variable α para definir los varios promedios sobre los diferentes intervalos de

energía barridos por todo el espectro. Cuando tenemos una distribución de tipo G.O.E.

$$\Sigma^2(L) = (2/\pi^2) \ln L + 0.44, \quad \text{con} \quad L \geq 1, \quad (2.2.8)$$

y para una de tipo Poisson

$$\Sigma^2(L) = L. \quad (2.2.9)$$

Este proceso se ha aplicado a varios sistemas físicos, en particular al caso de billares que clásicamente son integrables como el círculo y a otros totalmente desordenados como el billar de Sinai y el estadio de Bunimovich (sistemas K) con condiciones a la frontera de Dirichlet cuyo espectro corresponde a las energías del Laplaciano. Lo que se ha encontrado es que para los sistemas cuyo análogo clásico es integrable, la distribución del espaciamiento de niveles del espectro corresponde a una distribución tipo Poisson y la respectiva distribución de un sistema caótico tiene un patrón de fluctuaciones tipo G.O.E.

Como vemos es posible clasificar a los sistemas en función del comportamiento de sus fluctuaciones, aunque la forma de $\langle N(E) \rangle$ sea diferente para cada sistema. Esta clasificación nos habla un poco del grado de complejidad de un sistema.

2.3 La Estadística Espectral del Estadio de Bunimovich

En esta sección, explicamos la forma en que haremos la estadística del espectro de energías del estadio de Bunimovich con condiciones acústicas (de Neumann) en la frontera.

En el capítulo 1 se explicó que el billar de Bunimovich, con condiciones de Neumann en la frontera, tiene el mismo espectro de energías que el potencial de velocidades de un fluido perturbado por una onda acústica en una cavidad bidimensional con la geometría del estadio. Este potencial de velocidades tiene condiciones en la frontera de Neumann y satisface la ecuación de Helmholtz. Por esta razón, para obtener el espectro de energías del estadio, nos concretamos a resolver la ecuación de Helmholtz dentro de un dominio

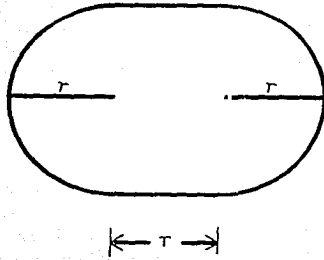


Figura 9. Estadio de Bunimovich con razón $r/a = 1$

\mathcal{R} , dado por la forma del estadio de Bunimovich, pidiendo que las funciones solución tengan derivada cero en la frontera del estadio $\partial\mathcal{R}$.

Es necesario que tomemos algunas precauciones al elegir la razón del tamaño de los segmentos rectos y el radio de los semicírculos, pues si se elige esta cantidad tal que los segmentos rectos sean mucho mayores que el radio, el número de estados llamados "bouncing ball states" (órbitas no aisladas del estadio), aumentan y pueden provocar alteraciones en la estadística de niveles del sistema. Estos estados corresponden a las órbitas no aisladas del estadio. Por esta razón, se eligió una razón $r/a = 1$ para el estadio de Bunimovich que aquí vamos a trabajar (ver fig. 9).

Por otro lado, es necesario notar que la geometría del estadio tiene 2 ejes de simetría, mostrados en la figura 10; por lo tanto, los modos de la región que resolveremos serán o bien simétricos o bien antisimétricos bajo una transformación de reflexión respecto a cada eje, debido a que las soluciones de la ecuación de Helmholtz bidimensional, son un producto directo de las eigenfunciones de dos espacios. Existen cuatro posibles tipos de eigenfunciones, las cuales bajo una transformación de reflexión respecto a ambos ejes de simetría, serán simétrica-simétrica, simétrica-antisimétrica, antisimétrica-simétrica

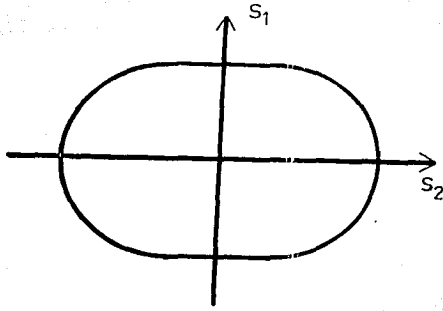


Figura 10. Ejes de simetría del estadio de Bunimovich

y antisimétrica-antisimétrica, respectivamente.

Cuando se hace estadística de las fluctuaciones de una mezcla de varias secuencias de niveles no correlacionadas (independientes), se obtienen distribuciones estadísticas que en el límite de un número infinito de secuencias mezcladas cumplen una estadística de tipo Poisson como se mencionó en el capítulo 2. De manera que si se superponen los espectros obtenidos con cada simetría de un sistema, se sabe que la distribución del espaciamiento de niveles será una mezcla del comportamiento de las fluctuaciones de los espectros independientes y del comportamiento tipo Poisson [17]. En la figura 11 (tomada de la referencia anterior), se muestra la distribución de primeros vecinos, obtenida para un estadio completo con condiciones de Dirichlet en la frontera.

Debido a lo anterior, es necesario desimetrizar nuestro billar, para lo cual basta con tomar un cuarto de estadio poniendo condiciones de Neumann y de Dirichlet en cada uno de los semiejes de simetría. Los cuatro posibles tipos de simetrías bajo una reflexión con respecto a los dos ejes mencionados, equivalen a pedir condiciones de Neumann o de Dirichlet en los semiejes del cuarto de estadio como se ilustra en la figura 12. Las condiciones impuestas en los semiejes, corresponden a las cuatro posibles

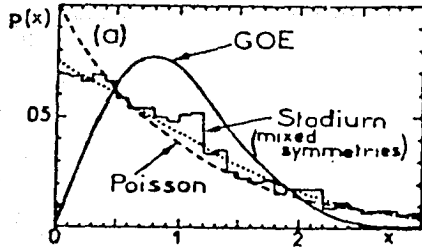


Figura 11. Distribución del espaciamento de primeros vecinos del estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Dirichlet con simetrías mezcladas

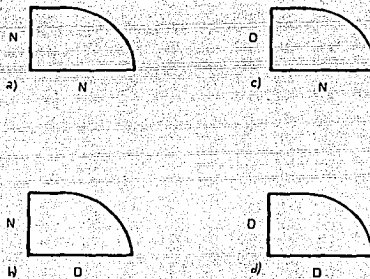


Figura 12. Un cuarto del estadio de Bunimovich con las cuatro posibles condiciones a la frontera en los semiejes de simetría

simetrías mencionadas arriba en el siguiente orden: condiciones Neumann-Neumann (N-N), Neumann-Dirichlet (N-D), Dirichlet-Neumann (D-N) y Dirichlet-Dirichlet (D-D).

Para calcular los espectros de energías correspondientes a cada caso, usaremos un programa basado en el método de elementos finitos, el cual tiene la posibilidad de poner las condiciones a la frontera necesarias en cada uno de los ejes, manteniendo la frontera original del estadio con condiciones de Neumann. El funcionamiento de esta paquetería

se explicará en el capítulo siguiente.

Una vez que se han obtenido los espectros numéricos de cada simetría, procederemos a obtener la distribución de primeros vecinos $P(S)$ y la curva de la varianza de la densidad de niveles $\Sigma^2(L)$ del estadio de Bunimovich, tomando la estadística promedio de las cuatro simetrías y algunas de ellas individualmente.

3 EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Debido a la no integrabilidad del estado de Bunimovich, es necesario recurrir al uso de algún método numérico para el cálculo aproximado de los espectros de energías correspondientes a las cuatro simetrías que posee este sistema. En nuestro caso, hicimos uso del método de los elementos finitos, ya que se sabe que este método introduce de manera natural las condiciones a la frontera de Neumann.

La idea fundamental de los elementos finitos consiste en hacer uso de un principio variacional dada una ecuación diferencial [18,19,20]. Para la ecuación de Helmholtz, la funcional correspondiente dentro de la región de interés es

$$F = \frac{1}{2} \int_R (\nabla\psi)^2 da, \quad (3.1.1)$$

sujeta a la restricción

$$\int_R \psi^2 da = 1. \quad (3.1.2)$$

En términos de multiplicadores de Lagrange, se quiere extremizar la siguiente expresión

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left(\int_R (\nabla\psi)^2 da - \lambda \left(\int_R \psi^2 da - 1 \right) \right). \quad (3.1.3)$$

Aquí R es la región donde se quiere resolver la ecuación de Helmholtz, ψ es una función definida dentro del dominio R y da es el elemento de área. Al extremizar la funcional (3.1.1) sobre R tenemos que

$$\delta F = 0, \quad (3.1.4)$$

es decir, buscamos la función ψ definida dentro del dominio R , que extremiza a la funcional F y que cumple con las condiciones a la frontera requeridas. Esta función ψ será también solución de la ecuación de Helmholtz (1.4.7)

$$\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0 \text{ con } \lambda = \omega^2$$

en el dominio R .

La paquetería de programación que usamos para obtener los espectros de energía del estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Neumann, fué elaborada por R. A. Méndez [22] y está basada en el método del elemento finito. Los detalles matemáticos usados están explicados con detalle en la referencia anterior. Nosotros nos concretamos a explicar a grandes rasgos las ideas principales que están involucradas en el método y el funcionamiento de la herramienta computacional que usamos.

Para la implementación del método numérico, es necesario discretizar la región R . En nuestro caso, esta región tiene la forma del estadio de Bunimovich. La forma de hacerlo en general, es la de sumergir la región R dentro de una malla con celdas básicas de forma determinada y ajustar los nodos de la malla en la frontera ∂R , lo cual provoca la deformación de los elementos de la malla en la frontera. El área de la región R es aproximadamente igual al número de nodos N de la malla necesarios para cubrir la región R . Después de discretizar la región R , los nodos de la malla son enumerados de forma conveniente para poder interpretar posteriormente las soluciones numéricas obtenidas con los programas.

La malla utilizada por Méndez tiene celdas básicas de forma hexagonal anisotrópicas con espaciamiento unitario entre nodo y nodo. En la figura 13 se puede ver al estadio discretizado con esta red.

El siguiente paso consiste en definir una base de funciones $\{\phi_i(x, y), i = 1, 2, \dots\}$ en términos de la cual obtendremos las soluciones aproximadas de la ecuación de Helmholtz. El uso de una base finita, restringe las funciones admisibles al subespacio generado por ésta.

Por simplicidad, la base que se utilizó es un conjunto no ortogonal de N funciones lineales continuas a trozos, definidas dentro de la región R . La función $\phi_i(x, y)$ de la base está centrada alrededor del i -ésimo nodo que discretiza nuestro billar, de manera que el número de elementos de la base es igual al número de nodos que discretiza la

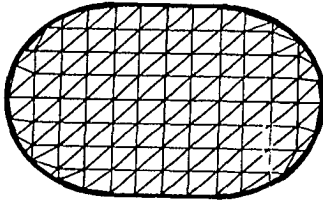


Figura 13. Estadio de Bunimovich discretizado con una red hexagonal anisotrópica

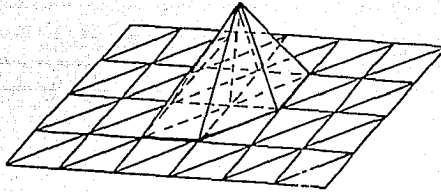


Figura 14. Elementos ϕ_i de la base de funciones

mall. La forma de los elementos de la base se ilustra en la figura 14.

Como se puede ver, las funciones base ϕ_i son pirámides de altura unitaria en el nodo i que decrecen linealmente hasta ser nulas en cada una de las líneas que conectan los seis nodos vecinos al i y valen cero en el resto de la región R encerrada por la frontera de nuestro billar.

Al restringir las eigenfunciones solución ψ de nuestro sistema al subespacio generado por la base descrita, los únicos parámetros libres (parámetros variacionales), que quedan

por ajustar son los coeficientes c_i de la combinación lineal

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x, y). \quad (3.1.5)$$

Al introducir la forma de las funciones admisibles ψ dada por la expresión (3.1.5) en (3.1.4), el problema de extremizar la funcional \mathcal{F} se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales de $N \times N$ de la forma

$$Ax = \lambda Bx, \quad (3.1.6)$$

con N el número de puntos que discretizan la región R . A y B son matrices de $N \times N$ cuyos elementos se calculan a partir de las funciones base $\{\phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$

$$A_{ij} = \int_R \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j da \quad (3.1.7)$$

$$B_{ij} = \int_R \phi_i \phi_j da \quad (3.1.8)$$

y x es un vector que contiene los coeficientes $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ de la eigenfunción solución expresada en la base. La matriz A está directamente asociada con el operador Laplaciano ∇^2 de la ecuación de Helmholtz y la matriz B aparece en el sistema debido a la no ortogonalidad de la base escogida.

La paquetería computacional que se empleó nos hace todo el trabajo anterior pues sólo bastó dar las dimensiones elegidas para el estadio de Bunimovich y automáticamente se obtienen las matrices A y B correspondientes. El siguiente paso consiste en resolver el sistema (3.1.6), lo cual no presenta mucho problema ya que existen rutinas adecuadas para resolver tal sistema aprovechando al máximo las condiciones de las matrices.

En nuestro caso, conviene discretizar nuestro sistema con el mayor número posible de nodos de la malla. Esto se debe a que estamos interesados en obtener con buena aproximación los estados de altas energías del límite semiclásico, donde la densidad de

estados es casi homogénea. Se sabe del análisis de Fourier que para poder distinguir una frecuencia k en una función unidimensional discretizada en un dominio L , se necesita contar al menos con un número de puntos $5k$. Sin embargo, por cuestiones de capacidad de la memoria de las computadoras, hay un límite en el número de puntos usados para discretizar la región R , pues las dimensiones de las matrices aumentan como N^2 .

Para resolver el sistema (3.1.6) numéricamente, se usó una rutina existente en las bibliotecas EISPACK de la supercomputadora CRAY YMP-4/432 de la U.N.A.M. Esta rutina resuelve de manera exacta el sistemas de ecuaciones lineales dado por (3.1.6). La máxima dimensión de las matrices A y B que se pudieron guardar en la memoria R.A.M. de la CRAY fue del orden de 3600×3600 , lo cual es suficiente para tener alrededor de 70 niveles de energía confiables del total de niveles obtenidos. El número total de niveles confiables en la estadística promedio sobre las cuatro simetrías del estadio de Bunimovich sería entonces aproximadamente 280.

4 RESULTADOS NUMERICOS

En los capítulos anteriores, se explicó que para nuestro trabajo es importante obtener el mayor número posible de estados de altas frecuencias con buena aproximación (con error del orden de un 10 por ciento de la separación promedio de niveles), para que la estadística de las fluctuaciones del estadio de Bunimovich describa lo mejor posible al sistema.

Lo primero que se hizo, fue comparar el espectro de frecuencias numérico del estadio discretizado con el mayor número posible de puntos, con la fórmula de Weyl mencionada en el capítulo 2, correspondiente al cuarto de estadio con simetría Neumann-Neumann, como se ve en la figura 4.1a. Se verifica que el número de estados confiables es aproximadamente 70, lo cual concuerda con la estimación hecha en función del número de puntos de la malla, que en este caso es de 3501.

En la figura 4.1b se reafirma la dependencia del número de estados confiables en función del número de puntos de la malla para el cuarto de estadio con simetría Neumann-Neumann, discretizado esta vez con 1127 puntos. Nuevamente, los estados confiables comparados con la fórmula de Weyl concuerdan con lo esperado que es del orden de 23 estados, pues las dos curvas (teórica y numérica), se comienzan a despegar alrededor del estado número 30. Para el caso de la figura 4.1a, esto sucede cerca del estado 70.

La desviación de la densidad numérica respecto de la teórica ocurre en forma muy lenta y uniforme. Esto da lugar a la sospecha de que quizás haya un error sistemático que afecta a todos los estados en primera aproximación de la misma manera, y que depende sólo de la energía en forma suave. Intuitivamente tal error se podría deber a la discontinuidad de la derivada en las funciones aproximadas. Esta propiedad es inherente al método y podría dar lugar a una sobrestimación sistemática de la energía

cinética. Esta idea es compatible con lo que se observa del comportamiento numérico de $N(E)$ respecto de la fórmula de Weyl, ya que si el método sobreestima la energía, la densidad de estados disminuye provocando que la gráfica numérica quede por debajo del comportamiento promedio, lo cual en efecto ocurre.

Con la finalidad de hacer evidente el error sistemático introducido por el método del elemento finito, comparamos los espectros $E_1(i)$ y $E_2(i)$ obtenidos para la simetría Neumann-Neumann del cuarto de estadio discretizado con 1127 y 3501 puntos respectivamente, y se pudo ver que las energías no corresponden. Nosotros proponemos un ajuste cuadrático en la energía que corrija la discrepancia entre los estados de ambos espectros en una ventana de energías alrededor del estado j

$$E'_1(i) = [1 + \gamma E_1(i)]E_1(i), \quad (4.1.1)$$

donde $E'(i)$ es la energía ajustada correspondiente al nivel i del espectro $E_1(i)$ y γ es un factor que depende localmente de éstos:

$$\gamma = (E'(j)/E(j) - 1)/E(j) \quad (4.1.2)$$

y es tal que $E'_1(j) = E_2(j)$.

El ajuste se hizo alrededor de tres estados distintos. Para el ajuste alrededor del estado 54 (tabla I), se ve que la mayoría de las energías de ambos espectros en esa ventana concuerdan muy satisfactoriamente en las primeras dos cifras significativas. Si se hace el ajuste para un nivel más alto, como el 105 (tabla II), la diferencia de las energías de ambos espectros sigue siendo aceptable. Finalmente, para el ajuste alrededor del nivel 165 (tabla III) comenzamos a tener algunos estados como los del nivel 158 y 162 que se disparan, es decir, el $\Delta E(i)$ es del orden de la separación promedio de los niveles. Podemos ver que, haciendo la corrección del error sistemático, el número de niveles de energía que se pueden usar es mayor que el indicado por la fórmula de Weyl por un factor de aproximadamente 3.

Ahora podemos proceder al análisis estadístico de los espectros. Usaremos primero los niveles confiables dados por la fórmula de Weyl, estando conscientes de que por ser pocos, tendremos una mala estadística. Posteriormente tomamos en cuenta un intervalo de energías mucho mayor. El ajuste mencionado arriba no se tiene que hacer explícitamente, ya que está implícito en el desdoblamiento de los espectros, que tenemos que hacer para analizar las fluctuaciones espectrales, como se discutió en el capítulo 2.

En las figuras 4.2, se muestran las gráficas de la distribución de separación de primeros vecinos en el espectro $P(s)$ y la fluctuación de la densidad promedio de niveles $\Sigma^2(L)$, correspondiente al cuarto de estadio de Bunimovich discretizado con 3501 puntos y con simetría Neumann-Neumann. Se toman en cuenta los niveles de energía de 10 a 100 y se hace el desdoblamiento de niveles respecto al comportamiento promedio dado por Weyl. Se puede ver que el histograma de la $P(s)$ se aproxima a la distribución de Wigner aunque con mala estadística debido a los pocos niveles usados para calcularla. La $\Sigma^2(L)$ concuerda bien en casi todo el intervalo de 0 a 1; después, la curva numérica cae por debajo de la teórica, lo cual concuerda con la rigidez de largo alcance debida a la no-existencia de órbitas periódicas más cortas que una mínima característica del sistema [13,14]. Esta depresión de la Σ^2 se va a frecuencias cada vez mayores si podemos incluir más niveles en nuestra estadística y cortar más niveles al principio.

En las figuras 4.3, se muestra el comportamiento promedio de la $P(s)$ y de la $\Sigma^2(L)$ sobre las cuatro simetrías del estadio tomando los niveles de 10 a 100 para cada simetría. Se nota que ambas curvas son más suaves que si se toma sólo la correspondiente a una simetría, como se ve en las figuras 4.2. Además, el ajuste con las distribuciones teóricas mejora un poco debido a que el promedio nos da la estadística sobre 360 estados (cada simetría contribuye con 90 estados).

Estos resultados, aún no son satisfactorios a pesar de la disminución de las fluctuaciones. Por consecuencia trataremos de aprovechar la validez de las separaciones

de niveles más allá del nivel 100 que vimos arriba. Esto se muestra para la simetría Neumann-Neumann en las figuras 4.4 donde se tomaron los niveles de 50 a 350 desdoblados con respecto a la densidad promedio numérica ajustada con un polinomio de cuarto grado. Se puede ver, que la $P(s)$ fluctúa alrededor de la distribución de Wigner de manera más satisfactoria, mientras que en la $\Sigma^2(L)$, se ve que la depresión de la curva numérica debida a la rigidez de largo alcance ya no se observa en este intervalo $0 \leq L \leq 5$. El comportamiento promedio de las cuatro simetrías del estadio, se ve en las figuras 4.5, las fluctuaciones en la $P(s)$ son mucho más suaves, y el ajuste es mejor. La $\Sigma^2(L)$ concuerda con la aproximación teórica en un intervalo más grande ($0 \leq L \leq 2$). Más allá de este intervalo, la Σ^2 parece estar un poco arriba del valor teórico, aunque el efecto es en el límite del significado estadístico. Podría ser una primera influencia de los estados que se empiezan a salir del escalamiento.

Se hizo la misma estadística de niveles de 50 a 1000, para averiguar si aun en este intervalo la estadística de niveles refleja las propiedades del sistema. Las gráficas correspondientes se muestran en las figuras 4.6 para la simetría Neumann-Neumann y en las figuras 4.7 para el promedio tomado sobre las cuatro simetrías. En ambas figuras se notan claramente desviaciones en la $P(s)$. Distancias muy cortas y muy largas ocurren con mayor frecuencia que en el G.O.E., mientras que las cercanas al promedio disminuyen. Por su parte, la $\Sigma^2(L)$ numérica se encuentra significativamente por arriba de la teórica para $L > 1$. Esto concuerda con el efecto provocado por los niveles que se disparan porque se acercan o se alejan más de sus vecinos incrementando la contribución en los intervalos de los extremos de la distribución y disminuyéndola en otros intervalos. A pesar de esto, ambas estadísticas todavía se parecen mucho más a las de un G.O.E. que a las de un ensemble de tipo Poisson.

Para analizar hasta qué punto el uso del método de elemento finito distorsiona el comportamiento estadístico de los sistemas si se toman intervalos de energía muy

altos, aplicamos el método a un rectángulo, que es un sistema integrable sencillo, cuyo espectro numérico puede compararse con el exacto. La distribución de primeros vecinos correspondiente a un rectángulo es de tipo Poisson y la Σ^2 es lineal en L . Se sabe además que las fluctuaciones de la $P(s)$ son extraordinariamente grandes. Para nuestro cálculo se discretizó un rectángulo con 3475 puntos y, para minimizar las fluctuaciones de las estadísticas la razón de los lados se eligió no sólo irracional sino de acuerdo a la sección áurea.

El número de niveles confiables como se puede ver en la figura 4.8 es del del orden de 70 estados igual que para el estadio de Bunimovich correspondiente. Se hizo el ajuste de los niveles obtenidos numéricamente con respecto al espectro teórico, alrededor de los niveles 60, 120 y 240. En las tablas IV, V y VI, se muestran las ventanas alrededor de los niveles ajustados.

La $P(s)$ y la $\Sigma^2(L)$ promediados sobre las cuatro simetrías, obtenidas con los niveles del 50 al 350 se muestran en las figuras 4.9. Debido a las grandes fluctuaciones del espectro, fue necesario hacer el desdoblamiento del espectro con respecto a un polinomio de grado ocho. La distribución de primeros vecinos, se ajusta muy bien a la curva de tipo Poisson. La varianza de la densidad de estados no es muy buena, pero en el intervalo $0 \leq L \leq 1$ es lineal con L . Para el rango de niveles de 50 a 1000, las curvas obtenidas se muestran en las figuras 4.10. Como se esperaba, la distribución de primeros vecinos ha comenzado a distorsionarse en los primeros intervalos. Finalmente, se tomó una ventana de energías muy altas, que va del nivel 1000 al 2000 y con ellos se obtuvieron las gráficas de las figuras 4.11, en las cuales es evidente que no corresponden al comportamiento estadístico de las fluctuaciones de los niveles del rectángulo.

Considerando los resultados para el rectángulo, podemos decir que el método de elemento finito parece conservar las distancias relativas de los niveles más allá de sus valores absolutos y las propiedades estadísticas de los mismos quizá todavía un poco

más lejos.

CONCLUSIONES

El objetivo planteado al inicio de este trabajo, se cumplió de manera satisfactoria. Los resultados presentados en la sección anterior, confirman que las fluctuaciones espectrales del sistema acústico análogo del estadio de Bunimovich, cumplen una estadística de tipo G.O.E. a semejanza del sistema cuántico correspondiente.

Al margen del resultado anterior, el uso del método del elemento finito, para el cálculo de estados con condiciones en la frontera de Neumann, da el número de niveles confiables que se espera en función del número de puntos que discretizan la región. Asimismo, las fluctuaciones estadísticas de los niveles del espectro numérico de un sistema obtenido a partir de este método, reflejan el compartamiento del sistema en un intervalo de energías del orden de tres veces el intervalo de estados confiables y quizá más.

Una pregunta que queda planteada es, ¿ cómo introduce el método de elemento finito el error sistemático encontrado?

BIBLIOGRAFIA

- [1] Doron E. and Smilansky U. (1990). "Experimental Demonstration of Chaotic Scattering of Microwaves", *Phys. Rev. Lett.*, **25**, vol. 65, 3072-3075.
- [2] Sridhar S. (1991). "Experimental Observation of Scattered Eigenfunctions of Chaotic Microwaves Cavities", *Phys. Rev. Lett.*, **7**, vol. 67, 785-788.
- [3] Kolmogorov A. N. (1954), *Dokl. Akad. Nauk*, **98**, 527-530.
- [4] Arnol'd V. I. (1963), *Russ. Math. Surv.*, **18**, No. 5, 13-139; No. 6, 61-196.
- [5] Moser J. (1962), *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen I*, 1-20.
- [6] Sinai, Y. G. (1970). "Dynamical Systems with Elastic Reflections", *Russ. Math. Surv.*, **25**, 137.
- [7] Bunimovich, L. A. (1979). "On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards", *Commun. Math. Phys.* **65**, 295.
- [8] Weaver R. L. (1989). "Spectral Statistics in Elastodynamics", *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**(3), 1005.
- [9] Cheon T. and Cohen T. D., (1989). "Quantum Level Statistics of Pseudointegrable Billiards", *Am. Phys. Soc.*, **24**, vol. 62, 2769-2772.
- [10] Bohigas O., Giannoni M. J. and Schmit C., (1984). "Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws", *Am. Phys. Soc.*, **1**, vol. 52, 1-4.
- [11] Bohigas O., (1991). "Random Matrix Theories and Chaotic Dynamics", en Chaos and Quantum Physics (eds. Giannoni, Voros, Zinn-Justin). *Les Houches, Session LII* (1989). Elsevier Science Publishers B.V., (1991).

- [12] Berry M.V. and Tabor M., (1977). "Level Clustering in the Regular Spectrum", *Proc. R. Soc. London, A* 356.
- [13] Seligman T.H. and Verbaarschot J. J. M., (1984). *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 215.
- [14] Seligman T.H. and Verbaarschot J. J. M., (1985). *J. Phys. A*, **18**, 2751.
- [15] Brody, T. A., J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong (1981). "Random-Matrix Physics: Spectrum and Strength Fluctuations". *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385.
- [16] Berry M., "Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion", en *Chaotic Behaviour of Deterministic Systems* (eds. Iooss, Helleman, Stora). *Les Houches Session XXXVI* (1981), North-Holland Publishing Company, New York, (1983).
- [17] Bohigas O., Giannoni M. J. and Schmit C., (1986). "Spectral Fluctuations of Classically Chaotic Quantum Systems?". *Lecture Notes in Physics*, **263**, Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics, proceedings, Cuernavaca México, 1986. (Ed. by T.H. Seligman and H. Nishioka, Springer-Verlag).
- [18] Morj, M. (1983). "The Finite Element Method and its Applications", Macmillan Publishing Company, New York.
- [19] Strang, G. and G. Fix (1973). "An Analysis of the Finite Element Method". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [20] Amazigo, J.C. and L. A. Rubinfeld (1983). "Cálculo avanzado con aplicaciones a la ingeniería y a la física", McGraw-Hill, México.
- [21] Elmore W. and Heald M. (1985). "Physics of waves", ed. Dover, New York.
- [22] Méndez R. A. (1992), "Cálculo de Modos Resonantes en Cavidades Arbitrarias Bidimensionales", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

TABLA I
 SIMETRIA N-N DEL ESTADIO CON 1127 Y 3501 PUNTOS
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 51

i	$E_2(i)$	$E_4(i)$	$E_1^2(i)$	$\Delta E(i)$
44	0.1392337	0.1423098	0.1372201	1.4159833E - 02
45	0.1438839	0.1471658	0.1420009	1.3086941E - 02
46	0.1465667	0.1527531	0.1468893	2.2010130E - 03
47	0.1503151	0.1581671	0.1475181	1.8105993E - 02
48	0.1512352	0.1576141	0.1513712	8.9928077E - 01
49	0.1562008	0.1624410	0.1558098	2.5031343E - 03
50	0.1575379	0.1643057	0.1575211	1.0180326E - 01
51	0.1613612	0.1698920	0.1626386	1.0198631E - 02
52	0.1671431	0.1725512	0.1650689	1.2409796E - 02
53	0.1735968	0.1786103	0.1705933	1.7301516E - 02
54	0.1755123	0.1810225	0.1755123	0.0000000E + 00
55	0.1811813	0.1903149	0.1812128	1.4795135E - 03
56	0.1811501	0.1926697	0.1833409	4.3912016E - 03
57	0.1863301	0.1937196	0.1842889	1.0951703E - 02
58	0.1891157	0.1956308	0.1860131	1.7963616E - 02
59	0.1918880	0.2000336	0.1899781	9.9532623E - 03
60	0.1915311	0.2017006	0.1911701	1.8511891E - 03
61	0.2015708	0.2057716	0.1951336	3.1935170E - 02
62	0.2026122	0.2108101	0.1996688	1.4673190E - 02
63	0.2066826	0.2178661	0.2059381	3.6021022E - 03
64	0.2119872	0.2217225	0.2093682	1.2351512E - 02

TABLA II
 SIMETRIA N-N DEL ESTADIO CON 1127 Y 3501 PUNTOS
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 105

i	$E_2(i)$	$E_1(i)$	$E_1'(i)$	$\Delta E(i)$
95	0.3256113	0.3173951	0.3237915	5.6712109E - 03
96	0.3273737	0.3511192	0.3298801	7.6560066E - 03
97	0.3339766	0.3583615	0.3332197	2.1765251E - 03
98	0.3376325	0.3633998	0.3375712	1.7265324E - 01
99	0.3395686	0.3659511	0.3397619	5.6933321E - 01
100	0.3158757	0.3679163	0.3111118	1.2810729E - 02
101	0.3188887	0.3751353	0.3176118	3.6513086E - 03
102	0.3529366	0.3783718	0.3503769	7.2525539E - 03
103	0.3576517	0.3861491	0.3572136	1.1491138E - 03
104	0.3621222	0.3891993	0.3598309	7.1499813E - 03
105	0.3618151	0.3951227	0.3618151	0.0000000E + 00
106	0.3701211	0.4018283	0.3702520	1.6531903E - 01
107	0.3726501	0.4026159	0.3709110	1.5862696E - 03
108	0.3771109	0.4072119	0.3717838	6.9607813E - 03
109	0.3818765	0.4145143	0.3809379	2.4578478E - 03
110	0.3861336	0.4170131	0.3830055	8.8711269E - 03
111	0.3883111	0.4175993	0.3834957	1.2177202E - 02
112	0.3887771	0.4226311	0.3877015	2.7611761E - 03
113	0.3931310	0.4271766	0.3917107	3.5140517E - 03
114	0.4013026	0.4280198	0.3922180	2.2637811E - 02
115	0.4021268	0.4351790	0.3981136	1.0613175E - 02

ESTA TESIS NO DEBE
 SALIR DE LA BIBLIOTECA

TABLA III
 SIMETRIA N-N DEL ESTADIO CON 1127 Y 3501 PUNTOS
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 165

i	$E_2(\xi)$	$E_4(\xi)$	$E_4^2(\xi)$	$\Delta E(\xi)$
155	0.5627705	0.6248766	0.5633902	1.1011763E - 03
156	0.5629528	0.6280311	0.5659223	5.2748709E - 03
157	0.5675957	0.6374214	0.5734114	1.0298996E - 02
158	0.5689107	0.6410867	0.5763688	1.3109122E - 02
159	0.5746337	0.6455522	0.5799296	9.2160841E - 03
160	0.5770357	0.6484326	0.5822231	8.9807243E - 03
161	0.5803181	0.6551486	0.5875605	1.2427195E - 02
162	0.5827980	0.6592702	0.5908290	1.3780093E - 02
163	0.5933273	0.6652737	0.5955804	3.7974238E - 03
164	0.5951114	0.6670235	0.5969630	2.6058762E - 03
165	0.6035591	0.6753880	0.6035591	0.0000000E + 00
166	0.6063920	0.6852292	0.6112921	8.0807123E - 03
167	0.6109263	0.6872339	0.6128636	3.1711352E - 03
168	0.6130280	0.6916437	0.6163159	5.3633951E - 03
169	0.6157125	0.6957700	0.6195107	6.1684661E - 03
170	0.6181313	0.7017208	0.6241819	9.7886100E - 03
171	0.6238999	0.7026165	0.6248796	1.5703186E - 03
172	0.6279358	0.7074798	0.6286630	1.1580129E - 03
173	0.6342126	0.7085078	0.6294618	7.4908449E - 03
174	0.6350743	0.7159594	0.6352420	1.4514658E - 03
175	0.6415100	0.7213318	0.6393984	3.2916302E - 03

TABLA IV
 SIMETRIA N-N DEL RECTANGULO CON 3500 PUNTOS COMPARADO
 CON EL ESPECTRO TEORICO
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 60

ℓ	$E_2(\ell)$	$E_1(\ell)$	$E_1^T(\ell)$	$\Delta E(\ell)$
50	0.1587629	0.1598038	0.1586237	8.7682100E - 01
51	0.1629722	0.1610755	0.1628315	8.6331757E - 01
52	0.1651876	0.1698663	0.1685329	1.8101926E - 02
53	0.1691622	0.1712083	0.1698538	2.3108546E - 03
54	0.1697751	0.1714354	0.1700773	1.7799757E - 03
55	0.1699877	0.1736326	0.1722394	1.3216250E - 02
56	0.1703006	0.1756999	0.1712734	2.3328153E - 02
57	0.1760695	0.1812281	0.1797104	2.0678794E - 02
58	0.1798094	0.1821319	0.1805990	4.3913033E - 03
59	0.1905086	0.1933438	0.1916161	5.8149449E - 03
60	0.1924373	0.1911797	0.1924373	0.0000000E + 00
61	0.1949527	0.2013004	0.1994279	2.2955343E - 02
62	0.1969595	0.2018223	0.1999400	1.5132556E - 02
63	0.2020164	0.2100902	0.2080506	2.9716935E - 02
64	0.2078719	0.2104737	0.2084266	2.6708217E - 03
65	0.2083108	0.2169248	0.2147503	3.0764552E - 02
66	0.2143644	0.2184021	0.2161979	8.5672773E - 03
67	0.2261117	0.2286727	0.2262563	6.3951081E - 01
68	0.2264246	0.2290197	0.2265960	7.5695466E - 01
69	0.2265981	0.2304516	0.2277068	4.8928303E - 03
70	0.2272210	0.2333328	0.2308169	1.5812421E - 02

TABLA V
 SIMETRIA N-N DEL RECTANGULO CON 3500 PUNTOS COMPARADO
 CON EL ESPECTRO TEORICO
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 120

i	$E_2(i)$	$E_1(i)$	$E_3(i)$	$\Delta E(i)$
110	0.3669081	0.3863238	0.3777264	2.9485047E - 02
111	0.3723470	0.3928847	0.3839928	3.1276722E - 02
112	0.3757178	0.3942814	0.3853261	2.5573179E - 02
113	0.3771771	0.3949301	0.3859456	2.3247698E - 02
114	0.3843712	0.4062025	0.3966976	3.2069050E - 02
115	0.3944837	0.4077153	0.3981394	9.2670545E - 03
116	0.3963732	0.4095097	0.3998493	8.7697227E - 03
117	0.3982235	0.4103874	0.4006856	6.1827563E - 03
118	0.4028410	0.4110413	0.4013085	3.8042180E - 03
119	0.4042411	0.4123916	0.4025948	4.0799365E - 03
120	0.4054959	0.4154380	0.4054959	0.0000000E + 00
121	0.4084534	0.4227116	0.4124183	9.7071072E - 03
122	0.4117903	0.4316833	0.4209485	2.2239916E - 02
123	0.4154689	0.4329350	0.4221378	1.6051492E - 02
124	0.4158431	0.4401705	0.4290094	3.1661723E - 02
125	0.4164078	0.4404870	0.4293098	3.0984029E - 02
126	0.4220763	0.4434491	0.4318364	2.3123974E - 02
127	0.4252906	0.4448731	0.4334722	1.9237602E - 02
128	0.4286415	0.4461751	0.4344704	1.4144343E - 02
129	0.4306735	0.4468706	0.4353671	1.0898273E - 02
130	0.4323674	0.4528701	0.44110557	2.0091648E - 02

TABLA VI
 SIMETRÍA N-N DEL RECTÁNGULO CON 3500 PUNTOS COMPARADO
 CON EL ESPECTRO TEÓRICO
 AJUSTE ALREDEDOR DEL ESTADO 240

i	$E_2(i)$	$E_1(i)$	$E'_1(i)$	$\Delta E(i)$
230	0.7988894	0.8679081	0.7890667	1.2295477E - 02
231	0.7992142	0.8684823	0.7895365	1.2109029E - 02
232	0.8081856	0.8695693	0.7901258	2.1974903E - 02
233	0.8083369	0.8712411	0.7917930	2.0466620E - 02
234	0.8121329	0.8831102	0.8017272	1.2812829E - 02
235	0.8144800	0.8861728	0.8039781	1.2891019E - 02
236	0.8149443	0.8869243	0.8045902	1.2705287E - 02
237	0.8255432	0.8896957	0.8068462	2.2648146E - 02
238	0.8303732	0.9077208	0.8214803	1.0709586E - 02
239	0.8314855	0.9098401	0.8231964	9.9690240E - 03
240	0.8333632	0.9224193	0.8333632	0.0000000E + 00
241	0.8361602	0.9233479	0.8341124	2.8067892E - 03
242	0.8429502	0.9236114	0.8343250	1.0232169E - 02
243	0.8453652	0.9396436	0.8472306	2.2066047E - 03
244	0.8514197	0.9407188	0.8480942	3.9057850E - 03
245	0.8574454	0.9417294	0.8489056	9.9595794E - 03
246	0.8648351	0.9426312	0.8496296	1.7581968E - 02
247	0.8665630	0.9466189	0.8528287	1.5819212E - 02
248	0.8690392	0.9470735	0.8531932	1.8233879E - 02
249	0.8696651	0.9515071	0.8567460	1.1855223E - 02
250	0.8752724	0.9521322	0.8572464	2.0594725E - 02

PIES DE FIGURAS

Figura 4.1a) Función $N(E)$ para el cuarto de estadio de Bunimovich con simetría $N - N$ discretizado con 3501 puntos. La curva escalonada corresponde a la gráfica numérica y la curva suave al comportamiento promedio dado por la fórmula de Weyl.

Figura 4.1b) Función $N(E)$ para el cuarto de estadio con simetría $N - N$ discretizado con 1127 puntos. Nuevamente, la gráfica escalonada es la numérica y la suave la teórica.

Figura 4.2a) Distribución de primeros vecinos $P(s)$ para el cuarto de estadio con simetría $N - N$ discretizado con 3501 puntos. Se usaron los niveles de energía del estado 10 al 100, desdoblados con respecto a la fórmula de Weyl.

Figura 4.2b) Varianza de la densidad promedio de niveles $\Sigma^2(L)$ para el cuarto de estadio de 3501 puntos. Se usaron los niveles de energía del 10 al 100 desdoblados con respecto a la fórmula de Weyl.

Figura 4.3a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ sobre las cuatro simetrías ($N - N$, $N - D$, $D - N$, $D - D$) del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos, tomando sólo los estados 10 a 100 para cada simetría, desdoblados con respecto a la fórmula de Weyl.

Figura 4.3b) Función $\Sigma^2(L)$ del el cuarto de estadio de 3501 puntos promediadas sobre las cuatro simetrías, usando los niveles de energía para cada simetría y desdoblados con respecto a la fórmula de Weyl.

Figura 4.4a) Distribución de primeros vecinos $P(s)$ para el cuarto de estadio con simetría $N - N$ discretizado con 3501 puntos. Se usaron los niveles de energía del estado 50 al 350 desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.4b) Función $\Sigma^2(L)$ para el cuarto de estadio con simetría $N - N$ discretizado con 3501 puntos. Se usaron los niveles de energía del estado 50 al 350 desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.5a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ sobre las cuatro simetrías del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 350 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.5b) Comportamiento promedio del la $\Sigma^2(L)$ tomado sobre las cuatro simetrías del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 350 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.6a) Distribución de primeros vecinos $P(s)$ para la simetría $N - N$ del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.6b) Función $\Sigma^2(L)$ para la simetría $N - N$ del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.7a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ de las cuatro simetrías del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 de cada espectro desdoblados cada uno con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.7b) Comportamiento promedio del la $\Sigma^2(L)$ tomado sobre las cuatro simetrías del cuarto de estadio discretizado con 3501 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de cuarto grado.

Figura 4.8 Función $N(E)$ para un billar rectangular con simetría $N - N$ discretizado con 3475 puntos. La curva escalonada corresponde a la gráfica numérica y la curva suave al comportamiento promedio dado por la fórmula de Weyl.

Figura 4.9a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 50 a 350 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

Figura 4.9b) Promedio de la $\Sigma_2(L)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 50 a 350 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

Figura 4.10a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

Figura 4.10b) Promedio de la $\Sigma_2(L)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 50 a 1000 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

Figura 4.11a) Promedio de la distribución de primeros vecinos $P(s)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 1000 a 2000 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

Figura 4.11b) Promedio de la $\Sigma_2(L)$ de las cuatro simetrías del rectángulo de 3475 puntos. Se usaron los estados 1000 a 2000 de cada espectro desdoblados con respecto a un ajuste polinomial de octavo grado.

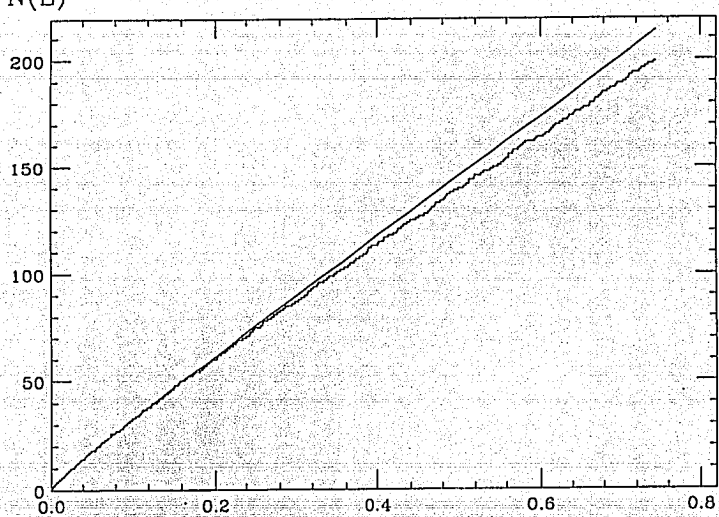


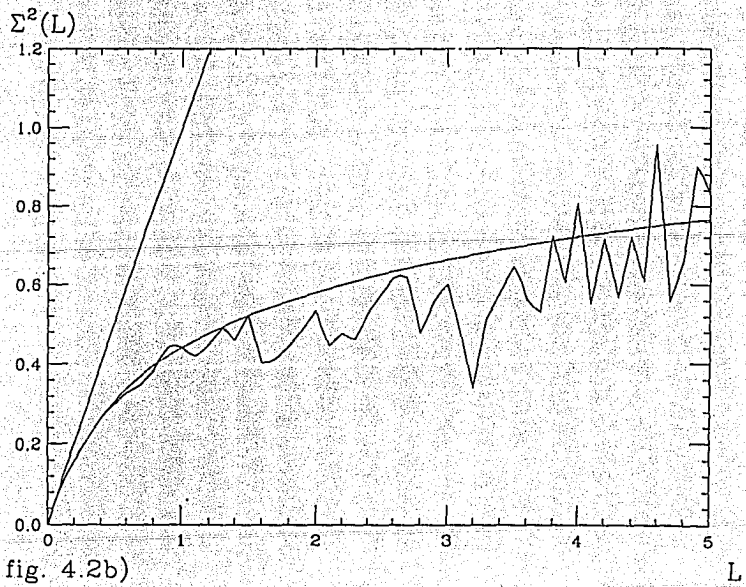
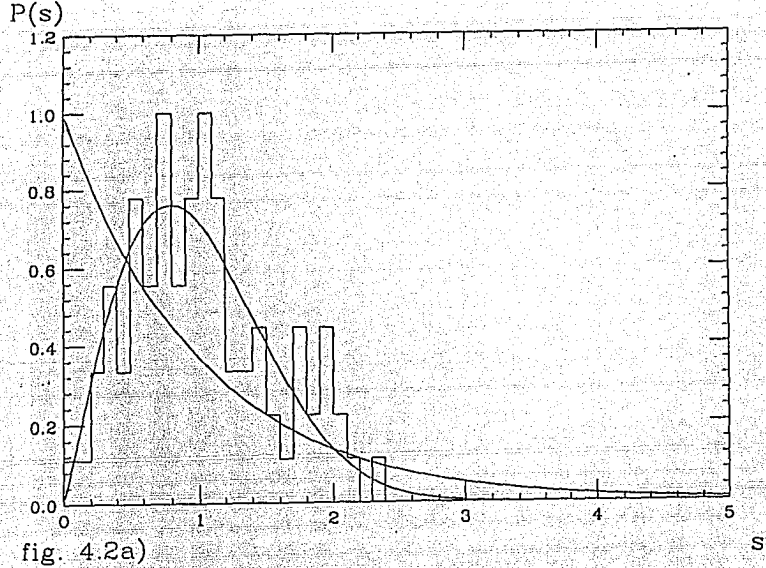
fig. 4.1a)

E



fig. 4.1b)

E



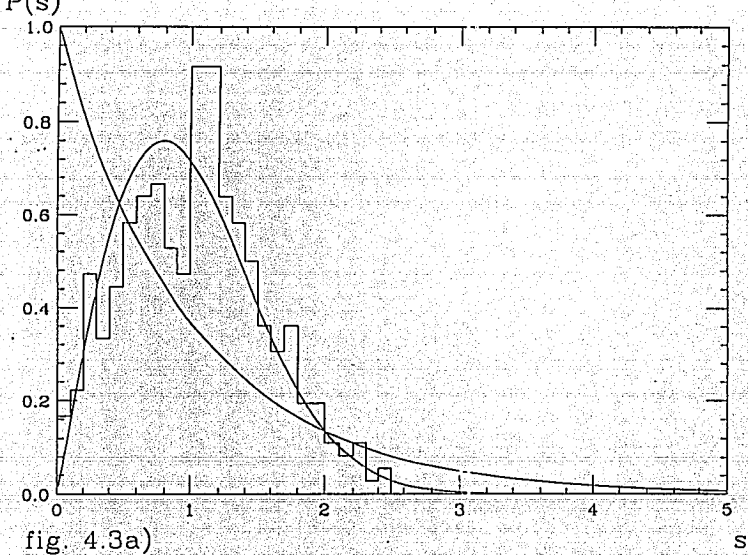


fig. 4.3a)

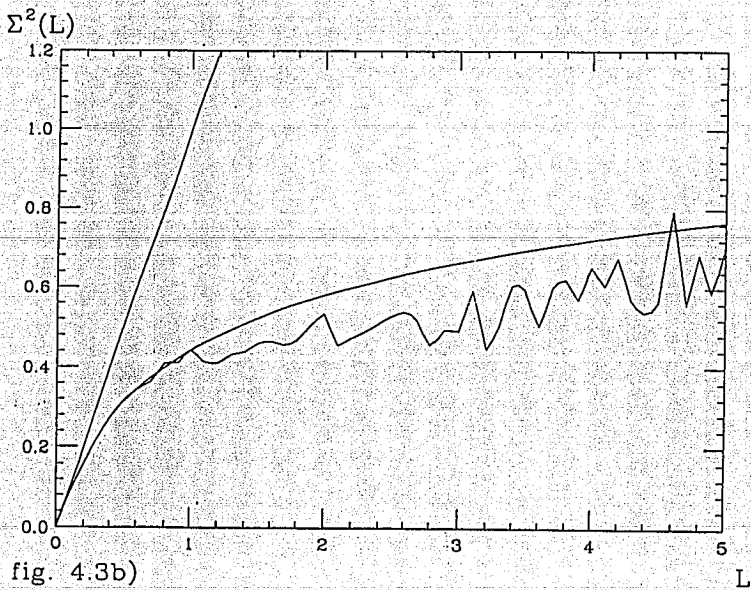


fig. 4.3b)

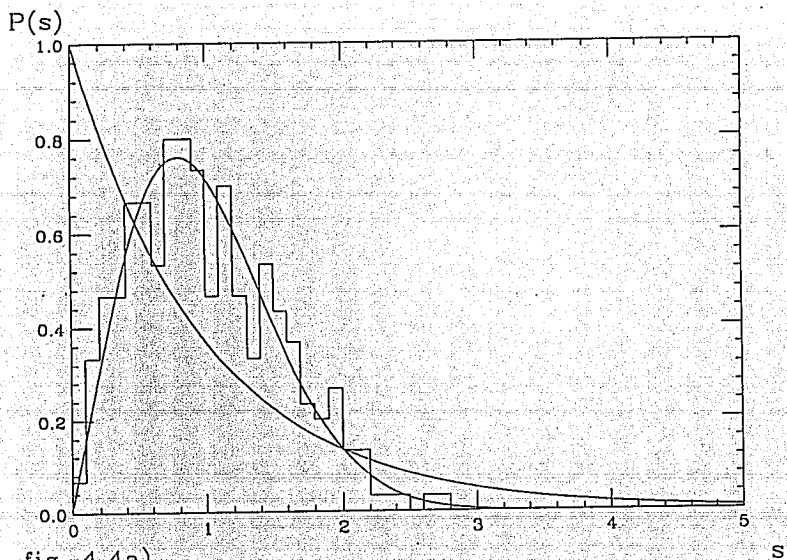


fig. 4.4a)

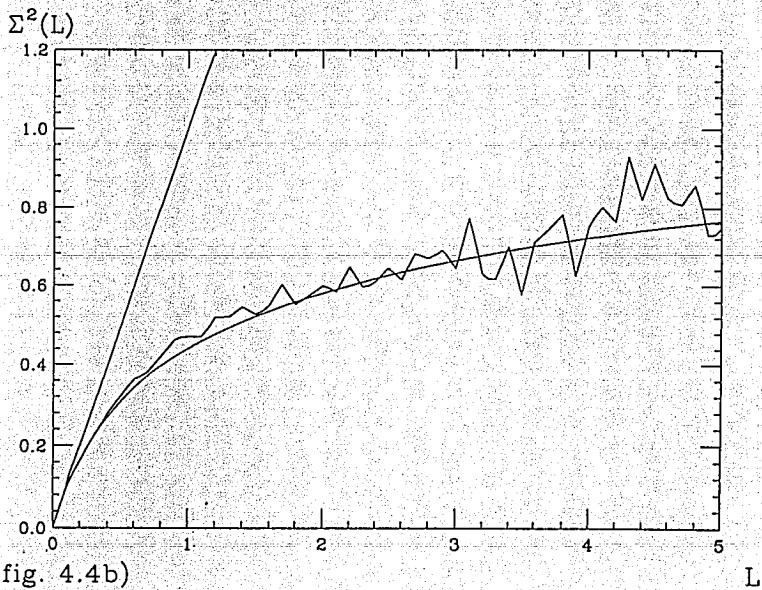


fig. 4.4b)

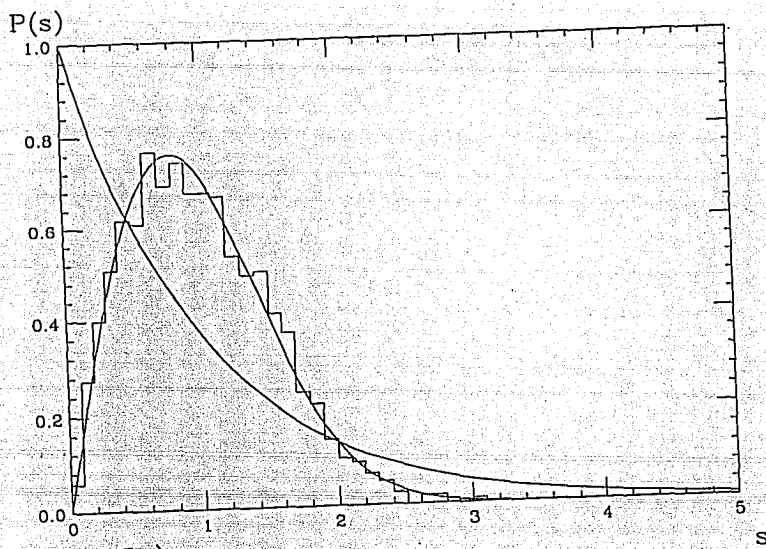


fig. 4.5a)

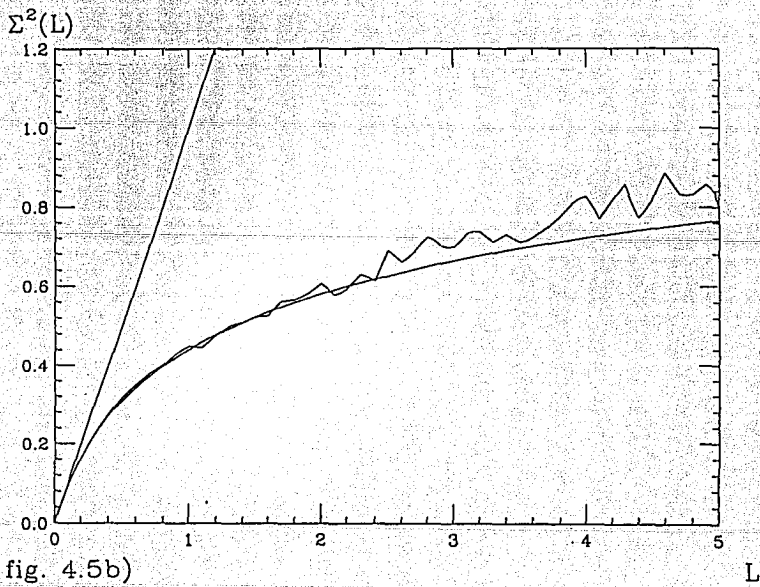


fig. 4.5b)

L

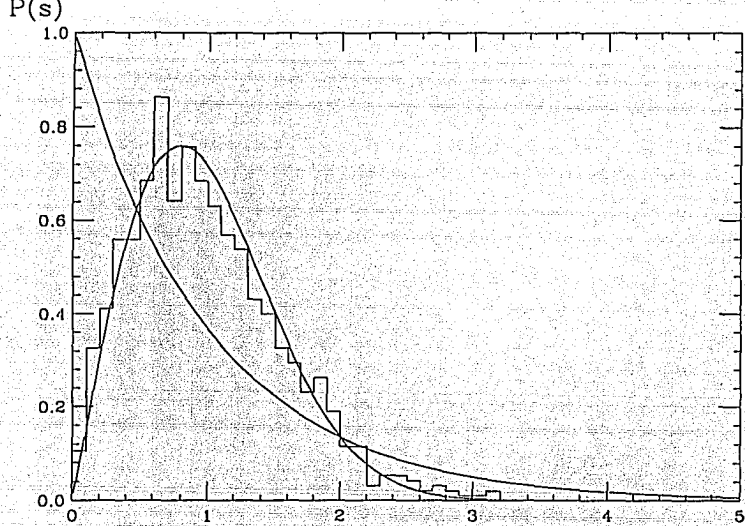


fig. 4.6a)

s

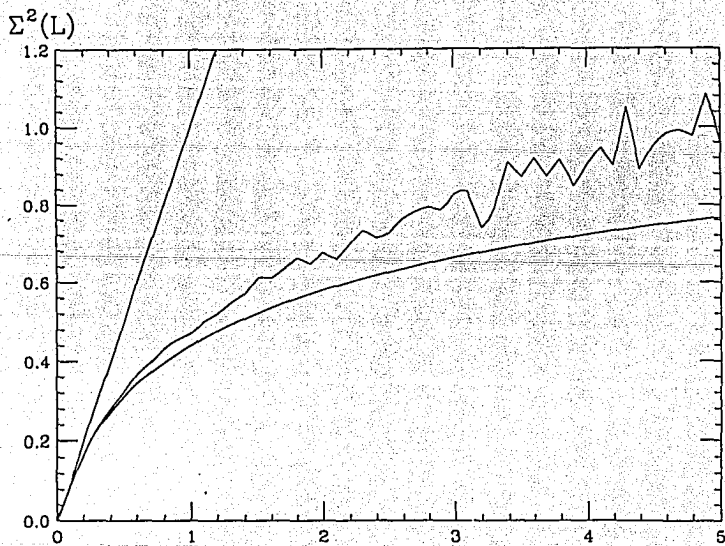


fig. 4.6b)

L

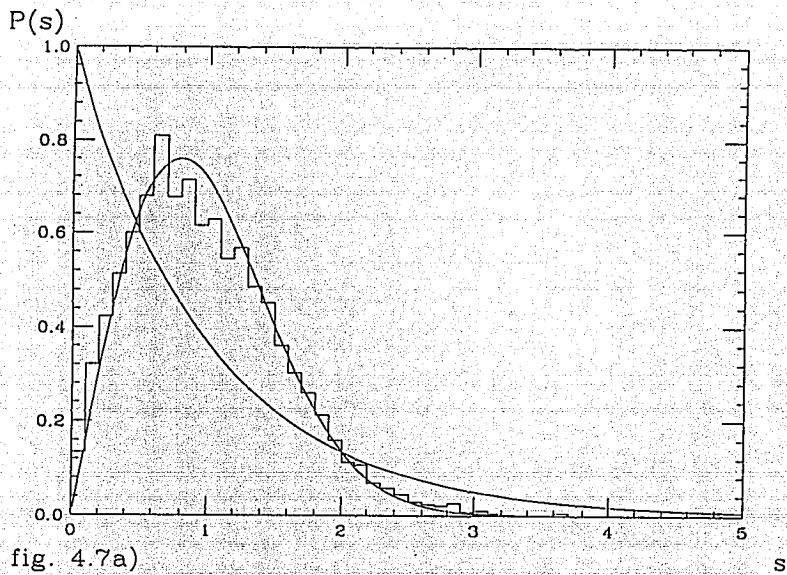


fig. 4.7a)

s

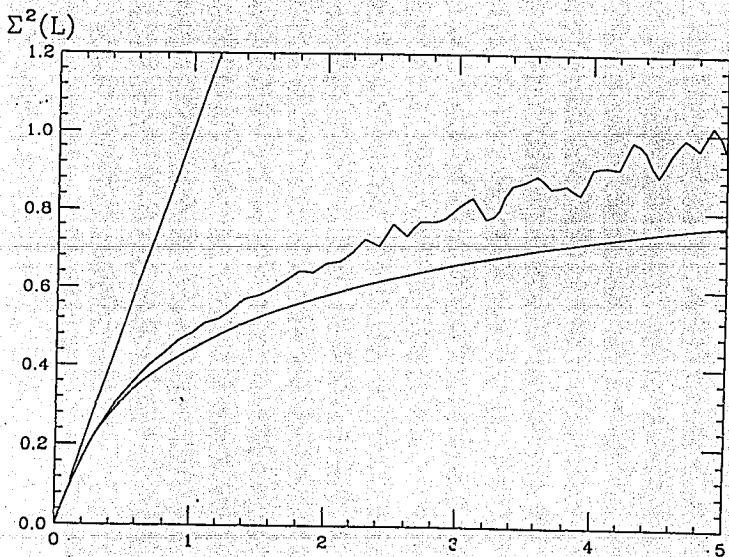


fig. 4.7b)

L

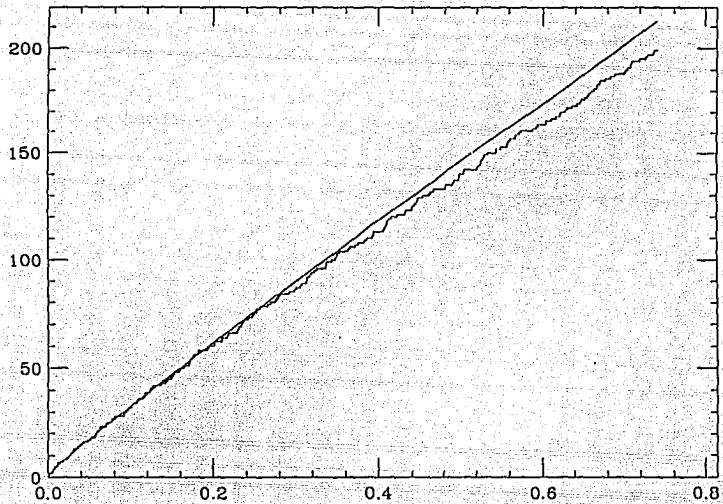
$N(E)$ 

fig. 4.8

 E

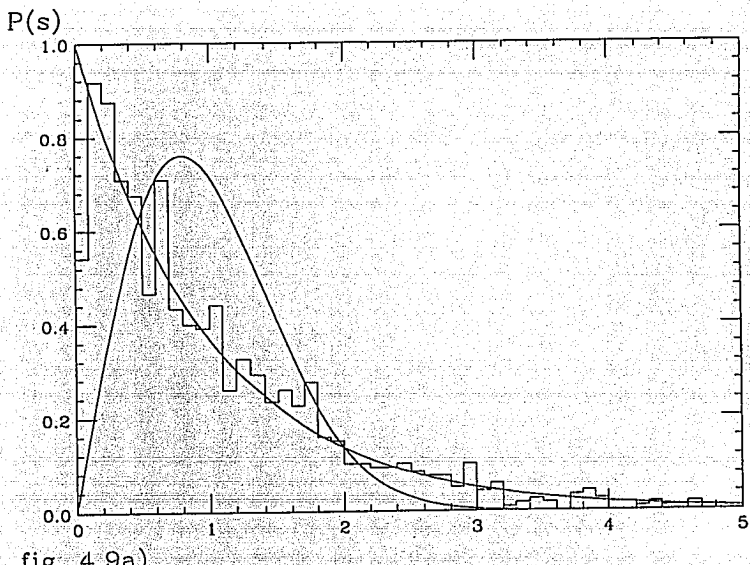


fig. 4.9a)

s

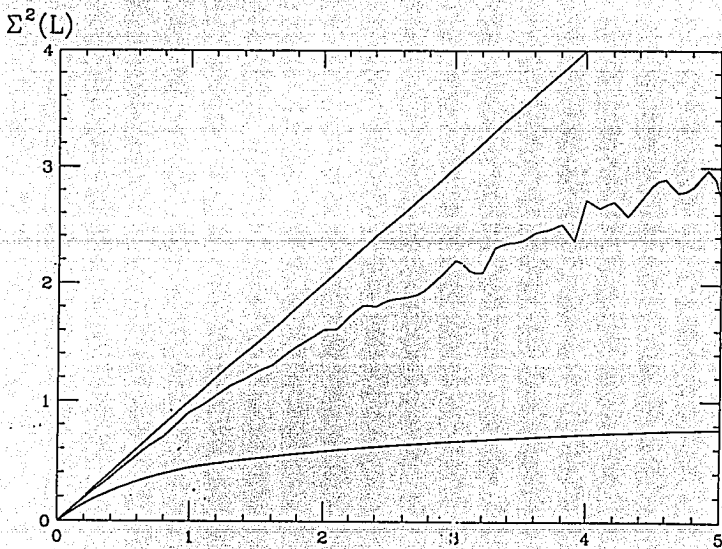
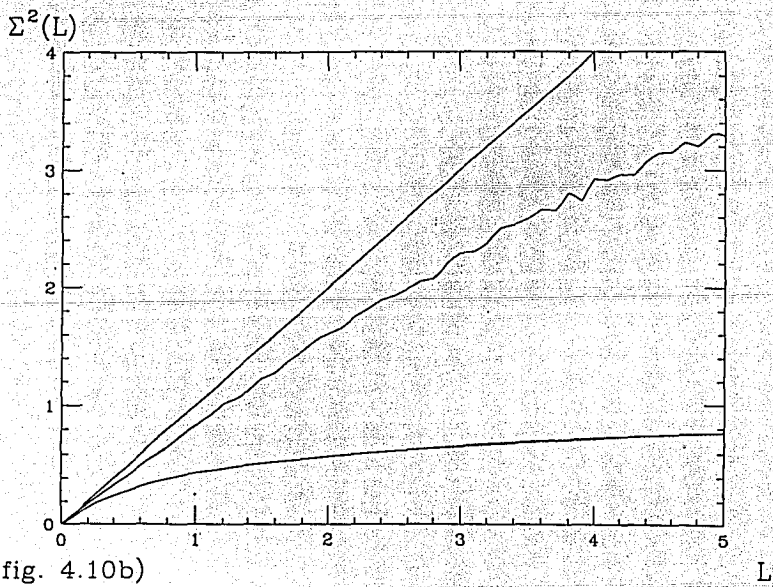
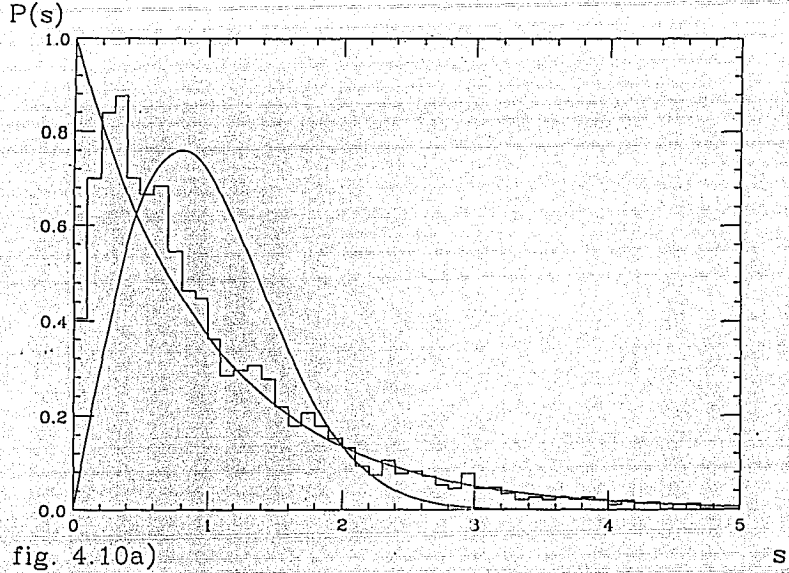


fig. 4.9b)

L



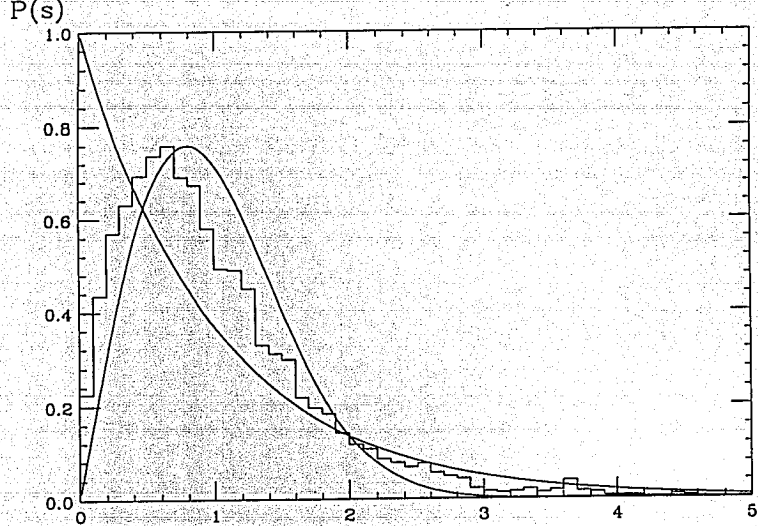


fig. 4.11a)

s

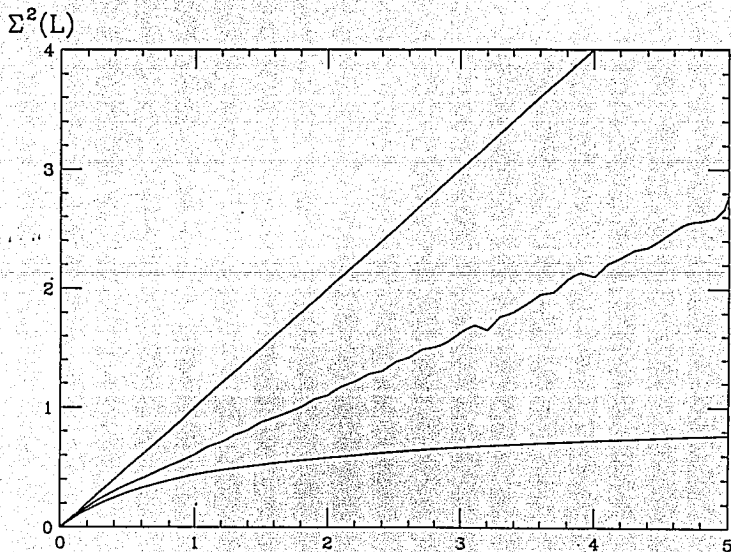


fig. 4.11b)

L