

01170  
3  
201

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA "WAVELET" AL PROBLEMA  
DE LA DETECCION DE SEÑALES

TESIS

PRESENTADA EN LA DIVISION DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER  
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA  
(ELECTRICA)

RAMON GUTIERREZ CASTREJON

CIUDAD UNIVERSITARIA

MARZO 1993.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Es de todos sabido que una investigación, a nivel maestría, no podrá ser realmente interesante, a menos que el autor cuente con la colaboración de un conjunto de personas, cuyo conocimiento y experiencia les permita juzgar el trabajo desarrollado. Es por esta razón que deseo expresar mi agradecimiento a los sinodales de esta tesis, cuyas enseñanzas, sugerencias y ayuda se encuentran reflejadas no solamente en este trabajo, sino en mi formación personal.

Dr. Francisco J. García Ugalde.

Dr. Rogelio Alcántara Silva

Dr. Jorge Lira Chávez

M. en I. Fernando Lepe Casillas

Dr. Ismael Espinosa Espinosa

En particular, agradezco al Dr. Rogelio Alcántara, director de esta tesis, por haberme guiado en esta rama del conocimiento al principio desconocida, así como por sus valiosos consejos y ayuda.

Asimismo, agradezco al Sr. Jaso la paciencia que tuvo para corregir minuciosamente la cantidad de disparates que, a causa de la ignorancia de mi lengua, pudieron haber formado parte de esta obra.

Por último deseo agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología no solamente por la beca que me otorgó, sino por su extensión, ya que sin ellas, mis estudios de posgrado serían una utopía.

## RESUMEN

Este trabajo de tesis comprende, esencialmente, dos propuestas. La primera es la presentación de una extensa investigación crítica sobre la transformada wavelet continua y discreta, que permite conocerla, entenderla desde un punto de vista funcional, interpretarla principalmente en el contexto del análisis de señales, implantarla en una computadora digital, de diversas maneras, y aplicarla como una herramienta de análisis. Como base de esta presentación se hace una exposición de los fundamentos de topología, operadores lineales, y los filtros espejo en cuadratura (QMF). Además se explica el vínculo entre estos tópicos con base en la transformada wavelet. La segunda proposición de este trabajo parte de la anterior para dar a conocer un novedoso sistema de detección de señales transitorias inmersas en ruido, inspirado en los filtros acoplados, el cual explota las propiedades de la transformada wavelet para ofrecer, a diferencia de otros esquemas, una detección de señales no solamente de parámetros desconocidos, sino de forma desconocida. Asimismo, se hace patente la validez del esquema propuesto, tanto con señales sintéticas y semisintéticas, como con lo que es menos común, señales plenamente naturales; en particular se utilizan señales electroencefalográficas, aunque el detector puede ser aplicado a un conjunto más vasto de señales unidimensionales y, mediante una transformación adecuada, a señales bidimensionales; tal es el caso de las imágenes en las que la detección de contornos, mediante la transformada wavelet, es un hecho bien conocido.

El sistema propuesto, además de ser de fácil implantación, posee la ventaja de efectuar la detección en el espacio del tiempo y, a la vez, de la frecuencia; por otra parte, es susceptible de ser adecuado al problema de que se trate, dada la infinidad de ondículas que pueden ser utilizadas. Este par de características no son usuales en los esquemas tradicionales.

La lectura de este texto permite entender las ideas más importantes de la teoría de wavelets, y sus aplicaciones, así como adquirir la capacidad para juzgar y aplicar el sistema de detección propuesto a diversos problemas, además de poder interpretar adecuadamente los resultados que el mismo ofrece.

Palabras clave: TRANSFORMADA WAVELET, FRAME, FILTROS QMF, ANALISIS MULTIRRESOLUCIÓN, DETECCIÓN, FILTROS ACOPLADOS, SEÑALES ELECTROENCEFALOGRÁFICAS, ANÁLISIS ESPECTRAL.

# INDICE DE CONTENIDO

RESUMEN		<i>i</i>
INDICE DE CONTENIDO		<i>ii</i>
GLOSARIO DE TERMINOS		<i>iv</i>
CAPITULO I	INTRODUCCION GENERAL	1
CAPITULO II	CONCEPTOS BASICOS DE TOPOLOGIA Y OPERADORES LINEALES	4
II.1	Fundamentos de Topología en Espacios Métricos	4
II.2	Operadores Lineales en Espacios Normados y de Hilbert	9
CAPITULO III	PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE WAVELETS	20
III.1	Frames	20
III.2	Construcción de Wavelets	23
III.3	Una Wavelet Más General	26
III.4	Interpretación y Discretización	29
CAPITULO IV	IMPLANTACION Y AJUSTE DE PARAMETROS	36
IV.1	Simulación de Algoritmos	36
IV.2	Validación de Métodos e Interpretación	41
CAPITULO V	FILTROS ESPEJO EN CUADRATURA	47
V.1	Generalidades	47
V.2	Estructuras	53
V.3	Aplicaciones	56

CAPITULO VI	RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA WAVELET Y LOS FILTROS ESPEJO EN CUADRATURA	58
VI.1	Análisis Multirresolución	58
VI.2	Concomitancia de los Métodos	64
VI.3	Algoritmo	67
VI.4	Validación	71
CAPITULO VII	PROPUESTA DE UN ESQUEMA ORIGINAL DE DETECCION CON BASE EN LA TRANSFORMADA WAVELET	73
VII.1	Exordio	73
VII.2	Detección Tradicional	74
VII.3	El Filtro Acoplado	79
VII.4	Detección Mediante la Transformada Wavelet	81
VII.5	El Algoritmo	87
CAPITULO VIII	APLICACION DE LA TRANSFORMADA WAVELET A LA DETECCION DE SENALES ELECTROENCEFALOGRAFICAS	88
VIII.1	Generalidades de las Señales Electroencefalográficas	88
VIII.2	Detección de Señales Sintéticas	92
VIII.3	Detección de Señales Semisintéticas	94
VIII.4	Detección de Señales Reales	97
VIII.5	Diferencia con Otros Métodos de Detección	103
CAPITULO IX	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	105
CAPITULO X	BIBLIOGRAFIA	108
APENDICE A	NOTACION DE DIRAC PARA OPERADORES	112
APENDICE B	ANALISIS ESPECTRAL	114
APENDICE C	REPORTE DEL ARCHIVO VEP14	120

## G L O S A R I O

Como el lector seguramente comprenderá, ingresar al estudio de tópicos de reciente desarrollo, de carácter internacional, tiene como consecuencia que los autores de habla hispana no encuentren entre su vocabulario la palabra equivalente a la que generalmente se presenta en la literatura en inglés, teniendo, de esta manera, que crear la traducción. Sin embargo, dado que en algunos casos fue imposible trabajar con material bibliográfico en español, y que el autor no cree tener la debida capacidad para crear equivalencias semánticas, a lo largo del texto se utiliza la palabra inglesa. No obstante, se presenta este glosario con posibles traducciones que, en manera alguna, son las únicas o las más acertadas.

Aliasing.- Deformación del espectro de una señal a causa de una selección errónea de la frecuencia de muestreo. Podría utilizarse el término traslape frecuencial.

Convolution.- Operación que generalmente se usa para caracterizar el efecto de un sistema sobre una señal de entrada. Podría utilizarse el término convolución.

Decimation.- Operación que consiste en filtrar y aumentar el periodo de muestreo de una señal. Podría utilizarse el término decimación.

Discret.- Se dice de la señal que ha sido muestreada. Podría utilizarse el término discreta.

Dyadic wavelet transform.- Transformada ondeleta con parámetro alfa 0.5. Podría utilizarse el término transformada ondeleta diádica.

Eigenvector.- Vector al que al aplicarle un operador determinado da por resultado un escalar (llamado valor propio) multiplicado por el mismo vector. Podría utilizarse el término vector propio.

Ergodic.- Se dice de un proceso estocástico cuyo promedio temporal es igual al promedio del conjunto. Podría utilizarse el término ergódico.

Frame.- Conjunto de vectores que cumple ciertas propiedades y que se caracteriza por una cota superior y otra inferior. Podría utilizarse el término marco.

Frame bounds.- Cotas que caracterizan al marco. Podría utilizarse el término cotas de marco.

Frame operator.- Función que mapea una señal en un conjunto de proyecciones, sobre un marco. Podría utilizarse el término operador de marco.

Impulse response.- Salida de un sistema alimentado con un pulso específico. Podría utilizarse el término respuesta al impulso.

Interpolation.- Operación que consiste en disminuir el periodo de muestreo y filtrar una señal. Podría utilizarse el término interpolación.

Mexicanhat wavelet.- Función cuya gráfica recuerda la forma de un sombrero charro. Podría utilizarse el término ondeleta en forma de sombrero mexicano.

Multiresolution analysis.- Análisis de una función mediante el uso de diversas frecuencias. Podría utilizarse el término análisis multiresolución.

Quadrature mirror filters.- Filtros con características específicas. Podría utilizarse el término filtros espejo en cuadratura.

Self-adjoint operator.- Operador igual a su transpuesto. Podría utilizarse el término operador autoadjunto.

Snug frame.- Marco cuya razón entre las cotas de marco es muy próxima a la unidad. Podría utilizarse el término marco casi sólido.

Tight frame.- Marco cuya razón entre las cotas de marco es la unidad. Podría utilizarse el término marco sólido.

Wavelet.- Señal con propiedades bien definidas. Podría utilizarse el término ondeleta u ondícula.

Wavelet transform.- Mapeo de una señal en un conjunto de productos internos con propiedades bien definidas. Podría utilizarse el término transformada ondeleta.

# C A P I T U L O I

## INTRODUCCION

Desde el momento en que el ser humano logró establecer una sociedad con un alto nivel de civilización, las matemáticas han tenido un rol como herramienta indispensable para ampliar la cultura. Un ejemplo palmario se distingue en la Grecia antigua.

A fines del siglo XVII, Newton y Leibniz inventaron el cálculo infinitesimal, con lo que las matemáticas tuvieron un ímpetu que hasta esa fecha no habían logrado. En consecuencia, otras disciplinas se encontraron beneficiadas, tal es el caso de la física y, muy ligada a ella, desde luego, la aplicación de los conocimientos para la invención, perfeccionamiento y utilización de la técnica industrial en todos sus ámbitos, es decir, lo que hoy en día se denomina ingeniería.

Durante un siglo se cosecharon los frutos del cálculo infinitesimal, y a principios del siglo XIX se propuso un nuevo espacio en el cual establecer el progreso de las matemáticas. A partir de ese momento coexistirían, por un lado, el tradicional espacio directo (de la posición y el tiempo) y, por otro, el naciente espacio recíproco o de la frecuencia. Ambos se utilizarían independientemente o, en ocasiones, de una manera paralela, dependiendo de las necesidades o interpretación de lo que se investigara.

Recientemente los responsables del desarrollo de las ciencias exactas se han preguntado por qué no usar ambos espacios simultáneamente. Respondiendo a esta demanda se ha obtenido un buen número de resultados en diversas ramas del conocimiento.

El espíritu del trabajo que aquí se presenta consiste, precisamente, en hacer una aportación en ese sentido, en

particular en el área del análisis de señales. Con esto se pretende continuar la labor que el autor ha venido llevando al cabo en el campo de las funciones intermedias [1,2], es decir, aquellas cuyo dominio se encuentra en los dos espacios a los que hemos hecho referencia.

El estudio de las funciones intermedias puede ser dividido [3] en métodos bilineales, como sería el uso de la función de distribución de Wigner [4] y la función de ambigüedad [5], y en métodos lineales que, como ejemplo particular, comprende el principio de este trabajo, o sea la transformada wavelet.

Aun cuando cada método es diferente, existe una relación entre ellos, así, por ejemplo, la función de ambigüedad puede ser evidente a partir de la función de distribución de Wigner, mediante una transformada de Fourier bidimensional [1], mientras que la transformada wavelet y la función de distribución de Wigner están relacionadas de la siguiente manera [6]:

$$|Wav\{f(s,u)\}|^2 = \iint Wign\{f(t,v)\} Wign\{\psi(t-u/s,sv)\} dt dv$$

Haber seleccionado a la transformada wavelet tiene como objetivo continuar, si no es que comenzar, la difusión de esta herramienta en lengua hispana, principalmente en el área de análisis de señales. Así, pues, independientemente de la investigación original o propuesta que plantea esta tesis, el documento representa también un esfuerzo de síntesis de la literatura (principalmente en inglés) sobre este tema de tan reciente aparición, al menos en lo que a su aplicación respecta.

Sin embargo, la principal finalidad de este trabajo es dar a conocer un novedoso sistema de detección que utiliza la transformada wavelet; asimismo se presenta su aplicación no solamente en señales artificiales, sino en casos reales como la detección de potenciales evocados en secuencias electroencefalográficas, tema tradicionalmente complicado debido a la gran diversidad de información que estas señales contienen, independientemente del ruido.

Con el fin de que algún lector poco versado en el tema de que trata esta obra tenga mayor oportunidad de aproximarse a ella, se presenta una serie de tópicos, algunos de gran interés teórico (como topología), otros de mayor aplicación (como filtros), que le permitan comprender adecuadamente las ideas principales de la tesis. No obstante, es importante advertir que este trabajo no es autocontenido, y que en manera alguna se ha sacrificado el rigor matemático en aras de hacerlo más asequible.

Este estudio se compone de diez capítulos, el segundo de los cuales constituye el soporte para el tercero, en el que se expone lo mínimo necesario para comprender la teoría de wavelets. El cuarto capítulo ofrece una serie de algoritmos para implantar la transformada wavelet. Los dos siguientes son un tanto independientes del anterior, ya que presentan una manera diferente de interpretar, construir e implantar la transformada wavelet. El capítulo siete es fundamental, ya que propone un detector original con base en la mencionada transformada. El siguiente apartado se dedica a la aplicación de dicho sistema de detección en señales sintéticas y, lo que es poco común, en señales naturales. Los dos últimos están reservados a la presentación de las conclusiones y perspectivas obtenidas del trabajo, así como a la bibliografía.

Al final se presentan tres apéndices con la finalidad de complementar los capítulos sin truncar su secuencia. Además, esta tesis está acompañada de catorce programas principales, todos escritos para TURBO C<sup>®</sup>, que por razones de espacio no son listados, pero que, sin embargo, pueden ser consultados con el autor.

## CAPITULO II

### CONCEPTOS BASICOS DE TOPOLOGIA Y OPERADORES LINEALES.

#### II.1 Fundamentos de Topología en Espacios Métricos.

El significado de topología puede ser entendido de dos maneras. Una de ellas es como la parte de la geometría que investiga la relación y la posición relativa de figuras geométricas, sin tener en cuenta deformaciones, relaciones de medidas, ángulos, longitudes, etc. [7]. De la misma definición es posible intuir el carácter tan abstracto de esta parte de las matemáticas.

La segunda acepción de topología es la siguiente [8]:

Sea  $X$  un conjunto no vacío, una colección  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $X$  es llamada topología en  $X$  si, y solamente si se cumplen las tres proposiciones siguientes:

- i)  $X$  y  $\emptyset$  pertenecen a la colección o clase  $\mathcal{I}$
- ii) la unión de cualquier número de miembros de  $\mathcal{I}$  pertenece a  $\mathcal{I}$
- iii) la intersección de dos miembros cualesquiera de  $\mathcal{I}$  pertenece a  $\mathcal{I}$ .

Al par  $(X, \mathcal{I})$  se le denomina espacio topológico. A los conjuntos contenidos en la topología se les conoce como conjuntos abiertos, mientras que un conjunto cerrado es aquel cuyo complemento es abierto. Obsérvese que para hablar de un conjunto cerrado o abierto es menester haber definido una topología. Nótese también que un conjunto puede ser abierto y cerrado a la vez, éste es el caso, por ejemplo, del conjunto  $\emptyset$ .

Una topología es un conjunto de conjuntos, o bien una clase de conjuntos con ciertas características; en consecuencia, es posible crear la unión de todos los conjuntos abiertos de un conjunto  $A$  de la topología, a la cual se le llama interior de  $A$  y

se denota  $\text{int}(A)$ . La cerradura de un conjunto  $A$  relativa a  $\mathcal{F}$  es la intersección de todos los conjuntos cerrados relativos a  $\mathcal{F}$  que contienen al conjunto  $A$ , y se denota  $\bar{A}$ . La frontera de un conjunto  $A$  es la intersección de su cerradura y la cerradura de su complemento [9].

Dos clases de conjuntos que revisten gran importancia son los conjuntos densos y compactos. Un conjunto  $B \subset A$  es denso en  $A$  si, y solo si  $A \subset \bar{B}$ , y es denso en todas partes si  $A = \bar{B}$ . Un conjunto compacto  $A$  es aquel para el que siempre es posible hallar un número finito  $n$  de conjuntos abiertos  $A_i$ , tales que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

De una manera similar al álgebra en la que, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes que generan un espacio es posible crear una base de ese espacio, en topología, una colección de subconjuntos de  $X$  con ciertas características puede llegar a formar la base de una topología, lo cual nos permite reducir el número de "objetos" con los cuales tratar para describir de una manera más simple y "económica" los elementos de un cierto sistema. La base  $\mathcal{B}$  de una topología  $\hat{\mathcal{S}}$  se define en la siguiente forma [8]:

Sea  $\mathcal{B}$  una colección de subconjuntos de  $X$  y  $\hat{\mathcal{S}}$  una colección de conjuntos que consiste en el vacío y todas las uniones posibles de los miembros de  $\mathcal{B}$ . Entonces  $\hat{\mathcal{S}}$  es una topología en  $X$  si, y sólo si

i)  $X = \cup \{ B; B \in \mathcal{B} \}$

ii) Para cualesquiera dos conjuntos  $B_1$  y  $B_2$  en  $\mathcal{B}$  y cualquier punto  $x$  que es elemento de  $B_1 \cap B_2$ , existe un conjunto  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal, que el punto  $x \in B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$ .

La condición i) del teorema asegura que  $X$  está en  $\hat{\mathcal{S}}$ . La condición ii) observa que la intersección finita de conjuntos en  $\mathcal{B}$  pertenece a  $\hat{\mathcal{S}}$ . De esta manera, si deseamos probar que una cierta clase  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  es una base, es necesario verificar que se cumplan las condiciones i) y ii).

Un espacio métrico es un espacio topológico específico, de gran utilidad, que contiene como ejemplo fundamental a  $\mathbb{R}$ ; por lo mismo servirá para concretar en lo posible, algunas de las ideas que de hecho ya se han expuesto, pero que ahora serán revisadas para el caso de espacios métricos.

El primer paso es entender el concepto de métrica o distancia.

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Una función  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina métrica o distancia en  $X$  si, y solo si

- a)  $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
- b)  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
- c)  $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$  (i.e.  $d$  es simétrica)
- d)  $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

A  $x,y$  se les llama puntos, y a  $d(x,y)$  distancia [9].

Algunos ejemplos de métricas [8]:

- i) Una métrica en  $\mathbb{R}$  es  $d(x,y) = |x-y|$
- ii) Una métrica para el conjunto de funciones reales que son continuas en  $(a,b)$  es  $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)|; x \in (a,b)\}$
- iii) Una métrica para  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  es  $d(x,y) = \{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\}^{1/2}$

Una bola cerrada de radio  $r$ , centrada en el punto  $x$ , es el subconjunto de un conjunto  $X$  con métrica  $d$ , definido por  $B_r(x)$ :

$$B_r(x) = \{y; y \in X, d(x,y) \leq r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

Una bola abierta se define de manera similar, con la diferencia de que la desigualdad es estricta [10].

A partir de esta definición, no presenta dificultad comprender que las dos proposiciones siguientes se cumplen, en donde  $\mathcal{B}_d$  denota la colección de conjuntos consistentes en bolas de radio mayor que cero centradas en todos los puntos de  $X$ ,

$$X = \cup \{B_r(x); B_r(x) \in \mathcal{B}_d\}$$

$$\forall x \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2) \exists B_{r_3}(x_3) \subset [B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)]$$

tal que  $x \in B_{r_3}(x_3)$ .

Utilizando esta afirmación y la definición de base de un espacio topológico se concluye que  $\mathcal{B}_d$  es base de una topología en  $X$  llamada topología métrica  $\hat{\mathcal{B}}_d$  inducida por  $d$ . Así, pues, la métrica  $d$  origina la topología  $\hat{\mathcal{B}}_d$  generada mediante el conjunto no vacío  $X$ , de modo tal que ahora el espacio topológico  $(X, \hat{\mathcal{B}}_d)$  es llamado espacio métrico y está expresado por  $(X, d)$ .

Una diferencia entre un espacio topológico y uno en el que se ha definido una métrica, es el hecho de que en el segundo podemos hablar de conjuntos acotados y no acotados (tal y como se hace en  $\mathbb{R}$ ). Para ello se define el diámetro de un conjunto  $A \subset X$  como [8]:

$$\text{dia}(A) = \sup\{d(x,y); x,y \in A\}.$$

A partir de aquí se dice que un conjunto  $A \subset X$  es acotado si existe un número  $M, 0 < M < \infty$ , tal que  $\text{dia}(A) \leq M$ . En el caso de que  $\text{dia}(A)$  tienda a infinito, se dice que  $A$  es no acotado, mientras que

si  $A$  es vacío se define  $\text{dia}(A)=0$ .

Es necesario tener en mente que las ideas que se han desarrollado para un espacio topológico se heredan a los espacios métricos que en sí son espacios topológicos. Cabe aclarar que no todo espacio topológico es métrico.

Dentro del nuevo contexto, es decir, el de espacios métricos, un conjunto abierto  $A \subset X$  es aquel en el cual existe una  $B_r(x)$  centrada en todo punto  $x$  de  $A$  contenida en  $A$ . Los conjuntos abiertos definen la topología de los espacios métricos, ya que dos métricas equivalentes definen los conjuntos abiertos y, por tanto, la misma topología [10].

Sean  $d$  y  $\rho$  dos métricas en  $X$ ,  $d$  es equivalente a  $\rho$  si, y solo si para cada  $x \in X$  y cada  $\epsilon > 0$  se dan las siguientes condiciones [9]:

- a)  $\exists \delta_1$  tal que  $d(x,y) < \delta_1 \Rightarrow \rho(x,y) < \epsilon$
- b)  $\exists \delta_2$  tal que  $\rho(x,y) < \delta_2 \Rightarrow d(x,y) < \epsilon$ .

Un conjunto cerrado, como ya se mencionó, es aquel cuyo complemento es abierto. Un ejemplo de conjuntos abiertos y cerrados en  $\mathbb{R}$  son los intervalos abiertos y cerrados, respectivamente.

Un concepto topológico muy relacionado con el de base de una topología es el de vecindad. Sea  $x$  un punto arbitrario de  $X$ ; a los subconjuntos  $N(x)$  de  $X$  que contienen conjuntos abiertos que a su vez contienen a  $x$  se les conoce como vecindades de  $x$ . Una vecindad puede ser abierta, cerrada o ninguna de las dos. Una vecindad en  $\mathbb{R}$  para un punto  $a \in \mathbb{R}$  está definida como el conjunto de todos los puntos  $x \in \mathbb{R}$ , tales, que cumplen con que  $|x-a| < \delta$ , con  $\delta$  un número positivo.

Se dice que  $a$  es punto interior de  $A \subset \mathbb{R}$  si existe una vecindad de  $a$ , tal, que todos sus puntos pertenecen a  $A$ . Al conjunto de todos los puntos interiores de  $A$  se le conoce como el interior de  $A$ .

No es posible dejar a un lado el concepto de punto de acumulación de  $A \subset X$ . Un punto  $a$ , el cual no necesariamente se encuentra en  $A$ , se llama punto de acumulación de  $A$  si, y sólo si toda vecindad abierta de  $a$  contiene al menos un punto de  $A$  distinto de  $a$ . La definición de punto de acumulación para  $\mathbb{R}$  se obtiene, simplemente, cambiando  $X$  por  $\mathbb{R}$  y utilizando la definición de vecindad de  $\mathbb{R}$  dada anteriormente.

Aunque en un principio podría parecer falta de lógica, es necesario observar que un conjunto puede ser infinito y aun así no poseer puntos de acumulación, un ejemplo clásico es el del conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$ , ya que si  $a \in \mathbb{Z}$ , la vecindad definida por  $|x-a| < 1$  contiene únicamente al entero  $a$ , y no así a algún otro. Este ejemplo conduce a la siguiente pregunta: ¿cuándo un conjunto infinito tiene puntos de acumulación? La respuesta la brinda el teorema de Bolzano-Weierstrass [8]:

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto infinito y acotado, entonces existe, al menos, un punto en  $\mathbb{R}$  que es punto de acumulación de  $A$ .

Considérese el conjunto siguiente  $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n\}$  que es infinito y acotado. Según el teorema anterior, existe un punto de acumulación. Este es el cero [8].

Sea  $A$  un subconjunto del espacio métrico  $(X,d)$ ; se dice que  $A$  es denso en todas partes, si, y solo si la cerradura de  $A$  es igual a  $X$ . Por tanto, que  $A$  sea denso en todas partes significa que existen puntos en  $X$  arbitrariamente cercanos a puntos de  $A$ , o sea que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $d(x,a) < \epsilon$ . Los racionales  $\mathbb{Q}$  son un conjunto denso en todas partes en  $\mathbb{R}$ , así que  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Geométricamente, esto quiere decir que hay puntos de  $\mathbb{R}$  arbitrariamente cercanos a puntos de  $\mathbb{Q}$  [8].

Un par de conceptos que revisten una importancia primordial en el análisis funcional y topología son los de continuidad y convergencia.

Sean  $(X,d)$  y  $(Y,\rho)$  espacios métricos. Una función  $f:X \rightarrow Y$  es continua en  $x_0 \in X$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\rho(f(x),f(x_0)) < \epsilon$ , siempre que  $d(x,x_0) < \delta$ .

Para que en un espacio con métrica  $d$  una secuencia  $\{U_n\}$  converja a un límite  $U_0$ , es necesario que para toda  $\epsilon > 0$  exista un  $N$ , tal que siempre que  $n > N$  se cumpla que  $d(U_n,U_0) < \epsilon$ . La sucesión es de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0$  existe algún  $N$ , tal que siempre que en  $n,m > N$  se cumpla que  $d(U_n,U_m) < \epsilon$  [9].

Un espacio métrico  $(X,d)$  se dice secuencialmente compacto si toda secuencia infinita en el espacio contiene una subsecuencia convergente. Esto se puede interpretar como que los elementos de un espacio métrico secuencialmente compacto se encuentran "empaquetados". Por ejemplo, si en  $\mathbb{R}$  se extraen secuencias infinitas de números reales, al azar, siempre existirá un número

infinito de números reales que estarán agrupados alrededor de, al menos, un punto en el espacio. Es posible demostrar que un subespacio de un espacio métrico es compacto si, y solo si es secuencialmente compacto, de aquí que hablar de conjuntos compactos y secuencialmente compactos sea, en esencia, lo mismo [9].

Un teorema muy importante en relación con los conjuntos compactos, es aquel que dice que todo conjunto cerrado y acotado es compacto. En análisis real esta idea se conoce como el teorema de Heine-Borel [11]. Un ejemplo en  $\mathbb{R}$  de un conjunto compacto es el intervalo cerrado  $[0,1]$ , mientras que  $(0,1)$  ó  $[0,\infty)$  no lo son.

## II.2 Operadores Lineales en Espacios Normados y de Hilbert.

En esta segunda parte del capítulo se presenta un cúmulo de ideas basadas en las de la sección anterior, sin embargo, el desarrollo que ahora se presenta difiere en que los conceptos de topología, y en especial los de espacio métrico serán utilizados en combinación con los pertenecientes a espacios vectoriales lineales. El desarrollo de esta simbiosis permite generar una serie de herramientas matemáticas que son la base del análisis funcional. Esta parte de las matemáticas constituye un apoyo idóneo para el estudio de distintos espacios de representación de señales, sistemas, etc.

Sea  $V$  un espacio vectorial lineal. Una norma es una función  $N:V \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple con [9]:

- a)  $N(u) > 0 \forall u \in V$ , y  $N(u) = 0$  si, y sólo si  $u = 0$ .
- b)  $N(\alpha u) = |\alpha|N(u) \forall u \in V$  y  $\alpha$  un escalar.
- c)  $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \forall u, v \in V$ .

Se usará la notación  $N(u) = \|u\|$

La función  $\|\cdot\|$  induce una topología especial en  $V$ , llamada topología normada. Para poder describirla únicamente es necesaria una base formada por todas las bolas abiertas para la topología normada en  $V$ . Una bola abierta centrada en el vector  $u_0$  se define como  $B_r(u_0) = \{v \in V ; \|v - u_0\| < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ .

Es interesante observar cómo esta definición coincide casi en su totalidad con la dada para espacios métricos. Esto, como podrá suponerse, no es una casualidad, y se debe al hecho de que una norma induce una métrica en el conjunto de vectores en  $V$ . Es fácil comprobar que la función  $d(u,v) = \|u-v\|$  para  $u,v \in V$  es una métrica en  $V$ . Así, un espacio vectorial con una topología normada se denomina espacio normado lineal, que será denotado como  $(U, \|\cdot\|_U)$ .

Más aún, dado que todo espacio normado es métrico, todas las propiedades topológicas de espacios métricos se aplican directamente a los espacios normados, con unos pequeños cambios en notación e interpretación [8].

Un concepto topológico que es particularmente simple en el caso de espacios normados es el de espacio completo. Un espacio normado es completo si toda secuencia de Cauchy converge. A este tipo de espacios se le da el nombre de espacio de Banach [8].

Un espacio vectorial definido sobre un campo es un ente algebraico que ha permitido estructurar teóricamente una diversidad de espacios utilizados en física. Sin embargo, este concepto suele ser más útil cuando en él se ha definido un producto interno.

Un producto interno en un espacio vectorial  $V$  lineal sobre el campo de los complejos  $\mathbb{C}$  es una función escalar  $p: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  que asocia a cada par de vectores  $u,v \in V$  un escalar denotado  $\langle u,v \rangle$  si, y sólo si

- a)  $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle^*$
- b)  $\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle + \beta \langle u_2, v \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } u_1, u_2, v \in V$
- c)  $\langle u,u \rangle > 0$  siempre que  $u \neq 0$ .

Un ejemplo de producto interno es para el espacio vectorial de funciones continuas de valor complejo en  $(a,b)$  el siguiente [13]:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g^*(x) dx$$

Un producto interno es útil, por ejemplo, para definir vectores ortogonales (aquellos cuyo producto interno es cero), aunque el interés que por el momento tiene radica en el hecho de que todo espacio con producto interno es un espacio normado; de

hecho, si  $u$  es un elemento de un espacio vectorial con producto interno, siempre es posible definir una norma de  $u$  como

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Un aspecto conveniente de los espacios vectoriales con producto interno es que todas las propiedades algebraicas importantes de espacios vectoriales lineales, y todas las propiedades importantes de espacios normados (y, por tanto, las de espacios métricos) también son válidas. Esto no es más que consecuencia de que un producto interno crea una norma que, a su vez, induce una distancia para una cierta topología.

Un operador en un espacio normado está definido como un mapeo  $A$  de elementos de un espacio normado a otro. En particular,  $A$  es lineal si cumple con que para  $u, v \in V$  un espacio normado y  $\alpha, \beta$  dos escalares cualesquiera,  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$  [12].

Siendo  $A: U \rightarrow V$  un operador, el kernel de  $A$  es el subespacio de  $U$  definido por  $n(A) = \{u; Au = 0 \text{ con } u \in U\}$ . El kernel de  $A$  es nulo si, y sólo si  $A$  es uno a uno. El rango de  $A$  es un subespacio vectorial de  $V$  tal que  $r(A) = \{v; Au = v \in V \text{ con } u \in U\}$ .

Una clase especial de operadores que poseen propiedades interesantes son aquellos que se encuentran acotados. Un operador acotado por arriba (o más sencillamente, acotado)  $A: U \rightarrow V$ , es aquel que mapea conjuntos acotados en  $U$ , en conjuntos acotados en  $V$ . En caso de que el operador sea lineal, éste es acotado si, y sólo si existe un número real no negativo  $M$ , tal que  $\|Au\|_V \leq M\|u\|_U$  para toda  $u \in U$  con  $\|u\|_U, \|v\|_V$  las normas de  $U$  y  $V$  respectivamente. Similarmente,  $A$  es acotado por abajo si, y sólo si existe un número real  $c$  positivo tal que  $\|Au\|_V \geq c\|u\|_U$  para toda  $u \in U$  [8].

Es posible definir la norma de un operador acotado asociándole una sucesión de números positivos  $M$  con base en la definición de operador acotado dada, de tal modo que se seleccione, de entre todos, al más pequeño. Dicho de una manera más formal, se tiene  $\|A\| = \inf\{M; \|Au\|_V \leq M\|u\|_U\}$  para toda  $u \in U$ . Esta definición es equivalente a [8]

$$\|A\| = \sup_{u \in U} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}; \quad u \neq 0$$

La norma de un operador puede entenderse como una medida de la distorsión o amplificación de los elementos de su dominio [8].

El operador  $A:U \rightarrow V$  es continuo en  $u_0 \in U$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|Au_0 - Au\| < \epsilon$ , siempre que  $\|u - u_0\| < \delta$ . Un operador lineal es continuo si, y sólo si es acotado por arriba; es más, el mismo operador es acotado por abajo si, y sólo si A tiene una inversa continua  $A^{-1}:r(A) \rightarrow U$  [8].

Finalmente se enuncia el siguiente teorema conocido como el teorema de Banach [8]. Sea A un operador lineal continuo que es uno a uno y que mapea un espacio de Banach en otro espacio de Banach, entonces la inversa del operador A es continua.

Resulta interesante introducir en este momento una serie de definiciones de equivalencia dentro de los diferentes espacios, ya que los teoremas que se acaban de enunciar ofrecen una interpretación clara de éstas.

Dos sistemas son algebraicamente equivalentes si es que son isomorfos, es decir, si existe un mapeo biyectivo M de un conjunto A con una operación binaria  $\cdot$  a otro conjunto B con una operación binaria  $\circ$ , tales que si  $a, b \in A$ , entonces  $M(a \cdot b) = M(a) \circ M(b)$ . Si el mapeo no es biyectivo se le denomina homomorfismo [8].

Por otro lado, dos espacios topológicos  $(X, \mathcal{X})$  y  $(Y, \mathcal{Y})$  son equivalentemente topológicos si existe un mapeo  $H: X \rightarrow Y$ , llamado homeomorfismo, tal que H y su inversa son continuos y H es biyectiva. Por ejemplo, el intervalo cerrado  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  es homeomórfico (existe un homeomorfismo) al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . La función lineal  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  definida como  $f(x) = (b-a)x + a$  es el homeomorfismo [9].

El concepto de espacios homeomórficos queda caracterizado para los espacios métricos por el siguiente teorema que no es más que una consecuencia de la definición de homeomorfismo.

Dos espacios métricos  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  son homeomórficos si existen dos escalares  $\mu_1, \mu_2 > 0$  y un mapeo  $H: X \rightarrow Y$  tal que para cualquier par de puntos  $x, y \in X$  se verifica

$$\mu_1 d(x, y) \leq \rho(H(x), H(y)) \leq \mu_2 d(x, y)$$

Este teorema tiene el siguiente corolario [8]: Los dos espacios métricos  $(X, d)$  y  $(X, \rho)$  son homeomórficos si, y solo si existen dos escalares  $\beta_1, \beta_2 > 0$  tales que para cualquier par de puntos  $x, y \in X$  se verifica  $\beta_1 d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta_2 d(x, y)$ .

Si para el teorema se tiene  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , entonces  $d(x,y) = \rho(H(x), H(y))$  y el mapeo  $H$  toma el nombre de isometría.

Basándose en lo anterior, la equivalencia topológica en espacios normados se deduce fácilmente. Dos espacios normados  $U$  y  $V$  son topológicamente equivalentes si, y sólo si existe un homeomorfismo  $H:U \rightarrow V$  y constantes positivas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  tales que para toda  $u \in U$ ,

$$\beta_1 \|u\|_U \leq \|Hu\|_V \leq \beta_2 \|u\|_U$$

La interpretación es sencilla, ya que  $\beta_1 \|u\|_U \leq \|Hu\|_V$  significa que  $H$  tiene una inversa continua, mientras que  $\|Hu\|_V \leq \beta_2 \|u\|_U$  se entiende como que  $H$  es continua.

Para definir el dual topológico es menester entender que una funcional es un mapeo lineal de un espacio vectorial a su campo [13]. El espacio formado por todas las funcionales continuas lineales  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ , es un espacio normado, denotado  $U'$ , el cual es conocido como el dual topológico de  $U$  [8]. Es posible demostrar [12] que el dual topológico es un espacio de Banach, lo cual nos permite hablar del espacio de las funcionales lineales continuas en  $U'$ . El dual de  $U'$  también es un espacio de Banach, denotado por  $U''$  y al cual se le llama bidual de  $U$ .

Hasta este punto se ha presentado una serie de conocimientos, algunos de los cuales podrían ser considerados demasiado "matemáticos" para tener alguna "aplicación práctica". Afortunadamente para algunos y desgraciadamente para otros, esto no es así. La matemática que hasta el momento se ha revisado puede muy bien ayudar, por ejemplo, a entender el movimiento de los planetas por medio de las ecuaciones de Kepler, o a resolver problemas de elasticidad de un cuerpo. De cualquier modo, el concepto de espacio de Hilbert, unido a la idea de operador, resulta ser de utilidad para el desarrollo y comprensión de una gran variedad de problemas de ingeniería y física, entre los cuales podríamos citar el estudio de filtros adaptables, una comprensión clara de las bases de la mecánica cuántica, problemas con valores a la frontera que continuamente aparecen en diversas ramas de mecánica y electromagnetismo, etc.

Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno, que es completo. De aquí se observa que todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach (lo contrario no es cierto) y, por tanto, todo

lo que se ha dicho acerca de estos espacios es aplicable a los espacios de Hilbert.

La equivalencia topológica en espacios de Hilbert se puede deducir de la de espacios normados, ya que un espacio de Hilbert es normado. En efecto, dos espacios de Hilbert  $U$  y  $V$  serán topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $H:U \rightarrow V$ , tal que  $\beta_1 \|u\|_U \leq \|Hu\|_V \leq \beta_2 \|u\|_U$ , y serán isométricos si  $\|u\|_U = \|Hu\|_V$ . Es posible decir aún más. Dos espacios de Hilbert  $U, V$  son unitariamente equivalentes o conformales si existe un mapeo biyectivo  $Q:U \rightarrow V$  llamado mapeo unitario, que preserva productos internos, es decir,  $\langle u, v \rangle_U = \langle Qu, Qv \rangle_V$ , con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ , los productos internos en  $U$  y  $V$  respectivamente. Nótese que  $Q$  es una isometría [8].

Lo que hace a los espacios de Hilbert un ente matemático conveniente depende en gran medida de las bases ortogonales de vectores que se forman en él, cuya explicación se facilita a partir de los conceptos de operadores de proyección así como de proyección ortogonal.

Una idea fundamental para entender la proyección ortogonal es la de complemento ortogonal de un subespacio  $M$  de un espacio con producto interno  $U$ . El complemento ortogonal puede ser construido con respecto a su dual y con respecto a su producto interno, sin embargo, el complemento ortogonal resultante por medio de cualquiera de las construcciones, es tanto topológica como algebraicamente equivalente al otro. Aquí se adoptará el que se construye respecto al producto interno, el cual queda definido como  $M^\perp = \{v \in U; \langle u, v \rangle_U = 0, \forall u \in M\}$ .

El siguiente teorema, que permitirá abrir el camino hacia el teorema de proyección ortogonal, expresa de una manera única a cualquier elemento de  $H$ , con base en los elementos de  $M$  y  $M^\perp$ .

Teorema de proyección. Sea  $M$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ , entonces este espacio puede ser escrito como la suma directa de  $M$  y  $M^\perp$ , o sea, todo elemento  $u$  de  $H$  puede ser escrito en forma única como  $u = v + w$ , con  $v \in M$  y  $w \in M^\perp$  y además  $\|u\|_H^2 = \|v\|_H^2 + \|w\|_H^2$ .

Para poder introducir la idea de proyección en un contexto más abstracto, partimos de la idea más intuitiva de proyección en un plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , el cual podemos considerar como la suma directa de

dos subespacios lineales unidimensionales  $\{(a,0), a \in \mathbb{R}\}$  y  $\{(0,a)\}$ . Una operación  $T(a_1, a_2) = (a_1, 0)$  es una proyección sobre el eje  $x$ . Dicho de una manera más general, una proyección es un operador lineal  $P$  de un espacio de Hilbert a un subespacio de éste, tal que  $P^2 = P$ . Este operador cumple con ser acotado (continuo) y si es distinto de cero se verifica que  $\|P\| = 1$  [12]. Cabe mencionar que el rango  $r(P)$  y el kernel  $n(P)$  son subespacios lineales mutuamente excluyentes en el espacio en que ha sido definido el operador  $P$ , lo que permite expresar este espacio como la suma directa de  $r(P)$  y  $n(P)$ .

Un operador todavía más interesante que el operador proyección es el operador proyección ortogonal  $\Pi$ , el cual es el mismo operador  $P$ , con la característica de que su rango y su kernel son subespacios ortogonales. Esto tiene como consecuencia que el espacio de Hilbert  $H$  puede ser descompuesto como la suma directa de  $r(\Pi)$  y el complemento ortogonal de  $r(\Pi)$ .

Basados en el teorema de proyección ya mencionado se enuncia el siguiente teorema. Sea  $\Pi$  una proyección ortogonal en un espacio de Hilbert  $H$ , entonces se verifica que [8, 12]:

- a)  $n(\Pi)$  y  $r(\Pi)$  son subespacios cerrados de  $H$ .
- b)  $n(\Pi) = r(\Pi)^\perp$  y  $n(\Pi)^\perp = r(\Pi)$ .
- c) Todo  $u \in H$  puede ser escrito en forma única como  $u = v + w$ , donde  $v \in r(\Pi)$  y  $w \in n(\Pi)$ .
- d) La suma de un conjunto finito de proyectores ortogonales es una proyección, en la que un conjunto de proyectores ortogonales se entiende como un conjunto de proyecciones tales que  $P_i$  es ortogonal a  $P_j$  para toda  $i \neq j$  y  $P_i \neq 0$  para cada  $i$ .
- e) El producto de dos proyecciones es una proyección si, y sólo si ambas proyecciones conmutan.
- f) El operador  $I - P$  es un operador proyección.

A continuación se enuncia el teorema de proyección ortogonal. Sea  $M$  cualquier subespacio lineal cerrado en un espacio de Hilbert  $H$ , entonces (por el teorema de proyección),  $H$  es la suma directa de  $M$  y  $M^\perp$  y además existe una proyección ortogonal única  $\Pi$  que cumple con  $r(\Pi) = M$  [8].

Una vez expuesta la idea de proyección ortogonal y la de operadores de proyección se procede a describir las bases ortonormales.

Un conjunto  $\{\phi_n\}$  de elementos de un espacio de Hilbert  $H$  que cumplen con que  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{i,j}$ , la delta de Kronecker, y que además forman un subconjunto denso en todas partes y contable en  $H$ , es llamado base ortonormal de  $H$ .

Para poder expresar cualquier elemento  $u$  de  $H$ , utilizando una base, es posible demostrar [8] que existe un conjunto  $\{a_n\}$  de escalares, tales que  $u$  queda representado por

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$$

esto es, como una combinación lineal de elementos de la base.

Obviamente, el problema radica ahora en determinar los valores de los coeficientes  $a_k$ , pero para ello se tiene que

$$\langle u, \phi_m \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k, \phi_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \phi_k, \phi_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{km}$$

de donde es claro que  $a_m = \langle u, \phi_m \rangle$ . Al conjunto  $\{a_m\}$  se le conoce como coeficientes de la serie de Fourier, la cual está dada por

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Obsérvese que el producto interno de los elementos de  $H$  puede ser obtenido mediante la expansión expuesta, como:

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m \phi_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Según lo que se ha presentado, todavía falta una pregunta por responder, ¿en qué condiciones la serie de Fourier converge? Sea  $\{\phi_n\}$  un conjunto ortonormal infinito, numerable, de un espacio de Hilbert  $H$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$  converge si, y sólo, si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$  converge [8].

Algunos ejemplos de funciones  $\phi_k$  son las funciones de Laguerre, las funciones de Legendre y las de Hermite.

No sería correcto terminar esta sección sin antes haber

presentado, aunque sea de una manera breve, el concepto de dual de un espacio de Hilbert, el cual, a diferencia de un espacio normado, posee ciertas propiedades en relación con el producto interno que es de él característico. Se comenzará por enunciar el teorema de representación de Riesz.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $f$  una funcional lineal continua en  $H$ , entonces existe un elemento único  $u_0$  de  $H$ , tal que  $f(u) = \langle u_0, u \rangle_H$  para todo  $u \in H$ . Además  $\|f\|_{H'} = \|u_0\|_H$ .

La importancia de este teorema radica en que para un espacio de Hilbert es posible representar las funcionales de  $H'$  por medio de productos internos, es decir, podemos identificar un espacio de Hilbert con su dual. Esto se verá más claro con el siguiente corolario.

Sea  $K: H \rightarrow H'$  un mapeo llamado de Riesz, tal que  $f = Ku$ , donde para cada  $f \in H'$ ,  $f(v) = \langle u, v \rangle_H$ , para toda  $v \in H$ ; entonces

- i)  $K$  es un mapeo linealmente biyectivo de  $H$  en  $H'$
- ii)  $K$  es continuo con inversa continua
- iii)  $K$  es una isometría de  $H$  en  $H'$ .

Por medio del mapeo de Riesz es posible definir un operador lineal continuo, llamado operador adjunto. De esta manera, si se tienen dos espacios de Hilbert  $H$  y  $G$  y un operador  $A: H \rightarrow G$  lineal y continuo, entonces se demuestra que existe un operador  $A^*: G \rightarrow H$  tal que  $\langle A^*v, u \rangle_H = \langle v, Au \rangle_G$  con  $u \in H$  y  $v \in G$ . Este operador goza de las siguientes propiedades [8,12]:

- a)  $A^{**} = A$
- b)  $\|A^*\| = \|A\|$
- c)  $(AB)^* = B^*A^*$
- d)  $(A + B)^* = A^* + B^*$
- e)  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

El operador  $A$  que obedece al hecho de que  $A^* = A$  es conocido como operador autoadjunto, mientras que al que cumple con que  $AA^* = A^*A = I$  ( $I$  el operador identidad) se le llama normal. Obviamente, todo operador autoadjunto es normal. Los operadores autoadjuntos tienen un rol muy importante en cuanto a la resolución de sistemas de ecuaciones, así como en la teoría espectral o de eigenvalores, de la cual se dará una sucinta introducción.

Dado un operador lineal  $A$  de un espacio vectorial a otro, un eigenvalor  $\lambda$  de  $A$  es aquel número que cumple con que para un cierto elemento  $u$  del espacio vectorial,  $Au = \lambda u$ ,  $u \neq 0$ . A  $u$  se le llama eigenvector del eigenvalor  $\lambda$ . Al conjunto de eigenvalores de un operador se le denomina espectro [12].

La resolución de la identidad en un espacio de Hilbert  $H$  es una secuencia de operadores  $\{P_n\}$  que cumplen con que:

- a) Cada  $P_n$  es una proyección ortogonal
- b)  $P_m$  es ortogonal a  $P_n$ , para  $m \neq n$
- c)  $I = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ , donde la suma puede ser finita o infinita.

La idea de resolución de la identidad de  $H$  es favorable para expresar un operador lineal en  $H$ , en la siguiente forma

$$A = \sum_n \lambda_n P_n$$

donde  $\{P_n\}$  es la resolución de la identidad de  $H$ , y  $\lambda_n$  son números complejos distintos. Es posible demostrar [8] que  $A$  es siempre normal, sin embargo, esto no dice mucho de la manera como pueden ser seleccionados los  $P$  y los  $\lambda$  para expresar a un operador lineal  $A$  como una combinación lineal finita de proyecciones. Para aclarar este punto se presenta el siguiente teorema [8]:

Sea  $A$  un operador lineal en un espacio de Hilbert y sea  $\{P_i\}$  con  $1 \leq i < \infty$  la resolución de la identidad de  $H$  con  $P_i \neq 0$ . Asíumase que existe un conjunto de escalares diferentes  $\{\lambda_i\}$  tales que

$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ . Entonces los únicos escalares  $\lambda$  para los cuales el problema de eigenvalores  $(\lambda I - A)u = 0$  tiene una solución  $u$ , no trivial, son precisamente los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  de la sumatoria anterior.

A los operadores que permiten ser expresados como la sumatoria del teorema que se acaba de mencionar se les denomina operadores representables como una suma pesada de proyecciones, la cual es lineal. Es importante observar que  $A$  es continuo si  $\{|\lambda_n|\}$  es acotado. Lo contrario también es cierto y los eigenvalores de  $A$  estarán acotados por la norma de  $A$  [12].

Para concluir se presentará el teorema espectral [8]:

Sea  $A$  un operador normal compacto en un espacio de Hilbert  $H$ .

Entonces existe una base ortonormal de eigenvectores  $\{\phi_n\}$  con sus correspondientes eigenvalores  $\{\lambda_n\}$ , tales que si  $u = \sum_n \langle u, \phi_n \rangle \phi_n$  es la expansión de Fourier de  $u$ , entonces  $Au = \sum_n \lambda_n \langle u, \phi_n \rangle \phi_n$ .

Obsérvese que  $\langle u, \phi_n \rangle \phi_n$  es una proyección ortogonal susceptible de ser definida como  $P_n u$ , de tal modo que el resultado del teorema anterior pueda ser reescrito de una manera más clara como  $Au = \sum_n \lambda_n P_n u$ , o lo que es lo mismo,  $A = \sum_n \lambda_n P_n$ .

Es recomendable leer el apéndice A, ya que la notación que en él se expone será utilizada a lo largo de la tesis. El haber relegado este tema al final del trabajo no significa que sea baladí; al contrario, lo que ahí se muestra es la introducción a un tipo de notación que, dada su simplicidad y elegancia, constituye una herramienta valiosa desarrollada por una de las mentes más brillantes de este siglo, Paul Andrien Maurice Dirac [14].

## CAPITULO III

### PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE WAVELETS

#### III.1 Frames.

En la sección que se presenta a continuación se explicará lo que en la literatura es conocido como frame, que, de acuerdo con el glosario que se encuentra al inicio de este trabajo, lo hemos traducido como marco. Comenzar el estudio de las ondeletas con este tema se debe a que, como se verá más adelante, su comprensión es indispensable como base para la construcción de éstas. Así, pues, presentar los frames en una sección aparte nos permitirá cierta continuidad en la sección siguiente.

Para definir el concepto de frame se partirá del hecho de que se ha definido un cierto espacio de Hilbert  $H$ , en el que, como ya se ha explicado, se tiene definido un cierto producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para los elementos de este espacio. Pensemos en una secuencia infinita numerable de vectores (elementos del espacio  $H$ ) que denotamos por  $\{\phi_n\}$ , los cuales son distintos de cero. Este conjunto de vectores constituye un frame si para todo vector  $f$  en  $H$  existen dos escalares positivos  $A$  y  $B < \infty$ , a los que se les llama cotas del frame, y se verifica

$$A \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle \phi_n, f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

A los escalares  $\langle \phi_n, f \rangle$  se les denomina los momentos de la secuencia de  $f$  relativa al frame [15]. Dado que el frame es un conjunto completo, la combinación lineal de los  $\phi_n$  es un conjunto denso en todas partes.

Definase un mapeo  $T: H \rightarrow L^2(J)$  como  $(Tf)_1 = \langle \phi_1, f \rangle$ , donde  $J$  es

un conjunto numerable como  $\mathbb{Z}^2$  y  $l^2(\mathbb{J})$  es el conjunto de secuencias cuadrado, sumables, cuyo índice está en  $\mathbb{J}$ . A este operador se le conoce como el operador de frame. El operador adjunto  $T^*$  se define para  $c \in l^2(\mathbb{J})$  como  $T^*c = \sum_n c_n \phi_n$ , y mapea  $l^2(\mathbb{J})$  en  $H$  [16].

Para los resultados que más adelante se derivarán resulta ser más simple usar notación de Dirac, por lo que reescribimos la ecuación (1) de esta manera:

$$A \mathbb{I} \leq \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \leq B \mathbb{I} \quad (2)$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador identidad. Las desigualdades deben entenderse en el sentido de que  $T_1 < T_2$  significa que  $\langle f|T_2|f\rangle - \langle f|T_1|f\rangle$  es definida positiva. La ecuación anterior se obtiene trivialmente de observar que  $|\langle\phi_n, f\rangle|^2 = \langle f, \phi_n\rangle\langle\phi_n, f\rangle$ . De la misma manera, la ecuación (2) también puede presentarse, auxiliados del operador  $T$ , como:

$$A \mathbb{I} \leq T^*T \leq B \mathbb{I} \quad (3)$$

Si ahora se recuerda lo expuesto referente a operadores en espacios normados, será claro que, dado que el operador  $T^*T$  está acotado por abajo, éste es invertible con una inversa acotada que satisface [15]  $B^{-1}\mathbb{I} \leq (T^*T)^{-1} \leq A^{-1}\mathbb{I}$

Mediante la inversa es posible definir un nuevo frame constituido por la familia  $\{\varphi_n\}$ , en donde  $\varphi_n = (T^*T)^{-1}\phi_n$  y cuyas cotas del frame son  $B^{-1}$  y  $A^{-1}$ . El operador de frame para este marco es  $T = T(T^*T)^{-1}$ , el cual satisface [16]:

$$\begin{aligned} T^*T &= (T^*T)^{-1} \\ T^*T &= \mathbb{I} = T^*T \end{aligned}$$

donde  $TT^* = TT^*$  es el operador de proyección ortogonal de  $l^2(\mathbb{J})$  en el rango de  $T$ . La relación  $\{\phi_n\} \leftrightarrow \{\varphi_n\}$  define una operación de dualidad [16], de ahí que se denomine a  $\{\varphi_n\}$  el frame dual de  $\{\phi_n\}$ . Es importante recordar esta relación de dualidad, ya que seguirá apareciendo a lo largo de la tesis.

Las ideas expuestas podrían muy bien dar la impresión de que un frame, tal y como se ha definido, es una manera más "elegante" de definir una base ortonormal, sin embargo, esto es una falacia,

aún cuando es posible aceptar que, como se verá más adelante, una base ortonormal es un caso particular de frame.

Por lo general, un frame consiste en un mayor número de vectores que los que tendría una base en un espacio dado y, por ende, los  $\phi_n$  no siempre son linealmente independientes, ni tampoco ortogonales entre sí. A pesar de ello, el uso de los frames conduce en algunas ocasiones al desarrollo de una matemática más compleja, pero más rica, la cual puede llevar a resultados muy interesantes.

Existe un caso particular de frame cuya simplicidad se debe al hecho de que la razón A/B alcanza su valor "óptimo", que es la unidad, esto es,  $A = B$ . A estos frames, en la literatura inglesa se les da el nombre de "tight frames", los cuales, a falta de un mejor apelativo, se traducirán como "marcos sólidos" (pensábamos llamarlos marcos cerrados, pero la idea de cerradura ya ha sido utilizada anteriormente en el contexto de topología, y lo último que deseamos es crear confusiones).

Para este tipo de frames la condición (1), o lo que es lo mismo, la condición (2) pasa a ser

$$\sum_n |\langle \phi_n, \phi_n \rangle| = A \quad (4)$$

o sea,  $T^*T = A I$ . Así mismo se verifica que  $(T^*T)^{-1} = A^{-1} I$  y que  $T^{-1}$  es un múltiplo de su conjugado  $T^*$ .

Una propiedad de T radica en que es un múltiplo de una isometría de H en  $l^2(J)$ , lo cual quizá sea más claro si escribimos la ecuación (4) con base en las normas [17],

$$\sum_n |\langle \phi_n, f \rangle|^2 = A \|f\|^2 \quad (5)$$

Como ya habrá sido notado, los tight frames representan un conjunto matemáticamente más accesible y, probablemente, más familiar. Esto es particularmente cierto para el caso en que  $A=1$ . Según lo explicado,  $TT^*$  es un múltiplo de un proyector ortogonal, ya que  $TT^* = AI$ , pero si  $A=1$ , entonces T es un proyector ortogonal; sin embargo, lo que es más atrayente es el hecho de que para  $A=1$

el frame  $\{\Phi_n\}$  se comporta como una base ortonormal [17]. Esto puede observarse en

$$\|\Phi_k\|^2 = \sum_n |\langle \Phi_n, \Phi_k \rangle|^2 = \|\Phi_k\|^4 + \sum_{n \neq k} |\langle \Phi_n, \Phi_k \rangle|^2$$

lo cual implica que  $\langle \Phi_n, \Phi_k \rangle = 0$  para  $n \neq k$  si  $\|\Phi_n\| = 1$ .

A continuación se presenta un ejemplo extraído de [16], que es particularmente ilustrativo ya que destaca la diferencia entre una base y un frame, en este caso un tight frame. Sea  $H = \mathbb{C}^2$ , cuya base canónica es  $e_1 = (1, 0)$  y  $e_2 = (0, 1)$ . Defínase

$$\Phi_1 = e_1 ; \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\alpha}{2} e_2 ; \quad \Phi_3 = -\frac{1}{2} e_1 - \frac{\alpha}{2} e_2$$

donde  $\alpha = 3^{1/2}$ . Es muy simple verificar que para cualquier  $v \in H$  se tiene que  $\sum_{k=1}^3 |\langle \Phi_k, v \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2$ . Compárese con la ecuación (5). Así se observa que  $T^*T = 3/2 \mathbb{I}$  y que  $\varphi_k = 2/3 \Phi_k$ .

### III.2 Construcción de Wavelets.

El propósito de esta sección es presentar un concepto que bien podría substituir, o al menos complementar una de las herramientas de análisis más poderosas que se han creado desde que el matemático francés Fourier publicó en 1822 su tratado sobre la teoría del calor; nos referimos al concepto de ondeletas. Esta idea, al igual que lo ha venido haciendo el análisis de Fourier, permite su aplicación en una gran cantidad de ramas de la ingeniería, física y matemáticas. No dudamos de que esta poderosa herramienta permita generar algoritmos computacionales más efectivos para ciertos casos, en comparación con la transformada de Fourier, ya que, debido a su construcción, esta nueva técnica brinda información diferente o, al menos, información representada en forma distinta a la obtenida por técnicas que son utilizadas más comúnmente.

La idea básica fundamento del concepto de wavelets es parecida a la de serie de Fourier, es decir, expresar un vector  $f$  de un espacio de Hilbert (por ejemplo  $L^2(\mathbb{R})$ , el espacio de las funciones cuadrado integrables) como una sucesión de números que en el caso de la serie de Fourier es conocida como coeficientes de la serie. No obstante, existen diferencias muy claras entre las dos representaciones.

La primera disimilitud que se observa es que para el caso de las ondeletas la expansión mediante productos internos de la señal (o vector) no se realiza necesariamente en una base ortonormal. La segunda y más llamativa de las diferencias radica en que la transformada de Fourier utiliza para su análisis senos y cosenos, o sea, funciones que no están bien localizadas en el tiempo; en cambio la transformada wavelet se vale de señales de soporte compacto, esto es, de señales bien localizadas tanto en el tiempo (o espacio) como en la frecuencia.

La utilidad de esto es evitar el hecho característico de la serie de Fourier, que consiste en que un cambio local en la señal por analizar conduce a una nueva evaluación de todos los coeficientes de la serie. Dadas sus características, el análisis de Fourier es especialmente útil para señales estacionarias, mientras que el análisis por ondeletas trabaja mejor con señales transitorias [6].

Para poder construir la sucesión de coeficientes (productos internos) que constituye a la transformada wavelet, éstos deben cumplir, en primer lugar, con caracterizar completamente a la función analizada, es decir, si  $\langle \phi_j | f \rangle = \langle \phi_j | h \rangle$  para toda  $j \in \mathbb{J}$ , implica que  $f = h$ , o lo que es lo mismo, que la sucesión de vectores  $\{\phi_j\}$  genera un conjunto denso. Esto, de acuerdo con lo presentado en el capítulo anterior, significa que el complemento ortogonal de  $\{\phi_j\}$  es  $\{0\}$ .

Esta restricción es muy importante, ya que equivale a decir que el mapeo  $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$  con el que se generarán los coeficientes de la transformada wavelet, definido como  $(Tf)_j = \langle \phi_j, f \rangle$  es uno a uno. Además se agregará la restricción de que  $T$  sea acotado por arriba (continuidad), lo que garantiza la estabilidad de la representación. De esta manera se tiene:

$$\sum_j |\langle \phi_j, f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

Para cumplir la restricción de biyectividad es necesario definir un mapeo de  $L^2(\mathbb{R})$  en  $H$  que cumpla con ser nulo en el complemento ortogonal de  $TH$ . Imponiendo la restricción de que  $\sum_j \langle \phi_j, f \rangle$  sea acotada por arriba de cero, este mapeo permite invertir  $T$  [17], ya que el conjunto de productos internos ofrece una representación de  $f$  estable y completa.

En resumen, para que el mapeo  $T$  sea invertible, es decir, que realmente los coeficientes mencionados caractericen a  $f$ , es menester que se cumpla lo siguiente:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_j |\langle \phi_j, f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (6)$$

o lo que es lo mismo,

$$A \|\cdot\| \leq \sum_j |\langle \phi_j, \cdot \rangle| \leq B \|\cdot\| \quad (7)$$

Sin embargo, ésta es la definición de un frame  $\{\phi_j\}$ .

Así, pues, se ha llegado a un resultado que es sumamente importante, el cual dice que es posible recuperar la función que se ha descompuesto en una sucesión de productos internos de la forma  $\langle \phi_j, f \rangle$ , si, y solo si la familia  $\{\phi_j\}$  constituye un frame [17]. Esta consecuencia carece de utilidad práctica a menos que explícitamente se defina el operador que permita recuperar  $f$  a partir de los coeficientes mencionados; esto es particularmente sencillo para un tight frame, es decir, aquel en el que se verifica la ecuación (4), ya que esta ecuación se puede escribir como

$$A^{-1} \sum_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j| = \mathbb{I} \quad (8)$$

que aplicado a  $|f\rangle$  se tiene  $A^{-1} \sum_j \langle \phi_j | f \rangle |\phi_j\rangle = |f\rangle$ , o sea,

$$f = A^{-1} \sum_j \langle \phi_j, f \rangle \phi_j \quad (9)$$

Con base en lo anterior se observa que para recuperar la función original  $f$  basta, para un tight frame, conocer los coeficientes de la transformada wavelet y el valor de la constante  $A$ .

Es importante hacer notar que, aun cuando la ecuación (9) recuerda a una serie de Fourier, ésta no lo es, ya que  $\{\Phi_j\}$  no es necesariamente una base ortogonal, sino más bien un tight frame.

### III.3 Una Wavelet Más General.

Como seguramente habrá sido observado, a partir de la ecuación (8) este trabajo se ha restringido al caso particular de los tight frames. Lo anterior se debe al hecho, realmente deseable, de que la síntesis de una función a partir de los coeficientes  $\langle \Phi_n, f \rangle$  esté comprendida en una ecuación simple como lo es (9).

No obstante, en muchas ocasiones resulta más práctico trabajar con frames que no son tight frames, sino aquellos que verifican estrictamente la desigualdad (7). Para este tipo de frames, el análisis de una cierta función  $f$  se puede llevar a cabo por medio de la evaluación del producto interno  $\langle \Phi_n, f \rangle$ , a pesar de que la reconstrucción de  $f$  a partir de estos coeficientes no es tan obvia como en el caso de un tight frame.

Para llegar a obtener esta síntesis recuérdese que, mediante el operador  $T: H \rightarrow l^2(\mathbb{J})$ , tal que  $(Tf)_j = \langle \Phi_j, f \rangle$ , la desigualdad que caracteriza al frame está dada por (ver (3))  $A \mathbb{I} \leq T^*T \leq B \mathbb{I}$  o, lo que es lo mismo,

$$A \mathbb{I} \leq T^*T \leq B \mathbb{I}$$

donde  $T$  queda definido como  $T = T^*T$ , siendo  $T^*$  el operador adjunto de  $T$  que ya se había definido.

De aquí es claro que

$$Tf = T^*(Tf) = \sum_n \Phi_n \langle \Phi_n, f \rangle \quad (10)$$

En páginas anteriores también se había expuesto la existencia de un frame dual  $\{\varphi_n\}$  donde  $\varphi_n$  estaba dado por

$$\varphi_n = (T^* T)^{-1} \phi_n = T^{-1} \phi_n$$

Para lograr construir la ecuación de síntesis se aplica el operador  $T^{-1}$  a la ecuación (10), con lo cual se obtiene que

$$f = \sum_n T^{-1} \phi_n \langle \phi_n, f \rangle = \sum_n \varphi_n \langle \phi_n, f \rangle$$

De la ecuación anterior es claro que si se conocen los coeficientes  $\langle \phi_n, f \rangle$  en los que se ha descompuesto previamente la función  $f$ , su reconstrucción se obtiene por medio de la síntesis

$$f = \sum_n \varphi_n \langle \phi_n, f \rangle \quad (11)$$

donde  $\{\varphi_n\}$  es el frame dual. Es interesante hacer notar que el caso de un tight frame  $\varphi_n = A^{-1} \phi_n$  implica que

$$f = A^{-1} \sum_n \phi_n \langle \phi_n, f \rangle.$$

Para comprender más claramente lo que se ha expuesto, retomamos el ejemplo presentado en la sección titulada "frames". En ese ejemplo se definía [16],

$$\phi_1 = e_1 ; \quad \phi_2 = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\alpha}{2} e_2 ; \quad \phi_3 = -\frac{1}{2} e_1 - \frac{\alpha}{2} e_2$$

donde  $\alpha = 3^{1/2}$ . Para este caso se había encontrado que  $T^* T = 3/2 I$  y que  $\varphi_k = 2/3 \phi_k$ . Lo anterior es equivalente a afirmar que  $T = 3/2 I$  y que, por tanto,  $\varphi_k = T^{-1} \phi_k = 2/3 \phi_k$ . Así, pues, la ecuación (11) se expresa así:

$$v = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \phi_k \langle \phi_k, v \rangle.$$

Como se podrá observar de la ecuación (11), para que sea posible reconstruir la función  $f$  es menester generar el frame dual que hemos denotado por  $\{\varphi_n\}$ . Esto se consigue mediante la serie siguiente [16]:

$$\varphi_n = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{2T}{A+B} \right)^k \tilde{\varphi}_n \quad (12)$$

Esta serie puede ser llevada a una función más simple si se conoce la forma explícita del frame. En este trabajo nos concretaremos a indicar que si la selección del frame es tal que la razón B/A es cercana a la unidad, es decir, si el frame  $\{\tilde{\varphi}_n\}$  es parecido a un tight frame (conocido en la literatura inglesa como un snug frame), la serie puede ser recortada a un número pequeño de elementos [16]. Más aún, si B/A es aproximadamente uno, el primer término de la serie puede ser suficiente, o sea, aquel en que  $k=0$  para la ecuación (12), resultando, entonces,

$$f_{\text{aprox}} = \frac{2}{A+B} \sum_n \tilde{\varphi}_n \langle \tilde{\varphi}_n, f \rangle \quad (13)$$

Lo que en este momento resta por hacer es definir los vectores pasarán a formar el frame con el cual se hará la descomposición de la función  $f$ . Entre varios posibles, aquellos que son una representación unitaria del grupo afín son especialmente convenientes. La representación que se dará es para vectores del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , aunque de igual manera se podría haber hecho para otro espacio [16]. Así, la familia de vectores que serán usados como frame están constituidos en la siguiente forma [17]:

$$[U(s,u)\psi](x) = s^{1/2}\psi(s(x-u)) \quad (14)$$

la cual cumple con la condición de admisibilidad [18]

$$c = \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{w} dw < \infty \quad (15)$$

donde  $\Psi(w)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(x)$ . Esta condición es equivalente a afirmar que  $\Psi(0) = 0$  y que  $\Psi(w)$  es lo suficientemente pequeña en una vecindad de  $w = 0$ .

Si  $\psi$  es un vector admisible, se define la siguiente familia de vectores  $|s,u,\psi\rangle = U(s,u)\psi$ , la cual se conoce como estados

coherentes del grupo afín [17]. Por estados coherentes se entiende una familia de funciones cuadrado integrables generada a partir de una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  mediante translaciones en el dominio del tiempo (directo) y de la frecuencia (reciproco) [16].

### III.4 Interpretación y Discretización.

Haciendo una recapitulación de aquello a lo que se ha llegado, se observa que la transformada wavelet, para una cierta función  $f$ , se obtiene por la descomposición en proyecciones sobre una familia de funciones, llamada frame, que está constituida por estados coherentes del grupo afín de la forma  $s^{1/2}\psi(s(x-u))$ , es decir,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \langle s^{1/2}\psi(s(x-u)), f(x) \rangle \{s^{1/2}\psi(s(x-u))\} ds du \quad (16)$$

donde  $\langle s^{1/2}\psi(s(x-u)), f(x) \rangle$  son los coeficientes de la serie. De una manera similar a la del análisis de Fourier, a dichos coeficientes se les conoce como la transformada wavelet de  $f(x)$  [18], que formalmente se define como

$$Wf(s,u) = \langle s^{1/2}\psi(s(x-u)), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) s^{1/2}\psi(s(x-u)) dx \quad (17)$$

A la función  $\psi(x)$  se le conoce como wavelet.

Esta transformada fue introducida para el análisis de señales, principalmente señales sísmicas, por el geofísico Morlet, en 1982 [19], aunque en el terreno de las matemáticas puras sus orígenes son más remotos.

Para mayor comodidad, en la notación se define

$$\psi_s(x) = s^{1/2}\psi(sx) \quad (18)$$

cuya transformada de Fourier es

$$\Psi_s(w) = s^{-1/2}\psi(w/s)$$

de modo que

$$Wf(s,u) = \langle \psi_s(x-u), f(x) \rangle$$

donde se supondrá que tanto  $\psi(x)$  como  $f(x)$  poseen valores reales, ya que éste es el caso más común, además de que el caso complejo, aun cuando presenta una notación más engorrosa, es muy similar.

La ondeleta o wavelet es una función definida en espacio fase, es decir, en un espacio constituido en un eje por el dominio del tiempo (directo) y, en el otro, por el dominio de la frecuencia (recíproco). Aunque esta idea no es totalmente nueva, ya que el uso de otras funciones intermedias se ha generalizado en diversos campos, la utilización de la transformada wavelet presenta características muy deseables que la han hecho eficiente en terrenos como síntesis de música, y especialmente en audición y visión por computadora [16], ya que se cree que tanto el ojo como el oído humano realizan en su respectiva labor un análisis similar al de la transformada wavelet.

Observando la ondeleta dada por  $s^{1/2}\psi(s(x-u))$  se entiende cómo el parámetro  $u$  representa al tiempo (o la posición), mientras que  $s$ , al que se le denomina parámetro de dilatación, brinda la frecuencia. Para  $s \gg 1$  la ondeleta tendrá la mayor parte de sus frecuencias en la sección alta del espectro, mientras que si  $s \ll 1$ , la función  $\psi(x)$  se "extenderá" reduciendo las posibles oscilaciones y, por ende, reduciendo su frecuencia.

Para dar una interpretación de las wavelets en el contexto del análisis de señales, es conveniente observar que la transformada wavelet se puede entender como la siguiente convolución (ver ecuación (17))

$$Wf(s, u) = [f(x) * \psi_s(-x)](u) \quad (19)$$

La ecuación (19) significa que la ondeleta  $\psi(x)$  puede ser interpretada como la respuesta al impulso de un filtro pasa-banda que filtra a  $f(x)$  [18]. Lo interesante de este filtro es que, para una posición fija de la señal  $f(x)$ , la banda de frecuencias que admite el filtro puede ser recorrida al variar  $s$ . De un modo similar es posible variar  $u$ , mientras  $s$  permanece fija, recorriendo, de esta manera, a la función  $\psi(x)$  en el espacio directo. De ahí el nombre de descomposición multicanal que en ocasiones se le da a la transformada wavelet.

Reiterando de una manera más formal. Defínase el ancho de

banda (rms) de  $\psi(x)$  (que se supone normalizada) como

$$\sigma_w^2 = \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega$$

que puede interpretarse como el ancho de banda del filtro mencionado, cuya frecuencia central  $\omega_0$  se calcula al resolver la ecuación integral

$$\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0) |\Psi(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (20)$$

Similarmente, la extensión temporal (desviación estándar) de  $\psi(x)$  está dada por

$$\sigma_t^2 = \int_0^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$$

Por consiguiente, el ancho de banda de  $\psi_*(x)$  será  $s\sigma_w$  y estará centrado en  $s\omega_0$ , mientras que la extensión temporal de la misma función será  $\sigma_t/s$ .

Ahora bien, dado que  $\sigma_t$  y  $\sigma_w$  cumplen con el principio de incertidumbre [6] (o desigualdad de Heisenberg)  $\sigma_t \sigma_w \geq 1/4\pi$ , entonces, conforme  $\sigma_t$  aumenta,  $\sigma_w$  debe disminuir, y viceversa.

Más aún, para  $\psi_*(x)$  se cumple que dada una  $s$  la razón entre el ancho de banda y la frecuencia no cambia, esto es,

$$s\sigma_w/\omega = s\sigma_w/s\omega_0 = \sigma_w/\omega_0 = \text{constante},$$

de modo que tanto  $\sigma_t$  como  $\sigma_w$  van variando de acuerdo con el modo como lo hace  $\omega$ . Esto tiene como consecuencia que, para frecuencias altas ( $s \gg 1$ ),  $\sigma_t$  sea más pequeño debido al principio de incertidumbre

$$\sigma_t \geq 1/(4\pi s\omega_0) \quad (21)$$

y, por tanto, que el análisis por ondeletas brinde una mejor resolución temporal. Para frecuencias bajas sucede lo contrario, y la resolución temporal disminuye.

En consecuencia, la transformada wavelet es ideal para analizar señales que en distintos periodos presentan distribuciones de tiempo muy variadas, en especial aquellas compuestas de frecuencias altas de corta duración y frecuencias bajas de larga duración [6].

Esta característica más que ser una complicación es una ventaja, ya que, en palabras de Daubechies [16], "nos permite realizar un acercamiento (zoom) en las irregularidades de una señal, mediante el uso de ondeletas más y más concentradas que corresponden a frecuencias más y más altas."

Con el fin de que la explicación sea más concreta, nos limitaremos a una wavelet que es conocida en la literatura como "mexicanhat" wavelet [20], la cual se define como:

$$\psi(x) = (1-x^2)\exp(-x^2/2) \quad (22)$$

y cuya transformada de Fourier es :

$$\Psi(\omega) = \omega^2 \exp(-\omega^2/2) \quad (23)$$

No presenta dificultad demostrar que esta wavelet es admisible.

En la figura uno se presenta la gráfica de esta función para tres diferentes valores de escalamiento  $s$ , la cual ofrece la posibilidad de observar el efecto que sufre la ondeleta cuando es sometida a la acción del parámetro de escalamiento  $s$  por medio de la ecuación (18). La ecuación (22) se obtiene cuando  $s=1$ . Nótese que conforme la  $s$  disminuye, la ondeleta se expande.

En la figura dos se muestra el contenido frecuencial de las mismas ondeletas. En ellas se observa la manera en que el ancho de banda del supuesto filtro pasa-banda, que la transformada wavelet representa, se angosta de manera que  $s$  disminuye.

De la figura es posible estimar  $\sigma_\omega$ , de modo que para  $s=1$  el ancho de banda es aproximadamente 0.88 rad/s, de tal suerte que utilizando que el ancho de banda para  $s=0.5$  es  $0.5\sigma_\omega$  y para  $s=0.25$  es  $0.25\sigma_\omega$ , se obtiene para esos valores de  $s$  que el ancho de banda es 0.44 rad/s. y 0.22 rad/s, respectivamente. Además, los valores centrales de la banda de paso para cada valor de  $s$  se obtienen como  $s\omega_0$ , donde  $\omega_0$  se obtiene de resolver la ecuación (20)<sup>1</sup>, que para el caso de la mexicanhat wavelet es de 1.5045057 rad/s. Este resultado puede ser comprobado en la figura.

---

<sup>1</sup>La manera de resolverla puede ser consultada con el autor.

# MEXICANHAT WAVELET

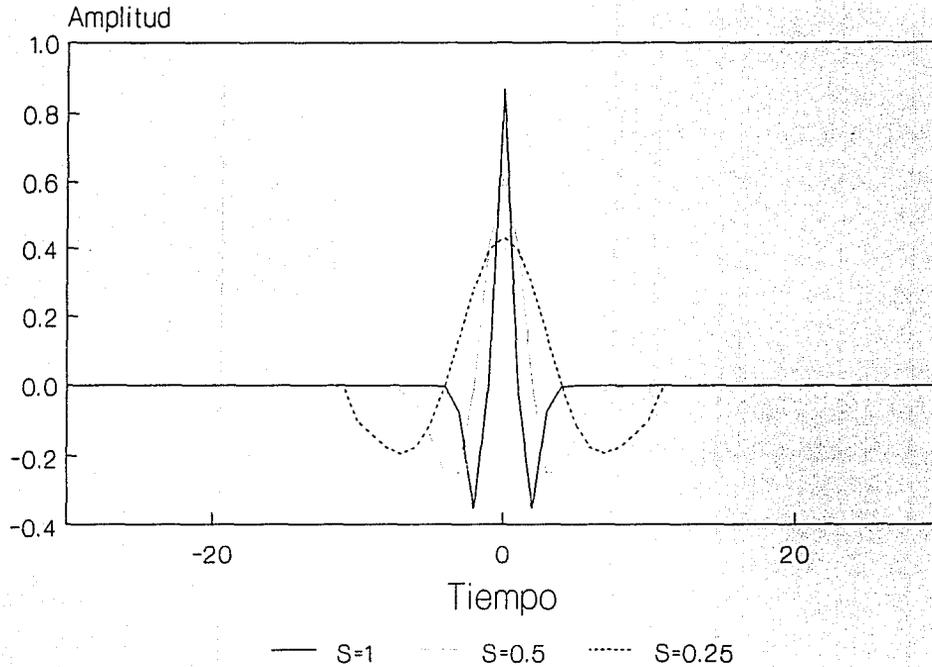


FIGURA UNO

# TRANSFORMADA DE FOURIER DE FIGURA UNO

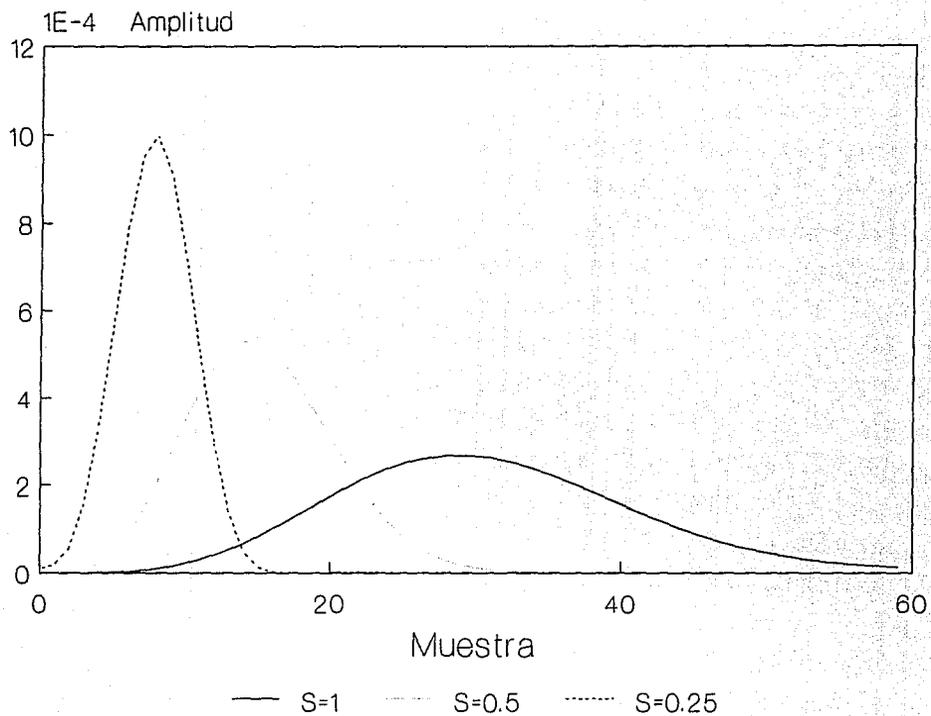


FIGURA DOS

Continuando con el paralelismo que se ha tratado de establecer entre la transformada de Fourier y la transformada wavelet, el paso obligado, sobre todo si lo que se busca es desarrollar una serie de algoritmos computacionales basados en la transformada wavelet, es el de la discretización de la misma. Para ello es necesario muestrear tanto el parámetro  $u$  como el  $s$ , pero conservando el hecho relevante de que la descomposición se realice sobre un frame; para ello se propone la siguiente discretización:

Sea  $j, n \in \mathbb{Z}$  y  $\psi$  una función de banda limitada entre  $l$  y  $kl$ , con  $l > 0$  (con lo cual  $\psi$  es admisible automáticamente) y  $k > 1$ , entonces se tiene que el conjunto de vectores

$$\{ |\alpha^j, \frac{n}{\alpha^j} \frac{2\pi}{[kl-1]}, \psi \rangle \}$$

es un frame [17], en donde se define la transformada wavelet discreta como [18]

$$\begin{aligned} W_d(s, u) &= W_d(j, n) = W_f(\alpha^j, n\beta\alpha^{-j}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \alpha^{j/2} \psi(\alpha^{j/2} (x - n\beta\alpha^{-j})) dx \end{aligned} \quad (24)$$

con  $\beta = 2\pi/[kl-1]$  y  $\alpha$  el paso de dilatación, cuyo valor hasta cierto límite es arbitrario, como se verá más adelante.

El haber hecho esta discretización, es decir, haber realizado la siguiente "substitución":

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow \alpha^j \\ u &\longrightarrow n\beta\alpha^{-j} \end{aligned} \quad (25)$$

ofrece una manera por demás conveniente de muestrear tanto el parámetro que tiene que ver con la frecuencia ( $s$ ), como aquel que se desarrolla en el dominio del tiempo ( $u$ ). Esta manera de pasar del dominio continuo al discreto tiene por objeto cubrir todo el espacio fase (directo y recíproco), el cual pasa a ser lo que se conoce como un latiz.

La discretización seleccionada no contraviene la capacidad de la ondeleta de variar su resolución temporal a medida que la frecuencia cambia, ya que conforme la  $j$  disminuye, la  $\alpha^j$  ( $s$ ) aumenta y la  $\psi_s(x)$  se va "encogiéndose" (aumentando su resolución

espacial) pero manteniendo su forma o soporte, de modo tal, que la frecuencia de  $\psi_s(x)$  es cada vez mayor. Un proceso inverso se da conforme la  $j$  aumenta (la ondeleta se extiende y disminuye su resolución temporal).

Para comprender mejor cómo la ondeleta muestreada

$$\psi_s(x) = s^{1/2}\psi(sx) = \alpha^{1/2}\psi(\alpha^j x)$$

cubre completamente el espacio fase, formado en el eje vertical por los valores de  $s$  (frecuencia) y en el horizontal por los valores de  $u$ , obsérvese la figura tres que representa el muestreo de espacio fase (latiz). En ella se observa que, a medida que nos movemos en la dirección que disminuye  $j$  (aumenta  $s$ ), la ondeleta en el dominio del tiempo se hará más "angosta", lo que obligará, de acuerdo con la ecuación (21) a tomar un paso de corrimiento en el tiempo ( $u$ ) más pequeño (esto es  $n\beta\alpha^{-j}$ ), aumentando así la resolución temporal. El cubrimiento del espacio fase se logra al entender que en cada punto del latiz con coordenadas  $(u_m, s_n\omega)$  está colocada una celda (ondeleta en espacio fase) igual a  $[u_m - \sigma t / s_n, u_m + \sigma t / s_n] \times [s_n\omega - s_n\sigma_w, s_n\omega + s_n\sigma_w]$  como se muestra en la figura cuatro [18], en la cual va variando  $\sigma_w$  y  $\sigma_t$  como ya ha sido mencionado.

Nótese que si se utilizara un muestreo uniforme en el tiempo, independiente de la frecuencia, a medida que las ondeletas se hicieran más concentradas en frecuencia quedarían huecos en el espacio que no estarían cubiertos por la ondeleta (o celda).

Al respecto, es posible notar que la transformada wavelet descompone a la señal en un conjunto de bandas de frecuencia, con la peculiaridad de poseer un tamaño constante en una escala logarítmica [18].

En lo que respecta a los valores que deben tomar alfa y beta, se sugiere que alfa tome el valor de 0.5 y que beta se seleccione de acuerdo con la ondeleta  $\psi$  con que se decida trabajar. El criterio para escoger beta se obtiene pensando en la síntesis, o sea, se busca una beta tal que para la ondeleta seleccionada el conjunto de coeficientes forme un snug frame, es decir, aquel cuya razón B/A es cercana a la unidad.

Para lograr esto se suele seleccionar una beta pequeña, ya que conforme beta decrece (sobremuestreo) algunos frames se van comportando cada vez más como base ortonormal; en algunos casos el

ESPACIO FASE MUESTREADO (ALFA,BETA=0.5)

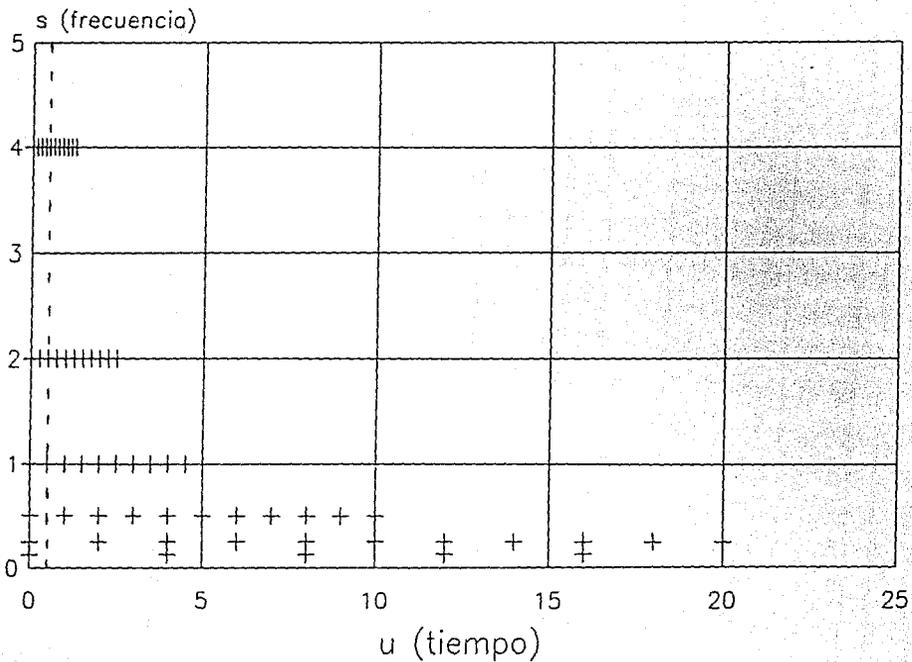


FIGURA TRES

# CUBRIMIENTO DEL ESPACIO FASE

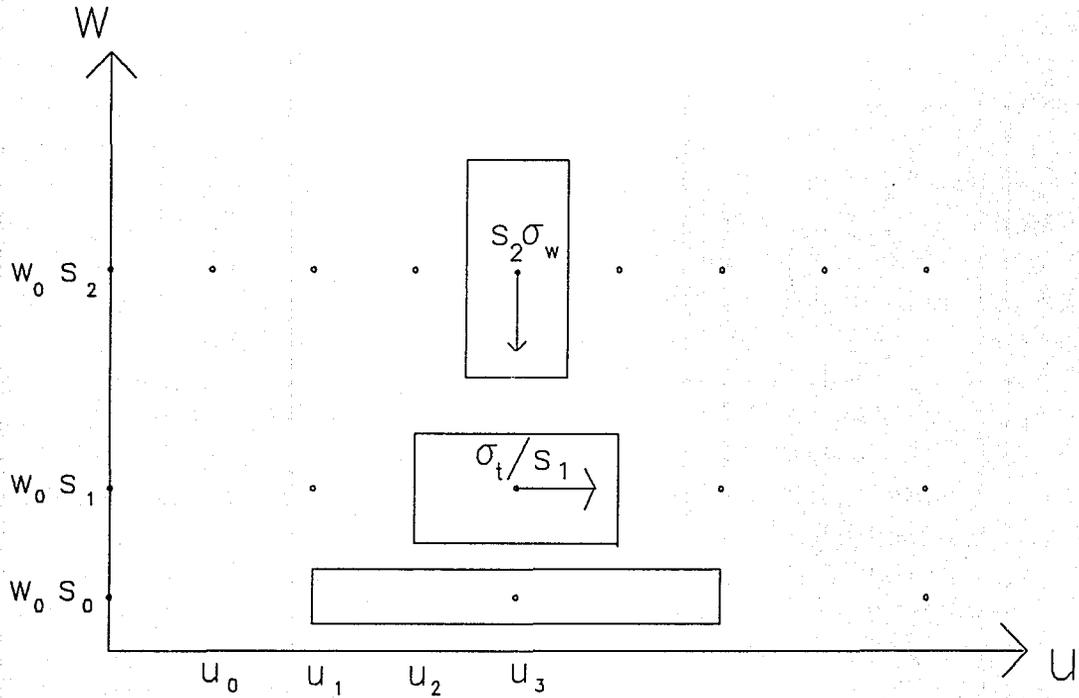


FIGURA CUATRO

límite es la base ortonormal [6]. Lo que es importante destacar es que  $\beta$  depende de la  $\psi$  seleccionada, y que no es posible (hasta donde se sabe) dar una "receta" que permita seleccionar  $\beta$  como función de  $\psi$ . Asimismo es importante destacar que no cualquier  $\psi$  puede formar una tight frame y mucho menos una base ortonormal. Por tanto, es crucial hacer un balance entre densidad de muestreo ( $\beta$ ) y restricciones en  $\psi$ , de modo que aunque no se haga la proyección sobre una base ortonormal se puedan utilizar ondeletas sencillas.

Afortunadamente existe una serie de tablas que es resultado de un análisis complicado realizado por Daubechies. La tabla para el caso de la mexicanhat wavelet es la siguiente [16]:

<u>beta</u>	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>B/A</u>
0.25	13.091	14.183	1.083
0.50	6.546	7.092	1.083
0.75	4.364	4.728	1.083
1.00	3.223	3.596	1.116
1.25	2.001	3.454	1.726

Para la mexicanhat wavelet es recomendable tomar valores de beta entre 0.25 y 0.75, en los cuales B/A tiene una diferencia de menos del 1% con respecto a la unidad.

## CAPITULO IV

### IMPLANTACION Y AJUSTE DE PARAMETROS<sup>3</sup>

#### IV.1 Simulación de Algoritmos.

Este capítulo tiene como finalidad hacer notar al lector, que los aspectos teóricos que han sido expuestos bien pueden ser llevados a la práctica. Para ello se explicará la manera en que estos resultados teóricos conducen a la creación de una serie de algoritmos, así como su implantación en una computadora digital.

El primer paso en la creación de un grupo de programas que tratan del estudio de cierta señal es, lógicamente, desarrollar un programa que genere dicha señal. Esta debe estar basada en cierto modelo que nos permita conocer los rasgos más significativos de ella para, de este modo, poder validar los algoritmos que se generen. No se podrán utilizar señales más generales sino hasta el momento de asegurar que los programas son consistentes entre sí.

De esta manera es posible, mediante el programa SERIEGEN (codificado en lenguaje C como todos los que se presentan en este trabajo), generar una señal basada en un modelo ARMA, ya sea por la introducción de los coeficientes  $a[k]$  o  $b[l]$  que caracterizan al modelo, o, bien, por la introducción de los ceros y polos del sistema; lo anterior permite saber si se está creando un sistema estable o inestable. Asimismo, el programa puede ser alimentado con una delta de Dirac o un ruido gaussiano blanco de media cero y varianza variable que, de hecho, es la señal que desempeña el rol de entrada al sistema ARMA. La salida es la señal sobre la que se tiene interés.

---

<sup>3</sup>Para la mejor comprensión de este capítulo se recomienda leer el Apéndice B

Los métodos que permiten realizar una investigación de la señal en el dominio de la frecuencia son de gran utilidad para interpretar y validar a la transformada wavelet, ya que ésta propone una representación en espacio fase.

Atendiendo a la necesidad planteada, se ha desarrollado el programa PERIGRAM que permite calcular un periodograma valiéndose de una FFT. Para lograrlo es menester introducir una serie temporal (a la que se le calculará el periodograma) cuyo tamaño sea preferentemente una potencia de dos, ya que, de no ser así, se efectúa un "zero-padding" sobre los datos, hasta completar un número de datos igual a la potencia de dos inmediata superior. La serie de salida, o sea el periodograma, consistirá en la mitad de los datos de entrada, tal y como se explicará más adelante.

El programa PERIGRAM permite la selección de una ventana (Welch, Parzen, Hanning, cuadrada), lo cual es deseable si se tiene en cuenta que ésta es una de las principales diferencias entre las técnicas tradicionales y las paramétricas.

Para llevar a buen fin la implantación de técnicas de análisis espectral paramétricas se han creado dos programas que generalmente operan en conjunto. El primero es el programa DURBIN, que permite calcular los coeficientes de un proceso AR que modelan la serie temporal que alimenta al mencionado programa. El cálculo de los coeficientes se realiza mediante el algoritmo de Levinson; infortunadamente el programa DURBIN no indica cuál es el orden óptimo del sistema AR que debe seleccionarse; sin embargo, la eficiencia del programa ofrece la posibilidad de hacer pruebas para diferentes órdenes, recayendo, de esta manera, la responsabilidad de escoger el orden, sobre el usuario del programa, valiéndose, para ello, quizá, de algún criterio de error.

El segundo programa lleva por nombre ARMASPEC y consiste en un algoritmo que brinda la posibilidad de calcular la densidad de potencia espectral para un proceso AR, MA o ARMA. Utilizando los coeficientes AR que ofrece el programa DURBIN, no presenta dificultad alguna calcular la densidad de potencia espectral, o espectro paramétrico, para cierta señal. Más aún, mediante el programa ARMASPEC es factible calcular el espectro verdadero (no aproximado) de la señal que nos interesa, ya que, como se

recordará, la señal con la que se ha decidido trabajar es el resultado de un proceso ARMA del cual conocemos los coeficientes exactos que, introducidos en ARMASPEC, dan el espectro verdadero.

Es importante hacer notar que los dos programas que ofrecen un espectro como resultado crean un archivo que consiste solamente en la parte positiva del eje de las frecuencias (esto puede ser fácilmente modificado) cuyo tamaño es de la mitad de aquél con el que se alimentó el programa. Esto responde al hecho de suponer que se está trabajando con señales reales, positivas, de tal modo que su espectro es simétrico respecto al eje de frecuencia nula.

En cuanto a los algoritmos que calculan la transformada wavelet, se han desarrollado tres programas de los cuales el más elaborado, ya que ofrece una serie de posibilidades que los demás no presentan, es el denominado WAVETLAN.

Este programa, en su primera etapa, efectúa la lectura de una serie temporal. Posteriormente, mediante el despliegue de una tabla, permite seleccionar el parámetro beta de discretización. El programa WAVETLAN utiliza una mexicanhat wavelet normalizada, con parámetro de muestreo, alfa de 0.5.

El programa calcula, valiéndose de la ecuación (24) (mediante una integral numérica en donde  $f(x)$  vendría a ser la serie de entrada y  $\psi(x)$  la ondeleta), la transformada wavelet para determinados valores del parámetro  $s$ , que el usuario seleccione de una manera relativamente independiente, y sobre el intervalo temporal que el mismo escoja. Estos coeficientes son archivados de una manera también independiente.

La razón de tratar a cada una de las frecuencias de una manera autónoma obedece al hecho de que para un mismo periodo temporal el número de puntos será distinto dependiendo de la frecuencia seleccionada, por lo que es difícil asociarle a este tipo de datos un arreglo eficiente en lo que se refiere a memoria (por ejemplo rectangular). Asimismo, el método que aquí se utiliza permite una mayor libertad en cuanto a la selección del intervalo temporal para cada frecuencia, además de que la interpretación de la transformada wavelet para una señal dada es más sencilla si se va estudiando frecuencia por frecuencia.

El argumento anterior se aplica igualmente al caso de graficación, de modo que el programa WAVETLAN, en vez de crear una

gráfica tridimensional poco inteligible, permite la representación de hasta tres cortes de este espacio tridimensional, en el que cada uno representa el dominio del tiempo para tres frecuencias de interés.

Un corte de este tipo en el dominio de la frecuencia sería poco útil debido a la manera en que ha sido muestreado, ya que, como se puede apreciar en la figura tres, éste no necesariamente toma puntos del espacio con los cuales formar la gráfica. Lo anterior se observa más claramente en el corte con línea punteada de la misma figura, en la que solamente puntos en las frecuencias de  $j = 0, -1, -2$  son tomados, mientras que los de las frecuencias que corresponden a  $j = 1, 2, 3$  no son representados debido a la poca concentración de puntos en el eje del tiempo que existe para dichas frecuencias.

La importancia de los otros dos programas que permiten calcular la transformada wavelet radica en el hecho de que constituyen una herramienta para validar los resultados que arroja el programa WAVETRAN, por lo cual generan archivos del mismo tipo.

El primero de estos programas tiene como apelativo WAVFOUR. Para entender su funcionamiento basta observar las ecuaciones (17) y (19) que se escriben nuevamente.

$$Wf(s, u) = s^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(-s(u-x)) dx = s^{1/2} [f(x) * \psi(-sx)](u)$$

Es evidente que la transformada wavelet puede ser entendida como una convolución (recordar la interpretación con base en la respuesta impulsional de un filtro que se dio en el capítulo anterior; ver ecuación (19)). Para llevar a cabo esta operación por medio de una computadora digital, una vez que se ha definido la serie  $f(x)$  de entrada, basta seguir los pasos que a continuación enumeramos:

- i) realizar el cálculo de la serie para la ondeleta seleccionada  $\psi(-sx)$  con  $s$  fija,
- ii) obtener de ambas series su FFT,
- iii) multiplicar las dos series frecuenciales término a término,
- iv) obtener de la serie resultante su FFT inversa y

multiplicarla por la raíz de  $s$ .

El programa que permitirá complementar los dos anteriores calcula la transformada wavelet valiéndose de que la ondeleta definida en la expresión (17) puede, sin dificultad alguna, interpretarse como la correlación entre la serie en estudio  $f(x)$ , y la función  $\psi(sx)$ . En efecto,

$$Wf(s,u) = s^{1/2} \text{CORR}[ f(x) , \psi(sx) ]$$

Por consiguiente, el programa WAVCORR genera la serie  $\psi(sx)$  para un  $s$  dado, y efectúa la correlación con la señal  $f(x)$ . El cálculo de la correlación se puede llevar a cabo mediante los distintos estimadores que para tal fin existen (sesgado, insesgado, máxima verosimilitud, etc.). El estudio de dichos estimadores está fuera del alcance de este trabajo, no obstante, remitimos al lector a la bibliografía [21], donde podrá encontrar programas que realizan los mencionados cálculos.

Como se habrá notado, en los dos métodos utilizados para calcular la transformada wavelet, que utilizan, por un lado, la convolución (mediante FFT's) y, por otro, los estimadores de correlación, no aparece en ningún momento el parámetro beta. Esto, aunque pareciera una ventaja, no lo es, ya que es precisamente el parámetro  $u$  el que permite variar el periodo de muestreo de la ondeleta, dependiendo de la frecuencia a la que se esté trabajando (esto es,  $s$ ), o sea, es precisamente esta manera de variar  $u$  lo que hace tan valioso al análisis por ondeletas.

Obsérvese cómo la integral de la ecuación (17) admite tener un muestreo un tanto independiente de  $f(x)$  y de  $\psi(s(x-u))$ , lo cual no puede lograrse en el caso de los programas WAVCORR y WAVFOUR; es este muestreo el que permite cubrir todo el espacio, aun para  $s$  muy grande. Sin embargo, hay que enfatizar que para el caso de  $s=1$  los tres métodos brindan idénticos resultados, y solamente tenderán a ser diferentes conforme se tomen valores de  $s$  más y más alejados de la unidad.

## IV.2 Validación de Métodos e Interpretación.

Con el fin de estudiar el desempeño de los algoritmos que se han presentado, se ha decidido utilizar una señal cuyas características no presenten complicaciones, ya que lo único que por el momento se persigue es validar los programas desarrollados, de una manera sencilla, pero eficiente.

Así, pues, la señal que se utilizará, generada a partir del programa SERIEGEN, es la salida de un sistema AR de orden dos alimentado por una delta de Dirac. En cuanto a la selección de los dos polos, éstos son complejos conjugados, ya que así se obtiene una señal real, y ésta es la razón por la que en ocasiones se menciona un solo polo, siendo que en realidad son dos. El polo que se ha considerado conveniente es aquel cuya fase es de 45 grados (0.7854 rads.) y posee una magnitud de 0.8, lo que garantiza que la señal no crezca indefinidamente. Una gráfica de dicha señal puede ser apreciada en la figura cinco.

Los valores que adquieren los coeficientes del sistema AR que se encargan de generar la señal son:

$$a[1] = -1.20208 \quad \text{y} \quad a[2] = 0.72250.$$

Mediante dichos coeficientes es posible conocer el espectro verdadero de la señal. Utilizando el programa ARMASPEC se obtiene la figura seis en la que se observa un máximo para la abscisa 16, que, a su vez, equivale a 0.7854 rads (45 grados), lo cual concuerda con la teoría.

Este último cálculo quizá merezca una explicación, ya que será efectuado continuamente. Se considera que los espectros en estudio constan de 128 muestras que equivalen a  $2\pi$ , de modo que cada intervalo frecuencial equivale a  $2\pi/128$  radianes y, por tanto, 16 muestras equivalen a  $32\pi/128 = 0.7854$  rads. Sin embargo, debe tenerse en mente que generalmente se utilizará como unidad de medida la fracción de frecuencia total, es decir, cada uno de los  $N/2$  puntos en la gráfica del espectro equivale a  $1/N$  de la frecuencia de muestreo. La relación entre la fracción de frecuencia y los radianes es  $\omega = 2\pi f$ , de modo que la fracción de frecuencia para 0.7854 rads. es 0.125, ya que  $N = 128$ . En resumen,  $\omega = 2\pi f = 2\pi/N$ .

SEÑAL DE PRUEBA (AR, POLO 450)

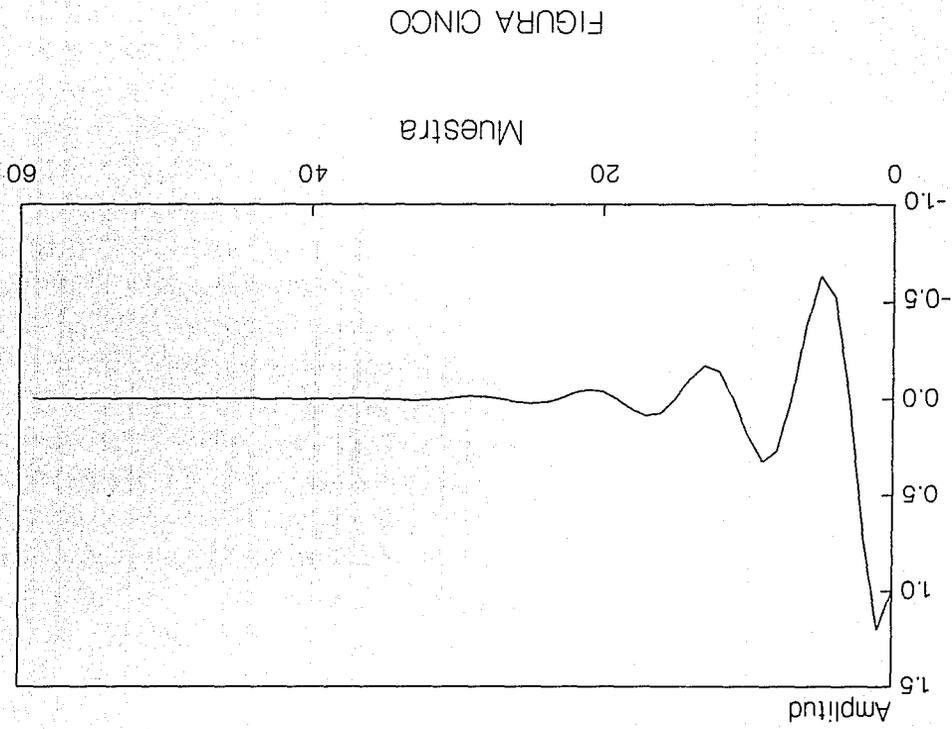


FIGURA CINCO

# ESPECTRO VERDADERO SENAL DE PRUEBA

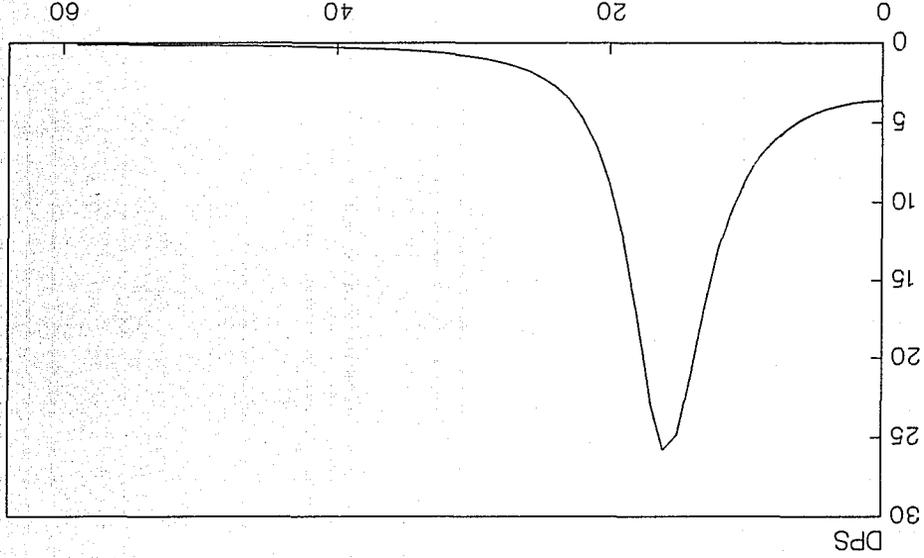


FIGURA SEIS

Muestra

En la figura siete se muestra el periodograma de la señal en estudio, obtenido por medio del programa PERIGRAM. En ella se observa que la mayor parte del contenido frecuencial de la señal se encuentra para una fracción de frecuencia de 0.125 (es decir, 0.7853 rads.), o lo que es lo mismo, la abscisa 16.

Para validar el programa PERIGRAM se utilizó el programa DURBIN sobre la señal en estudio, dando como resultado los siguientes coeficientes de Levinson, de orden 2 y 5 :

Orden 2 :

a[1] = -1.207186

a[2] = 0.726111

Orden 5 :

a[1] = -1.212744

a[2] = 0.735538

a[3] = -0.007783

a[4] = -0.000044

a[5] = 0.000250

Como se podrá apreciar, un modelo de orden 2 es suficiente para el sistema original, ya que ambos valores son sumamente cercanos a -1.202082 y 0.72250. De esta manera, con ayuda del programa ARMASPEC, se han generado los espectros para los sistemas AR de orden 2 y 5 que se aprecian en la figura ocho. La comparación con los espectros de las figuras seis y siete permite afirmar que los programas de análisis espectral son consistentes entre sí.

Una vez que se ha creado la estructura sobre la cual trabajar, se hará un análisis de los resultados obtenidos a partir del programa WAVETRAN. Al correrlo se ha seleccionado como parámetro beta el valor 0.25, que permite utilizar un snug frame.

Para seleccionar los valores de  $j$ ,  $y$ , con ello, establecer la frecuencia de las ondeletas con que se va a trabajar (i.e. la frecuencia de los cortes horizontales en espacio fase, ver figura tres), se parte del hecho de que la señal por analizar posee un gran contenido frecuencial para 0.7853 rads., de ahí que resulte lógico seleccionar los parámetros  $j=0, j=1, j=2$  y  $j=3$ , que corresponden, respectivamente, a ondeletas centradas en las frecuencias 1.5 rads., 0.75 rads. 0.37 rads. y 0.188 rads.

Para mayor claridad de lo que se expondrá, se presenta la

# PERIODOGRAMA DE LA SEÑAL DE PRUEBA

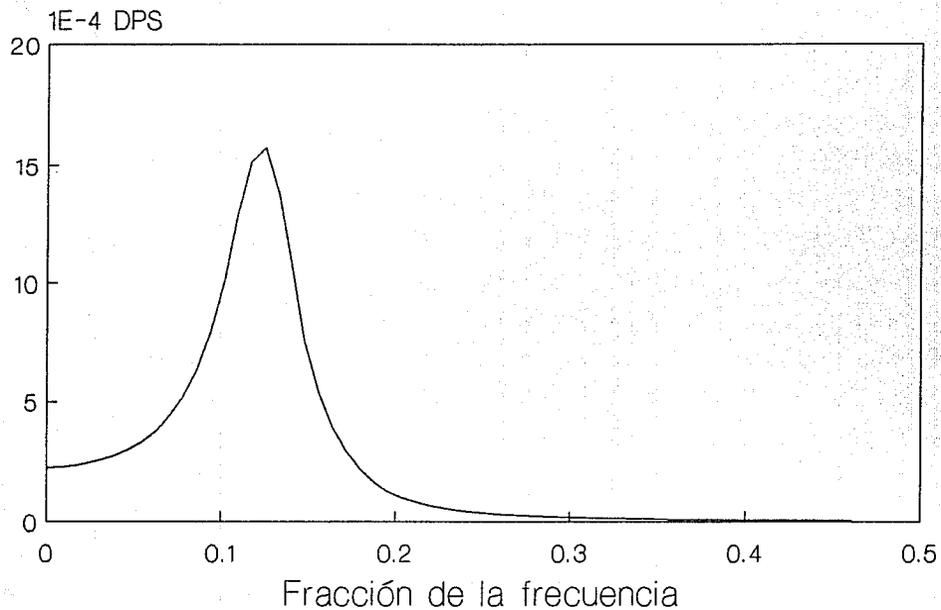


FIGURA SIETE

# ESPECTRO PARAMETRICO DE SEÑAL DE PRUEBA

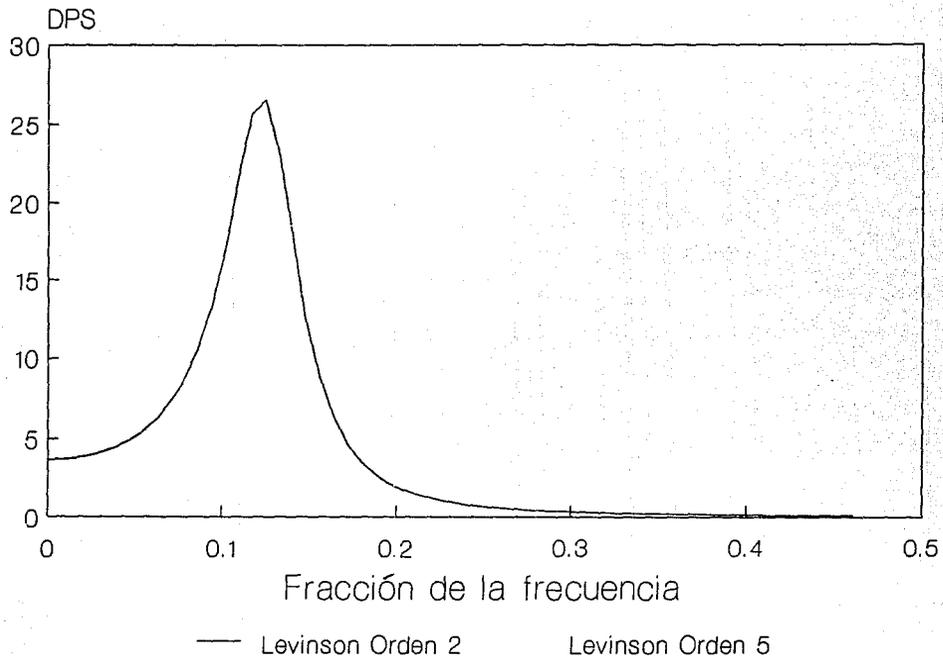


FIGURA OCHO

siguiente tabla que ofrece las equivalencias en los distintos sistemas de medida frecuenciales:

<u>Valor de J</u>	<u>Radianes</u>	<u>Fracc.Frecuencia</u>	<u>Abscisa</u>
0	1.5	0.238	30
1	0.75	0.119	15
2	0.37	0.058	8
3	0.18	0.029	4

Con el fin de aclarar la manera de relacionar los valores en radianes que corresponden a las diferentes  $j$ , es menester recordar que la transformada wavelet puede ser interpretada como un filtro pasa banda, cuyo punto medio (de la banda) para la mexicanhat wavelet es  $\omega_0 = 1.5045057$ . Para encontrar la frecuencia correspondiente a  $j$  basta multiplicar  $\omega_0$  por el parámetro de frecuencia  $s$ , o sea  $\omega_0 s^j$  para el caso discreto.

Continuando con el programa WAVETRAN, una vez seleccionada la  $j$  se procede a delimitar un intervalo temporal sobre el cual se "deslice" la ondeleta, obteniendo los coeficientes respectivos. Estos coeficientes se presentan de manera gráfica, en la figura nueve, para los valores  $j = 0, 1, 2, 3$ .

De la misma, y comparando con la figura cinco, se observa que en el caso  $j=1$  los coeficientes wavelet se aproximan mucho a la señal original. Lo mismo sucede para  $j=0$ . Nótese también que estos coeficientes son los que presentan valores más altos (superior a 1.5 en el primer lóbulo y cercano a 0.8 en el segundo), lo cual es debido a que, para  $j=1$  la ondeleta trabaja con la frecuencia (0.75 rads.) que más se asemeja a aquella que caracteriza al espectro de la señal en estudio (0.78 rads.). En los casos  $j=2, 3$  se observa cómo para bandas de frecuencia más baja el contenido frecuencial de la señal es menor.

La interpretación dada en el párrafo anterior resulta más clara si se estudian los espectros de las ondeletas obtenidas mediante el programa PERIGRAM, y se utiliza la tabla expuesta arriba. En la figura diez se muestran los periodogramas de la ondeleta para  $j=0, 1, 2, 3$ . Para el espectro de  $j=0$  se observa que el mayor contenido frecuencial está en 0.125, tal y como se esperaba.

*COEF. WAVELET DE LA SEÑAL DE PRUEBA*

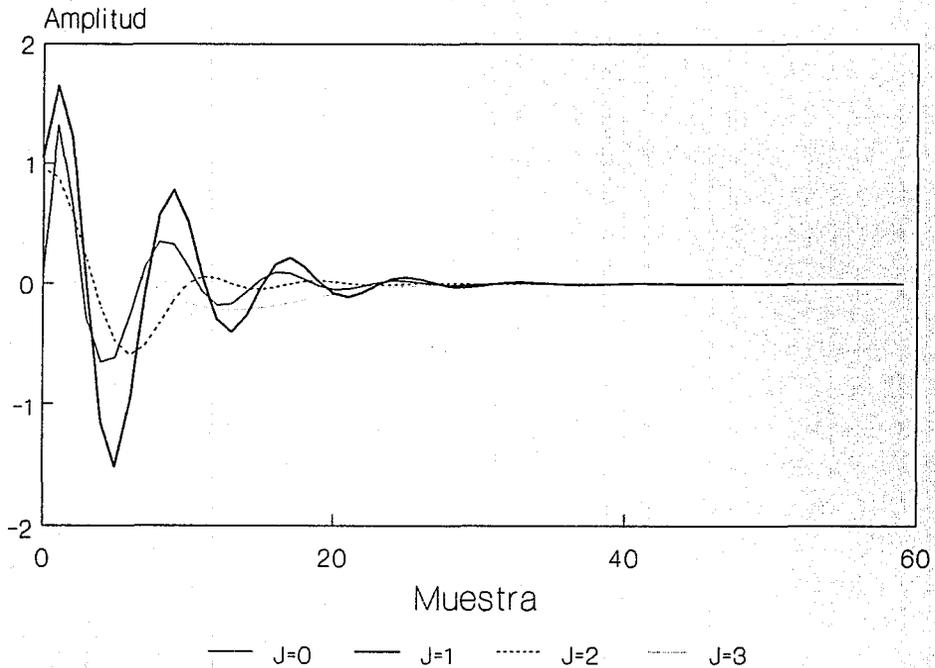
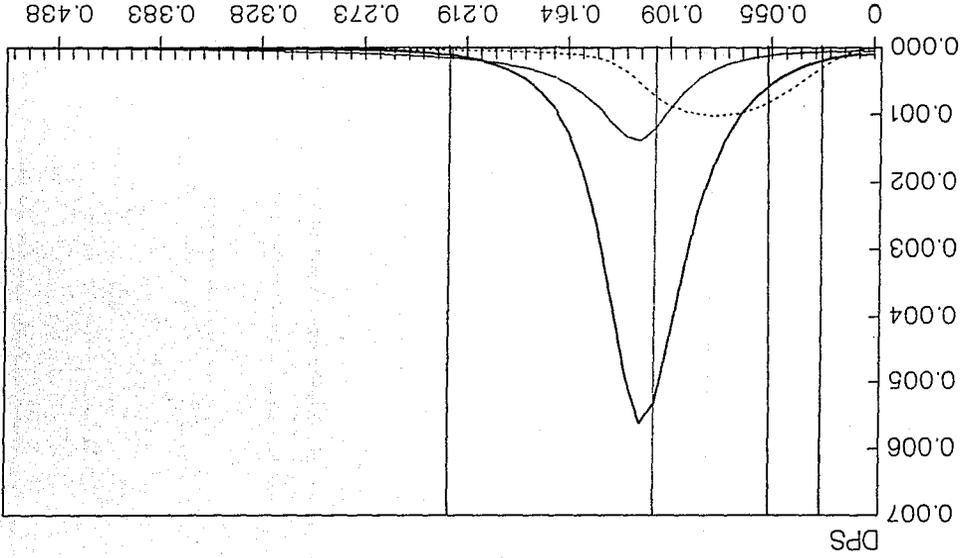


FIGURA NUEVE

ESPECTRO COEF. WAVELET SENAL DE PRUEBA



— j=0 — j=1 ..... j=2 - - - - j=3

FIGURA DIEZ

Es interesante hacer la comparación con la figura siete.

El caso  $j=1$  es similar, aunque debe notarse la mayor amplitud, consecuencia de que la frecuencia de la ondeleta para  $j=1$  es casi 0.78 rads. Esto será más claro observando las líneas verticales que marcan las frecuencias centrales que caracterizan a las cuatro ondeletas que realizan el análisis. Para  $j=0$ , la línea se encuentra arriba de la frecuencia que es propia de la señal, y, por ende, la amplitud del máximo no es tan grande como para  $j=1$ , en la que la línea casi coincide con el máximo.

El análisis para  $j=2,3$  confirma la interpretación, ya que además de observar el espectro recorrido hacia el origen, las amplitudes de los máximos son menores en relación con las otras dos.

A manera de resumen, se afirma que la transformada wavelet se comporta como un analizador de la señal, no solo en intervalos de tiempo determinados, sino lo que resulta más interesante, en intervalos de frecuencia o bandas cuyo centro está dado por  $j$  y que va variando (dado que  $j$  es un exponente) de manera logarítmica. En consecuencia, es posible analizar una señal, por medio de la transformada wavelet, en cierto intervalo temporal y para cierta banda específica, con la gran ventaja de que a medida que se seleccionan frecuencias más altas la resolución temporal se va haciendo más fina.

Aun cuando el programa WAVETAN ha resultado útil como una herramienta de análisis, no se debe olvidar que para validar los resultados obtenidos es necesario hacer uso de los programas WAVCORR y WAVFOUR para los valores de  $j$  con que se ha venido trabajando.

Los resultados que brinda el programa WAVFOUR están graficados en la figura once, mientras que los que se obtienen por medio de WAVCORR aparecen en la figura doce; ambas gráficas presentan la transformada wavelet para los valores de  $j=0,1,2,3$ .

Comparando estas dos gráficas con la de la figura nueve, se observa que tanto el programa que utiliza estimadores de correlación, como el que usa la convolución, ofrecen resultados similares a los del programa WAVETAN, al menos para los casos  $j=0$  y  $j=1$ . Esto es especialmente cierto para el primero, ya que en el segundo programa se observan algunos problemas de borde. Para los

COEF. WAVELET OBTENIDOS CON WAVEFOUR

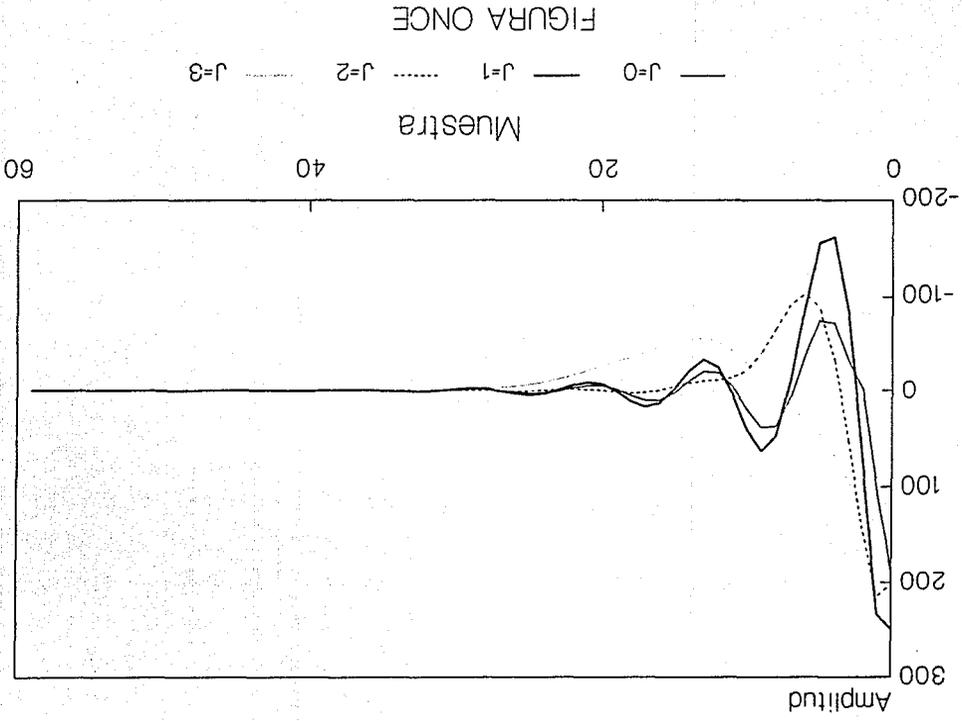


FIGURA ONCE

—  $j=0$     - - -  $j=1$     ····  $j=3$

COEF. WAVELET OBTENIDOS CON WAVECORR

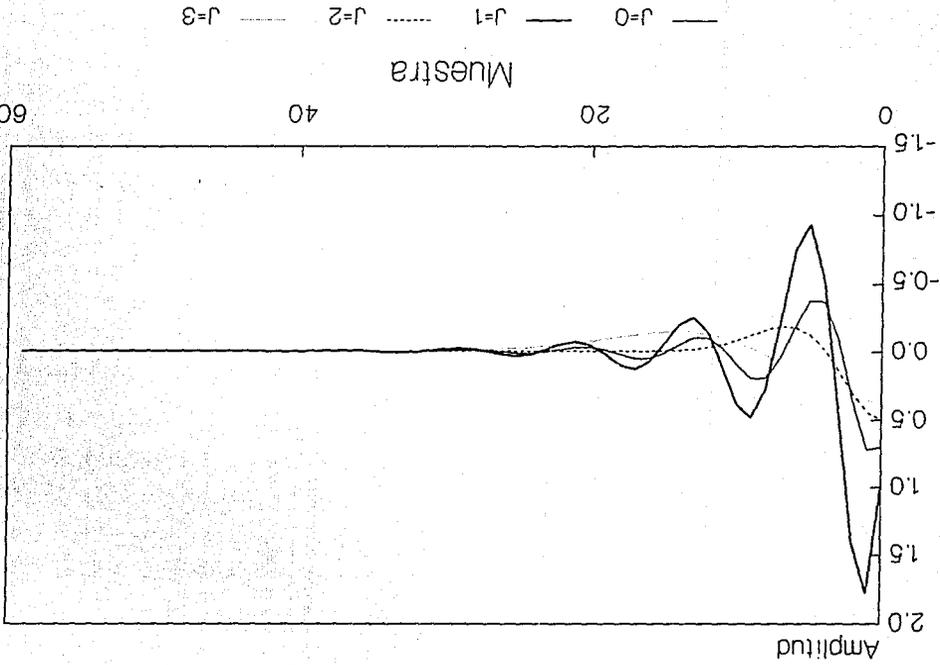


FIGURA DOCE

—  $j=0$     - - -  $j=1$     .....  $j=2$     - . - .  $j=3$

otros dos valores de  $j$  aparecen diferencias que serán interpretadas si, utilizando la experiencia obtenida en el análisis del programa WAVETLAN, se estudian los espectros. Así, pues, se presentan las figuras trece y catorce similares a la figura diez.

Como se podrá apreciar, las dos figuras coinciden con la gráfica diez en aquellos puntos en que se presenta un máximo para  $j=0$  y  $j=1$ , siendo nuevamente  $j=1$  la gráfica de mayor amplitud. Para  $j=2$  y  $j=3$  se observa que los espectros de la gráfica catorce son más parecidos a los de la figura diez, ya que los espectros de los coeficientes obtenidos mediante WAVFOUR están ligeramente corridos hacia el origen. Sin embargo, ninguno de los dos métodos ofrece un espectro netamente confiable para estos valores de  $j$ . Por tanto, el uso del programa WAVFOUR y WAVCORR debe ser limitado preferentemente a valores de  $j$  menores que dos.

Con base en lo anterior se afirma que el algoritmo que hace uso de los estimadores de correlación brinda mejores resultados que el programa WAVFOUR y que éstos, a su vez, son inferiores a WAVETLAN. No obstante, es justo reconocer que elaboran su cometido con mayor velocidad que WAVETLAN, resultando en una herramienta sumamente útil para la validación de resultados.

Así, pues, se concluye que, si lo que se desea es obtener precisión en el cálculo de la transformada wavelet, se use WAVETLAN, mientras que si lo que se desea es rapidez, se use WAVCORR. Aun así las diferencias no son tan notables, al menos en el rango de las bandas de frecuencia que se han estudiado; sin embargo, éstas irán siendo más considerables conforme se tomen valores de  $j$  mayores.

Obsérvese que tanto WAVCORR como WAVFOUR no poseen la capacidad de aumentar la resolución temporal conforme la frecuencia (parámetro  $s$ ) aumenta, o lo que es lo mismo, disminuir la resolución cuando la frecuencia por estudiar disminuye. Lo anterior tiene un carácter muy ventajoso si se observa que los archivos de coeficientes obtenidos con WAVCORR y WAVFOUR constan de 128 muestras, mientras que para  $j=3$  (frecuencia baja) el archivo generado con WAVETLAN se compone de 64 muestras, o sea la mitad. Si se hubiera seleccionado  $\beta = 1$ , el mismo archivo estaría formado por 16 muestras.

*ESPECTRO COEF. WAVELET DE FIGURA ONCE*

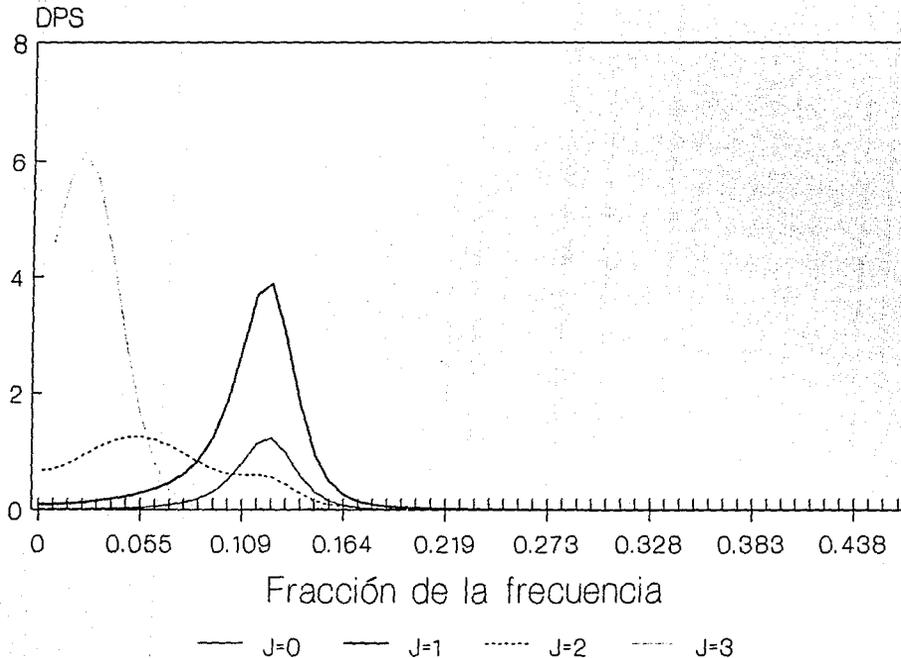


FIGURA TRECE

# ESPECTRO COEF. WAVELET DE LA FIGURA DOCE

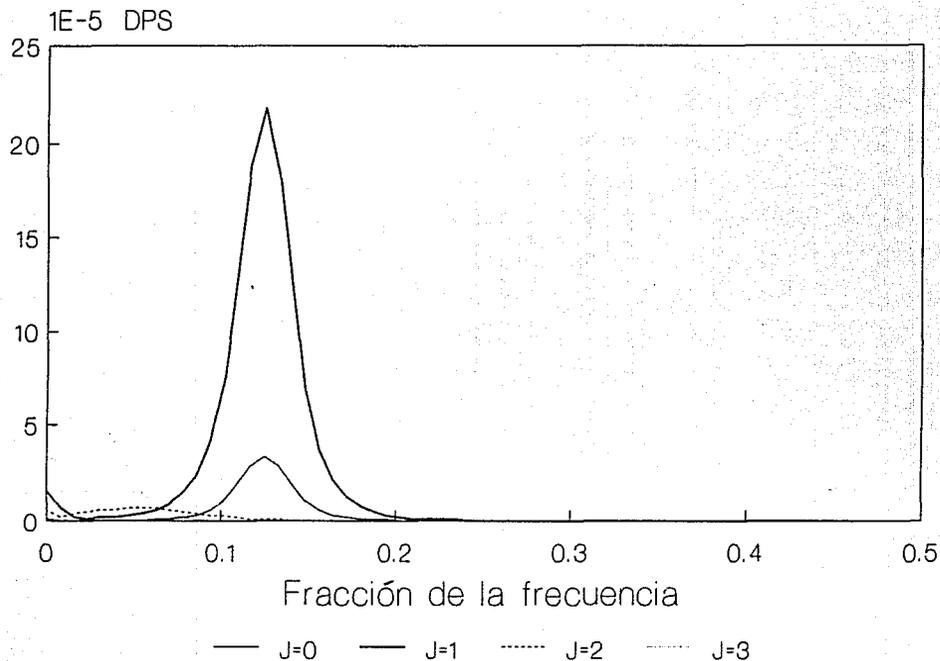


FIGURA CATORCE

Con el fin de hacer patente la capacidad de la transformada wavelet para actuar como un filtro, y validar una vez más el programa WAVETRAN, se obtienen los coeficientes wavelet de una señal compuesta de cuatro polos y sus respectivos conjugados. La fase de cada uno corresponde a la frecuencia central de la mexicanhat wavelet para  $j=0,1,2,3$ , es decir, 0.238, 0.119, 0.058, y 0.029. Su espectro paramétrico se observa en la figura quince. El espectro paramétrico de los coeficientes wavelet para los cuatro valores de  $j$  referidos se presenta en la figura dieciséis, el que comparado con la figura anterior evidencia el carácter de filtrado de la transformada en cuestión. En efecto, la transformada wavelet resuelve los cuatro polos que se identifican con los cuatro máximos (uno para cada  $j$ ) del esquema.

# ESPECTRO PARAMETRICO SEÑAL DE 4 POLOS

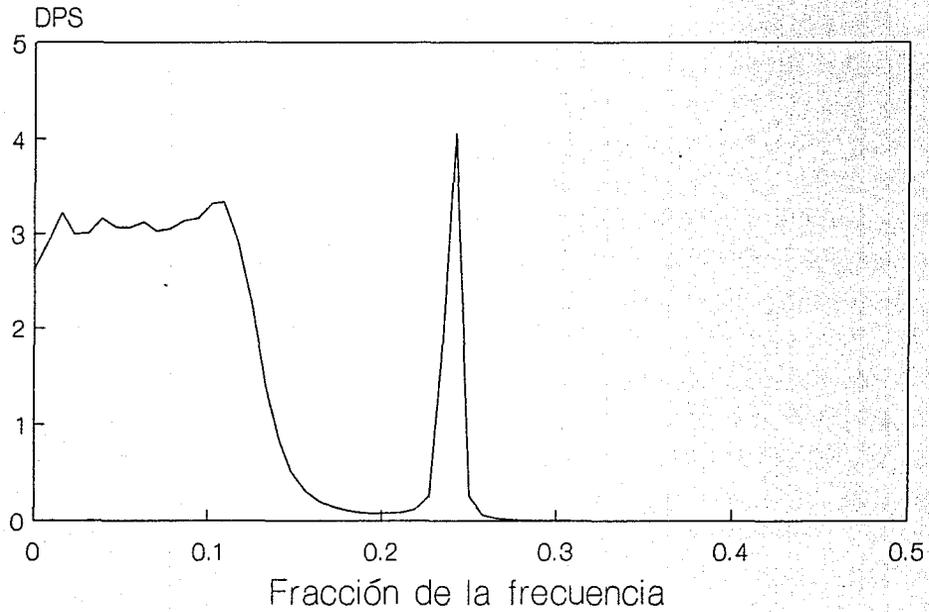


FIGURA QUINCE

# ESPECTRO COEF. WAVELET DE SENAL 4 POLOS

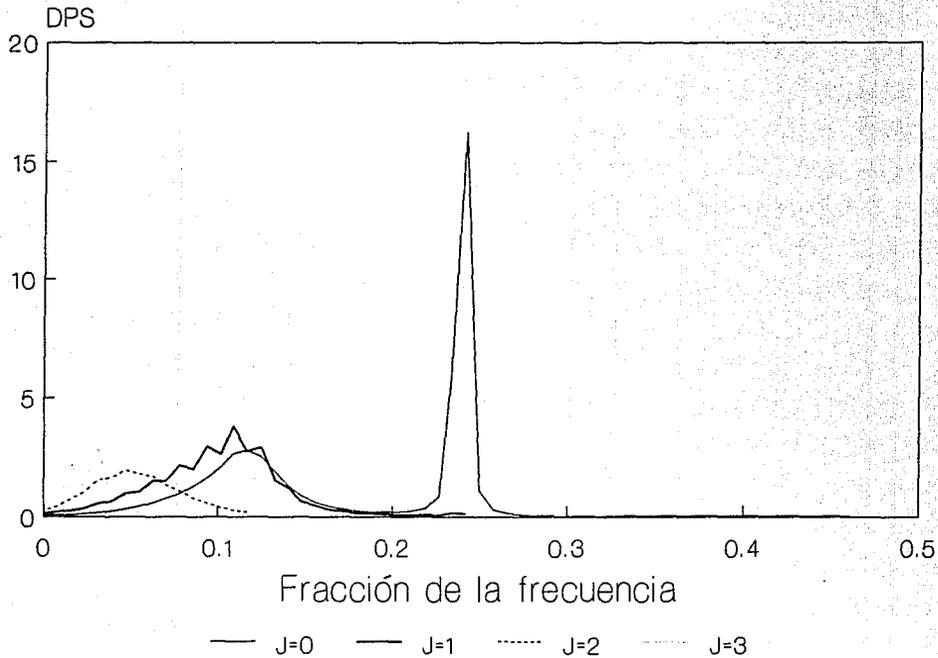


FIGURA DIECISEIS

## CAPITULO V

### FILTROS ESPEJO EN CUADRATURA

#### V.1 Generalidades.

El siguiente capítulo comprende una exposición somera de los filtros espejo en cuadratura (QMF) de dos canales, que poseen características que les permiten ser aplicados en una diversidad de problemas prácticos, debido, entre otras cosas, a que su estructura comprende, además de un par de filtros, un decimador y un interpolador que le dan al QMF de dos canales un carácter multifrecuencia.

Los conceptos de decimación e interpolación desempeñan un papel fundamental en la estructura de un QMF, ya que son precisamente los dispositivos que realizan estas operaciones los que hacen tan particular al QMF. A estos dispositivos se les llamará decimador e interpolador. El primero de ellos es un sistema que permite reducir la frecuencia de muestreo de cierta señal discreta; el segundo realiza el proceso inverso. Ninguno de los dos sistemas son invariantes en el tiempo [22].

Tanto la decimación como la interpolación pueden llevarse a cabo por un factor entero  $M$ , sin embargo, el caso que aquí interesa es aquel en que  $M=2$ .

Grosso modo, un decimador tipo  $M$  transforma una secuencia dada  $x[n]$  en otra secuencia  $y[n]$ , de tal modo que  $y[n]$  es una versión comprimida de  $x[n]$ . Esta compresión se efectúa eliminando todas aquellas muestras de la secuencia  $x[n]$  que ocurren para  $n$ , tal que  $n$  no es múltiplo de  $M$ . Es decir,  $y[n] = x[Mn]$ . Para el caso  $M = 2$ , lo anterior equivale a tomar únicamente las muestras pares de  $x[n]$ .

Partiendo de la suposición de que  $M=2$ , realizar una decimación significa variar la frecuencia de muestreo  $F$  a  $F'=F/2$  [23].

Si se considera a  $x[n]$  una secuencia de banda limitada en el intervalo frecuencial  $[-F_c, F_c]$ , el teorema de Nyquist está dado como  $1/T \geq 2F_c$ , o sea,  $F \geq 2F_c$ . Sin embargo, al realizar la decimación en  $M$ , el teorema de Nyquist pasa a ser

$$F/M \geq 2F_c \quad (26)$$

De lo anterior es evidente que, si se ha seleccionado para la secuencia original  $F = 2F_c$ , de tal modo que ésta se encuentre en su muestreo crítico, en el momento de hacer la decimación la ecuación (26) pasará a ser  $2F_c/M \geq 2F_c$ ; o sea,  $1/M \geq 1$ , lo cual es una contradicción, ya que se había supuesto a  $M$  un entero. En efecto, para  $M = 2$  se tiene  $1/2 \geq 1$ , lo cual es una falacia. Así, pues, se ve que el teorema de Nyquist no se está observando (hay "aliasing") al realizar la decimación. Esto no debe sorprender, ya que una contracción en el tiempo equivale a una expansión en la frecuencia.

Para evitar el traslape frecuencial es necesario filtrar la señal  $x[n]$ , previamente a la decimación, mediante un filtro, tal que su frecuencia de corte sea de la cuarta parte de la frecuencia de muestreo, o de  $\pi/2$  si se desea expresar en radianes.

El efecto de la decimación en una señal a la que se le aplica un filtro de respuesta impulsional  $h[n]$ , cuya frecuencia de corte es  $\pi/2$ , se observa representada frecuencialmente en la figura diecisiete.

Con base en lo anterior es posible escribir la expresión para  $y[n]$ , una vez que  $x[n]$  ha sido filtrada y decimada por 2 [23], como

$$y[n] = \sum_k h[k] x[2n-k] \quad (27)$$

La expresión anterior, en el dominio de la frecuencia, pasa a ser [22]

$$Y(e^{jw'}) = 1/2 \{ H(e^{jw'/2})X(e^{jw'/2}) + H(-e^{jw'/2})X(-e^{jw'/2}) \} \quad (28)$$

donde las letras mayúsculas corresponden a la transformada de Fourier de las minúsculas, y  $w' = 2\pi f/F'$ .

# ESPECTRO DE DECIMACION POR DOS

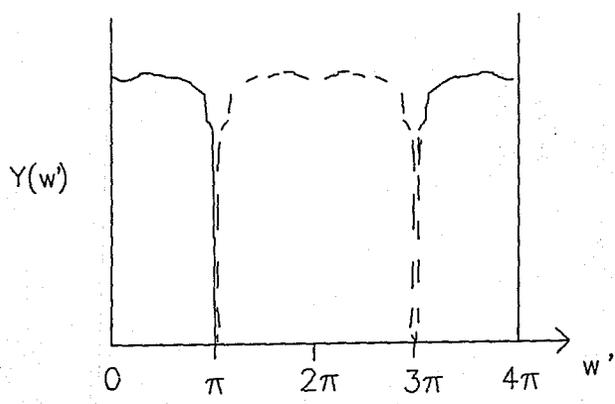
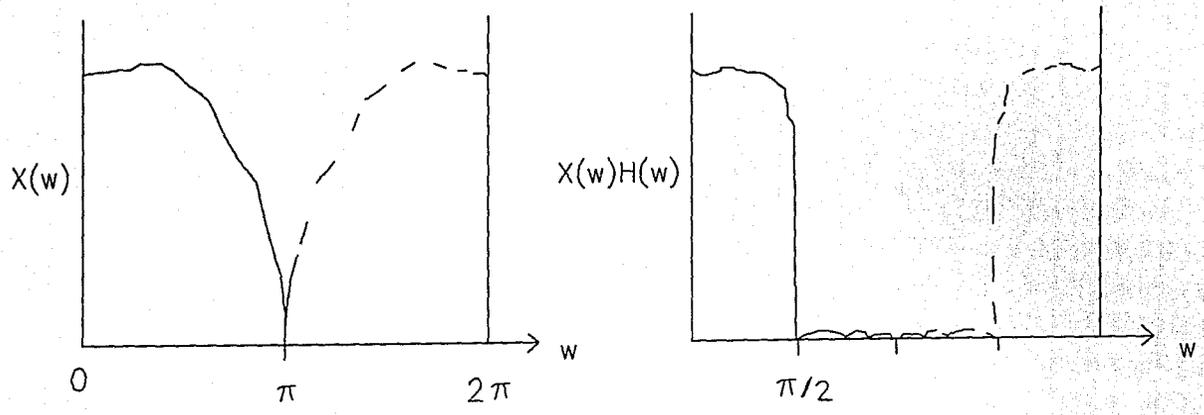


FIGURA DIECISIETE

El interpolador para  $M = 2$ , tal y como podría suponerse, consiste en una transformación aplicada a la secuencia  $y[n]$  que intercala un cero entre cada una de las muestras, obteniéndose, de esta manera, una compresión en el dominio de la frecuencia o un incremento en la frecuencia de muestreo, tal que ésta pasa a ser  $F' = 2F$  [23].

En tanto que en el proceso de decimación aparece el traslape frecuencial, en la interpolación se observa el efecto dual al de este traslape, es decir, la aparición de réplicas centradas en armónicos de la frecuencia de muestreo original [23], las cuales pueden ser eliminadas (dejando solamente la imagen en espacio frecuencial que interese) por medio de un filtro, cuya frecuencia de corte se encuentre en  $w' = \pi/2$  y que genere el doble de ganancia (ver figura dieciocho).

La expresión en el dominio de la frecuencia es [22]:

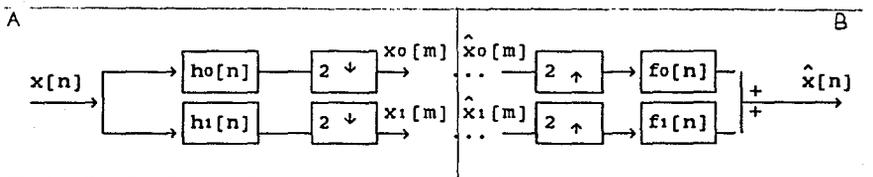
$$Y(e^{jw'}) = H(e^{jw'}) X(e^{2jw'}) \quad (29)$$

mientras que en espacio directo es:

$$y[m] = \sum_k x[k] h[m-2k] \quad (30)$$

La decimación e interpolación para los casos en que no se trate una señal de banda base es similar, con la diferencia de que los filtros usados son de tipo pasa-banda en lugar de basa-bajo [22].

La técnica correspondiente al QMF de dos canales puede comprenderse más claramente mediante el siguiente diagrama que representa la estructura del mismo:



# ESPECTRO INTERPOLADOR POR DOS

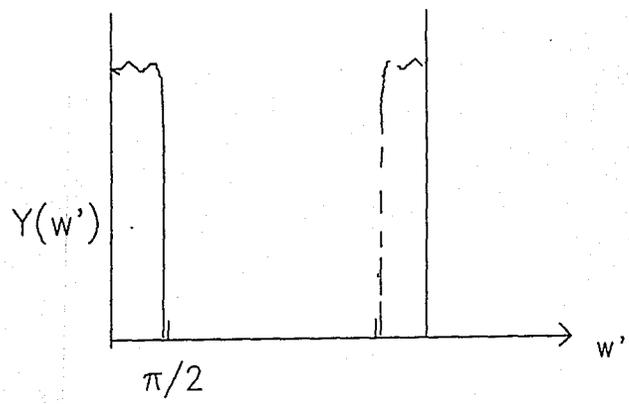
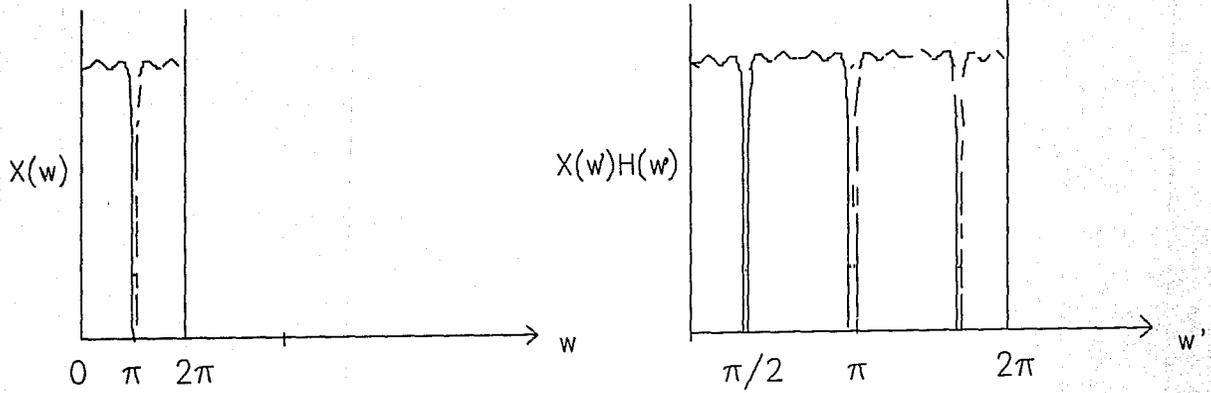


FIGURA DIECIOCHO

En él se observa la parte A correspondiente a lo que se conoce como analizador, así como la parte B que caracteriza al sintetizador. Generalmente la utilidad de la técnica se encuentra en el punto intermedio de A y B.

En el mismo diagrama se reconocen los reductores e incrementadores de la razón de muestreo que se han presentado previamente, denotados por  $2^{\downarrow}$  y por  $2^{\uparrow}$  respectivamente. La función del par de reductores en el caso del analizador es dividir la banda de la secuencia  $x[n]$  por la mitad, formando dos canales independientes.

Para llevar a buen fin este propósito es menester que  $h_0[n]$  sea la respuesta al impulso de un filtro pasa-bajo, mientras que  $h_1[n]$  sea la respuesta al impulso de un filtro pasa-alto. En consecuencia, cada una de las combinaciones filtro-reductor de frecuencia formará un decimador de  $M=2$ , como los ya tratados.

La sección B, o de síntesis del filtro QMF de dos canales, consiste en incrementadores y filtros  $f_0$  (pasa-bajo) y  $f_1$  (pasa-alto) que hacen posible reconstruir la señal  $x[n]$ , denotada ahora por  $\hat{x}[n]$ , a partir de la descomposición bicanal previamente desarrollada.

Para un estudio más detallado de la manera en que un QMF opera, debe observarse que a partir de la ecuación (28) se tiene, en lo que respecta a la parte de análisis:

$$X_0(e^{j\omega}) = 1/2 \{ H_0(e^{j\omega/2})X(e^{j\omega/2}) + H_0(-e^{j\omega/2})X(-e^{j\omega/2}) \}$$

$$X_1(e^{j\omega}) = 1/2 \{ H_1(e^{j\omega/2})X(e^{j\omega/2}) + H_1(-e^{j\omega/2})X(-e^{j\omega/2}) \}$$

mientras que acerca de la síntesis se tiene:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = F_0(e^{j\omega}) X_0(e^{2j\omega}) + F_1(e^{j\omega}) X_1(e^{2j\omega})$$

Combinando las tres últimas ecuaciones y suponiendo que  $x_0 = \hat{x}_0$  y  $x_1 = \hat{x}_1$  se llega a la siguiente ecuación:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = 1/2 \{ H_0(e^{j\omega})F_0(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})F_1(e^{j\omega}) \} X(e^{j\omega}) + 1/2 \{ H_0(-e^{j\omega})F_0(e^{j\omega}) + H_1(-e^{j\omega})F_1(e^{j\omega}) \} X(-e^{j\omega}) \quad (31)$$

Es importante hacer notar que el segundo término impide obtener una expresión para  $\hat{X}(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ , es decir, de una función de transferencia de un sistema invariante en el tiempo [22]. Es más, para poder lograrlo es necesario cancelar el segundo término que, además, representa los componentes de traslape frecuencial no deseados [23].

Para lograr esta cancelación basta escoger [22]:

$$F_0(e^{j\omega}) = 2H_1(-e^{j\omega}) \quad \text{y} \quad F_1(e^{j\omega}) = -2H_0(-e^{j\omega})$$

con lo cual el QMF de dos canales pasa a ser un sistema invariante en el tiempo, con función de transferencia:

$$T(z) = \hat{X}(z)/X(z) = 1/2 \{ H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) \}$$

A  $|T(e^{j\omega})|$  se le conoce como distorsión de amplitud, mientras que a  $\arg\{T(e^{j\omega})\}$  se le llama distorsión de fase.

Para realizar el diseño de los filtros  $H_0$  y  $H_1$ , usualmente se busca que  $|T(e^{j\omega})| = 1$  para toda  $\omega$ , de modo tal que no se presente distorsión en la amplitud. Lo más común es seleccionar  $H_1(e^{j\omega}) = H_0(-e^{j\omega})$ , lo cual tiene como finalidad que  $H_0$  y  $H_1$  sea un par pasa-bajo-alto con simetría especular respecto al eje  $\pi/2$ , tal y como se requiere en el diseño de los QMF de dos canales. Lo anterior es más claro reescribiendo  $H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)})$ , con lo que es más sencillo observar que  $H_1$  es una traslación frecuencial de un filtro pasa-bajo  $H_0$ . La representación temporal de lo anterior es  $h_1[n] = (-1)^n h_0[n]$ .

Haciendo una recapitulación, se afirma que, una vez diseñado el filtro pasa-bajo  $h_0[n]$ , la respuesta al impulso de los otros filtros que componen el QMF de dos canales está dada para toda  $n$  por:

$$\begin{aligned} h_1[n] &= (-1)^n h_0[n] \\ f_0[n] &= 2 h_0[n] \\ f_1[n] &= -2 (-1)^n h_0[n] \end{aligned}$$

En el diseño de  $h_0[n]$  se requiere que se cumplan dos proposiciones principales:

$$1) |T(z)| = 1, \text{ o lo que es lo mismo } |H_0^2(e^{jw}) - H_0^2(e^{j(w+\pi)})| = 1.$$

$$2) |H_0(e^{jw})| = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq w \leq \pi/2 \\ 0 & ; \pi/2 < w \leq \pi \end{cases} \text{ o lo m\u00e1s aproximado posible.}$$

Con base en lo anterior, lo m\u00e1s com\u00fan es escoger un filtro RIF sim\u00e9trico, con respuesta impulsional de N elementos y fase lineal, con el fin de que la distorsi\u00f3n de fase sea eliminada. Para este tipo de filtros se cumple que

$$H_0(e^{jw}) = H_r(e^{jw}) e^{-jw(N-1)/2}$$

con  $H_r(e^{jw}) \in \mathbb{R}$  y tal que  $H_r^2(e^{jw}) = |H_0(e^{jw})|^2$ .

El t\u00e9rmino  $e^{-jw(N-1)/2}$  indica que la se\u00f1al que se obtiene a la salida del filtro se encuentra retrasada  $(N-1)/2$  muestras con respecto a la entrada, es decir, que todo el filtro QMF de dos canales (an\u00e1lisis y s\u00edntesis) presenta un retraso general de  $N-1$  muestras.

No presenta dificultad demostrar [24] que, si se busca una reconstrucci\u00f3n perfecta (esto es  $x = \hat{x}$ ), es necesario seleccionar N impar. Con esta restricci\u00f3n se llega a que [22]

$$|T(e^{jw})| = 1/2 \{ |H_0(e^{jw})|^2 + |H_0(e^{j(w+\pi)})|^2 \}$$

de modo que la restricci\u00f3n 1) pasa a ser

$$|H_0(e^{jw})|^2 + |H_0(e^{j(w+\pi)})|^2 = 1 \text{ para toda } w. \quad (32)$$

Infortunadamente no existe un filtro  $H_0(e^{jw})$  de fase lineal que cumpla con (32), a excepci\u00f3n de  $H(z) = (1+z^{-1})/2$ , el cual no presenta inter\u00e9s pr\u00e1ctico [24].

No obstante, se han desarrollado diversas maneras de dise\u00f1ar filtros que se asemejen al ideal, a costa de permitir ciertas distorsiones o imprecisiones. Por ejemplo, en [22] se presenta una manera de dise\u00f1ar  $H_0$  con una inexistencia de la distorsi\u00f3n de amplitud, en la que se tolera la distorsi\u00f3n de fase.

Otra manera de diseñar este filtro [23] mediante la optimización por computadora, se vale de una función de error construida con base en las condiciones que se desea conseguir, de tal modo que minimizando esta función de error se obtienen valores de  $h_o[n]$  cada vez más cercanos al ideal.

Un procedimiento similar (así como una serie de  $h[n]$ 's calculados con este método) se presenta en [25], con la peculiaridad de que la convergencia al filtro óptimo es estable independientemente del filtro inicial. El algoritmo consiste en un proceso iterativo basado en el cálculo del eigenvector de una matriz cuya dimensión es la mitad del número de elementos de que consta la respuesta al impulso del filtro. Este procedimiento tiene la característica de llevarse a cabo en el dominio del tiempo.

## V.2 Estructuras.

Existen diversas maneras de implantar un QMF de dos canales, pero entre las más eficientes se encuentra la desarrollada en [24]. La estructura del analizador permite calcular de una manera independiente las muestras pares e impares de la secuencia entrante. El sintetizador hace uso de esta técnica de una manera similar. La reducción en carga computacional que presenta esta estructura es considerable, ya que el par analizador/sintetizador requiere únicamente de  $N$  multiplicaciones y  $N$  adiciones por periodo de muestreo, donde  $N$  es el número de elementos que forman la respuesta al impulso del filtro. La estructura del analizador, así como del sintetizador, se presentan en la figura diecinueve [24].

Fijando la atención en el analizador, es importante recordar que  $h_i[n] = (-1)^n h_o[n]$ ; así, pues, la diferencia entre el filtro pasa bajo y pasa alto radica únicamente en la manera en que se

# ESTRUCTURA DE ANALISIS Y SINTESIS DE FILTRO QMF

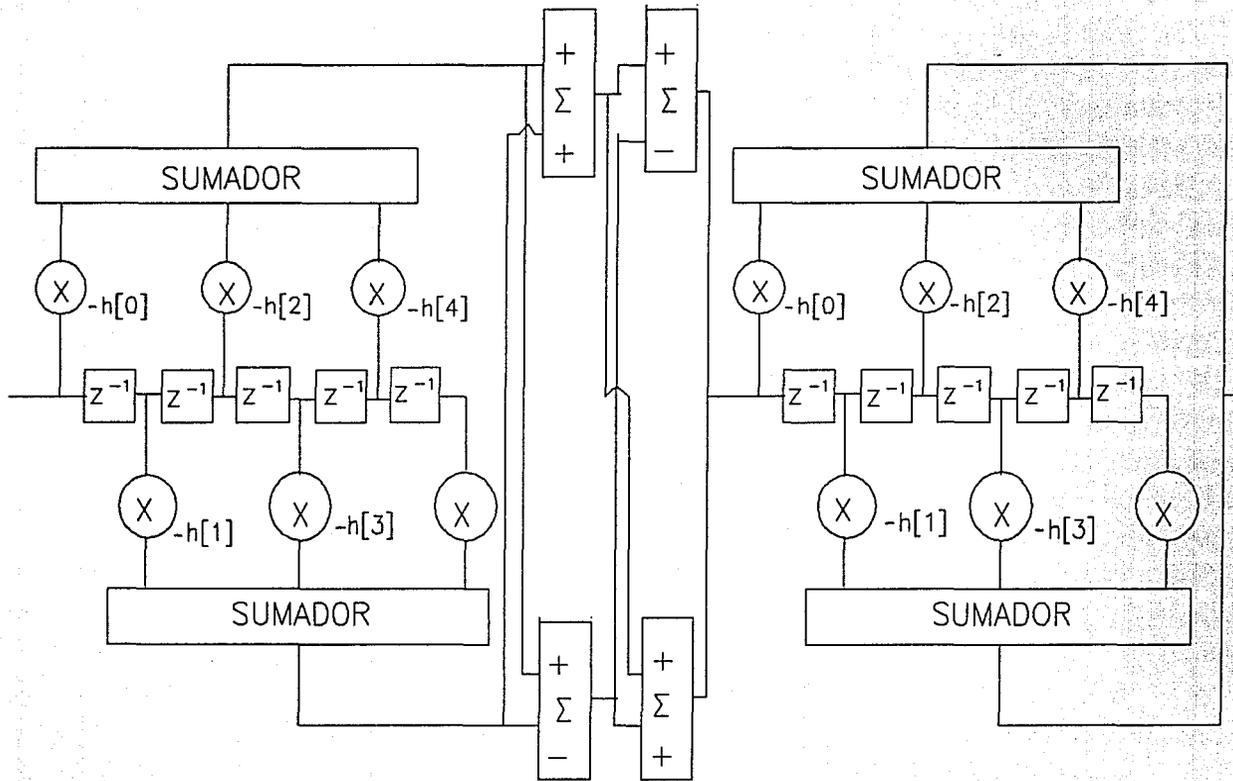


FIGURA DIECINUEVE

suman las muestras pares e impares. Esta característica permite realizar ambos filtrados simultáneamente, mediante la división de los elementos de la respuesta al impulso del filtro, en pares e impares, y realizando la convolución con las muestras pares de la señal, es decir, no tomando en cuenta las muestras impares, con lo que se está obteniendo una decimación. Por lo mismo, se puede observar que la señal filtrada será de una longitud que es la mitad de aquella que le dio origen.

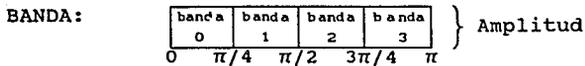
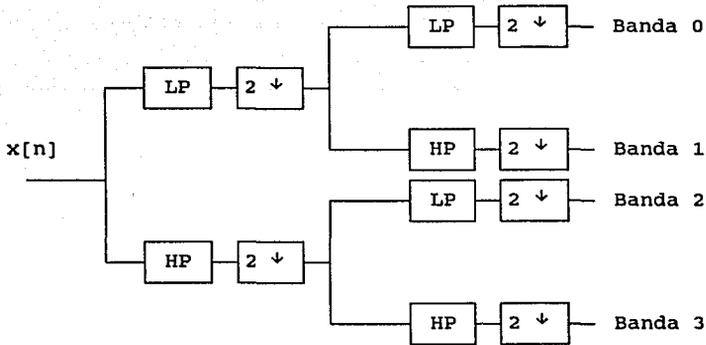
Como se podrá apreciar del diagrama, la síntesis también se vale de que  $f_0[n] = 2h_0[n]$  y  $f_1[n] = -2(-1)^n h_0[n]$ , para, así, calcular de una manera simultánea la salida de ambos filtros, y lograr, de esta manera, la reconstrucción de la señal original.

Es interesante hacer notar que la longitud de la señal que alimenta al sintetizador es de la mitad de aquella que se obtiene del mismo, y cuya longitud es igual a la de  $x[n]$ , o sea, la señal de entrada al analizador. También se debe recordar que esta señal reconstruida está retrasada  $N$  unidades con respecto a la señal original.

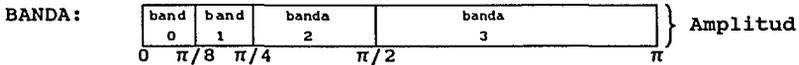
Hasta el momento se ha presentado propiamente la estructura de un QMF de dos canales, sin embargo, su utilidad también se encuentra en la cascada de las mismas. Este tipo de agrupaciones se conocen como estructuras de árbol [23].

La importancia de estas estructuras radica en el hecho de que la señal entrante se divide sucesivamente en bandas de frecuencia más pequeña en cada etapa del árbol. Esto permite realizar un análisis multicanal de la señal en estudio, cuyas aplicaciones se verán más adelante.

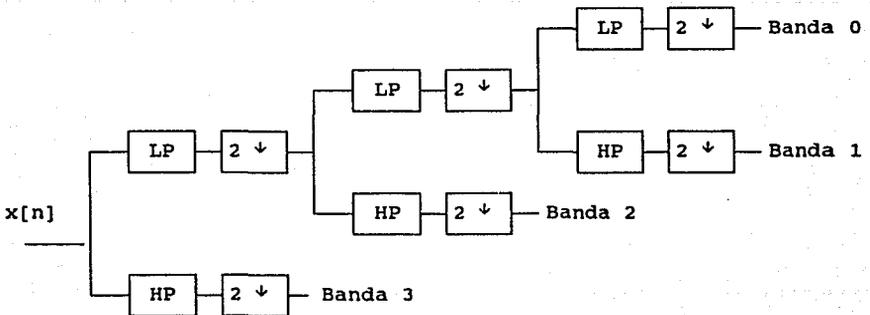
La síntesis de la señal se realiza por medio de la estructura de árbol dual, en la que en lugar de analizadores se usan QMF de síntesis. Como ejemplo de estructura de árbol se encuentra aquella que divide la banda original en cuatro canales del mismo ancho (i.e. espaciamiento uniforme) [23]:



Otra estructura de árbol de gran importancia, sobre todo en lo que respecta a este trabajo, es aquella en la que la banda original es dividida en cuatro intervalos, tales que uno es una octava del otro, quedando la banda como



La estructura es la siguiente [23]:



Se debe observar que cada uno de los canales, en este caso, está muestreado a diferentes frecuencias, de tal modo que el muestreo sea crítico.

### V.3 Aplicaciones.

Las estructuras introducidas permiten dividir la banda original de cierta secuencia en una serie de subbandas consecutivas cuyo ancho dependerá de la estructura arbórea. Esta técnica reviste gran utilidad, ya que permite procesar cada subbanda de una manera independiente. Las aplicaciones que de este hecho se desprenden son muy variadas, y dependen, en gran medida, de la existencia de la estructura de síntesis, ya que ésta permite reconstruir la señal original una vez que ha sido procesada.

Las principales aplicaciones de estas estructuras [23] se pueden ver en los sistemas de comunicación, en los sistemas de procesamiento de voz y audio, en sistemas de antenas y de radar, así como en técnicas de compresión.

Un ejemplo se presenta en los transmultiplexores digitales, para convertir señales multiplexadas en divisiones temporales (TDM) a las mismas señales multiplexadas en divisiones frecuenciales (FDM), y viceversa [22]. Esto es especialmente útil en telefonía, ya que generalmente el multiplexado en frecuencia se utiliza para larga distancia, mientras que el multiplexado temporal es más eficaz en conmutación digital; así, pues, la frecuencia de muestreo en TDM, que generalmente es de 8 KHz, es elevada a la de FDM cuyo ancho de banda total se encuentra entre 56 y 112 KHz.

Otra aplicación sumamente interesante se observa en la codificación para transmisión o almacenamiento de voz e imágenes. A esta codificación se le llama codificación en subbandas, y permite codificar eficientemente señales de voz a razones de bits bajas, utilizando para ello las propiedades de variación temporal del espectro de voz, así como las propiedades asaz conocidas de la percepción de voz [22].

El principio de este método consiste en descomponer el espectro en bandas de ancho más pequeño, que se codifican de una manera independiente, generalmente mediante APCM, en lugar de ADPCM, debido a la escasa correlación que existe entre las muestras de las subbandas [23]. Esta codificación debe poseer dos características principales [26]: recuperación de la señal y discriminación frecuencial (buenas características pasa banda para cada canal).

Un criterio para dividir las bandas de voz, con base en la percepción, es aquel que divide a la banda total en subbandas, de tal modo que cada una contribuye igualmente al llamado índice de articulación (división no uniforme de la escala de frecuencias para el espectro de voz) [27]. Una posible partición en cuatro subbandas es la siguiente,

- subanda 1 : 200 - 700 Hz.
- subanda 2 : 700 - 1310 Hz.
- subanda 3 : 1310 - 2020 Hz.
- subanda 4 : 2020 - 3200 Hz.

Un estudio detallado de los codificadores/decodificadores utilizando bancos de QMF de dos canales, así como ejemplos de simulación por computadora para razones de transmisión de 9 y 16 Kb/s pueden consultarse en [27].

La extensión de este tipo de codificación al caso de imágenes utilizando QMF's de una dimensión se presenta en [28]. La técnica presupone una división de la imagen en filas y columnas, de modo que estas señales unidimensionales se utilicen como entrada a un banco de QMF's. La codificación se hace con DPCM, ya que presenta el mejor desempeño, en lo que a SNR se refiere, respecto a otros métodos puestos a prueba.

La generalización de los bancos de QMF a más dimensiones puede ser consultada en [26], en el que se enfatiza el caso bidimensional, así como una implantación de codificación de imágenes en subbandas distinta a la que se ofrece en [28].

## CAPITULO VI

### RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA WAVELET Y LOS FILTROS ESPEJO EN CUADRATURA

#### VI.1 Análisis Multirresolución.

Este capítulo debe su importancia a que permitirá comprender la relación existente entre los filtros QMF, que se han estudiado en el capítulo anterior, y la transformada wavelet. Así, pues, la exposición que a continuación se presenta se puede ver como un vínculo entre dos ramas de estudio aparentemente independientes que, no obstante, están estrechamente ligadas.

Para comprender la relación mencionada obsérvese en el capítulo referente a los filtros QMF, que una característica de los mismos es dividir el espectro de cierta señal en dos bandas del mismo ancho. En consecuencia, es posible utilizarlos para formar los bancos que permiten dividir al espectro de una señal, no solamente en dos, sino en un número finito de bandas frecuenciales que no se traslapan. Dicho de otra manera, un banco de filtros QMF realiza un análisis de la señal de entrada en un conjunto ortogonal de señales en el que la base ortogonal está constituida [6] por el conjunto  $\{h_0(n-2k), h_1(n-2k)\}$ , de modo tal, que las proyecciones están dadas por el producto interno de estas secuencias (respuesta impulsional trasladada) con la señal por analizar (ver ecuación (30)).

Ahora bien, en el estudio de la transformada wavelet se hizo notar que un caso particular de la descomposición de una señal en ondeletas lo constituye aquel en que el marco de descomposición es una base ortonormal.

Con base en los dos razonamientos anteriores cabría hacerse

la siguiente pregunta: ¿existirá alguna relación entre la descomposición que es posible realizar por medio de los filtros QMF y aquella que efectúa la transformada wavelet para el caso particular de una base ortonormal? El propósito de este capítulo es responder a la interrogante.

Esta cuestión adquiere mayor interés si, observando desde un punto de vista menos formal, se recuerda que el análisis por ondeletas permite estudiar una señal a diferentes resoluciones, de modo tal que hay una relación entre la frecuencia de la ondeleta y la frecuencia de muestreo, es decir, la transformada wavelet constituye un análisis multifrecuencia para distintos valores del parámetro  $j$ . También debe tenerse en mente que dada la manera en que se realizó la discretización de  $s$  y  $u$ , el análisis en el espacio recíproco para la transformada wavelet está constituido por una división de la frecuencia en bandas de ancho constante en una escala logarítmica. Este procedimiento se conoce como descomposición multirresolución.

El interés surge del hecho de que las dos características mencionadas se observan en el análisis mediante filtros QMF, tal y como ya fue expuesto en el capítulo anterior.

El análisis multirresolución es una técnica que permite el estudio de una señal mediante lo que se conoce como una serie de aproximaciones discretas. Este método, muy utilizado en el procesamiento de imágenes, presenta, para cada elemento de la serie de aproximaciones, cierta resolución de la señal original, que se va incrementando de manera que la señal se encuentra caracterizada cada vez por un mayor número de muestras; esto se asemeja a un "acercamiento" sobre la señal.

El procedimiento mencionado permite reconocer, en primera instancia, los aspectos más burdos de la señal, los cuales se irán afinando conforme la resolución aumente; en consecuencia, se obtendrá un incremento en los detalles. El detalle de una función  $f(x)$  a cierta resolución está definido como la diferencia de información de la señal a dicha resolución, y la de la información de la aproximación de la misma señal para una resolución más alta.

Formalizando los aspectos mencionados, es posible afirmar que la aproximación de la señal  $f(x)$  a una resolución  $r_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , es un

estimado de  $f(x)$  a partir de  $r$  medidas por unidad de tiempo o distancia; éstas se calculan del muestreo uniforme de  $f(x)$  a una frecuencia  $r$  y son introducidas en un filtro pasa bajo cuyo ancho de banda es proporcional a  $r$ , y que se genera a partir de una cierta función  $\theta(x)$  dilatada por el factor de resolución  $r$ , o sea,  $\theta_r = r^{1/2}\theta(rx)$  [18]

El conjunto de mediciones formado por la convolución  $A_r^d f = (f * \theta_r(n/r))$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , es la definición formal de una aproximación discreta de  $f(x)$  a la resolución  $r$  [18].

En particular, se tomará a  $r = 2^j$ , lo cual simplificará los cálculos y permitirá establecer más adelante una relación con la transformada wavelet.

La convolución anterior se puede expresar como el siguiente producto interno

$$A_{2^j}^d f = \langle f(x), \tilde{\theta}_{2^j}(x - 2^{-j}n) \rangle$$

con  $\tilde{\theta}_{2^j}(x) = \theta_{2^j}(-x)$ .

Dada la función  $f(x)$ , para cierta resolución  $2^j$  es posible estimar la "mejor aproximación" de  $f(x)$  con base en la secuencia de productos internos  $A_{2^j}^d f$ , donde "mejor aproximación" quiere decir lo más cerca posible a  $f(x)$  respecto a la distancia en  $L^2(\mathbb{R})$ . Utilizando el teorema de ortogonalidad se obtiene que esta "mejor aproximación" es igual a la proyección ortogonal de  $f(x)$  sobre el espacio vectorial  $V_{2^j}$ , generado por la familia de funciones  $\tilde{\theta}_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ . El espacio  $V_{2^j}$  puede entenderse como el conjunto de todas las posibles aproximaciones de funciones a la resolución  $2^j$ . La secuencia de espacios vectoriales  $(V_{2^j})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  lleva el nombre de aproximación multirresolución [18].

Para lograr calcular la proyección ortogonal de  $f(x)$  sobre el espacio vectorial  $V_{2^j}$  es necesaria una base ortonormal de dicho espacio, la cual puede ser construir [29] mediante traslaciones y dilataciones de una función única perteneciente al espacio vectorial. A esta función se le llama función de escalamiento y se representará por  $\phi(x)$ . Dada la resolución  $2^j$ , se tiene la base ortonormal

$$(2^{-j/2} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)), n \in \mathbb{Z}.$$

Una vez construida la base ortonormal, la proyección ortogonal de la función  $f(x)$  sobre  $V_{2^j}$  se calcula trivialmente:

$$2^{-j} \sum_n \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$$

Esta expresión representa la mejor aproximación de la señal  $f(x)$  a la resolución  $2^j$ , y está caracterizada (de una manera similar a los coeficientes de una serie de Fourier) por los siguientes productos internos, que se habían denominado como aproximación discreta, con la diferencia de que  $\theta$  pasa a ser  $\phi$ ,

$$A_{2^j}^d f = \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \quad (33)$$

Utilizando la aproximación de la señal a la resolución  $2^j$  es posible calcular la aproximación discreta, para los diferentes niveles de resolución, mediante un algoritmo por demás conveniente, ya que solamente utiliza la aproximación discreta de la resolución inmediata anterior.

Con el fin de fijar condiciones iniciales, defínase  $A_1^d f$ , es decir, la aproximación discreta a resolución unitaria, como la señal medida. Para calcular  $A_{2^j}^d f$  con  $j < 0$  se utiliza el hecho de que el espacio vectorial  $V_{2^j}$  está contenido en el espacio vectorial  $V_{2^{j+1}}$ ; por tanto,  $\phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ , que es miembro de  $V_{2^j}$ , puede ser representado mediante una base ortonormal de  $V_{2^{j+1}}$ , de la siguiente manera [29]:

$$\phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) =$$

$$2^{-j-1} \sum_k \langle \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-j-1}k)$$

Realizando el producto interno con  $f(u)$  se llega a que

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle =$$

$$\sum_k \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u - k + 2n) \rangle \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle$$

Definiendo una nueva sucesión como  $h(n) = \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u-n) \rangle$ , se obtiene,

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_k \tilde{h}(2n-k) \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle$$

o escrito de otro modo:

$$A_{2^j}^d f = \sum_k \tilde{h}(2n-k) A_{2^{j-1}}^d f \quad (34)$$

donde  $\tilde{h}(n) = h(-n)$ .

En el estudio de una señal por análisis multirresolución es común observar que lo que se desea conocer no es tanto los diferentes niveles de aproximación discreta, sino la diferencia entre éstos, a la cual se había hecho referencia como el detalle de la señal.

Formalmente, el detalle de una señal a resolución  $r^j$  está dado por la diferencia de información entre la aproximación discreta a resolución  $r^{j+1}$  y la aproximación discreta a resolución  $r^j$  [18].

La manera de derivar una expresión para esta diferencia, en el contexto que se ha venido trabajando, parte de apreciar que dado que  $V_{2^j}$  es un espacio contenido en  $V_{2^{j+1}}$ , este último puede ser expresado como la suma directa de  $V_{2^j}$  y su complemento ortogonal  $O_{2^j}$ , de la siguiente manera:  $V_{2^{j+1}} = V_{2^j} \oplus O_{2^j}$ ; por lo mismo, intuitivamente, es claro que esa diferencia de información debe tener alguna relación con  $O_{2^j}$ , y, de hecho, el detalle de la señal a la resolución  $2^j$  está dado por la proyección ortogonal de la señal en estudio, sobre  $O_{2^j}$ .

Para efectuar el cálculo de la proyección aludida se procede de una manera similar al cálculo de la proyección sobre  $V_{2^j}$ , es decir, construyendo una base ortonormal de  $O_{2^j}$ , que para este espacio será una función de la siguiente manera [29] (compárese con la base de  $V_{2^j}$ ):

$$(2^{-j/2} \psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)), n \in \mathbb{Z},$$

y, además,

$$(2^{-j/2} \psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)), n, j \in \mathbb{Z}^2,$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  [29].

Sin embargo, para que se verifiquen las dos afirmaciones anteriores,  $\psi(x)$  debe cumplir [29] con que, si  $\Psi(\omega)$  y  $\Phi(\omega)$  son las transformadas de Fourier de  $\psi(x)$  y  $\phi(x)$ , respectivamente, entonces

$$\Psi(\omega) = G'(\omega/2)\Phi(\omega/2) \quad (35)$$

donde  $G'(\omega) = e^{-j\omega} H^*(e^{-j(\omega+\pi)})$ ;  $H(\omega)$  representa la transformada de Fourier de  $h(x)$ .

Dada la base ortonormal de  $\mathcal{O}_{2^j}$ , la proyección de  $f(x)$  sobre este espacio es

$$2^{-j} \sum_n \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$$

donde los productos internos

$$D_{2^j}^d f = \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (36)$$

son conocidos como el detalle discreto de la señal.

Es interesante expresar estos productos internos como la siguiente convolución [29]:

$$D_{2^j}^d f = ((f(u) * \psi_{2^j}(-u))(2^{-j}n)), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

No es necesario justificar la importancia que un procedimiento recursivo tendría, de modo que calculara los valores de  $D_{2^j}^d f$  para los distintos niveles de resolución. Para conseguir una ecuación similar a (34), resulta lógico proceder con un razonamiento análogo al utilizado en la obtención de dicha ecuación.

Dado que  $\mathcal{O}_{2^j}$  está contenido en  $\mathcal{V}_{2^{j+1}}$ ,  $\psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$  puede ser expandida en una base ortonormal de  $\mathcal{V}_{2^{j+1}}$  como

$$\psi_{2^j}(x - 2^{-j}n) =$$

$$2^{-j-1} \sum_k \langle \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-j-1}k) \rangle \phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-j-1}k)$$

que, calculando el producto interno con  $f(u)$ , se obtiene [29]

$$\begin{aligned} & \langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \\ & \sum_k \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(u-k + 2n) \rangle \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle \end{aligned} \quad (38)$$

Defínase  $g(n) = \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(u-n) \rangle$ , de modo que si se tiene que  $\tilde{g}(n) = g(-n)$ , entonces la ecuación (38) pasa a ser

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_k \tilde{g}(2n-k) \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle$$

o sea,

$$D_{2^j}^d f = \sum_k \tilde{g}(2n-k) A_{2^j}^d f \quad (39)$$

## VI.2 Concomitancia de los Métodos.

Para comprender la relación entre el análisis multirresolución y los filtros QMF se enuncia el siguiente teorema cuya demostración puede ser consultada en [29]:

Sea  $\phi(x)$  una función de escalamiento y  $h(n) = \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(u-n) \rangle$ . Si  $H(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $h[n]$ , entonces satisface las dos propiedades siguientes:

- $|H(0)| = 1$  y decaimiento asintótico de  $h(n)$  al infinito, al menos igual que  $n^{-2}$ .
- $|H(e^{-j\omega})|^2 + |H(e^{-j(\omega+\pi)})|^2 = 1$ .

El inverso viene dado entonces como: dado  $H(\omega)$  que satisface b) y tal que  $|H(e^{-j\omega})| \neq 0$  en  $\omega \in [0, \pi/2]$ , entonces la función definida como  $\Phi(\omega) = H(2^{-1}\omega) H(2^{-2}\omega) H(2^{-3}\omega) \dots$  es la transformada de Fourier de la función de escalamiento  $\phi(x)$ .  $\square$

La primera parte de este teorema hace evidente que  $h(n)$  puede interpretarse como la respuesta al impulso de un filtro que cumple con las condiciones a) y b) del mismo, es decir, las condiciones necesarias para que  $h(n)$  se entienda como la respuesta al impulso de un filtro pasa bajo de un par QMF.

Seguramente se recordará que durante la presentación de la base ortonormal de  $\mathcal{O}_2$ , se fijaron condiciones sobre una supuesta función  $G'(\omega)$ , las cuales, en el dominio del tiempo, se expresan como  $g'(n) = (-1)^{1-n}h(1-n)$ , donde  $g'(n)$  es la transformada de Fourier inversa de  $G'(\omega)$ . Esto quiere decir que  $g'(n)$  es la correspondiente respuesta impulsional del filtro pasa alto del par QMF, donde  $h(n)$  desempeña el rol de filtro pasa bajo. Por lo mismo,  $h(n)$  y  $g'(n)$  forman un filtro QMF de dos canales.

Sin embargo, lo más interesante para hacer incuestionable el vínculo entre los filtros QMF y el análisis multirresolución, es justificar que  $g'(n)$  es precisamente la función definida anteriormente como  $g(n) = \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(u-n) \rangle$ . Para demostrarlo, obsérvese que  $\psi_{2^{-1}} \in \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{V}_1$  puede ser descompuesta en la base de  $\mathcal{V}_1$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_{2^{-1}}(x) &= \sum_n \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(u-n) \rangle \phi(x-n) \quad \Rightarrow \\ \psi_{2^{-1}}(x) &= \sum_n g(n) \phi(x-n) \end{aligned} \quad (40)$$

Así,  $\psi_{2^{-1}}(x) = g(x) * \phi(x)$ , o sea,  $\Psi(2\omega) = G(\omega)\Phi(\omega)$ , pero por la ecuación (35),  $G'(\omega) = G(\omega)$ .

Así, pues, no presenta dificultad observar que las ecuaciones fundamentales del análisis multirresolución (34) y (39), no son otra cosa sino el análisis realizado por las estructuras de árbol estudiadas para los filtros QMF (con señal de entrada  $f(x)$ ), en tanto que  $\tilde{g}(n)$  y  $\tilde{h}(n)$  cumplan con las condiciones requeridas que les permitan ser la respuesta impulsional del muy particular tipo de filtros a que hemos hecho referencia.

Más aún, si se entiende correctamente la descomposición planteada, independientemente de la interpretación que a ésta se le dé (análisis multirresolución o filtros QMF), se advertirá que

la introducción de las funciones  $\psi(x)$  y  $\phi(x)$  es puramente artificial, pues el análisis depende realmente de la selección de la secuencia  $h(n)$  (con la cual se puede generar  $g(n)$ ). Además, tanto  $\psi(x)$  como  $\phi(x)$  pueden ser construidas a partir de  $h(n)$ . En efecto, de (40) se tiene que

$$\psi(x) = 2 \sum_n g(n) \phi(2x-n) \quad (41)$$

De manera similar se llega a que [30]:

$$\phi(x) = 2 \sum_n h(n) \phi(2x-n) \quad (42)$$

Ahora bien, para comprender la relación del análisis multirresolución (y por tanto los filtros QMF) con la transformada wavelet, es menester recordar que el conjunto  $(2^{-j/2} \psi_{2^j}(x-2^{-j}n))$ , con  $n, j \in \mathbb{Z}^2$ , es una base ortonormal sobre  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ , donde  $\psi(x)$  es precisamente la ondeleta que permite calcular la transformada wavelet ortonormal [6, 29, 30, 31]. Esto no debe ser motivo de sorpresa, una vez que se conoce la manera en que se construyó  $\psi(x)$ , ya que de acuerdo con la ecuación (35), la función puede ser interpretada [18] como un filtro pasa banda en el intervalo  $[\pi, 2\pi]$  para una resolución dada. Lo anterior no es más que la misma interpretación que se ha venido dando a lo largo de este trabajo y, en particular, en los capítulos 3 y 4, a la transformada wavelet.

Teniendo en mente lo expuesto en el párrafo anterior, los coeficientes wavelet están dados por el conjunto de productos internos  $\langle f(u), \psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle$ , que no son otra cosa sino el detalle discreto  $D_{2^j}^d f$ ; ver ecuación (36). De esta manera se responde la pregunta planteada al principio del capítulo.

Esta relación transformada wavelet / QMF brinda un algoritmo eficiente para calcular los coeficientes wavelet ortonormales mediante filtros QMF de dos canales, ya que es suficiente introducir la señal en estudio a un banco QMF, cuyo número de etapas depende del número de niveles de análisis (valores de  $j$ ). Con este procedimiento se obtienen no solamente los coeficientes wavelet de cada nivel, sino también la aproximación discreta para

cada etapa. Esto se expone con mayor claridad en la sección subsecuente.

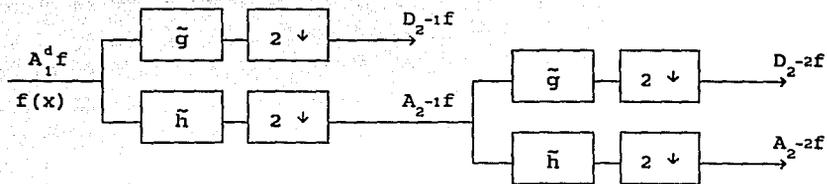
### VI.3 Algoritmo.

Con el fin de establecer de una manera simple el algoritmo para calcular los coeficientes wavelet, con base en los bancos QMF, se comienza por retomar una serie de resultados que se han venido desarrollando a lo largo de este capítulo. En especial las siguientes ideas:

- 1) El detalle discreto de  $f(x)$ ,  $D_2^d f$  es equivalente a la transformada wavelet ortonormal de  $f(x)$ .
- 2) El detalle discreto de  $f(x)$  puede ser calculado iterativamente como  $D_2^d f = \sum_k \tilde{g}(2n-k) A_{2^{-1}}^d f$ .
- 3) La aproximación discreta de  $f(x)$  puede ser calculada iterativamente como  $A_2^d f = \sum_k \tilde{h}(2n-k) A_{2^{-1}}^d f$ .
- 4) El par de filtros  $h(n)$  y  $g(n)$  forman un par pasa-bajo-alto para un filtro QMF bicanal.

Para entender el funcionamiento del algoritmo basta observar que dada la condición inicial  $A_1^d f = f(x)$ , las ecuaciones de los puntos 2) y 3) constituyen un filtro QMF de dos canales, como aquél que se definió en el capítulo anterior, en el cual la señal de entrada está dada por  $A_{2^{-1}}^d f$ , y la salida del filtro pasa bajo  $h(n)$  es  $A_2^d f$ , mientras que la del pasa alto  $g(n)$  es  $D_2^d f$ . Según el punto 1), la salida del filtro de respuesta impulsional  $g(n)$  es precisamente la secuencia de coeficientes wavelet para una resolución dada, o lo que es lo mismo, para un valor de  $j$  constante. Los coeficientes wavelet para otras frecuencias, o valores de  $j$ , se obtienen de los niveles de resolución ulteriores.

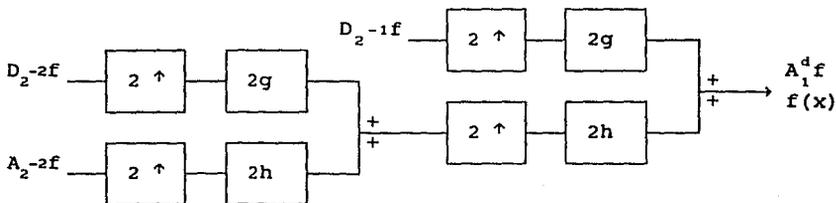
Una estructura de análisis por ondeletas usando QMF para dos niveles es el siguiente:



En este diagrama los valores  $D_2^{-1}f$  y  $D_2^{-2}f$  dan las dos secuencias de coeficientes wavelet para los dos primeros niveles de descomposición. La energía de las muestras de estas secuencias ofrece una medida de la irregularidad de la señal para las resoluciones  $2^{-1}$  y  $2^{-2}$  [18].

Una propiedad de gran utilidad que posee la transformada wavelet ortonormal con base en QMF es la de recuperar fácilmente la señal original a partir de la descomposición realizada. Esta característica pertenece propiamente a los bancos de QMF y, de hecho, ya ha sido presentada en el capítulo que antecede a éste, con el nombre de "sintetizador" de filtros QMF.

La estructura de síntesis que corresponde a la anterior es:



La síntesis de la función viene, entonces, dada como [30]

$$A_{2^j+1}^d f = 2 \sum_k h(n-2k) A_{2^j}^d f + 2 \sum_k g(n-2k) D_{2^j}^d f$$

Es interesante hacer notar que la reconstrucción de la señal se logra utilizando únicamente la última aproximación discreta calculada durante el análisis, así como la totalidad de secuencias de detalle discreto (coeficientes wavelet). Esto tiene como

consecuencia que el número total de muestras que contienen estas secuencias sea el mismo que el de la función original, lo cual no es más que una consecuencia de la ortogonalidad de la base en que se descompuso dicha señal [31].

Lo anterior se verá más claro si se recuerda que, al realizar el análisis, el detalle discreto para cada etapa contiene la mitad de muestras que el detalle discreto de la etapa anterior; de modo que si la señal original contiene  $N$  muestras, la primera etapa contendrá  $N/2$  muestras, la segunda contendrá  $N/4$ , la tercera  $N/8$ , y así sucesivamente. La suma de las muestras de estas secuencias más las de la última aproximación discreta es  $N$ .

La exposición de la relación entre los coeficientes wavelet y los filtros QMF, hasta este punto es incompleta, ya que el lector seguramente tendrá la impresión de que toda respuesta impulsional que cumpla con las condiciones de un QMF puede ser utilizada para construir la ondeleta correspondiente mediante la ecuación (41) y, por tanto, realizar la descomposición por ondeletas. Esta afirmación, sin embargo, es una falacia.

Las condiciones que debe cumplir la respuesta impulsional  $h(n)$  del filtro, de la cual es posible obtener  $\phi(x)$  (ver ecuación (42)), para que pueda ser considerada apta, en un análisis multirresolución, son las siguientes [31]:

$$1) \quad \sum_n |h(n)| < \infty$$

$$2) \quad |H(e^{-j\omega})|^2 + |H(e^{-j(\omega+\pi)})|^2 = 1.$$

$$3) \quad \sum_n h(n) = \sqrt{2}$$

4) Condición de regularidad.

Las condiciones 1) a 3) son aquellas que debe cumplir cualquier filtro QMF [31], sin embargo, la condición de regularidad es un requerimiento adicional para la respuesta impulsional de un QMF cuya finalidad sea la de desempeñar un rol en el análisis multirresolución [29].

Así, pues, no cualquier filtro QMF es útil para efectuar la transformada wavelet, ya que además de las condiciones de reconstrucción perfecta (1-3) debe cumplir con la condición de regularidad.

Para explicar lo que esto quiere decir, supóngase que  $h(n)$  es la respuesta al impulso del filtro pasa bajo en cuestión, entonces  $h^j(n)$  será la respuesta al impulso del filtro, que resulta de aplicar el filtro  $h(n)$  y decimar por dos,  $j$  veces. Este nuevo filtro estará formado por  $j$  convoluciones, de tal modo que su transformada  $z$  puede expresarse como [6]

$$H^j(z) = \prod_{j=0}^{j-1} H(z^{2^j})$$

Sea  $E_h^j(x)$  una función tipo "escalera" o constante a trozos, tal que en  $[n/2^j, (n+1)/2^j]$ ,  $0 \leq n \leq L$ , vale  $2^{j/2}h^j(n)$ , siendo que cada intervalo tiene una longitud  $1/2^j$ , donde  $L$  representa la longitud de  $h(n)$ . Ahora supóngase que se hace tender a  $j$  al infinito. Si para este caso  $E_h^j(x)$  converge a una función continua  $h_c(x)$ , se dice que la respuesta al impulso es regular y, por tanto,  $g(n)$  la respuesta al impulso del filtro paso alto, también [6].

El grado de regularidad se define por el número de veces que  $h_c(x)$  es continuamente diferenciable. Hasta la fecha no se conoce el grado óptimo (si lo hay) de regularidad para construir ondeletas a partir de la respuesta impulsional de filtros QMF [6].

Para garantizar la regularidad del filtro basta con exigir que  $H(z)$  tenga un gran número de ceros para  $z=0$  o  $z=\pi$  [31]. La generación de ondeletas a partir de filtros QMF (cuya construcción se trató en el capítulo previo), así como el cálculo de su grado de regularidad, están fuera del alcance de este trabajo; sin embargo, un conjunto de valores de  $h(n)$  se presenta en [31]. El número de coeficientes varía de 4 a 20. Los mismos valores pueden ser obtenidos, de una manera por demás interesante, mediante un filtro QMF binomial [32], en donde el desarrollo se hace sin recurrir propiamente al concepto de ondeleta.

La condición de regularidad, que también puede expresarse como [32],  $H(z) = (1 + z^2)^k F(z)$ ,  $k \geq 1$ , es una restricción mayor a

la condición de admisibilidad (capítulo 3), pero necesaria para que exista una correspondencia biunívoca entre una base ortonormal de ondeletas y el análisis multirresolución [31].

Por otro lado, es deseable que la función de escalamiento y la ondeleta sean de soporte compacto, lo cual permite su exacta localización en el espacio fase. Para garantizar esta propiedad, basta con exigir que la respuesta impulsional  $h(n)$  esté constituida por un número finito de coeficientes distintos de cero [31].

#### VI.4 Validación.

Con la finalidad de validar y ejemplificar lo que se ha expuesto, se presenta el análisis multirresolución, así como la respectiva síntesis de la señal AR estudiada en el capítulo cuarto y presentada en la figura cinco.

La señal, que consta de 128 muestras, es analizada en tres niveles, cada uno con 64, 32 y 16 muestras. El filtro QMF utilizado, tanto para el análisis como para la síntesis, es el siguiente [31]:

$h[0] = 0.23037781098452$	$h[4] = -0.18703481339694$
$h[1] = 0.71484656725692$	$h[5] = 0.03084138344957$
$h[2] = 0.63088077185927$	$h[6] = 0.03288301895913$
$h[3] = -0.02798376387109$	$h[7] = -0.01059739842942$

La aproximación discreta para los tres niveles de descomposición se presenta en la figura veinte. Los coeficientes wavelet, para cada nivel, aparecen en la figura veintiuno. Es importante recordar que, de acuerdo con lo que se mencionó en el capítulo quinto, cada una de las secuencias obtenidas como salida de un QMF experimentan un corrimiento que depende del número de retrasos del filtro; por lo mismo, las gráficas de las figuras veinte y veintiuno se encuentran recorridas 1, 2 o 3 veces, dependiendo del nivel de resolución.

# APROXIMACION DISCRETA MEDIANTE QMF

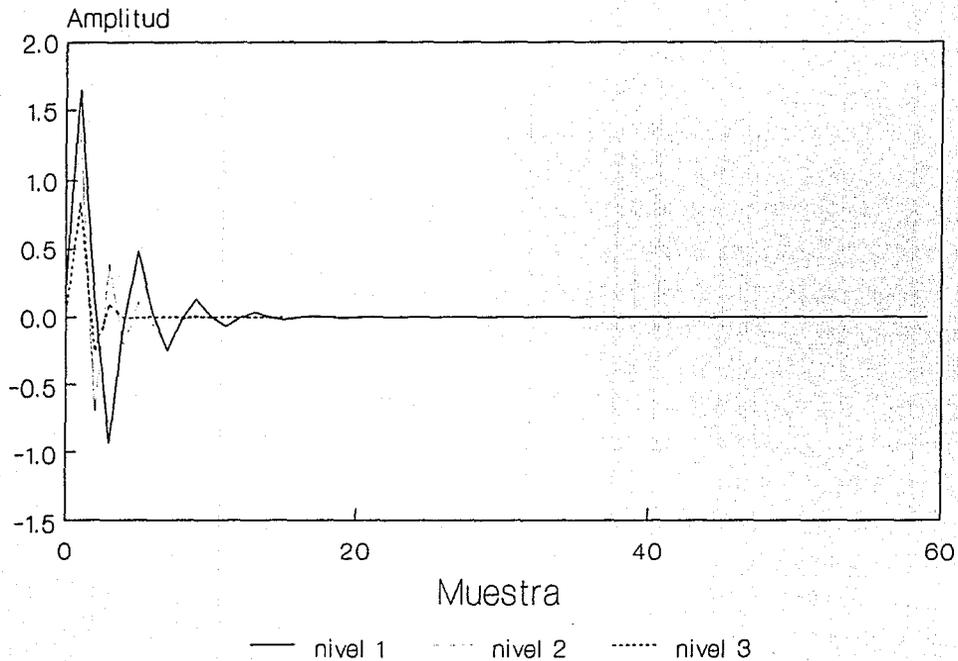


FIGURA VEINTE

# COEFICIENTES WAVELET MEDIANTE QMF

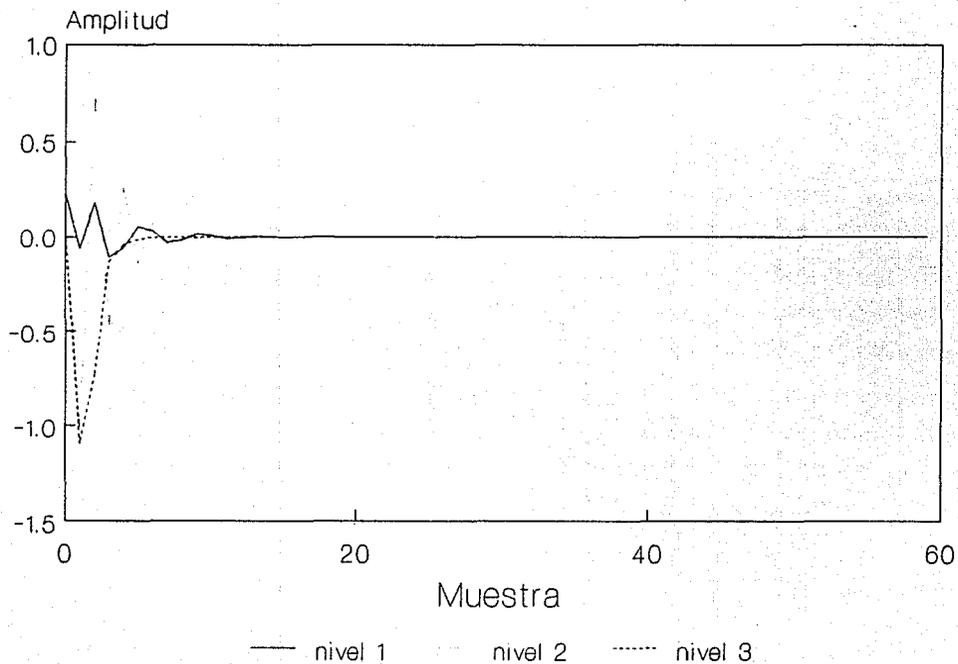


FIGURA VEINTIUNO

# SINTESIS MEDIANTE QMF

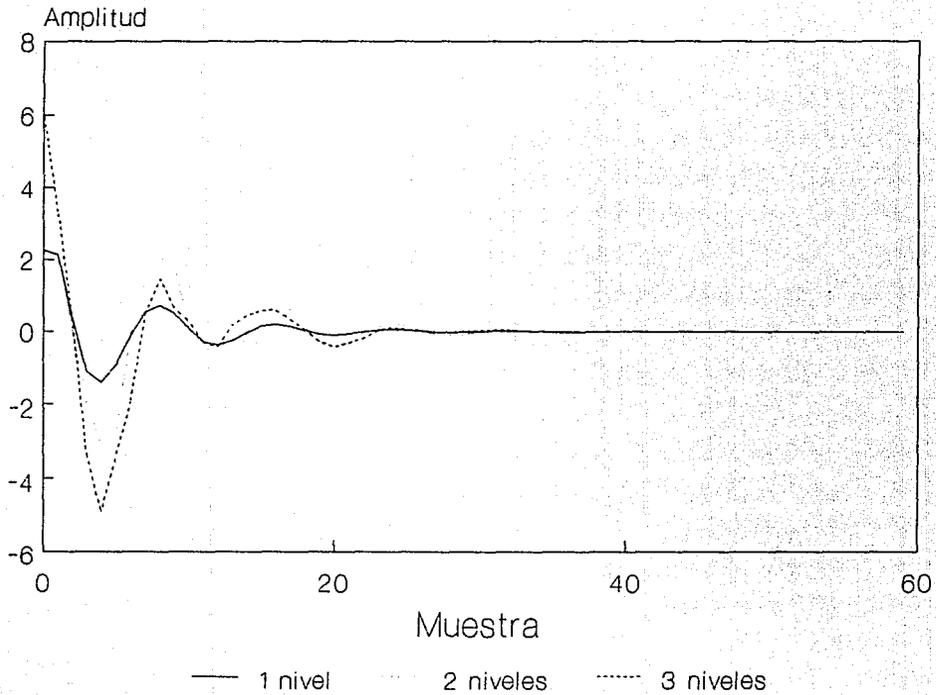


FIGURA VEINTIDOS

La reconstrucción de la señal original mediante una estructura arborea de síntesis, en la que se ha corregido el corrimiento de los filtros, se encuentra en la figura veintidós. En ella se aprecian tres gráficas, de las que cada una corresponde a la síntesis utilizando distinto número de niveles de resolución. Por ejemplo, para tres niveles de resolución se ha recurrido a la aproximación discreta del último nivel (tercero) y los coeficientes wavelet de los tres niveles de descomposición. Para un solo nivel de resolución basta aplicar un QMF de síntesis cuya entrada son la aproximación discreta y los coeficientes wavelet del primer nivel.

De la figura veintidós es posible distinguir cómo las tres reconstrucciones coinciden con la señal original (compárese con la figura cinco), validando, de esta manera, el algoritmo establecido. Aun así, es justo reconocer que la amplitud para cada síntesis es diferente; al respecto, se debe hacer notar la necesidad de ajustar la ganancia del filtro para los diferentes niveles de descomposición, no obstante que la distorsión es inexistente, a no ser por los casi imperceptibles problemas de borde que se encuentran en las primeras muestras.

## CAPITULO VII

### PROPUESTA DE UN ESQUEMA ORIGINAL DE DETECCION BASADO EN LA TRANSFORMADA WAVELET.

#### VII.1 Exordio

De acuerdo con lo expuesto en la introducción de este trabajo, este capítulo debe ser considerado como primordial, ya que, como el título lo indica, está dedicado a sugerir un sistema de detección distinto a los que comúnmente son utilizados; sin embargo, se debe aclarar que lo que se expone en los capítulos séptimo y octavo se fundamenta en las secciones anteriores y, por tanto, no puede considerarse aislado de los demás. Por tal motivo, es nuestro deseo enfatizar que lo desarrollado en los capítulos previos no debe ser pasado por alto, aun a riesgo de no conseguir más que una visión parcial del sistema que se propone, ya que esta obra ha sido planeada y concebida como un todo, no como un conjunto de apartados independientes.

Asimismo, queremos hacer notar que a partir de este momento se supondrá que el lector posee los escasos conocimientos que de la teoría de probabilidad y estadística son necesarios para poder ingresar al estudio formal del problema de la detección y la estimación. No obstante, se pretende continuar con la filosofía que se ha venido sustentando a lo largo del texto, en cuanto a que este trabajo no está dirigido únicamente a expertos, sino que también está destinado a un público menos docto, pero con un ávido interés en los tópicos que aquí se exponen.

## VII.2 Detección Tradicional.

El estudio de la detección de señales no es, en manera alguna, un problema trivial; atendiendo a esta razón, los entendidos han creado una serie de subdivisiones acordes con diferentes criterios. En este trabajo nos concretaremos a lo que es conocido, en la literatura especializada, como detección binaria.

La detección binaria consiste, en su modo más simple, en tomar una decisión sobre dos hipótesis, indicando cuál se verifica. Las hipótesis pueden ser, por un lado, la existencia de una señal en la que se tiene un particular interés, la cual se encuentra inmersa en un ruido, y, por otro, su inexistencia.

Formalizando, es posible pensar que, a partir del conocimiento o la medición de una señal  $r(t)$ , se debe decidir entre la verificación de las hipótesis  $H_1$  y  $H_0$ . La primera de ellas supone que  $r(t)$  se compone de una cierta señal  $s(t)$ , de la que depende la decisión, adicionada a un ruido. La segunda hipótesis presume que dicha señal no está presente y que, en consecuencia,  $r(t)$  está formada únicamente por ruido.

De lo anterior resulta lógico pensar que para el problema de detección la cantidad de información disponible acerca de la señal que se desea detectar es fundamental, ya que en la medida que ésta sea mayor, la toma de decisión (entre la hipótesis  $H_1$  o  $H_0$ ) será más sencilla.

Dentro de la detección binaria se distinguen tres tipos de detección según su grado de complejidad [33]:

a) Detección de señales conocidas inmersas en ruido

$$H_1: r(t) = s(t) + n(t).$$

$$H_0: r(t) = n(t).$$

Donde  $s(t)$  es la señal conocida por detectar, y  $n(t)$  es algún tipo de ruido.

b) Detección de señales conocidas inmersas en ruido, pero que poseen parámetros desconocidos (e.g. la fase).

$$H_1: r(t) = A s(t + F) + n(t).$$

$$H_0: r(t) = n(t).$$

Los parámetros desconocidos son, por ejemplo,  $A$  y  $F$ .

c) Detección de señales desconocidas o aleatorias inmersas en ruido.

$$H_1: r(t) = S(t) + n(t).$$

$$H_0: r(t) = n(t).$$

Con  $S(t)$  la realización de una función de un proceso estocástico.

Entre los tres presentados, el caso de detección más general es c), además de que es sobre el que se tiene mayor interés en lo que a este trabajo se refiere; sin embargo, la manera en que se propone solucionar este problema será más evidente si se empieza estudiando el caso a), que aparentemente es más simple. Tomando este problema como base, no presentará complicación alguna definir una regla de decisión para optar por alguna de las dos hipótesis.

La aplicación de la regla mencionada se consigue partiendo de un mecanismo de transición probabilística sobre un cierto espacio de representación, o sea, un mapeo que permita expresar a  $r(t)$  en términos de un conjunto observable de variables aleatorias, de tal manera que sea posible dividirlo en dos regiones, cada una de las cuales tiene asociada una densidad de probabilidad condicionada a las dos hipótesis [33]. Estas regiones son colectivamente exhaustivas y mutuamente excluyentes.

Existe un número considerable de reglas de decisión. Una de éstas, cuyo interés es más bien teórico, es aquél que se denomina criterio de Bayes [33], el cual, permite crear una razón entre las dos densidades de probabilidad, que se compara con un umbral basado en las probabilidades a priori de cada una de las hipótesis. La dificultad en el uso de esta regla de decisión radica en el hecho de que es necesario asignarle un conjunto de costos a cada uno de los cuatro posibles resultados, de manera que cada uno tenga un peso diferente, lo cual es casi, si no es que imposible de realizar en la mayoría de los casos prácticos. Los cuatro posibles resultados son, a saber:

- 1) Se opta por  $H_0$  y se verifica  $H_0$ .
- 2) Se opta por  $H_1$  y se verifica  $H_1$ .
- 3) Se opta por  $H_1$  y se verifica  $H_0$ .
- 4) Se opta por  $H_0$  y se verifica  $H_1$ .

Existe una nomenclatura, heredada de la jerga de los sistemas

de radar, en la que al caso uno se le denomina "no detección". Al segundo resultado "detección". Al tercero, "falsa alarma", debido a que se cree haber detectado algo que en realidad no existe, y al cuarto, "error".

Designese a  $P(H_0)$  como la probabilidad a priori de que la hipótesis  $H_0$  se cumpla, de modo que  $P(H_1) = 1 - P(H_0)$ ; el criterio de Bayes está dado por [34]

$$\frac{f(x;t|H_0)}{f(x;t|H_1)} \begin{matrix} >_{H_0} \\ <_{H_1} \end{matrix} \frac{[1 - P(H_0)] (C_{11} - C_{01})}{P(H_0) (C_{00} - C_{10})} \quad (43)$$

donde  $C_{ik}$  es el costo de escoger  $H_i$  cuando la hipótesis que resulta ser cierta es  $H_k$ .

El término a la derecha de la desigualdad es el umbral, mientras que el término a la izquierda es la razón entre las dos densidades de probabilidad condicionada; es decir,  $f(x;t|H_0)$  es la densidad de probabilidad de  $P(r|H_0)$ , y  $f(x;t|H_1)$  es la densidad de probabilidad de  $P(r|H_1)$ , donde  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  es el vector tal que, si  $r = r_1, r_2, \dots, r_n$  es un vector aleatorio de  $r(t)$  y  $F(x;t)$  es la función de distribución correspondiente a  $f(x;t)$ , entonces  $F(x;t|H_1) = F(r_1 < x_1, r_2 < x_2, \dots, r_n < x_n; t|H_1)$ . A la división de estas dos densidades se le conoce como razón de verosimilitud.

Este criterio de decisión puede entenderse a partir del teorema de Bayes [35], el cual expresa la probabilidad, a posteriori, como  $P(H_i|r) = f(x;t|H_i)P(H_i)/f(x;t)$  con  $i = 0, 1$ , en el que  $f(x;t)$  es la densidad de probabilidad de  $r$ . Despejando la densidad de probabilidad condicionada se obtiene  $f(x;t|H_i) = P(H_i|r)f(x;t)/P(H_i)$ , de modo que la razón de verosimilitud es

$$\frac{f(x;t|H_0)}{f(x;t|H_1)} = \frac{P(H_0) P(H_0|r)}{P(H_1) P(H_1|r)}$$

Asociándole a  $P(H_0|r)$  y a  $P(H_1|r)$  la diferencia de costos  $C_{11} - C_{01}$  y  $C_{00} - C_{10}$ , respectivamente, el criterio de la expresión (43) se obtiene a partir de la siguiente regla de decisión: selecciónese la hipótesis  $H_0$  si la razón de verosimilitud es mayor que el umbral, en caso contrario selecciónese  $H_1$ .

Un criterio menos exigente, que de hecho se deduce del de Bayes, es el de Neyman-Pearson [34], el cual no requiere del conocimiento de los costos  $C_{11}$ , ni de las probabilidades a priori; en cambio, se propone un valor para la probabilidad de falsa alarma, con base en la cual se determina un umbral  $\gamma$ . La regla de selección es la siguiente.

$$\frac{f(x;t|H_0)}{f(x;t|H_1)} \begin{matrix} >_{H_0} \\ <_{H_1} \end{matrix} \gamma$$

El criterio que se utiliza más comúnmente es el de máxima probabilidad a posteriori o prueba del observador ideal, que se expresa como [34]

$$\frac{f(x;t|H_0)}{f(x;t|H_1)} \begin{matrix} >_{H_0} \\ <_{H_1} \end{matrix} \frac{[1 - P(H_0)]}{P(H_0)}$$

Este criterio postula que la probabilidad de error de decisión se minimiza si se selecciona la hipótesis que tenga la máxima probabilidad a posteriori, es decir,  $\max\{P(H_i|r)\}$  para  $i=0$  ó  $i=1$  [36], que no es más que el criterio de Bayes con una razón de costos unitaria  $(C_{01}-C_{11})/(C_{10}-C_{00}) = 1$ , como, por ejemplo, cuando los costos por error (índices diferentes) son iguales y los costos por acierto (índices iguales) son nulos.

Aquel caso en el que las dos hipótesis son igualmente probables, es decir, cuando las probabilidades a priori son las mismas,  $P(H_0)=P(H_1)$ , se conoce como criterio de máxima verosimilitud [36], el cual puede ser obtenido del criterio de máxima probabilidad a posteriori. Para realizar la deducción se parte del teorema de Bayes ya mencionado, en el que el denominador es el mismo para ambas hipótesis y, por tanto, no afecta la decisión. Lo mismo sucede con  $P(H_1)$ . Así, pues, seleccionar la hipótesis que brinde la máxima probabilidad a posteriori es equivalente a escoger la hipótesis que maximice  $f(x;t|H_i)$ . Un resultado análogo se obtiene directamente del criterio de Bayes.

Tal y como se podrá observar, los tres criterios expuestos utilizan como regla de decisión la comparación de la razón de verosimilitud, con cierto umbral que varía de acuerdo con el criterio seleccionado. A este umbral se le denotará  $\eta$ . Así, pues,

para conseguir la detección de la señal  $s(t)$ , es preciso, independientemente del criterio utilizado, encontrar la razón de verosimilitud.

Partiendo de que  $r(t)$  es completamente conocida, se desea calcular la densidad de probabilidad de  $f(x;t|H_0)$  y de  $f(x;t|H_1)$ ; para ello se considerará al ruido dentro del cual se encuentra la señal por detectar, como gaussiano, de media cero y blanco (i.e. sin correlación y dada la gaussianidad, estadísticamente independiente); su varianza está dada por  $\sigma^2$  y, por tanto, su correlación (ver apéndice B) es  $\sigma^2\delta(t)$ . Con estas condiciones en mente y dependiendo del caso  $H_1$  o  $H_0$ , la media de  $r(t)$  está dada por  $s(t)$  o cero, respectivamente.

En el cálculo de la varianza de  $r(t)$ , donde  $\mathcal{E}\{\}$  denota el operador esperanza matemática, se observa,

$$\begin{aligned} \text{VAR}\{r(t)\} &= \mathcal{E}\{r^2(t)\} - \mathcal{E}\{r(t)\}^2 = \mathcal{E}\{r^2(t)\} - \mathcal{E}\{s(t)-n(t)\}^2 = \\ &= \mathcal{E}\{r^2(t)\} - s^2(t) = s^2(t) + \mathcal{E}\{n^2(t)\} - s^2(t) = \text{VAR}\{n(t)\} \end{aligned}$$

de modo que la varianza de la señal medida o recibida es igual a la varianza del ruido  $\sigma^2$ , en cualquier caso.

Dada la distribución gaussiana del ruido,  $f(x;t|H_0)$  y  $f(x;t|H_1)$ , a las que se les conoce como funciones de verosimilitud [21], son

$$f(x;t|H_1) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int [r(t) - s(t)]^2 dt \right\}$$

$$f(x;t|H_0) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int [r(t)]^2 dt \right\}$$

de modo que la razón de verosimilitud es

$$\frac{f(x;t|H_0)}{f(x;t|H_1)} = \exp \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -2 \int r(t)s(t)dt + \int s^2(t)dt \right\}$$

Utilizando estos resultados, la regla de decisión, sea cual fuere la seleccionada, queda como

$$\exp \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -2 \int r(t)s(t)dt + \int s^2(t)dt \right\} \begin{matrix} > \eta & H_0 \\ < \eta & H_1 \end{matrix}$$

que obteniendo su logaritmo natural es

$$\frac{1}{\sigma^2} \int r(t)s(t)dt \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{1}{2\sigma^2} \int s^2(t)dt - \ln\{\eta\} = \lambda \quad (44)$$

siendo  $\lambda$  un nuevo umbral compuesto por  $\ln\{\eta\}$  y un término que depende de la razón entre la energía de la señal buscada, es decir,  $s(t)$  y la varianza del ruido en que está inmersa. Este término representa el sesgo de la integral a la izquierda de la desigualdad (44), a la que se le denomina variable de decisión [36]. Esta variable puede entenderse como una correlación cruzada entre la señal recibida  $r(t)$  y la señal buscada, de ahí que en el contexto de las comunicaciones digitales el dispositivo que efectúa esta operación sea conocido como demodulador de correlación [36].

### VII.3 El Filtro Acoplado

La expresión (44) ofrece un método que permite decidir entre las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$ , toda vez que se halla propuesto un cierto umbral  $\lambda$ . No obstante, si lo que se desea es un algoritmo de detección eficiente, con miras quizá, a ser implantado en una computadora digital, resulta conveniente interpretar la integral a la izquierda de la desigualdad, como la acción de un filtro de respuesta al impulso  $h(t)$ , es decir, sustituir la integral por

$$I = \int h(t)r(T-t)dt = h(t)*r(t)$$

No resulta complicado observar que la respuesta al impulso es  $h(t) = s(T-t)$ , ya que entonces,

$$I = \int s(T-t)r(T-t)dt = \int r(t)s(t)dt \quad (45)$$

Al filtro caracterizado por esta respuesta al impulso se le llama filtro acoplado o filtro de North [36], que tiene la virtud de maximizar la SNR (razón señal a ruido) a la salida del filtro [35], tal y como se demuestra a continuación.

Partiendo de que el filtro, cuya respuesta al impulso es  $h(t)$ , actúa sobre la señal  $r(t)$  (a partir de la que se desea tomar la decisión), la salida del filtro será  $s(t)*h(t)+n(t)*h(t)$ . En consecuencia, la SNR en ese punto viene dada por [34]

$$SNR_s = \frac{[h(t)*s(t)]^2}{\mathcal{E}\{[h(t)*n(t)]^2\}} \quad (46)$$

Sin embargo, de las propiedades de la convolución [37],

$$h(t)*s(t) = 1/2\pi \int S(\omega)H(\omega)\exp\{j\omega t\}d\omega$$

Ahora bien, si se define  $y(t) = h(t)*n(t)$ , resulta evidente que la autocorrelación de  $y(t)$  evaluada en cero será  $R_{yy}(0) = \mathcal{E}\{|y(t)|^2\}$ , pero si se denomina  $S_{yy}(\omega)$  a la densidad de potencia espectral de  $y(t)$ , entonces, dado que  $R_{yy}$  y  $S_{yy}$  están relacionados por una transformada de Fourier, (teorema de Wiener-Khintchine) no presenta dificultad percatarse de que

$$R_{yy}(0) = 1/2\pi \int S_{yy}(\omega) d\omega = 1/2\pi \int S_{nn}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega$$

donde se ha utilizado el teorema de Rozanov [60], es decir,  $S_{yy} = S_{nn}|H(\omega)|^2$ . Sin embargo, dado que  $R_{nn}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$ , se tiene que  $S_{nn}(\omega) = \sigma^2$ . Así, pues, se llega a

$$\mathcal{E}\{|y(t)|^2\} = \mathcal{E}\{[h(t)*n(t)]^2\} = 1/2\pi \int \sigma^2 |H(\omega)|^2 d\omega$$

De este modo, la ecuación (46) introducida en la desigualdad de Cauchy-Schwartz [37] es

$$SNR_s = \frac{\left| \int S(\omega)H(\omega)\exp\{j\omega t\}d\omega \right|^2}{2\pi\sigma^2 \int |H(\omega)|^2 d\omega} \leq \frac{\int |S(\omega)|^2 d\omega \int |H(\omega)|^2 d\omega}{2\pi\sigma^2 \int |H(\omega)|^2 d\omega}$$

El valor máximo de la  $SNR_s$  se obtiene cuando los integrandos de la desigualdad adquieren tales valores que se observa la igualdad [37], es decir, cuando  $H(\omega) = S^*(\omega) \exp\{-j\omega t\}$ , o sea,  $h(t) = s(T-t)$ . Esto no es otra cosa que la respuesta al impulso del filtro acoplado, con lo cual queda demostrado que el mencionado filtro maximiza la  $SNR_s$  a la salida. Para este caso la  $SNR_s$  está dada por

$$\frac{\iint h(\tau)h(u)s(t-\tau)s(t-u)d\tau du}{\mathcal{E}\{\iint h(\tau)h(u)n(t-\tau)n(t-u)d\tau du\}} = \frac{\int h(\tau)s(t-\tau)d\tau \int h(u)s(t-u)du}{\iint h(\tau)h(u)R_n(\tau-u)d\tau du}$$

de donde, recordando que  $R_n(\tau-u) = \sigma^2\delta(\tau-u)$ , se llega a que

$$SNR_s = E^2/(\sigma^2 E) = E/\sigma^2 \tag{47}$$

y  $E$  la energía de la señal  $s(t)$ , definida como  $E = \int |s(t)|^2 dt$ .

Este resultado no debe causar asombro, ya que resulta bastante coherente pensar que un filtro que permite detectar una señal inmersa en ruido se vale de maximizar alguna característica (e.g. la energía) de la señal buscada, con relación a alguna particularidad del ruido.

#### VII.4 Detección Mediante la Transformada Wavelet.

Las ideas presentadas en la sección anterior servirán como marco para dar a conocer un algoritmo de detección, inspirado en el filtro acoplado, que posee la característica de utilizar la transformada wavelet. Lo anterior no debe malinterpretarse. El que un sistema de detección haya inspirado al otro, no significa que compartan las mismas propiedades. De hecho, el esquema que se sugiere goza de algunas cualidades que no se aprecian en el filtro de North.

Con el fin de no introducir súbitamente el detector que se propone, y para que lo expresado en el párrafo anterior quede más claro, la presentación del mismo se efectuará a partir de explicar la manera en que surgió la idea del novedoso sistema.

Tomando como punto de inicio la condición de detección de la desigualdad (44) se tiene, usando la definición de I y de E dadas en (45) y (47), respectivamente, que

$$\frac{1}{\sigma^2} (2I - E) \begin{matrix} >_{H1} \\ <_{H0} \end{matrix} -2 \ln(\eta)$$

Sin embargo, resulta más conveniente, sobre todo si lo que se busca es la automatización del sistema mediante una computadora, entender la diferencia  $(2I-E)$  como una métrica, ya que de esa manera la comparación con un umbral o con alguna otra distancia es más sencilla; de ahí que sea más práctico trabajar con  $(2I-E)^2$ . Suponiendo que  $\eta$  es menor que uno, se tiene, entonces, que

$$\frac{1}{\sigma^2} (2I - E)^2 \begin{matrix} >_{H1} \\ <_{H0} \end{matrix} \alpha^2 \sigma^2 \quad (48)$$

donde  $\alpha^2$  es un número cuyo valor es  $4 \ln^2(\eta)$ .

Esta desigualdad define una regla de decisión que no resulta ser muy útil para la detección de las señales que se pretende analizar, ya que, como se recordará, el caso que interesa es aquel en el cual se desconoce la forma de la señal  $s(t)$  y, por tanto, no es posible calcular E ni I. No se debe olvidar que el problema que se quiere resolver es el del inciso c) de la segunda sección, o sea la detección de señales aleatorias inmersas en ruido.

En cuanto a  $\sigma^2$ , aún cuando también se desconoce su valor, permite recordar que se ha supuesto que el ruido sobre el que está superpuesta la señal es gaussiano, blanco. Esta hipótesis probablemente simplifica demasiado el modelo, pero todo argumento en este sentido no será válido sino hasta que el modelo haya sido puesto a prueba.

La pregunta que se presenta, entonces, es la siguiente, ¿dado que se pretende detectar señales desconocidas, qué utilidad tiene

la desigualdad (48)? El beneficio no depende de ella sólo, sino, como en la mayoría de las propuestas incipientes, de la fusión con otro concepto, como a continuación se explica.

Recuérdese que con base en la interpretación del detector tradicional como un filtro acoplado, la integral I se puede expresar como la convolución siguiente

$$r(t)*h(t) = r(t)*s(-t+T) \quad (49)$$

Dado que se desconoce  $s(t)$ , no es posible dar una forma exacta a la respuesta al impulso del filtro, que maximice la SNR a la salida; sin embargo, lo que se puede hacer, en el supuesto de que la señal  $s(t)$  sea más bien transitoria que estacionaria, es "probar" con diferentes señales supuestas  $s(t)$  (o  $h(t)$ ), para observar si con alguna aumenta la SNR a la salida del filtro, obteniéndose, de esta manera, la detección.

Revisando lo expuesto a lo largo de este trabajo, de inmediato acude a la mente la idea de utilizar como función de prueba la respuesta impulsional del filtro pasa banda conocido como transformada wavelet, la cual no sólo brinda una respuesta al impulso, sino una familia de las mismas que va cubriendo el eje de las frecuencias, como ya se ha comentado. Las características de soporte compacto de esta respuesta al impulso motivan aún más su uso en la detección de señales transitorias.

Así, pues, recordando (ver ecuación (19)) que la transformada wavelet de una función  $r(t)$  se puede ver como  $r(t)*[s^{1/2}\psi(-st)]$ , parangonando con (49), resulta lógico tomar  $h(t)=s^{1/2}\psi(-st)$ <sup>4</sup>. De hecho, conforme  $\psi_s(t)$  tienda a la señal por detectar,  $s(t)$ , la transformada wavelet se parecerá más a un filtro acoplado. Obsérvese que cuantos más valores de  $s$  (o de  $j$  en el caso discreto) se calculen, más posibilidades habrá de que  $\psi_s(t)$  se asemeje a  $s(t)$ ; además, en caso de darse la detección, ésta se observará para aquel valor de  $s$  que permita a  $\psi_s(t)$  parecerse lo más posible a  $s(t)$ . Por lo mismo, esta manera de detectar no

---

<sup>4</sup>No confundir la  $s$  que se refiere al parámetro de escalamiento con la señal por detectar  $s(t)$ . La primera es una variable, la segunda es una función.

solamente puede indicar en qué instante de tiempo se encuentra la señal  $s(t)$  de interés, sino en qué intervalo de frecuencias se halla, ya que se tiene la posibilidad de cubrir totalmente un ancho espectro.

Con base en lo anterior, se propone la siguiente regla de detección basada en (48),

$$\frac{1}{\sigma^2} (Wr(s,u) - E)^2 \begin{matrix} >_{H_1} \\ <_{H_0} \end{matrix} \alpha^2 \sigma^2 \quad (50)$$

donde  $Wr(s,u)$  es la transformada wavelet de  $r(t)$  en el tiempo  $u$  y para un valor de  $s$  determinado. El problema de seleccionar el valor para  $s$  más adecuado se expone más adelante, ya que por el momento se desea resolver el problema que plantea el desconocimiento de  $\sigma^2$  y  $E$ . Entre las diversas maneras de remediar este inconveniente se presenta una muy particular que está fundamentada en el hecho de que la detección se realiza sobre un conjunto discreto de valores  $r[i]$ , consecuencia del muestreo adecuado de la señal  $r(t)$ , que se encuentran almacenados en algún dispositivo.

En primera instancia se pensará que  $r[i]$  puede ser segmentada de acuerdo con cierto criterio, como podría ser la posibilidad de aparición de una señal transitoria (pico) para cada segmento. Por ejemplo, imagínese que se tiene el registro de actividad sísmica de diez días y se desea detectar un fenómeno que se sabe aparece  $N$  veces en el transcurso de un día, donde  $N$  puede ser cero; entonces la segmentación se hace para cada período de un día. La hipótesis de segmentación no es necesaria y, de hecho, es muy poco restrictiva; aun así, es útil para el tipo de señales a las que principalmente está destinado este detector; sin embargo, puede ser fácilmente removida, como se verá más adelante.

Para calcular  $\sigma^2$  y  $E$  se supondrá que la energía de cada segmento se debe principalmente a la energía de  $s(t)$  y que, en cambio, la varianza del segmento es consecuencia del ruido, principalmente; luego, entonces,  $E$  se calculará con un estimador

de la energía del segmento y,  $\sigma^2$  con un estimador de la varianza del segmento dados por

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \mu)^2 \quad E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum x_i^2}$$

Para compensar la segmentación y el hecho de haber supuesto que la energía de la señal y varianza del ruido corresponden a la señal del segmento, se ha decidido utilizar, quizá de manera demasiado arbitraria, pero eficaz, un factor compensador que multiplique a  $\alpha^2$ , el cual viene dado por  $\sigma_T^2/E_T$ , es decir, la razón entre la varianza y la energía de toda la señal (sin segmentar), de tal manera que la  $\sigma^2$  que aparece a la derecha de la desigualdad (50) se tome como  $\sigma_T^2$  (la varianza de toda la señal) y que sea dividida entre  $E_T$  (la energía de toda la señal). Con el fin de que la ecuación sea congruente, el lado izquierdo será dividido entre una energía, la del segmento.

Se ha supuesto que ambas energías son distintas de cero, ya que se refieren a la energía de  $r(t)$ , no así de  $s(t)$ , que en caso de no existir sería nula. Así, el criterio de decisión es

$$\frac{1}{\sigma^2 E} (Wr(s,u) - E)^2 \begin{matrix} >_{H1} \\ <_{H0} \end{matrix} \alpha^2 \sigma_T^2 / E_T \quad (51)$$

El factor  $\alpha^2$  se suele determinar experimentalmente, lo cual es una ventaja, ya que puede compensar el efecto negativo del factor  $\sigma_T^2/E_T$ , si éste así lo fuera; a pesar de ello, consideramos que  $\sigma_T^2/E_T$  tiene un efecto más bien normalizador, ya que puede entenderse como el inverso de la SNR de la señal total.

Nótese que en caso de que no se lleve a cabo la segmentación, entonces  $E_T = E$  y  $\sigma_T^2 = \sigma^2$ , por lo que la desigualdad (51) pasa a ser nuevamente (50), de ahí que, como ya se mencionó, la hipótesis de segmentación no sea necesaria, pero sí útil.

Para completar el esquema de detección se debe aclarar el punto referente a la selección del parámetro de escalamiento s adecuado, que desde el punto de vista discreto vendría a ser  $j$ .

Para escogerlo se procede a calcular los coeficientes wavelet para un número  $M$  de valores de  $j$ , empezando con  $j=0$  hasta  $j=M-1$ , obteniéndose, cada vez, coeficientes wavelet de menor resolución temporal, tal y como se ha explicado. Para cada punto en el tiempo de la resolución más baja ( $j=0$ ) se elige aquel valor de los coeficientes wavelet que sea máximo entre todas los niveles de resolución, seleccionándose, así, al mejor candidato al tiempo  $u$  de entre los  $M$  posibles. Lo anterior puede ser expresado como  $\max\{W_r(j,u)\}$  para  $u_0$  un valor constante. La idea de utilizar el máximo entre todos los valores de  $j$  para seleccionar el más adecuado se puede observar también en el dispositivo de detección de otros autores [38], el cual, a pesar de ser más elaborado que el que aquí se presenta, ofrece menores resultados.

En el caso de que para una  $j$  no existiera valor en un cierto tiempo (debido a la manera en que se muestrea el espacio fase, ver figura tres), el coeficiente wavelet en ese punto se tomaría como cero.

De acuerdo con lo anterior, una vez que se han obtenido los coeficientes wavelet de  $r(t)$  para diferentes niveles de resolución, la detección se va haciendo muestra a muestra para la resolución más baja ( $j=0$ ); aquel valor de  $W_r(s,u)$  en esa muestra particular (para la  $j$  que haga el coeficiente wavelet máximo entre los  $M$  valores) que cumpla la condición (51) para  $H_1$ , se destaca como punto de detección. La señal detectada se encontrará, entonces, en la banda característica de la  $j$  obtenida por el mismo algoritmo. En efecto, la detección se realiza tanto en el espacio del tiempo como en el de la frecuencia, de modo tal que es posible conocer no solamente la localización de la señal que en un principio era desconocida, sino la banda en que ésta se encuentra. Esto es posible gracias a la propiedad de soporte compacto tan característica de las wavelets.

## VII.5 El Algoritmo

El procedimiento de detección expuesto en la sección anterior cumple con la exigencia de diseño que se refiere a la susceptibilidad de ser implantado, de una manera sencilla, en un microprocesador. Por lo mismo, describir el algoritmo correspondiente al sistema planteado no ofrece dificultad alguna. Por consiguiente, y con el fin de que el procedimiento sea comprendido más claramente, se muestra en la figura veintitrés un diagrama de flujo que esboza las operaciones que el algoritmo efectúa.

En el diagrama de flujo se observan dos ciclos "for", el externo (I) brinca de segmento en segmento calculando  $\sigma^2$  y E para cada uno, el interno (K) barre todas las muestras del segmento seleccionando para cada muestra el valor máximo de  $W_r(J,K)$ , entre todas las jotas. A continuación se compara con el umbral lo que podríamos llamar una nueva variable de decisión (denotada por H). En caso de darse la detección se almacena la abscisa K y el valor de J, para el momento de efectuar el reporte. Si no hay detección se pasa a la siguiente muestra, hasta comenzar con el siguiente segmento donde el proceso se repite a través de todos los segmentos. Por último se presenta un reporte en el que se indica la localización y frecuencia de las detecciones obtenidas

El proceso de detección, visto en el espacio fase (ver figura tres), se puede entender como un barrido sobre el eje del tiempo, en donde en cada muestra, es decir, en cada recta paralela al eje de las frecuencias se selecciona el máximo valor del coeficiente wavelet, el cual se compara con un escalar para poder establecer la decisión sobre alguna de las dos hipótesis que tanto se han mencionado.

Con ayuda del diagrama de flujo la traducción del algoritmo a un lenguaje de alto nivel no presenta dificultad, de ahí que se haya creado el programa DETWAVMA, codificado en lenguaje C, cuyo listado puede ser consultado con el autor. La aplicación y validación de este programa se expone en el capítulo subsecuente.

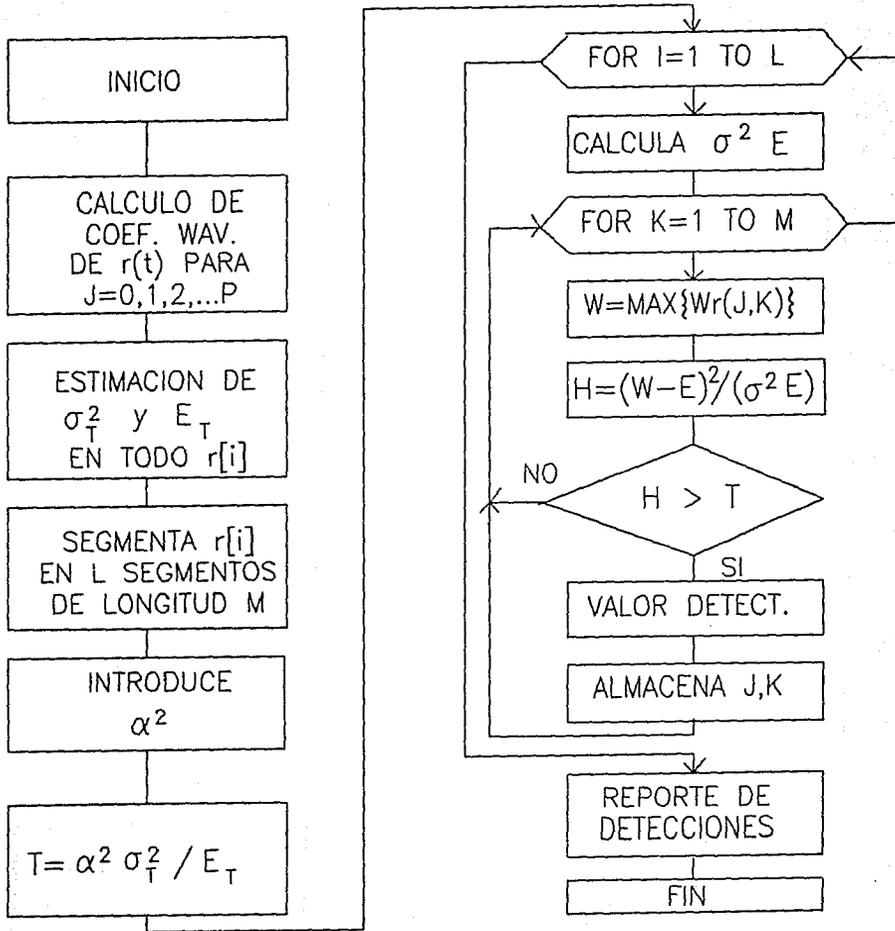


FIGURA VEINTITRES

## CAPITULO VIII

### APLICACION DE LA TRANSFORMADA WAVELET A LA DETECCION DE SEÑALES ELECTROENCEFALOGRAFICAS

#### VIII.1 Generalidades de las Señales Electroencefalográficas.

La actividad eléctrica en el cerebro se produce por corrientes eléctricas neuronales en la corteza cerebral que son activadas por descargas rítmicas del núcleo del tálamo, de tal manera, que producen una diferencia de potencial que puede ser medida, aun cuando es atenuada al atravesar el fluido cerebro espinal, y el cráneo [39]. La medición se realiza mediante la colocación de 11 a 22 electrodos en la superficie del cráneo, obteniéndose potenciales de 10 a 200  $\mu\text{V}$ . La señal que se obtiene de los electrodos se conoce como electroencefalograma (EEG).

La utilidad del registro de la actividad cerebral, que en promedio requiere de media hora de lectura continua [39], se advierte principalmente en el diagnóstico, pronóstico y tratamiento de enfermedades cerebrales, reconocimiento de los estados del sueño, control de anestesia en cirugía, determinación de muerte cerebral, entre otros [40].

Aun cuando la clasificación de los diferentes elementos que contribuyen a la actividad eléctrica cerebral es una disciplina naciente, los entendidos distinguen entre cuatro componentes según la notación de H. Berger [40]: la actividad alfa (que es la más común) que produce ondas entre 8 y 13 Hz; La actividad beta que produce ondas entre 14 y 30 Hz; la actividad theta, cuya banda va de 4 a 7 Hz y la actividad delta entre 1 y 3 Hz. La actividad depende en gran medida del estado de sueño del paciente, así como de otros factores como la posición del electrodo, edad, estado

mental, factores hereditarios. etc.

Otro tipo de clasificación, especialmente útil para las etapas del sueño, supone seis períodos: despierto (w), cuatro fases (1,2,3,4) que indican el aumento en la profundidad del sueño y una etapa parecida a 1, pero caracterizada por movimiento rápido de los ojos (REM), continuamente asociada con un sueño (en el sentido de soñar imágenes) [41].

Particularmente interesantes para este trabajo resultan ser los potenciales evocados, caracterizados por la aparición de espigas, con amplitudes de decenas de  $\mu V$ , superpuestas al resto de la actividad cerebral. Esta actividad transitoria es producida por enfermedades (verbigracia la epilepsia) o mediante estímulos: auditivos [42], visuales [43] sensoriales [44] y otros.

Los elementos que generan las espigas son los mismos que producen la actividad de fondo que aparece en condiciones normales (y que es más estacionaria), sin embargo el funcionamiento de estos elementos para el caso de potenciales evocados es ligeramente diferente. De acuerdo con el modelo más ampliamente aceptado, los potenciales evocados son señales generadas por breves inestabilidades de una población local de neuronas que se tornan activas simultáneamente al estímulo [45].

Hasta la fecha, la interpretación de la actividad cerebral se lleva a cabo de manera subjetiva, siendo la electroencefalografía una de las últimas pruebas clínicas comunmente realizadas que se han intentado automatizar; de ahí que el factor humano no podrá ser descartado en el futuro inmediato [39].

La automatización de los EEG no es un problema trivial dada la complejidad de la señal y la poca independencia que existe en su clasificación, basada más bien en la comparación. Aún así, los intentos realizados han dado lugar a una división de la automatización en los siguientes aspectos [39]:

i) Realización de una base de datos: establecer los valores de frecuencia, amplitud, etc. dentro de los que se encuentran los EEG, así como la manera en que varían con la edad, sexo, estado de salud, etc.

ii) Análisis de la actividad de fondo: basado principalmente en estudios frecuenciales.

iii) Detección de la actividad transitoria: estudios fundamentados en transformaciones ortonormales, filtros digitales acoplados e inspección heurística de la amplitud de la primera y segunda derivada.

iv) Método para despliegue de EEG.

v) Clasificación de patrones: hacer una selección entre las diferentes categorías (despierto, normal, epiléptico, lesionado cerebral, efectos de drogas, etc.) requiere de una capacidad considerable en el manejo de la información, ya que un EEG de 16 canales muestreado a 128 muestras/s por 30 minutos implica 3'686,400 valores a tratar. Los mayores esfuerzos se han encaminado a la clasificación de un solo individuo para diferentes estados, especialmente aquellos producidos por el efecto de una droga.

vi) Extracción heurística de información interesante: combinación de los conocimientos del experto con los métodos automáticos.

De particular interés es el punto iii), cuya finalidad es hacer notar automáticamente la existencia de espigas valiéndose de diferentes métodos. Esta no es una tarea sencilla si se parte del hecho de que la definición de espiga es un tanto ambigua. En [46] se define como aquella onda que se distingue de la actividad de fondo y que tiene una duración de 1/12 de segundo o menos. El poco sentido pragmático de la definición es evidente. En efecto, un especialista en la lectura de EEG rara vez distingue estas espigas de la actividad normal, si solamente tiene uno o dos minutos de registros en los cuales fundamentar su desición.

Con el fin de que el resto de esta sección sea más concreta, será restringida a los potenciales visuales evocados (VEP), que se utilizan para probar la integridad funcional de las rutas nerviosas visuales. Estos potenciales particulares fueron recabados por vez primera en animales, penetrando quirúrgicamente casi hasta el punto mismo de la actividad neuronal, ya que la amplitud de los mismos es muy baja. El desarrollo de la tecnología ha permitido que estas técnicas se apliquen en seres humanos [43].

El ojo puede entenderse como un sistema óptico que a partir de un objeto forma una imagen en la retina. La luz atraviesa las fibras ópticas nerviosas hasta alcanzar los fotorreceptores,

constituidos por dos tipo de neuronas altamente especializadas: conos y bastones. Los primeros permiten percibir el color (azul, verde y rojo) en luz de alta intensidad. Los segundos ayudan a reconocer formas en luz de baja intensidad. Los fotorreceptores pueden entenderse como transductores que convierten las imágenes en señales neuronales eléctricas que pueden medirse en la región occipital [43].

El ojo, entendido como un sistema óptico, es susceptible de asociársele una función de transferencia que está definida como la razón entre el contraste percibido por el observador y el contraste del estímulo, para rejillas sinusoidales de frecuencia  $\omega$  [18]. Lo que resulta especialmente llamativo, es el hecho de que esta función de transferencia puede ser aproximada a un sistema de filtros espaciales, cuyo ancho de banda es constante en una escala logarítmica [18], tal y como lo hace la transformada wavelet.

Los VEP son resultado de cambios transitorios en la actividad cerebral a partir de estímulos intermitentes que dependen de la intensidad (brillo) del estímulo, nivel de contraste, y frecuencia del estímulo [43]. Existen diferentes tipos de estímulos visuales como luz estroboscópica o patrones de líneas o cuadros blancos y negros que se alternan con una cierta frecuencia. Los estímulos más utilizados son los últimos.

Se ha creado una nomenclatura para los VEP que utiliza una P o una N para caracterizar la deflexión positiva o negativa del potencial, seguida de un número que indica la latencia promedio en ms. Las dos ondas más frecuentes son N70 y P100, sin embargo éstas van cambiando con la edad [43].

Los EEG obtenidos a partir de estímulos visuales deben interpretarse con cuidado ya que son muy susceptibles a errores de refracción (mala visión del paciente), enfermedades retinales y velocidad de conducción reducida en el nervio óptico [43].

## VIII.2 Detección de Señales Sintéticas.

Con el fin de poner a prueba el algoritmo dado a conocer en el capítulo anterior, se ha decidido tomar como ámbito de prueba a las señales electroencefalográficas (de las que ya se ha dado una sucinta introducción), ya que éstas cumplen los escasos requerimientos de las secuencias a las que este algoritmo se aplica. El uso de señales más restringidas (e.g. de amplitud o de frecuencia conocidas) resulta un caso particular del que aquí se presenta.

Como una primera aproximación, en esta sección se estudiará el caso de señales sintéticas, es decir, aquellas que se forman artificialmente mediante una simulación por computadora. En la sección siguiente se analizarán las señales que hemos denominado semisintéticas que corresponden a secuencias creadas a partir de un modelo artificial adicionadas de una señal que se obtiene de manera natural. El caso de las secuencias totalmente naturales se ha dejado para el final.

La primera señal sintética con que se pretende estudiar el detector propuesto se crea mediante un generador de números pseudo aleatorios [47,48]. Este programa da origen a un ruido gaussiano, blanco, de media cero y varianza 0.3, al que se le adiciona un triángulo isóceles, cuya base es de cinco muestras y su altura es de 0.4. La gráfica de esta señal se aprecia en la figura veinticuatro. Lo que resulta interesante de ella es que la posición del triángulo no es evidente, de hecho, habría quien se aventurara a decir que la señal está compuesta unicamente por ruido.

Lo que se espera del detector al aplicarse sobre esta señal, es que descubra la posición de ese triángulo sin tener alguna información a priori de su existencia. El único requisito que se ha impuesto sobre la señal a detectar es que pueda ser considerada como un proceso transitorio. Se insiste en que esta no es una restricción fuerte, ya que en la mayoría de los problemas de detección lo que se trata de extraer es precisamente información que se presenta en períodos relativamente cortos.

# SEÑAL SINTETICA

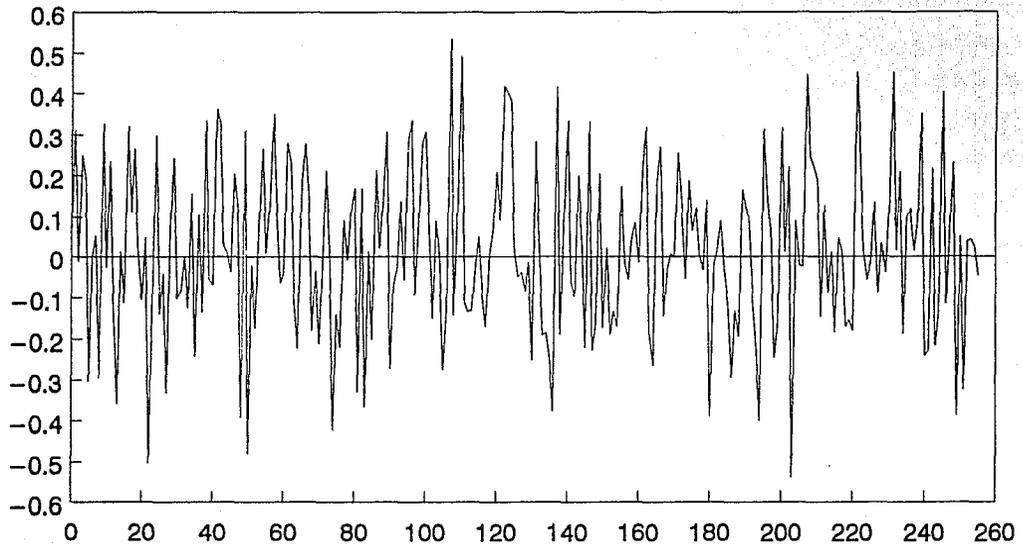


FIGURA VEINTICUATRO

La razón para haber utilizado un triángulo como la señal a detectar obedece al hecho de que con ella se pretende simular un EEG constituido por una espiga inmersa en el resto de la actividad eléctrica cerebral. Obviamente, el triángulo hace las veces de espiga, mientras que el ruido asemeja la actividad de fondo. Este modelo, propuesto por Smith [49], responde a una investigación empírica particular basada en un estudio intensivo sobre una gran cantidad de registros, el cual es preferible a un modelo fundamentado en la definición de espiga, que como ya fue mencionado, es un tanto ambigua. Aún así, el modelo no se sale de los lineamientos de la definición, además de que ha resultado ser útil en la validación de otros métodos de detección como el que utiliza la primera y segunda derivada.

Para aplicar el programa DETWAVMA que efectúa la detección, se calculó mediante el programa WAVETRAN la transformada wavelet de la señal de la figura veinticuatro para los valores de  $J=0$  a  $J=3$ , obteniéndose así cuatro niveles de resolución con parámetro temporal  $\beta=0.5$ . Estos sirvieron para alimentar el algoritmo de detección, que brindó como resultado un reporte que indica una detección en la abscisa 122 para  $J=2$  (esto es 0.376 rad/s), la cual coincide con la posición del valor máximo (centro) del triángulo. El hecho de que la detección se realizara para  $J=2$  indica que el mayor contenido frecuencial de la espiga simulada está alrededor de 0.058 Hz.

A pesar de que para este tipo de señales sintéticas el detector no nos ha defraudado, consideramos que aún cuando los resultados son interesantes, no debemos conformarnos tan fácilmente como suele hacerse en algunas publicaciones, sino exigir más del sistema. La manera más atrayente de lograrlo es mediante una señal más natural, ya que la experiencia nos enseña que conforme nos aproximamos más a la realidad, es decir, disminuimos el número de aproximaciones o simplificaciones, el problema, ahora menos artificial, se presenta más complicado.

### VIII.3 Detección de Señales Semisintéticas.

Alentados por el éxito anterior se procede a la realización de otra experiencia, esta vez con una señal semisintética (o seminatural), compuesta por el mismo ruido gaussiano, que simula la actividad cerebral de fondo, y una señal que es posible considerar como representante (estadísticamente hablando) de un pulso que es respuesta a un estímulo visual, o sea, un VEP.

Para obtener este potencial representativo se procedió de la siguiente manera: se consiguieron 20 diferentes EEG compuestos, cada uno, por 100 segmentos. Cada segmento, constituido de 128 muestras, que corresponden a 1.024 segundos. Esto quiere decir que la frecuencia de muestreo fue de 125 muestras/s. La división en segmentos responde al hecho de que dentro de cada intervalo de 1.024 segundos se esperaba un potencial evocado como respuesta a un estímulo visual.

Con los segmentos de cada EEG se procedió a realizar un promedio muestra a muestra. Esto es, para el EEG X ( $1 \leq X \leq 20$ ) formado de 100 segmentos se tomó la muestra número uno de todos los segmentos, se sumaron y se dividieron entre 100; lo mismo se hizo para cada una del resto de las 128 muestras. Con esto se obtuvo un segmento promedio (de 128 muestras) para cada uno de los 20 EEG; por lo mismo, cada EEG tendría un segmento estadísticamente representativo de él mismo.

Estos promedios fueron nuevamente promediados de la misma manera consiguiéndose, así, un archivo de 128 muestras que es el promedio de los promedios. En este promedio total se observó una tendencia que hemos tomado como el potencial evocado representativo de un estímulo visual.

Queremos hacer notar que no consideramos este promedio como un método de detección, sino únicamente un método estadístico que permite seleccionar a un potencial (entre muchos) como representativo del conjunto de potenciales evocados. Aunque es justo reconocer, y de hecho es posible demostrar, que este método, por medio de una especie de superposición destructiva aleatoria, reduce el ruido del conjunto de señales que se promedia. Sin

embargo, esto no significa que se haya realizado una detección, a menos de que se tenga la certeza de que en todos los segmentos promediados el potencial por detectar se localiza en la misma posición, y su forma no varía.

De lo anterior se concluye que una ventaja del algoritmo que proponemos, sobre otros métodos de detección, incluyendo la experiencia humana, radica en que no requiere de grandes volúmenes de información, sino únicamente de unas cuantas muestras para tomar la decisión.

El potencial visual, resultado del promedio mencionado, así como su espectro, se observan en la figura veinticinco. La secuencia semisintética, compuesta por el ruido más el pulso representativo, se aprecia en la figura veintiséis.

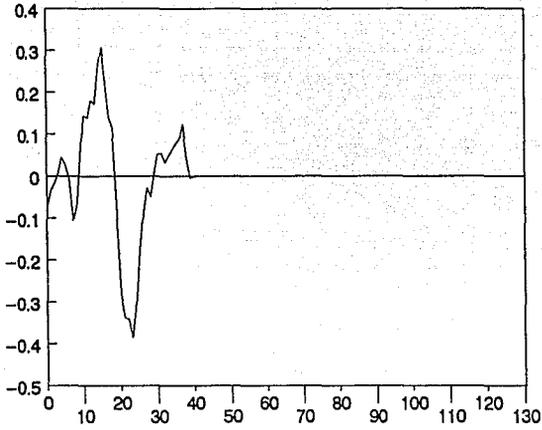
Para aplicar el sistema de detección se procedió de manera análoga al estudio anterior, obteniendo la transformada wavelet para los niveles de resolución  $J = 0, 1, 2, 3$  de la secuencia de la figura veintiséis. El reporte del programa DETWAVMA presenta una indicación para la abscisa 24 en  $J=2$ .

Haciendo referencia a la figura veinticinco es evidente que el sistema ha detectado el punto en el que el pulso toma su valor absoluto máximo, o sea la muestra 24, haciendo notar, de esta manera, la existencia del pulso mencionado; en especial, la deflexión N192. En consecuencia, se ha verificado una vez más la utilidad del esquema de detección presentado, ya que a juicio del autor, la inspección visual de la figura veintiséis no permite concluir la existencia y mucho menos la localización del pulso.

En lo que respecta al espectro, el detector indica que la señal detectada tiene un contenido frecuencial alrededor de la fracción de frecuencia 0.058 ( $J=2$ ), lo que concuerda con el espectro de la figura veinticinco. Además, si se compara el espectro con el de la figura dos, se observará que la detección frecuencial debía ser necesariamente en  $J=2$  ( $s=0.25$ ), ya que es precisamente esta ondeleta la que coincide con el espectro de la figura veinticinco.

Para conocer la frecuencia real (no normalizada) en la que el pulso tiene su mayor contenido espectral, se debe multiplicar 0.058 por la frecuencia de muestreo, 125Hz, resultando 7.25 Hz, o

PULSO PROMEDIO (VEP)



ESPECTRO DEL PULSO PROMEDIO

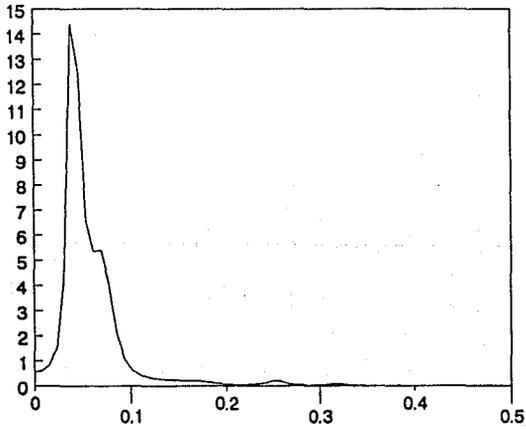


FIGURA VEINTICINCO

# SEÑAL SEMISINTETICA

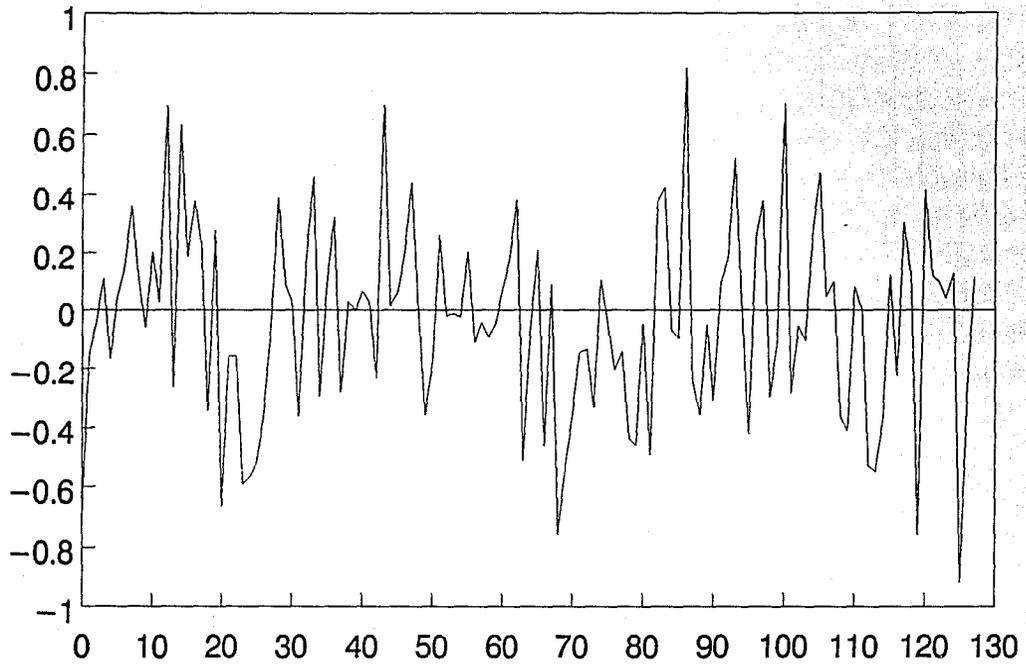


FIGURA VEINTISEIS

sea, 45.553 rad/s.

La experiencia anterior destaca la conveniencia del detector que se propone, ya que hace patente la capacidad del mismo para realizar la localización de la señal encubierta por el ruido, tanto en el espacio del tiempo como en el de la frecuencia, característica que, como ya ha sido mencionado, pocos sistemas de detección comparten.

Otra peculiaridad del sistema en cuestión, que representa una ventaja sobre otros detectores (como el filtro acoplado), es la capacidad de detectar señales tan diversas como pueden ser el triángulo y el pulso con que ha sido validado el algoritmo. Lo anterior no es más que el resultado de haber cumplido con las especificaciones de diseño referentes a la incertidumbre en la forma de la señal que se desea descubrir, lo cual revierte en la posibilidad de emplear el algoritmo en una amplia gama de aplicaciones.

Antes de proceder al análisis de señales completamente obtenidas de la actividad cerebral, es necesario conocer la respuesta del sistema para la situación opuesta a las que se han presentado, ya que también es una medida del desempeño del detector; nos referimos al caso en el que se verifica la hipótesis  $H_0$ , o sea en el que la señal  $s(t)$  no existe o es cero.

Para evaluar esta circunstancia se aplicará el detector exclusivamente al ruido que ha sido superpuesto al pulso de la figura veinticinco, en las mismas condiciones que en el experimento anterior. Para ello se obtiene la transformada wavelet del ruido para los valores 0, 1, 2 y 3 de  $J$ .

Utilizando el programa DETWAVMA sobre la transformada wavelet del ruido, se obtiene, a manera de reporte, el mensaje esperado, es decir, aquel que indica que no ha habido detección alguna.

Las experiencias expuestas han permitido validar y conocer el funcionamiento del sistema de detección que proponemos, es decir, comprueban la tesis que se plantea en este trabajo. Esta afirmación nos respalda y nos da la suficiente confianza para ingresar en un terreno asaz complicado, o sea, el de la detección de señales naturales obtenidas totalmente del cerebro.

#### VIII.4 Detección de Señales Reales.

La finalidad de esta sección es, por una parte, complementar las dos anteriores, pero, por otra, realizar un tipo de análisis que es muy poco común en la literatura, es decir, aplicar el sistema desarrollado a situaciones reales, resolviendo, así, problemas verdaderos. Por lo general, los resultados que se hacen públicos contienen información equivalente a lo que se ha expuesto en las secciones pasadas, verificando el esquema presentado mediante señales sintéticas y simulaciones tipo Monte Carlo. Probablemente esto obedezca a la dificultad que representa llevar a cabo un análisis como el que en esta sección se expone. Aun cuando no se discute la calidad de estos resultados consideramos que es ilustrativo llevarlos a un contexto menos controlado, a pesar de que para lograrlo es necesario un espíritu más crítico y una mente abierta a la interpretación.

Para llevar a buen fin este planteamiento se recurrió a los veinte EEG utilizados en la sección precedente para efectuar los promedios. Cada EEG, que han sido numerados del uno al veinte, corresponde a una medición continua de 102.4 segundos para un mismo paciente, que fue sometido a 100 estímulos visuales, activado cada uno, dentro del intervalo que comprende cada segmento (de los cien que corresponden a cada EEG) de 1.024 s. La frecuencia de muestreo, 125 muestras/s, es típica de este tipo de señales.

Antes de proceder a realizar cualquier tipo de detección se hizo un análisis espectral de cada uno de los EEG, descubriéndose que algunos de ellos habían sido previamente filtrados. La eliminación de éstos responde a la intención de trabajar con las señales más puras que se pudiera obtener, sobreviviendo, entonces, únicamente 12 EEG. Los archivos correspondientes se identificaron con el prefijo VEP aunado al número de EEG; su tamaño es de  $12800 \times 4 = 51200$  bytes, ya que la cuantización se hizo a razón de cuatro bytes por muestra, en formato "float" de TURBO C<sup>®</sup>.

A los archivos seleccionados se les aplicó, mediante el programa WAVETRAN, la transformada wavelet para valores de  $J = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Los parámetros utilizados fueron los mismos que en

el caso de señales sintéticas y semisintéticas, o sea, la ondeleta de análisis fue la mexicanhat wavelet con parámetro alfa de 0.5 (diádica) y beta de 0.5, es decir, un snug frame. Debido a la distinta razón de muestreo para cada  $J$ , los archivos transformados aparecen de diversos tamaños y, por ende, debe tenerse cuidado al interpretarlos, ya que para un mismo sistema de graficación las escalas deben ser proporcionalmente cambiadas. Por ejemplo, los archivos para  $J=0$  se conforman de 25600 muestras, mientras que los de  $J=4$  se componen de 1600 muestras.

El análisis continuó con un caro (en cuanto a tiempo) proceso que permitió, utilizando el programa DURSPEC, obtener los espectros paramétricos de todos los coeficientes wavelet. Con este cambio de representación se logró, además de verificar el proceso de transformación wavelet, observar la segregación en bandas del contenido frecuencial consecuencia de la transformación, permitiendo, de esta manera, un primer acercamiento visual al proceso de detección. Con ello se facilitó la selección de algunos parámetros, como, por ejemplo, el número de valores de  $J$  necesario para la detección. A pesar de que este paso pudo haber sido pasado por alto, consideramos que todo esfuerzo que permitiera estudiar el comportamiento del detector, en esa fase experimental, era bienvenido.

Armados con los resultados anteriores se procedió a la aplicación del algoritmo de detección sobre cada uno de los doce archivos de interés con coeficientes wavelet para cinco niveles de resolución, obteniéndose, así, doce reportes que genera el programa detector, como el que aparece en el apéndice C de este trabajo. Para interpretarlo se debe entender la primera columna como un número de referencia. La segunda columna indica la abscisa en que se ha efectuado la detección para el segmento (de los 100 que componen el archivo) que aparece después de la preposición "en", es decir, el tiempo de arribo. Por ejemplo, la expresión "84 en 42" significa que ha ocurrido una detección en la muestra 84 del segmento 42. La tercera columna muestra el valor de  $J$  (banda frecuencial) en que se llevó a cabo la detección.

El reporte del apéndice C, que corresponde a la detección del archivo VEP14, puede ser interpretado usando la figura

veintisiete. En ella se expone una gráfica de VEP14 en la que las abscisas representan el número de segmento y las ordenadas indican el número de muestra para cada segmento. Cada tono de gris representa el valor de la señal desde el más pequeño (negro) hasta el más grande (blanco). Esta graficación "tipo imagen" resulta muy útil, ya que permite una visualización global de toda la señal. En el extremo superior derecho de la figura se presenta un recuadro que muestra los tonos que componen la figura, desde el más pequeño o negativo (arriba) hasta el más grande o positivo (abajo).

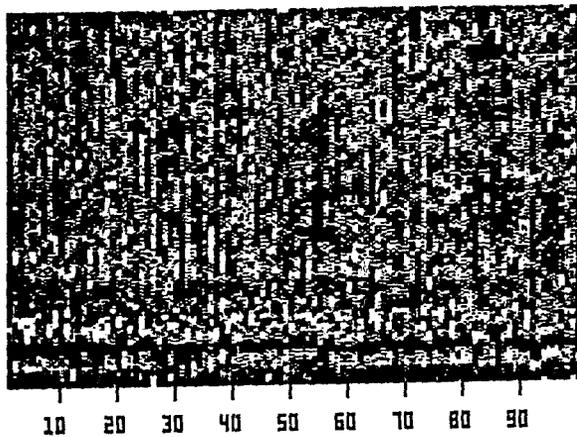
Realizando la comparación de la figura con el reporte es posible identificar en el segmento uno las muestras 8, 12, 18, 20 y 24 del reporte, con la actividad observada en la figura, que corresponden a un pulso PNP detectado, cuyos máximos coinciden con las muestras 12, 18 y 20. Otro ejemplo claro de detección se observa en los segmentos 4 y 6, en los que el sistema indica actividad transitoria para las muestras 12 y 13, respectivamente, las cuales coinciden con dos picos profundos (negros) de frecuencia relativamente alta ( $J=1$ ). Algo similar sucede para la muestra 13 del segmento 18. Otro ejemplo de gran actividad se presenta en el segmento 16, donde se ha detectado otro pulso.

Un caso interesante se observa en el segmento 25, donde la actividad no es evidente, sin embargo, el detector ha hecho notar una onda de frecuencia baja ( $J=4$ ) para la muestra 112. Un ejemplo de falla aparente del sistema se presenta en el segmento 31, en el que sólo se destaca la muestra 26, siendo que la actividad abarca una zona mayor. No obstante, en el segmento 45 el sistema realiza una discriminación correcta, ya que detecta la muestra 13 y no así la 102 como haría un algoritmo que, como criterio de detección, tuviera el máximo de energía. En los segmentos 74 y 82 el reporte hace notar los picos positivos de frecuencia alta en 16 y 15, respectivamente. En el segmento 91 se destacan dos picos negativos, 12 y 14, dejando el positivo para 24.

Aunque el examen no ha sido exhaustivo, ya que solamente se han querido subrayar algunos ejemplos relevantes, es notable observar que la mayoría de las ocasiones la actividad transitoria se verifica en las muestras menores a 30, ya que en esta zona es donde se esperarían los potenciales evocados como respuesta al

VEP14

Muestra



No. de segmento

FIGURA VEINTISIETE



estímulo visual, cuya latencia varía de segmento en segmento. También es justo reconocer que existen segmentos en los que el sistema no detectó nada, tal es el caso de los segmentos 92 a 96, en los que si bien es posible que la actividad cerebral haya disminuido por una inhibición debida a la fatiga del ojo al estímulo (obsérvese el número de estímulos que para ese entonces ha recibido el paciente), también cabe la posibilidad de un error del sistema de detección.

Existe una serie de representaciones gráficas que permiten simplificar el análisis del desempeño del detector, tal es el caso de una R.O.C. [33] (Reiceiving Operating Characteristic) que es una gráfica de detección contra falsa alarma, o un histograma de detecciones [39], que presenta la frecuencia de detecciones y falsas alarmas; sin embargo, para crearlos se requeriría de algo más que la asesoría de un experto, ya que, como se mencionó en secciones anteriores, no existe un lector de EEG suficientemente confiable para que pueda ser considerado como un detector perfecto con el cual comparar la efectividad del sistema propuesto. En el trabajo de Gevins et al. [39] se presenta un histograma de detecciones generado mediante la asesoría independiente de cinco expertos en EEG, cuyos juicios fueron bastante variables.

Como habrá sido posible darse cuenta, los reportes son extensos y, por tanto, de reproducción engorrosa; sin embargo, el resto, correspondiente a los demás EEG, está a disposición del lector que lo solicite, así como todo el material gráfico que por razones de espacio tampoco ha sido factible presentar.

En atención a esta carencia y con el fin de simplificar el análisis, similar al realizado con el reporte del archivo VEP14, para los otros EEG, se ha llevado a cabo un esfuerzo de síntesis consistente en destacar aquellas muestras de cada segmento en las que la incidencia de detección es más frecuente. Para ello se ha creado un histograma para cada EEG, similar al histograma de detecciones mencionado, en el que se presentan las muestras cuya ocurrencia a lo largo de los cien segmentos de cada archivo es mayor a cuatro. Al realizar los histogramas se tuvo la precaución de no mezclar los diferentes valores de  $J$ , con la finalidad de no perder la información espectral tan característica del sistema

propuesto.

El histograma del reporte del apéndice C, así como el del resto de los EEG se presentan en la figura veintiocho. El histograma de VEP14 está constituido de once barras, cada una representa la frecuencia de aparición en el reporte de la muestra cuyo número aparece inmediatamente abajo de la barra, las cuales, han sido divididas de acuerdo con el valor de J con que han aparecido en el reporte. Así, por ejemplo, para  $J=3$ , la muestra 8 apareció 19 veces, la muestra 12, 11 veces, y así sucesivamente.

En el histograma mencionado se aprecia, en primer lugar, que el mayor contenido frecuencial de la señal está en  $J=2$  y  $J=3$ . También es posible observar que la mayor ocurrencia temporal está en la muestra 8 ( $J=3$ ), 14 ( $J=2$ ) y 12, la cual aparece tanto en  $J=2$ , como en  $J=3$ .

Haciendo la comparación con la figura veintisiete se entiende la aparición de la columna 12 y 14 del histograma, que corresponde al potencial negativo (negro) que resalta de la imagen. Sin embargo, la columna para la muestra 8 del histograma no es muy clara en la figura, aunque su frecuencia es un poco más baja. La actividad que se observa en las muestras 20, 22, y 24 (ver puntos claros a lo largo de la imagen), encuentra su representación en las correspondientes columnas del histograma.

Con el fin de ampliar un poco más el análisis se presenta la figura veintinueve que ilustra el promedio de los segmentos del archivo VEP14 obtenido como se explicó en la sección anterior. En la misma figura aparece el espectro del promedio.

Dicho promedio permite observar de manera más clara el potencial negativo de la muestra 14, así como darle un sentido más concreto a la columna de la muestra 8 ( $J=3$ ) del histograma, ya que ahora es fácil percatarse de que ésta corresponde al pico positivo, que no es sencillo distinguir en la figura veintisiete, y el cual forma un pulso junto con el potencial de la muestra 14. Nótese que la manera más elemental de observar la actividad de la muestra 8 es mediante el histograma, y no así por medio de la figura veintisiete o veintinueve. Igualmente, obsérvese en el promedio la actividad positiva de las muestras 20, 22 y 24, que el histograma hizo patente. Un caso interesante que no es obvio de

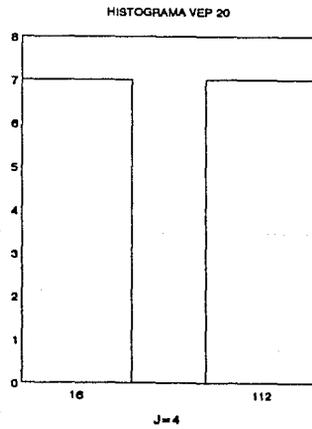
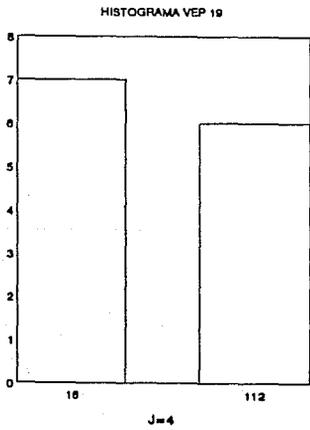
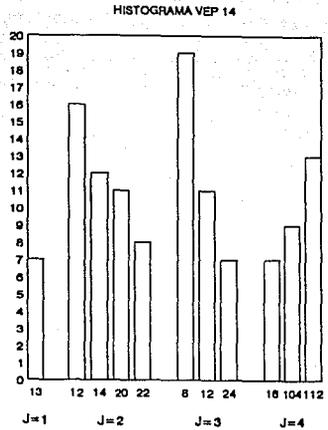
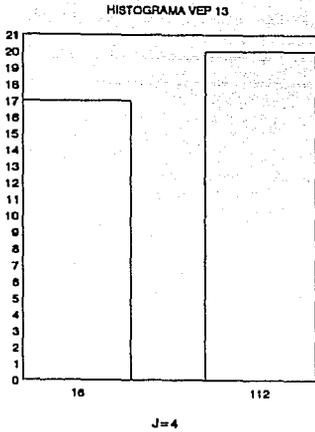


FIGURA VEINTIOCHO (CONTINUA)

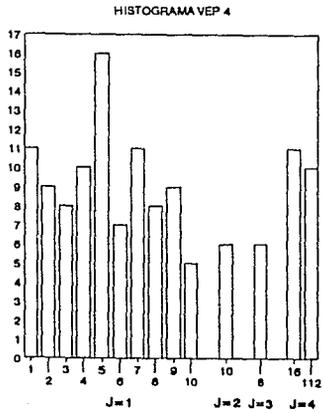
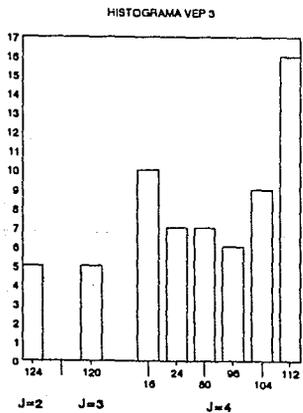
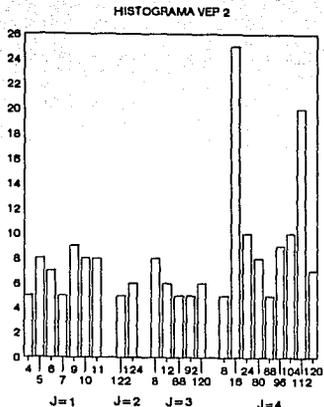
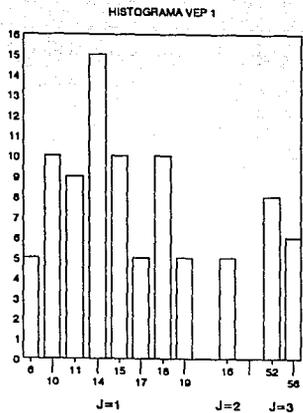


FIGURA VEINTIOCHO

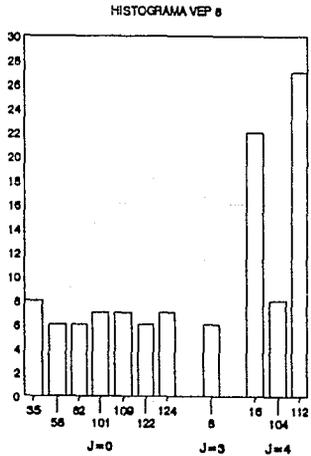
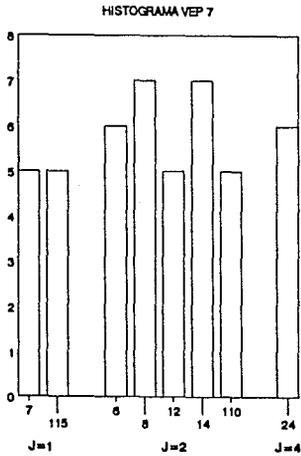
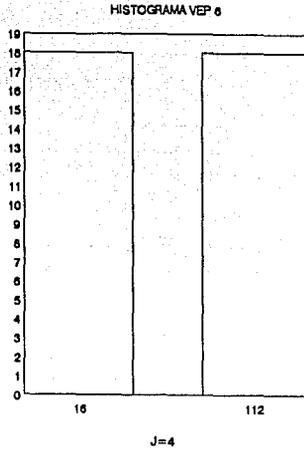
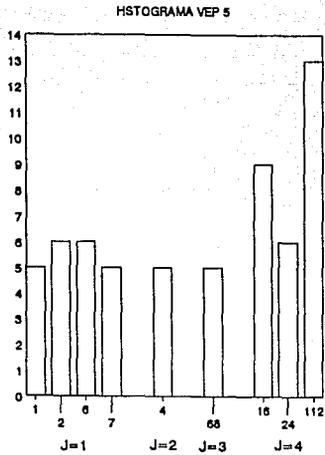
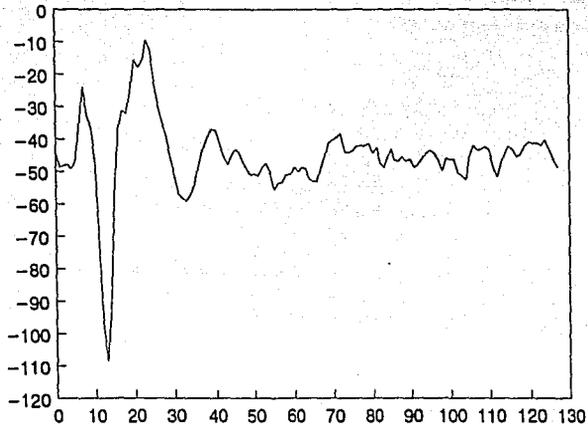


FIGURA VEINTIOCHO (CONTINUA)

PROMEDIO VEP14



ESPECTRO DEL PROMEDIO VEP14

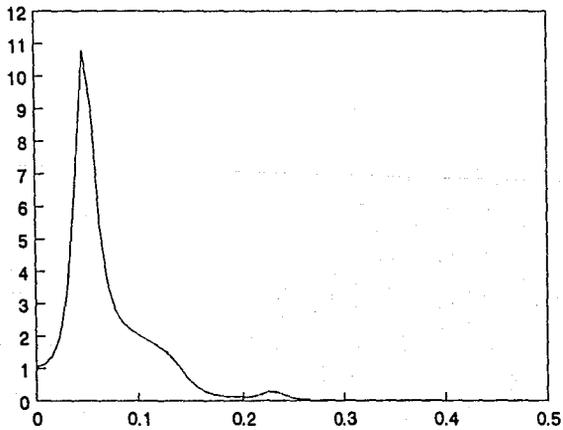


FIGURA VEINTINUEVE

la gráfica de VEP14 ni de su promedio es aquel que comprende las ondas de baja frecuencia que el histograma identifica en la muestra 112.

Lo que deseamos enfatizar con el análisis por histogramas es el hecho indiscutible de que, en general, el esquema propuesto permite detectar la misma e incluso más información que los métodos, tan comúnmente usados, basados en la inspección visual y el promedio de potenciales.

En lo que respecta al espectro del promedio, el máximo localizado en la fracción de frecuencia 0.05 indica que el mayor contenido frecuencial del promedio está principalmente en la banda de  $J=2$  (fracción de frecuencia 0.058), pero contiene algo en  $J=3$  (fracción de frecuencia 0.029). Lo anterior concuerda con los resultados que se habían obtenido a partir del histograma y, en consecuencia, pone de manifiesto la capacidad del sistema para realizar la detección en el espacio de las frecuencias.

Es importante hacer notar la diferencia que existe entre el promedio de la figura veinticinco y el promedio de la figura veintinueve; de hecho, podría argumentarse que son opuestos. Esto no hace más que confirmar lo que se había mencionado, es decir, el utilizar promedios como método de detección puede arrojar resultados erróneos, y, por tanto, es indispensable optar por nuevas alternativas como la que en este trabajo presentamos.

Lo que deseamos reiterar es el hecho de que realizar promedios puede conducir al ocultamiento de información interesante como la de los histogramas de VEP13, VEP19 y VEP20, que presentan resultados similares; sin embargo, lo que es más interesante es que la aparición en los tres casos de la muestra 112 no es exclusiva de ellos, sino que también se observa con un peso considerable en VEP14, VEP5, VEP4, VEP3 y VEP2. Este resultado es una prueba de que alrededor de esa muestra hay actividad cerebral de frecuencia baja (en una banda centrada en 1.87 Hz), lo cual no es observable del promedio de la figura veinticinco. En efecto, el algoritmo propuesto detecta información que otros sistemas no pueden, y lo que es más importante, permite conocer la información tanto en el espacio del tiempo como en el de la frecuencia, simultáneamente.

### VIII.5 Diferencia con Otros Métodos de Detección.

Este trabajo quedaría incompleto si no se hiciera explícita, aunque de una manera lacónica, la diferencia existente entre el esquema propuesto y otros procedimientos de detección. Por tal motivo se ha reservado esta última sección para tal fin.

Comparando el detector con el filtro acoplado, se observa que, aunque similares, el segundo tiene la desavenencia de que para su funcionamiento se requiere el conocimiento de la señal por detectar, ya que es precisamente la que permite formar el filtro de detección. Por el contrario, el esquema presentado ha sido diseñado para que trabaje con cualquier tipo de señal de corta duración.

En lo que se refiere al método de los promedios, ya se ha mostrado que no es lo suficientemente confiable, además de que requiere varios segmentos para desempeñar su cometido, a diferencia del nuevo sistema, que solamente necesita unas cuantas muestras. La consecuencia de esto es la nada despreciable posibilidad de crear una arquitectura capaz de efectuar detecciones automáticas con un mínimo de retraso. De hecho, en [54] se sugiere una arquitectura que puede servir de base para construir una similar que realice un análisis multirresolución, como el de la transformada wavelet en una o dos dimensiones.

Probablemente el método más utilizado sea el de inspección visual del EEG. A pesar de ello, consideramos que no es lo suficientemente objetivo y sí de una alta probabilidad de error, la que seguramente ha de variar en razón inversa a la experiencia de la persona que efectúa la lectura. Este proceso de detección suele ser auxiliado de los métodos de análisis espectral, con lo que se simplifica la interpretación. En el sistema que se propone esta característica no ha sido dejada a un lado, ya que intrínsecamente incluye la detección frecuencial. Con todo, el método de inspección visual no debe ser descartado, sino ser utilizado como complemento de los procesos automáticos, al menos hasta el momento en que hayan adquirido la madurez suficiente para que de ellos pueda depender un diagnóstico clínico. En

consecuencia, consideramos que el esquema propuesto es una de las herramientas más poderosas de las que por el momento puede disponer un lector de EEG para que, aunada a su experiencia, le permita tomar una decisión correcta.

Con base en lo expuesto en este capítulo y en especial en la sección cuarta, es factible afirmar que aun cuando el sistema de detección no es infalible y sí, quizá, difícil de interpretar en algunos casos, ofrece un algoritmo relativamente confiable susceptible de ser refinado. Asimismo no debe olvidarse que el tipo de señales con las que se decidió trabajar no son las más amables, sino, en cambio, de las que más problemas han causado a los estudiosos de la detección y clasificación automática. Lo anterior nos conduce a pensar que la validación del algoritmo no debe terminar con este trabajo, sino, más bien, tomarlo como una motivación para analizar señales de otro tipo, como pueden ser las electrocardiográficas [50,51,52], las de voz [53], sísmicas y, en general, cualquier sistema ondulatorio en que se detecten fallas.

Así, pues, el esfuerzo de que es testigo este trabajo, representa una aproximación contemporánea a la pesquisa de la detección automática, que ofrece como resultado más valioso el esquema basado en la transformada wavelet, cuya validación ha permitido demostrar su superioridad sobre otros sistemas más antiguos. Lo anterior es una prueba clara de que este trabajo es un paso concreto en el terreno de la investigación ingenieril.

## CAPITULO IX

### CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El trabajo que se ha puesto a consideración del lector puede pensarse como dividido en dos secciones íntimamente relacionadas. La primera se refiere a una muy completa síntesis y revisión crítica de un campo naciente a nivel internacional, esto es, la teoría de wavelets, la cual posee la ventaja de haber sido escrita en español, idioma en el que la literatura de este tema es casi inexistente. La segunda sección propone un sistema original de detección de señales transitorias que posee una serie de ventajas sobre los sistemas tradicionales.

A continuación se enumeran las conclusiones que se desprenden tanto de la primera como de la segunda parte. Esta forma de presentarlas permite que sean visualizadas más fácilmente, de tal manera que sean entendidas y recordadas lo más claramente posible. Con el fin de evitar repeticiones innecesarias, entre paréntesis se presentan los capítulos en que se pueden encontrar detalles de las mismas.

Primera parte:

- 1.- La transformada wavelet es un mapeo que ofrece una representación en espacio fase, es decir, una representación en el espacio del tiempo y la frecuencia simultáneamente (III).
- 2.- La transformada wavelet permite analizar una función en un conjunto de productos internos, mediante los que es posible sintetizar nuevamente la función original; lo anterior es particularmente sencillo para un tight frame (II,III).
- 3.- La transformada wavelet puede ser interpretada como un filtro-pasa banda que realiza un análisis multirresolución (III,IV,V,VI).
- 4.- La transformada wavelet puede ser calculada mediante al menos

cuatro métodos diferentes, cada uno con sus respectivas ventajas e inconveniencias (IV,V).

5. Existe una relación clara entre los filtros espejo en cuadratura, el análisis multirresolución y la transformada wavelet (VI).

6. La transformada de que trata este trabajo puede ser eficientemente implantada en un microprocesador, como un banco de filtros (V,VI).

Segunda parte:

1. El sistema de detección que proponemos es aplicable a señales transitorias de forma desconocida y, por tanto, no está restringido a un tipo de señales en particular, lo que permite aplicarlo en diversas disciplinas (VII,VIII).

2. El sistema no requiere de grandes volúmenes de información para efectuar la detección, sino solamente de unas cuantas muestras.

3. Dado que el detector se basa en la transformada wavelet, la localización de la señal buscada se da tanto en el tiempo como en la frecuencia (III,VII).

4. El sistema presentado es sencillo y, en consecuencia, de fácil implantación (VII,VIII).

5. Dada la infinidad de ondeletas que pueden ser utilizadas, el sistema es susceptible de ser adecuado a un problema particular, aprovechando la información adicional que se tenga acerca de la señal por detectar (IV,VII,VIII).

6. El sistema ofrece resultados reproducibles (IV,V,VIII).

Con base en las conclusiones es posible afirmar que el esquema presentado es superior a otros sistemas de detección de señales EEG, que son más comúnmente usados, como son el filtro acoplado o el método de promedios, ya que brinda un conjunto de posibilidades que los métodos tradicionales no ofrecen. Los detalles se presentan en la última sección del capítulo VIII.

Especialmente interesante es la primera conclusión de la segunda parte, ya que hace notar la posibilidad de usar el esquema propuesto alternativamente a las señales electroencefalográficas, lo que hace a este trabajo de gran interés para un grupo de lectores más amplio, que no necesariamente esté interesado en secuencias bioeléctricas. Como ejemplos se ha mencionado la

detección y segmentación de voz e imágenes digitales, así como el diagnóstico automático de fallas en sistemas de maquinaria rotacional y de potencia. También se puede pensar en sistemas de radar y de percepción remota, entre otros.

Tratar de introducir las ideas que surgen en un campo del conocimiento a otro es generalmente difícil, no obstante, en el caso del sistema que presentamos no es así, aunque para que sea aceptado quizá deba sufrir algunas modificaciones. Entre las que podemos sugerir se encuentra la de agregarle un sistema que genere de manera automática la ondeleta que más se adapte, bajo cierto criterio, a la solución del problema a tratar. Para crear este sistema adicional es menester, además de resolver el reto de optimización, elaborar un generador de ondeletas, es decir, de filtros QMF que cumplan la condición de regularidad.

Otro par de temas ligados al de la detección son los de reconocimiento y clasificación de patrones automáticamente. El éxito obtenido con las ondeletas en la detección sugiere utilizarlas para investigar qué ventajas pueden obtenerse en los otros dos campos del análisis de señales, tanto para el caso unidimensional como el multidimensional. De lo anterior, se hace patente la necesidad de crear un especie de diccionario de ondeletas (similar, por ejemplo, al de las funciones trigonométricas) bastante extenso. Esta idea abre una rama de estudio de perspectivas interesantes por los alcances que supone, tanto en el aspecto teórico, como práctico.

Otra rama sumamente interesante ligada a la teoría de wavelets, pero que engloba una serie de disciplinas ajenas incluso a la ingeniería, resulta ser la modelización y simulación eficiente de sistemas, como podría ser el ojo, el oído, un microscopio, etc.

Finalmente, deseamos mencionar a manera de última conclusión, que, independientemente de las ventajas tecnológicas y didácticas, esta obra representa una prueba en favor de que los proyectos trascendentales resultan de la acción conjunta de diferentes ramas del saber que aparentemente no están relacionadas, pero cuya fusión es lo que ha permitido el desarrollo de los conocimientos verdaderamente científicos.

## CAPITULO X

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] R. Gutiérrez Castrejón; Diseño y Análisis de Sistemas Ópticos Mediante Funciones Intermedias. Tesis de Licenciatura (Física), U.N.A.M., 1990.
- [2] R. Gutiérrez Castrejón, V.M. Castaño; "Analysis of Optical Systems Through Intermediate Functions". Optik Vol. 91, No.1, 1992.
- [3] C. Doncarli, L. Goerig, F. Auger; "Detection of Late Potentials in ECG by Means of an Adaptive Smoother and Wavelet Transform". SIGNAL PROCESSING V: Theories and Appl.; Elsevier Science Pub., 1990.
- [4] T. A. C. M. Claassen, W.F.G. Mecklenbräuker; "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Analysis". Philips Journal Res. Vol.35, No. 3, 1980.
- [5] A. Papoulis; Signal Analysis. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [6] O. Rioul, M. Vetterli; "Wavelets and Signal Proc." IEEE Sp. Magazine, Octubre, 1991.
- [7] Diccionario de Matemática. Rioduero, México.
- [8] J.T. Oden; Applied Functional Analysis. Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
- [9] E.Milewski; The Essentials of Topology. R.E.A. New Jersey, 1989.
- [10] G. Flory;; Ejercicios de Topología y Análisis. Reverté, Barcelona, 1978.
- [11] N.B. Haaser, J.P. LaSalle, J.A. Sullivan; Análisis Matemático, Vol. 1. Trillas, México, 1984.
- [12] D.H. Griffel; Applied Functional Analysis. Ellis Horwood LTD, United Kingdom, 1981.
- [13] K. Hoffman, R. Kunze; Algebra Lineal. Prentice Hall, Madrid, 1973.

- [14] P.A.M. Dirac; The Principles of Quantum Mechanics. Clarendon Press, Oxford, 1935.
- [15] R.M. Young; An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series. Academic Press, New York, 1980.
- [16] I. Daubechies; "The Wavelet Transform, Time Frequency Localization and Signal Analysis". IEEE Trans. on Information Theory. Vol. 36, No.5, 1990.
- [17] I. Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer; "Painless Nonorthogonal Expansions" J. Math. Phys. Vol. 27, No. 5, 1986.
- [18] S.G. Mallat; "Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models". IEEE Trans. Acoustic, Speech and S.P. Vol.37, No.12, 1989.
- [19] J.Morlet et al.; "Wave Propagation and Sampling Theory". Geophysics. Vol. 47, No. 2, 1982.
- [20] F. Argoul et al.; "Wavelet Analysis of the Self-Similarity of Diffusion-limited Aggregates and Electrodeposition Clusters". Physical Rev. A. Vol.41. No.10, 1990.
- [21] F.López, R.Gutiérrez; Proyecto Final Análisis de Señales, Div. Est. Posgrado, Fac. Ingeniería, 1990.
- [22] P.P. Vaidyanathan; "Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect Reconstruction Tecs." IEEE ASSP Magazine, Julio, 1987.
- [23] R.E. Crochiere y L.R. Rabiner; Multirate Digital Sign. Proc. Prentice-Hall. Englewood Cliffs N.J., 1983.
- [24] C.R. Galand; "New QMF Structures" IEEE Trans. Acoustic, Speech and S.P. Vol.32, No.3, 1984.
- [25] V.K. Jain, R.E. Crochiere; "QMF Design in the Time Domain".IEEE Trans. Acoustic, Speech and S.P. Vol.32, No.2, 1984
- [26] M. Vetterli; "Multi-Dimensional Sub-Band Coding: Some Theory and Algorithms" Signal Proc. Vol. 6, 1984.
- [27] R.E. Crochiere et al. "Digital Coding of Speech in Sub-bands". The Bell Sys. Tech. J. Vol. 55. No. 8, 1976.
- [28] J.W. Woods, S.D. O'Neal; "Subband Coding of Images". IEEE Trans. Acoustic, Speech and S.P. Vol.34, No.5, 1986.
- [29] S.G. Mallat; "A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation". IEEE Trans. Pattern Analysis and M. I. Vol. 11, No. 7, Jul. 1989.
- [30] A. Cohen; "Wavelets and Digital Signal Proc." en Wavelets and Their Applications. Ed. por M.B. Ruskai et al. Jones and Bartlett Books. Boston, 1992.

- [31] I. Daubechies; "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets". Comm. on Pure and App. Math. Vol. XLI ,1988.
- [32] A.N. Akansu, R.A. Haddad, H. Caglar; "The Binomial QMF-Wavelet Transform For Multiresolution Signal Decomp." Por aparecer en IEEE Trans. Accoustic, Speech and S.P.
- [33] H.L. Van Trees; Detection, Estimation and Modulation Theory. Parte I. John Wiley, E.U.A., 1968.
- [34] A.D. Whalen; Detection of Signals in Noise. Academic Press. San Diego, 1991.
- [35] A. Papoulis; Probability, Random Variables and Stoch. Proc. McGraw-Hill, Singapur, 1985.
- [36] J.G. Proakis; Digital Communications. McGraw-Hill, E.U.A., 1989.
- [37] E. Butkov; Mathematical Physics. Addison-Wesley, New York, 1968.
- [38] M. Frisch, H. Messer; "Detection of a Transient Signal of Unknown Scaling and Arrival Time Using the Discret W. T." ICASSP-91 Toronto, Canada. Mayo,1991. pag.1313-16 Vol. 2.
- [39] A.S. Gevins et al."Automated Analysis of the Electrical Activity of the Human Brain". Proc. IEEE. Vol. 63, No. 10, Oct. 1975.
- [40] A. Isaksson, A. Wernberg et al. "Computer Analysis of EEG Signals with Parametric Models". Proc. IEEE. Vol. 69, No. 4, Abril 1981.
- [41] N.A. Cox; "Digital Analysis of the EEG, The Blood Pressure Wave and the ECG". Proc. IEEE Vol. 60, No. 10, Oct. 1972.
- [42] G.G. Celesia y M.M. Grigg; "Auditory Evoked Potentials". en Electroencephalography. Ed. por E. Niedermeyer y F.L da Silva. Urban and Swarzenberg. Rep. Fed. Alemania, 1982.
- [43] G.G. Celesia; "Visual Evoked Potentials and Electroretinograms". en Electroencephalography. Ed. por E. Niedermeyer y F.L da Silva. Urban and Swarzenberg. Rep. Fed. Alemania, 1982.
- [44] C.W. Erwin et al. "Somatosensory Evoked Potentials". en Electroencephalography. Ed. por E. Niedermeyer y F.L da Silva. Urban and Swarzenberg. Rep. Fed. Alemania, 1982.
- [45] F. Lopes da Silva; "Event-related Potentials: Methodology and Quantification". en Electroencephalography. Ed. por E. Niedermeyer y F.L da Silva. Urban and Swarzenberg. Rep. Fed. Alemania, 1982.
- [46] W. Storm van Leeuwen et al. "Proposal for an EEG terminology by the terminology committee ..." Electroenphalogr. Clin. Neurophysiol. Vol. 20, 1966.

[47] C.M. Rader, L.R. Rabiner, R.W. Schafer; "A Fast Method of Generating Digital Random Numbers". Bell Sys. Tech. J., Nov.1970, p.2303.

[48] C.A. Whitney; "Generating and Testing Pseudorandom Numbers". Byte, Oct. 1984, p.128.

[49] J.R. Smith; "Automatic Analysis and Detection of EEG Spikes". IEEE Trans. Biomedical Eng. Vol. 21, No. 1, Enero 1974.

[50] F.B. Tuteur; "Wavelet Transformation in Signal Detection". ICASSP-88, New York. 11-14 Abril, 1988. p.1435-8. Vol. 3.

[51] Gang et al. "Detection of Late Potentials on the Surface ECG in Unexplained Syncope". The Am. J. of Cardiology. Vol. 58, Nov. 1, 1986.

[52] R. McFee, G.M. Baule; "Research in Electrocardiography and Magnetocardiography". Proc. IEEE, Vol. 60. No. 3. Marzo, 1972.

[53] S. Kadambe, G.F. Boudreaux-Bartels; "Application of the Wavelet Transform for Pitch Detection of Speech Signals". IEEE Trans. Inform. Theory. Vol. 38. No.2. Marzo, 1992.

[54] N. Ranganathan et al. "An Architecture to Implement Multiresolution" ICASSP-91, Toronto, Canada. Mayo, 1991. p.1157-60. Vol. 2.

[55] L. De la Peña; Introducción a la Mecánica Cuántica. C.E.C.S.A. México, 1980.

[56] S.M. Kay, S.L. Marple; "Spectrum Analysis - A Modern Perspective" Proc. IEEE. Vol. 69, No. 11, Nov. 1981.

[57] G.M. Jenkins, D.G. Watts; Spectral Analysis and Its Applications. Holden Day. California, 1968.

[58] E.O. Brigham; The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall. New Jersey, 1974.

[59] S.S. Haykin; Adaptive Filter Theory. Prentice-Hall. New Jersey, 1991.

[60] V.S. Koroliuk; Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática. MIR. Moscú, 1981.

## A P E N D I C E A

### NOTACION DE DIRAC PARA OPERADORES.

La notación de Dirac se basa en el hecho de que un vector de un espacio de Hilbert queda representado por un ket  $|b\rangle$ , mientras que su vector adjunto es un bra  $\langle b|$ , de tal modo que  $|b\rangle^* = \langle b|$ . Recordando las bases del álgebra matricial, resulta intuitivo que el producto de un bra por un ket (es importante respetar el orden) es un producto escalar que cumple con ser conmutativo, o sea,  $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$ . Similarmente, el producto de un ket por un bra resulta ser un producto externo, es decir, una matriz o un operador. Este operador definido en el espacio de Hilbert puede ser, a su vez, aplicado a un ket (vector), para en esta forma obtener otro ket. Por ejemplo, para el operador  $A$  se tiene  $|b\rangle = A|a\rangle$  [14].

La utilidad de la notación se debe al hecho de que para un cierto espacio de Hilbert, los vectores que lo constituyen pueden ser representados de una manera abstracta, sin necesidad de hacer referencia a base alguna.

Para comprender esto claramente se utilizará la notación de Dirac para expresar la serie de Fourier de un elemento del espacio de Hilbert. Es recomendable compararlo con lo realizado, al respecto, en la sección dos del segundo capítulo.

Sea  $\{|\phi_i\rangle\}$  un conjunto de kets que representa una base ortonormal del espacio de Hilbert, de modo que  $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$ . La serie de Fourier del ket  $|b\rangle$  es

$$|b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k |\phi_k\rangle \quad (A1)$$

mientras que los coeficientes de Fourier están dados por

$$\langle\phi_i|b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle\phi_i|\phi_k\rangle = a_i \quad (A2)$$

En cuanto al producto interno de dos kets  $|u\rangle$  y  $|v\rangle$  expresados como una serie de Fourier, se tiene

$$\langle u|v \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi_k | a_k^* b_m | \phi_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k^* b_m \langle \phi_k | \phi_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Con base en lo anterior, utilizando las ecuación (A1) y (A2), el ket  $|b\rangle$  se puede escribir como [55]

$$|b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k\rangle \langle \phi_k | b \rangle$$

de donde se llega a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k\rangle \langle \phi_k | = I, \quad (A3)$$

debido a que  $|b\rangle$  es un ket cualquiera, e I es el operador identidad.

Obsérvese que el producto  $|\phi_k\rangle \langle \phi_k |$  representa a un operador denotado por  $P_k$ . Es claro, entonces, que

$$P_k P_m = |\phi_k\rangle \langle \phi_k | |\phi_m\rangle \langle \phi_m | = |\phi_k\rangle \langle \phi_m | \delta_{km},$$

por lo cual el operador  $P_k$  es un proyector ortogonal, ya que es idempotente y ortogonal a  $P_m$ . Con esto en mente, basta mirar la ecuación (A3) para notar que es la resolución de la identidad.

La noción de resolución de la identidad será útil para entender la relación entre operadores y matrices dentro de este tipo de escritura. Sea A un operador, entonces es claro que  $A = I A I$  o, usando la resolución de la identidad,

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\phi_k\rangle \langle \phi_k | A | \phi_m \rangle \langle \phi_m | = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} |\phi_k\rangle \langle \phi_m | \quad (A4)$$

El coeficiente  $A_{km} = \langle \phi_k | A | \phi_m \rangle$  simboliza la entrada  $k, m$  de la matriz que representa al operador A en la base  $|\phi_1\rangle$ .

Un caso especial de la ecuación (A4) se observa cuando la base  $|\phi_1\rangle$  corresponde a los eigenvectores de A, ya que la matriz  $A_{km}$  pasará a ser diagonal y sus elementos serán los eigenvalores  $\lambda_k$ , es decir, será en la forma  $A_{km} = \lambda_k \delta_{km}$ , que introduciendo en (A4) resulta en

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k |$$

Obsérvese la última expresión de la sección de operadores lineales.

## A P E N D I C E B

### ANALISIS ESPECTRAL

El análisis espectral, basado en la estimación espectral, permite estudiar desde un punto de vista diferente a una señal o serie temporal, ya que ofrece una representación distinta a la obtenida en el dominio del tiempo. Por medio de este singular análisis es posible conocer el contenido frecuencial de un cierto proceso estocástico, información que en ocasiones es más útil que el mismo proceso temporal. Por ser el análisis espectral una rama del análisis de señales, aquél es aplicable en la extensa gama de disciplinas en que lo es el segundo.

Varias técnicas de estimación espectral han sido desarrolladas; entre las más conocidas se encuentran las tradicionales (periodograma y Blackman-Tukey) y las de función de transferencia racional. Otros métodos de no menos importancia son la descomposición armónica de Pisarenko, la estimación de densidad espectral de Prony, y el método de máxima verosimilitud.

El análisis espectral moderno comienza con los estudios de Norbert Wiener y de Khinchin, que permitieron a Blackman y Tukey realizar una implantación para estimar el espectro de potencia de una señal. A estos esfuerzos siguieron los de Parzen que propuso la estimación con base en modelos autorregresivos, y los de Burg que en 1967 introdujo el método de máxima entropía [56].

El propósito de las técnicas de análisis espectral es estimar la densidad de potencia espectral (DPS) de cierto proceso estocástico, la cual está definida como [35]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (B1)$$

en donde  $R_{xx}(\tau)$  es la función de autocorrelación, que para un proceso  $x(t)$  estacionario se define como [35]:

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{E}\{ x(t + \tau) x^*(t) \}$$

Si se hace la suposición de que el proceso  $x(t)$  es ergódico, entonces es posible sustituir promedios temporales por promedios del ensemble [35], de tal modo que la ecuación (B1) puede ser escrita nuevamente como [57]:

$$\varphi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\} \quad (B2)$$

De lo anterior se desprenden dos técnicas para la estimación de la DPS. La primera se conoce como método de Blackman y Tukey, mientras que a la segunda se le llama periodograma. Para su evaluación se requiere una realización de un proceso estocástico, es decir, una secuencia finita de datos, lo cual obliga, en la mayoría de los casos, al uso de una ventana, cuya selección es muy importante ya que puede influir en gran medida sobre el resultado final de la estimación. La observación de la ventana es consecuencia de que implícitamente se asume que los valores fuera de la serie finita son nulos. Entre las ventanas más comunes se encuentran la Bartlett, la Parzen y la Tukey, que cumplen con el teorema de Paley-Wiener [5].

En el método de Blackman y Tukey se supone que se tiene un estimado de la función de autocorrelación  $\hat{R}_{xx}[m]$ <sup>5</sup> para cierto número finito de valores de  $m$ , de tal modo que es factible utilizar la ecuación (B1), en su versión discreta, para calcular la DPS [56]:

$$\hat{\varphi}_{BT}(f) = \Delta t \sum_{m=-M}^M \hat{R}_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m \Delta t) \quad (B3)$$

El método alternativo llamado periodograma es más directo que el anterior, ya que no presupone estimación alguna, o sea, trabaja con la secuencia de datos disponible, lo que le ha conferido mayor popularidad. La estimación se logra mediante una versión discreta de la ecuación (B2), donde el operador  $E\{\}$  es despreciado [56]:

---

<sup>5</sup>El símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  significa que la variable sobre la que se encuentra es una estimación.

$$\hat{S}_{PER}(f) = \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n \Delta t) \right|^2 \quad (B4)$$

Debe observarse que la expresión entre barras no es más que una transformada de Fourier discreta que puede ser eficientemente evaluada por medio de alguna FFT [58], resultando  $N$  valores para las frecuencias  $f_m$  igualmente espaciadas, tales que  $f_m = m/N\Delta t$ .

La estimación obtenida por medio de la ecuación (B4) puede arrojar resultados estadísticamente erróneos si no se utiliza con cuidado, ya que el operador  $\mathcal{E}\{\}$  fue despreciado. Para aliviar esta carencia es recomendable realizar algún promedio sobre el ensemble, como podría ser dividir la serie  $x(t)$  en varios segmentos, para que una vez calculado el periodograma de cada uno se proceda a promediarlos.

Aun cuando el par de técnicas para estimar la DPS son eficientes desde el punto de vista computacional, presentan ciertas desventajas derivadas del hecho de tener que utilizar una ventana sobre la serie de datos.

Por otro lado, se han desarrollado otras técnicas de estimación espectral que están basadas en el hecho de asignarle un modelo paramétrico a la serie temporal en estudio, con la ventaja de que la estimación espectral se realiza utilizando estos parámetros, no así la serie propiamente dicha. Por consiguiente, los inconvenientes mencionados desaparecen, además de que se obtiene una mayor resolución en frecuencia. Ahora bien, ¿cómo estimar la DPS por medio de parámetros? La respuesta consta de los tres pasos siguientes [56]:

- a) Seleccionar un modelo para la serie temporal.
- b) Estimar los parámetros.
- c) Obtener la estimación espectral substituyendo los parámetros estimados en la DPS teórica que implica el modelo.

En lo que respecta al primer paso se utilizará un modelo de función de transferencia racional, mejor conocido como proceso ARMA (autorregresivo de promedio móvil), el cual es comúnmente utilizado para caracterizar filtros lineales. Así, pues, se supondrá que la serie temporal que se desea modelar, denotada por  $x[n]$ , es la salida de un sistema lineal con cierta entrada dada por una secuencia  $\theta[n]$ . La función de transferencia propia del

sistema está dada por:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^q b[m] z^{-m}}{\sum_{m=0}^p a[m] z^{-m}} \quad (B5)$$

que corresponde (obteniendo la transformada z inversa) a una ecuación en diferencias de la forma siguiente:

$$x[n] = \sum_{l=0}^q b[l] \theta[n-l] - \sum_{k=1}^p a[k] x[n-k] \quad (B6)$$

En este trabajo supondremos que la secuencia de entrada es un ruido gaussiano blanco de media cero y varianza  $\sigma$ , de modo que la DPS para la  $\theta[n]$  viene a ser  $\sigma$  [35].

La DPS para la secuencia de salida  $x[n]$  es, entonces,

$$S_x(z) = \sigma H(z) H^*(1/z^*) \quad (B7)$$

En efecto, de las propiedades de correlación para un sistema lineal se tiene [35] que  $R_{xx}[m] = \delta[m] * \rho[m]$ , donde  $\rho[m] = h[m] * h^*[-m]$  y  $h[m]$  es la respuesta al impulso del sistema. Obteniendo la transformada z y valiéndose del teorema de Wiener-Khinchin se obtiene la ecuación (B7). Más aún, substituyendo la ecuación (B5) en la (B7) se llega a que:

$$S_x(z) = \frac{B(z) B^*(1/z^*)}{A(z) A^*(1/z^*)} \sigma \quad (B8)$$

La ecuación (B8) es normalmente evaluada sobre el círculo unitario, es decir,  $|z| = 1$ , o también  $z = \exp(j2\pi f \Delta t)$ . Lo anterior resulta en (véase ecuación (B5) ):

$$S_x(f) = \sigma \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} = \sigma \left| \frac{\sum_{m=0}^q b[m] \exp(-j2\pi f m \Delta t)}{\sum_{m=0}^p a[m] \exp(-j2\pi f m \Delta t)} \right|^2 \quad (B9)$$

de modo tal que

$$S_{ARMA}(f) = S_x(f) \quad (B10)$$

es la DPS de la secuencia  $x[n]$  que se obtiene del sistema, cuya función de transferencia está dada por la ecuación (B5) y que es

alimentado por un ruido de varianza  $\sigma$ . Para encontrar la estimación de  $\mathcal{P}_{ARMA}(f)$  basta remitirse al paso c) el cual dice que es necesario substituir los parámetros estimados  $a[k]$  y  $b[k]$  obtenidos a partir de la serie  $x[n]$ . Más adelante se indica cómo obtener dichas estimaciones, las cuales, junto con  $\sigma$ , caracterizan a la serie  $x[n]$  y, por tanto, son equivalentes a especificar el espectro de  $x[n]$ .

Dos casos particulares del proceso ARMA merecen ser mencionados, ya que cada uno por sí mismo tiene una importancia significativa en la teoría de sistemas lineales y, por ende, en la teoría del análisis espectral. El primero es aquel en que todos los términos de  $a[k]$  son nulos, a excepción de  $a[0] = 1$ ; a este proceso se le denomina MA (promedio móvil) de orden  $q$ , siendo su ecuación:

$$x[n] = \sum_{l=0}^q b[l]\theta[n-l]$$

Su DPS viene dada, entonces, por :

$$\mathcal{P}_{MA}(f) = \sigma \left| \sum_{m=0}^q b[m] \exp(-j2\pi f m \Delta t) \right|^2 \quad (B11)$$

El segundo se caracteriza porque todos los elementos  $b[k]$  son cero, excepción hecha de  $b[0] = 1$ ; para este caso se tiene que

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k]x[n-k] + \theta[n] \quad (B12)$$

A este proceso se le llama AR (autorregresivo) de orden  $p$ . La DPS para este proceso, trivialmente se observa que es:

$$\mathcal{P}_{AR}(f) = \sigma \left| \sum_{m=0}^p a[m] \exp(-j2\pi f m \Delta t) \right|^{-2}$$

Para finalizar, solamente restaría aclarar en qué consiste el punto b) que se ha dejado pendiente. Por lo mismo se presentará una síntesis acerca de la manera en que se evalúan los parámetros

del proceso ARMA a partir de la serie  $x[n]$ . Para lograr esto es necesario tomar en consideración que lo más usual es calcular por un lado los parámetros  $a[k]$ , y de una manera independiente los parámetros  $b[1]$ . De hecho, en la práctica basta con calcular uno de los dos, ya que de acuerdo con el teorema de descomposición de Wold [35], es posible representar cualquier proceso MA de varianza finita mediante un proceso AR de un orden posiblemente infinito; similarmente, un proceso AR puede representarse por un proceso MA de orden posiblemente infinito [56].

Para la evaluación de los coeficientes de un proceso AR debe observarse, de la ecuación (B12), que la autocorrelación de  $x[n]$   $R_{xx}[k] = \mathcal{E}\{ x[n+k]x^*[n] \}$  queda expresada por las ecuaciones de Yule-Walker [57]:

$$R_{xx}[k] = - \sum_{l=1}^p a[l]R_{xx}[k-l] + \sigma\delta[k]$$

En consecuencia sólo faltaría resolver  $p+1$  ecuaciones a partir de los valores estimados  $R_{xx}[k]$ , teniendo como incógnitas a  $\sigma$  y al conjunto de valores  $a[k]$  con  $k = 1, 2, \dots, p$ . Una forma de hacer esto es mediante el algoritmo recursivo de Levinson-Durbin [59] que puede ser resumido como:

$$a_k[k] = - \left[ R_{xx}[k] + \sum_{l=1}^{k-1} a_{k-1}[l]R_{xx}[k-l] \right] / \sigma_{k-1}$$

$$a_k[i] = a_{k-1}[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i]$$

$$\sigma_k = (1 - |a_k[k]|^2) \sigma_{k-1}$$

donde  $k = 2, 3, \dots, p$ . Los subíndices que se han agregado denotan el orden del modelo, que se van aumentando hasta alcanzar el valor  $p$ . La ventaja que este algoritmo posee es que se obtienen también los parámetros para modelos de menor orden que aquél en que se tiene interés; lo anterior es especialmente útil cuando se desconoce, a priori, el orden del modelo [56]. Las condiciones iniciales son:

$$a_1[1] = -R_{xx}[1]/R_{xx}[0]$$

$$\sigma_1 = (1 - |a_1[1]|^2) R_{xx}[0]$$

# A P E N D I C E C

## REPORTE DEL ARCHIVO VEP14

	abscisas	J
1.-	8.00 en 1	3
2.-	12.00 en 1	2
3.-	18.00 en 1	2
4.-	20.00 en 1	2
5.-	24.00 en 1	3
6.-	8.00 en 3	3
7.-	12.00 en 3	3
8.-	14.00 en 3	2
9.-	20.00 en 3	2
10.-	22.00 en 3	2
11.-	24.00 en 3	2
12.-	12.00 en 4	2
13.-	8.00 en 5	3
14.-	12.00 en 5	2
15.-	14.00 en 5	2
16.-	13.00 en 6	1
17.-	12.00 en 8	2
18.-	14.00 en 8	2
19.-	20.00 en 8	2
20.-	24.00 en 9	3
21.-	8.00 en 11	3
22.-	12.00 en 11	3
23.-	14.00 en 11	2
24.-	112.00 en 12	4
25.-	8.00 en 13	4
26.-	16.00 en 13	4
27.-	96.00 en 13	4
28.-	104.00 en 13	4
29.-	40.00 en 14	4
30.-	112.00 en 14	4
31.-	8.00 en 16	3
32.-	10.00 en 16	2
33.-	12.00 en 16	2
34.-	13.00 en 16	1
35.-	18.00 en 16	2
36.-	20.00 en 16	2
37.-	24.00 en 16	3
38.-	8.00 en 17	3
39.-	12.00 en 17	2
40.-	12.00 en 18	2
41.-	13.00 en 18	1
42.-	14.00 en 18	2
43.-	20.00 en 18	2
44.-	112.00 en 19	4
45.-	116.00 en 19	3
46.-	120.00 en 19	4
47.-	8.00 en 20	3
48.-	12.00 en 20	3
49.-	14.00 en 20	2
50.-	16.00 en 20	2

51.-	22.00 en 20	2
52.-	24.00 en 20	2
53.-	104.00 en 20	4
54.-	104.00 en 21	4
55.-	112.00 en 21	4
56.-	12.00 en 24	3
57.-	14.00 en 24	2
58.-	20.00 en 24	2
59.-	22.00 en 24	2
60.-	112.00 en 25	4
61.-	8.00 en 26	4
62.-	12.00 en 26	3
63.-	16.00 en 26	4
64.-	8.00 en 28	3
65.-	12.00 en 28	3
66.-	4.00 en 30	3
67.-	8.00 en 30	3
68.-	32.00 en 30	2
69.-	26.00 en 31	2
70.-	4.00 en 32	3
71.-	8.00 en 32	3
72.-	12.00 en 32	2
73.-	8.00 en 37	3
74.-	12.00 en 37	1
75.-	13.00 en 37	1
76.-	17.00 en 37	1
77.-	18.00 en 37	2
78.-	20.00 en 37	2
79.-	16.00 en 38	2
80.-	104.00 en 38	4
81.-	12.00 en 39	2
82.-	20.00 en 39	2
83.-	120.00 en 39	3
84.-	104.00 en 40	4
85.-	112.00 en 40	4
86.-	74.00 en 41	2
87.-	88.00 en 41	4
88.-	96.00 en 41	4
89.-	12.00 en 42	2
90.-	13.00 en 42	1
91.-	14.00 en 42	2
92.-	20.00 en 43	2
93.-	22.00 en 43	2
94.-	104.00 en 43	4
95.-	112.00 en 43	4
96.-	56.00 en 44	3
97.-	13.00 en 45	1
98.-	116.00 en 46	3
99.-	120.00 en 46	4
100.-	24.00 en 52	3
101.-	40.00 en 52	3
102.-	8.00 en 53	3
103.-	12.00 en 53	3
104.-	22.00 en 53	2
105.-	8.00 en 56	3
106.-	8.00 en 62	3
107.-	10.00 en 62	2

108.-	12.00 en 62	2
109.-	18.00 en 62	2
110.-	20.00 en 62	2
111.-	12.00 en 63	2
112.-	22.00 en 64	2
113.-	24.00 en 64	2
114.-	8.00 en 65	3
115.-	12.00 en 65	2
116.-	13.00 en 65	1
117.-	14.00 en 65	2
118.-	24.00 en 65	3
119.-	28.00 en 65	3
120.-	16.00 en 66	2
121.-	14.00 en 67	2
122.-	112.00 en 67	4
123.-	12.00 en 68	3
124.-	16.00 en 68	1
125.-	20.00 en 68	1
126.-	12.00 en 70	3
127.-	16.00 en 70	4
128.-	16.00 en 71	4
129.-	104.00 en 71	4
130.-	112.00 en 71	4
131.-	14.00 en 72	2
132.-	20.00 en 72	2
133.-	22.00 en 72	2
134.-	120.00 en 72	3
135.-	124.00 en 72	3
136.-	12.00 en 73	2
137.-	96.00 en 73	4
138.-	16.00 en 74	1
139.-	22.00 en 75	2
140.-	24.00 en 75	2
141.-	8.00 en 76	3
142.-	24.00 en 76	3
143.-	48.00 en 76	4
144.-	16.00 en 80	2
145.-	15.00 en 82	1
146.-	104.00 en 84	4
147.-	112.00 en 84	4
148.-	8.00 en 86	3
149.-	12.00 en 86	3
150.-	16.00 en 86	4
151.-	104.00 en 87	4
152.-	112.00 en 87	4
153.-	12.00 en 89	3
154.-	112.00 en 89	4
155.-	12.00 en 90	2
156.-	16.00 en 90	4
157.-	8.00 en 91	3
158.-	12.00 en 91	2
159.-	14.00 en 91	2
160.-	24.00 en 91	3
161.-	16.00 en 98	4
162.-	112.00 en 98	4
163.-	8.00 en 99	3