



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

REFLEXION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN  
DISPOSITIVOS CONDUCTORES EN MULTICAPAS  
(SUPERREDES)

**TESIS PROFESIONAL**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
(AREA ELECTRICA Y ELECTRONICA)

P R E S E N T A :  
RAUL ALFONSO VAZQUEZ NAVA

DIRECTORES DE TESIS: DR. W. LUIS MOCHAN BACKAL  
DR. MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT

MEXICO, D. F.

1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## RESUMEN

En la presente tesis desarrollamos un método, basado en una matriz de transferencia, para calcular las propiedades ópticas de los dispositivos en multicapas conocidos como superredes. Realizamos un estudio de las superredes metálicas tomando en cuenta todos los modos colectivos de propagación en el interior de estos dispositivos. Utilizando un modelo hidrodinámico, para describir al gas de electrones, calculamos y discutimos la estructura de la reflectancia para varios tipos de superredes. Los efectos de la no localidad se observan al comparar los resultados obtenidos, utilizando el modelo hidrodinámico, con los que se obtienen mediante un modelo local.

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO 1 MATEMATICA DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO</b>	
1.1 Ondas planas	16
1.2 Ondas planas monocromáticas	19
1.3 Ecuación de onda	23
<b>CAPITULO 2 ECUACIONES DE MAXWELL</b>	
2.1 Campo eléctrico y campo de inducción magnética	26
2.2 Ley de Gauss (eléctrica)	27
2.3 Ley de Gauss (magnética)	28
2.4 Ley de Faraday	28
2.5 ley de Ampere-Maxwell	30
2.6 Ecuación de onda electromagnética	32

### CAPITULO 3 FUNCION DE RESPUESTA DIELECTRICA

3.1	Desplazamiento eléctrico	35
3.2	Ecuaciones de Maxwell en materiales	37
3.3	Funciones de respuesta	39
3.4	Modelo de Drude	41
3.5	Modelo hidrodinámico	44
3.6	Propagación de ondas en materiales	50

### CAPITULO 4 MEDIOS INHOMOGENEOS

4.1	Condiciones a la frontera del electromagnetismo	57
4.2	Impedancia de superficie	64
4.3	Teorema de Poynting y energía de los modos longitudinales	66
4.4	Condiciones adicionales a la frontera CAF's	72

### CAPITULO 5 ONDAS DE SUPERFICIE Y DE PELICULAS

5.1	Plasmones de superficie	76
5.2	Modos de una sola superficie	77
5.3	Modos de una película simétrica	82
5.4	Modos de superficie y polos de la reflectancia	85
5.5	Ondas guiadas transversales	87
5.6	Ondas guiadas longitudinales	90

## CAPITULO 6 SUPERREDES

6.1	Matriz de transferencia	92
6.2	Matriz de transferencia para una película aislante	93
6.3	Matriz de transferencia para una película metálica no local	95
6.4	Matriz de transferencia para una superred aislante-metal no local	99
6.5	Matriz de transferencia para una superred metal local-metal no local	101
6.6	Matriz de transferencia para una superred metal no local-metal no local	102
6.7	Teorema de Bloch	102
6.8	Relación de dispersión	104

## CAPITULO 7 REFLECTANCIA

7.1	Película	108
7.2	Superred local	110
7.3	Superred local-no local	111
7.4	Superred no local	111
7.5	Densidad de flujo de energía transmitida al interior de una superred no local	112

<b>CAPITULO 8 RESULTADOS</b>	
<b>8.1 Reflectancia de una interface metal vacio</b>	<b>115</b>
<b>8.2 Reflectancia de una pelicula metálica</b>	<b>116</b>
<b>8.3 Reflectancia de una superred aislante-metal no local</b>	<b>118</b>
<b>8.4 Reflectancia de una superred metal local-metal no local</b>	<b>121</b>
<b>8.5 Reflectancia de una superred metal no local-metal no local</b>	<b>124</b>
<b>CAPITULO 9 CONCLUSIONES</b>	<b>128</b>
<b>FIGURAS</b>	<b>132</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>149</b>

## INTRODUCCION

Desde la invención del transistor en los laboratorios Bell, hace casi cincuenta años, hemos sido testigos de un desarrollo espectacular en la tecnología del silicio que ha dado como resultado un incremento de la densidad de dispositivos en los circuitos integrados y el desarrollo de funciones más complejas. Casi tan revolucionaria como la invención del transistor en 1947, fue la invención del laser en la década de los setentas. Así, junto con la revolución electrónica, hemos visto otra revolución tecnológica, la llamada revolución fotónica, cuya característica principal es el uso del rayo laser para transmitir información. Los láseres utilizados en los sistemas actuales de telecomunicación vía fibra óptica, no están hechos con silicio pero si de compuestos semiconductores. Estos compuestos generalmente están formados con elementos del grupo III de la tabla periódica, tales como Ga, Al y In, junto con elementos del grupo V, como As, P y Sb.

En los últimos años una tendencia que ha ganado importancia es el uso de la teoría cuántica de los sólidos como guía de la ingeniería de materiales útiles para los campos de la electrónica y la óptica. Esta corriente comenzó con una serie de estudios, realizados por parte de

los físicos de estado sólido, sobre las propiedades físicas y la utilidad de semiconductores que no existían. Los físicos fueron lo suficientemente realistas para concentrar sus ideas en semiconductores que en principio podían existir, aunque no se encontraran en la naturaleza. Específicamente ellos se enfocaron al estudio de superredes semiconductoras de estado sólido, es decir, materiales formados por películas delgadas de dos semiconductores con propiedades electrónicas diferentes, colocadas en forma alternada.

Los dispositivos en multicapas son sistemas formados por dos o más películas (o capas) delgadas de diferentes materiales en cada celda unitaria. En este tipo de sistemas, las películas se organizan en forma periódica y al conjunto de capas que forman un periodo se le denomina celda unitaria. La celda unitaria de estos dispositivos establece la periodicidad, impuesta sobre la periodicidad atómica, que determina las propiedades físicas de estos dispositivos. Si durante la fabricación de cada película los planos atómicos se acomodan en forma coherente, el material se denomina superred; si dicho orden adicional no está presente se utiliza el término de heteroestructura o multicapa. El término de película y capa lo utilizaremos en forma indistinta a través de toda la tesis.

Las propiedades electrónicas de cualquier sólido (aislante, semiconductor o metal) dependen de su estructura cristalina<sup>1,3</sup> y como las superredes son, en esencia, un cristal artificial con una periodicidad impuesta sobre la estructura cristalina intrínseca, sus propiedades electrónicas comparadas con las de los materiales que las componen son algo distintas.<sup>2</sup> Más adelante se comentarán algunas de estas diferencias.

El proceso de crecimiento de capas semiconductoras cristalinas donde una oblea determina la orientación del crecimiento de las capas es llamado epitaxial. Si el cristal resultante consiste de películas delgadas de diferentes semiconductores en cada capa, el proceso es llamado heteroepitaxial. Entre las técnicas heteroepitaxiales, ampliamente usadas para la fabricación de dispositivos en multicapas, están el crecimiento epitaxial en fase líquida, la deposición química de vapor, y el crecimiento epitaxial con haz molecular. En el crecimiento epitaxial en fase líquida, las capas son crecidas por el enfriamiento de una solución metálica, saturada con los componentes necesarios para el crecimiento de cada película, mientras ésta se encuentra en contacto con la superficie de la oblea. En la deposición química de vapor las capas son crecidas mediante la reacción de elementos o compuestos en estado gaseoso con la superficie de la oblea. Estos dos procesos han sido importantes para el crecimiento de heteroestructuras semiconductoras pero la elaboración de estructuras más avanzadas requiere de técnicas de fabricación, tales como el crecimiento epitaxial con haz molecular bajo condiciones controladas de alto vacío y la capacidad para elaborar un amplio rango de perfiles de composición y dopado. En el crecimiento epitaxial con haz molecular las capas son crecidas a través de la reacción de uno o más haces de átomos y moléculas de los elementos constitutivos con la superficie de la oblea mantenida bajo condiciones de alto vacío. La limpieza del ambiente combinada con una velocidad de crecimiento lenta (el haz deposita materia a una rapidez cercana a una capa de átomos por segundo) y el control individual de cada uno de los haces, permiten la fabricación en forma precisa, a nivel atómico, de heteroestructuras

semiconductoras. Este proceso de crecimiento fue desarrollado por Alfred Y Cho y John R Arthur Jr.<sup>4</sup>, en los laboratorios Bell en la década de los sesentas.

Mientras las propiedades electrónicas de los átomos están determinadas por la naturaleza, las propiedades electrónicas de las superredes se pueden diseñar. Los valores de los niveles de energía disponibles para los electrones se pueden confeccionar mediante la elección apropiada de los semiconductores y el ancho de las capas. A este proceso se le ha denominado "ingeniería de brechas electrónicas".

Para entender el funcionamiento de estos nuevos dispositivos semiconductoras recordemos algunos de los conceptos de la física cuántica.<sup>1,5</sup> Un átomo aislado cuenta con un número de estados de energía disponibles para sus electrones. Cuando N átomos se unen para formar un sólido, cada estado atómico da origen a N estados electrónicos del sólido siendo N del orden de  $10^{23}$ . Así los estados de energía son tan numerosos y se encuentran tan cerca el uno del otro, que se considera que cada estado de energía del átomo individual en un sólido se degenera en una banda de energía. El ancho de estas bandas de energía es proporcional al inverso de la periodicidad atómica de la estructura cristalina del sólido. Distintas bandas de energía pueden estar separadas la una de la otra, por una región prohibida o brecha en la que no existen estados electrónicos permitidos.

Los electrones de los átomos de un sólido van llenando los estados electrónicos de menor energía de las diferentes bandas, de tal forma que los estados de menor energía quedarán completamente llenos.

En un aislante, el número de electrones dentro del cristal es apenas el suficiente para llenar completamente los estados

electrónicos de cierto número de bandas de energía. En este tipo de cristal, entre las bandas llenas y las bandas que quedan vacías se encuentran una región prohibida muy ancha.

En un semiconductor, como en el caso de una aislante, el número de electrones es suficiente para llenar completamente las bandas de menor energía. Pero en este caso, la brecha que separa la última banda completamente llena de la primer banda vacía, es angosta y, por lo tanto, se tiene una probabilidad estadística apreciable de que los electrones puedan excitarse térmicamente y pasen de una banda a la otra.

Finalmente, en un metal el número de electrones no es suficiente para llenar la banda de energía más elevada, quedando por lo tanto parcialmente llena. Los electrones en esta banda pueden comportarse como electrones libres.

En una superred, debido a que su periodicidad se superpone a la periodicidad atómica del cristal, las bandas de energía del sólido se dividen en una serie de minibandas y el ancho de cada minibanda guarda una relación inversa con el periodo de la superred. De allí que, el ancho de cada minibanda se pueda confeccionar variando el periodo de la superred; el ancho se incrementa con el decremento del ancho de las capas del semiconductor.

Cuando un campo eléctrico se aplica a un sólido, las bandas de energía sufren una inclinación y los electrones en dicha banda son acelerados. Debido a la inclinación que sufre la banda de energía, los electrones, también, son proyectados hacia el límite superior de energía de dicha banda donde son reflejados cayendo en un estado de energía menor a partir del cual son nuevamente acelerados. Es así como

realizan una serie de oscilaciones conocidas como oscilaciones de Bloch. Si la banda es muy ancha los electrones perderan energía antes de alcanzar el límite superior y, por lo tanto, las oscilaciones de Bloch resultarán indetectables.

Debido a que el ancho de las minibandas en una superredes es menor que el ancho de las bandas de energía en los sólidos, estas proveen el ambiente ideal para la detección de las oscilaciones de Bloch, las cuales son indetectables en cualquier sólido que se encuentra en la naturaleza.<sup>3</sup>

Las superredes semiconductoras estudiadas se fabrican, por lo regular, con dos semiconductores de diferente brecha. En la práctica el semiconductor con la brecha más pequeña puede ser un material como arsenuro de Galio (GaAs) y el otro, con la brecha más grande, el arsenuro de galio aluminio (GaAlAs).

Algunas de las propiedades de las superredes son muy exóticas. Ejemplo de ello es el paradójico decremento en la corriente eléctrica con el incremento del voltaje y el tiempo de vida de los electrones libres por periodos de horas en lugar de nanosegundos. La predicción de tales propiedades antes de que las superredes existieran es un indicador del progreso en la física del estado sólido.<sup>2</sup>

En la actualidad las esperanzas de los físicos se han hecho realidad, es decir, las superredes se pueden fabricar con gran precisión y las propiedades de las superredes han confirmado las predicciones de los investigadores.

La primera superred semiconductora propuesta en 1970 por Leo Esaki y Ray Tsu del centro de investigación Thomas J. Watson de IBM fue fabricada unos años más tarde, por ellos mismos, utilizando el

proceso de crecimiento epitaxial de haz molecular.

Esta superred exhibe una resistencia negativa, por lo que se puede utilizar como un elemento activo en un generador de ondas electromagnéticas. A diferencia de otros dispositivos de resistencia negativa, las superredes pueden reaccionar en forma muy rápida a los cambios de voltaje. Por ello, bien podrían generar radiación de microondas con longitud de onda menor que un milímetro.<sup>70</sup>

Hasta 1978, la movilidad de los portadores de carga en heteroestructuras era extremadamente baja. Fue entonces que Ray Dingle, Art Gossard y Horst Störmer,<sup>10</sup> trabajando en los laboratorios Bell, introdujeron el dopado en este tipo de estructuras, logrando una mayor movilidad de los portadores. Como resultado de dopar las capas de arsenuro de galio aluminio de la superred semiconductora se obtuvo una mayor movilidad de los portadores comparada con la movilidad de dichos portadores en un material uniformemente dopado. Esta alta movilidad de los portadores surge de una separación espacial entre los portadores de carga y los átomos de impureza, de los cuales ellos se originan.<sup>8,11</sup> En este caso, nuevamente el experimento confirmó la predicción. Hoy parece que en laboratorios de E.U., Europa y Japon se están logrando nuevos records en la movilidad, a través de mejores diseños y técnicas de crecimiento de cristales. Una característica de la modulación del dopado de la superred es el gran incremento de la conductividad en dirección paralela, a las capas de la estructura, comparada con la conductividad perpendicular. Esta característica condujo, en muchas universidades y laboratorios industriales, entre los que destacan los laboratorios Bell, Fujitsu, Thomson CSF, IBM, North American Rockwell, Hewlett Packard, TRW, Honeywell, Universidad

de Illinois y Cornell, a la fabricación de transistores de efecto de campo, con modulación del dopado.

Estos transistores de efecto de campo se caracterizan por una alta velocidad de conmutación y bajo consumo de potencia. A 77°K en los laboratorios Bell<sup>11</sup> se ha registrado un tiempo de conmutación de 11 ps y un consumo de potencia de 1.36 mW/compuerta. Tales transistores probablemente son la base de los circuitos digitales, de arsenuro de galio, de alta velocidad.

Hace algún tiempo, en los laboratorios Fujitsu de Japón, se mostró una memoria dinámica de acceso aleatorio de 1 Kbit con un tiempo de acceso menor de un nanosegundo y en los laboratorios Bell, Shin Shem Pei y sus colaboradores han desarrollado un circuito divisor de frecuencia de 10 GHz.<sup>20</sup>

Los resultados anteriores fueron obtenidos en dispositivos canal n. Störmer y Gossard, obtuvieron un incremento significativo de la movilidad de los huecos en superredes con modulación de dopado tipo p. Esto abrió la posibilidad de la existencia de lógica complementaria basada en transistores de canal n y p, de baja potencia con una alta transconductancia.<sup>20</sup>

Otro tipo de superred semiconductor que ha tomado importancia por sus propiedades es la superred formada por un arreglo periódico de capas dopadas n y p, separadas por capas intrínsecas del mismo semiconductor sin dopar. Como estas capas son denominadas i, tal superred es un cristal con una celda unitaria n-i-p-i.

Klaus Ploog del Instituto Max Planck para física del estado sólido de Stuttgart, fue el primer investigador que realizó el crecimiento de una superred como esta, utilizó una oblea de arsenuro

de galio, átomos de silicio como donadores, y los átomos de berilio como aceptores. El método de crecimiento fue el epitaxial con haz molecular y las propiedades ópticas fueron probadas en un experimento hecho por H. Künzel, Ploog, J. Knecht y Gottfried. La absorción de luz por una superred dopada genera portadores de carga con tiempos de vida de más de 1,000 segundos.<sup>2</sup> Las superredes dopadas están siendo examinadas debido a que pueden ser útiles para la fabricación de detectores ópticos, moduladores de luz y sistemas electrónicos que procesan rayos laser.<sup>2,70</sup>

Las superredes de estado sólido son más que un juguete para los físicos de estado sólido. En mi opinión las superredes semiconductoras, y particularmente las superredes dopadas, representan una clase nueva de semiconductores que tendrá un impacto, no sólo en la física del estado sólido, sino también, en el futuro de la tecnología electrónica.

Así también, se han empezado a fabricar superredes metálicas, es decir, estructuras donde los elementos constitutivos no son semiconductores sino metales. Cabe señalar que en el laboratorio de Ensenada del Instituto de Física, se contará próximamente con un equipo de crecimiento epitaxial para la fabricación de superredes metálicas. De esta clase de superredes se han realizado algunos estudios sobre aquellas, cuyos elementos constitutivos tienen propiedades magnéticas.

Las películas magnéticas delgadas que se magnetizan preferentemente en una dirección perpendicular al plano de la película se dice que presentan una anisotropía magnética perpendicular.<sup>12</sup> Un ejemplo popular de ello son las películas CoCr cuya anisotropía tiene

su origen en su estructura cristalina. Por la posible aplicación que este tipo de películas podrían tener en relación con la grabación magnética de alta densidad de información, son actualmente de gran interés.

Nuevamente, en este caso las estructuras en multicapas presentan la ventaja de que la anisotropía magnética se incrementa por la existencia de anisotropía en las interfaces.<sup>12</sup> Esto fue demostrado recientemente por Carcia, Meinhardt, y Suma<sup>13</sup> por lo que a multicapas respecta y por Draaisma, den Broeder, y de Jonge<sup>14</sup> en lo que a superredes fabricadas por deposición de vapor se refiere. En ambos casos, la dirección preferente de magnetización, para una capa de Co con un espesor menor de 8 Å, llega a ser perpendicular al plano de la película.

Otra propiedad interesante, de este tipo de estructuras, es el efecto magnético-óptico Kerr,<sup>15</sup> el cual es de interés para la lectura óptica de información almacenada magnéticamente en discos borrables de audio y video.<sup>16</sup> Para estas aplicaciones se requiere de un valor grande de la rotación Kerr, el cual se puede obtener con las superredes debido al fenómeno de resonancia cerca de la frecuencia característica de los metales que la forman, denominada frecuencia de plasma, que tiende a incrementar el valor de la rotación Kerr.<sup>15</sup> Otras de las aplicaciones del efecto Kerr es la observación de dominios microscópicos<sup>17</sup> y el estudio de estructuras de una película.<sup>18</sup>

Las mediciones magnético-ópticas son también una importante herramienta en el estudio de las propiedades magnéticas y la estructura electrónica de los materiales magnéticos.

Las mediciones de reflexión óptica se pueden utilizar para

determinar los elementos diagonales del tensor dieléctrico. Sin embargo para varios compuestos se tiene la desventaja de que el espectro de reflexión no muestra una estructura fina y, como consecuencia, la información obtenida de éste, referente a la estructura electrónica, no es muy detallada. En contraste con lo anterior, el efecto Kerr es una técnica diferente, que muestra una estructura más fina, en particular, de los compuestos de las tierras raras y los metales de transición.<sup>19-22</sup>

Por lo anterior, hoy en día existe un gran interés en las propiedades eléctricas y ópticas de las estructuras metálicas en multicapas. Puesto que el entendimiento del espectro de excitación de ondas de superficie y de bulto en el interior de tales estructuras es esencial en la predicción del funcionamiento de dispositivos incorporando éstas, resulta útil un tratamiento teórico completo.

Cuando la luz incide con una componente del campo eléctrico normal a la superficie de un conductor, esta componente del campo empuja a los electrones de conducción lejos de la superficie, creando con ello un exceso de carga. Cuando la frecuencia  $\omega$  de la luz incidente es mayor que una frecuencia característica del conductor, llamada frecuencia de plasma y denotada por  $\omega_p$ , esta fluctuación de la densidad puede propagarse como una onda longitudinal, tomando energía de la onda incidente. Es así como dicha componente del campo eléctrico puede acoplar ondas longitudinales de bulto en la interfaz y modificar el valor de la reflectancia óptica.<sup>3</sup> Aunque los efectos de las ondas longitudinales u ondas de plasma sobre las propiedades ópticas de un conductor semi infinito son usualmente pequeños,<sup>2,3</sup> éstos son incrementados por resonancia en películas delgadas, cerca de la

frecuencia en la cual el ancho de la película es un múltiplo semientero de la longitud de onda del plasmón. Farrell<sup>24</sup> y Stern<sup>25</sup> fueron los primeros en predecir este acoplamiento resonante con ondas de plasma guiadas en películas delgadas. Lindau, Nilson<sup>26</sup> y Anderegg<sup>27</sup> fueron los primeros en observarlo y Melnyk y Harrison fueron los primeros en señalar la importancia de la no localidad o dispersión espacial para el entendimiento correcto de este acoplamiento.<sup>28</sup> Numerosos estudios de este efecto han sido realizados usando teorías hidrodinámicas,<sup>29-31</sup> semiclásicas<sup>32</sup> y teorías microscópicas de muchos cuerpos.<sup>33-35</sup>

Puesto que el acoplamiento de ondas longitudinales y transversales es un efecto de interfaz, éste resulta incrementado en superredes, ya que en ellas el área interfacial es proporcional al volumen.<sup>36</sup>

Los modos normales en las superredes metálicas presentan una rica estructura la cual incluye lo siguiente: (i) plasmones de superficie que se propagan en cada interfaz y se acoplan entre ellos por la cola de sus campos evanescentes, dando lugar a un modo colectivo de propagación en el interior de la superred, (ii) ondas guiadas longitudinales reflejadas internamente en las capas más densas acopladas por el campo evanescente en dichas capas, (iii) ondas transversales en ambas clases de capas unidas en sus interfaces (iv) plasmones guiados en las capas metálicas menos densas unidos por ondas evanescentes transversales propagándose en las capas más densas, etc.

Los primeros modos mencionados arriba y su interacción con pruebas extensas (tales como dispersión Raman<sup>37</sup>) han sido estudiados en el límite no retardado para superredes finitas, infinitas y

seminfinitas.<sup>38-40</sup> La propagación de las ondas transversales en sistemas en multicapas se entiende ampliamente y es de suma importancia en el diseño de espejos dieléctricos, interferómetros y capas antirreflejantes para elementos ópticos.<sup>3,8</sup> Hace algún tiempo, Eliasson<sup>41</sup> realizó un estudio de los modos surgidos del acoplamiento de plasmones evanescentes y guiados en una superred metal-metal con dispersión espacial ignorando el retardo. Los efectos de la dispersión espacial también han sido considerados por Agranovich y Kravstov,<sup>36</sup> que obtienen expresiones, dentro de una aproximación del medio efectivo, para el tensor dieléctrico macroscópico de una superficie hecha de capas muy delgadas de semiconductores excitónicos. Sin embargo, los modos surgidos del acoplamiento entre los plasmones y las ondas electromagnéticas transversales en superredes, no han sido investigados previamente.

El propósito de esta tesis es el estudio teórico de los modos electromagnéticos y las propiedades ópticas de las superredes metálicas, tomando en cuenta retardo, dispersión espacial de las capas metálicas, propagación de plasmones de bulto y su acoplamiento con ondas transversales en las interfaces.

Desarrollamos una novedosa aproximación al problema<sup>42,43</sup> que consiste en la construcción de una matriz de transferencia de  $4 \times 4$  que relaciona el campo electromagnético en una interfaz con el campo en la siguiente interfaz equivalente. Esta matriz difiere de la matriz de transferencia estándar, que se utiliza en óptica de multicapas, en que la nuestra considera las ondas de plasma en el interior de la superred. Las propiedades ópticas de la superred, tales como la reflectancia, se obtienen en términos de los elementos de la matriz de

transferencia sin ninguna necesidad de cálculos adicionales. Puesto que en esta tesis concentramos nuestra atención en la propagación de plasmones y su acoplamiento a ondas transversales en superficies metálicas, usamos un modelo hidrodinámico y una condición particular a la frontera de origen no electromagnético. Por lo tanto ignoramos varios fenómenos de superficie<sup>44</sup> los cuales pueden ser resaltados en superredes y los cuales deberían ser considerados en cálculos más realistas. Los resultados de la presente tesis pueden ser considerados el término de orden cero de un cálculo perturbativo, donde el parámetro de perturbación es de tamaño pequeño en la región superficial donde nuestra descripción de los campos no es exacta.<sup>45</sup>

A continuación se indica como se encuentra organizada la tesis. El capítulo 1 lo dedicamos a un repaso de las matemáticas del movimiento ondulatorio. En este capítulo estudiamos las ondas planas monocromáticas y la ecuación de onda. En el capítulo 2 recordamos las leyes del electromagnetismo y la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas en el vacío. En el capítulo 3 hacemos un estudio de las funciones de respuesta y desarrollamos dos modelos de respuesta para metales, el modelo de Drude y el modelo hidrodinámico. También obtenemos la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas en metales, y utilizando los dos modelos anteriores, encontramos la solución de las ecuaciones de Maxwell en un metal. El capítulo 4 lo dedicamos al estudio de los medios inhomogéneos. Introducimos el concepto de impedancia de superficie y con base en él obtenemos las formulas de Fresnel. También generalizamos el teorema de la energía para un sistema con dispersión espacial, discutimos las condiciones a la frontera y mostramos la necesidad de las condiciones adicionales a

la frontera para la solución de un sistema con ondas longitudinales. En el capítulo 5 estudiamos las ondas de superficie en medios semiinfinitos y en películas delgadas. En el capítulo 6 describimos la teoría de la matriz de transferencia para superredes metálicas locales y la extendemos para incorporar oscilaciones longitudinales en superredes no locales. En este capítulo, calculamos las relaciones de dispersión de los modos electromagnéticos colectivos de las superredes infinitas. En el capítulo 7 obtenemos las fórmulas de la reflectancia de distintas superredes semiinfinitas, estas fórmulas son las que utilizamos para el cálculo de los resultados numéricos que se discuten en el capítulo 8. También realizamos el cálculo del flujo de energía transmitida al interior de la superred.

En el capítulo 8 mostramos los resultados numéricos para las propiedades ópticas de la película metálica, de la superred aislante-metal no local, de la superred metal local-metal no local y finalmente, de la superred metálica no local. En el capítulo 9 se discuten las conclusiones generales de este trabajo.

## CAPITULO 1

### MATEMATICA DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Una onda electromagnética es uno de varios procesos físicos que se puede describir empleando las matemáticas del movimiento ondulatorio. En este capítulo repasaremos algunas de las técnicas matemáticas necesarias para tratar problemas en óptica. Comenzaremos con el estudio de las ondas planas, después mostraremos la representación de las ondas sinusoidales con números complejos y haremos una clasificación de las ondas de acuerdo con la dirección en la cuál se produce la perturbación y finalmente obtendremos la ecuación diferencial de ondas escalares y vectoriales.

#### 1.1 Ondas planas

Entenderemos por onda una perturbación que se propaga a través del espacio. La naturaleza específica de la perturbación no es por el momento importante. Podría ser la magnitud de un campo eléctrico o magnético asociado con una onda electromagnética.<sup>4,8</sup>

La onda plana es aquella en la cual la perturbación se propaga en una sola dirección y los puntos del espacio con una misma fase de movimiento forman un plano perpendicular a la dirección de propagación. Como la perturbación está en movimiento, la onda debe ser descrita por una función tanto de la posición  $\vec{r}$  como del tiempo  $t$  y se puede escribir por consiguiente como  $f(\vec{r}, t)$ . Pero, ¿Cómo deberá ser la dependencia de la función  $f(\vec{r}, t)$  en las variables espaciales y el tiempo?.

La forma de la perturbación en cualquier instante, digamos  $t = 0$ , es una función de la posición  $f(\vec{r}, t)|_{t=0} = f(\vec{r}, 0) = p(\vec{r})$  que representa la forma o perfil de la onda en ese momento. Esto es análogo a tomar una fotografía de la perturbación que va viajando.

Consideraremos ondas cuyo perfil no cambia a lo largo de un plano perpendicular a la dirección de propagación. Es decir, el valor de la perturbación será el mismo para todo punto en dicho plano. Recordando que la ecuación de un plano perpendicular a un vector dado, es de la forma

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \alpha \quad (1.1)$$

donde  $\vec{k}$  es un vector normal al plano y, en el caso de una onda, en la dirección de propagación de la perturbación y  $\alpha$  es una constante.

Si damos diferentes valores a  $\alpha$ , lo que obtenemos son diferentes planos perpendiculares a  $\vec{k}$ . Como la función de onda debe tener un mismo valor para cada punto de un mismo plano, la función de onda puede expresarse como función de  $\alpha$ . Entonces tenemos

$$f(\vec{r}, t) = f(\alpha, t)|_{t=0} = p(\alpha) = p(\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (1.2)$$

En cualquier plano en el cual  $\alpha$  es constante, la fase es constante y también lo es  $f(\vec{r}, t)|_{t=0} = P(\alpha)$ .

Para hacer que las cosas se muevan, debemos introducir ahora la dependencia en el tiempo. Es decir, al transcurrir el tiempo el valor que la perturbación tenía en un determinado plano habrá cambiado, y puesto que la perturbación se propaga con un perfil constante en la dirección del vector  $\vec{k}$ , dicho valor lo encontraremos en un plano posterior con un valor de  $\alpha$  distinto. Por lo tanto, la dependencia en el tiempo deberá restarse a la dependencia en  $\alpha$ . Utilizando la forma más sencilla de dependencia que es la lineal, finalmente, la función de onda plana se puede escribir como

$$f(\alpha - \omega t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (1.3)$$

Esto es, si nos localizamos en un plano, sobre el cual  $\alpha$  es constante, entonces la perturbación cambiará solamente en función del tiempo, avanzando en la dirección del vector  $\vec{k}$ . Como conclusión, la dependencia de la función de onda en  $\vec{r}$  y en  $t$  deberá aparecer como una unidad, la cual se denomina fase.

La velocidad de fase de una onda plana es equivalente a la velocidad de propagación de los frentes de onda, que para una onda plana son los planos de fase constante. La componente escalar de  $\vec{r}$  en la dirección de  $\vec{k}$  es

$$r = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{|\vec{k}|}. \quad (1.4)$$

La perturbación en un frente de onda es constante, de manera que después de un tiempo  $dt$ , si el frente se mueve a lo largo de  $\vec{k}$  una distancia  $dr$ , debemos de tener

$$f(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = f(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

es decir

$$f\left(\vec{k} \cdot \left[ \vec{r} + \frac{dr\vec{k}}{|\vec{k}|} \right] - \omega(t + dt)\right) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (1.6)$$

Por consiguiente

$$|\vec{k}| dr = \omega dt \quad (1.7)$$

y la magnitud de la velocidad de la onda  $dr/dt$  es

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = |\vec{v}|. \quad (1.8)$$

Finalmente, en forma vectorial, tenemos

$$\vec{v} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (1.9)$$

## 1.2 Ondas planas monocromáticas

Hasta ahora no hemos dicho nada sobre el perfil o forma de la onda. Consideraremos ondas cuyo perfil es una función sinusoidal por dos razones; primero, físicamente las ondas sinusoidales se pueden generar en forma relativamente fácil usando alguna forma de oscilador armónico y, segundo, cualquier forma de onda se puede sintetizar por una superposición de ondas sinusoidales, usando análisis de Fourier.<sup>o</sup> Entonces la función de onda la podemos representar como

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta), \quad (1.10)$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda y la cual puede ser un escalar o un vector,  $\vec{k}$  es el vector de onda,  $\omega$  su frecuencia y  $\delta$  la fase inicial en el origen.

Este tipo de onda es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El período espacial se conoce como longitud de onda y se denota por  $\lambda$ . Si nos desplazamos una distancia  $\lambda$  en la dirección del vector  $\vec{k}$  el valor de la onda resulta inalterado. Es por ello que la magnitud del vector de onda se relaciona con la longitud de onda a través de

$$|\vec{k}| = 2\pi/\lambda. \quad (1.11)$$

En forma completamente análoga, el periodo temporal  $\tau$  de la onda se relaciona con la frecuencia angular  $\omega$  a través de

$$\omega = 2\pi/\tau. \quad (1.12)$$

El periodo temporal  $\tau$  es la cantidad de tiempo que le toma a una oscilación completa pasar un observador estacionario.

En el análisis de circuitos eléctricos es más útil representar a cantidades físicas oscilantes como el voltaje y la corriente por medio de números complejos, llamados fasores. En forma análoga, es más útil usar una representación de ondas con números complejos ya que nos ofrece una descripción matemáticamente más simple.

La fórmula de Euler,

$$Ae^{i\theta} = A\cos\theta + iA\sin\theta, \quad (1.13)$$

permite escribir la ec. (1.10) como

$$f(\vec{r}, t) = \text{Re}(Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}), \quad (1.14)$$

donde introdujimos la amplitud compleja  $A \rightarrow Ae^{i\delta}$

Esta es la representación compleja de la función de onda. Se ha elegido arbitrariamente la parte real para representar a la onda, aunque cualquier parte se podría escoger para describir una onda con un perfil sinusoidal.

Al realizar los cálculos matemáticos se acostumbra utilizar la función de onda en la forma exponencial compleja,

$$f(\vec{r}, t) \rightarrow Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (1.15)$$

con el fin de sacarle partido a la facilidad de manejo de las exponenciales complejas. Sólo después de llegar a un resultado final, y solamente si deseamos representar la onda verdadera, necesitamos tomar la parte real la cual nos dará el resultado correcto mientras

realicemos operaciones lineales exclusivamente.

Sustituyendo la función de onda (1.15) en la ecuación de onda, que veremos en la siguiente sección, se puede demostrar que está es efectivamente solución de dicha ecuación. Este tipo de representación de la función de onda se usa ampliamente en mecánica clásica, cuántica,<sup>4</sup> y también en óptica.<sup>5</sup>

Ahora que tenemos una expresión matemática para una forma de onda, realizaremos una clasificación de las ondas de acuerdo con la dirección en la cual se produce la perturbación.

Existen dos tipos generales de ondas vectoriales. Cuando la dirección de la perturbación es paralela a la dirección de propagación se dice que la onda es una onda longitudinal, y si la perturbación ocurre en dirección perpendicular a la dirección de propagación, entonces, se dice que la onda es una onda transversal. La naturaleza física de una onda longitudinal es, en general, diferente a la de una onda transversal. Una onda longitudinal plana sinusoidal se puede representar como

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = A \hat{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.16)$$

donde  $\hat{k}$  es un vector unitario en la dirección de  $\vec{k}$  y  $A$  es una amplitud escalar.

Si la onda es transversal, entonces, para que este completamente definida, se requerirá una amplitud vectorial. Si la dirección en la que se produce la perturbación no varía, se dice que la onda es linealmente polarizada o que tiene polarización plana. En este caso, el movimiento ondulatorio estará confinado a un plano fijo llamado plano de vibración. La importancia de este tipo de onda, estriba en que, cualquier onda transversal se puede descomponer en dos ondas

linealmente polarizadas mutuamente ortogonales.<sup>6</sup> Una onda plana transversal sinusoidal polarizada plana estará representada como

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.17)$$

donde  $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ .  $A$  es un vector complejo constante cuya parte real  $A'$  e imaginaria  $A''$  son colineales, su módulo nos da la amplitud de  $\vec{F}$  y su argumento nos da la fase en el origen ( $\vec{r} = 0$ ) y  $t = 0$ .

Finalmente, podemos ilustrar que una de las ventajas de trabajar con ondas planas es que las operaciones diferenciales se transforman en operaciones algebraicas. Por ejemplo, consideremos la función  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  que nos representa una onda plana y calculemos el rotacional de  $\vec{F}$ , esto es,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_y F_z - ik_z F_y \\ ik_z F_x - ik_x F_z \\ ik_x F_y - ik_y F_x \end{pmatrix} \\ &= i\vec{k} \times \vec{F}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

De aquí, observamos que el operador  $\nabla$  es equivalente a  $i\vec{k}$ , lo cual es un resultado general. Se pueden deducir las identidades,

$$\nabla \times \longrightarrow i\vec{k} \times \quad (1.19)$$

y

$$\nabla \cdot \longrightarrow i\vec{k} \cdot \quad (1.20)$$

Si derivamos la ec. (1.17) con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = -i\omega \vec{F}. \quad (1.21)$$

Podemos obtener las identidades,

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega \quad (1.22)$$

y

$$\int dt \longrightarrow 1/(-i\omega). \quad (1.23)$$

Estas identidades nos serán útiles cuando trabajemos con ondas planas. En el desarrollo de esta tesis únicamente trabajaremos con ondas planas sinusoidales linealmente polarizadas y manejaremos la representación exponencial compleja de este tipo de ondas.

### 1.3 Ecuación de onda.

Recordando como es la dependencia de la función de onda plana en  $\vec{r}$  y en  $t$ , podemos desarrollar la forma general de la ecuación diferencial de onda escalar tridimensional homogénea. Consideraremos que  $f$  es una función escalar y definiremos una variable auxiliar

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t, \quad (1.24)$$

como el argumento de la función de onda.

Calculemos el gradiente y la primera derivada con respecto al tiempo

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \phi} (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{k} \quad (1.25)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial f}{\partial \phi}. \quad (1.26)$$

De las ecs. (1.25) y (1.26) se obtiene,

$$\nabla f = \vec{k} \left[ -\frac{1}{\omega} \frac{\partial f}{\partial t} \right]. \quad (1.27)$$

Como el valor inicial de la amplitud de la perturbación y su velocidad inicial son arbitrarias, así como la dirección de propagación, necesitamos una ecuación diferencial de segundo orden. Derivando nuevamente con respecto al tiempo y tomando la divergencia

del gradiente, tenemos

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] \vec{k} = \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla f = \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{k} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} (\vec{k} \cdot \vec{k}), \quad (1.28)$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\omega \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}. \quad (1.29)$$

Despejando  $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}$  en la ec. (1.29) y sustituyendo en (1.28), tenemos

$$\nabla^2 f = (\vec{k} \cdot \vec{k}) \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = (\vec{k} \cdot \vec{k}) \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{|\vec{k}|^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (1.30)$$

y como

$$|\vec{V}| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}, \quad (1.31)$$

finalmente,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{|\vec{V}|^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (1.32)$$

Esta es la ecuación diferencial de una onda escalar tridimensional homogénea. La función de onda plana dada por la función (1.15) es una solución particular de la ec. (1.32) que tiene otras soluciones físicamente interesantes tales como las ondas esféricas.

Consideremos ahora una función vectorial  $\vec{F}$  que se propaga como una onda. Entonces, cada una de sus componentes cartesianas obedece una ecuación como la (1.32), lo cual se expresa matemáticamente como,

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{|\vec{V}|^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}. \quad (1.33)$$

Esta es la ecuación de onda vectorial tridimensional homogénea.

De todas las ondas tridimensionales, solamente la onda plana se mueve a través del espacio con un perfil que no cambia. Entonces es claro que la idea según la cual una onda es la propagación de una perturbación cuyo perfil no se altera, es algo limitada. Esta

dificultad se puede vencer extendiendo nuestra definición de una onda a cualquier solución de la ecuación de onda tridimensional; aunque en el desarrollo de esta tesis únicamente consideraremos ondas planas.

## CATIPULO 2

### ECUACIONES DE MAXWELL

Para estudiar las propiedades ópticas de un sistema se necesitan conocer las ecuaciones de Maxwell que describen el campo electromagnético. Debido a esto, en este capítulo revisaremos la teoría del campo electromagnético de Maxwell y obtendremos la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas en el vacío.

#### 2.1 Campo eléctrico y campo de inducción magnética.

Sabemos por experimentos que las cargas eléctricas experimentan una interacción mutua. Como una posible explicación podemos proponer que cada carga está rodeada de algo llamado campo eléctrico y que la carga interactúa directamente y localmente con el campo eléctrico en el que está sumergida.<sup>8</sup> Entonces, si una carga  $q$  experimenta una fuerza  $\vec{F}_E$ , el campo eléctrico  $\vec{E}$  en la posición de la carga está definido por  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ . También sabemos que una carga en movimiento puede experimentar una fuerza  $\vec{F}_M$  que resulta ser proporcional a su velocidad  $\vec{V}$ , y perpendicular a la dirección del movimiento, por lo que se define

otro campo llamado inducción magnética  $\vec{B}$  tal que  $\vec{F}_M = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$ . Si ambas fuerzas ocurren simultáneamente se dice que la carga se mueve en una región ocupada por un campo electromagnético, donde  $\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}$  es llamada fuerza de Lorentz. Como sabemos, los campos eléctricos son generados por cargas eléctricas y por campos magnéticos variables en el tiempo. A su vez los campos magnéticos son generados por corrientes eléctricas y por campos eléctricos variables en el tiempo. La interdependencia entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  es el punto clave de la existencia de las ondas electromagnéticas.

## 2.2 Ley de Gauss (eléctrica)

La ley de Gauss establece, que el flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de una superficie cerrada  $S$ , será proporcional a la carga total  $Q$  encerrada por dicha superficie,<sup>4,5</sup> es decir

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q. \quad (2.1)$$

Si dentro de la superficie hay una distribución continua de carga entonces

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho_T dV, \quad (2.2)$$

donde  $\rho_T$  es la densidad volumétrica total de carga y  $V$  es el volumen encerrado por  $S$ .

La expresión integral anterior nos da una caracterización global. Es más común dar una caracterización local, o sea, transformar la expresión anterior a una expresión diferencial, para lo cual utilizamos el teorema de la divergencia que dice,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV. \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.3) en (2.2) se obtiene

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV = 4\pi \iiint_V \rho_T \, dV, \quad (2.4)$$

y como el volumen  $V$  de integración es arbitrario,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_T. \quad (2.5)$$

### 2.3 Ley de Gauss (magnética)

No se conoce una contraparte magnética de la carga eléctrica, por que nunca se han encontrado polos magnéticos aislados de manera reproducible. A diferencia del campo eléctrico, la inducción magnética  $\vec{B}$  no diverge o converge hacia alguna clase de carga magnética. En consecuencia, el flujo de la inducción magnética a través de una superficie cerrada  $S$  será igual a cero,<sup>4,8</sup>

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.6)$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV, \quad (2.7)$$

obtenemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.8)$$

### 2.4 Ley de Faraday

Al variar el flujo  $\Phi_B$  del campo de inducción magnética  $\vec{B}$  a través de una área  $A$  (abierta) rodeada por un circuito conductor cerrado, se genera una corriente eléctrica alrededor del circuito. El flujo  $\Phi_B$  del campo de inducción magnética  $\vec{B}$  en una superficie  $A$  está dado por<sup>4,8</sup>

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.9)$$

La corriente eléctrica es resultado de la existencia de una fuerza electromotriz fem que, a su vez, está dada en términos del campo eléctrico  $\vec{E}$  por

$$fem = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (2.10)$$

donde la curva cerrada C es el perímetro de A y corresponde al circuito conductor el cual suponimos inmóvil. Faraday descubrió que

$$fem = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (2.11)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo (2.9) y (2.10) en (2.11) se obtiene

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.12)$$

Haciendo uso del teorema de Stokes, según el cual

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_A \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.13)$$

donde A es el área encerrada por C, obtenemos que,

$$\iint_A \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.14)$$

Puesto que el área no depende del tiempo, o, mejor dicho, la superficie no cambia al transcurrir el tiempo, entonces podemos derivar dentro del signo de integral,

$$\iint_A \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{1}{c} \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (2.15)$$

y como el área A es arbitraria, los integrandos mismos deben coincidir,

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.16)$$

La expresión anterior nos dice que un campo magnético variable en el tiempo produce un campo eléctrico.

## 2.5 Ley de Ampere-Maxwell

Al fluir una corriente eléctrica a través de un conductor se produce a su alrededor un campo magnético perpendicular a la dirección de flujo de la corriente. La relación cuantitativa entre la corriente eléctrica  $i_T$  y el campo de inducción magnética  $\vec{B}$  se representa como<sup>4.0</sup>

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} i_T \quad (2.17)$$

ó

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \vec{J}_T \cdot d\vec{S}, \quad (2.18)$$

donde  $\vec{J}_T$  es la densidad total de corriente y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Esta ecuación se conoce como ley de Ampere. Este tipo de formulación se debe a Maxwell el cual hizo también una generalización a ella, partiendo de la ecuación de conservación de la carga.

La ecuación de conservación de la carga se expresa como,

$$\frac{dQ}{dt} + \mathcal{E}_j = 0, \quad (2.19)$$

donde  $\mathcal{E}_j$  es el flujo de corriente a través de una superficie cerrada que encierra a una carga  $Q$ . En términos de la densidad de carga  $\rho_T$  y de la densidad de corriente  $\vec{J}_T$ ,

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho_T dv + \oint_S \vec{J}_T \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.20)$$

Esta ecuación nos dice que la variación de la carga en un volumen  $V$  es proporcional al flujo de corriente a través de la superficie  $S$  frontera del volumen  $V$ . En forma diferencial se escribe,

$$\nabla \cdot \vec{J}_T + \frac{\partial \rho_T}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

Sustituyendo la ec. (2.5), podemos escribirla como,

$$\nabla \cdot \left( \vec{J}_T + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.22)$$

donde  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  juega el papel de una densidad de corriente. Maxwell supuso la realidad de esta corriente a la cual llamó corriente de desplazamiento. Reemplazando en la ec. (2.18)  $\vec{J}_T$  por

$$\vec{J}_T + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.23)$$

obtenemos que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \left( \vec{J}_T + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (2.24)$$

Esta ecuación es la ley de Ampere reformulada por Maxwell.

De ella se deduce que aún cuando  $\vec{J}_T = 0$ , un campo  $\vec{E}$  variable en el tiempo estará acompañado por un campo  $\vec{B}$ . La expresión diferencial se obtiene con el uso del teorema de Stokes, esto es

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_A \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (2.25)$$

el cual, sustituido en (2.24) da

$$\iint_A \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \left( \vec{J}_T + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \quad (2.26)$$

o en forma diferencial,

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_T + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

En resumen las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_T, \quad (2.28) \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.30) \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_T + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

## 2.6 Ecuación de onda electromagnética

A partir de las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas en el vacío y en ausencia de cargas, tomando  $\rho_T = 0$  y  $\vec{J}_T = 0$ . Tomemos el rotacional en ambos lados de la ec. (2.29), esto es,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}). \quad (2.32)$$

Sustituyendo la ec. (2.31) en (2.32), tenemos,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

Haciendo uso de la identidad  $\nabla \nabla \cdot - \nabla^2 = \nabla \times \nabla \times$ , podemos escribir la ec. (2.33) como,

$$\nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.34)$$

Para  $\rho_T = 0$ , la ec. (2.28) nos dice que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , por lo que podemos escribir finalmente

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.35)$$

Podemos observar, que, esta última ecuación es una ecuación de onda para el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Por lo tanto  $c$  es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío. Siguiendo un camino similar, podemos obtener lo siguiente,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad (2.36)$$

que es la ecuación de onda para el campo de inducción magnética  $\vec{B}$ .

Como se mencionó en el capítulo anterior, una solución de la ecuación de onda está dada por la función

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.37)$$

que representa una onda electromagnética plana monocromática, con vector de onda  $\vec{k}$  y frecuencia  $\omega$ .

Sustituyendo esta función en la ecuación de onda,

$$\left[ |\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E}_0 = 0. \quad (2.38)$$

Para que exista onda electromagnética ( $\vec{E}_0 \neq 0$ ), por consiguiente, el vector de onda  $\vec{k}$  y la frecuencia  $\omega$ , deben obedecer

$$|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (2.39)$$

Esta condición se conoce como la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas en el vacío.

Sustituyendo (2.37) en la ecuación (2.29) obtenemos que

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}. \quad (2.40)$$

De aquí podemos observar que el campo de inducción magnética  $\vec{B}$  es perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$  y al campo eléctrico. Sustituyendo nuevamente (2.37) pero ahora en la ec. (2.28), tenemos que en el vacío,

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.41)$$

Por lo que en el vacío el campo eléctrico  $\vec{E}$  es perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$ , es decir, en el vacío no hay ondas longitudinales.

Resumiendo, en esta sección a partir de las ecuaciones de Maxwell mostramos un procedimiento sencillo para obtener la ecuación de onda. Este procedimiento se volverá a utilizar en la sección 3.6 para obtener la relación de dispersión para las ondas transversales y longitudinales en conductores.

## CAPITULO 3

### FUNCION DE RESPUESTA DIELECTRICA

En el capítulo anterior repasamos las ecuaciones de Maxwell, que nos indican el comportamiento del campo eléctrico  $\vec{E}$  e inducción magnética  $\vec{B}$ . Para estudiar el comportamiento del campo  $\vec{E}$  en un medio material es conveniente introducir el campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ , el cual está relacionado con el campo eléctrico a través de la función de respuesta dieléctrica. En este capítulo mostraremos la relación funcional entre los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , obtendremos las ecuaciones de Maxwell en materiales y discutiremos las funciones de respuesta. Como nuestro interés es estudiar las propiedades ópticas de las superredes metálicas, obtendremos a partir de dos modelos simples expresiones para la función de respuesta dieléctrica en metales; uno será el modelo de Drude, y el otro será el modelo hidrodinámico. Finalmente obtendremos las relaciones de dispersión para las ondas transversales y longitudinales en un medio material infinito homogéneo que nos serán útiles para los modelos de las superredes metálicas.

### 3.1 Desplazamiento eléctrico

Cuando a un medio material se le aplica un campo eléctrico  $\vec{E}$ , la distribución interna de carga se distorsiona bajo su influencia. El campo eléctrico separa las cargas positivas y negativas (cada par de los cuales forma un dipolo) en el medio y éstas entonces contribuyen con una componente de campo adicional. Es decir, se generan momentos eléctricos dipolares. El momento dipolar resultante por unidad de volumen se denomina la polarización eléctrica  $\vec{P}$ .

El campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  se define como

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

En el caso lineal  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  se relacionan a través de\*

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \sum_j \int d^3\vec{r}' \int dt' \hat{\epsilon}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (3.2)$$

donde  $\hat{\epsilon}_{ij}$  es el tensor dieléctrico.

La relación entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  depende de  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$ ,  $t$ ,  $t'$ . Este tipo de relaciones se llama no local y se interpreta de la siguiente forma; el valor del desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  en el punto  $\vec{r}$  depende de los valores de  $\vec{E}$  no sólo en  $\vec{r}$  sino también en los puntos cercanos  $\vec{r}'$  (no localidad espacial), y análogamente, el valor de  $\vec{D}$  en el tiempo  $t$  depende del valor de  $\vec{E}$  en los tiempos  $t'$ , donde  $t' \leq t$  (dispersión temporal).

En los sistemas no locales existen interacciones no incluidas en los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , a través de las cuales se puede transmitir información sobre el valor del campo electromagnético entre distintos puntos del sistema. Por ejemplo, un electrón en un metal que interacciona con un campo eléctrico al tiempo  $t'$  en el punto  $\vec{r}'$ , puede desplazarse y contribuir a la corriente eléctrica en un tiempo  $t$

posterior y en un punto  $\vec{r}$  cercano, o puede, simplemente, empujar a un electrón en  $\vec{r}$  debido a que dos electrones no pueden ocupar el mismo lugar (principio de Pauli). Tenemos, así, que los metales son sistemas no locales.<sup>46</sup>

La integración sobre  $t'$  se realiza para todos los tiempos  $t' < t$ , puesto que  $\hat{c}_{ij} = 0$  para  $t' > t$  debido al principio de causalidad. Esto significa que el material tarda un cierto tiempo en polarizarse. La integración sobre  $\vec{r}'$  está restringida por el volumen que ocupa el material. Para un medio isotrópico, y debido a la invarianza translacional temporal se puede escribir

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' \int dt' \hat{c}(\vec{r}, \vec{r}'; t-t') \vec{E}(\vec{r}', t'). \quad (3.3)$$

Para materiales infinitos y homogéneos, existe invarianza translacional en el espacio, entonces  $\hat{c}(\vec{r}, \vec{r}'; t-t') = \hat{c}(\vec{r}-\vec{r}'; t-t')$ , es decir, depende de la distancia relativa entre  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ . La transformada de Fourier<sup>47</sup> espacial y temporal de la ec. (3.3) se expresa empleando el teorema de la convolución como

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \hat{c}(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad (3.4)$$

donde

$$\hat{c}(\vec{k}, \omega) = \int dt \int d^3\vec{r}' \hat{c}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t)}, \quad (3.5)$$

y

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \int dt \int d^3\vec{r}' \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t)}. \quad (3.6)$$

Un medio es llamado no local o con dispersión espacial si la función de respuesta depende de  $\vec{k}$ . Para medios homogéneos la dependencia de  $\vec{k}$  en (3.4) es equivalente a la relación integral no local (3.3). Por lo tanto, la dispersión espacial en la transformada de Fourier y la función de respuesta no local expresada en el espacio de  $\vec{r}$ , representan la misma situación física en medios homogéneos.

Cuando la función de respuesta dieléctrica no depende de  $\vec{r}$ , se le denomina, función de respuesta dieléctrica local, o sea, lo que ocurre en  $\vec{r}$  depende sólo de  $\vec{r}$  y no de otras posiciones  $\vec{r}'$ .

Un concepto útil en la teoría de sistemas no locales es el alcance de la no localidad, definido como la distancia entre  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  a partir de la cual  $\hat{\epsilon}(\vec{r}, \vec{r}'; t-t')$  es despreciable, y que típicamente mide algunos angstroms.<sup>46</sup> Si la escala de variación de  $\vec{E}(\vec{r}', t')$  comparada con el alcance de la no localidad es muy grande, lo podemos sacar de la integral sobre  $\vec{r}'$  en la ec. (3.3) y, así, obtener una relación de tipo local. Por lo tanto, la no localidad es importante solamente en situaciones en las que el campo eléctrico varía abruptamente como función de la posición. Tal es el caso en la cercanía de una superficie donde incide luz con polarización P para la componente normal del campo eléctrico, la cual es discontinua en la teoría local de Fresnel.<sup>47</sup> Por lo tanto, si deberemos de considerarla en nuestro estudio de las superredes metálicas.

### 3.2 Ecuaciones de Maxwell en materiales

Las ecuaciones de Maxwell para un medio material o ecuaciones macroscópicas se suelen escribir en términos de  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , esto es,

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.7)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}}, \quad (3.8)$$

donde  $\rho_{\text{ext}}$  es la densidad de carga externa, esto es, excluyendo a las cargas de polarización.<sup>48</sup>

Ya que en general la respuesta magnética de los medios a los campos magnéticos  $\vec{B}$  de muy alta frecuencia es sólo ligeramente diferente de la del vacío,<sup>4,8</sup> no necesitamos describir este proceso en detalle. Podemos definir una polarización magnética o vector de magnetización  $\vec{M}$  como el momento dipolar magnético por unidad de volumen. A fin de manejar la influencia de un medio magnético polarizado, introducimos un vector auxiliar  $\vec{H}$ , conocido como la intensidad de campo magnético,<sup>4,8</sup>

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \quad (3.9)$$

Para un medio isotrópico lineal (no ferromagnético) y homogéneo,  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  son paralelos y proporcionales,

$$\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B}. \quad (3.10)$$

donde  $\mu$  se conoce como la permeabilidad del medio y en los materiales no magnéticos (como en los que estamos interesados) se cumple que  $\mu = 1$ .

Las ecuaciones de Maxwell en términos de  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{D}$  se escriben como

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.11)$$

y

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Como en nuestro caso de estudio, las frecuencias de estudio son altas y la respuesta al campo de inducción magnética es muy lenta, podemos tomar  $\vec{H} = \vec{B}$ , esto es,  $\mu$  puede ser aproximada a uno. Entonces las ecuaciones macroscópicas de Maxwell finalmente son,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho_{\text{ext}}, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Haciendo uso de los teoremas de la divergencia y de Stokes podemos escribirlas en forma integral como

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho_{\text{ext}} \, dV, \quad (3.14)$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.15)$$

$$\iint_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \, dV = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (3.16)$$

$$\iint_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \, dV = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} \iint_A \left[ 4\pi \vec{J}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}. \quad (3.17)$$

### 3.3 Funciones de respuesta

Las ecuaciones macroscópicas de Maxwell hacen posible el cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}$  e inducción magnética  $\vec{B}$ , para densidades de carga  $\rho_{\text{ext}}$ , corriente  $\vec{J}_{\text{ext}}$  y polarización eléctrica  $\vec{P}$ , dadas. Pero, ellas tienen que ser complementadas con las ecuaciones del material, las cuales nos dan la  $\rho_{\text{ind}}$ ,  $\vec{J}_{\text{ind}}$ , y  $\vec{P}_{\text{ind}}$ , inducidas por los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , dados. Encontrar las soluciones simultáneas de la combinación de este conjunto de ecuaciones es parte del campo de la óptica física.<sup>3, 4</sup> Las ecuaciones del material se derivan del modelo del metal, semiconductor o aislante. La mejor aproximación para un sistema sería la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, para todo el sistema. Hay ciertos tipos de aproximación a este formidable problema: Una ecuación de transporte tipo Boltzmann, ecuaciones de movimiento para ciertas excitaciones, ecuaciones macroscópicas de

movimiento como la llamada aproximación hidrodinámica para metales y una descripción en términos de ensambles de dipolos para los electrones ligados. Por razones que se irán aclarando durante el desarrollo de la tesis utilizaremos una aproximación hidrodinámica. En todos los modelos anteriores uno usualmente deriva una relación lineal entre  $\rho$ ,  $\vec{J}$ , y  $\vec{P}$  y los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . La relación es expresada mediante una función, tensor u operador de respuesta: La función de respuesta dieléctrica  $\hat{\epsilon}$ , la conductividad  $\hat{\sigma}$ , la polarizabilidad eléctrica o susceptibilidad  $\hat{\chi}$ . El conocimiento explícito de esta función de respuesta es necesario para poder resolver las ecuaciones de Maxwell en los materiales. Cuando el campo  $\vec{E}$  es muy pequeño con respecto al campo creado por la polarización de las moléculas o átomos del material, conocido como campo interno  $\vec{E}_{int}$ , la respuesta a  $\vec{E}$  es, con buena aproximación, lineal para un gran número de materiales. En esta tesis estaremos dentro de la aproximación lineal de esta respuesta. Las relaciones lineales entre  $\vec{P}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , en el espacio de Fourier se definen de la siguiente manera,<sup>4</sup>

$$\vec{D}(\vec{k}, t) = \hat{\epsilon}(\vec{k}, t) \vec{E}(\vec{k}, t), \quad (3.18)$$

$$\vec{J}(\vec{k}, t) = \hat{\sigma}(\vec{k}, t) \vec{E}(\vec{k}, t) \quad (3.19)$$

y

$$\vec{P}(\vec{k}, t) = \hat{\chi}(\vec{k}, t) \vec{E}(\vec{k}, t). \quad (3.20)$$

Las ecs. (3.18), (3.19) y (3.20) implican que un medio tiene dispersión espacial (no local) cuando las funciones de respuesta  $\hat{\epsilon}$ ,  $\hat{\sigma}$ , y  $\hat{\chi}$  dependen de  $\vec{k}$ . El límite local de estas funciones de respuesta se obtiene haciendo  $\vec{k} = 0$ .

Además, como  $\rho$ ,  $\vec{J}$  y  $\vec{P}$  no son campos independientes, existe una relación entre las funciones de respuesta anteriores dada por<sup>4</sup>

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma(\vec{k}, \omega)}{\omega} = 1 + 4\pi \chi(\vec{k}, \omega), \quad (3.21)$$

de allí que sea suficiente determinar una sola de ellas.

Para poder calcular las funciones de respuesta de un medio específico hay que usar modelos sobre la dinámica microscópica del material en cuestión. En las secciones siguientes introduciremos el modelo de Drude y el modelo hidrodinámico que describe un gas de electrones sometido a un campo eléctrico que varía en el espacio.

### 3.4 Modelo de Drude

Es posible deducir una expresión analítica para la función de respuesta dieléctrica  $\epsilon(\vec{k}, \omega)$  en función de lo que pasa a nivel atómico. Aun cuando este problema es en realidad del dominio de la mecánica cuántica, el tratamiento semiclásico lleva a resultados muy similares.

Consideremos los electrones libre de un metal, bajo la influencia de un campo eléctrico variable en el tiempo de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.22)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$\sum \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \quad (3.23)$$

donde  $m$  es la masa del electrón y  $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$  su aceleración. La suma de

fuerzas  $\sum \vec{F}$  esta dada por

$$\sum \vec{F} = -q\vec{E} + \vec{F}_{COL}, \quad (3.24)$$

donde  $-q$  es la carga del electrón,  $\vec{E}$  el campo eléctrico aplicado y  $\vec{F}_{COL}$  es una fuerza que toma cuenta las colisiones de los electrones.

Si no existiera el movimiento térmico de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio, el potencial eléctrico creado por los iones dentro del metal sería perfectamente periódico y daría como resultado una serie de bandas de energía en razón de lo cual los electrones se moverían libremente en la banda de conducción.<sup>1,5</sup> Sin embargo, debido a las vibraciones térmicas de los átomos, en cualquier instante hay una leve aperiodicidad del potencial dentro del metal. Uno de los mecanismos de colisión es este tipo de aperiodicidad que ocasiona la dispersión de los electrones de conducción. En la aproximación de tiempo de relajación uno puede escribir  $\vec{F}_{COL}$  como<sup>1,5</sup>

$$\vec{F}_{COL} = -\frac{m d\vec{x}}{\tau dt}, \quad (3.25)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de relajación, el cual representa el tiempo promedio entre una colisión y otra.<sup>5</sup> Entonces sustituyendo (3.25) y (3.24) en la ec. (3.23) tenemos

$$-qE - \frac{m d\vec{x}}{\tau dt} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (3.26)$$

Como nosotros estamos interesados en la solución de régimen estacionario, proponemos como solución particular de la ec. (3.26) la función siguiente,

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.27)$$

Tomando la primera y segunda derivadas de la ec. (3.27) respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -i\omega \vec{x}_0 e^{-i\omega t} = -i\omega \vec{x}, \quad (3.28)$$

y

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{x}. \quad (3.29)$$

Sustituyendo las ecs. (3.28) y (3.29) en la ec. (3.26) obtenemos

$$-q\vec{E} + \frac{i m \omega}{\tau} \vec{x} + m \omega^2 \vec{x} = 0. \quad (3.30)$$

Resolviendo para  $\vec{x}$ ,

$$\vec{x} = \frac{\frac{q}{m} \vec{E}}{\left[ \frac{i \omega}{\tau} + \omega^2 \right]}. \quad (3.31)$$

La contribución de cada electrón al momento dipolar es igual a la carga  $-q$  multiplicada por su desplazamiento  $\vec{x}$ , y si hay  $n$  electrones por unidad de volumen la polarización eléctrica es

$$\vec{P} = -qn\vec{x}. \quad (3.32)$$

Por consiguiente

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} - 4\piqn\vec{x}. \quad (3.33)$$

Sustituyendo  $\vec{x}$ , de la ec. (3.31), obtenemos

$$\vec{D} = \left[ 1 - \frac{4\pi n \frac{q^2}{m}}{\left[ \frac{i \omega}{\tau} + \omega^2 \right]} \right] \vec{E}. \quad (3.34)$$

De las ecs. (3.34) y (3.4), obtenemos finalmente la función de respuesta dieléctrica, esto es

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n \frac{q^2}{m}}{\frac{i \omega}{\tau} + \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\frac{i \omega}{\tau} + \omega^2}, \quad (3.35)$$

donde la constante  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n q^2}{m}}$  se denomina frecuencia de plasma.

Esta función de respuesta no depende del vector de onda  $\vec{k}$  por lo cual es una función de respuesta dieléctrica local. El significado físico de  $\omega_p$  será discutido en la sección 3.6.

### 3.5 Modelo hidrodinámico

Los efectos no locales en los materiales conductores pueden describirse de manera simple por medio del modelo hidrodinámico. La aproximación hidrodinámica además de que permite describir la excitación de las ondas longitudinales o ondas de plasma, tiene la ventaja de que las ecuaciones de Maxwell pueden ser fácilmente adaptadas para tratar la interacción entre los campos de las ondas transversales y longitudinales en superficies metálicas. En esta sección describimos este modelo.<sup>48</sup> Primero obtendremos la aproximación hidrodinámica a partir de la ecuación de movimiento del gas de electrones.

Puesto que la densidad de corriente inducida promedio  $\vec{J}$  del gas de electrones, está dada por

$$\vec{J} = -qn\omega\vec{x}, \quad (3.36)$$

donde  $n$  es la densidad de electrones y  $q$  es la carga del electrón.

Podemos obtener la ecuación de movimiento del gas de electrones escribiendo la ec. (3.30) en términos de la densidad de corriente  $\vec{J}$ .

Esto es

$$-m\omega^2\vec{J} = -iq^2n\omega\vec{E} + \frac{im\omega}{\tau}\vec{J}. \quad (3.37)$$

la cual podemos reescribir como

$$-\omega\vec{J} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}\vec{E} - \frac{1}{\tau}\vec{J}. \quad (3.38)$$

Estamos interesados en los sistemas donde los campos varían en el espacio, y por lo tanto la densidad electrónica también varía. Dado que al variar la densidad, el sistema sufre compresiones y rarefacciones, es necesario tomar en cuenta la compresibilidad del

sistema.<sup>6</sup> Esto es, tenemos que añadir una fuerza que relaciona la presión del gas de electrones con la variación espacial de  $\rho^{2,9}$ . Podemos completar la ec. (3.38) sumando al miembro de la izquierda un término  $\beta^2 \nabla \rho$ , el cual indica que cuando exista un gradiente de concentración  $\nabla \rho$ , habrá una tendencia de los electrones a fluir de las regiones de alta concentración a las de baja concentración. Una descripción detallada de las propiedades de un gas de electrones se encuentra en varios textos de física del estado sólido<sup>1</sup>. Aquí sólo exponemos en forma breve algunos conceptos con el fin de aclarar el significado físico de  $\beta$ .

Una de las propiedades del gas de electrones en el estado de reposo,<sup>4</sup> o sea, cuando la temperatura es cero, es que si hay  $N$  electrones en un volumen  $V$  (esto es, una densidad de electrones  $n = N/V$ ), entonces el estado de reposo del sistema de  $N$  electrones es formado ocupando todos los niveles de una partícula con vector de onda  $k$  menor que  $k_F$ , y dejando todos aquellos con  $k$  mayor que  $k_F$  sin ocupar. El vector  $k$ , en este caso, se refiere al vector de onda del electrón utilizado en mecánica cuántica<sup>1,9</sup> y  $k_F$  se conoce como vector de onda de Fermi y esta dado por la condición

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \quad (3.39)$$

La velocidad de Fermi se expresa en términos de la masa del electrón  $m$ , la constante de Planck  $h$  y el vector de onda de Fermi  $k_F$  como,

$$v_F = \frac{h}{m} k_F. \quad (3.40)$$

y la energía de Fermi se expresa en términos de la velocidad como

$$\epsilon_F = \frac{m}{2} v_F^2. \quad (3.41)$$

La velocidad de Fermi es la velocidad mas alta de los electrones en un metal y en la teoría de los metales juega un papel comparable a la velocidad térmica en un gas clásico. El valor de la velocidad de Fermi es cerca del 1% de la velocidad de la luz:

Al aumentar  $n$  aumenta  $k_F$ , aumenta la velocidad, y por lo tanto la energía. Por lo tanto el sistema busca disminuir su densidad dando origen a una compresibilidad finita descrita por el término  $\beta^2 \nabla \rho$ . El parámetro  $\beta$  se denomina constante de rigidez del gas de electrones y está relacionado con la compresibilidad del sistema.

Empleando la teoría microscópica de aproximación de fase aleatoria<sup>6</sup> en el límite de vectores de onda pequeños se puede obtener la constante de rigidez del gas de electrones  $\beta = \sqrt{375} v_F$ . Entonces, agregando el término  $\beta^2 \nabla \rho$  a (3.38) obtenemos que

$$-\omega \vec{J} + \beta^2 \nabla \rho + \frac{1}{\tau} \vec{J} = \frac{\omega_F^2}{4\pi} \vec{E}. \quad (3.42)$$

Esta ecuación se conoce como la aproximación hidrodinámica de la ecuación de movimiento del gas de electrones, la cual también puede ser derivada a partir de la ecuación de Boltzmann<sup>7</sup>.

Podemos encontrar una relación entre la densidad de corriente  $\vec{J}$  y  $\rho$  a partir de la ecuación de continuidad, la cual nos permitirá eliminar  $\rho$  de la ec. (3.42). Si en la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.43)$$

tomamos el gradiente en ambos miembros,

$$\nabla \nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \rho, \quad (3.44)$$

y resolvemos para  $\nabla \rho$ , obtenemos

$$\nabla \rho = \int \nabla \nabla \cdot \vec{J} dt. \quad (3.45)$$

Consideremos ahora que el gas de electrones se encuentra bajo la

influencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  con una variación en el tiempo y en el espacio de la forma de una onda plana, esto es,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (3.46)$$

Podemos expresar la densidad del número de electrones como

$$n_-(\vec{r}, t) = n + \delta n e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.47)$$

donde  $n$  es la densidad de electrones en estado de reposo y  $\delta n$  es la fluctuación del número de electrones libres por unidad de volumen.

La densidad de carga se expresa en función de las densidades de número de electrones y del número de iones positivos, como

$$\rho(\vec{r}, t) = -q(n_-(\vec{r}, t) - n_+(\vec{r}, t)). \quad (3.48)$$

En estado de reposo las densidades de número de electrones y número de iones positivos son iguales. Pero a altas frecuencias, debido a que los iones positivos no pueden seguir las variaciones del campo eléctrico por ser más masivos, se puede considerar que la densidad de número de iones positivos coincide con su valor en reposo, es decir,  $n_+(\vec{r}, t) = n$ . Se sigue entonces que

$$\rho(\vec{r}, t) = -q\delta n e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.49)$$

representa las fluctuaciones de la densidad de carga. A partir de esta ecuación y (3.36) se obtiene que

$$\nabla \rho = \frac{\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{J})}{i\omega}. \quad (3.50)$$

Sustituyendo esta relación en la ec. (3.42) obtenemos

$$-\omega \vec{J} + \beta^2 \frac{-i\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{J})}{i\omega} + \frac{1}{\tau} \vec{J} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}, \quad (3.51)$$

que podemos reescribir como,

$$\omega \vec{J} + \frac{i\omega}{\tau} \vec{J} - \beta^2 \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{J}) = i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}. \quad (3.52)$$

Bajo condiciones muy generales cualquier campo vectorial se puede

descomponer en una parte longitudinal y una transversal? Por ello, podemos expresar a  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$  en componentes en la dirección de  $\vec{k}$  y perpendicular a ella, es decir,

$$\vec{J} = \vec{J}^L + \vec{J}^T \quad \text{y} \quad \vec{E} = \vec{E}^L + \vec{E}^T \quad (3.53)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (3.52), obtenemos,

$$\omega^2 \left[ \vec{J}^L + \vec{J}^T \right] + \frac{i\omega}{\tau} \left[ \vec{J}^L + \vec{J}^T \right] - \beta^2 \vec{k} \cdot (\vec{J}^L + \vec{J}^T) = i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi} (\vec{E}^L + \vec{E}^T). \quad (3.54)$$

Separando en componentes longitudinal y transversal, esta ecuación se expresa como

$$\left[ \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 |\vec{k}|^2 \right] \vec{J}^L = i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}^L \quad (3.55)$$

y

$$\left[ \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right] \vec{J}^T = i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}^T \quad (3.56)$$

Pero como la densidad de corriente  $\vec{J}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ , se relacionan a través de la conductividad según la ec. (3.19), entonces la conductividad se puede separar en una componente transversal ( $\tau$ )

$$\sigma^T(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi}}{4\pi \left[ \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right]}, \quad (3.57)$$

y otra longitudinal (L)

$$\sigma^L(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega \frac{\omega_p^2}{4\pi}}{4\pi \left[ \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 |\vec{k}|^2 \right]}. \quad (3.58)$$

Utilizando la relación (3.21), obtenemos finalmente las componentes transversal y longitudinal de la función dieléctrica,

$$\epsilon^T(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}}, \quad (3.59)$$

y

$$\epsilon^L(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 |\vec{k}|^2} \quad (3.60)$$

Observamos que  $\epsilon^L$  depende del vector de onda  $\vec{k}$  siendo por lo tanto, una función de respuesta dieléctrica no local mientras que  $\epsilon^T$  coincide con la respuesta local obtenida del modelo de Drude.

En el límite de longitud de onda larga  $k \rightarrow 0$

$$\epsilon^T(0, \omega) = \epsilon^L(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \quad (3.61)$$

lo cual indica que en este límite no hay distinción entre las funciones dieléctricas longitudinal y transversal.

El modelo hidrodinámico se ha utilizado frecuentemente para estudiar diversas propiedades de los sistemas conductores entre las que se encuentra, la no localidad o dispersión espacial de la respuesta electromagnética del gas de electrones de conducción,<sup>50</sup> la existencia de fluctuaciones de carga (plasmones de bulto) en su interior, y el acoplamiento entre plasmones y ondas transversales en sistemas inhomogéneos.<sup>49,50</sup> Su simplicidad, la cual conduce frecuentemente a resultados analíticos es su principal ventaja. Empero una desventaja es el tratamiento incompleto de las propiedades electrónicas de las interfaces el cual requiere el imponer sobre el campo electromagnético las comúnmente llamadas condiciones adicionales a la frontera CAF's que, por otra parte además de las condiciones a la frontera del electromagnetismo se discutirán en el capítulo 4.

### 3.6 Propagación de ondas en materiales

En esta sección obtendremos la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas transversales y longitudinales, en un medio material.

Para obtener la ecuación de onda electromagnética en el vacío, seguiremos un camino similar al utilizado en el capítulo 2. Para obtener los modos electromagnéticos propios del sistema, se usan las ecuaciones de Maxwell macroscópicas (3.13) para un medio material homogéneo y no magnético ( $\mu \approx 1$ ). Asimismo, supondremos que en el interior del medio las densidades externas de carga  $\rho_{ext}$  y de corriente  $\vec{J}_{ext}$  valen cero ( $\rho_{ext} = 0$  y  $\vec{J}_{ext} = 0$ ). De allí, las ecs. (3.13) se escriben como,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.62) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.63)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.64) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.65)$$

Siguiendo un camino similar al del capítulo 2, tomamos el rotacional en ambos miembros de la ec. (3.64),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (3.66)$$

Sustituyendo  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  de la ec. (3.65), tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (3.67)$$

de donde podemos obtener los modos transversales y longitudinales de un medio homogéneo e isotrópico.

Consideremos que en el medio se propaga una onda plana

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.68)$$

que separamos en un campo longitudinal  $\vec{E}^L$  y otro transversal  $\vec{E}^T$ , los cuales cumplen<sup>7</sup>

$$\vec{k} \times \vec{E}^L = 0, \quad (3.69)$$

y

$$\vec{k} \cdot \vec{E}^T = 0. \quad (3.70)$$

Para un medio isotrópico podemos descomponer el tensor dieléctrico en sus componentes transversal  $\epsilon^T$  y longitudinal  $\epsilon^L$ , de forma que<sup>8</sup>

$$\vec{D}^T(\vec{k}, \omega) = \epsilon^T(\vec{k}, \omega) \vec{E}^T(\vec{k}, \omega) \quad (3.71)$$

y

$$\vec{D}^L(\vec{k}, \omega) = \epsilon^L(\vec{k}, \omega) \vec{E}^L(\vec{k}, \omega). \quad (3.72)$$

Sustituyendo las ecs. (3.71) y (3.72) en (3.67) obtenemos dos ecuaciones desacopladas

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E}^T = |\vec{k}|^2 \vec{E}^T = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^T \vec{E}^T, \quad (3.73)$$

y

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E}^L = 0 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^L \vec{E}^L, \quad (3.74)$$

que escribimos como<sup>9</sup>

$$\left[ |\vec{k}|^2 - \epsilon^T(\vec{k}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E}^T = 0, \quad (3.75)$$

y

$$\epsilon^L(\vec{k}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}^L = 0. \quad (3.76)$$

De la ec. (3.75) vemos que para que existan ondas transversales, es necesario que

$$\epsilon^T(\vec{k}, \omega) = \frac{|\vec{k}|^2 c^2}{\omega^2}, \quad (3.77)$$

<sup>7</sup>  $|\vec{k}|^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$ , aun cuando  $\vec{k}$  es complejo.

lo cual nos proporciona la relación entre  $\vec{k}$  y  $\omega$  que cumplen las ondas transversales y es por lo tanto, su relación de dispersión. De la ec. (3.76) vemos que para que existan ondas longitudinales es necesario que

$$\epsilon^L(\vec{k}, \omega) = 0. \quad (3.78)$$

Esta ecuación es la relación de dispersión para las ondas longitudinales.

Podemos encontrar una solución de las ecs. (3.77) y (3.78) substituyendo las funciones de respuesta dieléctrica obtenidas anteriormente. Utilizando la función de respuesta local del modelo de Drude, y con base en el hecho que a altas frecuencias los electrones efectuarán muchísimas oscilaciones entre cada colisión, tenemos que,  $\tau \rightarrow \infty$ . Bajo esta suposición, para los modos transversales tenemos que

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 |\vec{k}|^2, \quad (3.79)$$

y para los modos longitudinales

$$\omega = \omega_p. \quad (3.80)$$

Los electrones libres y los iones positivos dentro del metal se comportan en forma similar a un plasma cuya densidad oscila a la frecuencia natural  $\omega_p$ , por esta razón a  $\omega_p$  se le conoce como frecuencia de plasma. La frecuencia de plasma sirve como un valor crítico debajo del cual la luz que penetra, al interior de un metal, decae exponencialmente a partir de la frontera (pues  $\vec{k} \cdot \vec{k} < 0$ ), mientras que a frecuencias por encima de  $\omega_p$  el metal es transparente ( $\vec{k} \cdot \vec{k} > 0$ ).

Por otro lado, si utilizamos las funciones de respuesta del modelo hidrodinámico y la suposición que  $\tau \rightarrow \infty$ . Para los modos transversales obtenemos el mismo resultado anterior,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 |\mathbf{k}|^2 \quad (3.81)$$

y para los modos longitudinales,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \beta^2 |\mathbf{k}|^2 \quad (3.82)$$

que es similar al caso transversal salvo por la gran diferencia entre los valores de  $c$  y de  $\beta \approx 0.01c$ .

Hasta aquí, hemos estudiado la solución de las ecuaciones de Maxwell en la forma de ondas transversales y longitudinales en medios homogéneos, no magnéticos e isotrópicos. Hemos también concluido que para obtener la solución, en el caso de respuesta lineal, es necesario plantear un modelo de comportamiento del material. Asimismo, estudiamos dos modelos simples para metales. El modelo de Drude nos dio una relación de respuesta local entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  (este modelo es útil cuando los efectos de la no localidad pueden ser despreciados). Lo utilizaremos entonces para obtener resultados en un cálculo local de la reflectancia de una superred, que compararemos con los resultados obtenidos en un cálculo no local de la reflectancia de esa misma superred. Para el cálculo no local utilizaremos el modelo hidrodinámico porque su simplicidad conduce fácilmente a resultados analíticos. Como solución general de la ecuación de onda, utilizando este modelo, se obtienen para cada frecuencia ondas transversales, como en el caso local, pero también un conjunto de ondas longitudinales (conocidas como plasmones de bulto o, simplemente, ondas de plasma).

Como conclusión, en un medio no local, es posible excitar ondas adicionales a la del fotón. Estas nuevas ondas, llamadas ondas de plasma, se presentan en metales o semiconductores altamente impuros.

Como veremos en el capítulo siguiente, la presencia de estos modos en medios finitos requiere de condiciones adicionales a la frontera para poder determinar las amplitudes de los campos dispersados.<sup>30,49,50,51</sup>

## CAPITULO 4

### MEDIOS INHOMOGENEOS

Para el propósito de la óptica debido a que las cantidades en las ecuaciones de Maxwell pueden ser consideradas como un promedio sobre las fluctuaciones microscópicas,<sup>4,5</sup> un material que ocupa todo el espacio puede ser aproximado por un sistema con invarianza translacional (homogéneo). Como hemos visto, para un medio homogéneo la respuesta lineal en el espacio de Fourier toma la forma,

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \hat{\epsilon}(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad (4.1)$$

y en el espacio de  $\vec{r}$ ,

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \int \hat{\epsilon}(\vec{r}-\vec{r}', \omega) \vec{E}(\vec{r}', \omega) d^3r'. \quad (4.2)$$

Al combinar las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de onda para un medio material,

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D}, \quad (4.3)$$

que en términos de  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$  se expresa como,

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Aquí supusimos que la permeabilidad es casi 1 y puede ser aproximada por 1. El problema de resolver (4.2) y (4.3)

simultáneamente en un sistema homogéneo esta bien definido y fue resuelto en el capítulo anterior. Sin embargo, estamos interesados en el caso en el que una superficie o interfaz separa a dos medios distintos. En este caso, debido a la pérdida de la invarianza translacional, la permitividad  $\hat{\epsilon}$  en (4.2) depende de  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  en forma separada y no de su diferencia,  $\vec{r}-\vec{r}'$ .

En principio, uno tiene que plantear un modelo que incluya la superficie o interface y realizar una nueva derivación de (3.2). La solución ideal sería resolver la ecuación de Schrödinger y las ecuaciones de Maxwell simultáneamente.<sup>52</sup> En la literatura han aparecido diferentes artículos, donde así se procede para el caso de la superficie libre de un metal,<sup>53-58</sup> por varios métodos. Sin embargo estos estudios emplean muchas aproximaciones del modelo de la superficie. Las pruebas de las predicciones de estos modelos microscópicos no son satisfactorias o las predicciones no se pueden distinguir de las aproximaciones macroscópicas.<sup>59,60</sup>

Otro camino de solución de las ecuaciones de Maxwell en la interfaz entre dos medios, ampliamente aplicado en los libros de óptica,<sup>3,8</sup> consiste en obtener las soluciones generales de las ecuaciones para cada medio como si fuera homogéneo y elegir la solución específica al imponer las condiciones a la frontera.

A partir de las ecs. (4.1) y (4.3), podemos seguir este camino, pero debido al hecho de que estas ecuaciones tienen más eigensoluciones que la simple onda transversal de un medio sin dispersión espacial, se necesitan condiciones adicionales para determinar las amplitudes. Sauter<sup>61</sup> fue el primero en estudiar este tipo de problema, para el caso de metales. Desde entonces, ha habido

una gran discusión sobre las condiciones adicionales a la frontera (CAF's) y la necesidad de ellas.

El seguimiento de la discusión en la literatura proporciona razones para creer que no hay un camino seguro para derivar las CAF's por argumentos en un nivel macroscópico. Los resultados mostrados en la presente tesis están basados en un modelo de CAF's deducidas por Forstmann,<sup>54</sup> el cual denominamos como "modelo I" con el fin de distinguirlo de otros dos modelos para los cuales se pueden obtener resultados numéricos por la sustitución de los dos parámetros que dependen del modelo de las CAF's en todas las fórmulas desarrolladas en esta tesis. El modelo de Forstmann parte del requerimiento de que todas las densidades  $\rho$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{P}$  y todos los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  sean finitos, obteniendo, así, un conjunto único de condiciones a la frontera.

En este capítulo, primero, mostraremos como se deducen las condiciones a la frontera del electromagnetismo. Después, introduciremos el concepto de impedancia de superficie y obtendremos las ecuaciones de Fresnel. Luego, generalizaremos el teorema de Poynting para obtener el flujo de energía para los modos longitudinales y, finalmente, usaremos éste para deducir las CAF's del modelo I en la interfaz entre dos conductores. También discutiremos los resultados para una superficie entre un metal no local y un metal local o un aislante.

#### 4.1 Condiciones a la frontera del electromagnetismo

Las condiciones a la frontera del electromagnetismo se obtienen a partir de una integración de contorno de las ecuaciones macroscópicas

de Maxwell<sup>4</sup>. Consideremos una superficie  $F$  entre dos medios con diferentes propiedades electromagnéticas,  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  y  $\vec{D}_1$  en el medio 1 y  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{B}_2$  y  $\vec{D}_2$  en el medio 2. En toda la tesis, indicaremos las proyecciones normal y tangencial, a la superficie, de cualquier vector por los subíndices  $\perp$  y  $\parallel$ .

Del capítulo 3, las ecuaciones de Maxwell para un medio material, en su forma integral son,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho_{ext} dV, \quad (4.5)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.6)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \iint_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (4.7)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} \iint_A \left[ 4\pi \vec{j}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}. \quad (4.8)$$

Consideremos que el volumen  $V$  es un pequeño cilindro cuyas bases tienen área  $d\vec{S}$  y que se encuentra colocado de tal forma que una mitad del cilindro está en un lado de la superficie  $F$  y la otra mitad del cilindro en el otro lado, como se muestra en la fig. 1. En el límite, cuando la altura  $h$  del cilindro tiende a cero,  $h \rightarrow 0$ , el área lateral no contribuye a las integrales del lado izquierdo en las ecs. (4.5) y (4.6). Sólo las tapas superior e inferior contribuyen<sup>5</sup>. Si las tapas son tangentes a la superficie entonces

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot d\vec{S} = (D_{1\perp} - D_{2\perp}) |dS|, \quad (4.9)$$

y

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = (B_{1\perp} - B_{2\perp}) |dS|. \quad (4.10)$$

Nótese que  $D_{\perp} = \vec{D} \cdot \vec{n}$ , y de igual forma  $B_{\perp} = \vec{B} \cdot \vec{n}$ .

Si la densidad de carga es singular en la superficie tal como para producir una densidad de carga superficial  $\sigma$ , idealizada,

entonces el lado derecho de la ec. (4.5) es

$$4\pi \iiint_V \rho_{ext} dV = 4\pi\sigma |dS|. \quad (4.11)$$

Así que las componentes normales de  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  en uno y otro lado de la superficie están relacionadas de acuerdo a

$$D_{\perp 1} - D_{\perp 2} = 4\pi\sigma, \quad (4.12)$$

y

$$B_{\perp 1} - B_{\perp 2} = 0. \quad (4.13)$$

En otras palabras, decimos que la componente normal de  $\vec{B}$  es continua y la discontinuidad de  $\vec{D}$  en cualquier punto es igual a  $4\pi$  veces la densidad de carga superficial en ese punto. Si  $\sigma = 0$ , o lo que es lo mismo, no tenemos cargas externas singulares,

$$D_{\perp 1} - D_{\perp 2} = 0, \quad (4.14)$$

la componente normal de  $\vec{D}$  es continua.

Ahora bien, consideremos que el área  $A$  es un rectángulo de largo  $d\vec{l}$  y ancho  $L$  y su perímetro es la curva cerrada  $C$ . Dispuesto de tal forma que su ancho es perpendicular a la superficie  $F$ . Una mitad del rectángulo está de un lado de la superficie  $F$  y la otra mitad del otro lado, como se muestra en la fig. 1. Además la normal  $\vec{\xi}$  al área  $A$  es tangente a la superficie  $F$ .

En forma similar al caso anterior, en el límite cuando el ancho  $L$  del rectángulo tiende a cero,  $L \rightarrow 0$ , las integrales del lado izquierdo de las ecs. (4.7) y (4.8) son

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{l} = (E_{\parallel 2} - E_{\parallel 1}) |d\vec{l}|, \quad (4.15)$$

y

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot d\vec{l} = (B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1}) |d\vec{l}|. \quad (4.16)$$

Nótese que  $E_{\parallel} = (\vec{\xi} \times \vec{n}) \cdot \vec{E}$ , y  $B_{\parallel} = (\vec{\xi} \times \vec{n}) \cdot \vec{B}$ .

El lado derecho de (4.7) se hace cero porque  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  es finito en la superficie y el área del rectángulo se hace cero conforme su ancho se aproxima a cero. En el lado derecho de (4.8)  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  también se hace cero por la misma razón. Si la densidad de corriente es singular en la superficie tal como para producir una densidad de corriente superficial  $\vec{K}$ , idealizada, fluyendo exactamente sobre la superficie, entonces el lado derecho de (4.8) es

$$\frac{1}{c} \iint_A \left[ 4\pi \vec{J}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} d\vec{l} \cdot (\vec{n} \times \vec{K}). \quad (4.17)$$

Las componentes tangenciales de  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  en uno y otro lados de la superficie  $F$  están, por lo tanto, relacionadas por

$$E_{\parallel 2} - E_{\parallel 1} = 0, \quad (4.18)$$

y

$$B_{\parallel 2} - B_{\parallel 1} = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \cdot \vec{\zeta}. \quad (4.19)$$

En la ec. (4.19) debe entenderse que la densidad de corriente superficial  $\vec{K}$  en todo punto tiene sólo componentes paralelas a la superficie. La componente tangencial de  $\vec{E}$  a través de una superficie es continua, mientras que la componente tangencial de  $\vec{B}$  es discontinua por una cantidad cuya magnitud es igual a  $4\pi$  veces la magnitud de la densidad de corriente superficial y cuya dirección es paralela a  $\vec{K} \times \vec{n}$ , donde  $\vec{n}$  es un vector normal a la superficie  $F$ .

Finalmente, en ausencia de cargas y corrientes externas se obtiene, para cualquier superficie, que la componente tangencial del campo eléctrico es continua,

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}, \quad (4.20)$$

la componente normal de la inducción magnética es continua,

$$B_{\perp 1} = B_{\perp 2}, \quad (4.21)$$

la componente normal del desplazamiento eléctrico, en ausencia de cargas externas, es continua,

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2}, \quad (4.22)$$

y la componente tangencial del campo de inducción magnética es también continua

$$B_{\parallel 1} = B_{\parallel 2}. \quad (4.23)$$

Consideremos ahora, tal como se muestra en la fig. 2, las ondas que se propagan en dos medios con diferente respuesta dieléctrica separados por una interfaz plana sobre la que incide una onda electromagnética plana monocromática.

Al plano que forma el vector de onda  $\vec{k}_i$  de la onda incidente con el vector normal  $\vec{n}$  a la interfaz (ó superficie) lo llamamos plano de incidencia y al ángulo  $\theta_i$  entre ambos vectores, ángulo de incidencia. Debido a la presencia de la superficie, parte de la onda incidente se refleja y parte se transmite al otro medio. Todas las ondas planas linealmente polarizadas se pueden descomponer en dos tipos: la onda polarizada P (paralela) y la onda polarizada S (perpendicular o *Senkrecht* en alemán). La onda polarizada P es aquella cuyo vector de campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, y la onda polarizada S es aquella cuyo vector de campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia. Se acostumbra hacer esta división para simplificar los cálculos al tratar a cada onda por separado. Estas dos polarizaciones son linealmente independientes y cualquier campo electromagnético, independiente de su polarización, se puede expresar como una superposición de una onda S y otra P.<sup>6</sup>

Como los dos tipos de polarización se pueden tratar de manera independiente, puesto que en la interfaz que separa a dos medios no hay acoplamiento entre ellos, de las cuatro condiciones a la frontera sólo tres son diferentes de cero, y de éstas tres sólo dos son independientes. Por ejemplo, supongamos que una onda plana monocromática polarizada P, de la forma

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{o_i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \quad (4.24)$$

incide sobre la superficie.

Puesto que  $\vec{E}_{o_i}$  es constante, perpendicular a  $\vec{k}$  y en el plano de incidencia, sin hacer suposiciones acerca de sus direcciones, frecuencias, vectores de onda, fases o amplitudes, podemos escribir las ondas reflejada y transmitida como<sup>o</sup>

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{o_r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \quad (4.25)$$

y

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{o_t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)}. \quad (4.26)$$

De acuerdo con las condiciones a la frontera, la componente tangencial total de E en un lado de la superficie debe ser igual a la del otro lado. Entonces ya que  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a la interfaz

$$\vec{n} \times \vec{E}_i + \vec{n} \times \vec{E}_r = \vec{n} \times \vec{E}_t. \quad (4.27)$$

La continuidad de  $B_{\perp}$  se satisface trivialmente en este caso pues

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_i = \vec{n} \cdot \vec{B}_r = \vec{n} \cdot \vec{B}_t = 0. \quad (4.28)$$

Por otro lado de la ley de Ampere-Maxwell tenemos que

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = -\frac{c}{\omega} \vec{k} \cdot (\vec{n} \times \vec{B}), \quad (4.29)$$

por lo que la continuidad de  $B_{\perp}$  no es independiente de la continuidad de  $B_{\parallel}$ , la cual para polarización P es simplemente

$$\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, las dos condiciones de frontera independientes para el caso de polarización P son

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2} \quad (4.31)$$

y

$$B_{\parallel 1} = B_{\parallel 2}. \quad (4.32)$$

Lo mismo sucede para polarización S.

La ec. (4.27) (al igual que la (4.30)) se debe mantener en cualquier instante de tiempo y en todo punto de la interfaz. Consecuentemente,  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$  y  $\vec{E}_t$  deben tener precisamente la misma dependencia funcional de las variables  $t$  y  $\vec{r}$ , lo cual quiere decir que

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)|_F = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)|_F = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)|_F \quad (4.33)$$

Con esto, las exponenciales en la ec. (4.27) se anularían dejando una expresión independiente de  $t$  y  $\vec{r}$ . Como esto debe ser cierto para todos los valores del tiempo, los coeficientes de  $t$  deben ser iguales, obteniéndose

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t. \quad (4.34)$$

Recordemos que los electrones dentro del medio están sujetos a vibraciones a la frecuencia de la onda incidente. Claramente cualquier onda que sea esparcida tiene la misma frecuencia. Además

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r})|_F = (\vec{k}_r \cdot \vec{r})|_F = (\vec{k}_t \cdot \vec{r})|_F, \quad (4.35)$$

para cualquier  $\vec{r}$  en la interfaz.

De los primeros dos términos obtenemos

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]|_F = 0. \quad (4.36)$$

Esta expresión simplemente dice que  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  es perpendicular a la interfaz, es decir a  $\vec{n}$ . Obsérvese, sin embargo, que ya que las ondas reflejada e incidente están en el mismo medio  $|\vec{k}_i|^2 = |\vec{k}_r|^2$ . Del hecho de que  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  no tiene componente en el plano de la interfaz,

es decir  $\vec{n} \times (\vec{k}_i - \vec{k}_r) = 0$ , concluimos que

$$\vec{k}_{\parallel i} = \vec{k}_{\parallel r}, \quad (4.37)$$

la cual es una generalización de la ley de reflexión<sup>8</sup>

$$\theta_i = \theta_r \quad (4.38)$$

Asimismo, ya que  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  es paralelo a  $\vec{n}$ , los tres vectores  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  y  $\vec{n}$  están en el mismo plano, que es el plano de incidencia. Por lo cual, de la ec. (4.35) obtenemos

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]|_F = 0 \quad (4.39)$$

y, por consiguiente,  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  es también normal a la interfaz. Por ello  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$ ,  $\vec{k}_t$  y  $\vec{n}$  son todos coplanares. Como antes, las componentes tangenciales de  $\vec{k}_i$  y  $\vec{k}_t$  deben ser iguales y consecuentemente

$$\vec{k}_{\parallel i} = \vec{k}_{\parallel t}, \quad (4.40)$$

la cual es una generalización de la ley de Snell<sup>9</sup>

$$\sqrt{\epsilon_i} \sin(\theta_i) = \sqrt{\epsilon_t} \sin(\theta_t). \quad (4.41)$$

## 4.2 Impedancia de superficie

En esta tesis los cálculos de la reflectancia se harán mediante la impedancia de superficie. Es por ello que en esta sección se muestra el procedimiento de deducción de la fórmula de la reflectancia en términos de la impedancia de superficie. Para el caso de luz con polarización P denotaremos como  $R_p$  a la reflectancia y por  $Z_p$  a la impedancia de superficie.

Para obtener la fórmula deseada para  $R_p$ , consideramos una interfaz entre dos medios semiinfinitos arbitrarios. Estos medios pueden estar compuestos de un número diferente de capas. Existe, sin embargo, una restricción para el medio de la izquierda, a saber, en la

vecindad inmediata de la interfaz, éste debe estar caracterizado por una función dieléctrica  $\epsilon$  local. Esto implica que, a la izquierda de la interfaz, los campos se forman de una onda incidente y una onda reflejada. Consideraremos que la interfaz se encuentra en el plano  $xy$  y el plano de incidencia en el plano  $xz$ . Definimos la impedancia  $Z_p$  como

$$Z_p(\theta) = \frac{E_{\parallel}(\theta)}{B_{\parallel}(\theta)} \quad (4.42)$$

Como el vector  $B$  es paralelo al eje  $y$ , las componentes para el medio de la izquierda ( $z < 0$ ) son

$$E_x(z) = Z_I [B_{ly}(z) - B_{ry}(z)], \quad (4.43)$$

y

$$B_y(z) = B_{ly}(z) + B_{ry}(z), \quad (4.44)$$

donde  $B_{ly}(z)$  y  $B_{ry}(z)$  representan el campo de inducción magnética de la onda incidente y reflejada, respectivamente, y  $Z_I = E_{lx}/B_{ly}$  es la impedancia de superficie correspondiente a la onda incidente que tendría el medio de la izquierda si este fuera homogéneo.<sup>4</sup> Notamos que para la onda reflejada  $Z_I = -E_{rx}/B_{ry}$ . La sustitución de (4.43) y (4.44) en (4.42) permite escribir

$$Z_D(\theta) = \frac{Z_I [B_{ly} - B_{ry}]}{B_{ly} + B_{ry}} \quad (4.45)$$

de donde se obtienen la amplitud de reflexión

$$r_p = \frac{B_{ry}}{B_{ly}} = \frac{Z_I - Z_D}{Z_I + Z_D}, \quad (4.46)$$

y la reflectancia<sup>49</sup>

$$R_p = |r_p|^2 \quad (4.47)$$

En esta fórmula  $Z_D$  es la impedancia de superficie del medio que se localiza a la derecha de la interfaz.

La amplitud transmitida  $t_p$  se define (en forma no estandar) como

$$t_p = \frac{B_{ty}}{B_{ly}} \quad (4.48)$$

Siguiendo un camino similar obtenemos que

$$t_p = \frac{2Z_I}{Z_I + Z_D} \quad (4.49)$$

De la ec. (3.65) se obtiene para un medio local

$$Z_p = \frac{kc}{\omega\epsilon} \quad (4.50)$$

donde  $k$  es la componente del vector de onda normal a la superficie,  $\omega$  la frecuencia y  $\epsilon$  la función de respuesta dieléctrica. Si ambos medios son locales entonces

$$r_p = \frac{k_I \epsilon_D - k_D \epsilon_I}{k_I \epsilon_D + k_D \epsilon_I} \quad (4.51)$$

y

$$t_p = \frac{2k_I \epsilon_D}{k_I \epsilon_D + k_D \epsilon_I} \quad (4.52)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Fresnel para ondas con polarización P, y junto con expresiones análogas para polarización S forman las bases de la óptica física.<sup>3,0</sup>

### 4.3 Teorema de Poynting y energía de los modos longitudinales

En la siguiente sección discutiremos las condiciones adicionales a la frontera (CAF's) y deduciremos a partir del teorema de la energía las CAF's de Forstmann.<sup>20,51</sup> Por ello, en lo que sigue mostramos la deducción del teorema de Poynting y, a partir de ella, hacemos una generalización del teorema de la energía para el caso de un medio con

dispersión espacial.

La potencia ejercida por campos electromagnéticos externos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sobre una carga  $q$ , está dada por  $q\vec{V}\cdot\vec{E}$ , donde  $\vec{V}$  es la velocidad de la carga. Puesto que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, el campo magnético no hace trabajo. Si existe una distribución continua de carga y corriente, la potencia transferida en un volumen finito  $v$  es

$$\int_v \vec{J}\cdot\vec{E} dv. \quad (4.53)$$

Esta potencia representa una conversión de la energía electromagnética en energía mecánica o térmica, y deberá ser balanceada por una correspondiente rapidez de decremento de energía en el campo electromagnético dentro del volumen  $v$ . Para exhibir esta ley de conservación usamos las ecuaciones de Maxwell para expresar (4.53) en otros términos. Así usando la ley de Ampere-Maxwell podemos eliminar  $\vec{J}$ ,

$$\int_v \vec{J}\cdot\vec{E} dv = \frac{1}{4\pi} \int_v \left[ c\vec{E}\cdot(\nabla \times \vec{H}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right] dv. \quad (4.54)$$

Si ahora empleamos la identidad vectorial,

$$\nabla\cdot(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}\cdot(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla \times \vec{H}) \quad (4.55)$$

y usamos la ley de Faraday, obtenemos

$$\int_v \vec{J}\cdot\vec{E} dv = -\frac{1}{4\pi} \int_v \left[ c\nabla\cdot(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right] dv. \quad (4.56)$$

Si en el medio macroscópico involucrado  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  y  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ , siendo  $\mu$  y  $\epsilon$  cantidades independientes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  e independientes del tiempo, entonces las derivadas con respecto al tiempo en el lado derecho se pueden escribir como

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (4.57)$$

y

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{B}. \quad (4.58)$$

Ahora introducimos el escalar

$$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (4.59)$$

y el vector

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}), \quad (4.60)$$

los cuales nos permiten escribir la ec. (4.56) como

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = \int_V \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \right] dv. \quad (4.61)$$

Empleando el teorema de Gauss,

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{d}{dt} \int_V u \, dv + \int_A \vec{S} \cdot d\vec{a}. \quad (4.62)$$

Notamos que esta ecuación tiene la forma de una ley de conservación si interpretamos a  $u$  como la densidad de energía y a  $\vec{S}$  como la densidad de flujo de energía electromagnética. El vector  $\vec{S}$  es llamado el vector de Poynting. La ec. (4.61) también se puede escribir en la forma de una ecuación diferencial de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (4.63)$$

El significado físico de la forma integral, ec. (4.62) y diferencial, ec. (4.63), es que la rapidez de cambio en el tiempo de la energía electromagnética dentro de cierto volumen más el flujo de energía por unidad de tiempo fuera de él, a través de la superficie frontera del volumen, es igual al negativo del trabajo hecho por los campos sobre las cargas dentro del volumen. Este es el enunciado de conservación de la energía.

Si el medio no es magnético, es decir,  $\mu = 1$ , podemos escribir el teorema de la energía en forma diferencial como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{8\pi} B^2 \right] = \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})) + \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (4.64)$$

En esta última ecuación  $-\frac{E \cdot D}{8\pi}$  es la densidad de energía del campo eléctrico,  $-\frac{B^2}{8\pi}$  es la densidad de energía del campo de inducción magnética,  $-\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$  es la densidad de flujo de energía y  $\vec{E} \cdot \vec{J}$ , en el caso general, no será solamente el ritmo de generación de calor en el sistema, sino que también contendrá términos que describen el intercambio de energía desde el campo hacia el medio y viceversa.

Ahora, a partir de la expresión del teorema de la energía llegaremos a un resultado más general para el caso de un metal con dispersión espacial. Con este fin, obtendremos el término  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  a partir de la ecuación del medio (metal no local). Empleando el modelo hidrodinámico discutido en la sección 3.5, esto es,

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{J} - \beta^2 \nabla \rho, \quad (4.65)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de relajación.

Multipliquemos ambos miembros por  $\vec{J}$ ,

$$\vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{J} \cdot \vec{J} - \beta^2 \vec{J} \cdot \nabla \rho. \quad (4.66)$$

Resolviendo para  $\vec{J} \cdot \vec{E}$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial J^2}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \vec{J} \cdot \vec{J} + \beta^2 \vec{J} \cdot \nabla \rho \right]. \quad (4.67)$$

Pero

$$\vec{J} \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot \vec{J} \rho - \rho \nabla \cdot \vec{J}. \quad (4.68)$$

De la ecuación de continuidad de la carga, tenemos

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.69)$$

sustituyendo (4.69) en (4.68),

$$\vec{J} \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot \vec{J} \rho + \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J} \rho + \frac{1 \partial \rho^2}{2 \partial t} \quad (4.70)$$

Sustituyendo en (4.67)

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial J^2}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \vec{J} \cdot \vec{J} + \beta^2 \nabla \cdot \vec{J} \rho + \frac{\beta^2 \partial \rho^2}{2 \partial t} \right], \quad (4.71)$$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial J^2}{\partial t} + \frac{\beta^2 \partial \rho^2}{2 \partial t} \right] + \frac{4\pi}{\omega_p^2 \tau} \vec{J} \cdot \vec{J} + \frac{4\pi \beta^2}{\omega_p^2} \nabla \cdot \vec{J} \rho. \quad (4.72)$$

Ahora considerámos que  $\vec{D}$  en la ec. (4.64) nos representa la respuesta dieléctrica de los electrones ligados unicamente, es decir sustituimos  $\vec{D}$  por  $\epsilon_B \vec{E}$ , puesto que, la contribución a la respuesta dieléctrica de los electrones libres es considerada por medio del modelo hidrodinámico a través del cálculo de las densidades de carga  $\rho$  y corriente  $\vec{J}$ .

Bajo estas consideraciones, sustituyendo (4.72) en (4.64), obtenemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{8\pi} B^2 + \frac{2\pi}{\omega_p^2} J^2 + \frac{2\pi\beta^2}{\omega_p^2} \rho^2 \right] = \frac{4\pi}{\omega_p^2 \tau} \vec{J} \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \left[ \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} \rho \vec{J} \right]. \quad (4.73)$$

En esta ecuación además de los términos de energía eléctrica y magnética tenemos el término  $\frac{2\pi}{\omega_p^2} J^2$  que representa la energía cinética del gas de electrones libres y el término  $\frac{2\pi\beta^2}{\omega_p^2} \rho^2$  que representa la densidad de energía potencial debido a la inhomogeneidad introducida en el gas por la onda de plasma longitudinal. Además del vector de

Poynting aparece otra contribución,  $\frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} \vec{\rho} \cdot \vec{J}$ , al flujo de energía. Por

lo tanto, la ec. (4.73) nos dice que la densidad de energía en un volumen disminuye por un flujo de energía fuera de este y por la pérdida de energía en forma de calor  $\frac{4\pi}{\omega_p^2} \vec{J} \cdot \vec{J}$  la cual notamos que es

definida positiva.

Observamos que hay un flujo adicional de energía proporcional a  $\beta^2$  debido a la fuerza de presión del gas de electrones, la cual se manifiesta en la dispersión espacial. En un metal este flujo de energía podría ser transportado por las ondas de plasma. Por lo tanto podemos separar la densidad de flujo de energía en la forma,

$$\vec{S} = \vec{S}^T + \vec{S}^L \quad (4.74)$$

donde

$$\vec{S}^T = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (4.75)$$

representa la densidad de flujo de energía en las ondas transversales

y

$$\vec{S}^L = \frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} \vec{\rho} \cdot \vec{J}, \quad (4.76)$$

la densidad de flujo de energía en las ondas longitudinales.

Para el caso de ondas monocromáticas las ecs. (4.75) y (4.76) se pueden promediar en el tiempo, obteniéndose

$$\bar{S}_z^T = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E}_x \vec{B}_y^*) \quad (4.77)$$

y

$$\bar{S}_z^L = \frac{2\pi\beta^2}{\omega_p^2} \text{Re}(\rho_z \vec{J}_z^*) \quad (4.78)$$

#### 4.4 Condiciones adicionales a la frontera (CAF'S)

Nuestro punto de partida será la solución general del sistema homogéneo, o sea, la solución simultánea de la ec. (4.4) y la ecuación del material, que en nuestro caso, es la ecuación del modelo hidrodinámico, ec. (4.65).

Como vimos en el capítulo 3, la solución de estas ecuaciones para el medio homogéneo consiste de ondas transversales y ondas longitudinales. Para un medio inhomogéneo formado por dos medios diferentes, podemos encontrar una solución general igualando en su interfaz, a través de las condiciones a la frontera, las soluciones generales para cada uno de los medios.<sup>4,8</sup> Para poder igualar las soluciones generales de las ecs. (4.4) y (4.65) en ambos medios necesitamos 4 condiciones a la frontera.<sup>10,51</sup> Consideraremos la situación en óptica, donde la dependencia en el tiempo esta dada como  $\exp(-i\omega t)$ . Como en la sección 4.1, al realizar una integración de contorno de la ec. (3.64) concluimos que por que los campos son finitos en todas partes

$$E_{\parallel} \text{ es continuo.} \quad (4.79)$$

Siguiendo, obtenemos de

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \vec{J}), \quad (4.80)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \vec{J}) = 0, \quad (4.81)$$

y el argumento de la caja de píldoras, que

$$(\vec{E} - \frac{4\pi}{i\omega} \vec{J})_{\perp} \text{ es continuo.} \quad (4.82)$$

En óptica estándar, esta ecuación se establece como la continuidad de  $D_{\perp}$ , y con  $D_{\perp} = \epsilon E_{\perp}$  uno generalmente tiene una

discontinuidad en  $E_{\perp}$  y  $J_{\perp}$ . Una discontinuidad en el campo eléctrico es equivalente a tener una densidad de carga infinita (ec. (2.28)), algunas veces llamada densidad de carga superficial. Sauter<sup>61</sup> fue el primero en señalar que las fuerzas que generan una onda longitudinal llegarían a ser infinitas de haber una densidad de carga infinita, lo cual sería además inconsistente con cualquier modelo microscópico de la superficie. Por lo tanto, complementamos nuestras ecuaciones macroscópicas con el requerimiento que todos los campos  $E$ ,  $B$  y todas las densidades  $\rho$ ,  $J$ , y  $P$  sean finitas.<sup>30, 54</sup> Esto da la condición a la frontera

$$E_{\perp} \text{ es continua} \quad (4.83)$$

y de (4.82),

$$J_{\perp} \text{ es continua} \quad (4.84)$$

Como todas las cantidades en las ecuaciones de Maxwell son finitas la densidad de energía también debe ser finita y por tanto el flujo de energía debe ser continuo. Entonces el argumento de la caja de píldoras aplicado a la ec. (4.73) nos dice que la componente normal del flujo de energía,

$$\left[ \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{4\pi}{\omega_p^2} \beta^z \vec{J} \rho \right]_{\perp}, \quad (4.85)$$

debe ser continua. La componente normal del vector de Poynting, ya es continua en virtud de (4.79), (4.83) y (4.84). La continuidad de

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} \beta^z J_{\perp} \rho \quad (4.86)$$

es una nueva condición a la frontera.

Como  $J_{\perp}$  es continua (ec. (4.84)) para que (4.86) sea continua se requiere que

$$\frac{4\pi\beta^2}{\omega_p^2} \rho \text{ sea continua.} \quad (4.87)$$

Esta ecuación es una forma más apropiada para expresar la nueva condición a la frontera.

La interpretación de la condición (4.87) es la siguiente. En cualquier plano introducido en un medio homogéneo hay una fuerza de presión transmitida a través de este plano si la densidad de carga es inhomogénea. La fuerza de presión actuando normalmente en la interfaz debe ser la misma en ambos lados como la presión en una interfaz entre dos líquidos, lo cual se expresa mediante la ec. (4.87).

Hace algún tiempo se mostró<sup>62</sup> que en una interfaz metal-metal, (4.87) como una cuarta condición es suficiente para determinar todas las amplitudes. En una superficie libre (por ejemplo en la interfaz entre un medio y el vacío) 3 condiciones, (4.79), (4.83) y (4.84), son necesarias y implican<sup>61</sup> ya (4.85) por que  $\vec{J}_\perp = 0$ .

Hasta aquí, hemos mostrado como se deducen las CAF's que utilizaremos en el cálculo de los resultados de esta tesis, pero dichas CAF's no son las únicas. En la literatura se encuentran diferentes CAF's corresponden a diferentes suposiciones de la respuesta no local del sistema cerca de su interfaz. También, existe una gran controversia a cerca de cuales CAF's son mejores.<sup>31,63,64</sup>

Varios cálculos los cuales involucran interfaces entre medios no locales y interfaces entre un medio no local y un medio local han aparecido en la literatura.<sup>65-67</sup> Sin embargo, nosotros hemos encontrado que varias de las CAF's conocidas, incluyendo las CAF's que fueron deducidas en las páginas anteriores, pueden ser expresadas como la continuidad de  $\mu\vec{J}_\perp$  y de  $v\rho$ , donde  $\vec{J}_\perp$  es la componente normal a la

superficie de la densidad de corriente de conducción,  $\rho$  es la fluctuación inducida de la densidad de carga en el gas de electrones, y  $\mu$  y  $\nu$  son parámetros que dependen del metal no local. Algunas de las CAF's conocidas corresponden a la elección siguiente de los valores de estos parámetros:  $\mu = 1$  y  $\nu = \beta^2/\omega_p^2$  (modelo I) corresponden a las condiciones deducidas por Forstmann<sup>51,50</sup> que son las CAF's que utilizamos en el cálculo de nuestros resultados,  $\mu = 1/\omega_p^2$  y  $\nu = \beta^2$  (modelo II) corresponden a Boardman<sup>47</sup> y  $\mu = 1$  y  $\beta = 1$  (modelo III) corresponden a Eliasson,<sup>60</sup> donde  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma del gas de electrones y  $\beta$  es la constante de rigidez, la cual es la fuente de la no localidad.

Completamos nuestro estudio de las CAF's considerando la interfaz entre un conductor no local y un medio local. Una revisión de estas fue dada recientemente por Del Castillo y Mochán.<sup>69</sup> La conclusión de estos autores es que en la interfaz entre un conductor local y uno no local,  $\rho_1 = 0$  para los modelos I y II, y  $J_{11} = J_{12}$  para el modelo III,  $J_{12}$  es la proyección transversal de  $J_2$ , y en la interfaz entre un dieléctrico local y un metal no local,  $\rho_1 = 0$  para el modelo II y  $J_{11} = 0$  para los modelos I y III. Los subíndices 1 y 2 denotan los campos en el interior del medio 1 y 2 respectivamente, el medio 1 es un metal no local y el medio 2 será un metal local o un dieléctrico local, según sea el caso. Es interesante notar que la condición  $\rho_1 = 0$  no produce acoplamiento entre las ondas transversales y longitudinales en una superficie entre un metal no local y uno local. Experimentalmente, sin embargo, se ha observado lo contrario.

Los resultados de esta sección serán empleados mas adelante en la construcción de la matriz de transferencia de superredes conductoras.

## CAPITULO 5

### ONDAS DE SUPERFICIE Y DE PELICULAS

Los medios inhomogéneos pueden proporcionar nuevas soluciones de la ecuación de onda que no pueden existir en medios espacialmente homogéneos. En este capítulo, presentamos la revisión de la relación de dispersión de las ondas de superficie. Haremos primero una discusión de los plasmones de superficie, después obtendremos la relación de dispersión de los modos de una sola superficie y los de una película simétrica, estudiaremos los modos de superficie y los polos de la reflectancia, y, para terminar, revisaremos el caso de las ondas guiadas transversales y longitudinales en una película.

#### 5.1 Plasmones de superficie

Como se vió, para tener en un medio homogéneo infinito un campo longitudinal  $E^L$  diferente de cero debe de cumplirse la condición  $\epsilon^L(\vec{k}, \omega) = 0$ . Esta condición nos da la relación de dispersión para los modos longitudinales y desacopla el campo longitudinal de los campos transversales. Así en el caso de un medio homogéneo infinito todas las

posibles oscilaciones de plasma son de naturaleza puramente longitudinal en el sentido que el campo  $\vec{E}^L$  diferente de cero, no crea campos transversales.

Por otro lado, hay dos grupos de oscilaciones de plasma para el caso en que una interfaz separa a dos medios distintos. Uno consiste de oscilaciones de bulto similares a las del medio infinito y el otro consiste de oscilaciones de superficie. En las primeras el único papel que juega la superficie es determinar sus amplitudes a través de las condiciones a la frontera.

Las ondas de superficie son de naturaleza diferente. Primero su relación de dispersión no es la condición  $\epsilon^L = 0$  y consecuentemente no están relacionadas con la distribución espacial de la carga en el interior de los materiales. Segundo el campo longitudinal  $\vec{E}^L$  crea campos transversales los cuales a su vez lo modifican.

Como una superred está formada por películas delgadas de diferentes materiales, es de esperar que los efectos de la superficie, como son las oscilaciones superficiales, sean importantes para explicar la forma del espectro de la reflectancia y la relación de dispersión de una superred. Por ello, en este capítulo discutimos algunas de las características de este tipo de ondas. Como se recordará las oscilaciones de bulto ya fueron discutidas en los capítulos anteriores.

## 5.2 Modos de una sola superficie

Examinemos el plano de separación entre dos medios locales no magnéticos con constante dieléctrica  $\epsilon_1(\omega)$  y  $\epsilon_2(\omega)$  respectivamente.

Elegimos el sistema de coordenadas de manera que el eje  $z$  sea normal al límite de separación  $z = 0$ , y este dirigido hacia el interior del medio 2. Consideremos el caso de polarización  $P$  con el vector  $\vec{B}$  paralelo al eje  $y$ . Entonces, la ecuación de onda para el campo de inducción magnética en todos los puntos dentro del medio 1 toma la forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ - \\ c_1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial z^2} - \begin{bmatrix} Q^2 \\ c_1 \end{bmatrix} B_{y1} - \frac{\omega^2}{c^2} B_{y1} = 0. \quad (5.1)$$

El índice 1 quiere decir que este es un campo magnético en el medio 1. Análogamente, el campo magnético en el medio 2 será designado con el símbolo  $B_z$ . Aquí supusimos que el campo se propaga como una onda a lo largo de la dirección  $x$  con vector de onda  $Q$  y frecuencia  $\omega$ . Análogamente, en el medio 2 tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ - \\ c_2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 B_{yz}}{\partial z^2} - \begin{bmatrix} Q^2 \\ c_2 \end{bmatrix} B_{yz} - \frac{\omega^2}{c^2} B_{yz} = 0. \quad (5.2)$$

Las soluciones de las ecs (5.1) y (5.2) se relacionan con ayuda de las condiciones de frontera

$$E_{x1} = E_{xz}, \quad B_{y1} = B_{yz}. \quad (5.3)$$

Buscamos las soluciones de las ecs (5.1) y (5.2) en la forma

$$B_{y1} = B_{O1} e^{i(Qx - \omega t + k_1 z)} \quad (5.4)$$

y

$$B_{yz} = B_{O2} e^{i(Qx - \omega t - k_2 z)}, \quad (5.5)$$

tal que  $B_{y1}$  y  $B_{yz}$  tiendan a cero cuando  $z \rightarrow \mp \infty$ , respectivamente. Con otras palabras, buscamos precisamente los modos electromagnéticos localizados alrededor de la interfaz. Sustituyendo (5.4) y (5.5) en las ecs. (5.1) y (5.2), obtenemos

$$-\frac{k_1^2}{\epsilon_1} B_{y1} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{Q^2}{\epsilon_1} \right] B_{y1} = 0, \quad (5.6)$$

y

$$-\frac{k_2^2}{\epsilon_2} B_{y2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{Q^2}{\epsilon_2} \right] B_{y2} = 0. \quad (5.7)$$

de la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$k_1 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 / c^2 - Q^2}, \quad (5.8)$$

de la segunda

$$k_2 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 / c^2 - Q^2}. \quad (5.9)$$

Pasemos a la aplicación de las condiciones a la frontera. De la igualdad de las componentes tangenciales  $B_{y1}$  y  $B_{y2}$ , sigue que  $B_{O1} = B_{O2}$ . La igualdad de las componentes tangenciales del campo eléctrico proporciona

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial B_{y2}}{\partial z}, \quad (5.10)$$

de donde se obtiene

$$\frac{k_1}{\epsilon_1} = -\frac{k_2}{\epsilon_2} \quad (5.11)$$

o bien

$$\frac{1}{\epsilon_1} \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 / c^2 - Q^2} = -\frac{1}{\epsilon_2} \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 / c^2 - Q^2}. \quad (5.12)$$

Resolviendo la ec. (5.12) respecto de  $Q^2$  obtenemos la siguiente relación de dispersión para la onda superficial,

$$Q^2 = \left[ \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] \frac{\omega^2}{c^2} \quad (5.13)$$

La fórmula (5.13) nos proporciona en forma implícita la ligazón entre la frecuencia de las oscilaciones electromagnéticas superficiales y el vector de onda.

En general  $k_1$  y  $k_2$  son números complejos. Para que la onda sea en realidad una onda de superficie se debe elegir en las ecs. (5.8) y (5.9) las raíces cuadradas que tengan una parte imaginaria positiva. De esta forma, la función de onda alcanzará su máximo cerca de la superficie y decaerá exponencialmente a medida que se aleja de ella. Para esto los radicandos de las ecs. (5.8) y (5.9) deberán ser menores que cero,

$$(\partial c_1 / \partial \omega) > \epsilon_1, \quad (\partial c_2 / \partial \omega) > \epsilon_2. \quad (5.14)$$

Combinando la primera de estas desigualdades con la ecuación de dispersión escrita en la forma

$$(c \partial / \partial \omega)^2 = \epsilon_1 \epsilon_2 / (\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (5.15)$$

obtenemos

$$\epsilon_2 / (\epsilon_2 + \epsilon_1) > 1, \quad (5.16)$$

de donde sigue que  $\epsilon_2(\omega) + \epsilon_1(\omega)$  debe ser negativo y que  $\epsilon_1(\omega)$  ó  $\epsilon_2(\omega)$  debe ser positiva, esto es,  $\epsilon_1(\omega) > 0$  y  $\epsilon_2(\omega) < -\epsilon_1(\omega)$  ó  $\epsilon_2(\omega) > 0$  y  $\epsilon_1(\omega) < -\epsilon_2(\omega)$ .

Es útil analizar el límite de la ecuación de dispersión (5.13) cuando es posible despreciar el retardo electrodinámico. Esto se logra al satisfacer la longitud de la onda superficial la siguiente desigualdad

$$\lambda < cT, \quad (5.17)$$

es decir, la longitud de onda  $\lambda$  es menor que el recorrido de la luz durante el periodo de oscilación  $T$  del campo. Entonces, en (5.13) podemos considerar que la velocidad de la luz  $c$  es igual al infinito y la ecuación de dispersión adquirirá el aspecto

$$\partial^2 (\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)) = 0, \quad (5.18)$$

de donde obtenemos

$$\epsilon_1(\omega) = -\epsilon_2(\omega) \quad (5.19)$$

De la última ecuación vemos que en el límite de las ondas electrostáticas superficiales (cuando  $c \rightarrow \infty$ ) y despreciando la dispersión espacial, la frecuencia de la onda superficial no depende de su vector de onda.

Para el caso en el que uno de los medios es el vacío, por ejemplo el medio 1, la igualdad (5.19) se convierte en

$$\epsilon_2 = -1. \quad (5.20)$$

Si además el medio 2 es un metal caracterizado por una función de respuesta de Drude, tenemos que

$$1 - \omega_{PS}^2 / \omega^2 = -1 \quad (5.21)$$

o bien

$$\omega_{PS} = \omega_{PZ} / \sqrt{2}, \quad (5.22)$$

donde denotamos por PS al plasmón de superficie.

Las oscilaciones de este tipo reciben el nombre de oscilaciones de plasma superficiales o, más brevemente, plasmones de superficie. Como el vector  $\vec{B}$  en semejante modo superficial yace en el plano de separación y es perpendicular al vector de onda  $\vec{Q}$ , la onda es de tipo H-onda transversal, abreviado como TH<sup>4</sup>.

La distribución del campo eléctrico en el espacio puede ser calculada por el campo magnético hallado con la ayuda de la ecuación de Ampere-Maxwell. Como el campo magnético se encuentra dirigido a lo largo del eje  $y$  y depende de las coordenadas  $x$  y  $z$ , su rotacional tiene dos componentes dirigidas a lo largo de los ejes  $x$  y  $z$ . Esto quiere decir que la onda superficial, siendo transversal en relación con el campo magnético, respecto del campo eléctrico no es longitudinal ni transversal. El campo eléctrico se encuentra en el plano  $xz$  en

tanto que se propaga en la dirección  $x$  y decae en la dirección  $z$ .

Se puede mostrar que la onda superficial transversal eléctrica (TE) no puede existir.<sup>4</sup>

### 5.3 Modos de una película simétrica

Ahora estudiemos el caso de una película simétrica con un ancho  $d$  y función dieléctrica  $\epsilon_2(\omega)$ , limitada por dos medios semi-infinitos de función dieléctrica  $\epsilon_1(\omega)$ . Supongamos que las interfases de la película están localizadas en  $z = 0$  y  $z = d$ . Para obtener la relación de dispersión de los modos de superficie se supone una solución de onda saliente para la ecuación de onda. El vector de onda de las ondas salientes será de la forma  $\vec{k} = (Q, 0, k_z)$ , donde  $Q$  es la componente paralela a la interface y  $k_z$  la componente perpendicular. La onda superficial se propagará por la dirección  $x$ . Como en la sección anterior, busquemos una solución de la ecuación de onda con la que el vector  $\vec{B}$  se halle en la superficie (plano) de separación. Si el vector  $\vec{B}$  está dirigido paralelamente al eje  $y$ , la solución para el campo de inducción magnética es

$$B_y(x, z, t) = B_1^- e^{i(Qx - \omega t + k_z z)}, \quad \text{para } z < 0, \quad (5.23)$$

$$= B_2^+ e^{i(Qx - \omega t + k_z z)} + B_2^- e^{i(Qx - \omega t - k_z z)}, \quad \text{para } 0 < z < d, \quad (5.24)$$

$$= B_1^+ e^{i(Qx - \omega t - k_z(z-d))}, \quad \text{para } z > d. \quad (5.25)$$

Como cada término representa una onda que satisface la ecuación de onda para el campo de inducción magnética,

$$k_z = \left[ \epsilon_i(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - Q^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2. \quad (5.26)$$

El campo eléctrico lo podemos obtener a partir de la ecuación de Ampere-Maxwell. De esta forma la componente tangencial del campo eléctrico es

$$E_x(x, z, t) = -Z_1 B_1^- e^{i(Qx - \omega t + k_1 z)}, \quad \text{para } z < 0, \quad (5.27)$$

$$= Z_2 B_2^+ e^{i(Qx - \omega t + k_2 z)} - Z_2 B_2^- e^{i(Qx - \omega t - k_2 z)}, \quad \text{para } 0 < z < d, \quad (5.28)$$

$$= Z_1 B_1^+ e^{i(Qx - \omega t - k_1(z-d))}, \quad \text{para } z > d. \quad (5.29)$$

donde

$$Z_l = \frac{k_l c}{\omega}, \quad l = 1, 2. \quad (5.30)$$

es la impedancia de superficie discutida en la sección 4.2.

Apliquemos las condiciones a la frontera en la interface  $z = 0$ . Para la componente tangencial del campo de inducción magnética  $B_y$ ,

$$B_1^- = B_2^+ + B_2^-. \quad (5.31)$$

De la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico

$$-Z_1 B_1^- = Z_2 (B_2^+ - B_2^-). \quad (5.32)$$

En la interface  $z = d$ , de la continuidad de la componente tangencial del campo magnético,

$$B_1^+ = B_2^+ e^{ik_2 d} + B_2^- e^{-ik_2 d}, \quad (5.33)$$

y de la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico,

$$Z_1 B_1^+ = Z_2 (B_2^+ e^{ik_2 d} - B_2^- e^{-ik_2 d}). \quad (5.34)$$

A partir de las ecs. (5.31)-(5.34) tenemos,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & -Z_2 & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d} & e^{-ik_2 d} & -1 \\ 0 & Z_2 e^{ik_2 d} & -Z_2 e^{-ik_2 d} & -Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^- \\ B_2^+ \\ B_2^- \\ B_1^+ \end{bmatrix} = 0. \quad (5.35)$$

Para que existan ondas superficiales el determinante de la ec. (5.35) deberá de ser cero. Por lo tanto, la relación de dispersión se obtiene de

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & -Z_2 & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d} & e^{-ik_2 d} & -1 \\ 0 & Z_2 e^{ik_2 d} & -Z_2 e^{-ik_2 d} & -Z_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.36)$$

Desarrollando el determinante, obtenemos

$$e^{2ik_2 d} = (Z_2 + Z_1)^2 / (Z_2 - Z_1)^2, \quad (5.37)$$

Esta ecuación es la relación de dispersión para una película simétrica. Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos dos casos,

$$e^{ik_2 d} = (1 + Z_1/Z_2) / (1 - Z_1/Z_2), \quad (5.38)$$

o

$$-e^{ik_2 d} = (1 + Z_1/Z_2) / (1 - Z_1/Z_2). \quad (5.39)$$

Las ecs. (5.38) y (5.39) se pueden escribir en la forma,<sup>70</sup>

$$\frac{c_2(\omega)}{c_1(\omega)} = i \frac{k}{k_1} \tan(k_2 d / 2), \quad (5.40)$$

y

$$\frac{c_2(\omega)}{c_1(\omega)} = -i \frac{k_2}{k_1} \cot(k_2 d / 2). \quad (5.41)$$

Estas relaciones de dispersión corresponden a modos simétricos y antisimétricos, respectivamente.

La condición para que existan modos en la interfaz entre dos medios se obtuvo en la sección anterior. En este caso, para que las ondas sea de superficie se debe elegir, en la ec. (5.26), la raíz cuadrada que tenga una parte imaginaria positiva.

Si el medio 1 es el vacío y el medio 2 es un metal con función dieléctrica  $\epsilon_2(\omega) = 1 - \omega_{p2}^2/\omega^2$ . Ambos modos comienzan en cero cuando  $k_z d \rightarrow 0$  y se aproximan a  $\omega_{p2}/\sqrt{2}$  cuando  $k_z d \rightarrow \infty$ . Si el espesor  $d$  de la película es tal que  $\omega_{p2}d/c \gg 1$ , las oscilaciones de cada superficie llegarán a estar desacopladas.

Si el medio 1 es un metal con frecuencia de plasma  $\omega_{p1}$  y el medio 2 otro metal con frecuencia de plasma  $\omega_{p2}$  distinta, entonces, cuando  $k_z d \rightarrow 0$ , ambos modos comenzarán en la frecuencia de plasma menor; ya que para que halla modos de superficie se requiere que una de las funciones dieléctricas sea positiva, y se aproximarán a  $\sqrt{(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)/2}$  cuando  $k_z d \rightarrow \infty$ .

#### 5.4 Modos de superficie y polos de la reflectancia

En resumen, los modos de superficie son modos normales del sistema que se propagan a lo largo de la superficie y cuyos campos electromagnéticos decaen lejos de la superficie. La relación de dispersión  $\omega = \omega(\vec{Q})$  de este modo en la interfaz entre un medio local homogéneo y el vacío se puede obtener postulando la existencia de una onda plana inhomogénea en cada uno de los medios, y aplicando las condiciones de frontera usuales, ó sea, la continuidad de las componentes paralelas de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en la interfaz. Para polarización S no existen campos no nulos que puedan satisfacer ambas condiciones de frontera, y para polarización P sólo hay solución no trivial para frecuencias  $\omega$  y vectores de onda bidimensionales  $\vec{Q}$  que cumplan con la ec. (5.13). Dicha ecuación para la interfaz metal vacío se escribe como

$$Q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_M(\omega)}{\epsilon_M(\omega) + 1} \quad (5.42)$$

donde  $\epsilon_M(\omega)$  es la función dieléctrica local del medio.

Si el medio es no local, el campo electromagnético dentro del medio es más complejo que una onda plana inhomogénea, y el método anterior no es aplicable. Sin embargo, podemos obtener la relación de dispersión del plasmón de superficie haciendo la siguiente observación. Siendo un modo normal del sistema, éste puede ser excitado sin necesidad de tener una onda incidente, y por lo tanto el plasmón de superficie sólo puede existir en los polos del coeficiente de reflexión  $r_p$ , esto es, la relación de dispersión está dada implícitamente por

$$r_p(Q, \omega) = \infty, \quad (5.43)$$

o usando la ec.(4.46)

$$Z_p + Z_p^V = 0. \quad (5.44)$$

Queremos comentar que el principio de conservación de la energía implica que, en general, el flujo de energía normal a la superficie en la onda reflejada no puede ser mayor que el flujo de energía normal a la superficie en la onda incidente, y por lo tanto  $|r_p|$  no puede ser mayor que 1 a menos que en la onda reflejada no fluya energía en la dirección perpendicular a la superficie, lo cual sucede cuando el ángulo de incidencia, que es igual al de reflexión, es complejo,  $k$  (ec.(5.26)) es imaginario y  $Q > \omega/c$ , o bien, que la dependencia temporal y espacial a lo largo de la superficie de los campos no sea la de una onda plana. Por lo tanto, los campos del plasmón de superficie están confinados en la cercanía de la superficie, o éste es una excitación que decae, ya sea en el tiempo, ( $\omega$  compleja) o, a lo

largo de la superficie ( $Q$  complejo).

## 5.5 Ondas guiadas transversales

Cuando una onda incide sobre una película dieléctrica delgada se generará un número grande de ondas transversales reflejadas internamente. Se dice que una capa de algún material es una película delgada para cierta longitud de onda de radiación electromagnética cuando su espesor es del orden de la longitud de onda. En la práctica esto puede corresponder a una capa dieléctrica con un espesor de fracción de una longitud de onda depositada sobre la superficie de una lente, un espejo, o un prisma.<sup>6</sup>

Para atacar el problema del comportamiento de la luz en una película delgada hay dos procedimientos. Uno es utilizar ondas múltiples y el otro es trabajar con las condiciones a la frontera y los campos totales eléctrico y magnético, que representan la resultante de todas las ondas posibles que viajan en una misma dirección en el medio.<sup>6</sup> El tratamiento teórico de películas manejando los campos totales magnético y eléctrico y sus condiciones a la frontera es más simple para multicapas; por ello lo utilizaremos en esta tesis.

Consideremos una película dieléctrica ambas de cuyas caras son conductores perfectos. Para ciertas frecuencias de resonancia tendremos una interferencia constructiva entre todas las ondas reflejadas internamente y la onda resultante podrán propagarse a lo largo de la película. A esta tipo de ondas se les denomina ondas guiadas. Para encontrar el valor de las frecuencias de resonancia

escribimos

$$B_y(\vec{r}, t) = B_y^+ e^{i(\alpha x + kz - \omega t)} + B_y^- e^{i(\alpha x - kz - \omega t)}, \quad (5.45)$$

donde el vector de onda es de la forma  $\vec{k} = (0, 0, \pm k)$ .

Como la dependencia en el tiempo  $t$  y en  $x$  tiene la forma  $e^{i(\alpha x - \omega t)}$  esta dependencia se puede factorizar y omitir. Entonces la ec. (5.45) se puede escribir como

$$B_y(z) = B_y^+ e^{ikz} + B_y^- e^{-ikz}. \quad (5.46)$$

La solución de este sistema deberá de cumplir las condiciones a la frontera establecidas por el electromagnetismo. Consideremos que las interfaces de la película están localizadas en  $z = 0$  y  $z = d$ , donde  $d$  es el ancho de la película. Puesto las interfaces de la película son conductores perfectos la condición a la frontera en la interfaz  $z = 0$  es  $E_x(0) = 0$ .

Evaluando la función en dicha interfaz, de acuerdo a la ec. (3.65) tenemos,

$$E_x(0) = \frac{kc}{\epsilon\omega} (B_y^+ - B_y^-) = 0, \quad (5.47)$$

de donde

$$B_y^+ = B_y^-. \quad (5.48)$$

Utilizando este resultado la ec. (5.46) puede escribirse como

$$B_y(z) = B_y^+ (e^{ikz} + e^{-ikz}) = 2B_y^+ \cos(kz). \quad (5.49)$$

Ahora, evaluando la función en la interfaz  $z = d$

$$E_x(d) = \frac{kc}{\epsilon\omega} 2B_y^+ \sin(kd) = 0. \quad (5.50)$$

De aquí, para que existan ondas transversales  $B_y^+ \neq 0$  entonces

$$\sin(kd) = 0, \quad (5.51)$$

por lo tanto

$$kd = n\pi \text{ o } k = \frac{n\pi}{d} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.52)$$

Sólo existirán ondas transversales guiadas para valores  $k = \frac{n\pi}{d}$  de la componente normal a la superficie del vector de onda.

Sustituyendo el valor del vector de onda en la relación de dispersión obtenida para las ondas transversales tenemos

$$|\vec{k}|^2 - c^T \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (5.53)$$

Sustituyendo  $c^T$  del modelo de Drude sin disipación

$$\omega^2 = \omega_F^2 + c^2(Q^2 + (n\pi/d)^2). \quad (5.54)$$

De esta última ecuación podemos obtener el valor de las frecuencias de resonancia, una para cada  $n$  en función del ancho de la película y el valor de la componente paralela, a las interfaces, del vector de onda.

Las ondas transversales guiadas no sólo se presentan en películas delgadas, también, las podemos encontrar en otro tipo de sistemas. Por ejemplo en el interferómetro de haces múltiples, construido por Charles Fabry y Alfred Perot en los últimos años del siglo pasado. Este instrumento es de suma importancia en óptica moderna. Su valor particular surge del hecho de que además de ser un dispositivo espectroscópico de un alto poder de resolución, también sirve como cavidad resonante básica para el láser.<sup>8</sup>

En principio, el instrumento consiste de dos superficies planas, paralelas, altamente reflectantes y separadas por una distancia  $d$ . En la práctica, dos planos ópticos de vidrio semiplatedados o aluminizados forman las superficies reflectoras. El espacio de aire entre las placas, generalmente varía de algunos milímetros a varios centímetros cuando el aparato se usa para interferometría, y frecuentemente la distancia aumenta considerablemente cuando se usa como cavidad

resonante de láser<sup>o</sup>.

## 5.6 Ondas guiadas longitudinales

Como vimos en la sección anterior, en una película dieléctrica delgada podemos tener ondas transversales guiadas. Pues en forma análoga, en una película delgada de un material con dispersión espacial, como lo es una película metálica, podemos tener ondas longitudinales guiadas.

En esta sección pretendemos mostrar la obtención de las frecuencias de resonancia de las ondas de plasma en una película asumiendo que ellas no interactúan con las ondas transversales en las superficies de la película. Además supondremos un tiempo de relajación infinito,  $\tau \rightarrow \infty$ , puesto que no pueden existir ondas de plasma con frecuencias reales si  $\tau$  es finito.

Consideremos una película metálica de ancho  $d$  en medio del vacío y cuyas interfaces están localizadas en  $z = 0$  y  $z = d$ . Supongamos que en el interior de la película existen dos ondas longitudinales con vector de onda  $\vec{k} = (0, 0, k)$ , de tal forma que la densidad de corriente  $J_z$  está dada por

$$J_z(z) = J_z^+ e^{ikz} + J_z^- e^{-ikz}. \quad (5.55)$$

Esta ecuación deberá cumplir las condiciones a la frontera establecidas por el electromagnetismo, pero también la condición adicional a la frontera  $J_z(0) = J_z(d) = 0$ , pues en el vacío el valor de la densidad de corriente es cero.

En forma análoga a la sección anterior, evaluando la ec. (5.55) en las interfaces se obtiene la condición

$$kd = n\pi \quad \text{o} \quad l = \frac{n\pi}{d}, \quad (5.56)$$

para que existan ondas longitudinales ( $J_z \neq 0$ ). Por lo que sólo existirán ondas de plasma guiadas para valores  $l = \frac{n\pi}{d}$  de la componente normal a la superficie del vector de onda.

Sustituyendo el valor del vector de onda en la relación de dispersión para las ondas longitudinales (ec. (3.60)) tenemos que

$$\epsilon^L(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \beta^2(Q^2 + (n\pi/d)^2)} = 0. \quad (5.57)$$

Resolviendo esta ecuación para  $\omega$ ,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \beta^2(Q^2 + (n\pi/d)^2). \quad (5.58)$$

De esta última ecuación podemos obtener el valor de las frecuencias de resonancia en función del ancho de la película y el valor de la componente paralela, a las interfaces, del vector de onda.

Estas frecuencia de resonancia nos servirán para explicar el espectro de la reflectancia y la relación de dispersión de la superred.

## CAPITULO 6

### SUPERREDES

Las superredes han recibido considerable atención en los años recientes. Para estudiar sus propiedades se ha desarrollado la teoría de la matriz de transferencia. En este capítulo primero, revisamos la matriz de transferencia de sistemas locales y mediante una generalización desarrollamos una matriz de transferencia para medios no locales. Después aplicamos la teoría para los casos de una superred construida de capas alternadas de un aislante con metal no local, metal local con metal no local, y metal no local con metal no local, y presentamos las fórmulas de la relación de dispersión de los modos normales de la superred.

#### 6.1 Matriz de transferencia

Consideremos la superred, mostrada en la fig. 3, consistiendo de capas alternadas de anchos  $a$  y  $b$ . Las capas son apiladas a lo largo de la dirección  $z$ , en la cual se propagan las ondas transversales polarizadas  $P$  y las ondas longitudinales. Todas las ondas tienen la

misma frecuencia  $\omega$ , y sus vectores de onda se encuentran sobre el plano  $xz$  con una componente  $Q$  común en la dirección  $x$ . Construiremos la matriz de transferencia para cada una de las superredes, por pasos: Primero obtendremos la matriz de transferencia para una película aislante, después la matriz de transferencia para una película metálica no local, y finalmente las uniremos haciendo uso de las condiciones a la frontera apropiadas. No consideraremos ondas polarizadas  $S$  puesto que ellas no se acoplan a las ondas de plasma.

## 6.2 Matriz de transferencia para una película aislante

La matriz de transferencia de un aislante es bien conocida. Mostramos como se construye en esta sección con objeto de introducir nuestra notación y mostrar un procedimiento simple, el cual será generalizado en la siguiente sección en la que obtendremos la matriz de transferencia de un metal.

Dados  $\omega$  y  $Q$ , y puesto que no consideramos ondas polarizadas  $S$ , hay sólo dos ondas polarizadas  $P$  propagándose en el aislante, una hacia la derecha y la otra hacia la izquierda, con vector de onda  $\vec{q}_{\pm} = (Q, 0, \pm q)$ . La componente  $z$ ,  $\pm q$ , del vector de onda se determina por medio de la relación de dispersión

$$q^2 = \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - Q^2, \quad (6.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $\epsilon_1$  es la función dieléctrica local del aislante, cuya dependencia sobre  $\omega$  está implícita a la izquierda. Entonces, el campo electromagnético en cualquier lugar del interior de la película aislante está determinado por dos componentes independientes en un punto, tales como  $E_x(z)$  y

$B_y(z)$ , las componentes del campo eléctrico y magnético paralelas a la interfaz. Estas a su vez se relacionan con las contribuciones del campo magnético  $B_+(z)$  y  $B_-(z)$  moviéndose a la derecha y a la izquierda, a través de

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} Z_I & -Z_I \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

y

$$Z_I = \frac{qc}{\epsilon_I \omega}, \quad (6.4)$$

es la impedancia superficial del aislante. Aquí, hemos dejado implícita la dependencia  $e^{i(Qx-\omega t)}$  de todas las cantidades del campo. Puesto que  $B_+(z)$  y  $B_-(z)$  son ondas planas propagándose con vector de onda  $q$  y  $-q$ , respectivamente, ellas están relacionadas en diferentes puntos  $z$  y  $z'$  en el interior del aislante a través de

$$\begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix}_z = T_I(z-z') \begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \end{bmatrix}_{z'}, \quad (6.5)$$

donde

$$T_I(z-z') = \begin{bmatrix} e^{iq(z-z')} & 0 \\ 0 & e^{-iq(z-z')} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Finalmente de (6.2) y (6.5), obtenemos la matriz de transferencia

$$M_I = A T_I A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(qa) & iZ_I \sin(qa) \\ iY_I \sin(qa) & \cos(qa) \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

donde  $a = z_I^R - z_I^L$  es el ancho del aislante y  $Y_I = \frac{1}{Z_I}$  es la admitancia de superficie.

La matriz  $M_I$  relaciona el campo electromagnético en  $z_I^R$ , la frontera a la derecha del aislante, con el campo en  $z_I^L$ , su frontera a

la izquierda, a través de

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_I^R} = M_I \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_I^L} \quad (6.8)$$

### 6.3 Matriz de transferencia para una película metálica no local

La matriz de transferencia para la película metálica, se obtiene siguiendo pasos similares a los de la sección anterior. Sin embargo, además de las ondas polarizadas P moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda, con vector de onda  $\vec{k}_{\pm} = (0, 0, \pm k)$  obedeciendo

$$k^2 = \epsilon_M^T(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - Q^2, \quad (6.9)$$

incluimos una onda longitudinal moviéndose hacia la derecha y otra moviéndose hacia la izquierda, con vector de onda  $\vec{k}_{\pm} = (0, 0, \pm \ell)$ , obedeciendo

$$\epsilon_M^L(\vec{k}_{\pm}, \omega) = 0, \quad (6.10)$$

donde  $\epsilon_M^T$  es la función dieléctrica transversal y  $\epsilon_M^L$  la longitudinal del metal. Se asume que en cualquier lugar en el interior del metal el campo eléctrico está dado por una superposición de estas cuatro ondas, que  $\epsilon_M^T$  es una respuesta local dependiente sólo de  $\omega$ , y que  $\epsilon_M^L$  es una respuesta no local la cual es función de  $|\vec{k}|^2$  teniendo sólo un cero para cada  $\omega$ . Estas suposiciones son conocidas como la aproximación del polo de plasmón,<sup>49, 50</sup> la cual no nos da una descripción muy exacta de los campos cerca de las superficies metálicas puesto que se desprecian varios efectos de superficie tales como excitaciones par electrón-hueco. Sin embargo, este es el modelo más simple para considerar los efectos de las ondas de plasma.

Puesto que hay 4 ondas en el metal, el campo en cualquier lugar

del interior de la película metálica está determinado por 4 componentes independientes del campo en un punto, tales como  $E_x(z)$ ,  $B_y(z)$ ,  $\mu J_z(z)$  y  $4\pi i\nu\rho(z)$ , donde  $J_z$  es la componente normal a la superficie de la densidad de corriente de conducción,  $\rho$  es la fluctuación inducida en la densidad de carga del gas de electrones, y  $\mu$  y  $\nu$  son parámetros constantes en el interior del metal, cuyo valor depende del modelo de las CAF's. Se eligieron estas componentes por que, como se vió en la sección 4.4, varias de las CAF's conocidas se pueden expresar en término de ellas. Estas 4 componentes, a su vez, se relacionan con las contribuciones del campo magnético y el potencial escalar, moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda  $B_+(z)$ ,  $B_-(z)$ ,  $\phi_+(z)$  y  $\phi_-(z)$  a través de

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu J_z \\ 4\pi i\nu\rho \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} \frac{kC}{c_M^T \omega} & -\frac{kC}{c_M^T \omega} & -iQ & -iQ \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\sigma^T \frac{QC}{c_M^T \omega} & -\mu\sigma^T \frac{QC}{c_M^T \omega} & -i\mu\sigma^L & -i\mu\sigma^L \\ 0 & 0 & i\nu e^B [Q^2 + I^2] & \nu e^B [Q^2 + I^2] \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

y

$$\sigma^T = (\epsilon_M^T - \epsilon^B)\omega / 4\pi i, \quad (6.13)$$

y

$$\sigma^L = (\epsilon_M^L - \epsilon^B)\omega / 4\pi i, \quad (6.14)$$

son las conductividades transversal y longitudinal del metal. Nótese que  $\epsilon_M^L = 0$  puesto que debe ser evaluada para el vector de onda del

plasmón.

Puesto que  $B_+(z)$  y  $B_-(z)$  son ondas transversales y  $\phi_+(z)$  y  $\phi_-(z)$  son ondas longitudinales propagándose con vectores de onda  $k$ ,  $-k$ ,  $\vec{z}$  y  $-\vec{z}$ , respectivamente, ellas están relacionadas en diferentes posiciones  $z$  y  $z'$  en el interior del metal a través de

$$\begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}_z = T_M(z - z') \begin{bmatrix} B_+ \\ B_- \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}_{z'} \quad (6.15)$$

donde

$$T_M(z - z') = \begin{bmatrix} e^{ik(z-z')} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik(z-z')} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\ell(z-z')} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\ell(z-z')} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Como en la sección anterior, finalmente, de (6.11) y (6.15) obtenemos la matriz de transferencia de  $4 \times 4$ .

$$M_M = G T_M(b) G^{-1} \quad (6.17)$$

donde  $b = z_M^R - z_M^L$  es el ancho del metal. Omitimos las expresiones para los elementos de  $M_M$  puesto que son complicados y se pueden obtener directamente.

La matriz  $M_M$  relaciona el campo electromagnético en  $z_M^R$ , la frontera derecha del metal, con el campo en  $z_M^L$ , su frontera a la izquierda, a través de

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu \vec{J}_z \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix}_{z_M^R} = M_M \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu \vec{J}_z \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix}_{z_M^L} \quad (6.18)$$

La matriz de transferencia  $M_M$  puede ser escrita en bloques como

$$M_M = \begin{bmatrix} M_M^{TT} & M_M^{TL} \\ M_M^{LT} & M_M^{LL} \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

donde

$$M_M^{TT} = \begin{bmatrix} C^T & i[(Z^T)^2 S^T - W^T W^L S^L] \\ iS^T & C^T \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

$$M_M^{TL} = iW^L \begin{bmatrix} S^L & i(C^T - C^L) \\ 0 & -S^T \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$M_M^{LT} = iW^T \begin{bmatrix} S^T & i(C^L - C^T) \\ 0 & -S^L \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

y

$$M_M^{LL} = \begin{bmatrix} C^L & i[(Z^L)^2 S^L - W^L W^T S^T] \\ iS^L & C^L \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Aquí introducimos las definiciones siguientes:

$$Z^T = \frac{kc}{\epsilon_M^T \omega} \quad (6.24)$$

es la impedancia superficial  $Z^T \equiv E_x^T / B_y^T$  para una onda plana transversal moviéndose hacia la derecha con vector de onda  $k$ , y

$$Z^L = - \frac{\mu \ell \sigma^L}{\nu c^B [Q^2 + \ell^2]}, \quad (6.25)$$

es la correspondiente impedancia superficial  $Z^L \equiv \mu J_z^T / (4\pi i \nu \rho)$  para una onda longitudinal con vector de onda  $\ell$ ,

$$W^T = - \mu \sigma^T \frac{Qc}{\epsilon_M^T \omega}, \quad (6.26)$$

es la respuesta corriente eléctrica-campo magnético  $W^T \equiv \mu J_z^T / B_y$  para una onda transversal, y

$$W^L = - \frac{Q}{\nu c^B [Q^2 + \ell^2]}, \quad (6.27)$$

es la respuesta campo eléctrico-densidad de carga  $W^L \equiv E_x^L / (4\pi i \nu \rho)$

para una onda longitudinal; finalmente,

$$C^T \equiv \cos(kb), \quad (6.28)$$

$$C^L \equiv \cos(\ell b), \quad (6.29)$$

$$S^T \equiv \sin(kb) / Z^T, \quad (6.30)$$

y

$$S^L \equiv \sin(\ell b) / Z^L, \quad (6.31)$$

Estos últimos términos contienen la información referente al ancho de la película. Nuestras definiciones (6.24), (6.25), (6.26) y (6.27), de las cuatro funciones de impedancia,  $Z^T$ ,  $Z^L$ ,  $W^T$  y  $W^L$ , se entienden si consideramos a  $B_y$  como la respuesta transversal y a  $\rho$  como la respuesta longitudinal a los campos de excitación  $E_x$  y  $J_z$ .

Estas definiciones nos serán útiles al calcular los modos normales de bulto de la superred metálica no local.

#### 0.4 Matriz de transferencia para una superred aislante-metal no local

Para poder unir la matriz de transferencia  $4 \times 4$  del metal con la matriz de transferencia  $2 \times 2$  del aislante, debemos señalar que las componentes  $E_x$ ,  $B_y$ ,  $\mu J_z$ , y  $4\pi i v \rho$ , las cuales son independientes en el interior del metal, no lo son en una película metálica confinada por un aislante. Los cuatro campos son linealmente dependientes puesto que ellos deben obedecer condiciones de origen no electromagnético, es decir, las condiciones adicionales a la frontera CAF's.

Dichas condiciones ya fueron discutidas en un capítulo anterior. A manera de ejemplo utilizamos las CAF's del modelo I. De esta forma, para una interfaz entre un metal no local y un aislante tenemos  $J_z = 0$ , entonces, la ec. (6.18) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ 0 \\ 4\pi i\nu\rho \end{bmatrix}_{z_M^R} = M_M \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ 0 \\ 4\pi i\nu\rho \end{bmatrix}_{z_M^L} \quad (6.32)$$

A partir de la ecuación del tercer renglón de la ec. (6.32) se puede obtener una relación lineal entre  $4\pi i\nu\rho$ ,  $E_x$ , y  $B_y$  en  $z_M^L$ . Resolviendo la ecuación para  $4\pi i\nu\rho$  y sustituyendo dicho valor en el lado derecho de la ec. (6.32), sus dos primeros renglones serán una relación lineal entre  $E_x$  y  $B_y$  en  $z_M^R$  y  $E_x$  y  $B_y$  en  $z_M^L$ . Podemos escribir esta relación como

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_M^R} = M'_M \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_M^L} \quad (6.33)$$

De esta forma, utilizando una CAF en cada una de las interfaces del metal colapsamos la matriz de transferencia de  $4 \times 4$  a una matriz  $M'_M$  de  $2 \times 2$ .

$$M'_M = \begin{bmatrix} M_{M11} - M_{M14} \frac{M_{M31}}{M_{M34}} & M_{M11} - M_{M14} \frac{M_{M31}}{M_{M34}} \\ M_{M11} - M_{M14} \frac{M_{M31}}{M_{M34}} & M_{M11} - M_{M14} \frac{M_{M31}}{M_{M34}} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

El procedimiento detallado depende de las CAF's elegidas, la reducción de la matriz de transferencia puede realizarse para cualquier elección de las CAF's siempre y cuando la película metálica esté rodeada por un medio local, es decir, sin dispersión espacial.<sup>49</sup>

El último paso en la construcción de la matriz de transferencia  $M_{IM}$  para un periodo de la superred consiste en unir  $M'_M$  y  $M_I$  usando las condiciones a la frontera del electromagnetismo, esto es, la continuidad de  $E_x$  y  $B_y$ , lo cual conduce a un simple producto de las matrices de transferencia.<sup>49</sup>

$$M_{IM} = M'_M M_I \quad (6.35)$$

Aquí,  $M_{IM}$  relaciona los campos  $E_x$  y  $B_y$  en  $z_M^R + d$ , o equivalentemente  $z_I^L + d$ , con los campos en  $z_M^R$  o  $z_I^L$  a través de

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_M^R + d} = M_{IM} \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z_M^R} \quad (6.36)$$

donde  $d = a + b$  es el periodo de la superred. Una matriz similar que translada un periodo a los campos de las posiciones  $z_M^L$  o  $z_I^R$  es obtenida permutando  $M_I$  y  $M'_M$  en la ec. (6.35).

Las expresiones finales para los elementos de la matriz de transferencia son

$$M_{IM} = \begin{bmatrix} M'_{M11} M_{I11} + M'_{M12} M_{I21} & M'_{M11} M_{I12} + M'_{M12} M_{I22} \\ M'_{M21} M_{I11} + M'_{M22} M_{I21} & M'_{M21} M_{I12} + M'_{M22} M_{I22} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

### 6.5 Matriz de transferencia para una superred metal local-metal no local

Consideremos una superred formada por un metal no local A con frecuencia de plasma  $\omega_{PA}$  y constante de rigidez  $\beta_A$ , en capas con ancho  $b_A$ , periódicamente alternadas con un metal no local B con frecuencia de plasma  $\omega_{PB}$  y constante de rigidez  $\beta_B$ , en capas de ancho  $b_B$  cuya frecuencia de plasma es  $\omega_{PB} > \omega_{PA}$ . Para frecuencias  $\omega < \omega_{PB}$  ambas ondas, transversal y longitudinal, son evanescentes en las capas del metal B. Puesto que la distancia de decaimiento de las ondas longitudinales  $\delta_B^L \sim \beta_B / \omega_{PB}$  es mucho menor que la de las ondas transversales  $\delta_B^T \sim c / \omega_{PB}$ , se puede asumir que  $\delta_B^L = 0$ . Esto es equivalente a una constante de rigidez  $\beta_B = 0$  lo cual, en el modelo hidrodinámico, implica la ausencia de dispersión espacial en las capas

del metal B. Esto es, para frecuencias menores a  $\omega_{pb}$  la superred no local-no local puede modelarse por una superred local-no local. De esta forma las fórmulas deducidas para la superred aislante-metal no local de la sección anterior pueden ser aplicadas a este sistema sin modificación, simplemente hay que identificar las cantidades del metal y del aislante con las cantidades correspondiente en este sistema al metal no local y al metal local respectivamente.<sup>49</sup>

#### 6.6 Matriz de transferencia para una superred metal no local-metal no local

La matriz de transferencia 4x4 para un periodo de una superred formada por capas alternadas de un metal no local A y un metal no local B se reduce a una simple multiplicación de matrices del tipo de la ec. (6.19), puesto que usamos únicamente cantidades continuas para representar los campos al construir la matriz de transferencia para una película de metal no local. Así se puede escribir como

$$M = M_{MB} M_{MA} \quad (6.38)$$

donde  $M_{MA}$  y  $M_{MB}$  son las matrices de transferencia de las capas del metal A y del metal B, respectivamente. Estas son obtenidas a partir de las ecs. (6.9) a (6.31) simplemente poniendo los índices A o B a todas las cantidades dependientes del metal tales con  $Z^L$ ,  $Z^T$ ,  $W^L$ , etc.

#### 6.7 Teorema de Bloch

Sea  $F(z)$  una función definida en un espacio vectorial E de dimensión m, y sea M la matriz de transferencia que caracteriza a un

sistema periódico de periodo  $d$ , tal que

$$\vec{M}\vec{F}_n = \vec{F}_{n+1} \quad (6.39)$$

con

$$\vec{F}_n = \vec{F}(nd). \quad (6.40)$$

Los eigenvectores de  $M$  obedecen

$$\vec{M}\vec{F}_{\lambda_i} = \lambda_i \vec{F}_{\lambda_i}, \quad (6.41)$$

y por consiguiente

$$\vec{F}_{\lambda_i}(nd) = M^n \vec{F}_{\lambda_i}(0) = \lambda_i^n \vec{F}_{\lambda_i}(0). \quad (6.42)$$

De aquí podemos escribir

$$\vec{F}_{\lambda_i}(z) = e^{i p_i z} \vec{u}_i(z), \quad (6.43)$$

donde hemos tomado a

$$\lambda \equiv e^{i p_i z}, \quad (6.44)$$

pues los eigenvectores de la matriz de transferencia no pueden ser cero ( $M$  es invertible) y  $\vec{u}_i(z)$  es una función con periodo  $d$ .

El que los modos propios de un sistema se expresen como en (6.43) se conoce como el Teorema de Bloch y su deducción para propagación de electrones en un cristal está en los textos de física del estado sólido.<sup>1, 3</sup>

En el caso genérico, los eigenvectores de  $M$  forman una base del espacio vectorial donde actúan por lo que un vector  $\vec{F}$  arbitrario en  $z = 0$  se puede expandir como

$$\vec{F}(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{F}_{\lambda_i}(0). \quad (6.45)$$

Aplicando  $M^n$  obtenemos

$$\vec{F}(nd) = \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{i p_i nd} \vec{F}_{\lambda_i}(0) \quad (6.46)$$

o

$$\vec{F}(z) = \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{i p_i z} \vec{u}_i(z) \quad (6.47)$$

esto es, una superposición de ondas de Bloch.

Para el caso de una superred infinita el vector  $\vec{F}$ , es el vector de las componentes independientes del campo electromagnético en cualquier punto,  $M$  la matriz de transferencia para un periodo  $d$  de la superred, los eigenvectores representan los modos propios del sistema y la ec. (6.39) nos permite obtener el campo electromagnético en cualquier punto a partir de su conocimiento en un punto  $z$ . Para el caso local,

$$\vec{F}(z + nd) = \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z + nd} = M^n \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_z = M^n \vec{F}(z), \quad (6.48)$$

donde  $n$  es el número de periodos de la superred que debemos movernos hasta llegar al punto donde deseamos conocer el valor del campo.

## 6.8 Relación de dispersión

### Modos normales

De acuerdo con el teorema de Bloch, los modos normales de un sistema periódico pueden siempre ser obtenidos en la forma de ondas de Bloch. Para una superred local infinita, esto significa que

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z + d} = e^{i p d} \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_z, \quad (6.49)$$

donde  $d = a + b$  es el periodo de la superred y  $p$  es el vector de onda de Bloch. Sustituyendo la ec. (6.49) en la ec. (6.36) encontramos que estos modos pueden existir sólo cuando  $M_{IM} - \underline{1}e^{i p d}$  es una matriz singular, esto es, cuando

$$\det(M_{IM} - \underline{1}e^{i p d}) = 0, \quad (6.50)$$

donde  $\underline{1}$  es la matriz unidad de  $2 \times 2$ . Puesto que  $\det(M_{IM}) = 1$ , la ec. (6.50) puede escribirse simplemente como

$$\cos(pd) = \frac{1}{2}(M_{IM11} + M_{IM22}), \quad (6.51)$$

una expresión de la cual se puede obtener  $p$  en forma analítica.

Notese que si  $p$  es una solución de la ec. (6.51), entonces  $p + 2\pi n$  y  $-p + 2\pi n$  son también soluciones para cualquier valor entero de  $n$ .

Para una superred no local infinita, nuevamente, el teorema de Bloch implica que los modos normales del sistema pueden ser obtenidos como ondas de Bloch tales que

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu J_z \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix}_{z+d} = e^{ipd} \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu J_z \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix}_z, \quad (6.52)$$

donde  $d = b_A + b_B$  es el periodo de la superred y  $p$  es el vector de onda de Bloch. La relación de dispersión  $p = p(\omega)$  de los modos normales de bulto está dada implícitamente por

$$\det(M - \underline{1}e^{ipd}) = 0, \quad (6.53)$$

esto es,  $e^{ipd}$  deberá ser un eigenvalor de  $M$ . Escribiendo la ecuación característica en  $\lambda = e^{ipd}$ ,  $P(\lambda) = \det(M - \lambda)$ , como

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_2 + \alpha_1/\lambda + \alpha_0/\lambda^2). \quad (6.54)$$

Ahora observamos que si  $p$  es una solución de la ec. (6.53) representando, por ejemplo, una onda de Bloch que viaja hacia la derecha, entonces  $-p$  es también una solución y ésta representa la misma onda pero viajando hacia la izquierda. Por eso, si  $\lambda$  es un cero de  $P(\lambda)$ , también lo es  $1/\lambda$ . De la ec. (6.54) vemos que debemos tener  $\alpha_0 = 1$  y  $\alpha_1 = \alpha_3$ , y por ello, la ecuación de cuarto orden en  $e^{ipd}$ , ec. (6.54), puede ser escrita simplemente como

$$4\cos^2(pd) + 2\alpha_3 \cos(pd) + \alpha_2 - 2 = 0, \quad (6.55)$$

la cual es una ecuación cuadrática y puede ser resuelta analíticamente para  $p$  en términos de los coeficientes,

$$\alpha_3 = - \text{traza}(M) \quad (6.56)$$

y

$$\alpha_2 = [\text{traza}(M)^2 - \text{traza}(M^2)]/2. \quad (6.57)$$

Después de sustituir las ecs. (6.19) a (6.31) en las ecs. (6.38), (6.56) y (6.57), en términos de  $C^T$ ,  $C^L$ ,  $S^T$ , y  $S^L$ , se obtiene

$$\alpha_3 = -2(L + T) - K(S_A^L S_B^T + S_A^T S_B^L) \quad (6.58)$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & 2+4LT + K^2 S_A^T S_B^L S_A^L S_B^T - 2k[(C_A^T S_B^T + S_A^T C_B^T)(C_A^L S_B^L + S_A^L C_B^L) \\ & - (S_A^T S_B^L + S_B^T S_A^L)], \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde

$$T = C_A^T C_B^T - [(Z_A^T)^2 + (Z_B^T)^2] S_A^T S_B^T / 2, \quad (6.60a)$$

$$L = C_A^L C_B^L - [(Z_A^L)^2 + (Z_B^L)^2] S_A^L S_B^L / 2, \quad (6.60b)$$

y

$$N = (W_A^T - W_B^T)(W_A^L - W_B^L). \quad (6.60c)$$

Se puede observar que en ausencia de dispersión espacial, los modos del sistema están dados sólo por ondas transversales en cada una de las capas, unidas en las interfaces por las condiciones a la frontera del electromagnetismo. Estos modos obedecen la relación de dispersión  $\cos(pd) = T^{j0}$ . En forma similar,  $\cos(pd) = L$  es la relación de dispersión de los modos normales del sistema si hubiera únicamente ondas longitudinales, unidas en las interfaces por las CAF's. En el límite cuando  $N \rightarrow 0$ , la ec. (6.55) se puede factorizar como  $4(\cos(pd) - T)(\cos(pd) - L) = 0$ , así que cada uno de los dos modos normales, discutidos anteriormente, se propagan independientemente el uno del

otro.<sup>30</sup> De esta manera, podemos considerar a  $N$  como una medida del acoplamiento entre los modos transversales y los longitudinales. Notamos que  $N$  es proporcional a  $Q^2$  y ésta desaparece cuando las ondas se propagan a lo largo del eje de la superred.

#### Densidad de flujo de energía de los modos normales de una superred

Podemos ahora obtener la energía de los modos normales de una superred infinita no local. Como hemos visto, los modos normales de la superred están dados por los eigenvectores  $V$  de la matriz de transferencia, de tal forma que

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu J_z \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^1 \\ V_n^2 \\ V_n^3 \\ V_n^4 \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, 3 \text{ ó } 4, \quad (6.61)$$

Despejando las componentes  $E_x$ ,  $B_y$ ,  $J_z$  y  $\rho$ , tenemos

$$E_x = V_n^1, \quad B_y = V_n^2, \quad J_z = \frac{V_n^3}{\mu} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{V_n^4}{4\pi i v} \quad (6.62)$$

Sustituyendo las expresiones (6.62) en las ec. (4.77) y (4.78), obtenemos

$$S_z^T = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(V_n^1 (V_n^2)^*) \quad (6.63)$$

y

$$S_z^L = \frac{2\pi\beta^2}{\omega^2 \mu_P} \operatorname{Re} \left( \frac{V_n^4}{4\pi i v} \left[ \frac{V_n^3}{\mu} \right]^* \right) = - \frac{\beta^2}{2v\mu\omega^2} \operatorname{Re}(iV_n^4 (V_n^3)^*). \quad (6.64)$$

En estas últimas ecuaciones  $S_z^T$  y  $S_z^L$  representan la densidad de flujo de energía transversal y longitudinal, respectivamente, de los modos normales de la superred.

## CAPITULO 7

### REFLECTANCIA

En este capítulo estudiamos las fórmulas de la reflectancia de la luz para diferentes sistemas físicos. Para esto, usamos el método de la impedancia de superficie, el cual describimos en el capítulo cuatro. Primero calculamos la reflectancia para una película metálica en términos de la matriz de transferencia. Después calculamos la reflectancia para una superred semiinfinita local, y por último, para la superred semiinfinita no local, analizando el flujo de energía transmitida a su interior.

#### 7.1 Película

Para calcular la reflectancia de una película de espesor  $d$  y constante dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  se puede usar la matriz de transferencia para la película, ésta puede ser la matriz de transferencia local o bien la matriz de transferencia no local colapsada que se obtuvo en la sección 6.4.

Supongamos que una superficie libre de la película se encuentra

en  $z = 0$  y la otra en  $z = d$ , y sea  $M$  la matriz de transferencia de la película, entonces las componentes del campo electromagnético en una y otra superficie están relacionadas por

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z=d} = M \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z=0} \quad (7.1)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z=0} = M^{-1} \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_{z=d} \quad (7.2)$$

donde  $M^{-1}$  es la inversa de la matriz  $M$  y en términos de los elementos de  $M$  tiene la forma

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Sustituyendo (7.3) en (7.2), se puede escribir

$$\frac{E_x(0)}{B_y(0)} = \frac{M_{22} E_x(d) - M_{12} B_y(d)}{M_{11} B_y(d) - M_{21} E_x(d)}. \quad (7.4)$$

Pero recordando del capítulo cuatro,

$$Z_p(0) = \frac{E_x(0)}{B_y(0)}, \quad (7.5)$$

y como en  $z = d$  se puede ver fácilmente que

$$Z_p(d) = \frac{E_x(d)}{B_y(d)} = Z_v, \quad (7.6)$$

donde  $Z_v$  es la impedancia de superficie del vacío, sustituyendo (7.5) y (7.6) en (7.4) tenemos

$$Z_p(0) = \frac{M_{22} Z_v - M_{12}}{M_{11} - M_{21} Z_v}. \quad (7.7)$$

De esta forma hemos obtenido la impedancia de superficie para la película. La amplitud de reflexión se obtiene escribiendo la ec.

(4.46) en términos de  $Z_p$  y  $Z_v$ , esto es,

$$r_p = \frac{Z_v - Z_p}{Z_v + Z_p} \quad (7.8)$$

En el vacío podemos escribir

$$Z_v = \cos(\theta), \quad (7.9)$$

en términos del ángulo de incidencia  $\theta$ . Finalmente de la ec. (4.47)

$$R_p = \|r_p\|^2. \quad (7.10)$$

## 7.2 Superred local

Consideremos, nuevamente la superred mostrada en la Fig. 3. La impedancia de superficie  $Z_p \equiv (E_x / B_y)_0$  de la superred se puede obtener a partir de la ecuación de los eigenvectores

$$\left[ M - \underline{1}e^{lpd} \right] \begin{bmatrix} E_x \\ B_y \end{bmatrix}_0 = 0. \quad (7.11)$$

de donde

$$Z_p = - \frac{M_{12}}{M_{11} - e^{lpd}} = - \frac{M_{22} - e^{lpd}}{M_{21}} \quad (7.12)$$

y donde, usando la ec. (6.51),

$$e^{lpd} = \frac{1}{2} \left[ M_{11} + M_{22} \right] \pm \left[ \frac{1}{4} (M_{11} + M_{22})^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (7.13)$$

Puesto que la onda de Bloch transmitida hacia el interior de la superficie decae, o dicho de otro modo, la onda se propaga hacia la derecha, el signo correcto en la ec. (7.13) es aquel para el cual  $|e^{lpd}| < 1$  o, si  $|e^{lpd}| = 1$ , el que hace  $\text{Im}(e^{lpd}) > 0$ .

Finalmente, como en la sección anterior, la amplitud de reflexión y la reflectancia están dadas en términos de la impedancia de

superficie por las ecs. (4.46) y (4.47), obtenidas en la sección 4.2.

### 7.3 Superred local-no local

La reflectancia para la superred semiinfinita local no local se puede obtener usando las fórmulas deducidas en la sección anterior, para la superred semiinfinita local. Pero en este caso utilizamos la matriz de transferencia colapsada, ec. (6.37).

### 7.4 SUPERRED NO LOCAL.

Los modos de la superred infinita están dados por los eigenvectores de su matriz de transferencia y su relación de dispersión es obtenida por la ecuación de los eigenvalores correspondientes a  $e^{ipd}$ , donde  $p$  es el vector de onda de Bloch unidimensional. El resultado es una ecuación cuadrática para  $\cos(pd)$  (ec. (6.55) a (6.60)) y además tiene dos pares  $\pm p$  de soluciones para cada  $\omega$  y proyección  $Q$  del vector de onda sobre las interfaces de la superred.

Una onda incidente sobre la superficie puede excitar dos modos en el interior de la superred, además de la onda reflejada. Las ondas transmitidas son aquellas que tienen  $Q = \cos(\theta)\omega / c$  y  $\text{Im}(p) > 0$ , donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia. Entonces, los campos en el interior de la superred y cerca de la superficie pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} E_x \\ B_y \\ \mu \vec{J}_x \\ 4\pi i v \rho \end{bmatrix} = c_1 \vec{V}_1 + c_2 \vec{V}_2 \quad (7.17)$$

donde  $\vec{V}_1 = (V_1^1, V_1^2, V_1^3, V_1^4)$  y  $\vec{V}_2 = (V_2^1, V_2^2, V_2^3, V_2^4)$  son eigenvectores de la matriz de transferencia, correspondientes a los dos modos que se mueven hacia el interior de la superred, y  $c_1$  y  $c_2$  son sus amplitudes respectivas. Tres condiciones a la frontera son requeridas para calcular la amplitud de la onda reflejada. Como en el caso usual, dos de ellas son la continuidad de las componentes de los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}_x$  y  $B_y$ . La condición a la frontera faltante está determinada por las CAF's, la CAF para la interfaz vacío medio no local es  $J_z = 0$ . La ec. (7.17) conduce a

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{V_2^3}{V_1^3} \quad (7.18)$$

y por lo tanto

$$Z_p = \frac{V_2^3 V_1^1 - V_1^3 V_2^1}{V_2^3 V_1^2 - V_1^3 V_2^2} \quad (7.19)$$

donde se pueden obtener las propiedades ópticas en la forma usual.

Así, de igual forma que en la sección 7.2 podemos obtener la reflectancia en términos de la impedancia de superficie.

### 7.5 Densidad de flujo de energía transmitida al interior de una superred no local

Consideramos que sobre la superficie de una superred semiinfinita no local incide una onda plana, entonces la densidad de flujo de energía de la onda incidente y reflejada están dados por

$$\vec{S}_R = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E}_R \vec{B}_R^*), \quad \vec{S}_I = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E}_I \vec{B}_I^*) \quad (7.23)$$

La densidad de flujo de energía transmitida al interior de la superred será la suma de la densidad de flujo transversal y

longitudinal, esto es

$$\vec{S}_{\text{Trans}} = \vec{S}^{\uparrow} + \vec{S}^{\downarrow} \quad (7.24)$$

Tomando el modelo I de las CAF's, obtenemos de las ecs. (4.77) y (4.78),

$$S_z^{\uparrow} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[(\alpha_1 V_1^{\uparrow} + \alpha_2 V_1^{\downarrow})(\alpha_1 V_2^{\uparrow} + \alpha_2 V_2^{\downarrow})^*] \quad (7.26)$$

y

$$S_z^{\downarrow} = 0, \quad (7.27)$$

ya que

$$J_z = \alpha_1 V_1^{\uparrow} + \alpha_2 V_2^{\downarrow} = 0, \quad (7.28)$$

por la condición adicional a la frontera. Sustituyendo (7.26) y (7.27) en la ec. (7.24), tenemos

$$S_{\text{Trans}}^z = S_z^{\uparrow}. \quad (7.29)$$

Es decir, la densidad de flujo de energía, hacia el interior, en superficie de la superred sera únicamente transversal. El mismo resultado se obtiene para las demás CAF's.

Para calcular la densidad de flujo normalizado partamos de la ecuación de conservación de la energía, esto es

$$S_I^z + S_R^z = S_{\text{Trans}}^z = S_z^{\uparrow}. \quad (7.30)$$

Sustituyendo las ecs. (7.23) en (7.30), tenemos

$$\frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{xI} B_{yI}^*) + \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{xR} B_{yR}^*) = S_z^{\uparrow}, \quad (7.31)$$

o

$$1 + \frac{\frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{xR} B_{yR}^*)}{\frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{xI} B_{yI}^*)} = \frac{S_z^{\uparrow}}{\frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{xI} B_{yI}^*)}. \quad (7.32)$$

Escribiendo los campos reflejados en términos de la amplitud de reflexión y suponiendo que el campo incidente esta normalizado de acuerdo a

$$\|B_{yI}\| = 1, \quad (7.33)$$

tenemos

$$1 = R + \frac{B\pi S_z^T}{Z_{vc} \|B_{yI}\|^2} = R + \frac{B\pi S_z^T}{Z_{vc}}. \quad (7.34)$$

La densidad de flujo de energía transmitida normalizada es

$$\hat{S}_{\text{trans}}^z = \frac{B\pi S_z^T}{Z_{vc}}, \quad (7.35)$$

donde

$$S_z^T = \frac{c}{B\pi} \operatorname{Re}[(\alpha_1 V_1^4 + \alpha_2 V_1^2)(\alpha_1 V_2^4 + \alpha_2 V_2^2)^*]. \quad (7.36)$$

## CAPITULO 8

### RESULTADOS

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos del cálculo numérico de la reflectancia. Primero, describimos la reflectancia para el caso de una interfaz metal vacío. Después, hacemos lo mismo pero para el caso de una película metálica en medio del vacío. Con base en los resultados anteriores y la relación de dispersión, explicamos la estructura del espectro de la reflectancia para diferentes tipos de superredes. También hacemos una comparación entre los resultados obtenidos mediante un modelo local y un modelo no local. Finalmente, mostramos la gráfica de la densidad de flujo de energía transmitida al interior de la superred con el fin de verificar que nuestros cálculos no tienen errores numéricos y que por tanto satisfacen el principio de conservación de la energía.

#### 8.1 Reflectancia de una interfaz metal vacío

En la fig. 4 se muestran las gráficas de la reflectancia para una interfaz metal vacío, sobre la cual incide una onda plana con polarización P, para un ángulo de incidencia  $\theta_i$  de  $10^\circ$  y  $70^\circ$ . Estas

gráficas se obtuvieron a partir de las ecs. (4.49) y (4.54) de la sección 4.2.

En la gráfica de la reflectancia para  $\theta_i = 10^\circ$  observamos que el valor de la reflectancia es casi 1 para frecuencias menores a la frecuencia de plasma  $\omega_p$ , pues para estas frecuencias la función dieléctrica del metal es negativa por lo que no puede haber propagación de ondas transversales. No se observa estructura alguna cerca de la frecuencia del plasmón de superficie  $\omega_{ps} = \omega_p \sqrt{2}$  pues este tiene un vector de onda  $Q_{ps}$  mayor que el de la luz incidente  $(\omega/c)\sin(\theta_i)$ . Para frecuencias mayores a  $\omega_p$ , el valor de la reflectancia decae rápidamente debido a que a estas frecuencias la función dieléctrica del metal es positiva y por lo tanto si es posible la propagación de ondas transversales.

De la gráfica para  $\theta_i = 70^\circ$  observamos que la reflectancia no empieza a disminuir sino hasta a una frecuencia mucho mayor que  $\omega_p$ . Este incremento se debe a que la componente del vector de onda perpendicular a la superficie,  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 \cos^2(\theta_i) - \omega_p^2}$  es imaginaria para frecuencias menores a la frecuencia crítica  $\omega_c = \omega_p / \cos(\theta_i)$ , aun en ausencia de disipación, o análogamente, para ángulos mayores al ángulo crítico  $\theta_c = \arccos(\omega_p / \omega_c)$ .

## 8.2 Reflectancia de una película simétrica

En la fig. 5. se muestran las gráficas de la reflectancia para una película simétrica de ancho  $0.25\lambda_p$ , donde  $\lambda_p = c/\omega_p$ . En el cálculo no local caracterizamos al metal por las funciones dieléctricas derivadas del modelo hidrodinámico, sección 3.5, ecs. (3.59) y (3.60),

y en el cálculo local despreciamos la dispersión espacial y utilizamos una función dieléctrica de Drude, ec. (3.35). La reflectancia se obtuvo a través de las ecs. (7.7)-(7.10). Utilizamos un tiempo de relajación grande  $\tau = 1000/\omega_p$ .

De las gráficas se observa que para frecuencias abajo de  $\omega_p$  aparece un mínimo en la reflectancia. Esto se debe a que conforme  $\omega$  aumenta la distancia de penetración aumenta, la película se vuelve ópticamente más delgada y la reflectancia disminuye. En  $\omega_p$  la distancia de penetración es infinita (si no hay disipación), pero la amplitud de la luz transmitida a través de la primera interfaz vale cero, por lo que la reflectancia vuelve a subir hasta 1. Arriba de  $\omega_p$  la película es transparente, por ello, la reflectancia vuelve a disminuir. En el cálculo no local se observan una serie de máximos y mínimos modificando el decremento suave de la reflectancia. Estos mínimos se localizan en frecuencias que corresponden a las frecuencias de resonancia de las ondas guiadas longitudinales  $\omega_n$  con  $n$  impar, ecuación (5.58). Esto se debe a que para estos valores de  $n$ , las oscilaciones de la densidad de carga al integrarse sobre el ancho de la película dan lugar a una cantidad de carga diferente de cero la cual produce un campo eléctrico apreciable fuera de la película. Este campo eléctrico permite el acoplamiento de las ondas longitudinales con las ondas transversales del vacío. Por otro lado, para valores de  $n$  pares, las oscilaciones de la densidad de carga en el interior de la película metálica son antisimétricas y, por lo tanto, el campo eléctrico que esta distribución de carga produce fuera de la película es muy pequeño. En este caso no hay acoplamiento entre ondas longitudinales y transversales. De aquí que, para frecuencias mayores

a la frecuencia de plasma, en la película metálica hay excitación de ondas guiadas longitudinales que transportan energía de la onda incidente, desde una interfaz hasta la otra. Esta estructura extra no se presenta en el cálculo local ya que en este no es posible la excitación de ondas longitudinales.

No se observa estructura correspondiente a los modos simétrico, ec. (5.40) y antisimétrico, (5.41), pues estos tienen un vector de onda  $Q$  mayor que el de la luz incidente  $(\omega/c)\sin(\theta_i)$ .

### B.3 Reflectancia de una superred aislante-metal no local

En estas últimas secciones se discuten las propiedades ópticas de algunos tipos de superredes. Para poder explicar la estructura del espectro de reflectancia de las superredes utilizaremos algunos de los resultados anteriores.

En esta sección presentamos los resultados del cálculo analítico realizado para una superred formada por capas metálicas y aislantes alternadas, con anchos  $b$  y  $a$  respectivamente. Para las capas metálicas usamos las funciones dieléctricas del modelo hidrodinámico, ecs. (3.59) y (3.60), tomando  $\tau = 1000/\omega_p$  y  $v_F = 0.01c$ . Para las capas aislante tomamos  $\epsilon_i = 1$ , es decir, elegimos al vacío como aislante. Realizamos esta elección pues los resultados que se obtienen son cualitativamente iguales a los que se obtendrían utilizando cualquier otro tipo de aislante pero su discusión e interpretación son más simples.

En la fig. 6 mostramos la reflectancia de una superred semiinfinita metal-vacío, con  $a = b = 0.25\lambda_p$ , para un ángulo de incidencia de  $\theta_i = 70^\circ$ . Se muestran los resultados del cálculo local y

no local, obtenidos mediante las ecs. (6.37), (7.8), (7.10), (7.12) y (7.13).

Para poder entender los rasgos del espectro de la reflectancia, en la fig. 7 mostramos la relación de dispersión  $\omega$  vs.  $p$  de los modos normales de la superred, ec. (6.51). Esta fue calculada para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . Al analizar ambas gráficas, veremos que la reflectancia es casi 1 en las regiones donde no hay modos normales de propagación en el interior de la superred, y disminuye donde la propagación esta permitida.

Para frecuencias por debajo de  $\omega_p$  observamos un mínimo cerca de  $\omega_{ps}$ , ec. (5.22). Este mínimo se explica recordando que en una película simétrica hay dos modos de oscilaciones en la superficie: uno simétrico con cargas del mismo signo en ambas interfaces, ec. (5.40) y otro antisimétrico con cargas de signo opuesto, ec. (5.41). Para un mismo vector de onda  $k_p$ , el primero tiene una frecuencia menor que el último. Cuando muchas películas metálicas se colocan cerca la una de la otra formando la superred, cada una de estas oscilaciones en las interfaces se acoplan a través de las colas de sus campos evanescentes dando lugar a un modo de oscilación colectiva de toda la superred, es decir, cada modo de oscilación de la película simétrica genera un modo normal de propagación en el interior de la superred.

En la relación de dispersión, fig. 7, para frecuencias abajo de  $\omega_p$  sólo vemos el modo generado por las oscilaciones antisimétricas, debido a que el modo generado por las oscilaciones simétricas no puede ser excitado por luz que incide a un ángulo de incidencia fijo ya que su vector de onda paralelo a la interfaz es mayor que el de la luz incidente  $Q = (\omega/c)\text{sen}(\theta_i)$ . Los dos modos aparecerían en una gráfica

de la relación de dispersión para un valor de  $Q$  constante.<sup>19</sup>

Para frecuencias mayores a  $\omega_p$ , la relación de dispersión del cálculo no local es muy similar a la del local, excepto por una serie de picos, presentes en el cálculo no local, en las frecuencias  $\omega = \omega_n$  para valores de  $n$  impares. Como vimos en la sección anterior, para estos valores de  $n$  habrá un fuerte acoplamiento entre las ondas longitudinales de las capas metálicas y las ondas transversales de las capas aislantes, de tal forma que las ondas longitudinales toman energía de las ondas transversales de una capa vecina. Una parte de esta energía la disipan y otra la transportan a través de la capa metálica hasta la interfaz donde es transferida a las ondas transversales de la capa siguiente. Dando lugar a un modo normal de propagación en el interior de la superred. Este tipo de modos los podemos ver en la relación de dispersión, fig. 7. Por otro lado, para  $n$  par el acoplamiento entre las ondas longitudinales y las ondas transversales es despreciable y no se produce estructura alguna en la relación de dispersión.

En la reflectancia, fig. 6, este tipo de oscilaciones se presentan como una serie de mínimos agudos debido a que parte de la energía de la onda incidente es transportada por las ondas longitudinales acopladas a través de ondas transversales hacia el interior de la superred. Esta estructura es menos notable para frecuencias arriba de  $2.2\omega_p$ , donde en el caso local la propagación si está permitida, por lo que en el caso no local tendremos propagación tanto de ondas longitudinales como transversales en las capas metálicas.

Comparando la fig. 6 con la reflectancia de una película

metálica, fig. 5, observamos que las resonancias de las ondas longitudinales aparecen en las mismas frecuencias, pero ellas son más prominentes en la superred. En la superred la profundidad de los mínimos en la reflectancia, debido a la propagación mediante ondas longitudinales, puede ser modificada en modelos más realistas del metal. Sin embargo, esperamos que su presencia y su mayor prominencia sobre la estructura para una película metálica aislada sea independiente del modelo no local particular empleado.

En la fig. 8 mostramos la reflectancia para la misma superred como la de la fig. 6 pero para un tiempo de relajación menor,  $\tau = 100/\omega_p$ . Podemos observar que la estructura presentada en ambas gráficas es similar, sólo que la de la fig. 8 es menos prominente. Esto se debe a que al disminuir el tiempo de relajación aumenta la energía que se disipa en forma de calor. En conclusión, se observa que el único efecto que tiene el tiempo de relajación sobre la estructura de la reflectancia, para esta y para las superredes siguientes, es disminuir su prominencia.

Finalmente, como se vio anteriormente, en la reflectancia de la superred para frecuencias abajo de  $\omega_p$  tenemos un mínimo, lo cual indica, que para ciertas frecuencias es posible la transmisión de energía hacia el interior de la superred. Este resultado resulta algo sorprendente pues para estas frecuencias el metal es opaco.

#### 8.4 Reflectancia de una superred metal local-metal no local

En esta sección presentamos los resultados obtenidos para una superred formada por capas alternadas de un metal no local y un metal

local, que denominamos A y B respectivamente. Para esto, utilizamos las mismas ecuaciones que en el caso anterior. En este caso, el aislante es sustituido por el metal local el cual caracterizamos por una función dieléctrica de Drude, ec. (3.35).

Como se mencionó en la sección 6.5, este cálculo es válido sólo para frecuencias abajo de la frecuencia de plasma del metal más denso, donde las ondas longitudinales y las ondas transversales en el metal más denso son evanescentes, pero la distancia de decaimiento de la ondas longitudinales es mucho más pequeña que la de las ondas transversales. Es por esto que los efectos de la dispersión espacial en este metal pueden desprejarse, lo cual nos permite aproximarlos por un medio local.

En la fig. 9 mostramos la reflectancia calculada para una superred metal local-metal no local con  $b_A = b_B = 0.25\lambda_A = 0.25c/\omega_{PA}$ ,  $\omega_{PB} = \sqrt{2}\omega_{PA}$ ,  $v_{FA} = 0.01c$ , y  $\tau = 1000/\omega_{PA}$ , en cuya superficie incide luz con polarización P en un ángulo de  $70^\circ$ . Se muestran los cálculos local y no local.

Como en la sección anterior, para entender la estructura de la reflectancia en la fig. 10 graficamos la relación de dispersión,  $\omega$  contra  $p$ , para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ .

En la gráfica de la reflectancia podemos observar dos mínimos anchos que corresponden a la excitación de los dos modos normales que aparecen en la gráfica de la relación de dispersión del caso local, fig. 10. Estos dos modos son generados por las oscilaciones simétricas y antisimétricas de la película simétrica, como se explicó en la sección anterior, aunque en este caso la luz incidente puede excitar ambos modos, a diferencia del caso anterior. La razón es que cuando

ambos medios son metales, como se vió en la sección 5.3, los modos simétrico y antisimétrico empiezan en la frecuencia de plasma del medio menos denso y no en cero como sucede en el caso de la película metálica en medio del vacío. Al desplazarse estos modos hacia frecuencias mayores, los modos que generan en la superred también se desplazan, cruzando ambos el cono de luz. Esto permite que ambos modos puedan ser excitados por la luz incidente.

Por otro lado, en la fig. 9 se observa que el cálculo no local, sigue aproximadamente al local, pero presenta una fuerte oscilación alrededor de las frecuencias de resonancia  $\omega_n$ , la cual es más pronunciada para valores de frecuencias donde  $n$  es impar, de la misma forma que en la superred metal-aislante discutida en la sección anterior.

En la gráfica de la relación de dispersión estos modos aparecen como una serie de picos en las frecuencias  $\omega_n$ , que modifican la estructura del cálculo local. El pico en  $\omega_7$  se encuentra en el intervalo donde no es posible la propagación en el caso local. Por lo tanto este modo se forma al acoplarse las ondas guiadas longitudinales, de las capas metálicas menos densas, con las ondas evanescentes transversales, de las capas más densas. Todos los demás picos se presentan en frecuencias donde si hay propagación a través de los modos generados por las oscilaciones de superficie, por lo que éstos corresponden al acoplamiento de ondas guiadas longitudinales con ondas de superficie.

Una diferencia de este cálculo, con el de la sección anterior, es el acoplamiento entre ondas de superficie y ondas guiadas longitudinales, el cual no se da en la superred metal-aislante pues

para esta los modos generados por las ondas de superficie tienen una frecuencia menor que la de las ondas longitudinales.

### 8.5 Reflectancia de una superred metal no local-metal no local

En esta sección presentamos los resultados obtenidos para una superred como la de la sección anterior pero en este caso no despreciamos los efectos de la dispersión espacial en el metal más denso, es decir, para el cálculo de la reflectancia utilizamos las ecs. (6.38), (7.8), (7.10) y (7.19) y para el cálculo de la relación de dispersión la ec. (6.55). En este caso tomamos  $V_{FB} = \sqrt{2} V_{FA}$ .

Primero analizaremos el sistema donde la capa en la superficie es del tipo B, es decir, del metal más denso. A este sistema lo denotamos como BA.

En la fig. 11 se muestra la reflectancia para este sistema cuando luz con polarización P incide con un ángulo de  $\theta_i = 70^\circ$ . A diferencia de la superred de la sección anterior, en este caso tenemos dos relaciones de dispersión debido a que para una superred metálica no local a frecuencias menores de  $\omega_{FB}$  hay dos mecanismos de acoplamiento de las ondas en las capas menos densas: Además de las ondas evanescentes transversales, ahora tenemos ondas evanescentes longitudinales las cuales fueron despreciadas en el caso anterior. Las figs. 12 y 13 muestran estas relaciones de dispersión para los modos con carácter más transversal (MT) y más longitudinal (ML), respectivamente. Esta clasificación fue hecha de acuerdo a los valores relativos de las contribuciones de cada uno de los modos al flujo de energía transversal y longitudinal, ec. (6.63) y (6.64). El modo más

transversal y el más longitudinal son, usualmente, aquellos con mayor y menor longitud de decaimiento respectivamente.

Como en el caso anterior, el espectro de la reflectancia muestra una serie de agudas oscilaciones superimpuestas sobre dos mínimos anchos. Estos mínimos corresponden a la excitación de los dos modos generados por las ondas de superficie los cuales aparecen en la fig. 12. Estos modos son modificados debido al acoplamiento con las ondas guiadas longitudinales en las frecuencias de resonancia. Estos resultados son similares a los obtenidos en el cálculo anterior. Sin embargo, en este caso, las frecuencias de resonancia se encuentran desplazadas apreciablemente hacia el rojo, debido a la longitud finita de decaimiento  $\delta_B$  de las ondas de plasma en las capas B, la cual, en el cálculo anterior, fue considerada igual a cero. La relación resultante en las condiciones a la frontera es equivalente a un incremento en el ancho de las capas A una cantidad del orden de  $\delta_B^{69}$ .

La estructura mostrada en la fig. 11 puede ser entendida simplemente en términos de la relación de dispersión del modo más transversal de la fig. 12. La reflectancia es grande cuando no hay modos normales de propagación ( $\text{Re}(p) \approx 0$  y  $\text{Im}(p)$  grande), ó, cuando hay un modo de propagación pero la diferencia de impedancias de superficie es muy grande ( $\text{Im}(p) = 0$  pero  $\text{Re}(p)$  grande). En las regiones donde  $\text{Re}(p)$  aumenta o disminuye gradualmente, la reflectancia sigue estos cambios.

Los modos ML presentan estructura en frecuencias donde los modos MT también exhiben estructura, así que ellos no generan rasgos adicionales en la reflectancia.

En la fig. 14 se muestra el espectro de la reflectancia de una

superred similar a aquella de la fig. 11, pero en la cual las capas A y B han sido permutadas, esto es, ahora la capa superficial tienen una densidad menor que la segunda. Denotamos este sistema como AB para distinguirlo de la superred anterior. Sorprendentemente, el espectro exhibe dos veces más picos que el de la fig. 11. La posición de cada segundo mínimo coincide con un mínimo de la fig. 11, pero esta acompañado por una nueva estructura en una frecuencia mayor. Para entender el origen de estos rasgos extras, en la fig. 15 graficamos el contorno de la densidad de carga inducida  $\rho(z)$  para ciertas frecuencias seleccionadas. Observamos que los nuevos mínimos corresponden a una acumulación de carga en la primera capa, revelando una resonancia de la superficie de la superred, en contraste con el comportamiento de la estructura del sistema anterior. La existencia de estas resonancias de la superficie de la superred puede explicarse de la manera siguiente. Puesto que la película superficial está limitada por el vacío en uno de sus lados, sus ondas longitudinales sólo se pueden derramar sobre la capa metálica de mayor densidad en el otro lado. Por lo tanto su ancho efectivo es menor que el de las capas internas, las cuales pueden derramarse sobre ambos lados. Consecuentemente, las frecuencias de resonancia de la capa superficial serán mayores que las de las capas internas, pero menores que las de la película simétrica. En contraste, en el sistema BA todas las capas de menor densidad están rodeadas por capas metálicas similares en cada uno de sus lados, y entran en resonancia en frecuencias similares.

Para hacer más clara las contribuciones de ambos modos al espectro de reflectancia, hemos realizado los cálculos para el mismo sistema anterior, pero despreciando, a propósito, la presencia de los

modos ML. En este caso, las CAF's no pueden ser satisfechas en la superficie, y la impedancia de superficie no estará dada por la ec. (7.19), pero estará dada por  $Z_p = V_1^i / V_2^i$ , donde hemos considerado que el eigenvector 1 corresponde al modo MT.

En la fig. 16 mostramos la reflectancia obtenida con esta aproximación para ambos sistemas. Se puede ver que este cálculo aproximado para el sistema BA concuerda perfectamente con la fig. 11, pero en el caso AB la estructura adicional de la fig. 14 no se produce. Como esperabamos, la violación de la condición a la frontera en la superficie es más importante cuando la capa superficial soporta propagación de ondas longitudinales que cuando no lo hace.

Finalmente, se observó que como los términos de la matriz de transferencia contienen funciones exponenciales de la longitud de decaimiento de las ondas transversales y de las ondas longitudinales, las cuales son muy diferentes, los cálculos numéricos podrian presentar errores debido a inestabilidades numéricas y acumulación de errores de redondeo. Para comprobar que nuestros cálculos no presentan dichos errores utilizamos el principio de conservación de la energía. En la fig. 17 mostramos la gráfica de la densidad de flujo de energía transmitida al interior de la superred, obtenida con las ecs. (7.35) y (7.36). Podemos observar que la suma de la gráfica de la reflectancia y la del flujo de energía transmitida es uno; por lo tanto nuestros cálculos sí cumplen con el principio de conservación de la energía, lo que garantiza que no cometimos errores numéricos.

## CAPITULO 9

### CONCLUSIONES

En la presente tesis desarrollamos un procedimiento para el cálculo de las propiedades ópticas de superredes. Utilizamos el método de la matriz de transferencia, el cual generalizamos para tomar en cuenta la propagación de ondas longitudinales en metales.

Consideramos primero a una superred metal-aislante. Su matriz de transferencia se obtuvo como el producto de la matriz de transferencia de una capa metálica y una aislante. La matriz de transferencia para la capa metálica fue colapsada haciendo uso de las condiciones adicionales a la frontera (CAF's). Se obtuvieron expresiones simples para la relación de dispersión de los modos propios del sistema. La relación de dispersión nos sirvió para explicar el comportamiento de la reflectancia.

Uno de los resultados más importantes es la existencia de modos de propagación originados por ondas de superficie acopladas, en regiones donde el metal es opaco. El otro es la existencia de modos de propagación formados por ondas longitudinales guiadas, en regiones donde no se espera propagación si la dispersión espacial se desprecia.

Estos modos se manifiestan en la reflectancia como una serie de mínimos muy agudos y profundos cerca de las frecuencias  $\omega_n$  con  $n$  impar. Para éstas, la longitud de onda de las ondas longitudinales cabe un número semi entero de veces ( $n/2$ ) en el ancho de la película metálica. Estos mínimos son más profundos que los encontrados en la reflectancia de una película metálica aislada y podrían ser fácilmente observados experimentalmente.

Los resultados mostrados se obtuvieron usando un modelo hidrodinámico y asumiendo una CAF específica, es decir, la continuidad de la componente normal de la densidad de corriente. Sin embargo, nuestro método también puede ser aplicado para obtener resultados utilizando diferentes tipos de CAF's. Esperamos que nuestros resultados, cualitativamente no se modifiquen al emplear modelos más realistas que el modelo hidrodinámico.

Utilizando las fórmulas para la superred metal-aislante obtuvimos la reflectancia para una superred metal local-metal no local, despreciando la no localidad de las capas con mayor frecuencia de plasma. Estos resultados pueden ser utilizados para frecuencias menores a la frecuencia de plasma más grande, y son exactos cuando el derramamiento de las ondas longitudinales de las capas menos densas puede ser despreciado. Esto ocurre cuando la distancia de decaimiento de las ondas longitudinales en las capas más densas es mucho menor que cualquier otra distancia relevante.

En este caso, se identificaron modos electromagnéticos formados por ondas de superficie en cada una de las interfaces acopladas entre si directamente o por las ondas longitudinales guiadas de las capas menos densas y otros formados por ondas longitudinales guiadas unidas

por ondas evanescentes transversales en las capas más densas. Hay algunos cálculos previos de la reflectancia de superredes conductor-conductor,<sup>6a</sup> pero el nuestro es el primero en tomar en cuenta el acoplamiento de las ondas transversales y longitudinales.

Finalmente, mostramos los resultados del cálculo de la reflectancia de una superred semiinfinita metal no local-metal no local, concentrando nuestra atención en frecuencias cercanas a las frecuencias de plasma de sus dos componentes.

Los resultados muestran la estructura debido a la excitación de los modos de ondas de superficie y una serie de resonancias cerca de las frecuencias establecidas para las ondas longitudinales guiadas, es decir, limitadas dentro de las capas menos densas. Al comparar las frecuencias de resonancia con aquellas encontradas en una película metálica aislada y en una superred local-no local se encontró que estas se encuentran desplazadas hacia el rojo debido al derramamiento de las ondas longitudinales dentro de las capas vecinas.

Cuando la primera capa es la de menor densidad se obtiene una serie de resonancias adicionales puesto que el confinamiento de las ondas de longitudinales es más fuerte en la capa superficial. Esto se debe a que las ondas longitudinales guiadas no se pueden derramar hacia el vacío, pero sí hacia un conductor vecino. Un procedimiento de cálculo, más simple, que desprecia la presencia de los modos más longitudinales de la superred reproduce muchos de los rasgos del espectro, aunque no presenta las resonancias de la superficie de la superred.

Para este caso utilizamos el conjunto completo de CAF's que denominamos modelo I, pero nuestro método puede ser aplicado para

obtener resultados utilizando otras CAF's y esperamos que pueda extenderse a modelos más realistas de superficies conductoras.

Observamos que dentro del periodo de la superred hay dos escalas de longitud bastante diferentes, la longitud de decaimiento de las ondas transversales y la de las ondas longitudinales. Debido a que los términos de la matriz de transferencia contienen funciones exponenciales de estas distancias, el cálculo numérico de la relación de dispersión podría presentar inestabilidades numéricas y acumulación de errores de redondeo. Por ello es una gran ventaja tener resultados analíticos, algunos de los cuales se pueden obtener a través de nuestro método.

Los resultados mostrados se obtuvieron para una superred semiinfinita formada por dos medios diferentes, pero nuestro método también se puede aplicar a sistemas más complejos formados por varias capas de diferentes medios.

Finalmente, es importante señalar que nuestro cálculo es el primero que obtiene las propiedades ópticas de las superredes metálicas tomando en cuenta los modos colectivos de propagación en una superred de este tipo.<sup>42,43</sup>

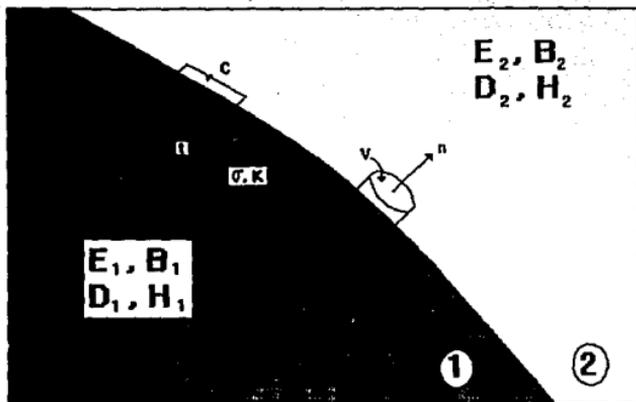


Fig. 1 Diagrama esquemático de una superficie entre dos medios. El volumen  $V$  es un pequeño cilindro, una de cuyas mitades se encuentra en un medio y la otra mitad en el otro. El vector  $\vec{n}$  es normal a cada una de sus tapas y apunta del medio 1 hacia el medio 2. El contorno  $C$  es un pequeño rectángulo una de cuyas mitades se encuentra en el medio 1 y la otra en el medio 2. Su orientación es tal que su vector normal  $\vec{\xi}$  es tangente a la superficie.

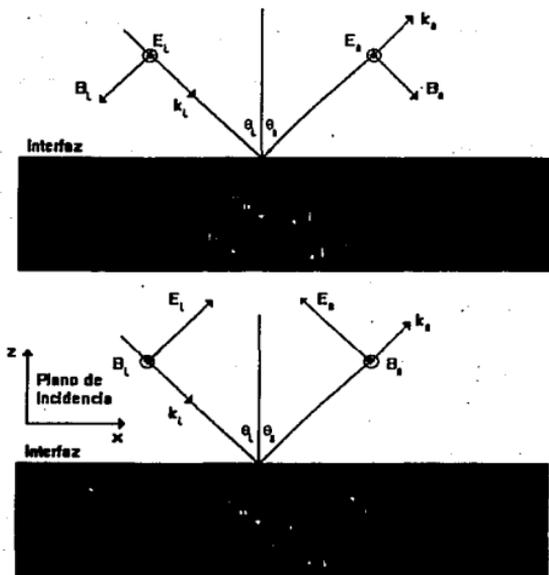


Fig. 2 En la figura superior se muestra una onda incidente cuyo campo E es normal al plano de incidencia, el campo E apunta hacia fuera de la página y en la figura inferior tenemos lo mismo pero para una onda cuyo campo E está en el plano de incidencia, el campo B apunta hacia fuera de la página.

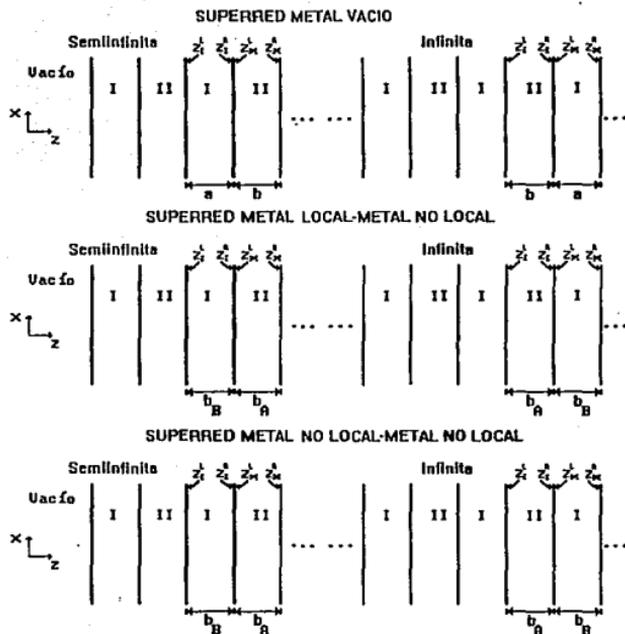


Fig. 3 Estructura de una superred semifinita formada por dos medios distintos de anchos  $a$  y  $b$ . El medio II es un metal no local y el medio I es un aislante, un metal local o un metal no local, según la superred sea una superred metal-aislante, metal no local-metal local o metal no local-metal no local. El sistema de coordenadas utilizado y la posición de las fronteras derecha e izquierda de la capa del medio I y la del medio II.

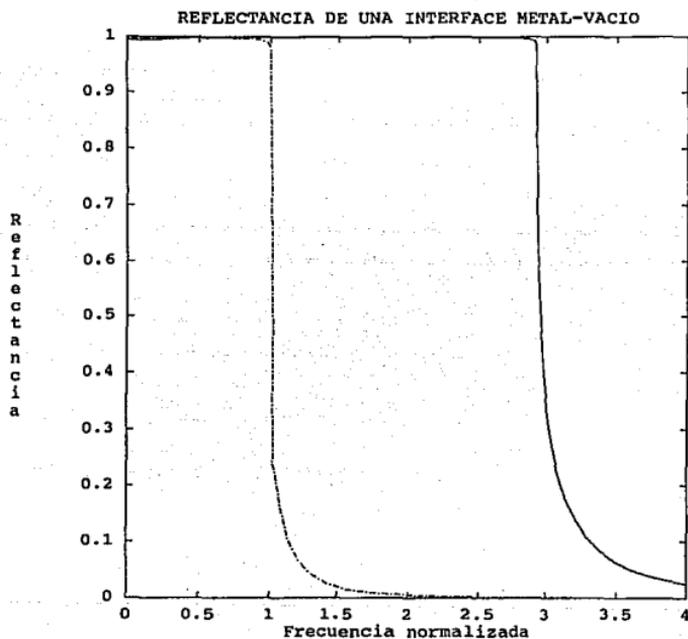


Fig. 4 Reflectancia de una interface metal-vacío. La línea continua (discontinua) muestra el cálculo para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$  ( $10^\circ$ ). La frecuencia está normalizada como  $\omega/\omega_p$ .

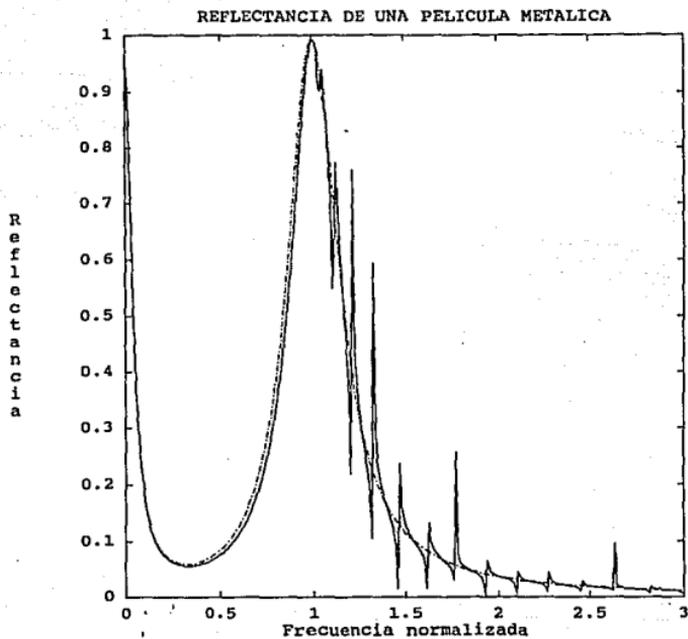


Fig. 5 Reflectancia de una película en medio del vacío para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . La línea continua representa el cálculo no local y la línea discontinua el local. La frecuencia está normalizada como  $\omega/\omega_p$ .

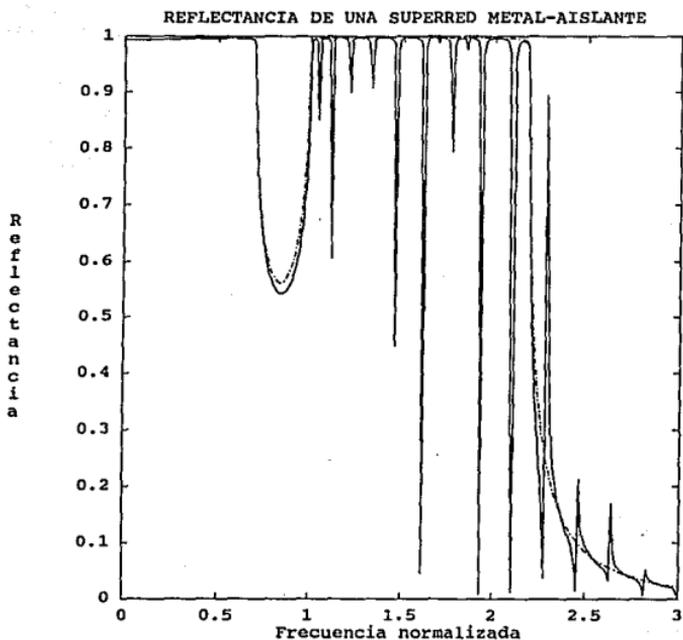


Fig. 6 Reflectancia de una superred semiinfinita metal-aislante para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . La línea continua muestra el cálculo no local y la línea discontinua el local. La frecuencia está normalizada como  $\omega/\omega_p$ .

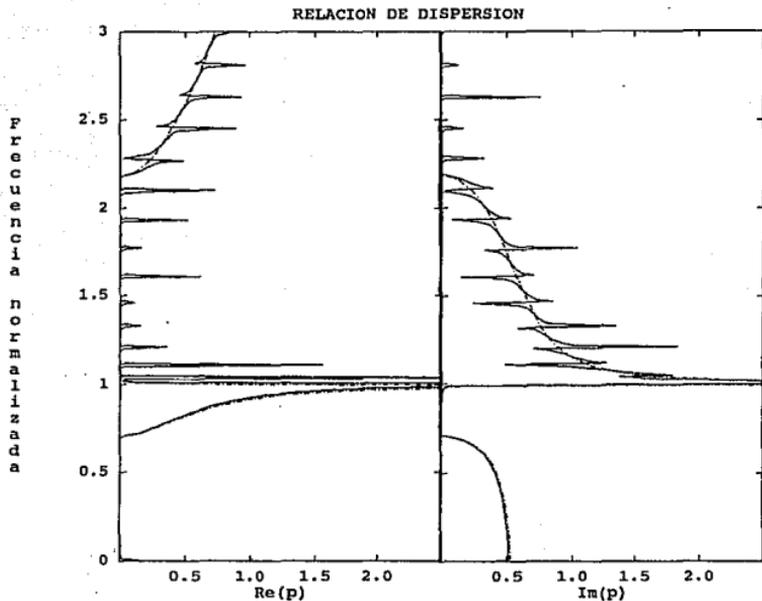


Fig. 7 Relación de dispersión  $\omega$  vs.  $p$  de una superred semiinfinita metal-aislante para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . La línea continua corresponde al cálculo no local y la discontinua al local. El vector de onda está normalizado como  $p\lambda_p$ .

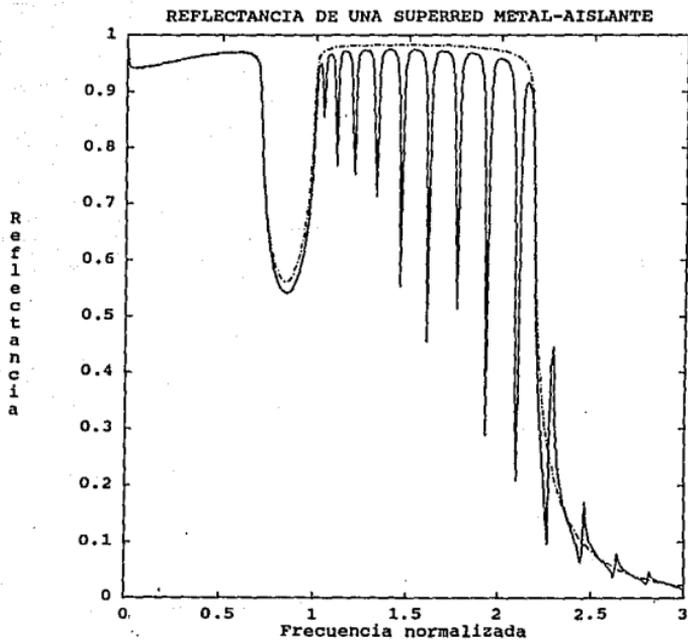


Fig. 8 Reflectancia de una superred como la de la Fig. 6 pero para un tiempo de relajación menor,  $\tau = 100/\omega_p$ .

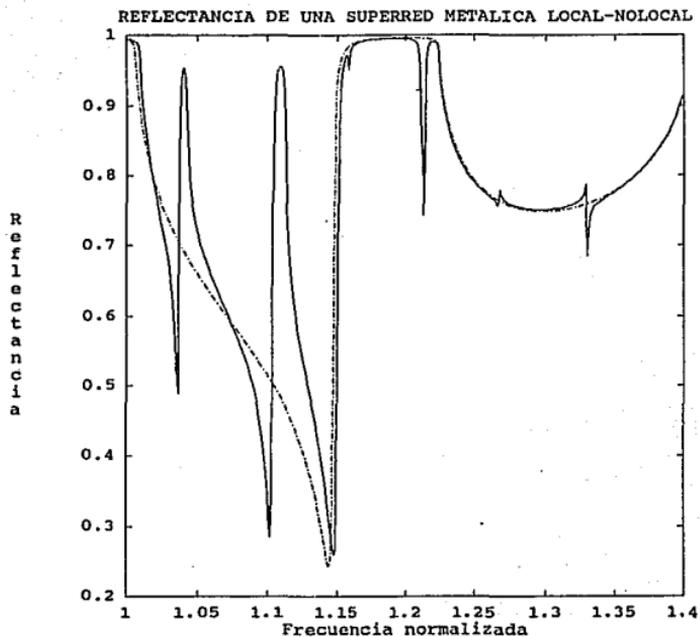


Fig. 9 Reflectancia de una superred semiinfinita metal no local-metal local para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . La línea continua muestra el cálculo no local, mientras que, la discontinua el local. La frecuencia en ésta y las próximas figuras está normalizada como  $\omega/\omega_{PA}$ .

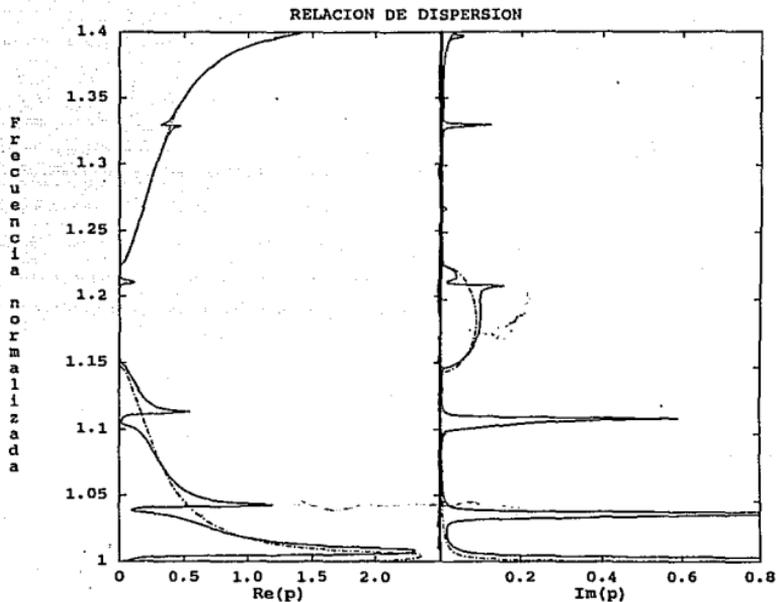


Fig. 10 Relación de dispersión de una superred metal no local-metal local para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ . La línea continua corresponde al cálculo no local y la discontinua al local. El vector de onda en ésta y las siguientes figuras está normalizado como  $p\lambda_{FA}$ .

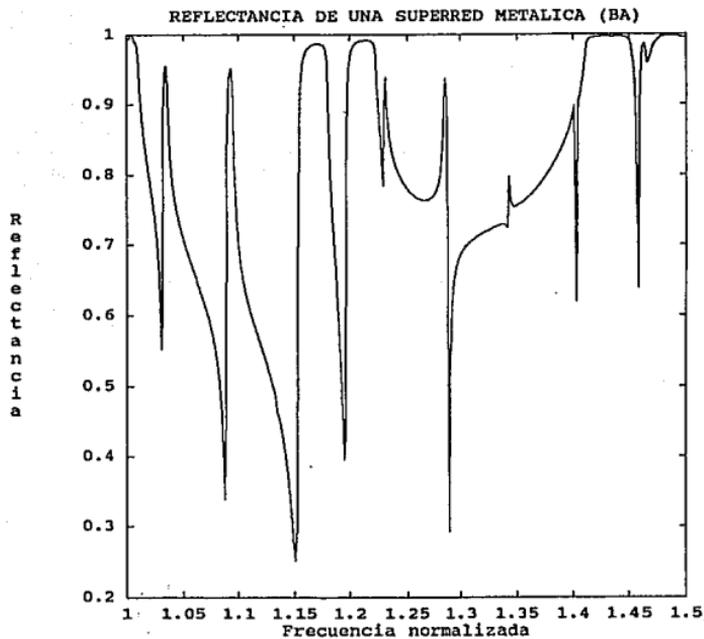


Fig. 11 Reflectancia de una superred semiinfinita metal no local-metal no local para un ángulo de incidencia de  $70^\circ$ .

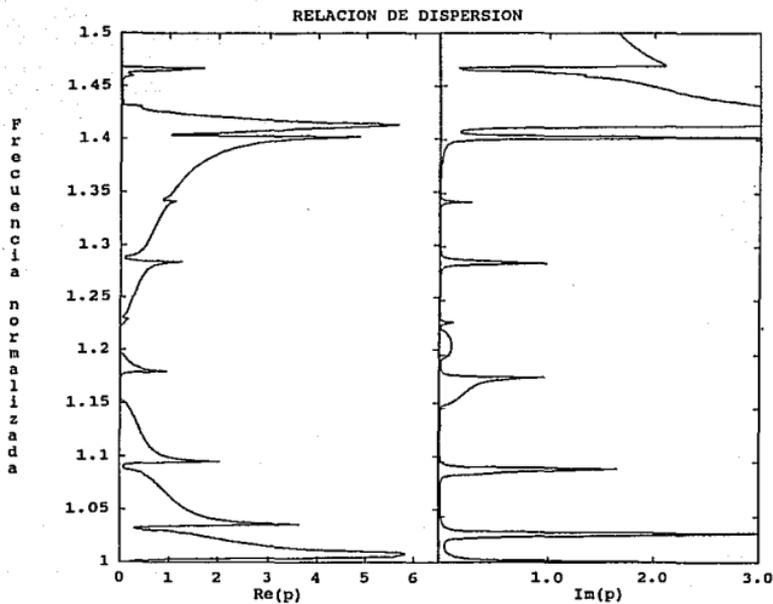


Fig. 12 Relación de dispersión del modo más transversal de una superred metal no local-metal no local para un ángulo de  $70^\circ$ .

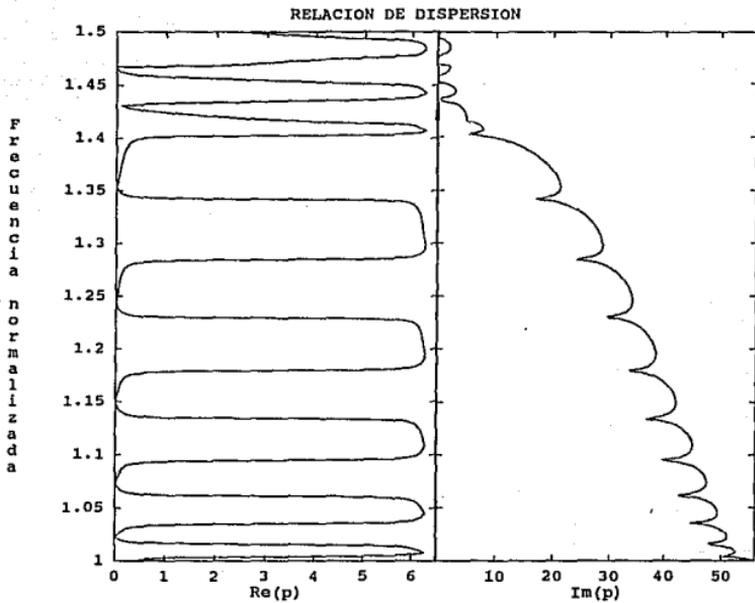
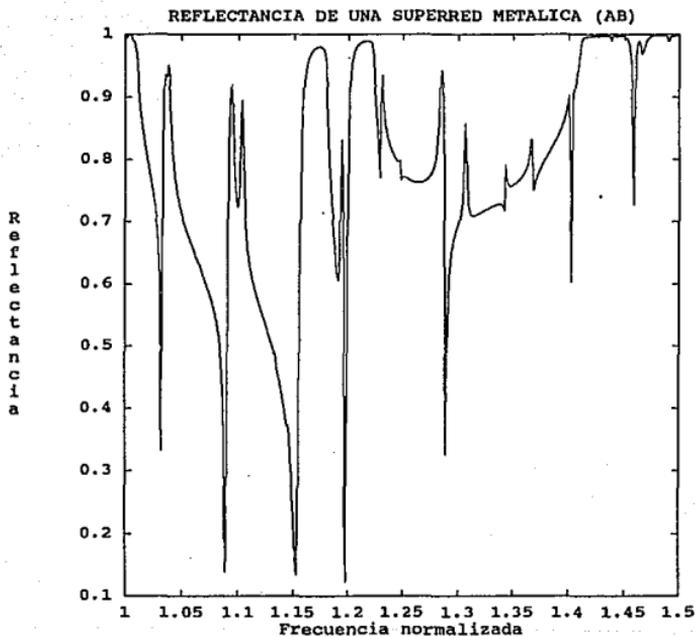


Fig. 13 Relación de dispersión del modo más longitudinal de una superred metal no local-metal no local para un ángulo de  $70^\circ$ .



**Fig. 14** Reflectancia de una superred metálica no local. Los parámetros son los mismo que los de la figura 10, excepto que la primera capa es del metal menos denso.

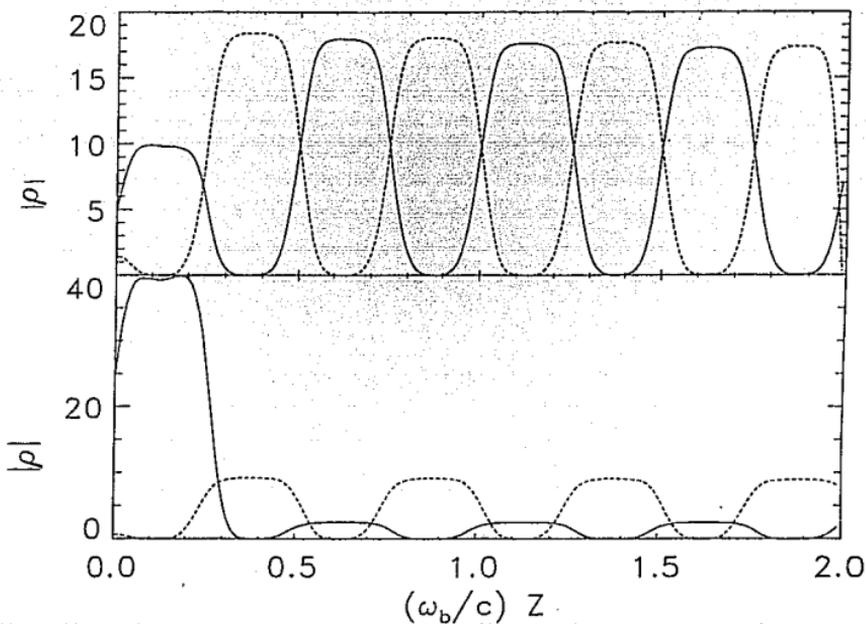


Fig. 15 Envolvente de la densidad de carga inducida  $\rho(z)$  para la misma superred de la figura 13, Para  $\omega = 1.086\omega_{PA}$  que corresponde a un mínimo en la reflectancia en las figura 10 y 13, debido al acoplamiento a un modo de propagación (cuadro superior), y para  $\omega = 1.103\omega_{PA}$  la cual corresponde a un máximo sólo en la figura 13, donde un modo de resonancia de la superficie de la superred es excitado. La línea continua corresponde al sistema AB y la línea discontinua al BA.

## REFLECTANCIA DE UNA SUPERRED METALICA FORMULA REDUCIDA

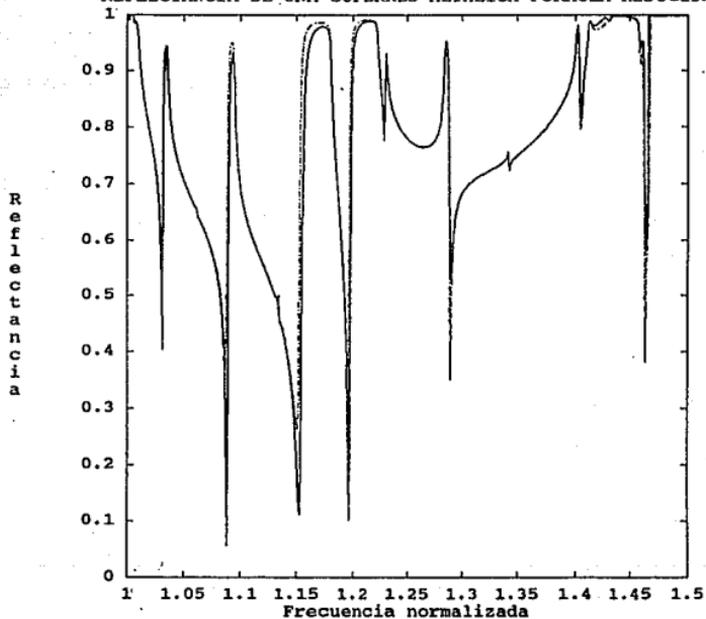
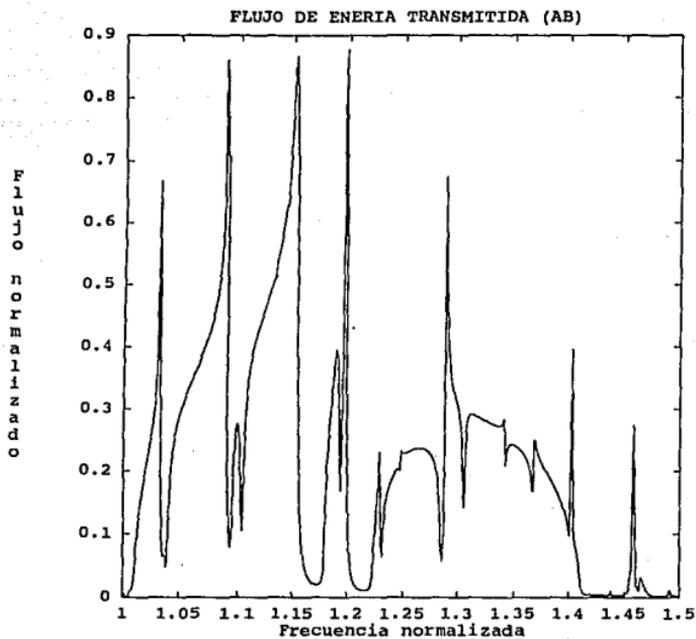


Fig. 16 Reflectancia aproximada de una superred semiinfinita no local para el sistema AB (línea continua) y para el sistema BA (línea discontinua). En el cálculo el modo más longitudinal fue despreciado.



**Fig. 17** Densidad de flujo de energía transmitida hacia el interior de una superred como la de la figura 13. El flujo de energía se muestra normalizado.

## BIBLIOGRAFIA

### LIBROS DE TEXTO

1. Ashcroft. Mermin. Solid state Physics. (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
2. Claude Weisbush, Borge Vinter. Quantum Semiconductor Structures, (Academic Press, Inc. 1971).
3. M. Born y E. Wolf, Principles of Optics (MacMillan, New York, 1974), Chap. I.
4. J. D. Jackson Classical Electrodynamics, 2° ed. (John Wiley & Sons, New York, 1975).
5. John P. McKelvey, Física del estado Sólido y semiconductores. (Editorial Limusa, S. A., 1980).
6. David Pines, Elementary Excitations in Solids (W. A. Benjamin, Inc. 1964).
7. Richmond B. Mcquistan, Campos escalares y vectoriales (Editorial Limusa, S. A. de C. V., 1985).
8. Hecht Zajac, Optica. (Fondo educativo interamericano, S. A., 1977).

### REFERENCIAS

9. L. L. Chang, L. Esaki. In Molecular Beam Epitaxy, Brian R. Pamplin, ed., Pergamon, Oxford, (1980), p 15.
10. R. Dingle, A. C. Gossard, H. L. Störmer, US Patent 4 163 237, filed April 24, 1978, issued July 31, 1979. Para una revisión ver H. L. Störmer, Surf. Sci. 132, 519 (1983).

11. S. S. Pei, N. J. Shah, R. H. Hendel, C. W. Tu, R. Dingle, in Proceedings of 1984 GaAs IC Conference.
12. F. J. A. den Broeder, D. Kuiper, A. P. van de Mosselaer, and W. Hoving. Phys. Rev. Lett 60, 2769 (1988).
13. P. F. Carcia, A. D. Meinhardt, y H. Suna, Appl. Phys. Lett 47, 178 (1985).
14. H. J. G. Draaisma, F. J. A. den Broeder, y W. J. M. de Junge, J. Magn. Magn. Mater 66, 351 (1987); F. J. A. den Broeder et al., J. Appl. Phys 61, 4371 (1987).
15. H. Feil y C. Hass. Phys. Rev. Lett. 58, 65 (1987).
16. K. H. J. Buschow, P. G. van Engen, y R. Jongebreur, J. Magn. Magn. Mater. 38(1), 1-22 (1983); M. Hartmann, B. A. Jacobs, y J. J. M. Braat, Philips Tech. Tijdschr. 42, 41 (1985).
17. F. Schmidt, W. Rave, y A. Hubert, IEEE Trans. Magn. Magn. 21, 1596 (1985); D. A. Herman, Jr., y B. E. Argyle, IEEE Trans. Magn. Magn. 22, 772-774 (1986).
18. S. D. Bager, E. R. Moog, y P. Grünberg, J. Magn. Magn. Mater. 53, 1295 (1986).
19. W. Reim, D. E. Huesser, J. Shoenes, E. Kaldis, P. Wachter, y K. Seiler, J. Appl. Phys. 55, 2155 (1984).
20. J. L. Erskine y E. A. Stern, Phys Rev B 8, 1239 (1973).
21. W. Reim, J. Shoenes, y O. Vogt, Phys. Rev. B 29, 3252 (1984).
22. W. Reim y P. Wachter, Phys. Rev. Lett. 55, 871 (1985).
23. R. A. Melnyk y M. J. Harrison, Phys. Rev. B 2, 835 (1970).
24. R. A. Farrell, Phys. Rev. 111, 1214 (1958).
25. R. A. Farrell y E. A. Stern, Am. J. Phys. 30, 810 (1962).
26. I. Lindau y P. O. Nilsson, Phys. Lett. 31A, 352 (1970); Phys. Scr. 3, 87 (1971).
27. M. Anderegg, B. Feurbacher, y B. Fitton, Phys. Rev. Lett. 27, 1565 (1971).
28. R. A. Melnyk y M. J. Harrison, Phys. Rev. Lett. 31, 85 (1968).
29. A. D. Boardman, B. V. Paranjape, y Y. O. Nakamura, Phys. Status Solidi B 75, 347 (1976).

30. F. Forstmann y H. Stenschke, Phys. Rev. Lett. 38, 1365 (1977); Phys Rev. B 17, 1489 (1978).
31. W. L. Schaich y C. Schwartz, Phys Rev B 25, 7365 (1982); C. Schwartz y W. L. Schaich, J. Phys. C 17, 537 (1984).
32. K. L. Kliewer y R. Fuchs, Phys. Rev. 172, 607 (1968); R. Fuchs y K. L. Kliewer, Phys. Rev. 185, 905 (1968).
33. T. Maniv y H. Metiu, Phys. Rev. B 22, 4731 (1980); J. Chem. Phys. 76, 2697 (1982).
34. P. J. Feibelman, Phys. Rev. B. 23, 2629 (1969); 12, 1319 (1975).
35. P. Garik y N. W. Ashcroft, Solid State Commun. 39, 1183 (1981).
36. V. M. Agranovich y V. E. Kravstov, Solid State Commun. 55, 85 (1985); P. Apell, O. Hunderi, y R. Monreal, Phys. Scr. 34, 348 (1986).
37. P. Hawrylak, J. W. Wu, y J. J. Quinn, Phys. Rev. B 32, 5169 (1985).
38. R. E. Camley y D. L. Mills, Phys. Rev. B 29, 1695 (1984).
39. G. F. Giuliani, J. J. Quinn, y R. F. Walls, J. Phys. Colloq. 45, C5-285 (1988).
40. H. Shi y C. H. Tsai, Solid State Commun. 52, 953 (1984).
41. G. Eliasson, G. F. Giuliani, y J. J. Quinn, Phys. Rev. B 33, 1405 (1986).
42. Vázquez Nava, R. A., del Castillo Mussot, M. y W. L. Mochán, (el cual ya fue aceptado, y será publicado en Phys. Rev. B este año (1993)).
43. Mochán W. L., del Castillo Mussot M., y Vazquez Nava R. A., Phys. Status Solidi B 173, 1992 (nov 92).
44. P. J. Feibelman, Prog. Surf. Sci. 12, 287 (1982).
45. W. L. Mochán, R. Fuchs, y R. G. Barrera, Phys. Rev. B 27, 771 (1983).
46. W. Luis Mochan Backal, Tesis de doctorado, Influencia de la superficie en las propiedades ópticas de sistemas no locales y cristalinos. (Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1983).
47. A. D. Boardman y R. Ruppin. Surf. Sci. 112, 153 (1981).
48. Shu Wang, Tesis de doctorado, Cálculo del campo electromagnético cerca de superficies rugosas: Efectos de la dispersión espacial (Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1989).

49. W. Luis Mochán, Marcelo del Castillo-Mussot, and Rubén G. Barrera, *Phys. Rev. B* 35, 1088 (1987).
50. W. Luis Mochan, y Marcelo del Castillo-Mussot. *Phys. Rev. B* 37, 6763 (1988).
51. Frank Fortstmann. *Zeitschrift für Physik B.* 32, 385 393 (1979).
52. Feibelman. P. J. *Private commun.*
53. Reoter. G. E. H., Sondheimer. E. H. *Proc. Roy. Soc. (London)* A 195, 336 (1948).
54. Forstmann. F. Z. *Physik* 203, 495 (1967).
55. Fuchs. R., Kliewer. K. L. *Phys. Rev.* 185, 905 (1969).
56. Melnyk. A. R., Harrison. M. J. *Phys. Rev. B* 2 835, 851 (1970).
57. Feibelman . P. J. *Phys. Rev.* 12, 1319 (1975), *Phys. Rev.* 14, 762 (1976); Bagchi. A. *Phys. Rev. B* 15, 3060 (1977).
58. Mukhopadhyay G. Lundqvist. S. *Physica Scripta* 17, 69 (1978).
59. Grosmann. M. Biemann. Nikitine. S. *Springer Tracts in Modern Physics (Ergebn. d. Exakten Naturw)* 78, 242 (1975).
60. Wagner. H. J. Thesis 1977, Univ. Karlsruhe.
61. Sauter. F. Z. *Physik* 203, 488 (1967).
62. K. L. Kliewer y R. Fuchs. *Phys. Rev.* 172, 607 (1968).
63. P. Ahlquist y P. Apell. *Phys. Scrip.* 25, 587 (1982).
64. C. Schwartz y W. L. Schaich. *Phys. Rev. B.* 26, 7008 (1982).
65. K. Kempa, F. Forstmann, R. Kötz y B. E. Hayden. *Surf. Sci.* 118, 649 (1982).
66. C. Schwartz y W. L. Schaich. *J. Phys. C.* 17, 537 (1984).
57. A. Pimpale y B. V. Paranjape. *Surf. Sci.* 161, 69 (1985).
68. G. Eliasson, G. F. Giuliani y J. J. Quinn. *Phys. Rev. B.* 31, 6534 (1986); *Phys. Rev. B* 33, 1405 (1986).
69. M. del Castillo y W. L. Mochán. *Solid State Commun.* 62, 555 (1987).
70. S. Ushioda. *In Progress in Optics* XIX, 140 (1981).
71. Fazal Ali, Inder Bahl, Aditya Gupta. *Microwave and millimeter-wave heterostructure transistors and their applications.* (Artech House, Inc. 1989)
72. S. A. Saelkunoff. *Electromagnetic waves.* (D. Van Nostrand Company, Inc. 1943)