

03061



CARTAS DE CONTROL Y 3  
SUPUESTOS DISTRIBUCIONALES 2ej-

BEATRIZ OSPINA VARON

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

México, D. F.

Universidad Nacional Autónoma de México

Unidad Académica de los Ciclos Profesional  
y de Posgrado del CCH

Instituto de Investigaciones en Matemáticas  
Aplicadas y Sistemas

1 9 9 2



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

	PAG.
INTRODUCCION.....	1
CAPITULO I	
DESCRIPCION DE CARTAS DE CONTROL.....	4
CAPITULO II	
USO SECUENCIAL DE LA $A^2$ .....	40
CAPITULO III	
CARTAS DE CONTROL NORMALIZADAS.....	58
CONCLUSIONES.....	91
BIBLIOGRAFIA.....	92
APENDICE.....	94

## RESUMEN DE LA TESIS

### CARTAS DE CONTROL Y SUPUESTOS DISTRIBUCIONALES

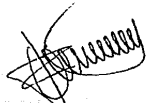
Los datos secuenciales aparecen naturalmente en el área de control de calidad. En las cartas de control como es en las Shewhart se utiliza un estimador de la desviación estándar para encontrar la banda de control y el utilizar TgO en dicha banda supone que se está muestreando de una normal donde este supuesto en general no es comprobado.

Por otro lado, recientemente se ha sugerido transformar a cartas de control ( cartas A ) en las que no solo se supuso normalidad, sino que con transformaciones propuestas se trabaja con normalidad " estándar ".

Los objetivos de esta tesis son:

1 ● Hacer un estudio 'exploratorio del uso secuencial de la estadística  $A^2$  de Anderson-Darling para verificar la bondad de ajuste de la distribución; debido a que es importante la verificación del supuesto de normalidad.

2 ● Revisar como se prueba la normalidad en algunos trabajos presentados recientemente en literatura. Analizar las transformaciones propuestas en los trabajos mencionados, para verificar el supuesto de normalidad y su eventual adaptación al caso discreto.



## INTRODUCCION

Los datos secuenciales aparecen naturalmente en el área de control de calidad. En las cartas de control como es en las Shewart se consideran muestras de mediciones; se calcula la estadística de interés  $T_i$  ( es decir,  $\bar{X}_i$ ,  $R_i$  o  $S_i$ , etc. ) para luego graficarla en una carta donde la banda de control es:

$$E (T_i) \pm 3 \sqrt{\text{Var} (T_i)}$$

Los puntos sobre estas cartas son usados para decidir si el parámetro se mantiene constante y por ello el proceso está bajo control. El usar un estimador de la desviación estándar para encontrar la banda de control utilizando  $\pm 3\sigma$  en dicha banda supone que se está muestreando de una normal donde este supuesto en general no es comprobado.

Por otro lado, recientemente se ha sugerido transformar a cartas de control ( cartas Q ) en las que no solo se supuso normalidad, sino que con transformaciones propuestas se trabaja con normalidad " estándar ".

Los objetivos de esta tesis son:

- 1 • Hacer un estudio exploratorio del uso secuencial de la

estadística  $A^2$  de Anderson-Darling para verificar la bondad de ajuste de la distribución; debido a que es importante la verificación del supuesto de normalidad.

2 • Revisar cómo se prueba la normalidad en algunos trabajos presentados recientemente en literatura. Analizar las transformaciones propuestas en los trabajos mencionados, para verificar el supuesto de normalidad y su eventual adaptación al caso discreto.

Dado que la literatura es tan extensa se vió la conveniencia de hacer un resumen sobre el tema de las cartas de control. La descripción de las cartas de control se encuentra en el capítulo I; además, con este resumen se pretende dar al lector información de las técnicas que de otra manera sería difícil conseguir.

En el capítulo II se encuentra el procedimiento detallado del estudio exploratorio sobre el uso secuencial de la prueba de bondad de ajuste  $A^2$  de Anderson-Darling en el que, por facilidad, se supone que los parámetros son conocidos pero su extensión es inmediata si se desconocen los parámetros.

En el capítulo III se muestra el método propuesto por Quesenberry tanto para el caso normal como para el caso discreto; en particular, para los casos binomial y Poisson. Además se proponen transformaciones adicionales para el caso discreto. Luego se verifica el supuesto de normalidad; mediante la prueba de bondad de ajuste  $A^2$  de Anderson-Darling, a las transformaciones sugeridas por Quesenberry y a las propuestas en este trabajo.

Finalmente se muestran las conclusiones de la tesis, la

bibliografía utilizada y el apéndice con tablas referentes a las cartas de control Shewart.

Quiero agradecer sinceramente al Dr. Federico O'Reilly Togno por su asesoría y por su orientación en el desarrollo de éste trabajo de grado.

También quiero agradecer al Ingeniero José Alejandro Reyes Cámara por su valiosa colaboración en la impresión de esta tesis y al Físico-Matemático Alejandro Benavides Zavala por su apoyo, entusiasmo y por el trabajo en equipo que realizamos.

## DESCRIPCION DE CARTAS DE CONTROL

Una carta o diagrama de control consiste de una línea central, un par de límites de control localizados el uno arriba y el otro abajo de la línea central y valores de la característica graficados sobre la carta los cuales representan el estado de un proceso. Son utilizadas ampliamente para establecer y mantener tanto el control estadístico de un proceso como el administrativo lo cual permite alcanzar ciertas metas con respecto a la calidad del mismo.

Existe una relación estrecha entre los diagramas de control y el contraste de hipótesis. Esencialmente dicha carta es para probar la hipótesis de que el proceso está bajo control estadístico. Cuando el punto se ubica entre los límites de control la hipótesis del control estadístico no se rechaza y cuando se encuentra fuera de los límites entonces la hipótesis es rechazada.

Los diagramas de control pueden clasificarse de la siguiente manera:

- 1 Diagramas de control para datos continuos
  - 1.1 Para controlar la media del proceso



- 1.1.1 Carta  $\bar{X}$
- 1.1.2 Carta de aceptación
- 1.1.3 Carta de suma acumulada
- 1.1.4 Carta de media móvil
- 1.1.5 Carta de media geométrica

1.2 Para controlar la variabilidad del proceso

- 1.2.1 Carta R
- 1.2.2 Carta S
- 1.2.3 Carta  $S^2$

2 Diagramas de control para datos discretos

2.1 Para unidades defectuosas ( fracción de defectuosos )

- 2.1.1 Carta p
- 2.1.2 Carta np

2.2 Para defectuosos

- 2.2.1 Carta c
- 2.2.2 Carta u
- 2.2.3 Carta D

3 Otros diagramas de control

- 3.1 Carta de suma de corridas
- 3.2 Carta de control multivariada
- 3.3 Carta para el desgaste de herramientas
- 3.4 Diagrama de causa y efecto

### 3.5 Diagrama de concentración de defectos

Las cartas de control  $\bar{X}$ , R y S se conocen con el nombre de cartas de control de Shewart.

## DIAGRAMAS DE CONTROL PARA DATOS CONTINUOS

### CARTAS DE CONTROL PARA LA MEDIA DEL PROCESO

#### CARTA DE CONTROL $\bar{X}$

Los límites de control para  $\bar{X}$  ( LSC, límite superior de control, LC, límite central y LIC, límite inferior de control ) donde se supone que la característica de calidad base de las observaciones es normal con la media y varianza (  $\mu, \sigma^2$  ) conocidas son:

$$LSC = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estos corresponden a un intervalo de probabilidad  $100(1-\alpha)\%$  para cada evaluación de  $\bar{X}$ .

Sin embargo, los resultados anteriores son aproximadamente correctos aunque la distribución subyacente no sea normal, por el teorema central de límite.

En la práctica son muy usados los siguientes límites de control:

$$LSC = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estos corresponden a un intervalo de probabilidad aproximadamente del 99% en cada evaluación de  $\bar{X}$ .

Habitualmente se desconocen  $\mu$  y  $\sigma$ . Por lo tanto, hay que estimarlos a partir de muestras preliminares, tomadas cuando se considera que el proceso está bajo control.

Sean  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$  las medias muestrales correspondientes a  $m$  muestras de tamaño  $n$  cada una

$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$  es el estimador de la media  $\mu$  ( el promedio de  $nm$  observaciones )

Si  $R_1, R_2, \dots, R_m$  son las amplitudes muestrales, es decir,  $R_i = X_{(n)}^i - X_{(1)}^i$  es la diferencia entre la mayor y la menor observación de la muestra  $i$ ,

$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$  es la media de las amplitudes y

$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$  es un estimador utilizado para  $\sigma$  donde  $d_2$  es la esperanza de la amplitud relativa  $w_n = \frac{R}{\sigma}$ , ésta relación es conocida cuando la muestra proviene de una distribución normal. La  $\frac{R}{\sigma} = [X_{(n)} - X_{(1)}] \frac{1}{\sigma}$  tiene esperanza tabulada para diferentes valores de  $n$

Los valores de  $d_2$  para distintos tamaños muestrales se encuentran en el apéndice II.

Si el tamaño de la muestra es relativamente pequeño, el método de la amplitud produce un estimador de la varianza casi tan bueno como el estimador cuadrático usual.

Los límites de control para  $\bar{X}$  son entonces:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \quad \bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \quad \bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

La constante  $A_2$  se encuentra en el apéndice II para distintos tamaños de muestra.

Los límites de control para  $\bar{S}$  si se utiliza el estimador usual para  $\sigma^2$  son:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{C_4\sqrt{n}} \bar{S} \quad \bar{S} = \bar{\bar{X}} + 3A_3\bar{S}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{C_4\sqrt{n}} \bar{S} \quad \bar{S} = \bar{\bar{X}} - 3A_3\bar{S}$$

Donde  $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{(X_j^i - \bar{X}^i)^2}{n-1}}$  es el promedio de los

estimadores de  $\sigma$  en las diferentes muestras, y  $\frac{\bar{s}}{C_4}$  es un estimador insesgado de  $\sigma$  con:

$$C_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma y está definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad \text{para } t > 0$$

La constante  $A_3$  se encuentra en el apéndice II para distintos tamaños de muestra.

Con el diagrama de control de  $\bar{X}$  se vigila el nivel de calidad promedio en el proceso. Por tanto, las muestras deben seleccionarse de modo que se maximicen las oportunidades de que ocurra una diferencia entre promedios muestrales, es decir, mide la variabilidad entre muestras.

#### CARTA DE CONTROL DE ACEPTACION

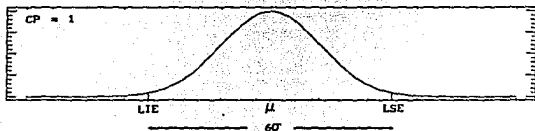
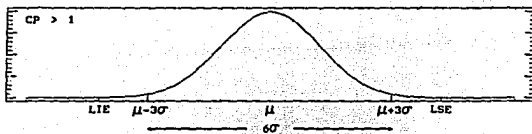
La capacidad del proceso CP es una medida que se define como el cociente entre la diferencia de los límites de especificación o tolerancia y la "variabilidad total del proceso" (6

desviaciones estándar ), es decir,

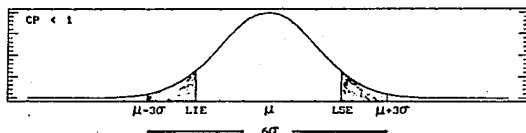
$$CP = \frac{(LSE - LIE)}{6\sigma}$$

con LIE y LSE los límites de especificación superior e inferior determinados externamente.

Si  $CP \geq 1$  significa que la variabilidad del proceso de producción es menor que la de la tolerancia establecida y por lo tanto el proceso tiene la capacidad potencial de satisfacer las especificaciones.



Si  $CP < 1$  significa que el proceso tiene mayor variabilidad de lo que permite la especificación, es decir, el proceso de detección de unidades que no cumplen con las especificaciones es muy sensible a la variabilidad presente.



En los casos en que el intervalo de  $6\sigma$  es mucho menor que el de las especificaciones (  $LSE, LIE$  ), a veces puede ocurrir, que la media del proceso cambie en un intervalo razonablemente amplio, sin afectar la fracción de artículos disconformes del producto elaborado ( artículo disconforme es el que no satisface los límites de especificación ). Cuando se presenta esta situación, se utiliza generalmente un diagrama de control modificado de  $\bar{X}$ .

El diagrama de control modificado de  $\bar{X}$ , o de aceptación, solo sirve para detectar si la media verdadera del proceso  $\mu$  está ubicada de manera que el proceso produce una fracción disconforme mayor que un valor especificado  $\delta$ . Con el objeto de especificar los límites de control para la carta de aceptación, se supone que la salida del proceso tiene distribución normal y para que la fracción disconforme del proceso sea menor que  $\delta$ , se requiere que



la media verdadera del proceso  $\mu$  puede variar en un intervalo,  $\mu_L \leq \mu \leq \mu_U$  donde  $\mu_L$  y  $\mu_U$  se eligen de tal manera que sean congruentes con la producción de una fracción disconforme de  $\delta$  a lo sumo  $\delta$ , por lo tanto,

$$\mu_L = LIE + Z_\delta \sigma$$

$$\mu_U = LSE - Z_\delta \sigma$$

Y si se especifica una magnitud del error tipo I de  $\alpha$ , los límites son:

$$LSC = \mu_U + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = LSE - \left( Z_\delta - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \sigma$$

$$LIC = \mu_L - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = LIE + \left( Z_\delta - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \sigma$$

también se puede usar

$$LSC = LSE - \left( Z_\delta - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) \sigma$$

$$LIC = LIE + \left( Z_\delta - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) \sigma$$

Este diagrama de control modificado equivale a probar la hipótesis de que la media del proceso, se halla en el intervalo  $\mu_L \leq \mu \leq \mu_U$ .

## CARTA DE CONTROL DE SUMA ACUMULADA

El diagrama de Suma Acumulada, o Cusum, incorpora directamente toda la información de la sucesión de valores muestrales, graficando las sumas acumuladas de las desviaciones de los valores muestrales respecto de un valor objetivo. Supongamos que se obtienen muestras de tamaño  $n \geq 1$ , y que  $\bar{X}_i$  es el promedio de la  $i$ -ésima muestra. Entonces, si  $\mu_0$  es el valor objetivo de la media del proceso, la gráfica de control de suma acumulativa se formará graficando la cantidad

$$S_m = \sum_{i=1}^m \left( \bar{X}_i - \mu_0 \right)$$

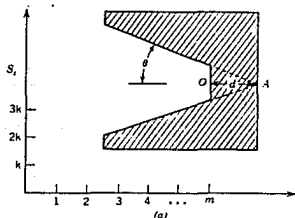
en función del número  $m$  de la muestra.  $S_m$  recibe el nombre de suma acumulada hasta la  $m$ -ésima muestra inclusive.

Si el proceso permanece bajo control para el valor objetivo  $\mu_0$ ,  $S_m$  tendrá que variar aleatoriamente alrededor de cero. Y si se desarrolla una tendencia hacia arriba o hacia abajo, se tendrá que considerar como una evidencia de cambio de la media del proceso; por lo que hay que buscar una causa atribuible.

Para determinar si el proceso está fuera de control ó no, se utiliza la mascarilla  $V$  propuesta por Barnard.

El procedimiento de decisión consiste en aplicar la mascarilla  $V$  al diagrama de Suma acumulada, con el punto  $O$  en el último valor de  $S_m$  y la línea  $OA$  paralela al eje horizontal.

Si todas las sumas acumuladas anteriores  $S_1, S_2, \dots, S_n$  caen entre los 2 brazos de la mascarilla V, el proceso se encuentra bajo control. Sin embargo, si cualquier  $S_i$  se sitúa fuera de los brazos de la mascarilla, el proceso se considera fuera de control.



Si el punto se sitúa arriba del brazo superior, ello indicará un cambio hacia abajo en la media, y si el punto se sitúa por abajo del brazo inferior ello indicará un cambio hacia arriba en la media.

Los parámetros de la mascarilla V indican el funcionamiento del diagrama de control de suma acumulada.

Se puede usar la distancia guía  $d$  y el ángulo  $e$  para definir dicha mascarilla con

$$d = \left( \frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left( \frac{1 - \beta}{\alpha} \right)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$e = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta}{2K} \right)$$

donde  $\sigma_{\bar{x}}$  es la desviación estándar de  $\bar{X}$

$\alpha$  es la probabilidad de concluir incorrectamente que se produjo un cambio (una falsa alarma)

$\beta$  es la probabilidad de no detectar un cambio de magnitud  $\Delta$  en la media (  $|\Delta| > 0$  )

$\Delta$  es el cambio en la media del proceso que se quiere detectar

$K$  es el factor de escala que relaciona la unidad de la escala vertical con la unidad de la escala horizontal

Normalmente se recomienda que  $K$  este entre  $\sigma_{\bar{x}}$  y  $2\sigma_{\bar{x}}$  con un valor preferente de  $K = 2\sigma_{\bar{x}}$ . Si  $\beta$  es pequeño,  $d = -2 \frac{\ln \alpha}{\delta^2}$ .

Un método para resumir las características y propiedades del diagrama CUSUM es la longitud media de la corrida, definida como  $LMC = 1/p$  donde  $p$  es la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites de control.

Una modificación de la forma de la mascarilla que puede mejorar el funcionamiento con respecto a cambios de gran magnitud en el proceso consiste en añadir una sección parabólica a la

mascarilla. Dichas curvas modificadas se obtienen mediante simulación. Otro método, para mejorar la capacidad del diagrama de control de suma acumulada a fin de detectar cambios grandes en el proceso, es utilizar un procedimiento combinado CUSUM-SHEWART para el control en línea. Añadir los límites de control Shewart es posiblemente la modificación más sencilla al procedimiento CUSUM. Este procedimiento combinado es casi tan sensible con respecto a cambios grandes como la mascarilla  $V$  parabólica, y más fácil de implementar.

#### CARTA DE CONTROL DE MEDIA MOVIL

Supongamos que se obtienen muestras de tamaño  $n$  y sean  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_t, \dots$  las medias muestrales. La media móvil de alcance  $w$  en el momento  $t$  se define como:

$$M_t = \frac{\bar{X}_t + \bar{X}_{t-1} + \dots + \bar{X}_{t-w+1}}{w}$$

es decir, en el instante  $t$  se promedian las  $w$  medias muestrales más recientes.

La varianza de la media móvil  $M_t$  es:

$$V(M_t) = \frac{1}{w^2} \sum_{i=t-w+1}^t V(\bar{X}_i) = \frac{1}{w^2} \sum_{i=t-w+1}^t \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{w^2} w \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{nw}$$

Por lo tanto, si  $\bar{\bar{X}}$  denota la línea central del diagrama de

control, los límites de control son:

$$LSC = \bar{X} + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{nw}}$$

$$LC = \bar{X}$$

$$LIC = \bar{X} - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{nw}}$$

El procedimiento de control consiste en calcular la nueva media móvil  $M_t$  en el momento de disponer de la media muestral  $\bar{x}_t$ , graficar  $M_t$  en un diagrama de control con los límites superior e inferior dados anteriormente, y concluir que el proceso está fuera de control cuando  $M_t$  cae fuera de los límites de control.

En general, la magnitud del cambio de interés y  $w$  se relacionan de manera inversa, una protección más eficaz contra cambios más pequeños consiste en usar medias móviles más grandes.

Este diagrama se puede considerar como un procedimiento de control de la media ponderada, en el que la media muestral es ponderada  $\bar{x}_t, \bar{x}_{t-1}, \dots, \bar{x}_{t-w+1}$  por  $1/w$  en el instante  $t$  y las medias muestrales  $\bar{x}_i$  para períodos  $i < t-w$  son ponderadas por cero.

#### CARTA DE CONTROL DE MEDIA MOVIL GEOMETRICA

Roberts presentó una gráfica de control basada en la media móvil geométrica, con

$$Z_t = r\bar{x}_t + (1-r) Z_{t-1}$$

donde  $0 < r < 1$  es una constante y el valor inicial ( necesario para la primera muestra en  $t=1$  ) es

$$Z_0 = \bar{X}$$

Para demostrar que la media móvil geométrica  $Z_t$  es una media ponderada de todas las medias muestrales anteriores, tenemos:

$$\begin{aligned} Z_t &= r\bar{X}_t + (1-r) \{ r\bar{X}_{t-1} + (1-r) Z_{t-2} \} \\ &= r\bar{X}_t + r(1-r) \bar{X}_{t-1} + (1-r)^2 Z_{t-2} \end{aligned}$$

Al continuar la sustitución recursiva de  $Z_{t-j}$   $j = 2, \dots, t$

$$Z_t = r \sum_{j=0}^{t-1} (1-r)^j \bar{X}_{t-j} + (1-r)^t Z_0$$

Si las  $\bar{X}_i$  son variables aleatorias independientes con varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ , entonces la varianza de  $Z_t$  es:

$$\sigma_{Z_t}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left[ \frac{r}{2-r} \right] \left[ 1 - (1-r)^{2t} \right]$$

Cuando  $t$  aumenta,  $\sigma_{Z_t}^2$  alcanza el siguiente valor límite

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left[ \frac{r}{2-r} \right]$$

Por lo tanto, los límites superior e inferior de control son:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + 3\sigma \sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - 3\sigma \sqrt{\frac{r}{n(2-r)}}$$

El diagrama de control de la media móvil geométrica es muy parecida al diagrama de control de la media móvil. Si  $r = \frac{2}{w+1}$ , los límites de control para los 2 diagramas coinciden para valores grandes de  $t$ .

Es de notar que para  $r = 1$ , el diagrama de control de la media móvil geométrica se reduce a la carta de control  $\bar{X}$ .



## CARTAS DE CONTROL PARA LA VARIABILIDAD DEL PROCESO

### CARTA DE CONTROL R

Para construir la carta R con  $\sigma$  conocido, sabemos que  $\sigma = \frac{R}{d_2}$  donde  $d_2$  es la media de la distribución de la amplitud relativa; además la desviación estándar de R es  $\sigma_R = d_3\sigma$  con  $d_3$  la desviación estándar de la distribución de la amplitud relativa w y sus valores se encuentran en el apéndice II para distintos tamaños de muestra. Por consiguiente los límites de control son:

$$LSC = d_2\sigma + 3d_3\sigma = (d_2 + 3d_3)\sigma = D_2\sigma$$

$$LC = d_2\sigma$$

$$LIC = d_2\sigma - 3d_3\sigma = (d_2 - 3d_3)\sigma = D_1\sigma$$

Los valores de  $D_1$  y  $D_2$  se encuentran en el apéndice II para distintos tamaños muestrales.

Si se desconoce  $\sigma$ , y  $\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$  entonces los límites de control son:

$$LSC = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left( 1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \bar{R} = D_4\bar{R}$$

$$LC = \bar{R}$$

$$LIC = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left( 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \bar{R} = D_3\bar{R}$$

Los valores de  $D_3$  y  $D_4$  se encuentra en el apéndice II para distintos tamaños de muestra.

La estimación de la desviación estándar del proceso empleada para establecer los límites de control se hace a partir de la variabilidad dentro de cada muestra (esto es, a partir de los intervalos o amplitudes de muestreo individuales). En consecuencia, la estimación de  $\sigma$  refleja sólo la variabilidad dentro de una muestra.

#### CARTA DE CONTROL S

Los límites de control para la carta S son cuando  $\sigma$  es conocido son:

$$LSC = C_4\sigma + 3 \sqrt{1 - C_4^2} \sigma = \left[ C_4 + 3 \sqrt{1 - C_4^2} \right] \sigma = B_6\sigma$$

$$LC = C_4\sigma$$

$$LIC = C_4\sigma - 3 \sqrt{1 - C_4^2} \sigma = \left[ C_4 - 3 \sqrt{1 - C_4^2} \right] \sigma = B_5\sigma$$

Si no se dispone de un valor estándar de  $\sigma$  hay que estimarlo y los límites de control son:

$$LSC = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} = \left[ 1 + \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \right] \bar{S} = B_4\bar{S}$$

$$LC = \bar{S}$$

$$LIC = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} = \left( 1 - \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \right) \bar{S} = B_3 \bar{S}$$

Los resultados anteriores se mostraron en la carta de control  $\bar{X}$  y las constantes  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_5$  y  $B_6$  se encuentran en el apéndice II para distintos tamaños de muestra.

### CARTA DE CONTROL $S^2$

La carta de control  $S^2$  se define con límites probabilísticos de la siguiente manera:

$$LSC = \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi_{\alpha/2, n-1}$$

$$LC = \bar{S}^2$$

$$LIC = \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi_{1-\alpha/2, n-1}$$

donde  $\chi_{\alpha/2, n-1}$  y  $\chi_{1-\alpha/2, n-1}$  denotan los puntos porcentuales superior e inferior  $\alpha/2$  de la distribución Ji cuadrada con  $n-1$  grados de libertad y  $\bar{S}^2$  es la varianza muestral media obtenida del análisis de datos preliminares.

## DIAGRAMAS DE CONTROL PARA DATOS DISCRETOS

### CARTAS DE CONTROL PARA UNIDADES DEFECTUOSAS

#### CARTA DE CONTROL p

La fracción de defectuosos  $p$  se define como el cociente del número de artículos defectuosos de una población entre el número total de artículos que contiene ésta última.

Los principios estadísticos que sirven de base al diagrama de control  $p$  se basan en la distribución binomial bajo el supuesto de que en la producción, la sucesión de artículos es independiente.

El atributo de calidad de cada artículo producido es una variable aleatoria Bernoulli con parámetro  $p$ . Si se selecciona una muestra de  $n$  artículos y  $D$  representa el número de artículos defectuosos entonces  $D$  se distribuye como una Binomial( $n, p$ ), es decir,

$$P(D = d) = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} \quad d = 0, 1, \dots, n$$

y  $\hat{p} = \frac{D}{n}$  es la fracción muestral de defectuosos, por

consiguiente siendo  $E(\hat{p}) = p$  y  $\text{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ , entonces los límites de control son:

$$\text{LSC} = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\text{LC} = p$$

$$\text{LIC} = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

El manejo real de éste diagrama consiste en tomar muestras sucesivas de  $n$  unidades, calcular la fracción muestral de defectuosos  $\hat{p}$  y graficar la estadística en el diagrama.

Si  $\hat{p}$  está entre los límites de control y la sucesión de puntos no exhibe un patrón sistemático, se concluye que el proceso está bajo control, al nivel  $p$ , si un punto queda fuera de los límites de control, o si se observa un patrón no aleatorio entre los puntos, habrá que concluir que la fracción de defectuosos del proceso cambió de nivel y está fuera de control.

Si el tamaño muestral es variable se determinan para cada muestra individual límites de control basados en el tamaño muestral específico. Es decir, si la  $i$ -ésima muestra es de tamaño  $n_i$ , entonces los límites son:

$$\text{LSC} = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}$$

$$\text{LC} = p$$

$$\text{LIC} = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}$$

donde la amplitud de los límites es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño muestral. Normalmente se usan límites de control de " 3 sigmas " en el diagrama de control de la fracción de defectuosos, porque han funcionado bien en la práctica. Los límites de control más estrechos hacen al diagrama de control más sensible a pequeños cambios en  $p$ , pero al costo de tener "falsas alarmas" más frecuentes.

Si se desconoce la fracción de defectuosos  $p$  del proceso, se estima a partir de los datos observados, donde se seleccionan  $m$  muestras preliminares, cada una de tamaño  $n$ , entonces si hay  $D_i$  artículos defectuosos en la muestra  $i$ , la fracción de defectuosos es:

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

y la media de éstas fracciones de defectuosos muestrales individuales es:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \frac{D_i}{n} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{p}_i}{m}$$

y los límites de control en la muestra  $i$ -ésima son:

$$LSC = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

$$LC = \bar{p}$$

$$LIC = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

Estos límites obtenidos se consideran límites de control de prueba y permiten determinar si el proceso estaba bajo control cuando se obtuvieron las  $m$  muestras iniciales. Para probar la hipótesis de un control anterior, se ubica en el diagrama la fracción muestral de defectuosos para cada muestra y se analiza la representación resultante.

Si todos los puntos ubicados caen entre los límites de control y no presentan un comportamiento sistemático, entonces se concluirá que el proceso estaba bajo control en el pasado y que los límites de control de prueba son adecuados para controlar la producción actual y futura.

Si una o más de las estadísticas  $\hat{p}_i$  se encuentran fuera de control, comparados con los límites de control de prueba, es necesario revisar dichos límites porque si los límites han de tener sentido para la producción actual o futura, debe basarse en datos de un proceso que está bajo control.

Cuando el tamaño muestral es variable, se calcula

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

y los límites de control utilizados en la muestra  $i$ -ésima son:

$$LSC = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1}}$$

$$LC = \bar{p}$$

$$LIC = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1}}$$

También, se podría basar el diagrama en un tamaño muestral promedio, lo que da como resultado un conjunto aproximado de límites de control. Para esto se supone que los tamaños muestrales futuros no serán muy diferentes de los observados antes. Por consiguiente,

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{m}$$

y los límites de control son:

$$LSC = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}}$$

$$LC = \bar{p}$$

$$LIC = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}}$$



## CARTA DE CONTROL np

Es posible basar un diagrama de control en el número de defectuosos, denotado por np.

Cuando p es conocido, los límites de control son:

$$\text{LSC} = np + 3 \sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{LC} = np$$

$$\text{LIC} = np - 3 \sqrt{np(1-p)}$$

Si se desconoce p, se estima a partir de los datos donde  $\hat{p} = \bar{p}$  y los límites de control son:

$$\text{LSC} = n\bar{p} + 3 \sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$\text{LC} = n\bar{p}$$

$$\text{LIC} = n\bar{p} - 3 \sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

## CARTAS DE CONTROL PARA DEFECTUOSOS

### CARTA DE CONTROL c

Un artículo defectuoso o " no conforme " es un producto que no satisface una o más de las especificaciones correspondientes a cada una de las mediciones de atributos de calidad a la que se somete, por tanto, un artículo defectuoso tendrá por lo menos una disconformidad.

La ocurrencia de disconformidades en artículos de muestras de tamaño constante se puede modelar mediante una distribución Poisson.

El número de posibilidades para que un artículo resulte defectuoso tiene que ver con el número de posibles disconformidades que pueda tener. La ocurrencia de disconformidades es pequeña y más o menos constante, por lo que la distribución Poisson puede modelar satisfactoriamente tanto al número de disconformidades por artículo como al número de defectuosos en cada muestra.

Sea  $c$  el número promedio ( o esperado ) de disconformidades en un artículo y sabiendo que las disconformidades siguen una distribución de Poisson, tenemos que:

$$P(x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

y  $X$  es el número de defectos en una unidad.

Por lo tanto, los límites de control son:

$$LSC = c + 3 \sqrt{c}$$

$$LC = c$$

$$LIC = c - 3 \sqrt{c}$$

Si no se da un valor estándar, se puede estimar  $c$  con la media observada del número de disconformidades en una muestra preliminar de unidades, es decir  $\hat{c} = \bar{X}$

Por lo tanto, los límites de control son:

$$LSC = \bar{X} + 3 \sqrt{\bar{X}}$$

$$LC = \bar{X}$$

$$LIC = \bar{X} - 3 \sqrt{\bar{X}}$$

Estos límites se consideran como límites de control de prueba y es necesario examinar las muestras preliminares para detectar una posible falta de control.

En la mayoría de las aplicaciones del diagrama  $c$  se supone que la distribución de Poisson es el modelo probabilístico correcto para el proceso.

Sin embargo no es el único que se podría utilizar como modelo para datos de recuento o datos del tipo de disconformidades por unidad.

Varios fenómenos pueden producir distribuciones de

disconformidades que no se modelan bien con un modelo de Poisson. Por ejemplo, suponemos que las disconformidades tienden a ocurrir en cúmulos o conglomerados; es decir, si hay una disconformidad en cierta parte del producto, entonces es probable que haya más. Es de notar que se tienen por lo menos 2 procesos aleatorios; uno que genera el número y la ubicación de los conglomerados y otro que genera el número de disconformidades dentro de cada conglomerado. Si el número de conglomerados tiene distribución de Poisson y el número de disconformidades dentro de cada conglomerado tiene una distribución común, entonces el número total de disconformidades tiene distribución de Poisson compuesta.

Hay muchos tipos de distribuciones compuestas o generales que se pueden utilizar como un modelo para datos de recuento. Por ejemplo, si el número de conglomerados tiene distribución de Poisson, y el número de disconformidades dentro de cada uno es también de Poisson, entonces la distribución tipo A de Neyman modela el número total de disconformidades.

Por consiguiente, mezcla de varios tipos de no conformidades puede llevar a situaciones en las que el número total de disconformidades no es modelado adecuadamente por la distribución de Poisson.

#### CARTA DE CONTROL $u$

Supongamos que se tiene una muestra de  $m$  de unidades de tamaño  $n$  cada unidad y  $u$  son las disconformidades por unidad. Si

encontramos un total de  $y$  disconformidades en una unidad, entonces el número promedio de disconformidades por unidad observado en esta muestra de tamaño  $n$  será  $\bar{u} = \frac{Y}{n}$ , donde  $u$  es una variable aleatoria Poisson escalada, ya que es una combinación lineal de  $n$  variables aleatorias independientes Poisson, por lo tanto, los límites de control son:

$$LSC = \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$LC = \bar{u}$$

$$LIC = \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

donde  $\bar{u}$  representa el promedio observado del número de disconformidades por unidad en el conjunto de las  $m$  unidades.

#### CARTA DE CONTROL D

En el caso de productos en que puedan ocurrir muchos tipos de disconformidades y no todos tengan la misma importancia, probablemente una unidad de producto con un defecto en sus características de calidad muy grave se clasificaría como defectuoso respecto a los requerimientos, pero una unidad con varias disconformidades menores no necesariamente tendría que ser defectuosa.

En tales situaciones, se clasifican las disconformidades de acuerdo con la gravedad y se ponderan los diversos tipos de

defectos de alguna manera razonable. Un probable esquema para clasificar los defectos sería: muy graves, graves, moderadamente importantes y poco importantes, es decir, clase A, clase B, clase C, y clase D. Sean  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  y  $C_D$  el número de defectos de las clases A, B, C, y D respectivamente en una unidad y supongamos que cada clase de defectos es independiente y que la ocurrencia de las disconformidades en cada clase se modela bien mediante una distribución de Poisson. Entonces, se puede trabajar con una cantidad que se llama deméritos en la unidad y que por ejemplo es:

$$D = 100 C_A + 50 C_B + 10 C_C + 1 C_D$$

Las ponderaciones 100, 50, 10, 1 se emplean mucho en la práctica pero se puede utilizar cualquier conjunto razonable de ponderaciones.

Si se usa una muestra de  $n$  unidades, entonces el número de deméritos por unidad es:

$$u = \frac{D}{n}$$

donde  $D$  es el número total de deméritos en todas las  $n$  unidades inspeccionadas y  $u$  es una combinación lineal de variables aleatorias independientes Poisson. Usando éste hecho se pueden definir los límites de control como:

$$LSC = \bar{u} + 3 \hat{\sigma}_u$$

$$LC = \bar{u}$$

$$LIC = \bar{u} - 3 \hat{\sigma}_u$$

con  $\bar{u} = 100 \bar{u}_A + 50 \bar{u}_B + 10 \bar{u}_C + \bar{u}_D$

$$\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{100^2 \bar{u}_A + 50^2 \bar{u}_B + 10^2 \bar{u}_C + \bar{u}_D}{n}}$$

donde  $\bar{u}_A$ ,  $\bar{u}_B$ ,  $\bar{u}_C$  y  $\bar{u}_D$  representan el número promedio de defectuosos por unidad de las clases A, B, C y D respectivamente. Estos valores promedios deben ser obtenidos del análisis preliminar de los datos suponiendo que el proceso está bajo control.

## OTROS DIAGRAMAS DE CONTROL

### CARTA DE CONTROL DE SUMA DE CORRIDAS

Roberts introduce el diagrama de control de suma de corridas. Posteriormente Reynolds hace una descripción del procedimiento.

Este diagrama es una generalización de las pruebas de corridas o rachas que se utilizan a menudo junto con las cartas de control de Shewart.

El diagrama de control se divide en zonas con ancho  $\sigma_{\bar{X}}$ . A Cada media  $\bar{X}_1$  de un subgrupo se asigna la puntuación +a si cae entre los límites superiores  $a\sigma_{\bar{X}}$  y  $(a+1)\sigma_{\bar{X}}$ , es decir,

$$\bar{X} + a\sigma_{\bar{X}} < \bar{X}_1 < \bar{X} + (a+1)\sigma_{\bar{X}}$$

y puntuaciones negativas cuando  $X_1 < \bar{X}$ , ( en otras palabras con  $a < 0$  ).

Se suman las puntuaciones asignadas o se vuelve a empezar con la suma si hay un cambio en el signo de la puntuación, o cada vez que haya un cambio conocido en el proceso.

La estadística S es la suma o puntuación acumulada, llamada



suma de corridas, y cuando  $S$  es mayor o igual a un valor crítico  $c$ , se debe tomar una acción correctiva.

#### CARTA DE CONTROL MULTIVARIADA

Cuando hay un número de características de calidad que son controladas simultáneamente, la práctica usual es tener cartas univariadas para cada una de las características y se considera el proceso bajo control solo si las medias muestrales para cada una de las características caen entre sus respectivos límites de control.

Por ejemplo si se desea controlar dos características de calidad se utiliza el diagrama de  $\bar{X}$  para cada característica y el proceso está bajo control sólo si las medias muestrales  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$  caen entre sus respectivos límites de control. Desafortunadamente se pueden encontrar resultados engañosos cuando las características están altamente correlacionadas.

Los problemas de control de calidad en los cuales hay muchas variables de interés relacionadas se llaman problemas de control de calidad multivariado.

Las cartas de control para procesos multivariados están basados en la estadística  $T^2$  de Hotelling y en el caso en que la hipótesis sea rechazada se concluye que por lo menos una de las características de calidad está fuera de control.

## CARTA DE CONTROL PARA EL DESGASTE DE HERRAMIENTAS

Los procesos de fabricación están sujetos al desgaste de las herramientas. Cuando esto sucede, suele observarse que la variabilidad del proceso en cualquier momento es considerablemente menor que la variabilidad permitida para la duración total de la herramienta. Además, cuando ésta sufre desgaste, habrá en general un cambio o tendencia hacia arriba en la media, generado por la herramienta desgastada, que produce mayores dimensiones.

Por consiguiente, el método del diagrama de control modificado puede aplicarse al problema de desgaste de herramientas. Si se conoce la tasa de desgaste o puede estimarse a partir de los datos, es posible establecer un conjunto de límites de control inclinados en torno a la línea de tendencia para el desgaste de la herramienta. Si los valores muestrales de  $\bar{x}$  caen entre estos límites, el desgaste de la herramienta se encuentra bajo control. Cuando la línea de tendencia excede la máxima media permisible del proceso, habrá que ajustar el proceso o ajustar la herramienta.

## DIAGRAMA DE CAUSA Y EFECTO

Este diagrama también se conoce como diagrama de espinazo de pescado o diagrama de Ishikawa. El diagrama de causa y efecto se utiliza para ilustrar las distintas fuentes de las disconformidades en productos y sus interrelaciones. Debido a que

los datos con respecto a disconformidades siempre contienen más información que la fracción de defectuosos, por lo que, analizando las disconformidades según el tipo, se puede tener una idea de sus causas.

Además, las disconformidades siguen la distribución de Pareto, es decir, puede atribuirse la mayoría de los defectos a unas pocas unidades defectuosas.

El desarrollo de un buen diagrama de causa y efecto suele mejorar el nivel de comprensión tecnológica del problema y es útil para centrar la atención de operadores, ingenieros de producción y directores en los problemas de calidad.

#### DIAGRAMA DE CONCENTRACION DE DEFECTOS

Este diagrama se usa para determinar si las disconformidades se localizan en la misma parte física del producto, y es un dibujo, bosquejo o esquema del producto, en el que se indica la frecuencia media de ocurrencia de las disconformidades mediante zonas sombreadas en las partes correspondientes.

## USO SECUENCIAL DE LA $A^2$

### ESTUDIO EXPLORATORIO

El análisis secuencial en estadística se utiliza para probar hipótesis cuando el tamaño de muestra no es fijo, es decir, si no hay suficiente evidencia para rechazar o aceptar la hipótesis entonces se sigue muestreando hasta el momento de poder tomar una decisión; por lo que el tamaño de muestra varía a través del tiempo o del curso del experimento. Una prueba clásica muy conocida para hacer contrastes de hipótesis secuenciales es " La Prueba de Razón de Verosimilitudes Secuencial ", ( SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST, SPRT ).

La idea de este capítulo es hacer un estudio exploratorio del posible uso secuencial de la  $A^2$ ; debido a que en muchos procesos se hace necesaria la verificación del supuesto de normalidad. Para ello se pretende encontrar un procedimiento adecuado que indique en que momento se detecta ausencia de normalidad, es decir, se detiene el proceso y se rechaza la hipótesis de normalidad o si se continúa muestreando. En otras palabras, lo que se quiere es encontrar una banda de control para seguir con el muestreo o una región de rechazo para la hipótesis de normalidad.

Para verificar la hipótesis de normalidad en datos secuenciales

se utiliza la prueba de bondad de ajuste  $A^2$  de Anderson Darling.

La estadística  $A^2$  mide la distancia entre la distribución empírica  $F_n(x)$  y la distribución que se está probando, y en base a un tamaño de muestra  $n$  está definida como:

$$A_n^2 = n \int_R \frac{\{F_n(x) - F(x)\}^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$$

y una fórmula operacional para su cómputo es:

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left\{ \text{Log}[u_{(i)}] + \text{Log}[1-u_{(n-i+1)}] \right\}$$

o también

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (2i-1) \text{Log}[u_{(i)}] + (2n-2i+1) \text{Log}[1-u_{(i)}] \right\}$$

donde las  $u_{(i)}$  son las transformadas  $u_i = F(x_i)$  ordenadas.

La distribución de  $A_n^2$  es conocida y aparece en las tablas de D'agostino y Stephens (1986), en particular la de  $F$  totalmente conocida referida allí como Caso 0.

Para probar dicha hipótesis se sugieren una de las opciones que se presentan a continuación:

Opción 1. Aplicar la prueba  $A^2$  (caso 0) a las primeras observaciones, requiriendo como mínimo 5 observaciones. Se hace la aclaración de que después de realizar la prueba de normalidad se acaba el procedimiento de prueba y por ello no es secuencial.

Opción 2. Verificar continuamente la normalidad, sin acumular la información; es decir, cada cierto tiempo probar la normalidad sin tener en cuenta la información anterior. Por ejemplo, cada 100 observaciones tomar las primeras 20 y verificar la normalidad.

Opción 3. Aplicar la prueba  $A^2$  acumulando la información cada  $\Delta$  observaciones. Por ejemplo, con las primeras 5 observaciones verificar la normalidad; luego cada 2 observaciones volver a verificarla, teniendo en cuenta la información anterior; es decir, la prueba en éste caso se haría con 7 observaciones, luego con 9 observaciones y así sucesivamente.

En la primera opción, como ya se mencionó no se está haciendo una prueba secuencial; debido a que, si al inicio del día se saca una muestra y se hace la prueba de normalidad entonces se procede durante todo el día con base en esos datos iniciales. Por consiguiente el uso de la  $A^2$  no requiere mayor explicación.

En la segunda opción, si se prevee que se harán de 5 a 10 evaluaciones de  $A^2$  al día; como estas son independientes puede inclusive modificarse el valor crítico, es decir, tener una probabilidad para el error tipo I ( el  $\alpha$  ) controlado para todo el día.

Es sólo en la tercera opción, que no se sabe cómo proceder, por lo que para dicha opción se realizó un estudio exploratorio mediante simulaciones con los parámetros conocidos.

Para dicho estudio se consideraron los siguientes 5 criterios:

CRITERIO 1. Detener el muestreo, es decir, Rechazar  $H_0$  cuando  $A^2 > t$  por primera vez.

CRITERIO 2. Detener el muestreo, es decir, Rechazar  $H_0$  cuando  $A^2 > t$  por segunda vez ( sin que esto implique que ambas sean consecutivas ).

CRITERIO 3. Detener el muestreo, es decir, Rechazar  $H_0$  cuando  $A^2 > t$  por tercera vez ( sin que esto implique que las tres sean consecutivas ).

CRITERIO 4. Detener el muestreo, es decir, Rechazar  $H_0$  cuando  $A^2 > t$  por segunda vez consecutiva ( sin importar en cuantas ocasiones se haya excedido previamente, el valor de  $t$  ).

CRITERIO 5. Detener el muestreo, es decir, Rechazar  $H_0$  si  $A^2 > t$  por tercera vez consecutiva ( sin importar en cuantas ocasiones se haya excedido previamente, el valor de  $t$  ).

donde:  $t$  es un valor crítico.

En la primera parte de éste estudio se pretendía investigar la dependencia entre la sucesión de valores de  $A^2$ . Para ello se

hicieron 1000 simulaciones para cada uno de los criterios, habiendo generado las observaciones de una normal estándar.

Igualmente cada criterio se repitió cinco veces, teniendo en cuenta en cada procedimiento un tamaño de muestra final (50), un tamaño de muestra inicial (5), dos incrementos distintos (1 y 2) y como valor crítico 2.492 ( que corresponde al 5% de la tabla, caso 0, D'Agostino & Stephens 1986, pag. 105 ).

En la tabla 1 se muestra el número de simulaciones de cada procedimiento de 1000 donde se paró el muestreo, es decir, en qué momento se rechazó la hipótesis de normalidad y los resultados se presentan a continuación:

TABLA 1

Número de simulaciones donde se paró el muestreo

Criterio 1		Criterio 2		Criterio 3		Criterio 4		Criterio 5	
$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=1$	$\Delta=2$
274	213	230	163	171	128	184	166	162	98
281	209	175	174	179	127	214	137	169	114
279	246	239	151	183	146	201	146	152	121
258	236	202	162	188	114	202	162	157	114
273	226	210	175	183	124	182	168	161	120

Al analizar los resultados obtenidos se tienen las siguientes observaciones:



1) La sucesión de valores de  $A^2$  muestra una fuerte dependencia entre ellas. Si las  $A^2$  fueran independientes se cumpliría que la probabilidad de no parar el muestreo, es decir, la probabilidad de no rechazar la hipótesis sería igual a:

$$\begin{aligned}
 P(\text{no parar}) &= P(A_{n_0}^2 < t, A_{n_0+\Delta}^2 < t, A_{n_0+2\Delta}^2 < t, \dots) \\
 &= P(A_{n_0}^2 < t) P(A_{n_0+\Delta}^2 < t) P(A_{n_0+2\Delta}^2 < t) \dots
 \end{aligned}$$

Para el criterio 1 se tiene:

$$\begin{aligned}
 P(\text{no parar}) &= P(A_5^2 < 2.492, A_6^2 < 2.492, A_7^2 < 2.492, \dots) \\
 &= P(A_5^2 < 2.492) P(A_6^2 < 2.492) \dots P(A_{50}^2 < 2.492) \\
 &= (0.95)^{46} = 0.094, \text{ contrastando éste valor con} \\
 &\text{el valor encontrado a través de las simulaciones, siendo éste} \\
 &0.727 \text{ ( } 0.727 = 1 - 0.273 \text{ )}; \text{ de donde se observa la gran} \\
 &\text{diferencia, para el caso } \Delta=1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{no parar}) &= P(A_5^2 < 2.492, A_7^2 < 2.492, A_9^2 < 2.492, \dots) \\
 &= P(A_5^2 < 2.492) P(A_7^2 < 2.492) \dots P(A_{49}^2 < 2.492) \\
 &= (0.95)^{23} = 0.307, \text{ contrastando éste valor con} \\
 &\text{el valor encontrado a través de las simulaciones, siendo éste} \\
 &0.774; \text{ de donde se observa aún una diferencia grande, para el} \\
 &\text{caso } \Delta=2.
 \end{aligned}$$

Para el criterio 2 se tiene, de las simulaciones que

$P(\text{ no parar } ) = 0.732$ , éste valor es muy parecido al encontrado en el criterio 1 de nunca parar el muestreo para el caso  $\Delta=1$ .

$P(\text{ no parar } ) = 0.765$ , éste valor es muy parecido al encontrado en el criterio 1 de nunca parar el muestreo para el caso  $\Delta=2$ .

Para el criterio 3 se tiene, de las simulaciones que

$P(\text{ no parar } ) = 0.819$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=1$ .

$P(\text{ no parar } ) = 0.872$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=2$ .

Para el criterio 4 se tiene, otra vez, de las simulaciones que

$P(\text{ no parar } ) = 0.803$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=1$ .

$P(\text{ no parar } ) = 0.844$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=2$ .

Para el criterio 5 se tiene, otra vez, de las simulaciones que

$P(\text{ no parar } ) = 0.840$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=1$ .

$P(\text{no parar}) = 0.887$ , éste valor es del orden de los encontrados en los criterios anteriores para el caso  $\Delta=2$ .

Se hace la aclaración de que con el valor crítico inicial  $t=2.492$  utilizado y con los valores de muestra inicial (5), total (50) e incrementos (1 y 2), los criterios arrojaron empíricamente valores del error tipo I (el  $\alpha$  verdadero de):

$\alpha$  empírico para  $\Delta=1$

Criterio 1	0.273
Criterio 2	0.268
Criterio 3	0.181
Criterio 4	0.197
Criterio 5	0.160

$\alpha$  empírico para  $\Delta=2$

Criterio 1	0.226
Criterio 2	0.235
Criterio 3	0.128
Criterio 4	0.156
Criterio 5	0.113

2) Si la sucesión de  $\Lambda^2$  es más pequeña la probabilidad de rechazo disminuye; es decir, el  $\alpha$  empírico correspondiente a un criterio con menos evaluaciones es menor que aquel correspondiente al mismo criterio pero con más evaluaciones, observándose éste

resultado en 1).

3) De tabulaciones no presentadas, se obtuvo que la probabilidad de que las dos  $A^2$  sean consecutivas y se rechace por segunda vez es menor que la probabilidad de que las dos  $A^2$  no sean consecutivas y se rechace por segunda vez. De manera similar se tiene la misma conclusión para los criterios 3 y 5.

Como se observaba dependencia muy fuerte entre las  $A^2$ ; en la segunda parte de este estudio, el objetivo fue aumentar el tamaño de muestra y ver qué tan grande debería ser  $\Delta$  para que la sucesión de valores de  $A^2$  resultaran "aproximadamente" independientes, continuando con el valor crítico y tamaño de muestra inicial, utilizados anteriormente. Para ello se realizaron 1000 simulaciones para el criterio 1, repitiendo éste procedimiento cinco veces. Se consideraron los incrementos 1, 2, 3, 4, y 5 para tamaños de muestra final 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 100; donde en la tabla 2 se muestran los resultados:

TABLA 2

Número de simulaciones donde se paró el muestreo							
$\Delta$	$n_f=40$	$n_f=50$	$n_f=60$	$n_f=70$	$n_f=80$	$n_f=90$	$n_f=100$
1	266	255	279	295	278	311	340
2	207	230	252	278	285	289	316
3	232	243	253	250	236	256	268
4	200	217	234	228	251	268	275
5	192	200	227	221	242	232	256

Al analizar los resultados obtenidos se tienen las siguientes observaciones:

1) Al aumentar el tamaño de muestra y dejar el incremento fijo ó constante, aumenta el número de simulaciones en las que se paró el muestreo, es decir, la probabilidad de no rechazo disminuye ( el  $\alpha$  empírico aumenta ).

2) Al aumentar el incremento y dejar el tamaño de muestra fijo ó constante, disminuye el número de simulaciones en las que se paró el muestreo, es decir, la probabilidad de no rechazo aumenta ( el  $\alpha$  empírico disminuye ).

Por consiguiente se deduce de lo anterior que la independendencia entre las  $A^2$  " se alcanza " solo si los tamaños de muestra finales son pequeños y los incrementos grandes.

Análogamente se siguió el mismo procedimiento para los restantes 4 criterios llegando a las mismas conclusiones ya mencionadas para el criterio 1.

Los resultados encontrados hasta el momento muestran una cierta complejidad pues se encontró que la sucesión de  $A^2$  no es independiente y además si se desea tener dicha independendencia, ésta está fuertemente relacionada con el tamaño de muestra final y el incremento ( aunque difícilmente se alcanza ).

Como el objetivo principal de éste estudio era encontrar una banda de control para la hipótesis de normalidad en datos secuenciales; en la tercera parte de éste, se decidió continuar con el procedimiento llevado a cabo hasta el momento pero con

algunas modificaciones. Estas modificaciones consistieron en tomar tamaños de muestra final pequeños, incrementos grandes y el valor crítico variable; este es como una función del tamaño de muestra final, el incremento y un valor crítico inicial.

Lo cual implica que la región de rechazo ya no es constante, es decir, varía gradualmente de acuerdo al tamaño de muestra final y al incremento. Cabe mencionar que en ésta parte se realizaron gran cantidad de simulaciones donde el principal objetivo era encontrar dicha función, la cual permitiría tener la banda de control buscada. Analizando los resultados de las simulaciones se tienen conclusiones que se detallarán más adelante.

Como simple ilustración se presentan algunos valores críticos propuestos, para luego mostrar los resultados de algunas de las corridas mencionadas anteriormente.

Algunos valores críticos tenidos en cuenta son:

- $( 2.492 \log ( n_r ) )$
- $( 2.492 / k )$
- $( 2.492 / k ) \sqrt{ n_r }$
- $( 2.492 / k ) \sqrt{ \Delta }$
- $( 2.492 \log ( k ) ) ( \Delta / (\Delta+1) )$
- $( 2.492 / \sqrt{k} )$
- $( 2.492 / \sqrt{k} ) \sqrt{ \Delta }$
- $( 2.492 / \sqrt{k} ) \sqrt{ \Delta+1 }$

donde  $n_r$  es el tamaño de muestra final

$\Delta$  es el incremento

$k$  es el número de evaluaciones de  $A^2$  hechas

En la tabla 3 se muestra el número de simulaciones (de las 1000) para cada procedimiento en las que se paró el muestreo, es decir, en cuántas de ellas se rechazó la hipótesis de normalidad. En éste caso se rechaza  $H_0$  si  $A^2 > 2.492 \log(n_f)$ , donde  $n_f$  es el tamaño de muestra final y el tamaño de muestra inicial es 5 y los resultados para el criterio 1 se presentan a continuación:

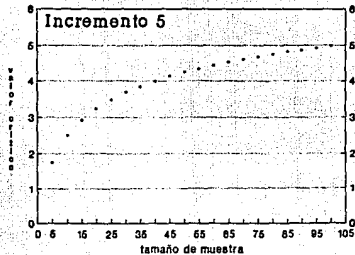
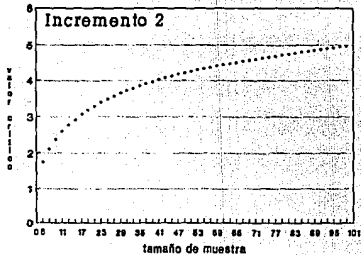
TABLA 3

Número de simulaciones donde se paró el muestreo					
A	$n_f=10$	$n_f=20$	$n_f=30$	$n_f=40$	$n_f=50$
2	157	199	183	207	235
5	154	173	152	179	175
8	132	150	142	162	157

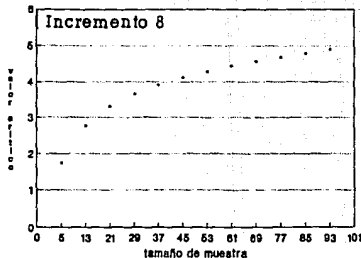
  

A	$n_f=60$	$n_f=70$	$n_f=80$	$n_f=90$	$n_f=100$
2	211	214	235	225	220
5	189	185	184	187	176
8	152	156	154	185	173

De los resultados detallados se vió que a partir de cierto tamaño de muestra ya no se detecta la falta de normalidad, debido a que el valor crítico tomado en éste caso particular aumenta gradualmente por lo que el nivel de las pruebas en las evaluaciones últimas disminuye considerablemente. En la gráfica 1 se confirma lo dicho anteriormente.



52



# BANDAS DE CONTROL

GRAFICA 1



En la tabla 4 se muestra el número de simulaciones (de las 1000) para cada procedimiento en las que se paró el muestreo, es decir, en qué momento se rechazó la hipótesis de normalidad. En éste caso se rechaza  $H_0$  si  $A^2 > 2.492 \sqrt{n_f} / k$ , donde  $n_f$  es el tamaño de muestra final,  $k$  es el número de evaluaciones potenciales de  $A^2$  y el tamaño de muestra inicial es 5 y los resultados para el criterio 1 se presentan a continuación:

TABLA 4

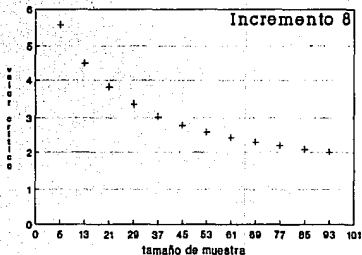
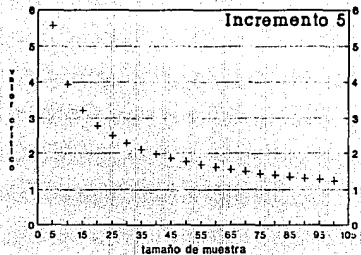
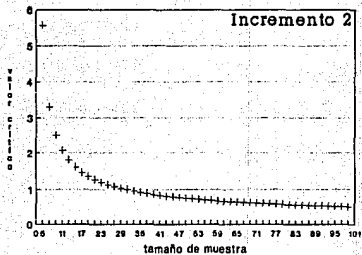
Número de simulaciones donde se paró el muestreo

$\Delta$	$n_f=10$	$n_f=20$	$n_f=30$	$n_f=40$	$n_f=50$
2	328	408	441	451	458
5	224	232	285	299	267
8	184	185	226	202	217

$\Delta$	$n_f=60$	$n_f=70$	$n_f=80$	$n_f=90$	$n_f=100$
2	472	491	448	490	472
5	253	279	279	273	274
8	213	206	242	248	231

De los resultados detallados se vió que a partir de cierto tamaño de muestra se rechaza siempre la hipótesis de normalidad, debido a que el valor crítico tomado en éste caso particular disminuye gradualmente por lo que el nivel de las pruebas asociadas a las evaluaciones últimas aumenta considerablemente. En la gráfica 2 se confirma lo dicho anteriormente.



## BANDAS DE CONTROL

GRAFICA 2

En la tabla 5 se muestra el número de simulaciones (de las 1000) para cada procedimiento en las que se paró el muestreo, es decir, en qué momento se rechazó la hipótesis de normalidad. En éste caso se rechaza  $H_0$  si  $A^2 > 2.492 \log(k) \Delta / (\Delta + 1)$ , donde  $n_f$  es el tamaño de muestra final,  $k$  es el número de muestras tomadas,  $\Delta$  es el incremento y el tamaño de muestra inicial es 5 y los resultados se presentan a continuación, para el criterio 1:

TABLA 5

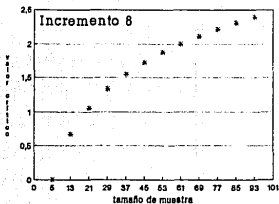
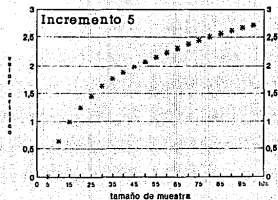
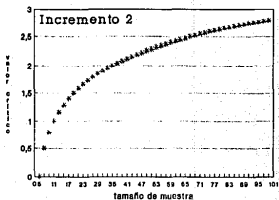
Número de simulaciones donde se paró el muestreo

$\Delta$	$n_f=10$	$n_f=20$	$n_f=30$	$n_f=40$	$n_f=50$
2	65	315	475	649	766
5	11	49	118	156	226
8	5	24	32	70	96

$\Delta$	$n_f=60$	$n_f=70$	$n_f=80$	$n_f=90$	$n_f=100$
2	844	884	927	941	963
5	237	306	328	400	423
8	106	150	186	195	244

De los resultados detallados se vió que desde el principio, por tener valores críticos muy pequeños se rechaza siempre la hipótesis de normalidad. La gráfica 3 confirma los resultados encontrados.



## BANDAS DE CONTROL

GRAFICA 3

Los 3 casos presentados anteriormente muestran la dificultad para encontrar una banda de control con un  $\alpha$  predeterminado; por lo que, después de analizar los resultados de las simulaciones se tienen las siguientes conclusiones:

1) Al disminuir la región de rechazo o lo que es lo mismo aumentar gradualmente la banda de control, se encuentra que a partir de un cierto tamaño de muestra, ya no se detecta la ausencia de normalidad en las evaluaciones de  $A^2$  hechas al final; lo cual no es recomendable.

2) Al aumentar la región de rechazo o lo que es lo mismo disminuir gradualmente la banda de control, se encuentra que a partir de un cierto tamaño de muestra, se rechaza siempre la hipótesis de normalidad en las evaluaciones finales; lo cual no es tampoco es recomendable.

Hasta el momento todo el estudio exploratorio realizado muestra que los resultados no son como se esperaban, ya que el primer problema que se encontró fué el de la dependencia fuerte entre las  $A^2$ , el cual está asociado con el tamaño de muestra final y el valor del incremento; y la segunda dificultad fué la que no se logró encontrar una banda de control con un  $\alpha$  predeterminado que no ponga demasiado peso en las evaluaciones de  $A^2$  del principio o del final.

Como conclusión cabe mencionar que el problema es muy complejo en términos analíticos por lo que la conveniencia de seguir explorando a través de simulación es inmediata. Por el momento se propone utilizar la opción 2, es decir, verificar continuamente la normalidad sin acumular la información para no incurrir en

dependencia.

Los resultados mostrados hasta el momento suponen que los parámetros son conocidos pero la extensión sería inmediata si se desconocen los parámetros, es decir, sólo se cambia de tabla del caso 0 al caso 3 haciendo las respectivas correcciones para  $n$  finita en la fórmula de cálculo, dadas en el D'Agostino & Stephens.

Cabe aclarar que todos los procedimientos ejecutados en éste estudio exploratorio se programaron en FORTRAN en una VAX 11-750.

## CARTAS DE CONTROL NORMALIZADAS

Las cartas de control han sido diseñadas para procesos donde se estiman los parámetros y los límites de control se encuentran antes de iniciar el proceso, por lo que es conveniente que las muestras sean grandes para que los estimadores sean buenos. Es importante señalar que al utilizar  $\pm 3\sigma$  en la banda de control se está haciendo un supuesto básico de normalidad, que en la práctica, nunca es comprobado.

Quesenberry ( 1991a ) propone un método en el que suponiendo normalidad construye cartas de control Q para la media y varianza del proceso en una escala normal estándar como si los parámetros hubiesen sido conocidos. Análogamente, Quesenberry ( 1991b ) y ( 1991c ) propone utilizar el mismo método anterior para construir cartas de control Q, pero donde las mediciones se distribuyen Bin (p), y, Poisson ( $\lambda$ ) respectivamente. Estas cartas Q permiten la graficación de distintas estadísticas, habiendo hecho las transformaciones propuestas, en la misma escala.

Un antecedente inmediato para construir las cartas Q fueron las cartas Shewart.

Para construir una carta de control Shewart se consideran muestras de mediciones; se calcula la estadística de interés  $T_1$

(es decir,  $\bar{X}_i$ ,  $R_i$  o  $S_i$ , etc.) para luego graficarla en una carta donde la banda de control es:

$$E(T_i) \pm 3 \sqrt{\text{Var}(T_i)}$$

Los puntos sobre estas cartas son usados para decidir si el parámetro se mantiene constante y por ello el proceso está bajo control.

Es posible transformar el valor calculado de la estadística  $T_i$  a otro valor que retenga la información de la misma, con la ventaja de que todos los puntos puedan ser graficados sobre una carta de control normal estándar. Estas cartas son las llamadas cartas de control Q por Quesenberry.

Para la elaboración de las cartas de control Q, en los tres casos, Quesenberry hace uso de " La transformación con la integral de probabilidad clásica " de Fisher y de " La transformación con la integral de probabilidad condicional " de O'Reilly y Quesenberry (1973).

Quesenberry ( 1991a ) ( 1991b ) ( 1991c ) para construir dichas cartas de control hace transformaciones a la distribución uniforme en el intervalo (0,1) (  $U(0,1)$  ), para luego calcular  $\Phi^{-1}(\cdot)$  y por último describir todo en términos de  $N(0,1)$ .

Algunos de los objetivos de este capítulo son:

\* Proponer dos transformaciones alternativas a las sugeridas por Quesenberry tanto para el caso binomial como para el caso



**Poisson.**

**\* Probar mediante una prueba de bondad de ajuste el supuesto de normalidad estándar; tanto para la transformación sugerida por Quesenberry como para las dos transformaciones propuestas en este capítulo.**

## CARTAS DE CONTROL NORMALIZADAS

### ( CASO NORMAL )

Quesenberry ( 1991a. ) propone un método para construir cartas de control normalizadas estándar, donde  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

#### CARTAS DE CONTROL Q BASADAS EN MEDICIONES INDIVIDUALES

Sean  $X_1, X_2, \dots$  mediciones hechas a una sucesión de partes producidas en el tiempo, bajo el supuesto de que estos valores son independientes e idénticamente distribuidos de una  $N(\mu, \sigma^2)$ . La media y la varianza muestral (secuenciales) al instante  $r$  son:

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r X_j$$

$$S_r^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^r (X_j - \bar{X}_r)^2$$

o también, para hacer uso de valores previos;

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} \left[ (r-1)\bar{X}_{r-1} + X_r \right]$$

$$r = 2, 3, 4, \dots$$

$$S_r^2 = \frac{r-2}{r-1} S_{r-1}^2 + \frac{1}{r} \left[ X_r - \bar{X}_{r-1} \right]^2$$

$$r = 3, 4, 5, \dots$$

Las estadísticas Q para el proceso de la media  $\mu$  son:

Caso I  $\mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0$  ambos conocidos

$$Q_r \left( X_r \right) = \frac{X_r - \mu_0}{\sigma_0}$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

Caso II  $\mu$  desconocido,  $\sigma = \sigma_0$  conocido

$$Q_r \left( X_r \right) = \sqrt{\frac{r-1}{r}} \frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{\sigma_0}$$

$$r = 2, 3, 4, \dots$$

Caso III  $\mu = \mu_0$  conocido,  $\sigma$  desconocido

$$S_{0,r}^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \left[ X_j - \mu_0 \right]^2$$

$$Q_r \left( X_r \right) = \Phi^{-1} \left\{ G_{r-1} \left[ \frac{X_r - \mu_0}{S_{0,r-1}} \right] \right\}$$

$$r = 2, 3, 4, \dots$$

donde  $G_{r-1}(\cdot)$  es la función de distribución t de Student con r-1 grados de libertad.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Caso IV  $\mu, \sigma$  ambos desconocidos

$$Q_r(X_r) = \Phi^{-1} \left\{ G_{r-2} \left[ \sqrt{\frac{r-1}{r}} \left( \frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{S_{r-1}} \right) \right] \right\}$$

$r = 3, 4, 5, \dots$

donde  $G_{r-2}(\cdot)$  es la función de distribución t de Student con r-2 grados de libertad.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Las estadísticas Q para el proceso de la varianza  $\sigma^2$  son:

Sea  $R_r = X_r - X_{r-1}$

Caso V  $\mu$  desconocido,  $\sigma = \sigma_0$  conocido

$$Q(R_r) = \Phi^{-1} \left\{ H_1 \left[ \frac{R_r^2}{2\sigma_0^2} \right] \right\}$$

$r = 2, 4, 6, \dots$

donde  $H_1(\cdot)$  es la función de distribución  $\chi^2$  con 1 grado de libertad.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Caso VI  $\mu, \sigma$  desconocidos

$$Q(R_r) = \Phi^{-1} \left\{ F_{1,\gamma} \left[ \frac{\gamma R_r^2}{R_2^2 + R_4^2 + \dots + R_{r-2}^2} \right] \right\}$$

$$\gamma = \frac{r}{2} - 1$$

$$r = 4, 6, 8, \dots$$

donde  $F_{1,\gamma}(\cdot)$  es la función de distribución F con  $(1,\gamma)$  grados de libertad.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Las seis estadísticas anteriores producen cada una, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $N(0,1)$ .

#### CARTAS DE CONTROL Q BASADAS EN MEDICIONES AGRUPADAS

En algunas ocasiones es útil formar cartas Q de medias muestrales  $\bar{X}_i$  y varianzas muestrales  $S_i^2$  para datos agrupados en muestras de

tamaño  $n_i$ , como se muestra en la tabla:

Muestra	Media Muestral	Varianza Muestral
$x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n_1}$	$\bar{x}_1$	$S_1^2$
$x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n_2}$	$\bar{x}_2$	$S_2^2$
$\cdot \ \cdot \ \dots \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot \ \cdot \ \dots \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in_i}$	$\bar{x}_i$	$S_i^2$

Sean 
$$\bar{X}_1 = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_i \bar{x}_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_i}$$

$$S_{p,1}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + \dots + (n_i-1)S_i^2}{n_1 + \dots + n_i - 1}$$

las estadísticas Q de medias muestrales son:

Caso I  $\mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0$  ambas conocidas

$$Q_i \left( \bar{X}_i \right) = \frac{\sqrt{n_i} \left( \bar{X}_i - \mu_0 \right)}{\sigma_0} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Caso II  $\mu$  desconocido,  $\sigma = \sigma_0$  conocido

$$Q_i(\bar{X}_i) = \sqrt{\frac{n_1(n_1 + \dots + n_{i-1})}{n_1 + \dots + n_1}} \left( \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}}{\sigma_o} \right)$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

**Caso III**  $\mu = \mu_o$  conocido,  $\sigma^2$  desconocido

$$\text{Sea } S_{o,i}^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^i \sum_{j=1}^{n_\alpha} (X_{\alpha j} - \mu_o)^2}{n_1 + \dots + n_i}$$

$$Q_i(\bar{X}_i) = \Phi^{-1} \left\{ G_{n_1 + \dots + n_i} \left( \frac{\sqrt{n_i} (\bar{X}_i - \mu_o)}{S_{o,i}} \right) \right\}$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

donde  $G_{n_1 + \dots + n_i}(\cdot)$  es la función de distribución t de Student con  $n_1 + \dots + n_i$  grados de libertad.  
 $\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

**Caso IV**  $\mu, \sigma$  ambos desconocidos

$$\text{Sea } w_i = \sqrt{\frac{n_1(n_1 + \dots + n_{i-1})}{n_1 + \dots + n_{i-1}}} \left( \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}}{S_{p,i}} \right)$$

$$Q_i \left[ \bar{X}_i \right] = \Phi^{-1} \left[ G_{n_1 + \dots + n_{i-1}} \left( W_i \right) \right]$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

donde  $G_{n_1 + \dots + n_{i-1}} (\cdot)$  es la función de distribución t de Student con  $n_1 + \dots + n_{i-1}$  grados de libertad.

$\Phi^{-1} (\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Las estadísticas Q para los casos I y II producen variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas normal estándar, y para los casos III y IV son también variables aleatorias normal estándar pero sólo aproximadamente independientes conforme el número  $n_1 + \dots + n_{i-1}$  se hace grande, son menos correlacionadas.

Las estadísticas Q de varianzas muestrales son:

Caso V  $\sigma = \sigma_0$  conocida

$$Q_i \left[ S_i^2 \right] = \Phi^{-1} \left\{ H_{n_i-1} \left[ \frac{(n_i - 1) S_i^2}{\sigma_0^2} \right] \right\}$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

donde  $H_{n_i-1} [\cdot]$  es la función de distribución  $\chi^2$  con  $n_i - 1$  grados de libertad.



$\phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Caso VI  $\sigma$  desconocida

$$\text{Sea } w_i = \frac{(n_1 + \dots + n_{i-1} - i + 1) S_i^2}{(n_1 - 1) S^2 + \dots + (n_{i-1} - 1) S_{i-1}^2}$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

$$Q_i(S_i^2) = \phi^{-1}\left[F_{n_1-1, n_1+\dots+n_{i-1}-i+1}(w_i)\right]$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

donde  $F_{n_1-1, n_1+\dots+n_{i-1}-i+1}(\cdot)$  es la función de distribución F con  $n_1-1, n_1+\dots+n_{i-1}-i+1$  grados de libertad.

$\phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución Normal Estándar.

Los valores en la muestra  $i$  son aleatoriamente independientes de una  $N[\mu_i, \sigma^2]$  y las estadísticas  $Q_i$  son sucesiones de variables aleatorias  $N(0, 1)$ .

## OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LAS ESTADISTICAS Q

Las estadísticas Q pueden ser graficadas sobre cartas de control Q con centro en el cero y límites de control  $\pm 3$ .

Si los otros límites son requeridos, entonces se toman los siguientes límites probabilísticos:

$$LCI = q_{1-\alpha_1}$$

$$LCS = q_{\alpha_2}$$

donde  $q_\alpha$  es el percentil  $(1-\alpha)$  de la normal. Estas cartas con estos límites son útiles en el caso en que no se tiene conocimiento a priori de los parámetros del proceso, y son aplicables a corridas cortas.

Las cartas de control Q presentan algunas ventajas:

i) Se pueden hacer en tiempo real comenzando con las primeras unidades de producción donde los parámetros del proceso deberán ser estimados con la sucesión de datos presente.

ii) Son útiles en procesos donde se tienen corridas cortas.

iii) Las estadísticas son graficadas en escala estándar y distintas estadísticas pueden ser graficadas en la misma carta, donde se pueden identificar causas especiales.

Las cartas de control Q presentan algunas desventajas:

i) Las gráficas no se hacen con las mediciones individuales originales, sino con datos resultantes de haber transformado.

ii) Para instrumentar el método es necesario una PC donde se pueda calcular entre otras, la inversa de la función de distribución normal estándar.

CARTAS DE CONTROL NORMALIZADAS  
( CASO BINOMIAL )

Quesenberry ( 1991b ) propone un método para construir cartas de control normalizadas estándar donde  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Dicha construcción se basa en la generalización de los métodos previos en el caso normal ( que es continuo ).

CARTA BINOMIAL Q PARA p CONOCIDO

Sea  $x_i$  una observación de una variable aleatoria binomial de una muestra de tamaño  $n_i$ . Los valores observados " transformados " son:

$$u_i = B(x_i; n_i, p) = \sum_{j=0}^{x_i} \binom{n_i}{j} p^j (1-p)^{n_i-j} \quad (1)$$

y la correspondiente

$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $B(\cdot)$  es la función de distribución binomial acumulada.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la distribución Normal Estándar.

Estos valores  $Q_1, Q_2, \dots$  son graficados en una carta Q con límites de control en  $\pm 3$  y centro en 0. Evidentemente, al no tener  $x_i$  una función de distribución continua,  $u_i = B(x_i; n_i, p)$  no tiene una distribución uniforme y por ello  $Q_i$  no será  $N(0,1)$ . Sin embargo cabe la posibilidad de que ésta aproximación sea aceptable. (\*)

En este capítulo se estudian dos transformaciones adicionales:

a. la transformación estandarizada usando la corrección por continuidad, dada por:

$$Z_i = \frac{x_i + 0.5 - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(x)}} \quad (2)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

donde  $E(X) = n_i p$   
 $\text{Var}(X) = n_i p(1-p)$

b. la transformación no lineal dada en Johnson & Kotz (1970), llamada transformación ArcoSeno y está definida como:

$$Y_i = 2\sqrt{n_i} \left\{ \text{Sen}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{x_i + \frac{3}{8}}{n_i + \frac{3}{4}}} \right] - \text{Sen}^{-1} \left[ \sqrt{p} \right] \right\} \quad (3)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

CARTA BINOMIAL Q PARA p DESCONOCIDO

Sea  $\{n_i, x_i\}$  una sucesión de valores para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Los valores transformados son:

$$\mu_i = H \left[ x_i; \sum_{j=1}^i x_j, n_i, n_i(i-1) \right] = H \left[ x_i; S, n_i, n_i(i-1) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{x_i} \frac{\binom{n_i}{x_j} \binom{S - n_i}{n_i(i-1) - x_j}}{\binom{S}{n_i(i-1)}}$$

(4)

y la correspondiente

$$Q_i = \Phi^{-1} \left( \mu_i \right) \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

donde  $H(\cdot)$  es la función de distribución hipergeométrica acumulada.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la distribución Normal Estándar.

Nótese que la transformación dada en (4) es la misma que en (1), excepto que en (4) se usó la función de distribución hipergeométrica mientras que en uno (1) se utilizó la función de

distribución binomial, es decir, la función de distribución hipergeométrica es un estimador de la función de distribución binomial, donde éste estimador es insesgado, de varianza mínima y converge uniformemente a la función binomial con probabilidad uno a medida que el tamaño de muestra aumenta.

Estos valores  $Q_2, Q_3, \dots$  son graficados en una carta Q con límites de control en  $\pm 3$  y centro en 0.

Se hace la aclaración similar a (\*), en cuanto a la normalidad estándar de las  $Q_i$ , sería solo aproximado.

También en este capítulo se proponen las 2 transformaciones dadas anteriormente con:

$$z_1 = \frac{x_i + 0.5 - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(x)}} \quad (5)$$

$$i = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{donde } E(X) = \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{i}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n_1 i - \sum_{j=1}^i X_j}{n_1 i - 1} \sum_{j=1}^i X_j \frac{n_1}{n_1 i} \left[ 1 - \frac{n_1}{n_1 i} \right]$$

b. la transformación ArcoSeno está dada por:

$$y_i = 2\sqrt{n_i} \left\{ \text{Sen}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{x_i + \frac{3}{8}}{n_i + \frac{3}{4}}} \right] - \text{Sen}^{-1} \left[ \sqrt{\hat{p}} \right] \right\}$$

(6)

$i = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{donde } \hat{p} = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^i n_j}$$

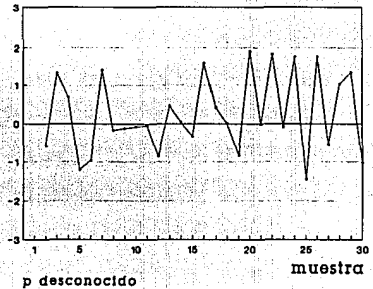
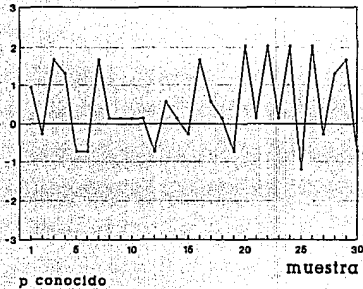
Para ilustrar el uso de estas tres cartas donde  $p$  es conocido o desconocido se consideraron muestras de tamaño 30 de una  $b(x; 63, 0.1)$ .

Las respectivas cartas se muestran en las gráficas 1, 2 y 3, donde la interpretación es similar para los casos  $p$  conocido o desconocido. Al compararse dichas cartas se encuentra que a partir de cierta observación los comportamientos son muy similares para  $p$  conocido y desconocido, es decir, la carta para  $p$  desconocido converge rápidamente a la carta donde  $p$  se toma conocido.



# CARTAS DE CONTROL Q

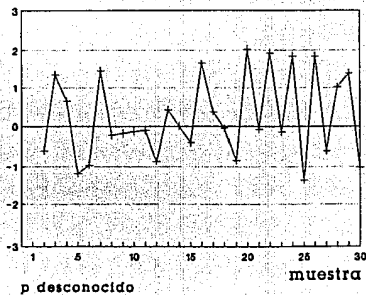
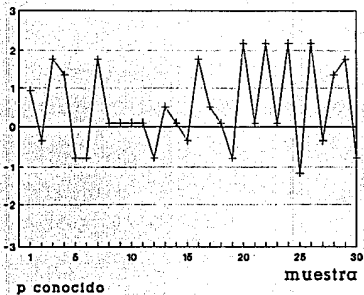
## CASO BINOMIAL



GRAFICA 1

# CARTAS DE CONTROL Z

## CASO BINOMIAL

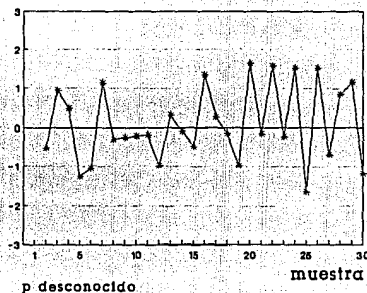
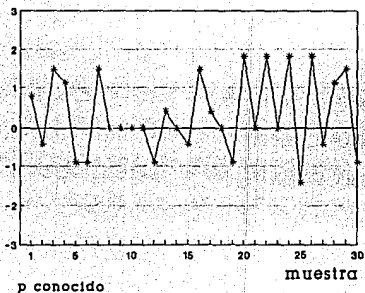


GRAFICA 2

# CARTAS DE CONTROL Y

## CASO BINOMIAL

85



GRAFICA 3

CARTAS DE CONTROL NORMALIZADAS  
( CASO POISSON )

Quesenberry ( 1991c ) propone un método para contruir cartas de control normalizadas donde  $X$  - Poisson( $\lambda$ ). Dicha construcción se basa en la generalización de los métodos previos en el caso normal ( qué es continuo ).

CARTA POISSON PARA  $\lambda$  CONOCIDO

Sea  $x_i$  una observación de una variable aleatoria Poisson con parámetro  $\lambda$ . Los valores observados  $x_1, x_2, \dots$  transformados son:

$$\mu_i = P(x_i; \lambda) = \sum_{j=1}^{x_i} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_j}}{x_j!} \quad (7)$$

y la correspondiente

$$Q_i = \Phi^{-1} (u_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $P(\cdot)$  es la función de distribución Poisson acumulada.

$\Phi^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la distribución Normal

Estándar.

Estos valores  $Q_1, Q_2, \dots$  son graficados en una carta Q con límites de control en  $\pm 3$  y centro en 0.

Evidentemente, al no tener  $x_i$  una función de distribución continua,  $u_i = P(x_i; \lambda)$  no tiene una distribución uniforme y por ello  $Q_i$  no será  $N(0,1)$ . Sin embargo cabe la posibilidad de que ésta aproximación sea aceptable. (\*\*)

En este capítulo se estudian 2 transformaciones adicionales:

a. la transformación estandarizada usando la corrección por continuidad, dada por:

$$Z_i = \frac{x_i + 0.5 - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \quad (8)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

donde  $E(X) = \lambda$   
 $\text{Var}(X) = \lambda$

b. la transformación dada en Johnson & Kotz (1970), llamada transformación Raíz Cuadrada y está definida como:

$$w_i = 2\sqrt{x_i} - 2\sqrt{\lambda} \quad (9)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

CARTA POISSON PARA  $\lambda$  DESCONOCIDO

Sea  $(n_i, x_i)$  una sucesión de valores para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Los valores observados transformados son:

$$\begin{aligned}
 x_i &= B \left[ x_i; \sum_{j=1}^i x_j, \frac{1}{i} \right] = B \left[ x_i; S, \frac{1}{i} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^{x_i} \binom{S}{x_j} \left( \frac{1}{i} \right)^{x_j} \left( 1 - \frac{1}{i} \right)^{S-x_j}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

y la correspondiente

$$Q_i = \Phi^{-1} \left( \mu_i \right) \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

donde  $B(\cdot)$  es la función de distribución binomial acumulada.  
 $\Phi^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la distribución Normal Estándar.

Nótese que la transformación dada en (10) es la misma que en (7), excepto que en (10) se usó la función de distribución binomial mientras que en (7) se utilizó la función de distribución Poisson, es decir, la función de distribución Binomial es un estimador de la función de distribución Poisson, donde éste estimador es insesgado, de varianza mínima y converge uniformemente a la función Poisson con probabilidad uno a medida

que el tamaño de muestra aumenta.

Los valores  $Q_2, Q_3, \dots$  son graficados en una carta Q con límites en  $\pm 3$  y centro en 0.

Se hace la aclaración similar a (\*\*), en cuanto a la normalidad estándar de las  $Q_1$ , sería solo aproximado.

En este capítulo se proponen las 2 transformaciones dadas anteriormente con:

a. la transformación estandarizada está dada por:

$$Z_1 = \frac{x_i + 0.5 - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(x)}} \quad (11)$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{donde } E(X) = \sum_{j=1}^i x_j \frac{1}{i}$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^i x_j \frac{1}{i} \left( 1 - \frac{1}{i} \right)$$

b. la transformación Raíz Cuadrada está dada por:

$$w_1 = 2\sqrt{x_1} - 2\sqrt{\hat{\lambda}} \quad (12)$$

$i = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{donde: } \hat{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{i}$$

Para ilustrar el uso de estas 3 cartas donde  $\lambda$  es conocido o desconocido se consideraron muestras de tamaño 60 de una  $P(x;6.8)$ .

Las respectivas cartas se muestran en las gráficas 4, 5 y 6, donde la interpretación es similar para los casos donde se conoce o se desconoce el parámetro.

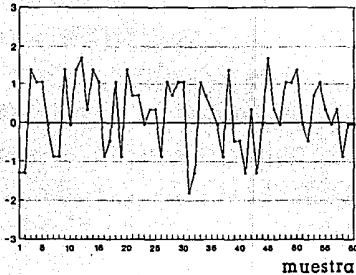
Al comparar dichas cartas se encuentra que a partir de cierta observación los comportamientos son muy similares para  $\lambda$  conocido y desconocido, es decir, la carta para  $\lambda$  desconocido converge rápidamente a la carta donde  $\lambda$  se toma conocido.



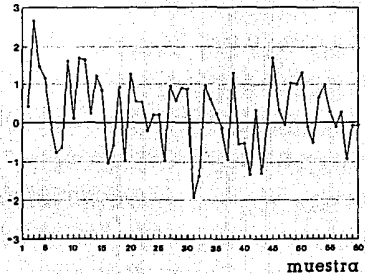
# CARTAS DE CONTROL Q

## CASO POISSON

18



$\lambda$  conocido

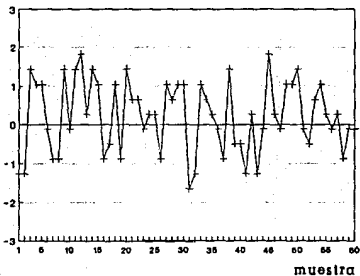


$\lambda$  desconocido

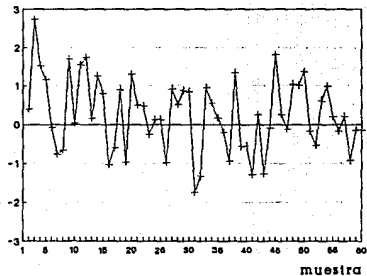
GRAFICA 4

# CARTAS DE CONTROL Z

## CASO POISSON



$\lambda$  conocido



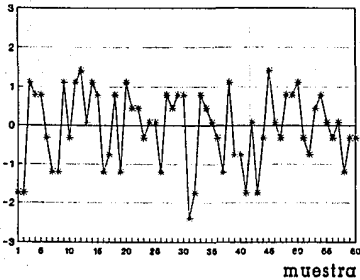
$\lambda$  desconocido

GRAFICA 5

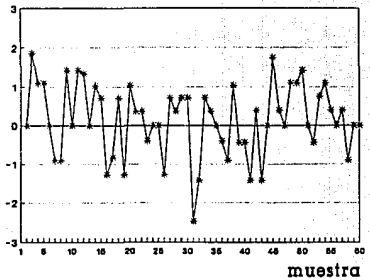
# CARTAS DE CONTROL W

## CASO POISSON

28



$\lambda$  conocido



$\lambda$  desconocido

GRAFICA 6

## ESTUDIO COMPARATIVO

El supuesto de normalidad se verificó mediante la prueba de bondad de ajuste  $A^2$  de Anderson-Darling.

Para el caso binomial se calculó la estadística  $A^2$  a las tres transformaciones dadas anteriormente, tanto para  $p$  conocido como para  $p$  desconocido. Para ello se generaron muestras de tamaño 30 para  $p$  conocido y de tamaño 29 para  $p$  desconocido, donde  $X \sim \text{Bin}(63, 0.1)$ .

Este procedimiento se programó en FORTRAN en una VAX 11-750 haciendo uso de las subrutinas GGBN, MDBIN, MDNRIS, MDNOR y MDHYP del paquete IMSL.

En la tabla 1 aparece el número de rechazos para cada procedimiento de 1000 simulaciones, es decir, el número de veces, de las 1000, que se afirma que las transformaciones no son  $N(0,1)$ . Las observaciones originales se generaron bajo la distribución binomial y  $\alpha$  ( 10% o 5% ) es el nivel utilizado de la prueba  $A^2$ .

T A B L A 1

NUMERO DE RECHAZOS DE CADA DE 1000 SIMULACIONES

$\alpha$	P Conocido			p Desconocido		
	Q	Z	Y	Q	Z	Y
10%	329	309	139	265	317	162
	366	326	144	243	323	170
	334	304	143	251	309	157
	333	301	145	219	286	157
	341	318	146	234	289	165
5%	226	198	66	170	220	76
	244	212	74	166	220	90
	226	193	72	173	221	95
	221	198	84	142	194	71
	244	208	69	146	200	90

Para el caso Poisson se calculó la estadística  $A^2$  a las 3 transformaciones dadas anteriormente; tanto para  $\lambda$  conocido como para  $\lambda$  desconocido. Para ello se generaron muestras de tamaño 60 para  $\lambda$  conocido y de tamaño 59 para  $\lambda$  desconocido, donde  $X \sim P(x; 6.8)$ .

Este procedimiento se programó en FORTRAN en una VAX 11-750 haciendo uso de las subrutinas GGPOS, MDTPS, MDNRIS, MDNOR y MDBIN del paquete IMSL.

En la tabla 2 aparece el número de rechazos para cada procedimiento de 1000 simulaciones, es decir, el número de veces, de las 1000, que se afirma que las transformaciones no son  $N(0,1)$ , habiendo generado originalmente observaciones Poisson y aplicado las transformaciones correspondientes y  $\alpha$  ( 10% o 5% ) es el nivel utilizado de la prueba  $A^2$ .

T A B L A 2

NUMERO DE RECHAZOS DE CADA DE 1000 SIMULACIONES						
$\alpha$	$\lambda$ Conocido			$\lambda$ Desconocido		
	Q	Z	W	Q	Z	W
10%	484	422	279	351	379	320
	504	449	268	366	393	340
	486	429	271	396	413	351
	491	429	263	383	415	325
	502	456	265	386	411	335
5%	349	282	175	261	267	193
	373	314	161	270	287	205
	367	303	161	281	300	221
	354	298	155	280	297	200
	357	296	154	272	277	209

El objetivo del estudio comparativo era probar normalidad estándar y al observar los resultados de las tablas 1 y 2 se

concluye que éste supuesto no se cumple; debido a que Quesenberry al usar  $F(x)$  como si fuera  $U(0,1)$  ( es decir, supone que  $F(x)$  es continua ) llega a unas  $N(0,1)$  que no lo son, pues se probó que no se verifica la hipótesis. Por lo que se recomienda, si se desea hacer cartas de control normalizadas estándar ( tipo Q ), usar las transformaciones clásicas que son las que mejor funcionan; en especial dicha transformación para el caso binomial.

## CONCLUSIONES

► En el estudio exploratorio sobre el uso secuencial de la  $\Lambda^2$  se muestra la complejidad del problema y la necesidad de seguir investigando con técnicas de simulación. Por el momento se propone utilizar la opción 2, es decir, verificar continuamente la normalidad sin acumular la información para no incurrir en dependencia de los valores de  $\Lambda^2$  utilizados.

► Las cartas de control normalizadas o cartas de control Q en los casos binomial y Poisson no cumplen con el supuesto de normalidad (0,1), debido a que Quesenberry al usar  $F(x)$  como si produjera una  $U(0,1)$  ( es decir, supone que  $F(x)$  es continua ) llega a unas transformadas que no son  $N(0,1)$ , pues se probó que no se cumple la hipótesis de normalidad (0,1) ni remotamente. Por lo que se recomienda usar las transformaciones clásicas que son las que mejor se aproximan a la normalidad, en el caso de que se desee hacer cartas normalizadas tipo Q.



## BIBLIOGRAFIA

BANKS, JERRY. (1989). Principles of Quality Control. John Wiley & Sons. New York.

BERGER, R. W. and HART, T. H. (1986). Statistical Process Control: A guide for implementation. Marcel Dekker, INC. ASQC Quality Press. New York and Basel, Milwaukee.

D'AGOSTINO, R. B. and STEPHENS, M. A. (1986). Goodness-of-fit techniques. Marcel Dekker, INC. New York and Basel.

DEHNAD, KHOSROW. (1989). Quality Control, Robust Design, and the Taguchi Method. Wadsworth & Brooks / Cole. California.

GRANT, E. L. and LEAVENWORTH, R. S. (1980). Statistical Quality Control. 5th ed. McGraw-Hill. New York.

HANSEN, B. L. and GHARE, P. M. G. (1987). Quality Control and Application. Prentice-Hall, INC. New Jersey.

JOHNSON, N. L. and KOTZ, S. (1970). Distributions in Statistics Discrete Distributions. Houghton Mifflin Company. Boston.

KUME, HITOSHI. (1988). Statistical Methods for Quality Improvement. AOTS. Japón.

MONTGOMERY, DOUGLAS C. (1985). Statistical Quality Control. John Wiley & Sons. New York.

MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A. and BOES, D. C. (1974). Introduction to the Theory of Statistics. McGraw-Hill. Tokyo.

OAKLAND, JOHN S. (1988). Statistical Process Control. John Wiley & Sons, INC. New York.

O'REILLY, F. J. and QUESENBERRY, C. P. (1973). The Conditional Probability Integral Transformation and Applications to Composite Chi-Square Goodness-of-fit Tests. Annals of Statistics 1. p.p. 74-83.

QUESENBERRY, CHARLES P. (1991a). SPC Q Charts for Start-Up Processes and Short or Long Runs. Journal of Quality Technology. Vol. 23. No. 3. p.p. 213-224.

QUESENBERRY, CHARLES P. (1991b). SPC Q Charts for a Binomial Parameter  $p$ : Short or Long Runs. Journal of Quality Technology. Vol. 23. No. 3. p.p. 239-246.

QUESENBERRY, CHARLES P. (1991c). SPC Q Charts for a Poisson Parameter  $\lambda$ : Short or Long Runs. Journal of Quality Technology. Vol. 23. No. 4. p.p. 296-303.

RYAN, THOMAS P. (1989). Statistical Methods for Quality Improvement. John Wiley & Sons. New York.

WETHERILL, G. B. and BROWN, D. W. (1991). Statistical Process Control. 1a. ed. Chapman and Hall. New York.

## APENDICE I

### FORMULAS PARA DIAGRAMAS DE CONTROL DE SHEWART

Diagrama		LIC	LC	LSC
$\bar{X}$ (usando R)	Se conocen los valores estándares	$\bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$
$\bar{X}$ (usando S)		$\bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$
R		$D_3\bar{R}$	$\bar{R}$	$D_4\bar{R}$
S		$B_3\bar{S}$	$\bar{S}$	$B_4\bar{S}$
$\bar{X}$ ( $\mu, \sigma, n$ )	Se desconocen	$\mu - 3\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\mu$	$\mu + 3\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
R ( $\sigma, n$ )	los valores	$D_1\sigma$	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$
S ( $\sigma, n$ )	estándares	$B_5\sigma$	$C_4\sigma$	$B_6\sigma$

Las constantes  $A_2, A_3, B_3, B_4, B_5, B_6, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$ , y  $d_2$  se encuentran en la tabla del Apéndice II para diferentes valores muestrales

Appendix II Factors for Constructing Variables Control Charts

Observations in Sample, n	Chart for Averages			Chart for Standard Deviations						Chart for Ranges						
	Factors for Control Limits			Factors for Central Line			Factors for Control Limits			Factors for Central Line			Factors for Control Limits			
	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	1/c <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>	B <sub>8</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2.121	1.800	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.868	0	4.358	0	2.574
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.008	2.059	0.4857	0.860	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	-0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.04230	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2616	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

For n > 25

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, A_1 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, c_4 = \frac{d(n-1)}{4n-3}$$

$$B_5 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}, B_6 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_7 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, B_8 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Tomado de: NUNTGOMERY, D. C.  
Statistical Quality Control.  
John Wiley & Sons, New York  
(1985). pag. 510.

95