



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

APLICACIONES DE LA ESTATICA A
LA INGENIERIA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A:
ENRIQUE DEL RIO SALDIVAR

DIRECTOR DE TESIS,

Ing. Mario A. Montero Catalán



México, D. F.

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Pág.

I.-ANTECEDENTES	1
I.1.- DEFINICION DE FUERZAS.	
I.2.- ELEMENTOS DE APLICACION DE LAS FUERZAS.	
I.3.- SISTEMAS DE FUERZAS.	
I.4.- EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.	
I.4.1 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE.	
I.4.2 GRADOS DE LIBERTAD.	
I.4.3 TIPOS DE APOYO.	
I.4.4 SUMA DE MOMENTOS DE LAS FUERZAS DE UN SISTEMA.	
I.4.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.	
II.-ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS.	32
II.1.- CONCEPTO FISICO.	
II.2.- DEFINICION DE ELEMENTOS MECANICOS.	
II.3.- CONVENCION DE SIGNOS.	
II.4.- ECUACIONES PARA FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.	
II.5.- DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS.	
II.6.- RELACIONES ENTRE LA CARGA TRANSVERSAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLEXIONANTE.	
II.7.- TRAZO DE DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE POR EL METODO DE SUMA DE AREAS.	

II.8.- METODO DE NEWMARK PARA OBTENER DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS.	
III.- ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS.	67
III.1.- CONCEPTOS BASICOS DE MARCOS.	
III.2.- ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION EN MARCOS	
III.3.- OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA NORMAL, Y TRAZO DE DIAGRAMAS DE M, V Y N EN MARCOS.	
III.4.- OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA NORMAL, Y TRAZO DE DIAGRAMAS DE M, V Y N EN ARCS.	
IV.- SOLUCION DE ARMADURAS.	84
IV.1.- COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE LAS ARMADURAS (COMO VIGAS DE ALMA ABIERTA).	
IV.2.- CONDICIONES GEOMETRICAS Y DE ESTABILIDAD EN ARMADURAS.	
IV.3.- METODO DE LOS NUDOS PARA OBTENCION DE FUERZAS EN BARRAS.	
IV.4.- METODO DE LAS SECCIONES PARA OBTENCION DE FUERZAS EN BARRAS.	
V.- CABLES.	98
V.1.- CABLES FLEXIBLES E INEXTENSIBLES.	
V.2.- OBTENCION DE LA ECUACION Y DE LA TENSION DE UN CABLE PARABOLICO.	

V.3.- CABLE CATENARIA.

V.4.- OBTENCION DE LA ECUACION DE CABLES SOPORTANDO
CARGAS CONCENTRADAS.

VI.- CONCLUSIONES. 111

BIBLIOGRAFIA.

I.- ANTECEDENTES

I.1 DEFINICION DE FUERZA.

Fuerza es la acción que un cuerpo ejerce sobre otro y que cambia o tiende a cambiar el estado de movimiento o reposo del cuerpo libre sobre el cual actúa.

I.1.1 CARACTERISTICAS DE LAS FUERZAS.

Una fuerza queda representada gráficamente por un vector, ya que sus características son:

- a.- Magnitud.
- b.- Dirección.
- c.- Sentido.
- d.- Punto de aplicación.

Como se muestra en la figura 1 y 2.

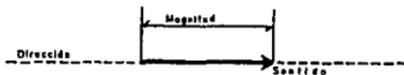


Figura 1



Figura 2

I.2 ELEMENTOS DE APLICACION DE LAS FUERZAS.

En los problemas de la estática aplicada a la ingeniería, los sistemas de fuerzas se encuentran actuando sobre cuerpos, y dependiendo de las características propias de dichos cuerpos, estos se pueden clasificar en:

- a.- Punto material o partícula.
- b.- Cuerpo rígido.
- c.- Cuerpo deformado.

Punto material o partícula.-Es un cuerpo sin dimensiones al que se le asocia la masa del cuerpo real.

Cuerpo rígido.- Es un cuerpo que posee masa y cuyas dimensiones permanecen constantes, aun cuando se le aplique un conjunto de fuerzas.

Este elemento de aplicación es una idealización de los cuerpos reales, los cuales, en mayor o menor grado, son siempre deformables, no obstante se puede considerar como rígido un cuerpo, si los resultados de su análisis en un problema mecánico no se alteran, o cuando las alteraciones que se presentan son de un rango menor que las máximas tolerables para el problema en estudio.

En el caso de la estática aplicada a la ingeniería civil, los elementos de aplicación de las fuerzas son: barras y sistemas de barras.

La barra.- Es un cuerpo cuyas dos de sus dimensiones son mucho menores que la tercera.

Para la representación de una barra, se acostumbra dibujar únicamente el eje longitudinal de la barra considerándolo como el lugar geométrico de los centroides de cada una de sus secciones transversales.

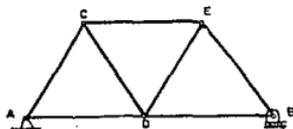
Las barras según las características de su eje longitudinal se clasifican de la siguiente forma:



Asimismo las barras pueden ser prismáticas cuando su sección transversal es constante y no prismáticas cuando su sección transversal es variable.

El sistema de barras.- Un conjunto de barras forma un sistema, cuando para el análisis mecánico de una de ellas, se requiere también el análisis de las otras.

En la armadura que se muestra a continuación, para analizar la barra CD por ejemplo es necesario analizar los otros elementos del sistema.



Cuerpo deformado.- Es un cuerpo que posee masa y cuya geometría cambia bajo la acción de las fuerzas. Este modelo se emplea en la Mecánica de Materiales.

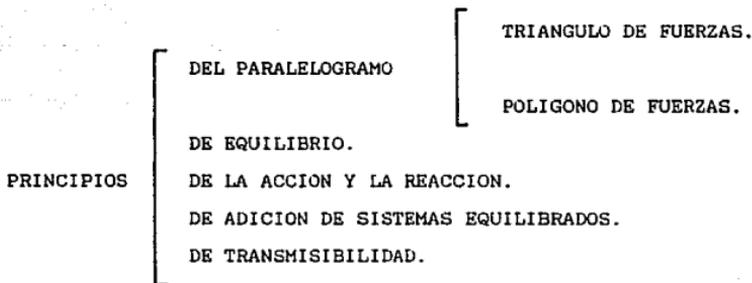
1.3 Sistema de Fuerzas.

Al conjunto de fuerzas que actuen simultáneamente sobre un cuerpo se le denomina sistema de fuerzas.

Tomando en cuenta la ubicación de las fuerzas y la configuración del conjunto, los sistemas pueden clasificarse como se muestra en el siguiente cuadro:

	ESPACIO	PLANO	RECTA
GENERAL			
PARALELO			
CONCURRENTE			

El estudio de los sistemas de fuerzas se fundamenta en los cinco principios básicos de la estática, así como en la composición y descomposición de fuerzas, como se muestra en el cuadro siguiente:



COMPOSICION DE FUERZAS



TRATAMIENTO ANALITICO

MOMENTOS DE LAS FUERZAS

RESPEC. A UN EJE
" " A UN PUNTO
MOMENTO DE 1 PAR

DESCOMPOSICION DE FUERZAS

PRINCIPIO DEL PARALELOGRAMO.

Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas concurrentes F_1 Y F_2 , el efecto externo que le producen es equivalente al de una sola fuerza R que coincide con la diagonal del paralelogramo cuyos lados son las fuerzas F_1 Y F_2 . Vease la figura 4.

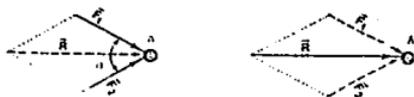


Figura 4

En donde $\overline{F_1}$ Y $\overline{F_2}$ son las fuerzas aplicadas en "A" que forman un ángulo α entre sí.

\overline{R} es la resultante o diagonal del paralelogramo ilustrado, medida a la misma escala.

Debido a que la diagonal del paralelogramo divide a éste en dos triángulos iguales puede elegirse cualquiera de ellos para obtener la resultante. Esta simplificación se conoce como triángulo de fuerzas, según se ilustra en la figura 5.

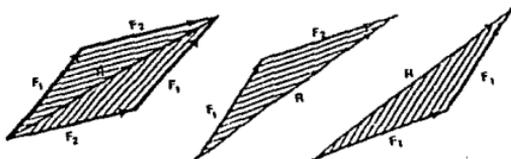


Figura 5

De lo anterior se deduce que para obtener la resultante de dos fuerzas concurrentes se traza una a continuación de la otra, conservando sus direcciones y adoptando cierta escala para sus magnitudes; al unir el punto inicial de la primera con el final de la segunda se encuentra la resultante buscada.

Quando son más de dos las fuerzas que actúan, el problema se resuelve con el Polígono de Fuerzas, aplicable para encontrar la resultante de un sistema constituido por "n" fuerzas concurrentes. Consiste en colocarlas una a continuación de la otra de manera que esa resultante se obtenga al unir el origen de la primera fuerza con el extremo de la última. El Polígono de Fuerzas es la generalización de la Ley del Triángulo; el resultado es independiente del orden de la colocación de las fuerzas. Véase la figura 6.

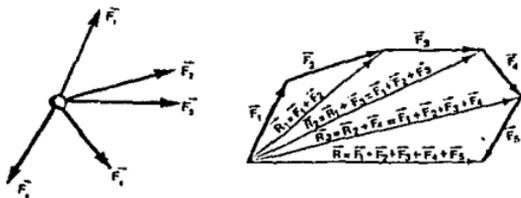


Figura 6

PRINCIPIO DE EQUILIBRIO.

Para que dos fuerzas estén en equilibrio es necesario y suficiente que sean iguales, colineales y de sentidos contrarios.

Como se indica en la figura 7.

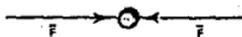


Figura 7

PRINCIPIO DE LA ACCION Y LA REACCION.

Este principio es en realidad la Tercera Ley de Newton y se enuncia a continuación:

"A toda acción corresponde una reacción igual, colineal y de sentido contrario".

PRINCIPIO DE ADICION DE SISTEMAS EQUILIBRADOS.

"Los efectos externos que un sistema de fuerzas produce sobre un cuerpo no cambian si se le agrega o elimina cualquier otro sistema equilibrado". Véase la figura 8.

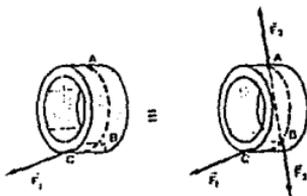


Figura 8

PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD.

El principio de transmisibilidad establece que: "Los efectos externos producidos por una fuerza, sobre un cuerpo rígido, no cambian si ésta se aplica en cualquier punto de su línea de acción".

Supóngase la fuerza \vec{F} aplicada en el punto A del cuerpo mostrado en la figura 9, la cual produce una aceleración que no se altera al agregar en B un sistema equilibrado ($\vec{F} - \vec{F}$).

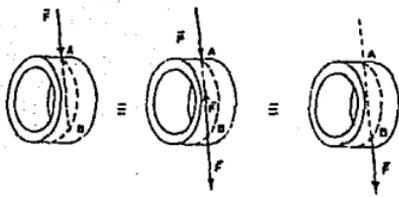
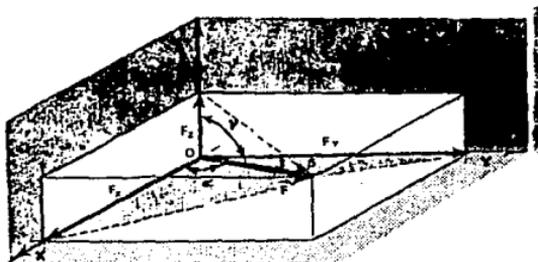


Figura 9

TRATAMIENTO ANALITICO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

Como se indicó anteriormente una fuerza se representa gráficamente por medio de un vector. En la figura que se muestra a continuación \vec{F} es una fuerza que forma con los ejes coordenados x , y , z los ángulos α , β , Γ , respectivamente. Los cosenos de dichos ángulos reciben el nombre de cosenos directores porque fijan la dirección de la línea de acción de la fuerza \vec{F} .



Las proyecciones ortogonales de \vec{F} en dichos ejes son:

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_z = F \cos \Gamma$$

El vector fuerza se obtiene como la suma vectorial de estas componentes.

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

COMPOSICION DE FUERZAS.

Se llama composición de fuerzas al proceso mediante el cual se obtiene la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. Si el sistema esta constituido por dos fuerzas concurrentes se aplica el principio del paralelogramo y si son mas de dos se utiliza el poligono de fuerzas.

Otro método aplicable para un sistema de "n" fuerzas concurrentes es el de las proyecciones, el cual consiste en sustituir cada una de las fuerzas de dicho sistema por sus proyecciones ortogonales. Cuando un sistema de "n" fuerzas se encuentra contenido en un plano se obtendrá un sistema de 2n fuerzas; al sumarse algebraicamente las de cada eje se tendrá un nuevo sistema formado por dos fuerzas (ΣF_x , ΣF_y) que son las componentes ortogonales de la resultante final.

En la estática aplicada al realizarse el análisis mecánico de un cuerpo sus resultados no se alteran al considerar toda la masa o peso del cuerpo concentrado en un solo punto llamado punto material, siempre y cuando la resultante pase por el centroide de dicho cuerpo.

DESCOMPOSICION DE FUERZAS.

La descomposición de fuerzas consiste en determinar un sistema de dos o mas fuerzas concurrentes cuyos efectos externos, sobre el cuerpo en el que actúan, sean iguales a los que ocasiona una sola fuerza de características conocidas. Este proceso es inverso al de la composición.

MOMENTOS DE LAS FUERZAS.

Se define como el momento de una fuerza con respecto a un eje, a la tendencia al giro que la fuerza ejerce en torno a dicho eje.

En la figura 10 puede observarse que la magnitud del momento depende del tamaño y de la dirección de la fuerza, así como de la distancia que hay entre su línea de acción y el eje. Esta distancia corresponde a la perpendicular que va desde el punto "o" del eje hasta un punto de la línea de acción de la fuerza.

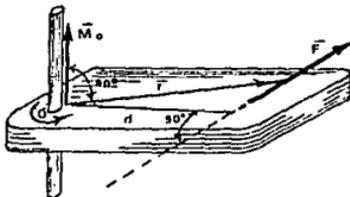


Figura 10

MODELO MATEMATICO DEL MOMENTO.

Matemáticamente se establece el momento de una fuerza con respecto a un punto "o" como el producto vectorial del vector de posición r por el vector fuerza F esto es:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} \text{ -----(a)}$$

El producto vectorial del segundo miembro de la ecuación (a) indica que M_o es el momento de la fuerza F con respecto al punto "o", y corresponde a un vector cuyas características son:

- Magnitud_ _ _ _ _ $|\vec{M}_o| = Fd$
- Dirección_ _ _ _ _ \vec{M}_o es perpendicular al plano definido por F y d .
- Sentido_ _ _ _ _ El vector M_o entra o sale del plano definido por F y d , de acuerdo con la regla del sentido de avance del tornillo de rosca derecha, como se ilustra en la figura 11.

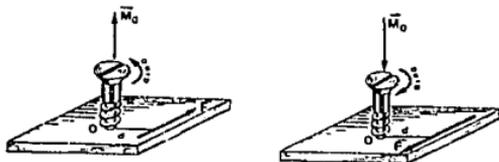


Figura 11

PARES DE FUERZAS.

Se llama par de fuerzas, o simplemente "par", al conjunto de dos fuerzas de igual magnitud, de sentidos contrarios, de igual dirección separadas una determinada distancia y que actúen simultáneamente sobre un cuerpo, provocándole una rotación. Véase la figura 12.

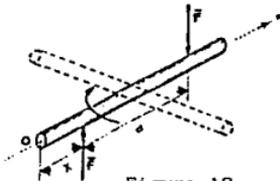


Figura 12

REPRESENTACION VECTORIAL.

Un par se representa por medio de un vector libre cuyas características son las siguientes:

Magnitud.- La magnitud del par es la suma de los momentos de ambas fuerzas con respecto a cualquier punto de su plano.

La suma de los momentos de ambas de fuerzas es igual al producto de una de ellas por la distancia que las separa, tal como se indica en la figura 13.



Figura 13

De la figura anterior se deduce que:

$$\Sigma M_o = + F(x) - F(x+d) = + F(x) - F(x) - Fd$$

$$M_{par} = -Fd$$

Donde el signo (-) indica que el giro es el sentido de las manecillas del reloj.

Dirección.- El vector M_{par} es perpendicular al plano que contiene a las fuerzas.

Sentido.- El vector M_{par} entra o sale del plano, según la regla de sentido de avance del tornillo de rosca derecha, tal como se ilustra en la figura 14.

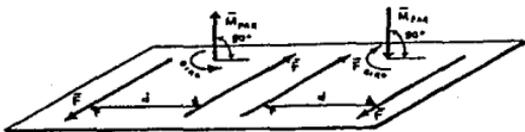


Figura 14

TRANSFORMACION DE LOS PARES.

Debido a que el M_{par} es un vector libre, puede transformarse sin que cambie ninguna de sus características. En efecto:

- 1.- El par puede ser girado en su plano o en planos paralelos a éste.
- 2.- El par puede ser trasladado paralelamente a sí mismo, tanto en su plano como en planos paralelos a éste.
- 3.- El par puede variar simultáneamente la magnitud de las fuerzas y la separación entre ellas, siempre y cuando el producto $F * d$ permanezca constante y no cambie su plano ni el sentido del giro. Véase la figura 15.

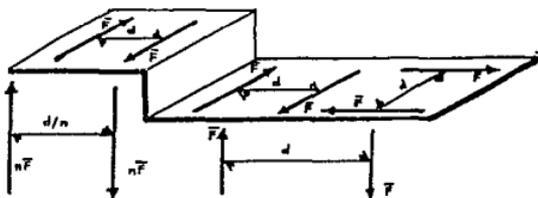


Figura 15

I.4 EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Se considera que un cuerpo está en equilibrio cuando el sistema de fuerzas que actúa sobre él está equilibrado.

Para el mejor entendimiento del equilibrio de los sistemas de fuerzas es necesario conocer y manejar los conceptos que se enuncian en el siguiente cuadro.

DIAGRAMAS DE CUERPO
LIBRE.

Acciones
Reacciones

GRADOS DE LIBERTAD

En el plano
En el espacio

DIVERSOS TIPOS DE APOYO.

Apoyo libre
Articulación plana
Empotramiento plano

SUMA DE MOMENTOS DE LAS FUERZAS DE UN SISTEMA

Teorema de Varignon
Teorema de momentos

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

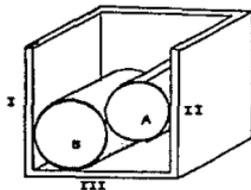
Ecuaciones vectoriales generales de equilibrio.
Ecuaciones escalares generales de equilibrio.
Ecuaciones escalares de equilibrio en el plano.
Solución de problemas de equilibrio.

I.4.1 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE.

El diagrama de cuerpo libre es la representación esquemática del cuerpo en estudio o de una parte de él, así como de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento considerado.

Ejemplo:

El depósito mostrado en la figura contiene los dos cilindros A y B. Para dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cilindros, así como el del conjunto A y B; despreciando las fuerzas de fricción entre los elementos y entre éstos y las paredes del depósito.

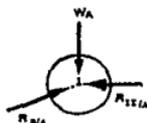


En el diagrama de cuerpo libre de "A", de la figura mostrada a continuación, intervienen las siguientes fuerzas:

$R_{II/A}$ = Reacción de la pared II sobre "A"

W_A = Peso del cilindro "A"

$R_{B/A}$ = Reacción del cilindro "B" sobre "A".



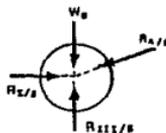
En el diagrama de cuerpo libre de "B", de la figura siguiente las fuerzas que intervienen son:

$R_{A/B}$ = Reacción de "A" sobre "B"

W_B = Peso del cilindro "B"

$R_{I/B}$ = Reacción de la pared I

$R_{III/B}$ = Reacción del piso sobre el cilindro "B".



En la siguiente figura, las fuerzas representadas en el diagrama de cuerpo libre del conjunto son:

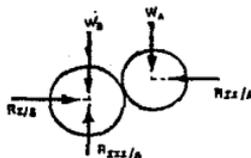
$R_{II/A}$ = Reacción de la pared II sobre "A".

$R_{III/B}$ = Reacción del piso sobre "B".

W_A = Peso del cilindro "A".

W_B = Peso del cilindro "B".

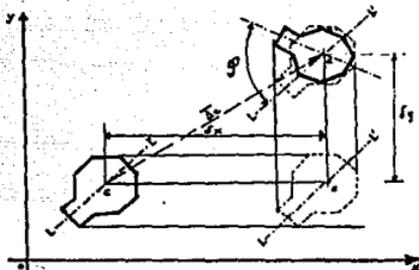
$R_{I/B}$ = Reacción de la pared I sobre "B".



I.4.2 GRADOS DE LIBERTAD.

Grado de libertad de un cuerpo, es el número de posibilidades de desplazamientos independientes que tienen, sean lineales o angulares.

En el plano un cuerpo rígido puede tener los siguientes desplazamientos independientes en un marco de referencia como el mostrado:



$\overline{\Delta c}$.- Desplazamiento lineal del punto C, cuyos componentes pueden anotarse como:

$$\overline{\Delta c} [\delta x, \delta y]$$

Φ .- Desplazamiento angular de la recta LL' que representa uno de los ejes del cuerpo.

De lo anterior se concluye que un cuerpo en el plano posee tres posibilidades independientes de desplazamiento ($\delta x, \delta y, \Phi$) y por lo tanto tiene tres grados de libertad.

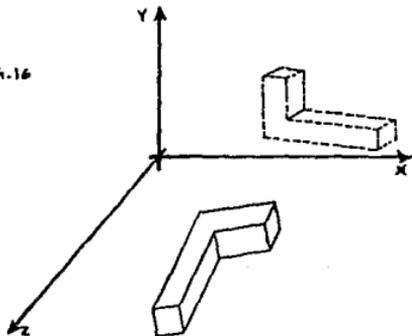
En el espacio, el cuerpo mostrado en la figura 16 ha sufrido un desplazamiento lineal cuyas componentes pueden anotarse como:

$$\overline{\Delta} [\delta x, \delta y, \delta z]$$

Así como un desplazamiento angular, que puede escribirse en función de sus componentes como:

$$\Phi [\Phi x, \Phi y, \Phi z]$$

Fig. 16



En esta forma se concluye que un cuerpo en el espacio posee seis posibilidades independientes de desplazamiento y por lo tanto tiene seis grados de libertad.

I.4.3 TIPOS DE APOYO.

Un apoyo es un dispositivo mediante el cual se transmiten las fuerzas que actúan sobre un cuerpo a otro que le sirve de soporte.

Las estructuras están sustentadas con restricciones mas o menos completas de tal manera que no pueden moverse libremente en el espacio. Tales restricciones están originadas por los apoyos que unen a la estructura a alguna base fija, tal como la tierra u otra estructura.

En el plano los tres tipos de apoyo más comunes son:

- Apoyo libre
- Articulación plana
- Empotramiento plano

APOYO LIBRE.

Se logra al soportar un cuerpo directamente sobre el apoyo, impidiéndole el movimiento en la dirección perpendicular al plano del apoyo, permitiéndole el desplazamiento en la otra dirección ortogonal, así como la rotación en torno del apoyo.

En este tipo de apoyo hay un grado de restricción, por lo tanto se genera una sola fuerza que es la que impide el movimiento vertical hacia abajo. Como se muestra en la figura 17.

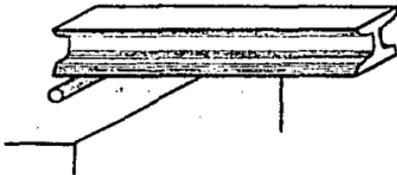


Figura 17

ARTICULACION PLANA.

Este tipo de apoyo tiene dos grados de restricción, por lo tanto se generan dos fuerzas que impiden los desplazamientos en las direc_

ciones de los ejes coordenados x , y , indicados en la figura 18.

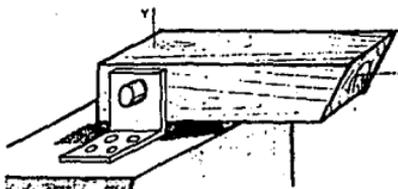


Figura 18

Debe aclararse que en un problema donde intervenga un apoyo articulado pueden presentarse como incógnitas las dos componentes R_x , R_y o bien su resultante, en magnitud y dirección; es decir siempre aparecerán dos incógnitas como se indica en la figura 19.

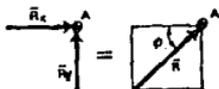


Figura 19

EMPOTRAMIENTO PLANO.

En este caso existen tres grados de restricción, es decir, se impiden los desplazamientos en las direcciones vertical y horizontal, así como la rotación dentro del apoyo. Véase la figura 20.

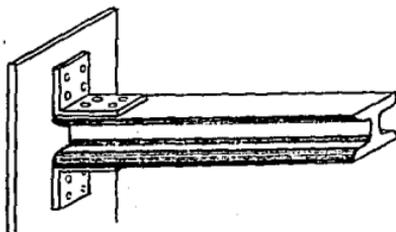
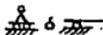
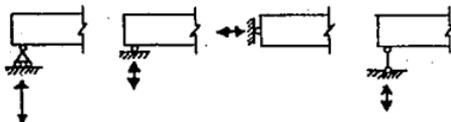
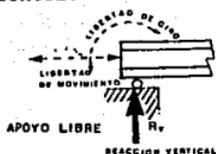
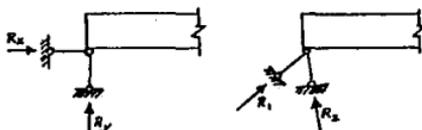
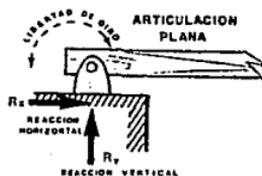


Figura 20

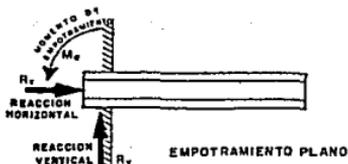
A continuación se simbolizan los distintos apoyos en las figuras siguientes:



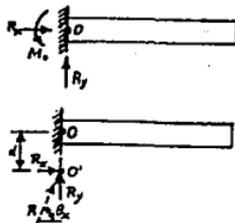
APOYO LIBRE



ARTICULACION PLANA



EMPOTRAMIENTO PLANO



ESTABILIDAD Y GRADO DE DETERMINACION DE UNA ESTRUCTURA PLANA CON RESPECTO A LOS APOYOS.

En el análisis siguiente consideraremos la estructura como un cuerpo monolítico rígido montado sobre cualquier número de apoyos. En esta forma no habrá condiciones internas involucradas, y la estabilidad y grado de determinación de la estructura serán juzgadas solamente por la estabilidad y grado de determinación de los apoyos.

1.- Dos elementos de reacción proporcionados por los apoyos, tales como dos fuerzas cada una con punto de aplicación y dirección definidos no son suficientes para garantizar la estabilidad de un cuerpo rígido, debido a que los dos únicamente pueden ser colineales, paralelos o concurrentes. En cada uno de estos casos no existe el equilibrio no por falta de resistencia en los apoyos sino por el número insuficiente de los elementos de apoyo. Esto se conoce como inestabilidad estática. Si dos fuerzas de reacción son colineales (fig. 21a) no pueden resistir una carga externa que tenga componente normal a su línea de acción. Si son paralelas (fig. 21b), no pueden evitar el deslizamiento lateral del cuerpo. Si son concurrentes (figs. 21c y 21d), no pueden resistir el momento respecto del punto de concurrencia producido por cualquier fuerza que no pase por O. Asimismo en las figuras 21a y b, no se satisface la condición de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y en las figs. 21c y d, no se cumple la condición $\Sigma M_o = 0$ por lo tanto el cuerpo no está en equilibrio y se dice que es inestable.

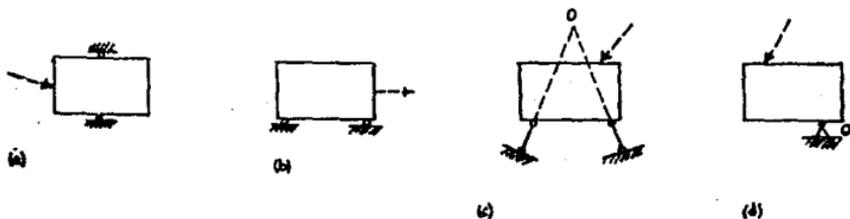


Figura 21

El cuerpo anteriormente mostrado puede ser estable solamente bajo condiciones muy especiales de carga, como se muestra en la figura 22 las cargas aplicadas que actúan sobre el cuerpo están entre sí en equilibrio; no requiriéndose entonces reacción alguna. Aquellas estructuras, estables bajo condiciones especiales de carga, pero inestables bajo condiciones generales de carga, se dice que están en un estado de equilibrio inestable y se clasifican como estructuras inestables.

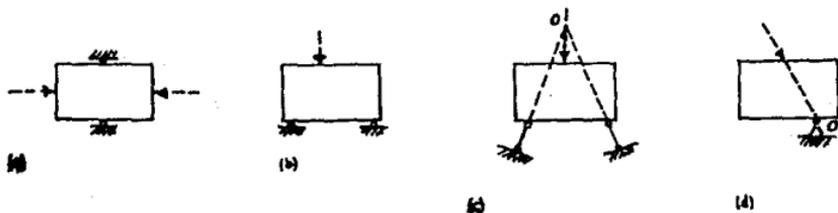


Figura 22

2.- Para que un cuerpo esté en equilibrio estable son necesarios por lo menos tres elementos de reacción. Como en el caso de la figura 23 el cuerpo rígido está sujeto por los tres elementos de reacción que pueden calcularse mediante los tres grupos de ecuaciones disponibles de equilibrio que son: I; $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$ y $\sum M_z=0$, II; $\sum F_y=0$, $\sum M_a=0$, $\sum M_b=0$, III; $\sum M_a=0$, $\sum M_b=0$, $\sum M_c=0$ (los tres grupos de ecuaciones se explican en el subcapítulo I.4.5); si se satisfacen para las cargas y reacciones que actúan sobre el cuerpo, respectivamente, se garantiza que el cuerpo no podrá moverse ni horizontal, ni verticalmente, ni rotar. En este caso el sistema es estáticamente estable y determinado.

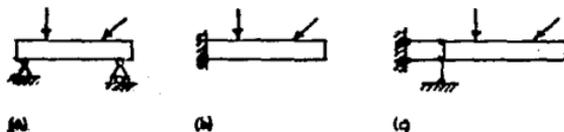


Figura 23

3.- Si hay más de tres elementos de reacción, como en los casos mostrados en la figura 24, el cuerpo es necesariamente más estable, debido a las sujeciones adicionales. Como el número de incógnitas de reacción es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio, el sistema es estáticamente indeterminado con respecto a las reacciones de los apoyos.

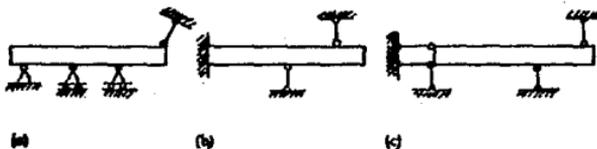


Figura 24

4.- El hecho de que el número de elementos de reacción por lo menos sea igual a tres, es una condición necesaria, pero no suficiente, para que la estructura sea externamente estable. Por ejemplo cuando las líneas de acción de las reacciones son todas paralelas, como en la fig. 25a el cuerpo es inestable, por que no puede oponerse al desplazamiento horizontal.

En la figura 25b se muestra otro caso donde las líneas de acción de los tres elementos de reacción concurren inicialmente en el punto "O". El sistema es inestable, aunque probablemente no se producirá el colapso completo, porque al producirse una pequeña rotación alrededor de "O" causada por el momento de cualquier fuerza que no pase por dicho punto, esta rotación cesará cuando las tres líneas de acción de las reacciones formen el triángulo rayado indicado en la figura. La inesta-

bilidad mencionada anteriormente, que resulta de una disposición inadecuada de los apoyos, se conoce como inestabilidad geométrica externa.

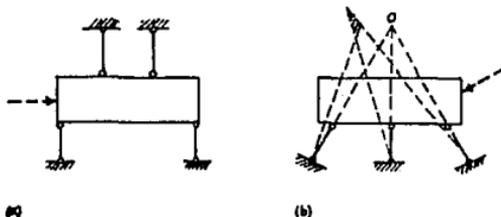


Figura 25

A continuación se resumen los puntos principales de la estabilidad y grado de determinación de una estructura con respecto a los apoyos:

1.- Si el número de incógnitas de reacción es menor que tres, las ecuaciones de equilibrio generalmente no se satisfacen, y el sistema es inestable.

2.- Si el número de incógnitas de reacción es igual a tres y no existe inestabilidad geométrica externa, entonces el sistema es estáticamente estable y determinado.

3.- Si el número de incógnitas de reacción es mayor de tres, entonces el sistema es estáticamente indeterminado; será estable siempre y cuando no exista inestabilidad geométrica externa. El número en exceso de incógnitas se denomina grado de indeterminación.

ESTABILIDAD Y GRADO DE DETERMINACION GENERALES DE LAS VIGAS.

En las estructuras compuestas los dispositivos de unión imponen nuevas condiciones al sistema de fuerzas que actúa en la estructura, proporcionando ecuaciones adicionales de la estática que complementan las ecuaciones de equilibrio del conjunto. Las ecuaciones proporcionadas por el método de construcción particular empleado se conocen como ecuaciones de condición o construcción.

Supongamos que se introduce una articulación en una viga estable y estáticamente determinada como la de la figura 26a o b. La viga se hará evidentemente inestable bajo un sistema general de cargas, como resultado de una rotación relativa entre las partes de la izquierda y la derecha de la articulación interna, como indica la figura 26c o d; como la articulación no tiene la capacidad de resistir momento, se impone una condición restrictiva a las fuerzas externas actuantes sobre la estructura; esto es, $M=0$ respecto a la articulación. Es decir, el

momento respecto a la articulación producido por las fuerzas externas a cualquier lado de ella debe ser cero, con el fin de garantizar que las partes no rotarán alrededor de la articulación.

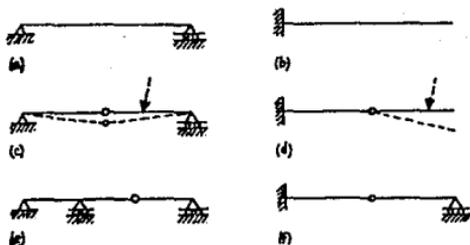


Figura 26

En la figura 26c o d, vemos que en cada caso hay tres elementos de reacción proporcionados por los apoyos, mientras que hay cuatro condiciones de la estática que han de satisfacer las fuerzas externas, tres de equilibrio mas una de construcción. Lo anterior significa que el número de incógnitas de reacción es uno menos que el número de ecuaciones independientes de la estática disponibles para su solución. Por lo tanto, las ecuaciones de la estática para este sistema de fuerzas no se satisfacen. La viga es inestable, a menos que proveamos un elemento adicional de reacción tal como el apoyo de rodillos mostrado en la figura 26e o f, lo que hace que el número total de incógnitas sea igual al número de ecuaciones independientes de la estática necesarias para determinar los elementos de reacción; de esta forma la viga recuperará el estado de estabilidad y determinación estática.

Si se provee de un apoyo pendular o de rodillos en una sección de la viga estable y estáticamente determinada de la figura 26a o b, se obtiene una viga menos estable todavía que con una articulación, debido a que el apoyo pendular o de rodillos no puede resistir momentos, ni fuerzas normales. La viga sufrirá colapso bajo cualquier tipo de carga como resultado de la rotación relativa y latraslación lateral de las porciones a la izquierda y derecha del apoyo móvil, como se indica en la figura 27a o b.

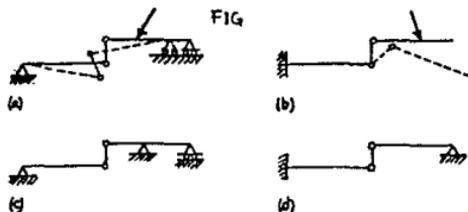


Figura 27

Como el apoyo móvil no tiene capacidad de resistir fuerzas laterales ni de momentos, se constituyen dos limitaciones para las fuerzas externas que actúan sobre la estructura que son: $H=0$ y $M=0$ respecto al apoyo pendular. La condición de $H=0$ a cualquier lado del apoyo pendular evita el movimiento en la dirección normal a éste de una porción de la estructura con relación a la otra. La condición $M=0$ a cualquier lado del apoyo pendular asegura que dichas porciones no rotarán alrededor de sus pasadores.

Es normal que se presente la inestabilidad geométrica cuando se introducen uniones externas en una estructura originalmente estable. Por ejemplo en la figura 28a, la viga es estáticamente indeterminada en primer grado; si se inserta una articulación, como se muestra en la figura 28b, la viga será aparentemente estáticamente determinada. Sin embargo, al aplicarle una carga, se producirá un desplazamiento inicial que no será resistido elásticamente por la estructura. En tal caso, la viga es inestable no por causa de apoyos inadecuados, sino por una disposición inadecuada de sus dos partes. Esto se conoce como inestabilidad geométrica interna.



Figura 28

De lo anterior puede establecerse un criterio para la estabilidad y grado de determinación de las vigas. Si designamos por r el número de elementos de reacción y por c el número de ecuaciones de condición ($c=1$ para una articulación y $c=2$ para un apoyo móvil; $c=0$ para una viga sin uniones intermedias).

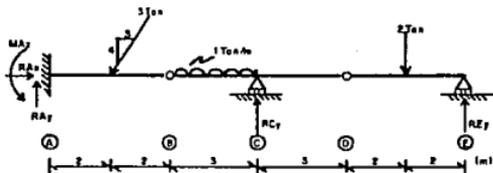
1. Si $r < c + 3$, la viga es inestable.
2. Si $r = c + 3$, la viga es estáticamente determinada siempre y cuando no exista inestabilidad geométrica (interna o externa).
3. Si $r > c + 3$, la viga es estáticamente indeterminada.

A continuación se presentan ejemplos del criterio establecido, en la tabla siguiente:

Viga	c	r	$< r = c+3$ $>$	Clasificación
	2	5	= 5	Estable y determinada
	2	6	> 5	Estable e indeterminada de primer grado.
	2	5	= 5	Inestable
	3	6	= 6	Estable y determinada
	2	6	> 5	Inestable

Resolver los ejemplos 1 y 4 de la tabla anterior, con las dimensiones y solicitaciones de carga que se indican a continuación:

1.)



$$\sum M_{der} = 0$$

$$2(2) - REy(4) = 0$$

$$REy = 1 \text{ Ton}$$

$$\sum M_{der} = 0,$$

$$1(3)(1.5) - RCy(3) + 2(8) + 1(10) = 0$$

$$RCy = 3.5 \text{ Ton}$$

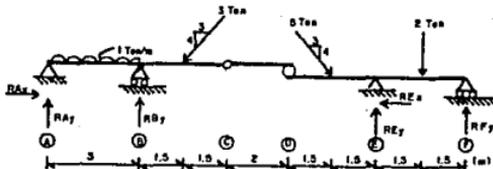
$$\sum Fy = 0$$

$$RAy - 3(4/5) - 1(3) + 3.5 - 2 + 1 = 0$$

$$RAy = 2.9 \text{ Ton}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad R_{Ax} - 3(3/5) = 0 & \quad R_{Ax} = 1.8 \text{ Ton} \\ \Sigma M_{Bizq} = 0 & \quad -3(4/5)(2) + 2.9(4) - MA_z = 0 & \quad MA_z = 6.8 \text{ Ton m} \end{aligned}$$

2.)



$$\begin{aligned} \Sigma F_{xDizq} = 0 & \quad -3(3/5) + R_{Ax} = 0 & \quad R_{Ax} = 1.8 \text{ Ton} \\ \Sigma F_{xDder} = 0 & \quad 5(3/5) + R_{Ex} = 0 & \quad R_{Ex} = 3 \text{ Ton} \\ \Sigma M_{Dder} = 0 & \quad 5(4/5)(1.5) - R_{Ey}(3) + 2(4.5) - R_{Fy}(6) = 0 \dots (1) \end{aligned}$$

Despejando R_{Ey} de 1

$$R_{Ey} = 5 - 2R_{Fy} \dots (2)$$

$$\Sigma M_{Cder} = 0 \quad 5(4/5)(3.5) - R_{Ey}(5) + 2(6.5) - R_{Fy}(8) = 0 \dots (3)$$

Sustituyendo la ecuación 2 en 3 se tiene:

$$14 - 5(5 - 2R_{Fy}) + 13 - 8R_{Fy} = 0 \quad R_{Fy} = -1 \text{ ton} \dots (4)$$

Sustituyendo la ec. 4 en 2 se tiene:

$$R_{Ey} = 5 - 2(-1) \quad R_{Ey} = 7 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_{Cizq} = 0 \quad -3(4/5)(1.5) + R_{By}(3) - 1(3)(4.5) + R_{Ay}(6) = 0 \dots (5)$$

Despejando R_{By} de 5

$$R_{By} = 5.7 - 2R_{Ay} \dots (6)$$

$$\Sigma M_{Dizq} = 0 \quad -3(4/5)(3.5) + R_{By}(5) - 1(3)(6.5) + R_{Ay}(8) = 0 \dots (7)$$

Sustituyendo la ec. 6 en 7 se tiene:

$$-27.9 + 5(5.7 - 2R_{Ay}) + 8R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 0.3 \text{ ton} \dots (8)$$

Sustituyendo la ec. 8 en 6 se tiene:

$$R_{By} = 5.7 - 2(0.3) \quad R_{By} = 5.1 \text{ ton}$$

I.4.4 SUMA DE MOMENTOS DE LAS FUERZAS DE UN SISTEMA.

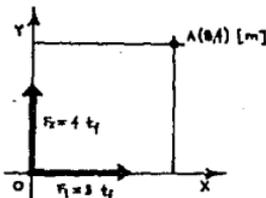
TEOREMA DE VARIGNON.

El teorema de Varignon, es de gran importancia en el estudio de la Estática y se enuncia de la siguiente forma:

"La suma algebraica de los momentos de dos fuerzas concurrentes, con respecto a cualquier punto de su plano, es igual al momento de la resultante de ellas con respecto al mismo punto".

Ejemplo:

Las fuerzas F_1 y F_2 están alojadas en los ejes x , y , respectivamente. Con los datos de la figura calcule el momento de la resultante R respecto al punto "A" de coordenadas (8,4)m.



Considerando como negativo el sentido del giro de las manecillas del reloj, al aplicar el teorema de Varignon se tiene :

$$EM_{AF} = M_{AR}$$

Esto es:

$$-3 \text{ tf} (8\text{m}) + 4 \text{ tf} (4\text{m}) = R(d)$$

Donde :

d = Brazo de la resultante o distancia del punto "A" a la línea de acción de R .

R = Magnitud de la resultante.

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ tf}$$

$$\alpha = \text{ang tan } 4/3 = 53.13^\circ$$

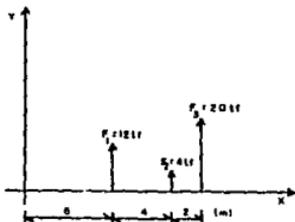
Efectuando las operaciones se obtiene que $M_o = -20 \text{ tf}$ y $d = 4\text{m}$

TEOREMA DE MOMENTOS.

Este teorema establece que: El momento de la fuerza resultante de un sistema, respecto a un punto cualquiera, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto a ese punto.

El teorema anterior es una generalización del teorema de Varignon y será válido cuando el sistema de fuerzas tenga resultante única o esté en equilibrio, es decir que no exista un par como resultante única de dicho sistema.

Ejemplo: En la figura se muestra un sistema de tres fuerzas paralelas al eje YY". Con los datos indicados calcule la magnitud y la posición de la resultante del sistema.



Solución: La suma de estas fuerzas verticales será una fuerza también vertical cuya magnitud es:

$$R = 12 + 4 + 20 = 36 \text{ tf. vertical hacia arriba.}$$

Para calcular la posición de la resultante se aplica el teorema de los momentos enunciado anteriormente.

Para mayor facilidad es conveniente escoger como centro al origen "o" del sistema de referencia establecido.

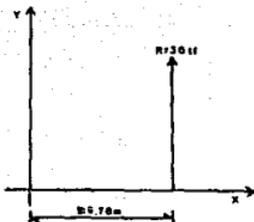
$$12 \text{ tf (6m)} + 4 \text{ tf (10m)} + 20 \text{ tf (12m)} = 36 \text{ tf (x m)}$$

Donde:

x = Expresa la posición de la resultante respecto al origen.

Efectuando operaciones se obtiene que $x = 9.78 \text{ m}$

Es decir la resultante es la que se indica en la figura siguiente.



1.4.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

Para que un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas esté en equilibrio se requiere que no experimente aceleraciones tanto en su movimiento lineal como angular, es decir que:

$$a = \alpha = 0$$

Donde a representa la aceleración lineal y α la angular.

Para que esta doble condición se cumpla es necesario que el sistema de fuerzas, al reducirse en su más simple expresión, no tenga ni fuerza resultante ni momento resultante.

Estas condiciones se expresan matemáticamente de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \dots \dots \dots (a)$$

$$\sum_{i=1}^n (r_i * F_i) = \sum_{i=1}^n M_i = 0 \dots \dots (b)$$

La ecuación (a) establece que la suma vectorial de las "i" fuerzas del sistema es cero, mientras que la ecuación (b) indica que la suma de los momentos ($r_i * F_i$) de las "i" fuerzas del sistema con respecto a un punto, es también nula.

Las ecuaciones (a) y (b) son las condiciones vectoriales para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio.

Debe aclararse que estas ecuaciones son válidas para todos los casos de sistemas de fuerzas, hasta para un sistema espacial general.

CONDICIONES ESCALARES DE EQUILIBRIO.

Estas condiciones se deducen de las ecuaciones (a) y (b). La ecuación (a) expresa que la suma vectorial de las fuerzas es nula, por lo que no existen proyecciones en los ejes X, Y, Z, lo cual se expresa escalarmente con las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_x = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma F_z = 0 \dots\dots\dots(3)$$

Asimismo, la ecuación (b) indica que no hay momentos respecto a los ejes coordenados cartesianos, o sea:

$$\Sigma M_x = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$\Sigma M_y = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\Sigma M_z = 0 \dots\dots\dots(6)$$

Las seis ecuaciones analíticas escritas anteriormente son las condiciones escalares de equilibrio de un sistema general tridimensional.

CONDICIONES ESCALARES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS PLANOS.

Existen tres grupos de ecuaciones generales de equilibrio, los cuales son considerados para un sistema general plano.

En el caso del primer grupo las ecuaciones 1 a 6 de las condiciones escalares de equilibrio se reducen en número debido a que todas las fuerzas del sistema están alojadas en un solo plano, que puede ser el X, Y.

Para esta posibilidad, de las ecuaciones de proyecciones sólo quedan dos ($\Sigma F_x = 0 = \Sigma F_y$), ya que la ecuación $\Sigma F_z = 0$ se elimina por no existir fuerzas que se proyecten en el eje ZZ'.

De las ecuaciones de momentos se eliminan dos, ($\Sigma M_x = 0 = \Sigma M_y$), ya que sólo existen rotaciones en torno del eje ZZ' o cualquier otro eje paralelo a él.

Así las tres ecuaciones generales de equilibrio que se consideran para un sistema general plano son:

$$\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \Sigma F_y = 0 \dots\dots\dots(2) \\ \Sigma M_z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{array}} \right\} \quad (A1)$$

El segundo grupo de ecuaciones, se utilizará siempre y cuando la línea que una los puntos a y b no sea perpendicular al eje respecto al cual se hace la suma de fuerzas (ΣF_x); Los puntos a y b y el eje mencionado anteriormente se elijen arbitrariamente en el plano. Es recomendable, que los dos puntos respecto a los cuales se hace ΣM coincidan con la ubicación de los apoyos de la estructura, para facilitar el cálculo de las reacciones.

$$\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \quad \dots\dots\dots(1) \\ \Sigma M_a = 0 \quad \dots\dots\dots(2) \\ \Sigma M_b = 0 \quad \dots\dots\dots(3) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma M_a = 0 \\ \Sigma M_b = 0 \end{array}} \right\} (A2)$$

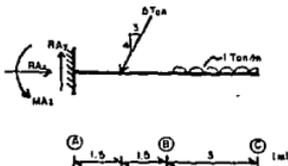
El tercer grupo de ecuaciones se utilizará siempre y cuando los puntos a,b y c, no sean colineales y hayan sido escogidos arbitrariamente en el plano. De lo cual se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \Sigma M_a = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \\ \Sigma M_b = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \\ \Sigma M_c = 0 \quad \dots\dots\dots (3) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Sigma M_a = 0 \\ \Sigma M_b = 0 \\ \Sigma M_c = 0 \end{array}} \right\} (A3)$$

Es recomendable, que dos de los tres puntos escogidos arbitrariamente coincidan con la ubicación de los apoyos de la estructura con el fin de facilitar el cálculo de las reacciones.

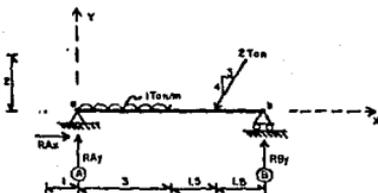
A continuación se presentan ejemplos de los tres grupos de ecuaciones generales de equilibrio que se consideran para un sistema general plano:

1.) A1



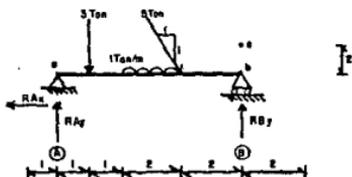
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad -5(3/5) + R_{Ax} = 0 & \quad R_{Ax} = 3 \text{ Ton} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_{Ay} - 5(4/5) - 1(3) = 0 & \quad R_{Ay} = 7 \text{ Ton} \\ \Sigma M_A = 0 & \quad -M_{Az} + 5(4/5)(1.5) + 1(3)(4.5) = 0 \\ & \quad M_{Az} = 19.5 \text{ Ton m} \end{aligned}$$

2.) A2



$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0 & \quad 1(3)(1.5) + 2(4/5)(4.5) - R_{By}(6) = 0 & \quad R_{By} = 1.95 \text{ ton} \\ \Sigma M_b = 0 & \quad R_{Ay}(6) - 1(3)(4.5) - 2(4/5)(1.5) = 0 & \quad R_{Ay} = 2.65 \text{ ton} \\ \Sigma F_x = 0 & \quad R_{Ax} - 2(4/5) = 0 & \quad R_{Ax} = 1.6 \text{ ton} \end{aligned}$$

3.) A3



$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0 & \quad 3(1) + 1(2)(3) + 5(1/\sqrt{2})(4) - R_{By}(6) = 0 \\ & \quad R_{By} = 3.86 \text{ ton} \\ \Sigma M_b = 0 & \quad R_{Ay}(6) - 3(5) - 1(2)(3) - 5(1/\sqrt{2})(2) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{Ay} = 4.68 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad 4.68(6) + R_{Ax}(2) - 3(5) - 1(2)(3) - 2[5(1/\sqrt{2})(2)] = 0$$

$$R_{Ax} = 3.54 \text{ ton}$$

En forma análoga se establecen las ecuaciones de equilibrio de los sistemas paralelos y concurrentes en el plano, así como de los colineales, según los grupos de ecuaciones B, B1, C y D que se indican a continuación.

$$\begin{array}{l} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_a = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(B)} \quad \text{Donde el eje "y" está en la dirección de las} \\ \text{fuerzas del sistema y a es cualquier punto} \\ \text{en el plano.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \Sigma M_a = 0 \\ \Sigma M_b = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(B1)} \quad \text{Donde a y b son dos puntos cualesquiera en el plano} \\ \text{teniendo en cuenta que la línea que pasa por a y b} \\ \text{no debe ser paralela a las fuerzas del sistema.} \end{array} \right.$$

Las ecuaciones B y B1 se utilizan en sistemas de fuerzas paralelas coplanarias.

$$\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(C)} \quad \text{Ecuaciones escalares de equilibrio de un sistema} \\ \text{plano concurrente en "O"}. \end{array} \right.$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{(D)} \quad \text{Ecuación escalar de equilibrio de un sistema de} \\ \text{fuerzas colineales, alojadas en el eje XX'}. \end{array} \right.$$

Cualesquiera que sean las condiciones de equilibrio que se presenten en un problema, para resolverlo conviene adoptar un procedimiento mediante el cual se eviten en lo posible los errores. A continuación se propone un procedimiento para resolver los problemas de equilibrio.

- a) Identificación de los datos y de las incógnitas del problema.
- b) Trazo del diagrama de cuerpo libre, en el cual deben dibujarse todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo considerado, tanto las que se conocen como las desconocidas.
- c) Clasificación de los sistemas de fuerzas y presentación de las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

d) Comparación entre el número de ecuaciones y el de incógnitas, el primero de los cuales debe ser mayor o igual al segundo para que el problema tenga solución estática. En caso contrario el problema sólo podrá resolverse aplicando ecuaciones adicionales que serán obtenidas de otros temas como Resistencia de Materiales, Elasticidad, etc.

e) Resolución del sistema de ecuaciones.

II.- ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS.

II.1 CONCEPTO FISICO.

Para entender el significado físico de los "elementos mecánicos" considérese una barra que forma parte integral de un sistema estructural cualquiera; la barra está sometida a un conjunto de fuerzas activas y reactivas que la mantienen en equilibrio. El eje de la barra y todas las fuerzas que sobre ella actúan están contenidas en un mismo plano. (Ver fig. 1)

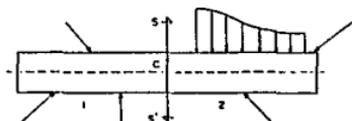


Figura 1

Si mediante un corte imaginario, realizado a través de una sección transversal cualquiera, se divide a la barra en dos porciones (fig. 2).

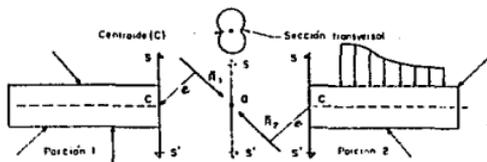


Figura 2

La porción 1 queda en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre de ella (activas y reactivas) y la resultante de las fuerzas del sistema que se encuentran a la derecha de la sección SS' .

La porción 2 se encuentra en equilibrio por la acción de las fuerzas que actúan sobre ella (activas y reactivas) y la resultante de las fuerzas del sistema que se encuentran a la izquierda de la sección SS' .

En la fig. 2

R_1 - resultante de las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre la porción 1. Se define como:

R_{R1} - resultante externa izquierda.

R_2 - resultante de las fuerzas activas y reactivas que actúan sobre la porción 2. Se define como:

R_{R2} - resultante externa derecha.

Las fuerzas R_1 y R_2 son iguales, colineales y de signo contrario y pueden estar aplicadas a una distancia e , medida con respecto al centroide de la sección.

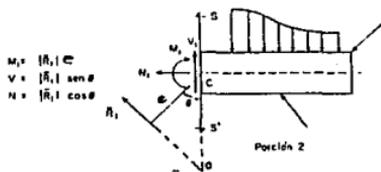
Esto es: $|\overline{R_1}| = |\overline{R_2}|$, o bien $|\overline{R_{R1}}| = |\overline{R_{R2}}|$ y puesto que la

excentricidad e es la misma para ambas fuerzas $e\overline{R_1} = -e\overline{R_2}$

Si se desea obtener el valor del momento y la fuerza transmitidos por la sección SS' , que son equivalentes a la resultante externa izquierda (R_{R1}), se transportará hacia el centroide de la sección, mediante un par de transporte cuyo valor será:

$$M = |\overline{R_1}|e$$

Si, además, se descompone la fuerza transportada (R_1) en sus componentes: normal al eje de la barra y perpendicular al mismo, se obtendrá entonces la siguiente representación, fig. 3 .



$$\begin{aligned} M_1 &= |R_1|e \\ V_1 &= |R_1| \sin \theta \\ N_1 &= |R_1| \cos \theta \end{aligned}$$

Figura 3

donde:

R_1 en O se descompone en $\left\{ \begin{array}{l} M_1 = |\overline{R_1}|e \\ R_1 \text{ en el centroide (c)} \end{array} \right.$

$$R_1 \text{ en } C \text{ se descompone en } \begin{cases} N_1 = \overline{R_1} \overline{e_n} \\ V_1 = \overline{R_1} \overline{e_v} \end{cases}$$

$\overline{e_n}$.- Vector unitario alojado en el plano de la sección, y que pasa por el centroide de la misma.

$\overline{e_v}$.- Vector unitario perpendicular al plano de la sección, y que pasa por el centroide de la misma.

Siguiendo el mismo proceso con la resultante externa derecha, se llega a, fig. 4 .

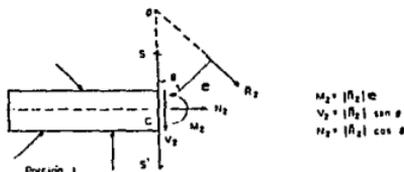


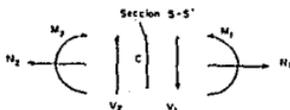
Figura 4

donde:

$$R_2 \text{ en } O \text{ se descompone en } \begin{cases} M_2 = |R_2| e \\ R_2 \text{ en el centroide } (c) \end{cases}$$

$$R_2 \text{ en } C \text{ se descompone en } \begin{cases} N_2 = \overline{R_2} \overline{e_n} \\ V_2 = \overline{R_2} \overline{e_v} \end{cases}$$

quedando finalmente la sección SS' .



y por equilibrio:

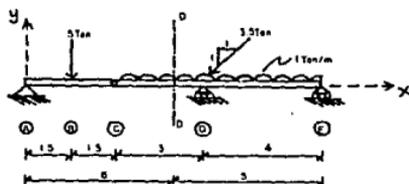
$M_1 = M_2 = M$ Momento flexionante.

$V_1 = V_2 = V$ Fuerza cortante.

$N_1 = N_2 = N$ Fuerza normal.

Las fuerzas M , V y N son los "elementos mecánicos" que se presentan en la sección SS' ; es decir los elementos mecánicos se pueden interpretar como las fuerzas que se generan en una sección.

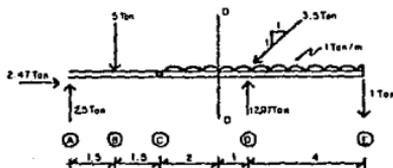
Ejemplo.- De la viga que se muestra a continuación se desea obtener los valores de las fuerzas y momentos únicamente para la sección D , situada a cinco metros a la derecha del apoyo A .



Para resolver éste ejemplo, es necesario considerar ambas porciones de la viga y obtener el equilibrio de cada una de ellas.

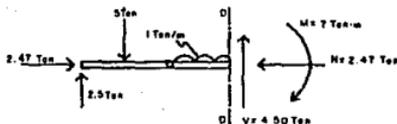
Obteniendo, primero las reacciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{izq} = 0 & \quad -5(1.5) + R_{Ay}(3) = 0 & \quad R_{Ay} = 2.50 \text{ Ton} \\ \Sigma M_e = 0 & \quad 2.50(10) - 5(8.5) + R_{Dy}(4) - 7(3.5) - 3.5 \cos 45^\circ (4) = 0 \\ R_{Dy} = (-25 + 42.5 + 24.5 + 9.9)/4 & \quad R_{Dy} = 12.97 \text{ Ton} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad 2.50 - 5 + 12.97 - 7 - 3.5 \sin 45^\circ + R_{Cy} = 0 \\ R_{Cy} = -1 \text{ Ton}, \quad \Sigma F_x = 0 & \quad R_{Ax} - 3.5 \cos 45^\circ = 0, \quad R_{Ax} = 2.47 \text{ Ton} \end{aligned}$$



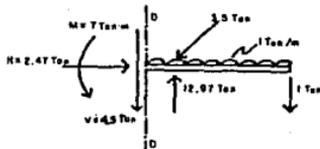
Analizando el equilibrio de cada una de las porciones se observa que:

$$\begin{aligned}
 \text{Por } \Sigma F_x = 0 & \quad 2.47 + N = 0 & \quad N = -2.47 \text{ Ton} \\
 \Sigma F_y = 0 & \quad 2.50 - 5 - 1(2) + V = 0 & \quad V = 4.50 \text{ Ton} \\
 \Sigma M = 0 & \quad 2.5(5) - 5(3.5) - 1(2)(1) + M = 0 & \quad M = 7 \text{ Ton m}
 \end{aligned}$$

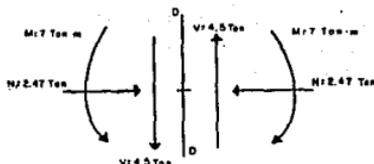


Analizando el equilibrio en la porción 2 se pueden obtener, también, las fuerzas y momentos en el corte.

$$\begin{aligned}
 \text{Por } \Sigma F_x = 0 & \quad -3.5 \cos 45^\circ + N = 0 & \quad N = 2.47 \text{ Ton} \\
 \Sigma F_y = 0 & \quad 12.97 - 3.5 \sin 45^\circ - 1(5) - 1 - V = 0 & \quad V = 4.50 \text{ Ton} \\
 \Sigma M = 0 & \quad -12.97(1) + 3.5 \sin 45^\circ(1) + 1(5)(2.5) + 1(5) - M = 0 \\
 & \quad M = 7 \text{ Ton m}
 \end{aligned}$$



Teniendo necesariamente en la sección DD', por el principio de acción y reacción:



que forzosamente también se encontrará en equilibrio.

II.2 DEFINICION DE LOS ELEMENTOS MECANICOS.

Como se recordará en el concepto físico de los elementos mecánicos, una vez transportada la resultante R_i al centroide de la sección, se descompuso en sus dos componentes, una perpendicular al eje de la barra y otra en la misma dirección de éste, resultando de dichas transformaciones un momento denominado momento flexionante y dos fuerzas que dependiendo de su posición con respecto a la sección en estudio, pueden definirse de la siguiente forma:

MOMENTO FLEXIONANTE (M).

El momento flexionante, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas, activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección, con respecto al centroide de dicha sección.

$$M_f = \sum_{i=1}^n d_i \bar{F}_i \text{ (activas y reactivas)} = d_r F_r = |\bar{R}|e$$

d_r - Es la distancia de la línea de acción de la fuerza resultante al centroide de la sección.

F_r - Fuerza resultante del sistema.

FUERZA CORTANTE (V).

La fuerza cortante, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección (según la sección) de la suma de todas las fuerzas, activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección.

$$V = \sum_{i=1}^n \overline{F_i} \overline{e_v} \text{ (activas y reactivas)} = \overline{F_R} \overline{e_v}$$

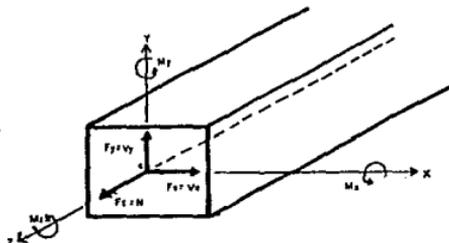
FUERZA NORMAL (N).

La fuerza normal, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección (según la perpendicular a la sección) de la suma de todas las fuerzas, activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección.

$$N = \sum_{i=1}^n \overline{F_i} \overline{e_n} \text{ (activas y reactivas)} = \overline{F_R} \overline{e_n}$$

ELEMENTOS MECANICOS EN EL ESPACIO.

En el caso de elementos estructurales cargados espacialmente, podemos considerar una barra tridimensional sometida a una condición de carga cualquiera, y haciendo un análisis similar al de barras planas, se puede determinar que en una sección transversal cualquiera actúan los siguientes elementos mecánicos:



Momentos:

- $M_x = M_{F_x}$; momento flexionante respecto al eje x.
- $M_y = M_{F_y}$; momento flexionante respecto al eje y.
- $M_z = M_t$; momento torsionante.

Fuerzas:

- $F_x = V_x$; fuerza cortante en la dirección del eje x.
- $F_y = V_y$; fuerza cortante en la dirección del eje y.
- $F_z = N$; fuerza normal.

En la figura anterior puede observarse, que el marco de referencia ha sido colocado con el siguiente criterio:

El eje "z", en dirección del eje de la barra, es decir perpendicu_

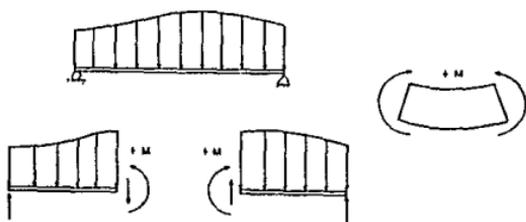
lar a la sección transversal; los otros ejes se definen de tal manera que se tenga un sistema de referencia derecho.

El origen coincide con el centroide de la sección en estudio.

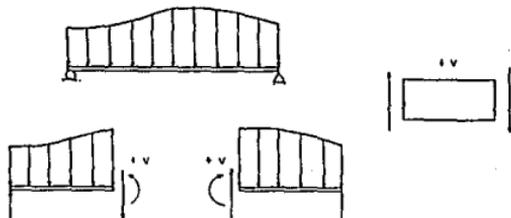
II.3 CONVENCION DE SIGNOS.

Para la convención de signos de los elementos mecánicos en el plano, basta únicamente indicar si la parte de la sección en estudio se encuentra a la izquierda o a la derecha como se muestra a continuación:

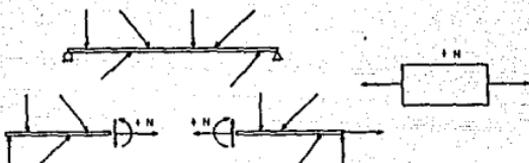
Momento Flexionante (M).



Fuerza Cortante (V).



Fuerza Normal (N)



Para el caso de los elementos mecánicos en el espacio, en un marco de referencia tridimensional, las indicaciones anteriores (en el plano) se prestan a muchas confusiones, por lo cual se realizarán los siguientes pasos:

1.- Se elige un sentido de recorrido para el sistema de barras en estudio. (puede indicarse con las letras del alfabeto, con una numeración progresiva o simplemente con un conjunto de flechas.)

2.- El eje "Z" siempre, se colocará, para cualquier sección, dirigido en el sentido del avance, determinado en la primera consideración, y de acuerdo con el criterio enunciado anteriormente.

Por lo tanto, las fuerzas serán positivas si tienen la misma dirección del eje sobre el cual se encuentran y los momentos serán positivos, si el sentido del avance de un tornillo de rosca derecha, al aplicarle el momento, coincide con la dirección del eje correspondiente.

II.4 ECUACIONES PARA FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.

Para la utilización de este método, es necesario establecer una secuencia de cálculo que facilite la solución del problema; dicha secuencia se muestra a continuación:

- 1.- Comprobar la isostaticidad de la viga analizada.
- 2.- Comprobar la estabilidad de la viga con respecto a su composición interna y al conjunto estructural del cual forma parte.
- 3.- Calcular las reacciones.
- 4.- Determinar los rangos de validéz para las funciones de cada elemento mecánico existente.

5.- Elegir un marco de referencia respecto al cual se calcularán las funciones para cada elemento mecánico dentro de su rango de validez correspondiente, determinado en el paso anterior.

6.- Encontrar los valores de los elementos mecánicos en los extremos de los rangos determinados, por medio de las funciones de definición ya calculadas.

7.- En caso de existir un valor máximo o mínimo intermedio para el elemento mecánico estudiado dentro de los límites del rango de validez de su función de definición, encontrar la localización de la sección para la cual es máximo o mínimo dicho elemento mecánico y determinar su valor mediante el proceso analítico de la primera y segunda derivada.

II.5 DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS.

El diagrama de un elemento mecánico cualquiera, en un sistema de referencia, es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa corresponde a la localización de la sección transversal considerada y cuya ordenada es el valor del elemento mecánico en cuestión, existente en dicha sección transversal.

Es conveniente aclarar que:

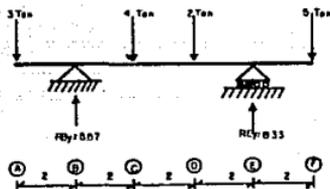
1.- El diagrama de un elemento mecánico proporciona su valor en cada una de las secciones transversales de las barras del sistema estructural en estudio, aplicando sobre él una condición de carga de posición constante.

2.- El marco de referencia no es necesariamente de ejes rectos y ortogonales, pues para barras de eje curvo es más conveniente, en ocasiones, tomar al eje longitudinal del elemento como referencia para localizar las secciones, representando el valor del elemento mecánico según una perpendicular al eje de la barra para cada sección.

El utilizar los diagramas de elementos mecánicos es objetivo y práctico, ya que se obtienen gráficas convenientemente definidas, pues permiten sintetizar los resultados obtenidos analíticamente y tener una idea más general del trabajo del sistema estructural que se analiza.

Ejercicios: Trazar los diagramas de los elementos mecánicos, de las siguientes vigas, encontrando las ecuaciones de los lugares geométricos que definen los valores de cada elemento mecánico, para cada sección de la viga en estudio.

1.)



Por $\Sigma M_B = 0$ y $\Sigma F_y = 0$

$R_{By} = 5.67$ $R_{Dy} = 8.33$

Tramo de A a B con origen en A.

$V = -3$ $M = -3x$

$x = 0$ $V_A = -3$ $M_A = 0$

$x = 2$ $V_B = -3$ $M_B = -6$

Tramo de B a C con origen en B.

$V = -3 + 5.67 = 2.67$ $M = -3(2+x) + 5.67x$

$x = 0$ $V_B = 2.67$ $M_B = -6$

$x = 2$ $V_C = 2.67$ $M_B = -0.67$

Tramo de C a D con origen en B.

$V = -1.33$ $M = -3(x+2) + 5.67x - 4(x-2)$

$x = 2$ $V_C = -1.33$ $M_C = -0.67$

$x = 4$ $V_D = -1.33$ $M_D = -3.37$

Tramo de D a E con origen en D.

$V = -3.33$ $M = -3(6+x) + 5.67(4+x) - 4(2+x) - 2x$

$x = 0$ $V_D = -3.33$ $M_D = -3.32$

$x = 2$ $V_E = -3.33$ $M_E = -10$

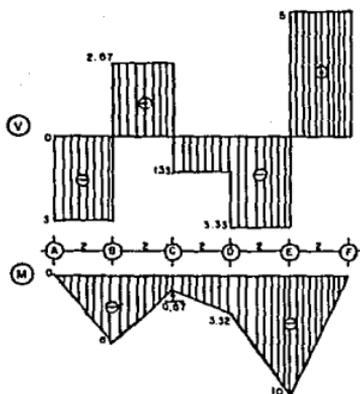
Tramo de E a F con origen en E.

$$V = -3 + 5.67 - 4 - 2 + 8.33 = 5$$

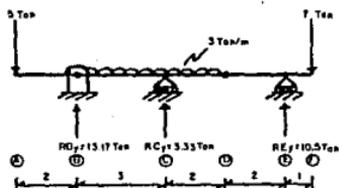
$$M = -3(8+x) + 5.67(6+x) - 4(4+x) - 2(2+x) + 8.33x$$

$$x = 0 \quad V_E = 5 \quad M_E = -10$$

$$x = 2 \quad V_F = 5 \quad M_F = 0$$



2.)



$$\text{Por } \Sigma M_{Dax} = 0$$

$$7(3) - R_{By}(2) = 0$$

$$R_{By} = 10.5$$

$$\text{Por } \Sigma M_B = 0$$

$$R_{By} = 13.17$$

Por $\Sigma F_y = 0$

$R_{cy} = 3.33$

Tramo de A a B con origen en A.

$V = -5$

$M = -5x$

[$x = 0$	$V = -5$	$M = 0$
	$x = 2$	$V = -5$	$M = -10$

Tramo de B a C con origen en B.

$V = -5 + 13.17 - 3x$

$V = 8.17 - 3x$

$M = -5(2+x) + 13.17x - \frac{3x^2}{2}$

[$x = 0$	$V = 8.17$	$M = -10$
	$x = 3$	$V = -0.83$	$M = 1$

Si $V = 0$

$8.17 - 3x = 0$

$x = 2.72$

$V = 0$

$M = 1.12$

Tramo de C a D con origen en B.

$V = -5 + 13.17 - 3x + 3.33$ $M = -5(2+x) + 13.17x - \frac{3x^2}{2} + 3.33(x-3)$

$x = 3$

$V = 2.5$

$M = 1$

$x = 5$

$V = -3.5$

$M = 0$

Si $V = 0$

$8.17 - 3x + 3.33 = 0$

$x = 3.83$

$V = 0$

$M = 2.05$

Tramo de E a D con origen en E.

$V = 7 - 10.5 = 3.5$

[$x = 0$

$V = -3.5$

$M = -7$

$M = -7(1+x) + 10.5x$

[$x = 2$

$V = -3.5$

$M = 0$

Tramo de F a E con origen en F.

$V = 7$

[$x = 0$

$V = 7$

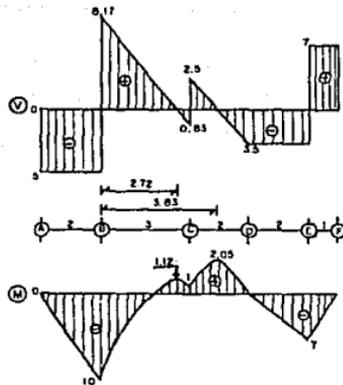
$M = 0$

$M = -7x$

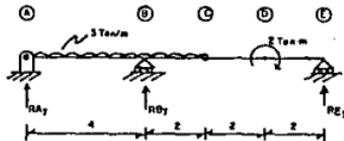
[$x = 1$

$V = 7$

$M = -7$



3.)



Por $\Sigma M_{oder} = 0$

$$2 - R_{By}(4) = 0$$

$$R_{By} = 0.5$$

Por $\Sigma M_A = 0$

$$18(3) - R_{By}(4) + 2 - 0.5(10) = 0$$

$$R_{By} = 12.75$$

Por $\Sigma M_{o1=q} = 0$,

$$R_{Ay}(6) + 12.75(2) - 18(3) = 0$$

$$R_{Ay} = 4.75$$

Tramo de A a B con origen en A.

$$V = 4.75 - 3x$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 1.58 \end{array} \right.$$

$$V = 4.75$$

$$V = -7.25$$

$$V = 0$$

$$M = 0$$

$$M = -5$$

$$M_{\text{máx}} = 3.76$$

$$M = 4.75x - \frac{3x^2}{2}$$

Si $V = 0$

$$4.75 - 3x = 0$$

$$x = 1.58$$

Tramo de B a C origen en B.

$$V = 4.75 - 12 + 12.75 - 3x$$

$$M = 4.75(4+x) - 12(2+x) + 12.75x - \frac{3x^2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{lll} x = 0 & V = 5.5 & M = -5 \\ x = 2 & V = -0.5 & M = 0 \\ x = 1.83 & V = 0 & M_{\text{máx}} = 0.04 \end{array} \right.$$

Si $V = 0$ $4.75 - 12 + 12.75 - 3x = 0$ $x = 1.83$

Tramo de C a D con origen en C.

$$V = 4.75 - 18 + 12.75 = -0.5$$

$$M = 4.75(6+x) - 18(3+x) + 12.75(2+x)$$

$$\left[\begin{array}{lll} x = 0 & V = -0.5 & M = 0 \\ x = 2 & V = -0.5 & M = -1 \end{array} \right.$$

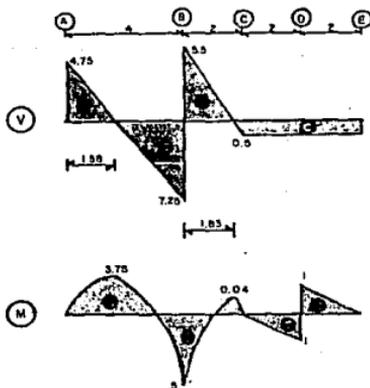
tramo de D a E con origen en D.

$$V = 4.75 - 18 + 12.75$$

$$M = 4.75(8+x) - 18(5+x) + 12.75(4+x) + 2$$

$x = 0$ $V = -0.5$ $M = -1$

$x = 2$ $V = 0$ $M = 0$



II.6 RELACIONES ENTRE LA CARGA TRANSVERSAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLEXIONANTE.

Existen en cualquier sección de una viga cargada ciertas relaciones entre la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante, las cuales nos ayudan en la construcción de los diagramas de la fuerza cortante y el momento flexionante.

Considérese una parte de una viga de cualquier tipo sometida a cargas transversales y pares, como se indica en la figura 5. Para obtener las relaciones mencionadas, se pueden clasificar los segmentos de viga en la forma siguiente:

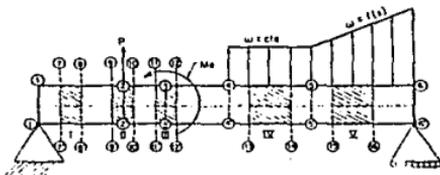


Figura 5

- I. Segmento sin carga.
- II. Segmento bajo carga concentrada.
- III. Segmento bajo un par.
- IV. Segmento bajo carga concentrada.

El estudio de los puntos anteriores se describe a continuación:

1. Segmento sin carga. Como se indica en la figura 5, un segmento entre un apoyo y una carga concentrada es un ejemplo de segmento sin carga. Tomando un elemento longitudinal entre dos secciones distantes dx , como se muestra en la figura 6. Sobre la cara izquierda de este elemento, actúan la fuerza cortante y el momento flexionante representados por V y M , y sobre la cara derecha por $V + dV$ y $M + dM$ donde dV y dM representan la variación en la fuerza cortante y el momento flexionante en la distancia dx . Se supone que x crece de izquierda a derecha. Como el elemento está en equilibrio, se tiene de $\sum F_y = 0$

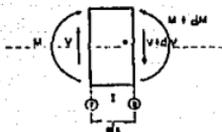


Figura 6

$$V - (V + dV) = 0$$

esto es,

$$dV = 0$$

$$V = \text{constante} \dots \dots \dots (1)$$

Ahora bien de $\Sigma M_o = 0$

$$M + Vdx - (M + dM) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Operando y aplicando la ecuación 2 se obtiene que

$$\frac{dM}{dx} = \text{constante}$$

La ecuación 1 establece que no tiene ningún cambio en la fuerza cortante, y la ecuación 2 establece que el grado de variación del momento flexionante en cualquier punto con respecto a x es constante.

2. Segmento bajo carga concentrada. La fig. 7 representa un elemento sometido a una carga concentrada P. Se supone que P actúa en un punto. Como la distancia entre las dos secciones llega a ser infinitesimal, no habrá diferencia de momentos entre la sección inmediatamente a la izquierda de P y la sección inmediatamente a la derecha de P. Sin embargo, si tiene lugar entre las dos secciones un cambio brusco de valor igual a P en la fuerza cortante, ya que la $\Sigma Fy = 0$, esto es:

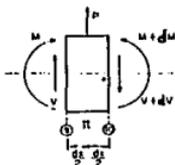


Figura 7

$$\text{Si } V' = V + dV \quad V - P - V' = 0 \quad \text{o} \quad V' = V - P$$

En consecuencia habrá un cambio brusco en la derivada dM_x/dx en el punto de aplicación de la carga concentrada.

Con relación a la figura 7, en la que se observa el diagrama de cuerpo libre de un segmento bajo carga concentrada se deduce lo siguiente:

$$V + P - V - dV = 0 \quad dV = P$$

y aplicando el concepto de límites cuando Δx tienda a cero se tiene

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} \quad \frac{dV}{dx} = \infty$$

Por lo tanto la pendiente es infinita y esto nos indica que el diagrama es perpendicular al eje de la barra y tendrá como ordenada el valor de la carga.

3. Segmento bajo carga de un par M . Ahora M se supone que actúa en un punto. Como se muestra en la figura 8, la distancia entre las dos secciones se convierte en infinitesimal, no habrá diferencia de fuerza cortante entre la sección inmediatamente a la izquierda de M y la sección inmediatamente a la derecha. Sin embargo, habrá un cambio brusco de momento igual a M entre las dos secciones, ya que la $\Sigma M_0 = 0$ esto es:

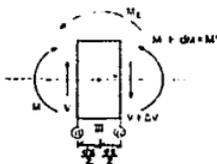


Figura 8

$$\text{Si } M' = M + dM \quad M - M_E - M' = 0 \quad \text{o} \quad M' = M - M_E$$

La construcción de los diagramas de la fuerza cortante y el momento flexionante se facilita con las relaciones previamente establecidas. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dV_x}{dx} = -w$$

nos dice que la pendiente del diagrama de la fuerza cortante en cualquier punto es igual al valor negativo de la ordenada en ese punto del diagrama de cargas aplicadas a la viga.

4 y 5. Segmento bajo carga distribuida. Tomando un elemento separado de los demás por dos secciones adyacentes distantes una cantidad dx , sometido a una carga distribuida, como se indica en la figura 9. Supongase una carga distribuida hacia arriba, en dirección positiva.

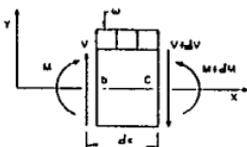


Figura 9

De $\Sigma F_y = 0$ se obtiene:

$$V - (V + dV) - w dx = 0$$

$$dV = - w dx$$

o

$$\frac{dV}{dx} = - w \dots \dots \dots (3)$$

De $\Sigma M_c = 0$, $M + Vdx - w dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$

Despreciando el pequeño término $w (dx)^2/2$ y simplificando, se obtiene:

$$\frac{dM}{dx} = V \dots \dots \dots (4)$$

La ecuación 3 establece que el grado de variación de la fuerza cortante con respecto a x en cualquier punto es igual a la intensidad de la carga en ese punto pero con signo opuesto. La ecuación 4 establece que el grado de variación del momento flector con respecto a x en cualquier punto es igual a la fuerza cortante en ese punto.

Concluyendo, para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se hace hincapié en los siguientes puntos:

1. Para un segmento sin carga, la pendiente del diagrama de la fuerza cortante es cero, esto es: El diagrama de la fuerza cortante es una línea recta paralela al eje de la viga.

2. Para un segmento bajo carga uniforme de intensidad w , la pendiente del diagrama de la fuerza cortante es constante. El diagrama es entonces una línea recta inclinada.

3. En el punto de aplicación de una carga concentrada, la intensidad de la carga es infinita, y la pendiente del diagrama de la fuerza cortante será entonces infinita, esto es, vertical respecto al eje de la viga. Habrá una discontinuidad en el diagrama de la fuerza cortante, y entre los lados adyacentes al punto de la carga tendrá lugar un cambio brusco en el valor de la fuerza cortante igual a la fuerza aplicada.

4. Bajo carga distribuida la variación de la fuerza cortante entre las dos secciones distantes dx será:

$$dV = - w dx$$

De tal forma, que la diferencia en las ordenadas del diagrama de la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera a y b está dada por:

$$V_b - V_a = - \int_{x_a}^{x_b} w dx = (\text{área del diagrama de la carga entre } a \text{ y } b)$$

Súpongase que existen cargas concentradas adicionales EP actuando sobre a y b . La diferencia de la fuerza cortante entre los dos puntos debe incluir el efecto debido a EP ; esto es,

$$V_b - V_a = - \int_{x_a}^{x_b} w dx - EP = (\text{área del diagrama de la carga } a \text{ y } b$$

+ EP) en la cual la EP se supone que actúa hacia abajo.

La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$V_b = V_a - \int_a^b w dx$$

En forma similar, de la ecuación $\frac{dM}{dx} = V_x$

la pendiente del diagrama del momento flexionante en cualquier punto es

igual a la ordenada del diagrama de la fuerza cortante en ese punto.

Así mismo, como conclusiones geométricas para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se establece que:

1. Si la fuerza cortante es constante en una porción de la viga, el diagrama del momento flexionante será una línea recta en ese tramo.

2. Si la fuerza cortante varía en cualquier forma en una porción de la viga, el diagrama de la fuerza flexionante será una línea curva.

3. En un punto donde actúe una fuerza concentrada habrá un cambio brusco en la ordenada de la fuerza cortante y por lo tanto un cambio en la pendiente del diagrama del momento flexionante en ese punto; De tal manera que el diagrama de momentos tendrá dos pendientes diferentes en ese punto.

4. Los momentos flexionantes máximos y mínimos tendrán lugar donde el diagrama de la fuerza cortante corte el eje "x" y serán máximos donde la fuerza cortante cambie de positiva (a la izquierda) a negativa (a la derecha); y el mínimo cuando suceda lo contrario.

5. Para un sistema de fuerzas concentradas el momento flexionante máximo se presentará bajo una de ellas, ya que el cambio en la fuerza cortante de positiva a negativa debe tener lugar en un punto donde este aplicada una de las fuerzas concentradas.

6. Con referencia a la ecuación $dM/dx = V_x$, se encuentra que, bajo carga transversal, la variación en el momento flexionante entre dos secciones separadas por una distancia diferencial dx está dada por:

$$dM = Vdx$$

En consecuencia, la diferencia entre las ordenadas del momento flexionante en dos puntos cualesquiera a y b está dada por:

$$M_b - M_a = \int_{x_a}^{x_b} Vdx = (\text{área del diagrama de fuerza cortante entre a y b})$$

Si hay pares externos (M_E) actuando entre a y b, entonces la diferencia de momentos entre los dos puntos debe incluir el efecto debido a estos pares; esto es,

$$M_b - M_a = \int_{x_a}^{x_b} Vdx - M_E = (\text{área del diagrama de fuerza cortante entre$$

a y b $-M_E$). En la cual M_E se ha puesto que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$M_b = M_a - \int_a^b V \, dx$$

Ejemplo: Considérese una viga simple con voladizo cargada como indica la figura 10.

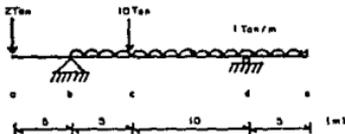


Figura 10

De $\Sigma M_b = 0$ y $\Sigma M_d = 0$, se obtiene el valor de las reacciones en los apoyos:

$$R_b = R_d = 16 \text{klb}$$

Se puede considerar la viga en equilibrio bajo el sistema de las cargas aplicadas y las reacciones, con un diagrama de carga como el mostrado en la figura 11.

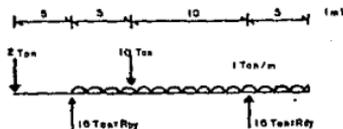


Figura 11

En la fig. 12a se ha dibujado un esquema del diagrama de la fuerza cortante; en relación con este diagrama se hace hincapié en los siguientes puntos:

1. La fuerza cortante en "a" pasa de 0 a -2 Ton; también la fuerza cortante en "e" es igual a cero. Recuérdese que el diagrama de fuerza cortante siempre empieza en cero y termina en cero.
2. La fuerza cortante será constante en la porción ab por no estar cargada. Por lo tanto el diagrama de la fuerza cortante es una línea horizontal paralela al eje de la viga en ese tramo.
3. En la fuerza cortante se presentarán cambios bruscos en b, c y d correspondientes a las fuerzas concentradas que actúan en esos puntos. El cambio total de la fuerza cortante en cada uno de esos puntos será igual al valor de la fuerza aplicada en cada punto.
4. Desde "b" (derecha) a "c" (izquierda), "c" (derecha) a "d" (izquierda)

erda), y "d" (derecha) a "e", el diagrama de la fuerza cortante está formado por segmentos rectilíneos inclinados, cuya pendiente está dada por $dV/dx = -w = -1$ como se indica en la fig.12a.

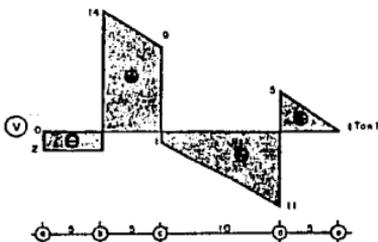


Figura 12a

Se puede dibujar un esquema del diagrama del momento flexionante en la forma indicada en la fig. 12b, en relación con este diagrama se observa lo siguiente:

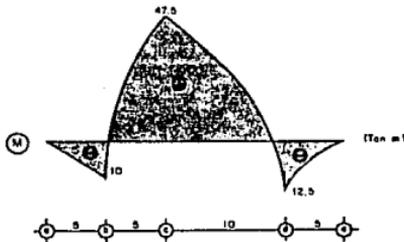


Figura 12b

1. Los momentos en "a" y en "e" son nulos. El diagrama del momento entre "a" y "b" es una línea recta inclinada con una pendiente dada por

$$\frac{dM}{dx} = V = -2 \quad \text{como se indica en la fig.12b.}$$

2. El momento tiene valores extremos en los puntos "b", "c" y "d" donde el diagrama de la fuerza cortante corta al eje x. Los momentos mínimos se presentan en "b" y en "d" debido a los cambios bruscos en la

pendiente del diagrama de momentos de negativo a positivo que tienen lugar en esos puntos, y corresponden a cambios bruscos de la fuerza cortante de negativa a positiva. El momento máximo positivo se presenta en "c" en donde tiene lugar un cambio brusco en la pendiente del diagrama del momento flexionante de positivo a negativo correspondientes a un cambio en la fuerza cortante de positiva a negativa en el punto "c".

3. Como el valor de la fuerza cortante decrece entre bc y cd, de izquierda a derecha, entonces la pendiente del diagrama de momentos también decrece de izquierda a derecha. Esto significa que la curva de momentos es cóncava hacia abajo.

4. Una manera de obtener las ordenadas del diagrama de momento flexionante en b, c y d es calculando las áreas de fuerza cortante (véase la fig. 12a) a partir de las cuales se pueden encontrar las diferencias de los momentos entre dos puntos cualesquiera; esto es,

$$\begin{aligned} M_b - M_a &= -10 \text{ Ton m} & M_c - M_b &= 57.5 \text{ Ton m} \\ M_d - M_c &= -60 \text{ Ton m} & M_e - M_d &= 12.5 \text{ Ton m} \end{aligned}$$

De lo anterior y teniendo en cuenta que $M_a = M_e = 0$, se obtiene:

$$M_b = -10 \text{ Ton m} \quad M_c = 47.5 \text{ Ton m} \quad M_d = -12.5 \text{ Ton m}$$

como se indica en la figura 12b.

11.7 TRAZO DE DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE POR EL METODO DE SUMA DE AREAS.

Para el caso de los diagramas de fuerza cortante y tomando como base la ecuación:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} = -P$$

Transponiendo e integrando la ecuación anterior se obtiene que:

$$V(x) = - \int p \, dx + c_1$$

Lo cual nos indica que en una sección transversal, la fuerza cortante es la negativa de la integral de las fuerzas verticales que actúan sobre la viga, desde su extremo izquierdo o cierta sección transversal hasta la sección en estudio.

Al no existir ninguna fuerza entre estas dos secciones, no ocurre ningún cambio en la fuerza cortante.

El proceso de suma continua es válido, aun en el caso de una fuerza

concentrada, ya que esta se puede considerar como una fuerza distribuida que se extiende sobre una distancia infinitesimal a lo largo de la viga.

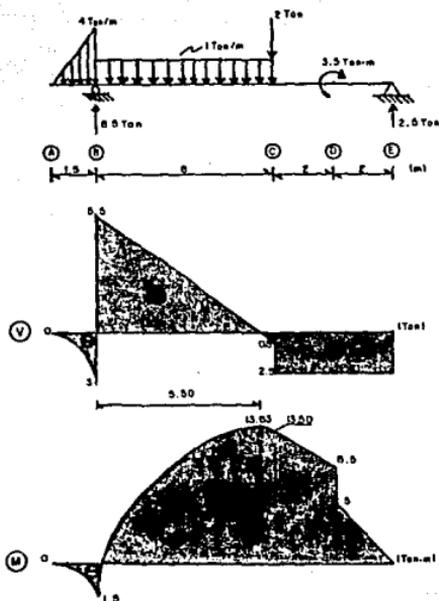
Por lo tanto al determinarse las componentes verticales de las fuerzas aplicadas y las reacciones, al sumarse sucesivamente a partir del extremo izquierdo de la viga; en una sección transversal la fuerza cortante es igual a la suma de todas las fuerzas verticales hasta dicha sección y su sentido es contrario al de la suma de tales fuerzas.

Para el caso del diagrama de momento flexionante por el método de suma de áreas, se tomará como base que el cambio de momento flexionante entre dos puntos de una estructura es igual al producto de la fuerza cortante, entre ambos puntos, por su distancia ($dM = V dx$); por lo tanto, el cambio de momento flexionante es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre los puntos considerados.

Se demostró que la intensidad del cambio del momento flexionante en un punto es igual a la fuerza cortante ($dM/dx = V$). Siempre que tal fuerza de corte se anule, dicha intensidad de cambio también debe anularse ($dM/dx = 0$), por esta razón el momento flexionante alcanza un valor máximo o un valor mínimo. Si el diagrama de momento flex. se trazo de izquierda a derecha y el diagrama de cortante cambia de positivo a negativo, el momento flexionante alcanza un máximo positivo (o máximo) en ese punto, para luego comenzar a decrecer al sumar el área de cortante negativa. Si el diagrama de cortante cambia de negativo a positivo el momento flexionante alcanza un máximo negativo (o mínimo) y luego empieza a crecer al sumar el área de cortante positiva.

Esta teoría, de que el momento flexionante máximo o el mínimo (algebraicos) se producen donde la fuerza cortante se anula, no siempre es aplicable. En algunos casos (en el extremo de una viga o en un punto de discontinuidad) el momento flexionante máximo puede presentarse sin que se anule la fuerza cortante. En el caso de una viga en voladizo, por ejemplo, sujeta solo a carga de gravedad, la máxima fuerza cortante y el momento flexionante máximo ocurre en el extremo empotrado.

A continuación, se presenta un ejemplo y su explicación para el trazo de diagramas de elementos mecánicos por el método de suma de áreas.



Cálculo de reacciones:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-(4)(1.5)/2 (0.5) + (6)(1)(3) + (2)(6) - 3.5 - 10R_{By} = 0$$

$$R_{By} = 25/10 = 2.5 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-3 - 6 - 2 + 2.5 + R_{By} = 0$$

$$R_{By} = 8.5 \text{ ton}$$

Diagrama de fuerza cortante:

1.- Tramo AB: En el punto A la fuerza cortante es nula, ya que la suma de fuerzas cortantes a la izquierda de la sección es cero; en el punto B la fza. cortante es -3 ton como resultado de obtener el área bajo el diagrama de carga $A = (-4\text{ton/m})(1.5\text{m})/2 = -3\text{ ton}$.

La pendiente del diagrama en el punto A es nula por que $dV/dx = 0$, ya que el valor de la intensidad de la carga $w(x)$ en el punto A es cero; asimismo el valor de la pendiente en el punto B es -4 ya que la intensidad de la carga triangular en este punto es -4 ton/m.

En cuánto a la forma del diagrama ésta es una parábola cóncava hacia abajo ya que la pendiente cambia de un valor nulo (A) a un valor negativo (B).

2.- Tramo BC: El valor de V en el punto B es de 5.5 ton que se obtiene de sumar algebraicamente la reacción en B y las fuerzas cortantes a la izquierda del mismo punto.

$$V_B = 8.5 - 3 = 5.5 \text{ ton}$$

En el punto C el valor de V es -0.5 ton como resultado de sumar el valor del V en el punto B y el área bajo la carga uniformemente repartida comprendida entre B y C esto es :

$$V_C = 5.5 \text{ ton} + (-1\text{ton/m})(6\text{m}) = -0.5 \text{ ton}.$$

La pendiente del diagrama en el punto B es perpendicular al eje de la barra debido a que se trata de un segmento bajo carga concentrada, donde $V = P$, y $dV/dx = \infty$; el valor de la pendiente en el punto C es -1 ya que el valor de la carga uniformemente repartida es 1, y esta dirigida hacia abajo por lo tanto $dV/dx = w(x) = -1 \text{ ton/m}$.

La forma del diagrama en el tramo BC es una línea recta cuya pendiente es -1, que inicia y finaliza en los puntos B y C respectivamente y por triángulos semejantes se puede ver que es nulo a 5.50 m del punto B, esto es:

$$x = 5.5 \text{ (6/6)}$$

3.-En el tramo CE, el valor en el punto C es de -2.5 ton ya que la suma de fuerzas cortantes a la izquierda de la sección es -0.5 ton y se presenta una carga puntual de -2 ton; el valor de la fuerza cortante en el punto E es cero ya que la suma de fuerzas cortantes a la izquierda de esta sección es -2.5 ton y el valor de la reacción en dicho punto es 2.5 ton.

La pendiente del diagrama en el punto C es infinita, ya que $V = P$ y la pendiente $dV/dx = \infty$, siendo el mismo caso en el punto E.

La forma del diagrama entre los puntos C y E es una línea paralela al eje de la barra ($y = -2.5$) debido a que no se presenta ningún tipo de carga entre dicho tramo; y en los puntos C y E es una línea perpendicular al eje de la barra cuyo valor es - 2.5 ton.

Diagrama de momento flexionante:

1.- En el tramo AB el valor en el punto A es cero, ya que el valor del área de cortante a la izquierda de esa sección es cero; en el punto B el valor del momento flexionante (M) es -1.5 ton m que resulta de calcular el área bajo el diagrama de fuerza cortante. Observe que el diagrama de fuerza cortante en tramo AB corresponde al de un timpano de parábola, cuya área es: $1/3 bh = 1/3 (1.5)(-3) = -1.5$

El valor de la pendiente en el punto A es cero debido a que el V en ese punto es nulo; en el punto B el valor de la pendiente es -3 ya que el valor de V en ese punto es -3, y como se ha demostrado anteriormente la fuerza cortante nos define la pendiente del diagrama del momento flexionante.

El diagrama de momento flexionante es una curva de tercer grado (Si V es una curva de segundo grado esta al integrarse nos define una curva de tercer grado), cóncava hacia abajo debido a los valores y pendientes obtenidos en los extremos ya que el área de V es va incrementando negativamente de A hacia B.

2.- En el tramo BC, el valor de M en el punto B es -1.5 ton m como resultado de la EM a la izquierda de B; el valor de M en el punto C es 13.50 ton m como resultado de sumarle al valor de M en B las áreas de V correspondientes a dos triángulos esto es :

$$M_c = -1.5 \text{ ton m} + (5.5 \text{ ton m})(5.5 \text{ m})/2 + (-0.5 \text{ ton m})(0.5 \text{ m})/2 = 13.50 \text{ ton m}$$

Entre los puntos B y C se presenta un $M_{\text{máx}}$ cuando el V es nulo a una distancia de 5.50 m del punto B, el valor de $M_{\text{máx}}$ se obtiene de sumarle al M en B el área de cortante correspondiente a 5.5 m del punto B esto es:

$$M_{\text{máx}} = -1.50 \text{ ton m} + (5.50 \text{ ton m})(5.50 \text{ m})/2 = 13.63 \text{ ton m}$$

El valor de la pendiente del diagrama de momento flexionante en el punto B es 5.50, que es el valor de V a la derecha de la sección. En el punto correspondiente a $M_{\text{máx}}$ la pendiente del diagrama de M es nula, ya que el valor de V en ese punto es nulo. El valor de la pendiente en C es -0.5 ya que el valor del V en C es -0.5 ton.

La forma del diagrama de M es una curva de segundo grado cóncava hacia abajo con los valores y pendientes en los puntos respectivos ya descritos.

3.- En el tramo CD, el valor de M en el punto C es 13.50 ton m ya que es el valor de la EM a la izquierda de ese punto; En el punto D el valor de M es igual a 8.5 ton m como resultado de sumar el M_c y el área de cortante de C a D esto es:

$$M_D = 13.50 \text{ ton m} + (-2.5 \text{ ton})(2.0 \text{ m}) = 8.5 \text{ ton m}$$

El valor de la pendiente en el punto C es -2.5 por ser el valor del cortante a la derecha de C; el valor de la pendiente en el punto D es

-2.5 por ser el valor del cortante a la izquierda de D.

La forma del diagrama del momento flexionante es una línea recta de C a D con la pendiente y valores extremos ya descritos.

4.- En el tramo DE, el valor de M en el punto D es 5 ton m como resultado de sumar el momento concentrado en dicho punto (-3.5 ton m) y el valor de la ΣM a la izquierda de D (8.5 ton m); en el punto E el valor de M es cero ya que partiendo de M en D (5 ton m) y descontando el área del diagrama de V que es (-2.5 ton)(2.0 m) el valor es cero.

$$M_x = 5 \text{ ton m} + (-2.5 \text{ ton})(2.0 \text{ m}) = 0$$

Este resultado de M en E, se puede obtener también de tomar en cuenta que el tipo de apoyo en E (articulación) no toma M por lo tanto el resultado debe ser cero.

La pendiente en el punto D es infinita debido a que es un segmento con momento concentrado y existe un cambio brusco de momento entre las dos secciones adyacentes del punto D esto es:

$$M_{D^+} = 0 \quad M'_{x^+} = M_x - M \quad 8.5 \text{ ton m} = 5 \text{ ton m} + 3.5 \text{ ton m}$$

La pendiente en el punto E es -2.5 obtenida del valor de V en dicho punto.

La forma del diagrama de M en el punto D es una línea recta perpendicular al eje de la barra que va de 8.5 ton m a 5 ton m, para posteriormente decrecer hasta cero en el punto E con una variación lineal cuya pendiente es -2.5.

II.8 METODO DE NEWMARK PARA OBTENER DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS.

Quando se tienen vigas sometidas a condiciones irregulares de carga, o cuando se dispone de una computadora para efectuar el análisis de dichos elementos estructurales, conviene emplear el método de Newmark para obtener los diagramas de elementos mecánicos (fuerza cortante y momento flexionante). Para obtener los diagramas de elementos mecánicos por el método de Newmark, el cual es un método aproximado, se procede de la manera siguiente:

1. Se sustituye la condición de carga real (fig. 15), que actúa sobre la viga, por un sistema de cargas concentradas equivalentes (fig. 16). Para lograr lo anterior se divide la viga en segmentos pequeños. La carga concentrada equivalente de cada segmento tiene una magnitud igual al área bajo el diagrama de carga correspondiente a dicho segmento. El punto de aplicación de la carga coincide con el centroide del arco y su dirección es la misma que la de la carga real.

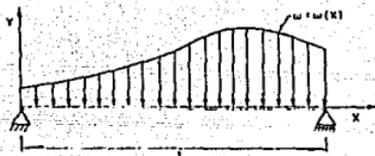


figura 15.



figura 16.

La longitud de los segmentos utilizados (x_1) para obtener las cargas concentradas debe ser, aproximadamente, la décima parte de la longitud total sobre la que se distribuye la carga; de esta manera se obtiene una mayor precisión en el análisis. Sin embargo, es conveniente señalar que no existe una regla generalizada que nos permita determinar el número óptimo de segmentos en que debe dividirse dicha viga; en cada problema en particular debe utilizarse el buen criterio personal.

Para ilustrar la forma como se obtienen las cargas concentradas (P_i) se considerará un segmento representativo "i", (fig. 17). En el segmento considerado es posible conocer la intensidad de la carga en cada uno de sus extremos, w_i y w_{i+1} , y puede suponerse, sin introducir un error significativo, que la distribución de carga es lineal entre dichos extremos. De esta manera el valor de la carga concentrada P_i se puede obtener mediante el cálculo del área de un trapecio.

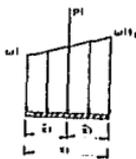


figura 17.

$$P_i = \frac{(w_i + w_{i+1}) (x_1)}{2} \dots \dots \dots (1)$$

Como ya se mencionó anteriormente, la carga concentrada se encuentra aplicada en el centroide del trapecio, el cual se puede obtener mediante la siguiente expresión.

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 (w_1 + 2w_{i+1})}{3 (w_1 + w_{i+1})} \dots \dots \dots (2)$$

La distancia x_1 está medida a partir del extremo izquierdo del segmento, esto es, donde la intensidad de la carga es w_1 (fig. 17).

Considerando ahora el segmento $i-1$ (figura 18.), se puede observar que la intensidad de la carga en el extremo izquierdo es w_{i-1} y en el extremo derecho es w_i .

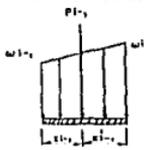


figura 18.

Suponiendo nuevamente que la variación de la carga entre los extremos del segmento $i-1$ es lineal, la carga concentrada P_{i-1} se puede obtener mediante la expresión:

$$P_{i-1} = \frac{(w_{i-1} + w_i) (x_{i-1})}{2} \dots \dots \dots (3)$$

El punto de aplicación de esta carga está localizado a una distancia \bar{x}_{i-1} medida a partir del extremo izquierdo del segmento. La distancia \bar{x}_{i-1} se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\bar{x}_{i-1} = \frac{(x_{i-1}) (w_{i-1} + 2w_i)}{3 (w_{i-1} + w_i)} \dots \dots \dots (4)$$

La distancia que existe del punto de aplicación de la carga al extremo derecho del segmento está dada por la expresión siguiente:

$$\bar{x}'_{i-1} = x_{i-1} - \frac{(x_{i-1}) (w_{i-1} + 2w_i)}{3 (w_{i-1} + w_i)} \dots \dots \dots (5)$$

La distancia que existe entre los puntos de aplicación de las cargas P_{i-1} y P_i , designada como Δx , se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\Delta x = \bar{x}_i + \bar{x}'_{i-1} \dots \dots \dots (6)$$

Es común que la viga se divida en segmentos que tienen la misma longitud x , por lo cual la expresión (6) se puede escribir como:

$$\Delta x = \frac{x}{3} \left[3 - \frac{w_{i-1} + 2w_i}{w_{i-1} + w_i} + \frac{w_i + 2w_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \right]$$

2. Una vez calculada la magnitud de las cargas concentradas equivalentes, y determinados sus puntos de aplicación, se pueden determinar las reacciones.

3. El diagrama de fuerza cortante se puede construir empezando desde el extremo izquierdo de la viga, y desplazándose hacia la derecha. La fuerza cortante que se presenta en los extremos (Δx) sucesivos se determina sumando algebraicamente las cargas concentradas conforme éstas se van encontrando. Se consideran fuerzas positivas las que están dirigidas hacia arriba, y negativas las que están dirigidas hacia abajo.

4. La variación del momento flexionante es lineal en cada segmento (Δx), esto es porque la fuerza cortante es constante en dicho segmento. El cambio que experimenta la magnitud del momento flexionante entre los extremos de un segmento (Δx) es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante en ese segmento, es decir, la magnitud de la fuerza cortante por la longitud del segmento.

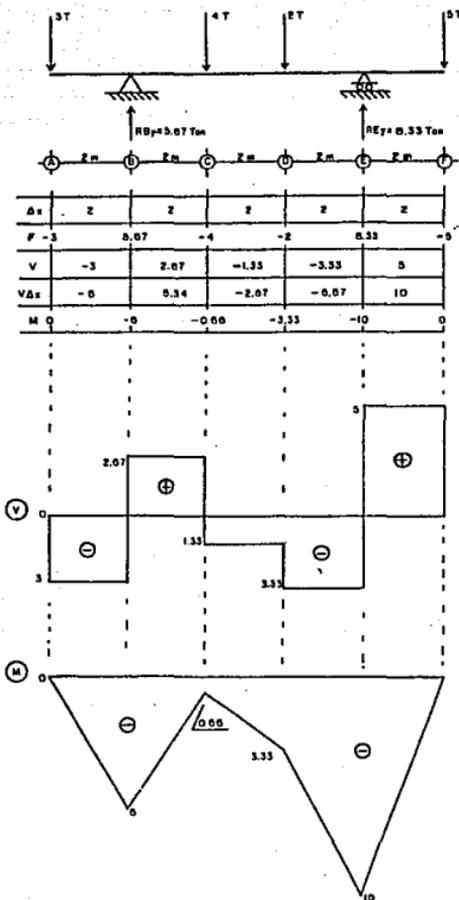
$$\Delta M = M_{i-1} - M_i = (V_i) (\Delta x_i)$$

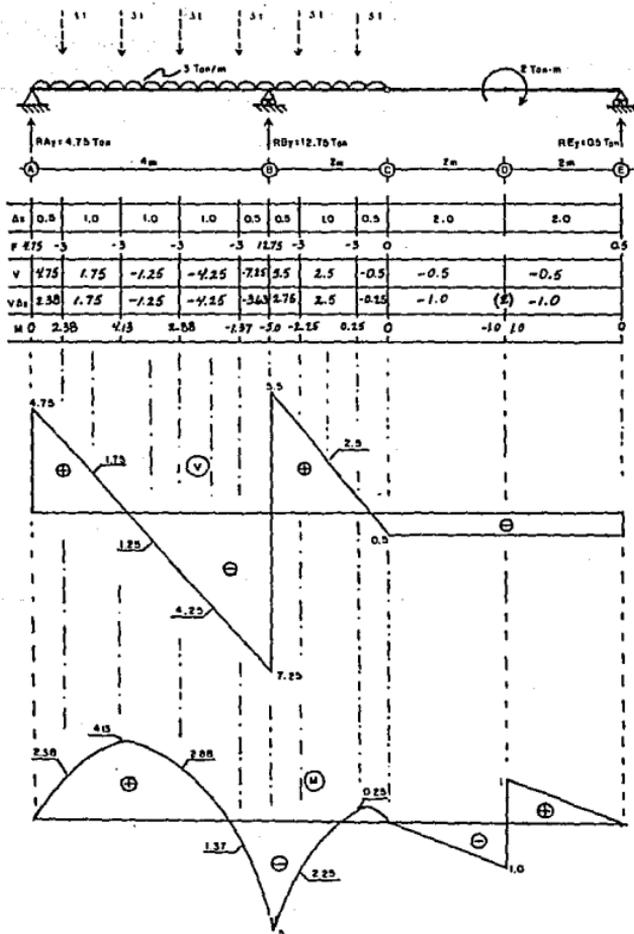
$$M_{i+1} = M_i + (V_i) (\Delta x_i)$$

Una vez que se grafican las ordenadas de los momentos flexionantes correspondientes a cada extremo de los segmentos, el diagrama se construye uniendo los puntos como líneas rectas.

Es conveniente la utilización de una tabla para calcular en forma sistemática los valores de Δx , V_i , y M_i .

A continuación, se resuelven dos ejemplos por el método de Newmark:





III.- ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS.

III.1 CONCEPTOS BASICOS DE MARCOS.

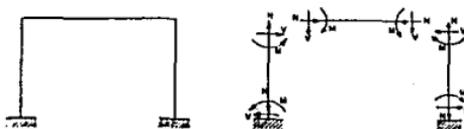
Un marco rígido puede definirse como una estructura, compuesta de un cierto número de elementos rectilíneos o barras unidas entre sí por medio de nudos, de los que algunos o todos son rígidos, esto es capaces de resistir a la vez fuerzas y momentos, a diferencia de los nudos articulados que no ofrecen resistencia al momento.

En el análisis de marcos rígidos, se idealiza que el eje central de cada barra coincide con la línea de unión de los centros de los nudos de los extremos de esta barra. El denominado centro de nudo es el punto de concurrencia de todos los ejes de las barras que inciden en el nudo.

Los extremos de todas las barras que concurren en el nudo, a parte de trasladarse deben rotar idénticas cantidades.

Para el caso de estabilidad y grado de indeterminación de los marcos se considera lo siguiente:

Un marco puede separarse en varios elementos (columnas y vigas)



En una sección de un elemento existen tres magnitudes desconocidas (N, M, y V). Si se conocen estas cantidades en una sección pueden determinarse los correspondientes a otra sección cualquiera.

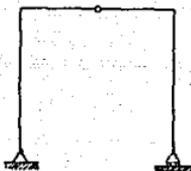
III.2 ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION ESTATICA EN MARCOS.

Si se denomina a = número total de elementos (barras), r = número de reacciones; j = número de nudos y c = número de ecuaciones adicionales, entonces el número total de ecuaciones independientes en un marco será $(3j + c)$ y el número total de incógnitas es $(3b + r)$.

Se puede establecer que:

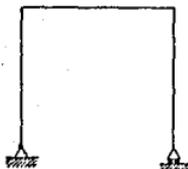
- a.- si $3b + r < 3j + c$ el marco es inestable.
- b.- si $3b + r = 3j + c$ el marco es estáticamente determinado siempre que sea a la vez estable.

c.- si $3b + r > 3j + c$ el marco es estáticamente indeterminado, siempre que sea estable.



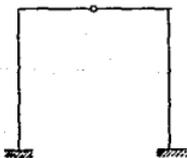
$$3(4) + 3 < 15 + 1$$

inestable



$$3(3) + 3 = 3(4)$$

estáticamente determinado



$$3(4) + 6 > 5(3) + 1$$

indeterminado de segundo grado.

III.3 OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE, FUERZA AXIAL Y TRAZO DE DIAGRAMAS DE M, V Y N.

Para la obtención de las ecuaciones de (M, V y N) es necesario determinar al principio un sentido de recorrido para el análisis del marco.

Para calcular las funciones de definición para cada elemento mecánico de la estructura, es necesario establecer un marco de referencia, el cual puede ser de dos formas:

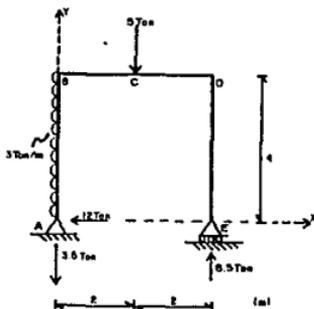
1. Sistema Global.- Si se considera un marco de referencia para toda la estructura.

2. Sistema Local.- Si se analiza cada tramo de la estructura, considerándolo como una viga, cuyas fuerzas reactivas son las fuerzas de interacción del tramo en estudio con los tramos adyacentes.

Para el trazo de diagramas de los elementos mecánicos en marcos, se toman los resultados obtenidos del sistema empleado (global o local), tomando como referencia el eje longitudinal de la estructura.

Ejemplos:

1.- (sistema global)



Comprobando la isostaticidad del marco:

$$3b + r = 3j + c \qquad 3(3) + 3 = 3(4) \qquad 12 = 12$$

Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad 3(4)(2) + 5(2) - REy(4) = 0 \qquad REy = 8.5 \text{ Ton}$$

$$\Sigma Fy = 0 \qquad -5 + 8.5 + R_Ay = 0 \qquad R_Ay = -3.5 \text{ Ton}$$

$$\Sigma Fx = 0 \qquad 3(4) - R_Ax = 0 \qquad R_Ax = 12 \text{ Ton}$$

Tomando como referencia el origen del sistema global en A.

Barra AB.

$$M_A^B = 12y - \frac{3y^2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ll} y = 0 & M_A = 0 \\ y = 4 & M_B = 24 \end{array} \right.$$

$$V_A^B = 12 - 3y \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} V_A = 12 \\ V_B = 0 \end{matrix}$$

$$N_A^B = 3.5 \text{ (tensión)}$$

Barra BC.

$$M_B^C = 12(4) - 12(2) - 3.5x \quad 24 - 3.5x \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_B = 24 \\ M_C = 17 \end{matrix}$$

$$V_B^C = -3.5$$

$$N_B^C = 0$$

Barra CD.

$$M_C^D = 24 - 3.5x - 5(x - 2) \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_C = 17 \\ M_D = 0 \end{matrix}$$

$$V_C^D = -3.5 - 5 = -8.5$$

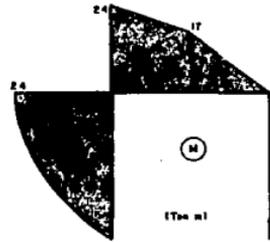
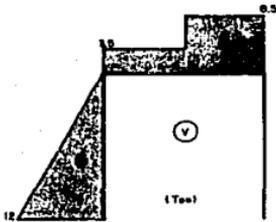
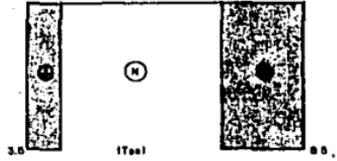
$$N_C^D = 0$$

Barra DE.

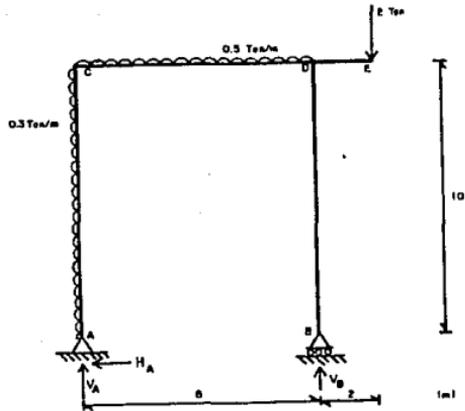
$$M_D^E = 12y - 12(y - 2) - 3.5(4) - 5(2) \quad \begin{cases} y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_D = 0 \\ M_E = 0 \end{matrix}$$

$$V_D^E = -8.5 - 8.5 = 0$$

$$N_D^E = 8.5 \text{ (compresión)}$$



2.) Sistema local.



Comprobando la isostaticidad del marco:

$$3b + r = 3j + c \qquad 3(4) + 3 = 3(5) \qquad 15 = 15$$

Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad 3(5) + 4(4) + 2(10) - V_B(8) = 0 \qquad V_B = 6.375 \text{ Ton}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -V_A - 4 - 2 + 6.375 = 0 \qquad V_A = 0.375 \text{ Ton}$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad -H_A + 3 = 0 \qquad H_A = 3 \text{ Ton}$$

Momento flexionante:

Tramo AC.

$$M = 3y - 0.3y(y/2) \qquad M = 3y - 0.15y^2$$

si $y = 0$ $M = 0$, si $y = 10$ $M = 15$

Tomando en cuenta el concepto dM/dx ó dM/dy (dependiendo del eje donde actúe M) igual a V; al igualar cualquiera de las dos ecuaciones a cero, la fuerza cortante (V) es nula a una distancia "x" o "y" (según sea el caso) en la cual se presenta un $M_{\text{máx}}$. esto es:

$$\frac{dM}{dy} = 0 \qquad 3 - 0.3y = 0 \qquad y = 10 \qquad M_{\text{máx}} = 15$$

Tramo CD.

$$M = 3(10) - 0.375x - 3(5) - 0.5x(x/2)$$

$$M = -15 - 0.375x - 0.25x^2$$

si $x = 0$ $M = 15$, si $x = 8$ $M = -4$

Tramo ED.

$$M = 2x \qquad \text{si } x = 0 \qquad M = 0 \text{ ,} \qquad \text{si } x = 2 \qquad M = 4$$

Fuerza cortante:

Tramo AC.

$$V = 3 - 0.3y \qquad \text{si } y = 0 \qquad V = 3 \text{ Ton} \text{ ,} \qquad \text{si } y = 10 \qquad V = 0$$

Tramo CD.

$$V = -0.375 - 0.5x \quad \text{si } x = 0 \quad V = -0.375 \text{ Ton}$$
$$\text{si } x = 8 \quad V = -4.375 \text{ Ton}$$

Tramo ED.
 $V = 2 \text{ ton}$

Tramo BD.
 $V = 0$

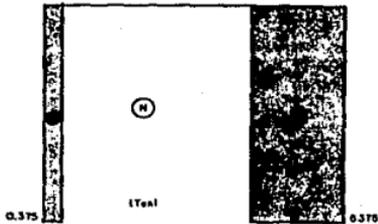
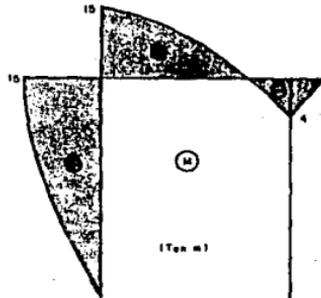
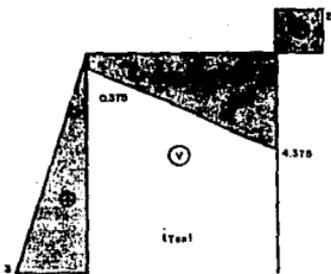
Fuerza normal.

Tramo AC.
 $N = 0.375 \text{ ton (tensión)}$

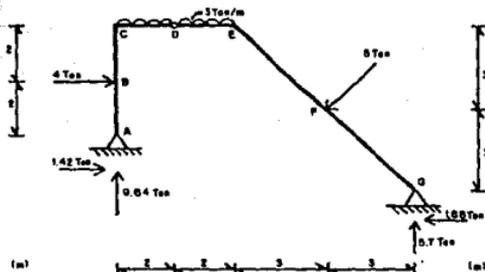
Tramo CD.
 $N = 3 - 3 = 0$

Tramo ED.
 $N = 0$

Tramo DB.
 $N = 6.375 \text{ ton (compresión)}$



3.) Sistema local



Comprobando la isostaticidad del marco:

$$3b + r = 3j + c \quad 3(4) + 4 = 3(5) + 1 \quad 16 = 16$$

Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_{Dizq} = 0, \quad -3(2)(1) - 4(2) - R_{Ax}(4) + R_{Ay}(2) = 0 \dots (1)$$

$$\sum M_{Dder} = 0$$

$$3(2)(1) + 5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(5) + \frac{1}{\sqrt{2}}(3) \right] + R_{Gx}(6) - R_{Gy}(8) = 0 \dots (2)$$

$$\sum F_x = 0, \quad R_{Ax} + 4 - 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - R_{Gx} = 0 \dots (3)$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_{Ay} - 3(4) - 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + R_{Gy} = 0 \dots (4)$$

Simplificando las ecs. 1, 2, 3 y 4 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R_{Ay} - 2R_{Ax} + 0 + 0 = 7$$

$$0 + 0 + R_{Gy} - 0.75 R_{Gx} = 4.30$$

$$0 + R_{Ax} + 0 - R_{Gx} = -0.45$$

$$R_{Ay} + 0 + R_{Gy} + 0 = 15.55$$

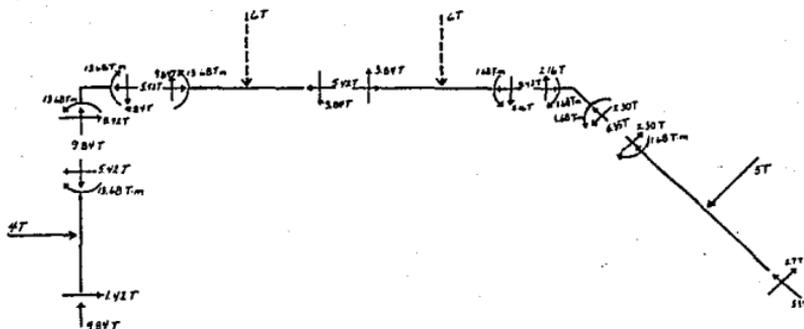
Resolviendo el sistema de ecs. anterior, los valores de las reacciones son:

$$R_{Ay} = 9.84 \text{ Ton}$$

$$R_{Gy} = 5.7 \text{ Ton}$$

$$R_{Ax} = 1.42 \text{ Ton}$$

$$R_{Gx} = 1.88 \text{ Ton}$$



Momento flexionante y Fuerza cortante:

Barra AB origen en A

$$M_A^B = -1.42x$$

$$\begin{cases} x = 0 & M = 0 \\ x = 2 & M = -2.84 \text{ Ton m} \end{cases}$$

$$V_A^B = -1.42 \text{ Ton}$$

Barra BC origen en B.

$$M_B^C = -1.42(2 + x) - 4x$$

$$\begin{cases} x = 0 & M = -2.84 \text{ Ton m} \\ x = 2 & M = -13.68 \text{ Ton m} \end{cases}$$

$$V_B^C = -1.42 - 4 \quad V = -5.42$$

Barra de CD origen en C.

$$M_C^D = -13.68 + 9.84x - \frac{3x^2}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 & M = -13.68 \text{ ton m} \\ x = 2 & M = 0 \end{cases}$$

$$V_D = 9.84 - 3x$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & V = 9.84 \text{ ton} \\ x = 2 & V = 3.84 \text{ ton} \end{array} \right.$$

Barra DE origen en D.

$$M_D = 3.84x - \frac{3x^2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & M = 0 \\ x = 2 & M = 1.68 \text{ ton m} \end{array} \right.$$

$$V_D = 3.84 - 3x$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & V = 3.84 \text{ ton} \\ x = 2 & V = -2.16 \text{ ton} \end{array} \right.$$

Barra EF origen en E.

$$M_E = 1.68 + 2.3x$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & M = 1.68 \text{ ton m} \\ x = 4.24 & M = 11.43 \text{ ton m} \end{array} \right.$$

$$V_E = 2.3 \text{ ton}$$

Barra FG origen en F.

$$M_F = 1.68 + 2.3(4.24 + x) - 5x$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & M = 11.43 \text{ ton m} \\ x = 4.24 & M = 0 \end{array} \right.$$

$$V_F = 2.3 - 5$$

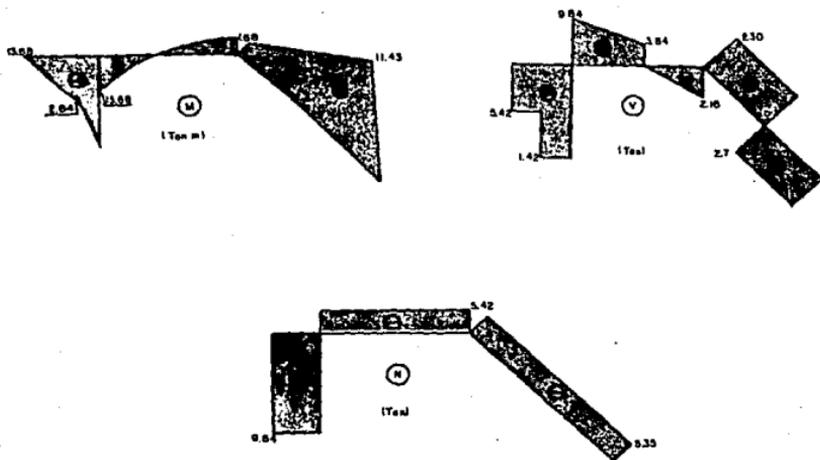
$$V_F = V_G = 2.70 \text{ ton}$$

Fuerza Axial.

Tramo AC $N = 9.84 \text{ ton (compresión)}$

Tramo CE $N = 1.42 + 4 = 5.42 \text{ ton (compresión)}$

Tramo EG $N = 5.7 \cos 45^\circ + 1.88 \cos 45^\circ = 5.35 \text{ ton (compresión)}$



III.4 OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA NORMAL, Y TRAZO DE DIAGRAMAS DE M, V Y N EN ARCOS.

Al igual que los marcos vistos en este capítulo, los arcos simples son elementos estructurales, cuyo eje longitudinal es una línea continua. Asimismo los arcos se encuentran ligados al sistema tierra por tres vínculos no concurrentes ni paralelos.

Para el trazo de diagramas de elementos mecánicos en arcos, conocidas las ecuaciones para M, V y N (análisis descrito en el punto anterior), se toma como referencia el eje longitudinal de la estructura.

A continuación se presentan dos ejemplos, en los cuales se obtienen las ecuaciones para M, V y N y se trazan los diagramas de elementos mecánicos respectivos:

Cálculo de reacciones:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$V_c(10) + 20(5) = 0$$

$$V_c = 10 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_A - 20 + 10 = 0$$

$$V_A = 10 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$H_A = H_c \text{ ----- (a)}$$

$$-H_A(5) + 10(5) - 10(2.5) = 0$$

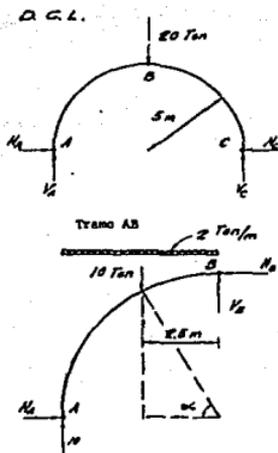
$$H_A = 25/5 = 5 \text{ ton}$$

$$\text{Por } \Sigma F_x = 0$$

$$5 - H_b = 0$$

$$H_b = 5 \text{ ton}$$

$$\text{de (a) } H_c = 5 \text{ ton}$$



Momento flexionante.

$$M = 10(5 - 5\cos\alpha) - 3(\text{sena}) - 2(5 - 5\cos\alpha) [(5 - 5\cos\alpha)/2]$$

$$M = 50 - 50\cos\alpha - 25\text{sena} - (5 - 5\cos\alpha)^2$$

$$M = 50 - 50\cos\alpha - 25\text{sena} - 25 + 50\cos\alpha - 25\cos^2\alpha$$

$$M = 25(1 - \text{sena} - \cos^2\alpha)$$

$\alpha = 0^\circ$	$M = 0$
$\alpha = 90^\circ$	$M = 0$
$\alpha = 180^\circ$	$M = 0$

Momento máximo y mínimo:

$$\frac{dM}{da} = 25 (-\cos a + 2\operatorname{sen} a \cos a) = 0$$

$$25\cos a(2\operatorname{sen} a - 1) = 0$$

$$2\operatorname{sen} a - 1 = 0 \quad \operatorname{sen} a = 0.5 \quad a = \operatorname{ang} \operatorname{sen} 0.5 \quad a = 30^\circ, 150^\circ$$

$$M_{30^\circ} = 25[1 - 0.5(0.866)^2] \quad M_{30^\circ} = -6.25 \text{ ton m}$$

$$M_{150^\circ} = -6.25 \text{ ton m}$$

Fuerza cortante.

$$V = 10\operatorname{sen} a \cos a - 10(1 - \cos a)(\operatorname{sen} a)$$

$$V = 5\cos a (2 - \operatorname{sen} a - 1) \quad V = 10\cos a \operatorname{sen} a - 5\cos a$$

$$\text{si } a = 0 \quad V = -5\text{ton}, \quad a = 90^\circ \quad V = 0, \quad a = 180^\circ \quad V = 5\text{ton}$$

$$\frac{dV}{da} = 10\cos^2 a - 10\operatorname{sen}^2 a + 5\operatorname{sen} a = 0$$

$$-(20\operatorname{sen}^2 a - 5\operatorname{sen} a - 10) = 0 \quad 4\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen} a - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} a = (1 + 5.7)/8 \quad \operatorname{sen} a = 0.84 \quad a = \operatorname{ang} \operatorname{sen} 0.8$$

$$a = 57^\circ, 123^\circ \quad V_{57^\circ} = 5\cos 57^\circ [2(0.84) - 1]$$

$$V_{57^\circ} = 1.85\text{ton} \quad V_{123^\circ} = -1.85 \text{ ton}$$

$$\text{Si } V = 0$$

$$10\cos a \operatorname{sen} a - 5\cos a = 0 \quad 5\cos a (2\operatorname{sen} a - 1) = 0$$

$$5\cos a = 0, \quad \cos a = 0, \quad 0 = 90^\circ \text{ (articulación)}$$

$$2\operatorname{sen} a - 1 = 0, \quad \operatorname{sen} a = 1/2 \quad a = 30^\circ, 150^\circ \text{ puntos de } M_{\text{máx}}$$

Fuerza normal.

$$N = 10\cos a \operatorname{sen} a - 10(1 - \cos a)(\cos a)$$

$$N = 5\operatorname{sen} a + 10\cos^2 a \quad \text{si } a = 0 \quad N = 10\text{ton}, \quad \text{si } a = 90^\circ \quad N = 5\text{ton}$$

$$\text{si } a = 180^\circ \quad N = 10 \text{ ton}$$

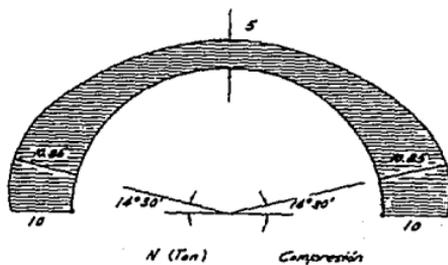
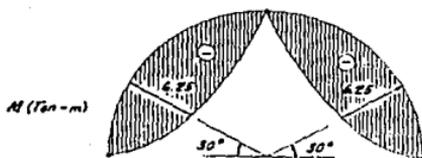
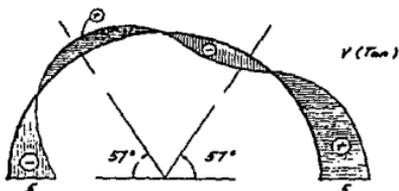
ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$\frac{dN}{da} = 5 \cos \alpha - 20 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad 5 \cos \alpha (1 - 4 \operatorname{sen} \alpha) = 0 \dots (1)$$

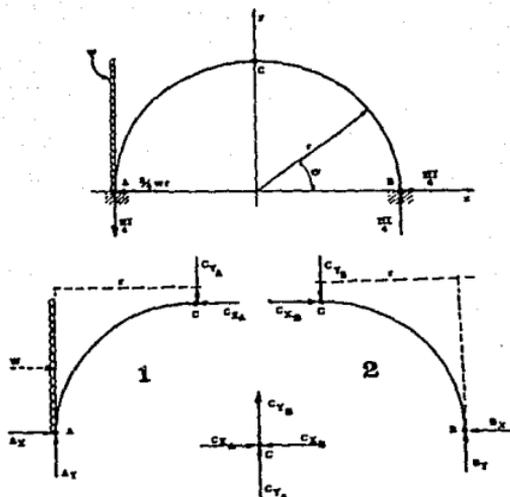
La igualdad (1) se satisface para las dos siguientes condiciones:

1. para $\cos \alpha = 0$ $\alpha = 90^\circ$ $N_{90^\circ} = 5 \text{ ton}$
2. para $1 - 4 \operatorname{sen} \alpha = 0$ $\operatorname{sen} \alpha = 1/4$ $\alpha = 14^\circ 30', 165^\circ 30'$

$$N_{14^\circ 30'} = 10.85 \text{ ton}, \quad N_{165^\circ 30'} = 10.85 \text{ ton}$$



2.)



Cálculo de las reacciones:

Por $\Sigma M_A = 0$ (global)	$wr(r/2) - 2r R_{By} = 0$	$R_{By} = wr/4$
$\Sigma F_y = 0$ (global)	$wr/4 + R_{Ay} = 0$	$R_{Ay} = -wr/4$
$\Sigma M_C = 0$ (diag. 2)	$wr/4(r) - R_{Bx}r = 0$	$R_{Bx} = wr/4$
$\Sigma F_x = 0$ (global)	$R_{Ax} + wr - wr/4 = 0$	$R_{Ax} = 3wr/4$

Cálculo del momento flexionante:

$180^\circ > \theta > 90^\circ$

$M = 3wry/4 - wr/4 (r + x) - wy^2 \qquad \theta = 180^\circ \qquad M = 0$

$M = 3wr^2/4 \text{ sen}\theta - wr^2/4 (1 + \cos\theta) - (wr^2 \text{ sen}^2\theta)/2$

$\theta = 90^\circ \qquad M = 0$

$M = wr^2/4 [3\text{sen}\theta - \cos\theta - 2\text{sen}^2\theta - 1]$

$$90^\circ > \theta > 0^\circ$$

$$M = wr/4 (r - x) - wry/4$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$M = 0$$

$$M = wr^2/4 [1 - \cos\theta - \text{sen}\theta]$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$M = 0$$

Cálculo de la fuerza cortante:

Tomando en cuenta la resultante a la izquierda de la sección (ver diagrama 1)

$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

$$\overline{R_1} = (wy - 3wr/4)i + (wr/4)j$$

Asimismo la resultante a la izquierda de la sección (ver diagrama 2)

$$90^\circ > \theta > 0^\circ$$

$$\overline{R_2} = (wr/4)i - (wr/4)j$$

$$\text{Vector en la dirección cortante: } \overline{e_v} = [\cos\theta, \text{sen}\theta]$$

$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

$$V = \overline{R_1} \cdot \overline{e_v} = (wy - 3wr/4)\cos\theta - (wr/4)\text{sen}\theta$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$V = 3wr/4$$

$$V = wr/4 [4\text{sen}\theta \cos\theta - 3\cos\theta - \text{sen}\theta]$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$V = -wr/4$$

$$V = wr/4 [\cos\theta - \text{sen}\theta]$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$V = wr/4$$

Cálculo de las fuerzas normales:

$$\text{Vector en la dirección normal: } \overline{e_n} = [-\text{sen}\theta, \cos\theta]$$

$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

$$N = \overline{R_1} \cdot \overline{e_n} = (wy - 3wr/4)(-\text{sen}\theta) - 2wr/4 \cos\theta$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$N = wr/4$$

$$N = -wr/4 [4\text{sen}^2\theta - 3\text{sen}\theta + \cos\theta]$$

$$\theta = 90^\circ$$

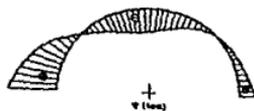
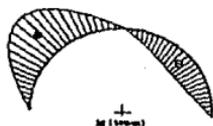
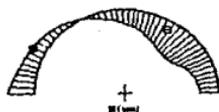
$$N = -wr/4$$

$$90^\circ > \theta > 0^\circ$$

$$N = \overline{R_2} \cdot \overline{e_n} = -wr/4 \sin\theta - wr/4 \cos\theta \quad \theta = 90^\circ \quad N = -wr/4$$

$$N = -wr/4 [\sin\theta + \cos\theta] \quad \theta = 0^\circ \quad N = -wr/4$$

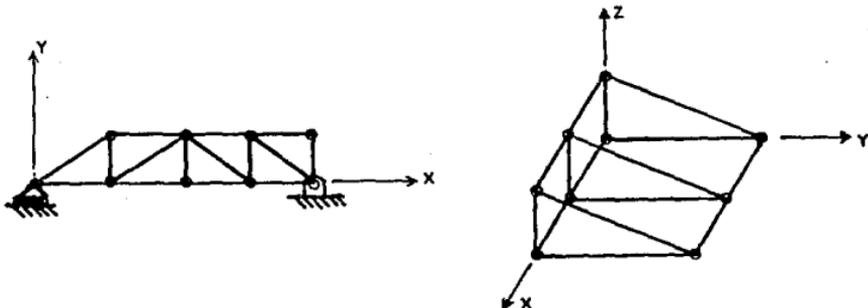
θ	0°	45°	90°	135°	180°
M	0	$-.103 wr^2$	0	$.207 wr^2$	0
V	$.25 wr$	0	$-.25wr$	$-.149wr$	$.75wr$
N	$-.25wr$	$-.353wr$	$-.25wr$	$.207wr$	$.25wr$



IV.- SOLUCION DE ARMADURAS.

IV.1 COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE LAS ARMADURAS (COMO VIGAS DE ALMA ABIERTA).

Las armaduras son estructuras compuestas por un conjunto de barras que se unen entre sí mediante articulaciones (planas y espaciales).



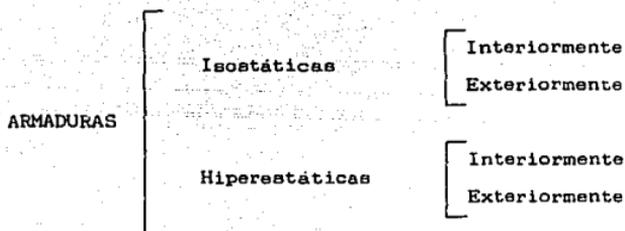
El análisis de armaduras consiste en la determinación de las fuerzas internas en sus barras, así como la determinación de las reacciones en los apoyos.

Las suposiciones básicas consideradas en el análisis de armaduras son las siguientes:

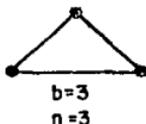
- 1.- Las barras están articuladas en sus extremos o puntos de unión.
- 2.- En armaduras planas, el plano de carga coincide con el plano de la armadura (de lo contrario se provocarían momentos).
- 3.- Las cargas se aplican exclusivamente en los nudos (puntos de unión) de la armadura.
- 4.- Las cargas están sometidas a carga axial (tensión o compresión).
- 5.- Se desprecia el peso propio de las barras.

IV.2 CONDICIONES GEOMETRICAS Y DE ESTABILIDAD EN ARMADURAS.

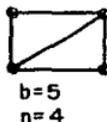
A continuación, se presenta un cuadro con relación a la estabilidad e indeterminación estática en armaduras.



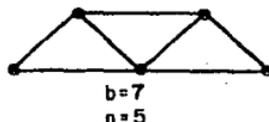
Para conocer las condiciones geométricas y de inestabilidad en las armaduras, partiremos del concepto de la armadura más simple, la cual se construye mediante tres barras articuladas en sus extremos y que forman un triángulo.



Armadura simple



Derivaciones de armadura simple

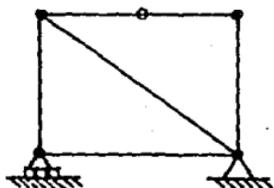


Esto es, en una armadura el número total de incógnitas será el número de barras más el número de elementos de reacción; donde cada nudo tiene dos ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$).

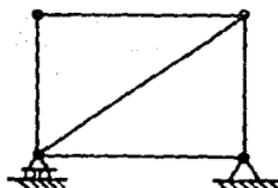
De lo anterior, se puede establecer el siguiente criterio para determinar la estabilidad y grado de indeterminación de una armadura; donde b = número de barras, r = reacciones y n = número de nudos.

- a.- si $b + r < 2n$, el sistema es inestable.
- b.- si $b + r = 2n$, el sistema es estáticamente determinado, siempre y cuando sea estable.
- c.- si $b + r > 2n$, el sistema es estáticamente indeterminado, siempre y cuando sea estable.

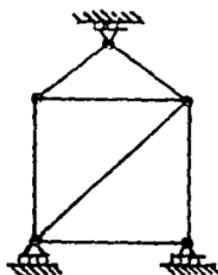
Ejemplos:



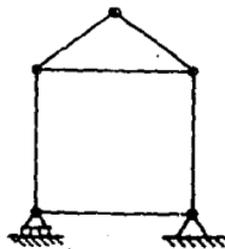
$6 + 3 < 10$
Inestable.



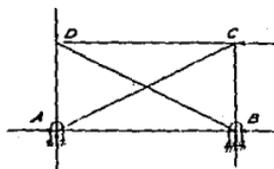
$5 + 3 = 8$
Estáticamente deter_
minado y estable.



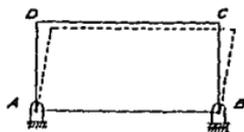
$7 + 3 = 10$
Inestable no hay
equilibrio horizontal.



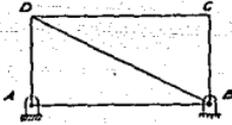
$6 + 3 < 10$
Inestable.



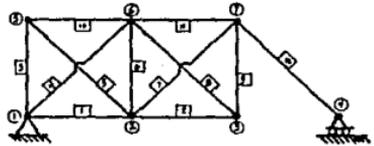
$6 + 3 > 8$
Estable e indeterminada
de primer grado.



$4 + 3 < 8$
Inestable



$5 + 3 < 9$
Hiperestática exteriormente
isostática interiormente.

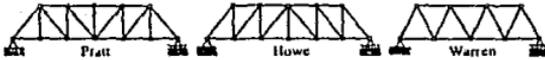


$12 + 3 > 14$
Inestable.

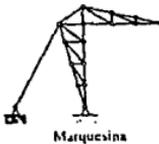
ARMADURAS QUE SE UTILIZAN EN INGENIERIA CIVIL.



Cerchas típicas



Armaduras típicas para puentes.



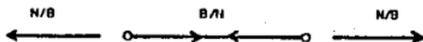
Otros tipos de armaduras.

Con relación a la convención de fuerzas internas en una armadura, ésta puede ser de dos formas:

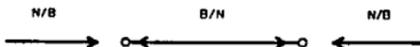
- 1.- Acción del nudo sobre la barra (N/B).
- 2.- Acción de la barra sobre el nudo (B/N).

Ejemplo:

TENSION.



COMPRESION.



Para el análisis de las armaduras por los métodos que se describen a continuación, se usará la convención de fuerzas internas de la acción de la barra sobre el nudo.

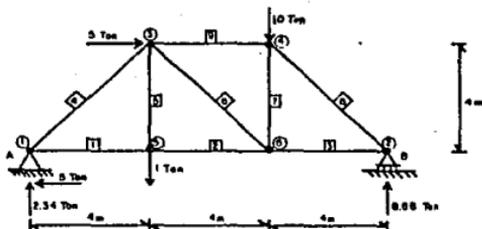
IV.3 METODO DE LOS NUDOS PARA LA OBTENCION DE FUERZAS EN BARRAS.

El método de los nudos, consiste en analizar cada uno de estos en forma aislada; en dicho nudo actúan tanto las fuerzas externas (cargas y/o reacciones) como las fuerzas internas en las barras.

Con lo anterior, se establece que todas las fuerzas concurren en un punto nodal y por lo tanto se tendrá un sistema de fuerzas coplanar concurrente. Para la solución del sistema descrito, se cuenta con dos ecuaciones de la estática que son: $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

Ejemplos:

1) Obtener las fuerzas internas en las barras de la armadura siguiente:



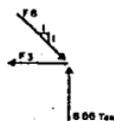
Comprobando la isostaticidad de la armadura:

$$b + r = 2n \quad 9 + 3 = 2(6) \quad 12 = 12$$

Obtención de las reacciones externas:

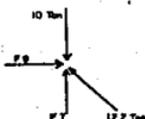
$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 & \quad 1(4) - V_B(12) + 10(8) + 5(4) = 0 & \quad V_B = 8.66 \text{ ton} \\ \Sigma F_y = 0 & \quad 8.66 - 1 - 10 + V_A = 0 & \quad V_A = 2.34 \text{ ton} \\ \Sigma F_x = 0 & \quad -H_A + 5 = 0 & \quad H_A = 5 \text{ ton} \end{aligned}$$

Nudo 2:



$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 & \\ 8.66 - F_8 \cos 45^\circ = 0 & \\ 0.7071 F_8 = 8.66 & \\ F_8 = 12.2 \text{ ton (compresión)} & \\ \Sigma F_x = 0 & \\ -F_3 + 12.2 \cos 45^\circ = 0 & \\ F_3 = 8.66 \text{ ton (tensión)} & \end{aligned}$$

Nudo 4:



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F9 - 12.2 \cos 45^\circ = 0$$

$$F9 = 12.2 (0.7071)$$

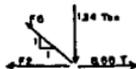
$$F9 = 8.66 \text{ ton (Compresión)}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-10 + F7 + 12.2 \cos 45^\circ = 0$$

$$F7 = 1.34 \text{ ton (compresión)}$$

Nudo 6:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$F6 \cos 45^\circ - 1.34 = 0$$

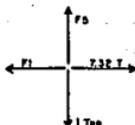
$$F6 = 1.88 \text{ ton (tensión)}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$8.66 - F2 - 1.88 \cos 45^\circ = 0$$

$$F2 = 7.32 \text{ ton (tensión)}$$

Nudo 5:



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F1 + 7.32 = 0$$

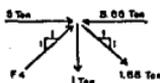
$$F1 = 7.32 \text{ ton (tensión)}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F5 - 1 = 0$$

$$F5 = 1 \text{ ton. (tensión)}$$

Nudo 3:



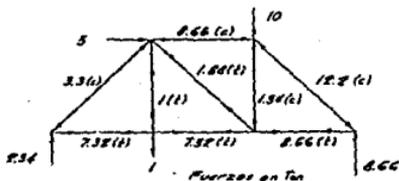
$$\Sigma F_y = 0$$

$$F4 \cos 45^\circ - 1 - 1.88 \cos 45^\circ = 0$$

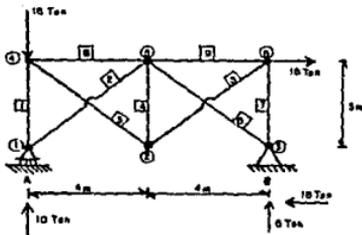
$$F4 = 1 / \cos 45^\circ + 1.88$$

$$F4 = 3.3 \text{ ton (compresión)}$$

Resumen:



2.) Determine todas las fuerzas internas, en la siguiente armadura, por el método de los nudos.



Las barras 2 y 3 se cruzan pero no forman nudo, lo mismo sucede con las barras 5 y 6.

Comprobandola isostaticidad de la armadura:

$$2n = b + r \quad 2(9) = 9 + 3 \quad 12 = 12$$

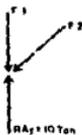
Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma M_A = 0 \quad 16(3) - R_{By}(6) = 0 \quad R_{By} = 48/6 \quad R_{By} = 8 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{Ay} - 16 + 6 = 0 \quad R_{Ay} = 10 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad -R_{Bx} + 16 = 0 \quad R_{Bx} = 16 \text{ ton}$$

Nudo 1.



$$\Sigma F_y = 0$$

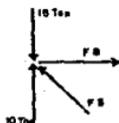
$$R_{Ay} - F1 = 0$$

$$10 - F1 = 0$$

$$F1 = 10 \text{ ton (compresión)}$$

Como F_1 y R_{Ay} no tienen compo...
nente en "x" $F_2 = 0$

Nudo 4.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_8 - F_3(4/5) = 0$$

$$F_8 = (4/5)F_3 \dots \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

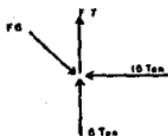
$$-16 + 10 + F_3(3/5) = 0$$

$$F_3 = 10 \text{ ton (compresión)}$$

sustituyendo en (1)

$$F_8 = 0.8(10) = 8 \text{ ton (tensión)}$$

Nudo 3.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-16 + F_6(4/5) = 0$$

$$F_6 = 20 \text{ ton (compresión)}$$

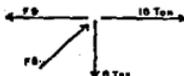
$$\Sigma F_y = 0$$

$$6 + F_7 - 20(3/5) = 0$$

$$F_7 = -6 + 12$$

$$F_7 = 6 \text{ ton (tensión)}$$

Nudo 6.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_9 + 16 + F_5(4/5) = 0$$

$$F_9 = 1 + F_5(4/5) \dots \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_5(0.6) - 6 = 0$$

$$F_5 = 10 \text{ ton (compresión)}$$

sustituyendo en (1)

$$F_9 = 16 + 10(0.6)$$

$$F_9 = 24 \text{ ton (tensión)}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$20(0.6) - F_4 = 0$$

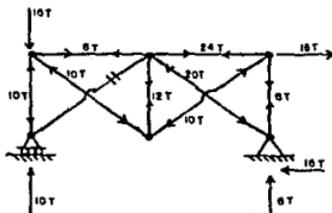
$$F_4 = 20(0.6)$$

$$F_4 = 12 \text{ ton (tensión)}$$

Nudo 5.



Resumen:



IV.4 METODO DE LAS SECCIONES PARA OBTENER FUERZAS EN LAS BARRAS.

El método de las secciones, consiste en trazar secciones hipotéticas en las armaduras, aislando el diagrama de cuerpo libre de la parte que se encuentra en cualquiera de los lados de dicha sección y analizando su equilibrio se pueden encontrar las fuerzas en algunas de las barras.

En el lugar donde se trace la sección hipotética deberá evitarse lo siguiente:

- a.- Que no existan mas de tres barras en el corte.
- b.- Que las tres barras en su totalidad no sean paralelas ni concurrentes.

Este método es más práctico, al sumarse momentos con respecto a un punto, que se localice en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, de tal forma que la tercera fuerza desconocida se resuelve en forma directa.

En el caso de éste ejemplo, haciendo suma de momentos con respecto al nudo 3, se eliminan dos fuerzas desconocidas F9 y F6, lo cual da una solución directa para F2.

$$\Sigma M_3 = 0 \quad 2.34(4) + 5(4) - F_2 = 0$$

$$F_2 = 7.34 \text{ ton (tensión)}$$

Asimismo sumando momentos con respecto al nudo 6, se obtiene una solución directa para F9.

$$\Sigma M_6 = 0 \quad 5(4) - F_9(4) - 1(4) - 2.34(8) = 0$$

$$F_9 = 8.68 \text{ ton (compresión)}$$

Como F2 y F9 no tienen fuerzas componentes verticales, sumando fuerzas en la dirección "y" da por resultado directamente F6, esto es:

$$\Sigma F_y = 0 \quad 2.34 - 1 + F_6 \text{ sen } 45^\circ = 0$$

$$F_6 = 1.34 / \text{sen } 45^\circ \quad F_6 = 1.9 \text{ ton (tensión)}$$

Para obtener la fuerza F7 y F3 de manera práctica por éste método, es necesario considerar la sección H - H, la cuál aísla el nudo F, tal como se indica en el diagrama de cuerpo libre de ésta sección.

$$\Sigma F_y = 0$$

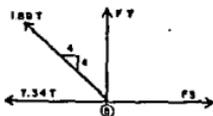
$$1.89 \text{ sen } 45^\circ + F_7 = 0$$

$$F_7 = 1.34 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

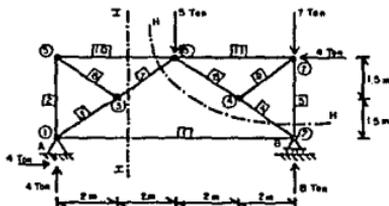
$$-7.34 - 1.89 \text{ cos } 45^\circ + F_3 = 0$$

$$F_3 = 8.68 \text{ ton (tensión)}$$



Por consiguiente, para obtener el valor de las fuerzas internas en las barras faltantes, basta con determinar las secciones respectivas que se adecuen a las ecuaciones de equilibrio de los sistemas de fuerzas que se presenten y tomando en cuenta las recomendaciones descritas al inicio de éste subcapítulo.

2.) Resolver el siguiente problema por el método de las secciones.



Comprobando la isostaticidad de la armadura:

$$b = 11 \qquad r = 3 \qquad 2n = b + r$$

$$2(7) = 11 + 3 \qquad 14 = 14$$

Cálculo de las reacciones externas A_x , A_y y B_y .

$$\Sigma M_A = 0 \qquad 5(4) + 7(8) - 4(3) - R_{By}(8) = 0$$

$$R_{By} = (20 + 56 - 12) / 8 \qquad R_{By} = 8.0 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 5 - 7 + 8 = 0 \qquad R_{Ay} = 4.0 \text{ ton}$$

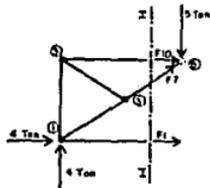
$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{Ax} - 4 = 0 \qquad R_{Ax} = 4.0 \text{ ton}$$

Tomando en cuenta la sección I - I, y haciendo suma de momentos con respecto al nudo 6, se obtiene F_1 esto es:

$$\Sigma M_6 = 0 \qquad 4(4) - 4(3) - F_1(3) = 0 \qquad F_1 = 1.33 \text{ ton (T)}$$

Haciendo suma de momentos con respecto al nudo 1 se obtiene F_{10}

$$\Sigma M_1 = 0 \qquad F_{10}(3) = 0 \qquad F_{10} = 0$$

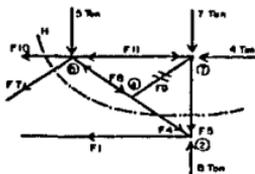


Al principio de éste método (secciones), se hicieron dos recomendaciones para trazar las secciones hipotéticas en la armadura (1. Que no existan mas de tres barras en el corte. 2. Que las tres barras en su totalidad no sean paralelas ni concurrentes.) Sin embargo en el caso de ésta armadura, la sección H - H cruza cuatro barras en su corte dicha sección se realizó, debido a la facilidad de cálculo que se presenta al obtener las fuerzas internas en las barras, tal como se indica en el análisis siguiente:

$$\Sigma M_2 = 0 \qquad -4(3) + F_{11}(3) = 0 \qquad F_{11} = 4 \text{ ton (C)}$$

$$\Sigma M_5 = 0 \qquad 7(4) - F_5(4) = 0 \qquad F_5 = 7 \text{ ton (C)}$$

En el nudo 7 por $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ resulta que $F_9 = 0$



Como se puede observar en éste ejemplo, el método de las secciones, mediante cortes hipotéticos bien escogidos, nos ayuda a encontrar directamente el valor de las fuerzas internas en las barras de interés o barras que simplifiquen el análisis, reduciéndose el cálculo de las demás barras a un sistema de fuerzas concurrentes (Método de los nudos) y/o paralelo; no obstante se pueden realizar cuántos cortes sean necesarios y encontrar las fuerzas en cada una de las barras.

No

Existe

Página

V.- CABLES.

V.1 CABLES FLEXIBLES E INEXTENSIBLES.

Los cables en ingeniería, para su estudio se consideran flexibles e inextensibles debido a lo siguiente:

a.- Flexible por que no es capaz de resistir la flexión y por consiguiente la fuerza de tensión que actúa en el cable siempre es tangente al mismo en los puntos localizados a lo largo de su longitud.

b.- Inextensible por que no se alargan, ya que el cable tiene la misma longitud antes y después de que se ha aplicado la carga, lo cual está basado en la configuración final del cable; esto es, conocida la geometría de un segmento de cable, se le considera como a un cuerpo rígido.

De lo anterior se establece que: El momento flexionante y la fuerza cortante en cualquier sección transversal de un cable son nulos; siendo la fuerza normal positiva (tensión) el único elemento mecánico que puede transmitir.

Los cables en ingeniería se utilizan en:

- 1.- Para soportar y transportar cargas de un miembro a otro.
- 2.- Puentes colgantes y poleas de troles.
- 3.- Como principal elemento que soporta la carga en una estructura.
- 4.- Líneas de transmisión y tirantes para antenas de radio.
- 5.- Grúas de retenidas.

En estos casos el peso del cable usualmente se desprecia.

En estos casos el peso del cable puede ser importante y se incluye en el análisis.

Los cables se clasifican según la condición de carga que soportan:

- a.- Cargas verticales concentradas.
- b.- Carga uniformemente repartida, según un eje horizontal.
- c.- Carga uniformemente repartida, según el eje del cable.

Antes de presentar el estudio particular de cada cable, que se expondrá en los puntos posteriores de este capítulo (V.2, V.3 y V.4), es necesario establecer la ecuación diferencial de un cable independientemente del tipo de carga.

Para la obtención de la ecuación diferencial de un cable, se tomará la porción de un cable sujeta a las fuerzas que se transmiten a través de los planos de corte (fuerzas de tensión) y la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la porción considerada. (Ver figura 29)



Figura 29

De la figura 29 se tiene que: $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \dots \dots (1)$

Las fuerzas T, H y Q mantienen el equilibrio de la porción del cable considerada como cuerpo rígido.

Tomando en cuenta el quinto principio de la estática (Un cuerpo deformable está en equilibrio, si y sólo si toda porción de él considerada rígida se encuentra en tal estado.), el sistema de fuerzas que obra sobre dicha porción está en equilibrio por que sus coordenadas vectoriales son nulas; esto es: (Ver fig. 30)

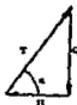


Figura 30

De la figura 2 se tiene: $\tan \alpha = \frac{Q}{H} \dots \dots (2)$

Substituyendo la ecuación (1) en (2) se obtiene la ecuación diferencial de todo cable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}$$

De la adición gráfica de los vectores T, H y Q se tiene:

$$T = (Q^2 + H^2)^{1/2}$$

V.2 OBTENCION DE LA ECUACION Y LA TENSION DE UN CABLE PARABOLICO.

Cuando la carga está uniformemente repartida por una unidad de longitud, según un eje horizontal, considerando como peso propio una carga equivalente a la indicada o no tomándola en cuenta. (Ver fig. 31)

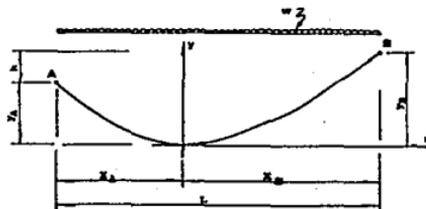


Figura 31

Partiendo de la ecuación diferencial de un cable y tomando en cuenta la condición de carga se tiene que:

$$Q = Wx \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} x$$

Integrando se tiene que:

$$y = \frac{Wx^2}{2H} + c$$

Para valuar la constante, con relación al sistema de referencia en la figura:

$$\text{si } x = 0 \quad y = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad c = 0$$

Quedando la ecuación diferencial del cable parabólico de la siguiente forma:

$$y = \frac{Wx^2}{2H}$$

Para un cable con carga parabólica, conociendo la posición de sus apoyos y las coordenadas de cualquier punto de su eje longitudinal (o una coordenada cualquiera de su punto inferior), se podrán obtener sus reacciones, el valor de la tensión en cualquier punto y su geometría general.

Con relación al párrafo anterior, se tienen dos casos distintos, los cuales se analizan de la siguiente manera:

1.- Si se conoce la posición de los apoyos y la de un punto intermedio cualquiera, el análisis se realiza como si fuera un arco de tres articulaciones (el cual es isostático). Ver fig. 32

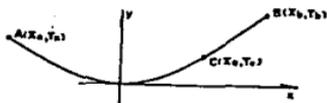


Figura 32

Realizando los diagramas de cuerpo libre de los tramos AC y BC del cable, se plantea y se resuelve un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas (A_x , A_y , B_x , B_y , C_x y C_y).

2.- Cuando se conoce la posición de los apoyos y una coordenada de relación entre cualquiera de éstos y el punto inferior del cable. Ver figura 33.

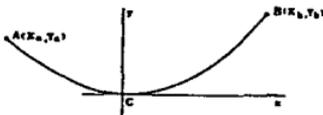


Figura 33

Al no existir cargas con componentes horizontales, la componente horizontal, tanto de las reacciones como de una tensión cualquiera del cable, permanece constante esto es: $H = cte$; que corresponde al de la tensión en el punto inferior del cable, ya que la pendiente de la tangente en dicho punto es nula.

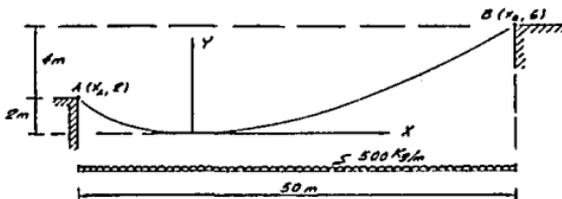
Del planteamiento de las condiciones analíticas de equilibrio, obtenemos seis ecuaciones, siendo una de ellas $H = cte$ la cual queda independiente en el sistema, permitiendo calcular la dimensión faltante en la posición del punto inferior del cable.

Cualquier otro conjunto de datos que se proporcione debe ser equivalente para que el cable tenga solución.

Al obtenerse los resultados de las reacciones, de la fuerza horizontal en el punto inferior del cable y su geometría general; la tensión de cualquier punto se calcula:

$$T = (H^2 + (wx)^2)^{1/2}$$

Ejemplo: Obtener el valor de las tensiones máxima y mínima.



Ecuación del cable:

$$y = \frac{wx^2}{H} \dots \dots \dots (1)$$

$$x_b - x_a = 50 \dots \dots \dots (2)$$

sustituyendo en (1) las coordenadas de A:

$$2 = \frac{500 x_a^2}{2 H}$$

$$H = 125 x_a^2$$

sustituyendo el valor de (2):

$$H = 125 (x_b - 50)^2 \dots \dots \dots (3)$$

sustituyendo en (1) las coordenadas de B:

$$6 = \frac{500 x_b^2}{2 H}$$

$$H = \frac{500 x_b^2}{12} \dots \dots \dots (4)$$

de (3) y (4) se tiene:

$$125 (x_b - 50)^2 = 500 x_b^2 / 12$$

$$8x_b^2 - 1200 x_b + 30000 = 0$$

resolviendo:

$$x_b = 31.7 \text{ m}$$

$$\text{de (2) } x_a = 31.7 - 50$$

$$x_a = - 18.3 \text{ m}$$

$$\text{de (3): } H = 125 (31.7 - 50)^2$$

$$H = 42000 \text{ kg}$$

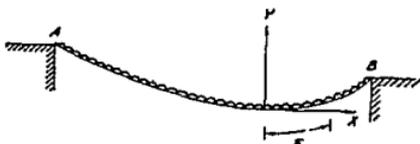
tensión mínima.

$$T = \left[(4200)^2 + [(500) (317)]^2 \right]^{1/2}$$

$$T_{\text{máx}} = 45000 \text{ kg}$$

V.3 CABLE CATENARIA.

Considerando un cable sujeto a una carga uniformemente distribuida a lo largo de su longitud (Véase fig. 34) y la ecuación diferencial de un cable (ver capítulo V.1) se obtienen las siguientes expresiones:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H} \dots \dots \dots (1)$$

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$ds = [1 + (dy/dx)^2 dx]^1/2$$

$$ds = [1 + (ws/H)^2 dx]^1/2$$

$$dx = ds / [1 + (ws/H)^2]^1/2$$

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (ws/H)^2]^{1/2}} + C$$

$$x = H/w \operatorname{senh}^{-1} ws/H + C_1$$

Condiciones de frontera:

$$\text{si: } s = 0, \quad x = 0, \quad C_1 = 0$$

Sustituyendo nos queda:

$$x = H/w \operatorname{senh}^{-1} ws/H \dots \dots \dots (2)$$

$$wx/H = \operatorname{sen} h^{-1} ws/H$$

$$ws/H = \operatorname{sen} h wx/H$$

$$s = H/w \operatorname{sen} h wx/H \dots \dots \dots (3)$$

sustituyendo (3) en (1)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} h \frac{w x}{H} \dots \dots \dots (4)$$

integrando (4)

$$y = H/w \cos wx/H + C_2$$

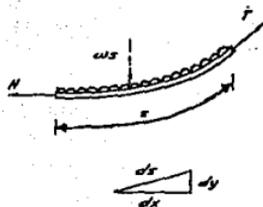
condiciones de frontera: si $x = 0, \quad y = 0, \quad \text{por lo tanto}$

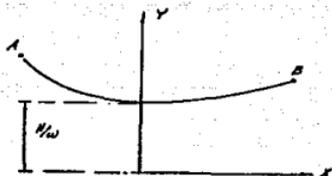
$$0 = H/w + C_2 \quad C_2 = -H/w$$

$$\text{es decir: } y = H/w (\cos h wx/H - 1) \dots \dots \dots (5)$$

La ecuación (5) se denomina "ecuación de la catenaria": la cual se puede simplificar llevando a cabo una traslación de ejes, quedando la expresión de la siguiente forma:

$$y = H/w \cos h wx/H \dots \dots \dots (6)$$





puesto que: $T = (H^2 + w^2)^{1/2}$ $T = [H^2 + (ws)^2]^{1/2}$

sustituyendo el valor de (5) nos queda:

$$T = [H^2 + (H \operatorname{sen} h wx/H)^2]^{1/2}$$

de acuerdo con las propiedades de las funciones hiperbólicas:

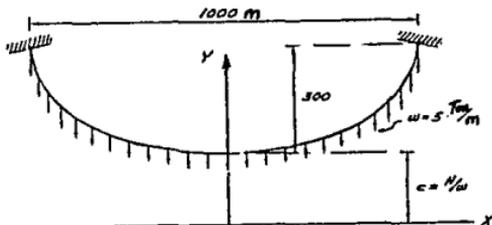
$$T = H [(\cos h wx/H)]^{1/2}$$

$$T = H \cos h wx/H$$

considerando la expresión (6)

$$H \cos h wx/H = wy \quad \text{esto es} \quad T = wy$$

Ejemplo: Obtener la longitud máxima del cable y la tensión máxima en este.



$$s = c \operatorname{sen} h x/c \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$y = c \operatorname{cos} h x/c \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$T = wy \quad \dots \dots \dots (3)$$

si: $x = 500 \text{ m}$, $y = c + 300$ sustituyendo en (2) se tiene:

$$c + 300 = c \operatorname{cos} h 500/c$$

$$c = \frac{c + 300}{\cos h \ 500/c}$$

Para obtener el valor de c, se realizaran aproximaciones sucesivas, de acuerdo con la siguiente tabla:

c	c + 300	500/c	cos h 500/c	$c = \frac{c + 300}{\cos h \ 500/c}$
500	800	1.0	1.543	5' 1 5
550	850	0.91	1.444	5 8 5
400	700	1.25	1.898	3 7 0
450	750	1.11	1.680	4 4 8

Para $c = 450$ m $L = 2$ Smáx

de (1) $L = 2 (450) \text{ sen } h \ 500/450$

$L = 900 \text{ sen } h (1.11)$ $L = 900 (1.352)$ $L = 1210$ m

de la ec. (3) $T_{\text{máx}} = w_{\text{máx}}$ $T_{\text{máx}} = 5(750)$

$T_{\text{máx}} = 3750$ m

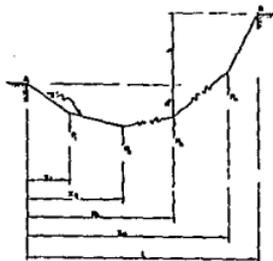
V.4 OBTENCION DE LA ECUACION DE CABLES SOPORTANDO CARGAS CONCEN- TRADAS.

Partiendo de la ecuación diferencial para todo cable, vista en el punto V.1; y tomando en cuenta (para este subcapítulo) que la carga está formada exclusivamente por fuerzas concentradas sin tomar en cuenta el peso propio del cable, se tiene para esta condición de carga la siguiente expresión:

$$Q = \text{cte} = k$$

de donde $dy/dx = k/H$

En la siguiente figura, las únicas cargas que actúan sobre el cable quedan representadas por fuerzas concentradas; para resolver un cable de este tipo, es necesario conocer la posición de tres de sus puntos: sus dos extremos y cualquier punto intermedio.



Una secuencia de cálculo conveniente para resolver el cable mostrado es la siguiente:

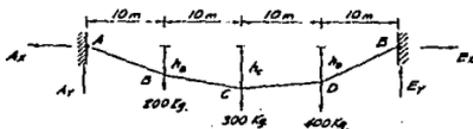
Analizando al cable "S" se tiene:

Datos: L, H, y_k, x_i, P_i para $i = 1, 2, \dots, k, \dots, n$

El aumento o disminución de datos hace que el cable sea hipostático o hiperestático, respectivamente.

- Incógnitas:
- a) Reacciones en los puntos A y B (tensiones en las secciones extremas)
 - b) Tensiones existentes en todos los tramos del cable.
 - c) Geometría del cable.

Ejemplo: Del cable mostrado en la siguiente figura, sujeto a cargas concentradas, si $h_0 = 6m$, encontrar los valores de: $h_b, h_c, h_d, A_x, A_y, E_x,$ y E_y .



Por equilibrio del conjunto tenemos:

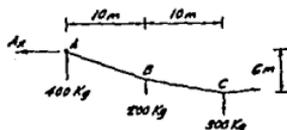
$$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = E_x \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad A_y(40) - 200(30) - 300(20) - 400(10) = 0$$

$$A_y = (6000 + 6000 + 4000) / 40 \quad A_y = 16000 / 40 = 400 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad E_y - 200 - 300 - 400 + 400 = 0 \quad E_y = 500 \text{ Kg}$$

Tramo ABC



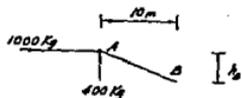
$$\Sigma M_c = 0$$

$$400(20) - A_x(6) - 200(10) = 0$$

$$A_x = 1000 \text{ Kg}$$

de (1) $E_x = 1000 \text{ Kg}$

Tramo AB



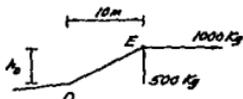
$$\Sigma M_B = 0$$

$$400(10) - 1000(h_B) = 0$$

$$h_B = 4000 / 1000$$

$$h_B = 4.0 \text{ m}$$

Tramo DE



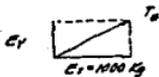
$$\Sigma M_D = 0$$

$$1000(h_D) + 5000(10) = 0$$

$$h_D = 5000 / 1000$$

$$h_D = 5.0 \text{ m}$$

$$T_x = [(E_x)^2 + (E_y)^2]^{1/2}$$



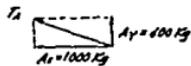
$$T_C = [250000 + 1000000]^{1/2}$$

$$T_C = 1118 \text{ Kg}$$

$$T_A = [(Ax)^2 + (Ay)^2]^{1/2}$$

$$T_A = [1000000 + 160000]^{1/2}$$

$$T_A = 1077 \text{ Kg}$$



VI.- CONCLUSIONES.

El trabajo de tesis presentado, para sustentar éste examen profesional de Ingeniero Civil, tiene por objeto el de ayudar a los alumnos que cursan la asignatura de estructuras isostáticas; en el aprendizaje de los temas incluidos en el programa vigente de ésta materia.

Las aplicaciones de la estática en cualquier carrera de ingeniería, tiene un lugar muy importante, ya que su estudio proporciona los conocimientos y la formación que el ingeniero necesita para la solución de numerosos problemas.

Independientemente de que en la actualidad, se pueden resolver estructuras estáticamente determinadas con la utilización de la computadora, por medio de paquetes o a través del enfoque matricial; para tener éxito en la solución de éstas técnicas modernas, se requiere de un entendimiento amplio de la teoría que ha servido de base para la concepción y solución de éste tipo de estructuras.

La estática, como parte de la mecánica, contiene los conocimientos formativos y trata la solución de problemas relativos a partículas, cuerpos y conjunto de éstos, sujetos a un sistema de fuerzas en equilibrio.

Este trabajo de tesis presenta un estudio enfocado a el análisis de los sistemas de barras isostáticos, los cuales son de gran importancia, debido a que existen en estructuras de diversas construcciones así como en elementos de máquinas; aunado a que todos los análisis de un sistema hiperestático están formados por sistemas isostáticos auxiliares.

El análisis de los sistemas de barras isostáticos presentados en este trabajo, comprende la determinación de las fuerzas reactivas de los elementos mecánicos: Momento flexionante, Fuerza cortante y Fuerza normal; así como la representación de sus correspondientes diagramas.

El conocimiento y manejo de los elementos mecánicos, es trascendente en los cursos posteriores de estructuras; ya que al conocer las fuerzas reactivas (elementos mecánicos) en un elemento estructural debido a las distintas sollicitaciones de carga a que es sometido, dichos resultados en combinación con otros procesos de análisis (Mecánica de Materiales) se utilizan para diseñar elementos estructurales en cuanto a concreto y/o acero u otro tipo de materiales.

BIBLIOGRAFIA.

- Antecedentes de Mecánica.
Representaciones y Servicios de Ingeniería.
- Introducción a la Mecánica de Sólidos.
Egor P. Popov. Edit. Limusa.
- Análisis Estructural.
Fred W. Beaufait. Edit. Prentice/Hall Internacional.
- Teoría Elemental de las Estructuras.
Yuang Yiu Sie Edit. Prentice/Hall
- Mecánica de Materiales.
Timoshenko-Gere. Edit. Hispano Americana.
- Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática.
Berr y Johnston. Edit. Mc Graw Hill.
- Aplicaciones de la Estática.
Antonio Murrieta Necochea. Edit. Limusa.
- Apuntes de Estructuras Isostáticas.
Luis Herrejón de la Torre M. Depto. Estructuras UNAM.
- Estática para Ingenieros.
Hibeller. Edit Limusa.
- Vectorial Mechanics.
Brand, Wiley and Sons.
- Engineering Mechanics
Irving H Shamer. Edit Prentice Hall.