

21
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



POLIGONOS FUNDAMENTALES DE DIRICHLET

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

GABRIEL MOSQUEDA PEREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA MEXICO D.F.

1992

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N T R O D U C C I O N

Los Grupos Fuchsianos y Kleinianos son de gran importancia actual en varias ramas de la Matemática, entre otras destacan las superficies de Riemann, la teoría de los números y recientemente con los trabajos de Thurston [T], la topología de dimensión baja.

Siempre es útil obtener visualizaciones geométricas de estos grupos, lo cual se puede hacer mediante la construcción de Regiones Fundamentales (B). En esta tesis nos restringiremos a discutir algunos polígonos bidimensionales (derivados de grupos Fuchsianos). También consideraremos sólo los casos menos patológicos. polígonos más complicados se pueden ver por ejemplo en [L2] p. 124 - 125 y [F] p. 57 - 58. Para el caso de Grupos Kleinianos se puede consultar [Mas].

En el Capítulo 1 exhibimos los resultados básicos de geometría hiperbólica bidimensional que necesitamos para la médula de la tesis que es el Capítulo 2, es decir la construcción y discusión de los Polígonos de Dirichlet. En el Capítulo 3 damos algunos ejemplos que ilustran estas construcciones, así como los Polígonos de Ford.

Noviembre 1992.

I N D I C E

<i>Preliminares.</i> -----	1
Capítulo 1. Geometría Hiperbólica. -----	4
Capítulo 2. Polígono de Dirichlet. -----	14
Capítulo 3. Ejemplos: Polígono de Ford. -----	47
Bibliografía. -----	54

PRELIMINARES

PRELIMINARES:

Una transformación lineal es una biyección conforme de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{C};$$

y $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A $\hat{\mathbb{C}}$ se le identifica mediante la proyección estereográfica con la esfera de Riemann $S^2 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\bar{x}| = 1 \}$.

Cualquier transformación se puede normalizar de tal manera que $ad - bc = 1$. (Ver [L1], pag. 3).

Denotamos por $PSL(2, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las transformaciones lineales con coeficientes en \mathbb{C} .

$PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo bajo la composición. (Ver [L1], pag. 3).

Se denota por $GL(2, \mathbb{C})$ al grupo de matrices con entradas complejas y determinante diferente de cero, y $SL(2, \mathbb{C})$ al subgrupo de matrices con determinante 1.

A cada transformación lineal se le asocian 2 matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ en forma natural es decir

$$SL(2, \mathbb{C}) / \langle I, -I \rangle \cong PSL(2, \mathbb{C}). \quad (\text{Ver [L1], pag. 4}).$$

El conjunto de todas las transformaciones lineales con coeficientes reales se denota por $PSL(2, \mathbb{R})$, que es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$.

$PSL(2, \mathbb{R})$ está caracterizado por las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ que transforman \mathbb{H} sobre sí mismo, donde

$$\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}.$$

(Ver [L1], pag. 7 o [Mar], pag. 284, ej. 5).

En esta tesis sólo trabajaremos con transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Definición 0.1.- Sea $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$, se dice que α es un punto límite de un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$, si existe una $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y una sucesión de transformaciones $V_n(z)$ distintas, $V_n \in \Gamma$ tal que $V_n(z) \rightarrow \alpha$.

El conjunto de todos los puntos límites se denota por \mathcal{L} , si un punto no es límite se le llama punto ordinario, y al conjunto de los puntos ordinarios se le denota por \mathcal{O} .

Definición 0.2.- Sea Γ subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Γ es un grupo discontinuo si y sólo si \mathcal{O} es no vacío. Γ es discontinuo en un conjunto S si $S \subset \mathcal{O}$.

Decimos que z_1 y z_2 son equivalentes (o Γ -equivalentes) si y sólo si existe una $V \in \Gamma$ tal que $Vz_1 = z_2$. Esta relación de equivalencia parte a $\hat{\mathbb{C}}$ en clases de equivalencia disjuntas llamadas órbitas.

La órbita de z se denota por:

$$\Gamma z = \{ Vz \mid V \in \Gamma \}$$

Definición 0.3.- Un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ se la llama discreto, si no existe ninguna sucesión de matrices $A_n \in SL(2, \mathbb{R})$ que representen transformaciones distintas en Γ , de tal manera que

$$A_n \rightarrow A, A \in GL(2, \mathbb{C}). \quad (\text{Ver [B], pag. 14}).$$

Teorema 0.4.- Sea Γ subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ entonces Γ es discontinuo si y sólo si Γ es discreto. Además los grupos discretos actúan discontinuamente en \mathbb{H} . (Ver [L1], pag. 13).

Definición 0.5.- Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ con puntos fijos α y β , si $\rho(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ entonces $S(z) = \rho T \rho^{-1}$ es de la forma $z \rightarrow kz$, se

define el multiplicador de T como la pareja $\langle k, 1/k \rangle$.

Definición 0.6.- Sea $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y sea A una matriz asociada a T en $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ entonces se dice que T es :

- 1) Parabólica si $\text{tr}(A) = \pm 2$,
- 2) Hiperbólica si $\text{tr}(A) > 2$ y,
- 3) Elíptica si $\text{tr}(A) < 2$, donde tr es la traza*.

De esta última definición es equivalente a clasificar a T utilizando sus puntos fijos.

Definición 0.7.- Sea $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ entonces se dice que T es:

- 1) Parabólica si T tiene un punto fijo α y α real,
- 2) Hiperbólica si T tiene dos puntos fijos α y β , con α, β reales.
- 3) Elíptica si T tiene dos puntos fijos z y \bar{z} , con z, \bar{z} complejos conjugados.

* Nota: También denotamos la traza con la letra griega χ .

CAPITULO 1

CAPITULO I. Geometría Hiperbólica.

En esta parte se trabajará con grupos discretos Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Definición 1.1.- Se dice que $F \subset \mathbb{H}$ es un **conjunto fundamental** para Γ , si F contiene exactamente un punto de cada órbita con respecto a Γ en \mathbb{H} .

En otras palabras F es un conjunto fundamental para Γ si:

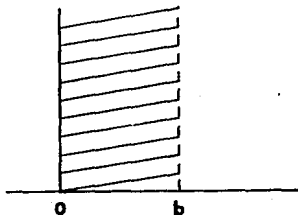
(1) Cualesquiera dos puntos de F no son Γ -equivalentes;

(2) dado $z \in \mathbb{H}$, z es Γ -equivalente a un punto de F .

Observación 1: Dado F un conjunto fundamental, si $A \subset F$ y $V \in \Gamma$, entonces $(F-A) \cup V(A)$ es también un conjunto fundamental.

Ahora, es fácil construir un conjunto fundamental para ciertos grupos. Por ejemplo, un conjunto fundamental para el grupo cíclico $T(z) = z + b$, es el paralelogramo infinito abierto por un lado y cerrado por el otro, descrito en la figura 1.

Figura 1



Un conjunto fundamental F no puede ser abierto, puesto que $\partial(F) \neq \emptyset$ (de otra manera $\Gamma = \text{Id.}$) y además ningún punto de F , puede ser Γ -equivalente a un punto de la frontera.

Ya que es conveniente trabajar con conjuntos tanto abiertos como cerrados, modificamos la definición de la siguiente manera:

Definición 1.2.- Una región R en \mathbb{H} se le llama **región fundamental para Γ** si:

- (1) Cualesquiera dos puntos en R no son Γ -equivalentes;
- (2) cualquier punto de \mathbb{H} es Γ -equivalente a un punto de \bar{R} .

Observación 2: Por el axioma de elección, si R es una región fundamental, existe un conjunto fundamental F tal que $R \subset F \subset \bar{R}$.

Si $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tiene una región fundamental entonces Γ es discontinuo, de otra manera se acumularía una órbita en un punto de la región fundamental.

Definición 1.3.- Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, una métrica Riemanniana en U es una función ρ que a cada punto de U le asocia un producto interior definido positivo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} ; al producto interior asociado a cada $x \in U$ se le denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$.

Ejemplos: La métrica Euclidiana en \mathbb{R}^n .

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}^n, v, w \in \mathbb{R}^n \quad \langle v, w \rangle_x = v \cdot w$$

La métrica Hiperbólica en \mathbb{H}

$$\forall z \in \mathbb{H}, v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \langle v, w \rangle_z = v \cdot w / (\text{Im}(z))^2.$$

Observación 2: La métrica Riemanniana ρ en $U \subset \mathbb{R}^n$ nos permite medir vectores basados en puntos de U , si $v \in \mathbb{R}^n$ está basado en $x \in U$, la longitud de v respecto a ρ denotada por $\|v\|_\rho$ se define

como

$$\sqrt{\langle v, v \rangle_x}$$

Definición 1.4.- Dada una métrica Riemanniana ρ en $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 por tramos en U , se define la **Longitud** de γ con respecto a ρ , denotada por $L_\rho(\gamma)$ como

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|_\rho dt.$$

Por ejemplo: La Longitud Hiperbólica de una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, C^1 por tramos es

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt, \text{ la cual denotamos por } L_h(\gamma).$$

Proposición 1.5.- La Métrica Hiperbólica induce una métrica en el sentido usual de la siguiente manera:

Sea $\rho_h(z, w) = \inf L_h(\gamma)$, donde γ son todas las curvas C^1 por tramos que unen z con w en $U \subset \mathbb{R}^n$.

Evidentemente $\rho_h(z, w) \geq 0$ y $\rho_h(z, w) = \rho_h(w, z)$.

Ahora si $\rho_h(z, w) = 0$ entonces $z = w$:

Si $z \neq w$ existe una vecindad $\mathcal{B}(z, r) \subset \mathbb{H}$ tal que $w \notin \mathcal{B}(z, r)$ y si γ es una curva de clase C^1 que una a z con w , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ se tiene

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im} \gamma(t)} dt \geq \frac{r}{\text{Im}(z) + r} \quad \text{pues}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im} \gamma(t)} &\geq \int_a^c \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im} \gamma(t)} \geq \int_a^c \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(z) + r} = \frac{1}{\text{Im}(z) + r} \int_a^c |\gamma'(t)| \\ &\geq \frac{r}{\text{Im}(z) + r} \end{aligned}$$

donde $\gamma(c)$ es el primer punto donde γ interseca la frontera de $\mathcal{B}(z, r)$; la misma desigualdad es cierta para γ , C^1 por tramos.

La Desigualdad del Triángulo se sigue de lo siguiente:

Si $\rho_h(z,v) > \rho_h(z,w) + \rho_h(w,v)$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\rho_h(z,v) > \rho_h(z,w) + \rho_h(w,v) + \epsilon.$$

También existen curvas γ_1 y $\gamma_2 \in C^1$ por tramos tales que unen z con w y w con v respectivamente y que satisfacen:

$$L_h(\gamma_1) < \rho_h(z,w) + \epsilon/2, \quad L_h(\gamma_2) < \rho_h(w,v) + \epsilon/2$$

$$\text{entonces } L_h(\gamma_1 \cup \gamma_2) < \rho_h(z,w) + \rho_h(w,v) + \epsilon \quad \text{y}$$

$$\rho_h(z,v) < \rho_h(z,w) + \rho_h(w,v) + \epsilon$$

lo que contradice la afirmación anterior. ■

Proposición 1.6.- La Longitud Hiperbólica es invariante bajo

$PSL(2, \mathbb{R})$, es decir $L_h(\gamma) = L_h(T \cdot \gamma)$, $\forall T \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración: Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $ad - bc = 1$.

Primero obsérvese que,

$$\text{Im } T(z) = \text{Im } (z) / |cz + d|^2.$$

Esto se sigue de

$$T(z) = \frac{ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz + d|^2}$$

y tomando la parte imaginaria:

$$\text{Im } T(z) = \frac{\text{Im}(bc\bar{z} + adz)}{|cz + d|^2} = \frac{bc \text{Im } (\bar{z}) + ad \text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im } (z)}{|cz + d|^2}$$

Además $T'(z) = 1/(cz + d)^2$, por tanto

$$\begin{aligned} L_h(T \cdot \gamma) &= \int_a^b \frac{|(T \cdot \gamma)'(t)| dt}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} = \int_a^b \frac{|T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} \\ &= \int_a^b \frac{|T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| |c\gamma(t) + d|^2 dt}{\text{Im } (\gamma(t))} = L_h(\gamma) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 1.7.- La Distancia Hiperbólica entre 1 e y_0 es $|\log y_0|$.

Demostración: Sea σ una curva de clase C^1 que une i con iy_0 , entonces $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, es de la forma $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$, de donde:

$$L_h(\sigma) = \int_a^b \frac{|\sigma'(t)|}{\text{Im}(\sigma(t))} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt.$$

Por lo que se pueden considerar sólo curvas que no tengan componente en x , y evidentemente existen dichas curvas que unen y_0 con iy_0 (el caso C^1 por tramos es similar)

Consideremos 2 casos, dependiendo de si y_0 es mayor o menor que 1

$$\text{Si } y_0 > 1, L_h(\gamma) \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_1^{y_0} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log y(b) - \log y(a) = \log y_0.$$

o

$$\text{Si } y_0 < 1, L_h(\gamma) \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_a^{y_0} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -\log y_0.$$

Finalmente la curva $\gamma(t) = it$, $t \in [1, y_0]$ o $t \in [y_0, 1]$ satisface $L_h(\gamma) = |\log y_0|$ ya que

$$\int_1^{y_0} \frac{1}{t} dt = \log y_0 \quad \text{y} \quad \int_{y_0}^1 \frac{1}{t} dt = -\log y_0 \quad \blacksquare$$

Definición 1.8.- Una geodésica o \mathbb{H} -línea es un conjunto de la forma $C \cap \mathbb{H}$, donde C es un círculo o recta ortogonal a \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 .

Obsérvese que las únicas curvas que realizan las distancias entre i e iy_0 son segmentos de geodésica. En la demostración de la

proposición 1.7 se observó que si una curva que une estos dos puntos, tiene componente en x , su longitud hiperbólica es mayor que $\rho_h(i, iy_0)$.

Esta situación es más general.

Corolario 1.9 .- Sean z y w en \mathbb{H} . Las únicas curvas que realizan $\rho_h(z, w)$ son segmentos de geodésicas.

Demostración. Como las geodésicas son transitivas bajo $PSL(2, \mathbb{R})$, (ver [L1], Sección 2F) el corolario es consecuencia de la proposición 1.6 y 1.7 ya que evidentemente, existe una geodésica que contiene los puntos z y w y dicha geodésica se puede transformar en el eje imaginario bajo $PSL(2, \mathbb{R})$. (Si las imágenes de z y w en el eje imaginario no coinciden con i , esto se puede ajustar mediante una homotecia).■

Definición 1.10.- Sea R una region on \mathbb{H} , se define el Area Hiperbólica de R como

$$A_h(R) = \int_R dA / y^2$$

(En el caso en que dicha integral exista).

Proposición 1.11.- El Area Hiperbólica es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$; $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $ad - bc = 1$.

Se demostró que $\text{Im } T(z) = \text{Im}(z) / |cz + d|^2$ y que $T'(z) = 1 / |cz + d|^2$

Ahora el determinante del Jacobiano de T (pensado como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2) es precisamente $|T'(z)|^2$ (por las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Entonces

$$A_h(T(R)) = \int_{T(R)} dA / (\operatorname{Im} T(z))^2 = \int_R \frac{|T'(z)|^2 |cz + d|^4}{y^2} dA$$

$$= \int_R dA / y^2 = A_h(R) \quad \text{por el Teorema de Cambio de Variable.} \blacksquare$$

Proposición 1.12.- *Los Círculos Hiperbólicos son Círculos Euclidianos.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{H}$ y $T_0 \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que T_0 es elíptica con puntos fijos z_0 y \bar{z}_0 y multiplicador $e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$

(De hecho dichas transformaciones elípticas están en $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ ya que es fácil probar que \mathbb{R} es un círculo de Apolonio para z_0 y \bar{z}_0)

Sea C un círculo fijo en \mathbb{H} para T_0 (o círculo de Apolonio para z_0 y \bar{z}_0). Entonces es claro que dada w y $w' \in C$ existe θ tal que $T_0(w) = w'$ y por lo tanto

$$\rho_h(z_0, w) = \rho_h(T_0(z_0), T_0(w)) = \rho_h(z_0, w')$$

Esto es, todos los puntos sobre C están a la misma distancia de z_0 , digamos r . Por otro lado si $\rho_h(z_0, z) = r$, sea M el círculo que pasa por z_0, z y \bar{z}_0 , éste es ortogonal a C (por ser C de Apolonio) e intersecta a C en un punto z' , es claro que $z' = z$. Esto demuestra que el "círculo hiperbólico" - el lugar geométrico de los puntos a una \mathbb{H} -distancia fija de un centro fijo - es un círculo euclidiano. \blacksquare

Como consecuencia de la demostración de la proposición 1.12 y de la configuración de los círculos de Apolonio se tiene también el siguiente resultado.

Corolario 1.13.- *La Topología Inducida por la métrica hiperbólica en \mathbb{H} es la misma que la Topología Euclidiana.*

Definición 1.14.- El Bisector Perpendicular a z y w en \mathbb{H} es la geodésica que intersecta el \mathbb{H} -segmento, que une z con w perpendicularmente en su punto medio.

Proposición 1.15.- El Lugar de los puntos que equidistan hiperbólicamente de z_1 y z_2 en \mathbb{H} es precisamente, el Bisector Perpendicular.

Demostración. Se puede suponer que la bisector perpendicular a z_1 y z_2 es el eje imaginario positivo, por lo tanto z_1 y z_2 están en un círculo euclidiano con centro en el origen, que intersecta al eje imaginario positivo en un punto m . Como $\rho_h(z_1, m) = \rho_h(z_2, m)$ se tiene que $\operatorname{Re}(z_1) = -\operatorname{Re}(z_2)$ y $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, esto es evidente observando que la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$ preserva la métrica hiperbólica. (Este hecho se verifica directamente a partir de la definición).

Ahora si z está en el eje imaginario positivo, sea C el círculo hiperbólico con centro en z_1 que pasa por z , bajo la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$, C se transforma en un círculo hiperbólico con centro en z_2 y que también pasa por z , por consiguiente el eje imaginario equidista de z_1 y z_2 . Inversamente, si z equidista de z_1 y z_2 , de nuevo tomando el círculo hiperbólico con centro en z_1 y que pasa por z y aplicando $z \rightarrow -\bar{z}$, se sigue que $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Definición 1.16.- Sea $A \subset \mathbb{H}$, se dice que A es \mathbb{H} -convexo, si para todo z y w en A , el \mathbb{H} -segmento que une z con w está en A .

Las siguientes propiedades son inmediatas: un conjunto (o región) \mathbb{H} -convexo es conexo; la intersección de conjuntos (o

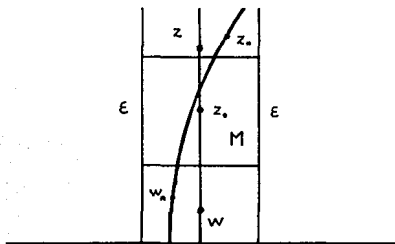
regiones) \mathbb{H} -convexas es un conjunto (o región) \mathbb{H} -convexo(a).

Proposición 1.17.- Si A es una región \mathbb{H} -convexa, \bar{A} también es \mathbb{H} -convexa.

Demostración. Si la proposición no es cierta, existen z y $w \in \bar{A}$ tal $[z,w]$ no está contenido en \bar{A} , donde $[z,w]$ es el \mathbb{H} -segmento que une z con w . Se puede suponer que $[z,w]$ está en la recta $x = 0$, ya que la convexidad se preserva bajo $PSL(2, \mathbb{R})$. Ahora existe $z_0 \in [z,w]$ tal que $z_0 \in (\bar{A})^c$, además como $(\bar{A})^c$ es abierto también existe un cuadrado M de lado ϵ con centro en z_0 y contenido en $(\bar{A})^c$.

Sean (z_n) y (w_n) sucesiones en A tales que $z_n \rightarrow z$ y $w_n \rightarrow w$, no es difícil probar mediante argumentos de Geometría Analítica que para n muy grande $[z_n, w_n]$ interseca a M lo cual contradice la hipótesis de la proposición. (Figura 2).■

Figura 2.



Corolario 1.18.- Sea A una región \mathbb{H} -convexa. El segmento trazado a partir de un punto interior intersecta a $\partial(A)$ a lo más en un punto.

Demostración. Supongamos que un \mathbb{H} -segmento l , empieza en $p \in \text{Int}(A)$ y $l \cap \partial(A)$ contiene más de un punto, digamos w_1 y w_2 , entonces por un cambio de coordenadas se puede suponer que l está contenido en la recta $x = 0$ y que $\text{Im}(p) < \text{Im}(w_1) < \text{Im}(w_2)$.

Ahora tomemos $w^* \in [w_1, w_2]$ y $w^* \neq w_1, w_2$. Sean $z_n \in A$ tales que $z_n \rightarrow w^*$; se puede suponer que $\langle \text{Re}(z_n) \rangle$ son todas positivas o todas negativas. Se puede elegir α cercano a w_1 , $\alpha \in A$ tal que $\text{Re}(\alpha) < 0$ si $\langle \text{Re}(z_n) \rangle > 0$ y $\text{Re}(\alpha) > 0$ si $\langle \text{Re}(z_n) \rangle < 0$, entonces se puede demostrar por Geometría Analítica que para n grande el \mathbb{H} -segmento $[\alpha, z_n]$ intersecta a $[w_1, w_2]$ lo cual es la contradicción buscada. ■

Una forma más eficiente de demostrar estos dos resultados es usar el modelo de Klein. (Ver [B], pag 138).

Proposición 1.19.- Sea Γ un subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $w_0 \in \mathbb{H}$ no fijo por Γ ; entonces existe un conjunto abierto D que no contiene puntos Γ -equivalentes.

Demostración. Sea $D = \{w \in \mathbb{H} \mid \rho(w, w_0) < \delta/2\}$ donde

$$\delta = \inf \{ \rho_n(w_0, V(w_0)) \}, \delta > 0 \text{ por discontinuidad.}$$

Ahora si w y $V(w) \in D$, entonces

$$\rho(w_0, V(w)) < \delta/2 \quad \text{y} \quad \rho(V(w), V(w_0)) < \delta/2 \quad \text{por invariancia;}$$

por consiguiente

$$\rho(w_0, V(w_0)) \leq \rho(w_0, V(w)) + \rho(V(w), V(w_0)) < \delta$$

lo cual es una contradicción. ■

CAPITULO 2

CAPITULO II. Poligono de Dirichlet.

Se construirá una región fundamental para un grupo Γ real discreto. Sea $w_0 \in \mathbb{H}$ tal que w_0 no sea fijo por todo elemento de $\Gamma - \{\text{Id}\}$. Este punto existe pues Γ es numerable (ver [Li], Secc 2E, pag. 13) y cada transformación real fija a lo más un punto en \mathbb{H} . Ahora sea $\langle V_i, i: 0, 1, \dots; V_0 = \text{Id} \rangle$ una enumeración de los elementos de Γ . Las imágenes $w_i = V_i(w_0) (\neq 0)$ son todas distintas pues si $w_i = w_j$ esto implica que $V_j^{-1}V_i$ fija a w_0 . Así para $i > 0$, $[w_0, w_i]$ es un \mathbb{H} -segmento y no un punto.

Denotaremos por λ_i el bisector perpendicular al segmento $[w_0, w_i]$. Esta línea divide a \mathbb{H} en dos "semiplanos": el semiplano que contiene a w_0 se denotará por L_i y el otro por L_i' . Estos semiplanos son abiertos y no incluyen los puntos de λ_i .

Lema 2.1.- Sean

$$A = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \}.$$

$$B = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) = \rho(z, w_i) \}.$$

$$C = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) > \rho(z, w_i) \}.$$

Entonces $A = L_i, B = \lambda_i$ y $C = L_i'$.

Demostración. La segunda igualdad se demuestra en la proposición 1.15. Como ciertamente \mathbb{H} es la unión disjunta de L_i, λ_i, L_i' y también la unión disjunta de A, B y C , basta demostrar que $L_i \subset A$ y $L_i' \subset C$.

Si $z \in L_i$, entonces la \mathbb{H} -línea $[z, w_0]$ intersecta λ_i en un

punto z' , por lo cual $\rho(w_0, z') = \rho(z', w_1)$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\rho(z, w_1) = \rho(z, z') + \rho(z', w_1) \geq \rho(z, w_0)$$

y por tanto $\rho(z, w_1) \geq \rho(z, w_0)$ así $L_1 \subset A$, análogamente se sigue que $L'_1 \subset G$. ■

Definición 2.2.- Sea $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$, N es llamado **polígono de Dirichlet o normal** con centro en w_0 .

Por el lema 2.1 N puede escribirse como

$$N = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \text{ para toda } i > 0 \}.$$

Observamos que $N \neq \emptyset$ pues $w_0 \in N$, además N es \mathbb{H} -convexo pues cada L_i es \mathbb{H} -convexo y por tanto la intersección es \mathbb{H} -convexa. Esta propiedad implica que N es conexo.

Lema 2.3.- Un subconjunto compacto K de \mathbb{H} intersecciona solamente un número finito de bisectores.

Demostración. Como \mathbb{H} es un espacio métrico bajo la distancia hiperbólica (ρ), un subconjunto compacto K es acotado, lo que significa que existe $R < \infty$, que es cota superior para las distancias de w_0 a puntos de K . Si $z \in \lambda_i \cap K$, entonces

$$\rho(w_0, w_i) \leq \rho(w_0, z) + \rho(z, w_i) = 2\rho(w_0, z) \leq 2R.$$

Si λ_i intersecciona a K entonces w_i está en el disco cerrado de radio $2R$ con centro en w_0 .

Como estos w_{i_n} no se pueden acumular (por discontinuidad) en $\mathbb{B}(w_0, 2R)$, se sigue que K intersecciona a un número finito de λ_{i_n} . ■

Lema 2.4.- N es abierto.

Demostración. Sea $z \in N$, y sea K un disco cerrado que

contenga a z . K intersecciona un numero finito de $\lambda_{i,j}$, por el lema 2.3. Ahora va que z no pertenece a ningun $\lambda_{i,j}$, existe un circulo K^* mas pequeno que no intersecciona a ningun $\lambda_{i,j}$. Esto es consecuencia de que la funcion $\Delta: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta(w) = \rho(w, z)$ es continua. (z fijo) lo cual no es dificil de probar. Por tanto $K^* \subset L_{i,j}$ para toda $i > 0$ y por lo cual N es abierto. ■

Es conveniente denotar a N como N_0 y $N_i = V_i(N_0)$, $V_i \in \Gamma$, por lo anterior N_i es una region \mathbb{H} -convexa y es llamada poligono normal con centro en w_i . Ademas por la invarianza de la distancia tenemos:

$$\text{Ya que } N_0 = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \quad \forall i > 0 \},$$

entonces

$$V_i(N_0) = N_i = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(V_i z, V_i w_0) < \rho(V_i z, V_i w_j) \quad \forall j > 0 \},$$

y por ultimo reescribiendo $V_i z = v$, $V_i w_0 = v_0$, $V_i w_j = w_j$,

$$N_i = \{ w \in \mathbb{H} \mid \rho(w, w_0) < \rho(w, w_j) \quad \forall j \neq i > 0 \}.$$

Lema 2.5.- $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Demostracion. Supongamos que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Sea $z \in N_i \cap N_j$, entonces como $z \in N_i$, $\rho(z, w_0) < \rho(z, w_j)$ y como $z \in N_j$, $\rho(z, w_0) < \rho(z, w_i)$, lo cual es una contradiccion. ■

Lema 2.6.- Dos puntos de N_i no son Γ -equivalentes.

Demostracion. Supongamos que z y z' estan N_i y $\exists V z = z'$. Ya que V transforma N_i en algun N_j , tenemos que $z' \in N_j$, lo cual contradice el lema 2.5. ■

Lema 2.7.- Cada punto de \mathbb{H} esta en exactamente en uno de los siguientes conjuntos:

$$I = \{ z \in H \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \ \forall i \neq 0 \}.$$

$$B = \{ z \in H \mid \rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \ \forall i$$

$$\rho(z, w_0) = \rho(z, w_k) \text{ para al menos una } k \neq 0 \}.$$

$$E = \{ z \in H \mid \rho(z, w_0) > \rho(z, w_k) \text{ para al menos una } k \neq 0 \}.$$

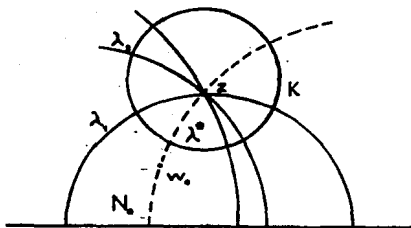
$$\text{Entonces } I = \text{Int}(N_0), \ B = \partial(N_0) \cap H, \ E = \text{Ext}(N_0) \cap H.$$

Demostración. $I = \text{Int}(N_0)$ es obvio pues como $I = N_0$ por definición y N_0 es abierto se sigue la afirmación.

Ahora supongamos que $z \in B$, entonces $z \in \bar{L}_i, \ \forall i \neq 0$. Por el lema 2.3 z está en un número finito de $\lambda_{i_j}, \ i = 1, 2, \dots, r$. Por lo cual existe una vecindad K de z que está en $L_i, \ \forall i > r$. Las λ_{i_j} con $i = 1, 2, \dots, r$ dividen a H en un número finito de regiones, una de las cuales D contiene a w_0 como punto interior. Sea λ^* el H -segmento de geodésica abierto que une w_0 y z . La geodésica que contiene a λ^* intersecta a las geodésicas $\lambda_{i_j}, \ i = 1, 2, \dots, r$ solamente en z . Por lo cual $\lambda^* \subset L_i, \ \forall i$, y por tanto $K \cap \lambda^* \subset N_0$ y como $z \in \partial(K \cap \lambda^*)$ entonces $z \in \partial(N_0)$. (Ver figura 1).

Inversamente, si $z \in \partial(N_0)$, $z \in \bar{N}_0 = \overline{(\cap L_i)} \subset \cap \bar{L}_i$. Por tanto

Figura 1.



$\rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \forall i$. Pero $z \in N_0$ entonces existe una K tal que $\rho(z, w_0) = \rho(z, w_k)$ y por tanto $z \in B$.

Finalmente como $E = (B \cup J)^C$ esto termina la prueba. ■

Lema 2.8.- $\cup_i \bar{N}_i$ cubre H .

Demostración. Sea $w \in H$, como la órbita de w_0 no se acumula (por la discontinuidad) existe w_j tal que $\rho(w, w) \leq \rho(w, w_i) \forall i$.

Si $w' = V_j^{-1}(w)$ tenemos $\rho(w', w_0) \leq \rho(w', w_i) \forall i$ por lema 2.7 $w' \in \bar{N}_0$ y como $V_j(\bar{N}_0) = \bar{N}_j$ por tanto $w \in \bar{N}_j$. ■

Teorema 2.9.- N_0 (y por consiguiente N_j) es una región fundamental.

Demostración. Esto es consecuencia de los lemas 2.4, 2.6 y 2.8. ■

Proposición 2.10.- Cualquier conjunto compacto K en H esta cubierto por un número finito de \bar{N}_j .

Demostración. Como K es compacto $K \subset B(w_0, R)$.

Sea N_j el polígono normal con centro en w_j . Ya que w_j esta en L'_j (pues si $z \in N_j$, $\rho(z, w_j) < \rho(z, w_0)$). Ahora como $\rho(w_0, w_j) \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$ y $\rho(w_0, \lambda_j) = 1/2 \rho(w_0, w_j)$ tenemos que $\rho(w_0, N_j) \rightarrow \infty$.

Entonces para cualquier S , existe un número finito de N_j que intersecan el H -disco $B(w_0, S)$ y en particular $B(w_0, R)$ y $K \cap B(w_0, R) = K$. ■

Lema 2.11.- N_0 es un polígono para Γ si y sólo si $A(N_0)$ es un polígono normal para $A\Gamma A^{-1}$, con $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Demostración. Como

$$N_0 = \{ z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, V(w_0)) \forall V \in \Gamma, V \neq \text{Id.} \}$$

Aplicando A en ambos lados y como A es isometría hiperbólica se tiene

$$A(N_0) = \{ A(z) \in \mathbb{H} \mid \rho(A(z), A(w_0)) < \rho(A(z), AV(w_0)) \forall V \in \Gamma, V \neq \text{Id.} \}$$

$$= \{ A(z) \in \mathbb{H} \mid \rho(A(z), A(w_0)) < \rho(A(z), AVA^{-1}AV(w_0)) \forall V \in \Gamma, V \neq \text{Id.} \}$$

reescribiendo $w = A(z)$ y $w'_0 = A(w_0)$

$$A(N_0) = \{ w \in \mathbb{H} \mid \rho(w, w'_0) < \rho(w, W(w'_0)) \forall W \in A\Gamma A^{-1}, W \neq \text{Id.} \}$$

lo que significa que $A(N_0)$ es un polígono normal para $A\Gamma A^{-1}$. El recíproco es análogo. ■

Construcción de polígonos normales para un grupo cíclico elíptico, parabólico e hiperbólico:

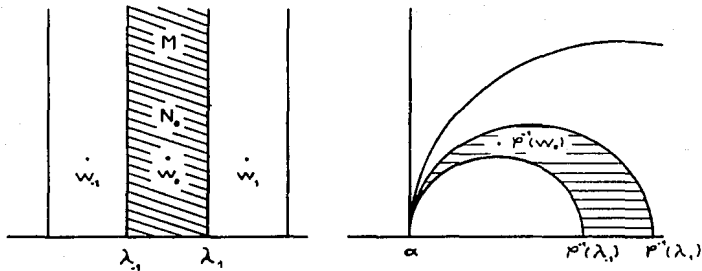
Caso Parabólico:

Sea T un elemento parabólico con punto fijo α . Sea $\Gamma = \langle T \rangle$. Sea $\rho \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $\rho(\alpha) = \omega$, así si N_ω es el polígono de Dirichlet con centro en w_0 para el grupo $\rho^{-1}\Gamma\rho$, entonces $\rho^{-1}(N_\omega)$ es un polígono de Dirichlet para Γ con centro en $\rho^{-1}(w_0)$ (lema 2.11). Sea $S = \rho T \rho^{-1}$, entonces S es de la forma $S(z) = z + b$. Sea w_0 un punto no fijo para S . Los puntos de la órbita de S son de la forma $S^m(w_0) = w_0 + mb$, los cuales se encuentran a la misma altura de w_0 .

Los bisectores más cercanos a w_0 son las líneas verticales λ_{-1}, λ_1 que encierran una banda vertical abierta M . Por tanto $N_0 = M$ y su centro es w_0 , tales bisectores se intersectan en ω . Ver figura 2a.

Así $p^{-1}(N_0)$ es la región comprendida entre $p^{-1}(\alpha_{-1})$ y $p^{-1}(\alpha_1)$, los cuales son círculos perpendiculares a \mathbb{F} con α como punto de intersección común. Ver figura 2b.

Figuras 2 (a y b).



Caso Hiperbólico:

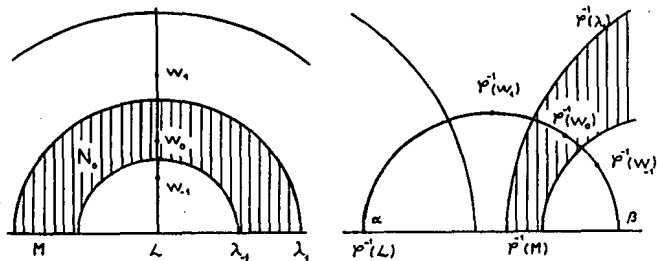
Sea T un elemento hiperbólico $v \Gamma = \langle T \rangle$. T tiene dos puntos fijos α y β . Sea $\rho \in \text{PSL}(2, \mathbb{F})$ tal que $\rho(\alpha) = 0$ y $\rho(\beta) = \omega$, entonces $\rho \Gamma \rho^{-1}$ fija a 0 e ω . Sea $S = \rho T \rho^{-1}$ entonces S es de la forma $S(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y de hecho se puede suponer $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

Sea $w_0 \in \mathbb{H}$ tal que $\text{Re}(w_0) = 0$. Es fácil ver que los bisectores perpendiculares son círculos concéntricos con centro en 0 y M es la región abierta entre α_{-1} y α_1 . Así $N_0 = M$. Ver figura 3a.

Por tanto $p^{-1}(N_0)$ es el polígono normal de Dirichlet, para $\Gamma = \langle T \rangle$ con centro en $p^{-1}(w_0)$ y es la franja entre dos círculos perpendiculares ($p^{-1}(\alpha_{-1})$ y $p^{-1}(\alpha_1)$) a la geodésica que pasa por α .

β y $\rho^{-1}(w_0)$. Ver figura 3b.

Figuras 3 (a v b).



Caso Elíptico:

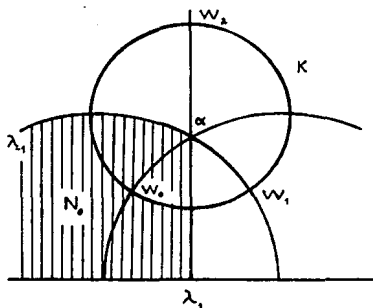
Sea $\Gamma = \langle T \rangle$ y T elíptica de orden n , con punto fijo α . Se construye el caso en que $n = 3$, los otros casos son similares. Primero obsérvese que el punto fijo α está en el bisector perpendicular del \mathbb{H} -segmento $[w, T^k(w)] \forall w$, i.e.:

Si α es punto fijo

$$\rho(\alpha, w) = \rho(T^k(\alpha), T^k(w)) = \rho(\alpha, T^k(w)) \quad \forall k, \text{ o en otras palabras,}$$

todas los bisectores λ_j pasan por $\alpha \forall j$. Así tomando $w_0 \in \mathbb{H}$ y trazando un \mathbb{H} -círculo K fijo para T que pase por w_0 se tiene que w_1 y w_2 también estarán en K (pues T manda w_0 en w_1 y en w_2). Por tanto si λ_{-1} y λ_1 son los dos bisectores más cercanos a w_0 (con $w_2 = w_{-1}$) y M es la región acotada por λ_{-1}, λ_1 que contiene a w_0 . Se tiene que $N_0 = M$. Ver figura 4.

Figura 4.



Lados Conjugados.

Definición.2.12.- Sea N_0 un polígono de Dirichlet para Γ con centro w_0 . Se dice que un \mathbb{H} -segmento $s \subset \partial(N_0)$ es un lado de N_0 si:

- a) $s \subset \lambda_1$, donde λ_1 es el bisector perpendicular de $\{w_0, w_1\}$,
- b) si $s' \subset \lambda_1 \cap \partial(N_0)$ entonces $s' \subset s$.

Observación 1: A veces se considera el lado s junto a sus extremos, estén o no en \mathbb{H} .

Definición 2.13.- Sea N_0 un polígono de Dirichlet. se dice que un intervalo real (a,b) es un lado libre de N_0 si:

- a) $(a,b) \subset \partial(N_0)$ (donde la frontera se toma en $\bar{\mathbb{H}}$)
- b) Para todo intervalo $(c,d) \subset \partial(N_0)$ y $(c,d) \cap (a,b) \neq \emptyset$ se tiene que $(c,d) \subset (a,b)$.

Definición 2.14.- Sea z en \mathbb{H} , se dice que z es un punto interior de un lado s de N_0 si

$\rho(z, w_0) = \rho(z, w_j) < \rho(z, w_l)$ para exactamente una $j \neq \forall l \neq j, 0$.

Sea s un lado de N_0 . Por lo anterior un punto z es un punto interior de s si y sólo si existe una $j \neq 0$ tal que

$\rho(z, w_0) = \rho(z, w_j) < \rho(z, w_l)$ para exactamente una $j \neq \forall l \neq j, 0$.

Aplicando $V_j^{-1} = V_k$, tenemos

$\rho(V_k(z), V_k(w_0)) = \rho(V_k(z), V_k(w_j)) < \rho(V_k(z), V_k(w_l)) \quad \forall l \neq j, 0$.

$\rho(V_k(z), w_k) = \rho(V_k(z), w_0) < \rho(V_k(z), w_l) \quad \forall l \neq k, 0$.

De esto último tenemos que $V_k(z)$ es un punto de la frontera de N_0 y de hecho es un punto interior de un lado s' de N_0 . Por lo que $V_k(s) \subset s'$.

De manera análoga, un punto interior w en s' cumple la condición $\rho(w_k, w) = \rho(w, w_0) < \rho(w, w_l)$ para $l \neq 0, k$. Si $z = V_k^{-1}(w)$, la condición se traduce en $\rho(z, w_0) = \rho(z, w_j) < \rho(z, w_l)$ para $\forall l \neq j, 0$ con lo cual tenemos que $V_k^{-1}(s') \subset s$ y por tanto $V_l(s) = s'$.

Es decir V_k transforma a s en s' , o en otras palabras V_k transforma puntos interiores de s en puntos interiores de s' y viceversa. Por lo que puntos extremos de s se corresponden con puntos extremos de s' . Y por tanto cada lado s de N_0 es equivalente a un lado s' de N_0 mediante $V \in \Gamma, \forall \neq 1$.

Observación 2. Los puntos equivalentes que están sobre los lados de N_0 son equidistantes del centro w_0 del polígono.

Si z y $V(z)$ son tales puntos, tenemos que

$\rho(w_0, z) \leq \rho(z, w_l) = \rho(V_l^{-1}(z), w_0)$ en particular ($V_l^{-1} = V$),

$\rho(w_0, z) \leq \rho(w_0, V(z))$.

Intercambiando z por $V(z)$ tenemos que $\rho(w_0, V(z)) \leq \rho(w_0, z)$ y

asi $\rho(w_0, z) = \rho(w_0, V(z))$.

Proposición 2.15.- Ningun punto z en el interior de un lado s es equivalente a mas de un punto en $\partial(N_0)$.

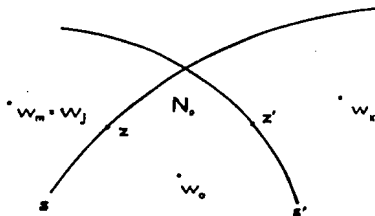
Demostración.

Sea $z \in \text{Int}(s)$. $\rho(w_0, z) = \rho(z, w_j)$ para alguna j . Sea $z' \in \partial(N_0)$ tal que $z' = V(z)$ entonces $z' \in s'$ y satisface $\rho(w_0, z') = \rho(z', w_k)$ para alguna k .

Sea $V(w_m) = w_0$, tenemos $\rho(z, w_m) = \rho(z', w_0) = \rho(z', w_k) = \rho(z, w_0)$.

Por tanto $\rho(z, w_m) = \rho(z, w_0) = \rho(z, w_j)$. Lo que significa que z está en los bisectores determinados por w_m y w_j , por tanto $w_m = w_j$ y $(V_j)^{-1} = V$ lo que determina z' en forma unica. (Ver figura 5).■

Figura 5.



Definición 2.16.- Dos lados de N_0 , s y s' son conjugados, si existe una transformación V de Γ , diferente de la identidad tal que $V(s) = s'$.

Por tanto hemos demostrado:

Teorema 2.17.- Los lados de N_0 son conjugados dos a dos.

Este teorema se aplica solamente a lados que están en H , pues es falso para lados libres. Como se puede ver, un punto interior de un lado libre no puede ser equivalente a ningún punto de N_0 excepto a él mismo.

Es posible que un lado sea conjugado a sí mismo.

Si $V(s) = s$ con $V \neq Id$ y s es el H -segmento $[a, b]$, entonces se tiene $V(a) = a$, $V(b) = b$ ó $V(a) = b$, $V(b) = a$.

El primer caso es imposible ya que de hecho no existe $V \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que V tenga 2 puntos fijos en H , ni otra que tenga uno en H y otro en \mathbb{R} . Si a y $b \in \mathbb{R}$, y además V es hiperbólica se demostrará más adelante que los puntos fijos de una transformación hiperbólica nunca están en la cerradura de un polígono normal. Por tanto supongamos que $V(a) = b$, $V(b) = a$. Así a es un punto fijo de V^2 , y b también, por tanto $V^2 = Id$ y además, V es elíptica de orden 2.

Sea ξ el punto fijo de V , $a, b, \xi \in H$ ($V(\xi) = \xi$).

Sea α el punto medio del H -segmento $[a, b]$ es decir:

$\rho(a, \alpha) = \rho(\alpha, b)$; obsérvese que $V(\alpha)$ está en la geodésica que pasa por a y b . Ahora $\rho(a, V(\alpha)) = \rho(V(\alpha), V^2(\alpha)) = \rho(b, \alpha)$, análogamente $\rho(b, V(\alpha)) = \rho(\alpha, a)$, así $\rho(a, V(\alpha)) = \rho(b, V(\alpha))$ y como V transforma s en sí mismo $V(\alpha) = \alpha$, por tanto $\xi = \alpha$.

Entonces un lado s coincide con su lado conjugado si y solo si la transformación V es de orden 2 y el punto fijo coincide con el punto medio de s . Así α divide a s en dos segmentos de igual

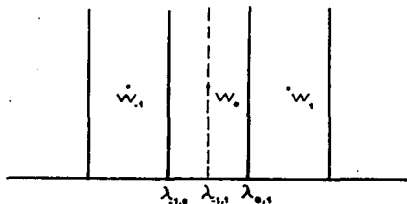
longitud y V transforma un segmento en otro. Ante esta situación y siguiendo el teorema anterior llamaremos a α vértice y a cada uno de los dos segmentos del lado original, lados conjugados que se intercambian.

Modelo de Incidencia.

Obsérvese que el conjunto de bisectores perpendiculares con respecto a w_0 no es necesariamente el mismo conjunto de bisectores perpendiculares a w_i , $i \neq 0$.

Por ejemplo, tomando el grupo Γ generado por $T(z) = z + k$, $k \neq 0$, sea w_0 cualquier punto de \mathbb{H} entonces $w_i = w_0 + ik$; tomemos w_{-1}, w_0 y w_1 (todos ellos diferentes), sea $\lambda_{i,j}$ el bisector perpendicular de w_i y w_j entonces $\lambda_{-1,0}$ es el bisector perpendicular de w_{-1} y w_0 , $\lambda_{0,1}$ es el bisector perpendicular de w_0 y w_1 y $\lambda_{-1,1}$ es el bisector perpendicular de w_{-1} y w_1 , pero $\lambda_{-1,1}$ no es bisector perpendicular de w_0 , con lo cual el conjunto de bisectores perpendiculares de w_0 no es igual al conjunto de bisectores perpendiculares de w_{-1} o w_1 . Ver figura 6.

Figura 6.



Teorema 2.18. Sea ω la frontera común de dos polígonos normales N_j y N_k . Si $\omega \neq \emptyset$ entonces ω es un punto o un \mathbb{H} -segmento cerrado. Si ω es un punto y $\omega \in \mathbb{H}$, éste es un vértice común de un número finito de polígonos normales y tiene una vecindad cubierta por las cerraduras de éstos.

Si ω es un \mathbb{H} -segmento, ω es un lado común de N_j y N_k .

Demostración. Sean N_j y N_k cualesquiera 2 polígonos normales. Se sigue de la definición que $\bar{N}_j \cap N_k = \emptyset$ y $N_j \cap \bar{N}_k = \emptyset$ por lo cual $\bar{N}_j \cap \bar{N}_k = \omega$ y ω es \mathbb{H} -convexo.

Esto implica que si ω tiene 2 o más puntos digamos a y $b \in \omega$ entonces el \mathbb{H} -segmento $[a, b] \subset \omega$ (por convexidad).

Si s es el lado de N_j que contiene el \mathbb{H} -segmento $a, b \in \partial(N_j) \cap \partial(N_k)$, afirmamos que $s \subset \partial(N_j) \cap \partial(N_k)$. En efecto si s no está contenido en $\partial(N_k)$ quiere decir que algún vértice z_0 de N_k está en el interior de s , esto implicaría que z_0 equidista de w_j, w_k y w_l , $l \neq j, k$, lo cual contradice que z_0 sea un punto interior de s , lado de N_j .

Ahora ω no contiene otros lados ya que, si denotamos por λ la geodésica que contiene a s , N_j y N_k están en distintas componentes de $\mathbb{H} - \lambda$.

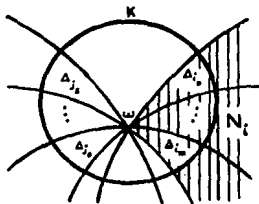
Si ω es un punto, entonces $\omega \in \text{Int}(s)$ para algún lado s pues $s \subset \omega$. Si ω es un vértice ordinario (i.e. un punto ordinario) entonces está en un número finito de bisectores perpendiculares. ■

Se puede construir un disco K alrededor de ω suficientemente pequeño de tal manera que no intersekte vértices distintos de ω .

Esto se sigue de que los conjuntos compactos sólo intersectan un número finito de polígonos \bar{N}_i . Ahora como los bisectores (con respecto a los centros de estos polígonos) que intersectan a K son un número finito, se puede suponer también que estos pasan por ω .

Por tanto K consiste de una "estrella" de triángulos alrededor de ω ; posiblemente 2 o más triángulos adyacentes pertenezcan a un solo polígono. Uniendo el mayor número de triángulos adyacentes que pertenezcan a un solo polígono, se obtienen triángulos $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_m}$ tales que $\Delta_{i_s} \subset (\bar{N}_{i_s} \cap K)$, $s: 1, 2, \dots, m$ (dos de estos polígonos son N_j y N_k). Obsérvese que $N_{i_s} \neq N_{i_t}$ si $s \neq t$, ya que existen 2 geodésicas μ_1, μ_2 tales que $\mu_i \cap K \subset \partial(N_{i_s})$, $i: 1, 2$, y N_{i_s}, N_{i_t} están en distintas componentes de $H - (\mu_1 \cup \mu_2)$. Esta última observación muestra que de hecho $\bar{N}_i \cap K = \Delta_{i_s}$ con $s: 1, 2, \dots, m$. (Ver figura 7).

Figura 7.



Ciclos Elípticos.

La relación de Γ -equivalencia agrupa a los vértices ordinarios de N_0 en clases de equivalencia llamadas Ciclos Ordinarios.

Definición 2.19.- Un ciclo ordinario es un conjunto C que consiste de un vértice ordinario z junto con todos los otros vértices de N_0 Γ -equivalentes a él. Obviamente $C \subset H$.

Teorema 2.20.- Un ciclo ordinario C contiene solo un número finito de vértices.

Demostración. Si N_0 tiene un número finito de lados es inmediato. Supongamos que no. Sea $C = (z_1, z_2, \dots)$ un ciclo ordinario, con $z_i = T_i(z_1)$, $i = 1, 2, \dots$. T_i transforma a N_0 en un polígono que tiene como vértice a z_i y $N_0 \neq N_i$. Si C es infinito entonces existiría un número infinito de polígonos normales intersectados en z_1 contradiciendo el teorema anterior. ■

Observese que si z es un vértice ordinario de C y z es un punto fijo de un elemento E de Γ entonces $T(z)$ es un punto fijo de $T E T^{-1}$ y E necesariamente es elíptica.

Los ciclos ordinarios se clasifican en: *elípticos* y *accidentales*.

Definición 2.21.- Un ciclo ordinario C es *elíptico* o *accidental*, si todos o ninguno de estos vértices son puntos fijos. A los vértices se les llama respectivamente *elípticos* o *accidentales*.

Observación: El término *accidental* se debe al hecho de que

su aparición depende de la elección del centro v_0 .

El estabilizador Γ_v de un vértice elíptico v es un grupo cíclico finito (ya que Γ es discreto. Ver [Li], Secc 2H, pag 15) cuyo orden es el orden del vértice. Ya que $\Gamma_{T(v)} = T \Gamma_v T^{-1}$, el orden de todos los vértices de un ciclo elíptico es el mismo. Este número es el orden del ciclo.

Los lados de N_0 que se intersectan en un vértice v son arcos circulares y forman 2 ángulos si v es ordinario. La medida del ángulo que acota la porción de N_0 será denominado el ángulo de v en N_0 .

Observese que cuando v está en \mathbb{F} , el ángulo α es cero si v es la intersección de dos lados y $\pi/2$ si v es la intersección de un lado y un lado libre.

Por definición cada ciclo elíptico está compuesto de puntos fijos de elementos elípticos de Γ . Inversamente tenemos:

Teorema 2.22.- *Cada punto fijo elíptico es un punto de un ciclo elíptico de algún polígono normal $(N_i, i \in \mathbb{Z})$.*

Demostración. Sea α un punto fijo de E elemento elíptico de periodo l . Una aplicación de E es una rotación no-euclidiana alrededor de α por un ángulo de $2\pi/l$. El punto α está en la cerradura de algún polígono normal N_i . Es claro que $\alpha \in \text{Int}(N_i)$, pues se puede tomar una vecindad K de α suficientemente pequeña,

$K \subset N_i$, por lo cual K contendría l puntos equivalentes bajo E . Si $\alpha \in \text{Int}(s)$, (s lado de N_i) y $l > 2$ habría 2 puntos equivalentes uno en s y otro en N_i . Si $l = 2$ se tiene la situación

discutida anteriormente, donde $\alpha \leq s$ y s esta compuesto por 2 H -segmentos y α es punto fijo de E que es de orden 2.

En todos los casos, α es un vertice de N_1 .

Teorema 2.23.- La suma de los angulos en los vertices de un ciclo ordinario de N_0 es $2\pi/l$ si y solo si el ciclo es eliptico de orden l y es 2π si y solo si el ciclo es accidental.

Demostración. Sea $C = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ un ciclo eliptico de orden $l \geq 2$. Sea E un generador del estabilizador Γ_{z_1} el cual es ciclico y sean $T_j \in \Gamma$ transformaciones tales que $T_j(z_j) = z_1$, $j = 1, 2, \dots, s$. Luego entonces los elementos de Γ que mandan z_j en z_1 son

$$\mathcal{A}_j = \{ E^k T_j \mid 0 \leq k < l \}$$

esto es, dada $V \in \Gamma$ tal que $V(z_j) = z_1$ se tiene que $V T_j^{-1}$ fija a z_1 y por lo tanto es una potencia de E .

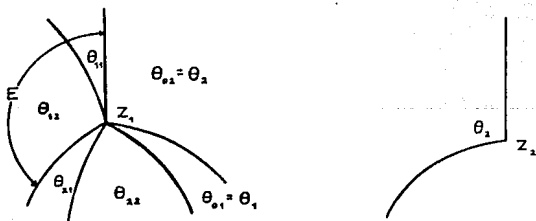
Se demostro en el Teorema 2.17 que una vecindad K de z_1 esta completamente cubierta por las cerraduras de poligonos normales, cada uno de los cuales tiene a z_1 como vertice. Sea N_1 uno de estos poligonos y $W(N_0) = N_1$, $W \in \Gamma$. Entonces $W^{-1}(z_1)$ es un vertice de N_0 y este vertice está en el ciclo C , digamos z_j . Por lo cual $W \in \mathcal{A}_j$. Inversamente, todo $W \in \mathcal{A}_j$ transforma N_0 sobre un poligono normal que tiene como vertice a z_1 . Por tanto z_1 tiene una vecindad formada por las cerraduras de s_l poligonos normales, las imagenes de N_0 por elementos en \mathcal{A}_j , $j = 1, 2, \dots, s$.

Denotamos por θ_j el ángulo sobre z_j en N_0 . El ángulo θ_{z_1} se define como el ángulo sobre z_1 en el poligono normal $N_{1,j} = E^k T_j(N_0)$.

$k = 1, 2, \dots, l-1$; este ángulo es igual a θ_k por la conformidad de las transformaciones de Γ . Por tanto

$$2\pi = \sum_{j=1}^s \sum_{k=0}^{l-1} \theta_{kj} = l \sum \theta_j$$

Ejemplo: Ilustrando el caso $s = 2, l = 3$.



Ahora si C es accidental, existe una única T_j que transforma z_j en z_1 , $j = 1, 2, \dots, s$. Una vecindad de z_1 está cubierta por s polígonos $(T_j(N_0))$, $j = 1, 2, \dots, s$. El ángulo en z_1 de $T_j(N_0)$ es igual al ángulo sobre z_j en N_0 . Esto demuestra que la suma de los ángulos en este caso es 2π .

Inversamente, si C es un ciclo cuyos ángulos suman $2\pi/l$, $l > 1$, entonces por lo que hemos probado, C no puede ser elíptico de orden $m \neq l$ ni puede ser accidental. Si la suma de los ángulos es 2π , C no puede ser elíptica. Esto concluye la prueba. ■

Usando el teorema anterior definimos sector elíptico. Sea z_1 un punto elíptico de orden l y sea K el interior de un círculo fijo de E un generador de Γ_{z_1} . Sean T_j , $j = 1, 2, \dots, s$ fijas tales que

$T_j(z_j) = z_1$. Para una j fija las regiones $E^k T_j(N_0)$, $k = 0, 1, \dots, l-1$, están igualmente espaciadas alrededor de z_1 ; rotando una de ellas por un ángulo $2\pi/l$, se obtiene la siguiente y así sucesivamente.

Entonces para cada j se selecciona k_j de tal manera que las regiones $\{E^{k_j} T_j(N_0), j = 1, 2, \dots, s\}$ sean adyacentes.

Llamaremos a

$$S_{z_1} = \left(\bigcup_{j=1}^s E^{k_j} T_j(N_0) \right) \cap K$$

un sector elíptico en z_1 .

Obsérvese que este sector forma un ángulo de $2\pi/l$ en z_1 y los sectores $S_{z_1}^0, ES_{z_1}^1, \dots, E^{l-1} S_{z_1}^0$ forman una vecindad de z_1 .

Los puntos de un ciclo ordinario son \mathbb{H} -equidistantes del centro w_0 . Dado que cada $z_i \in C$ (un ciclo de N_0), es Γ -equivalente a z_1 , todos son Γ -equivalentes y por la observación 2 cada z_i es equidistante del centro w_0 .

Ciclos Parabólicos.

Consideremos ahora vértices de N_0 en la recta real (\mathbb{R}) .

Teorema 2.24.- *Un vértice de N_0 que está en \mathbb{R} , nunca es un punto fijo de una transformación hiperbólica de Γ .*

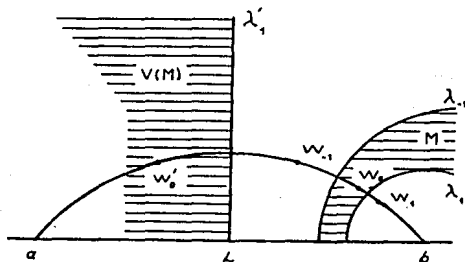
Demostración. Sea $T \in \Gamma$ hiperbólica con puntos fijos a y b , sea w_0 el centro de N_0 y K un círculo fijo de T que pasa por w_0 , (obsérvese que K no contiene necesariamente una geodésica). Ahora las imágenes de w_0 bajo potencias de T , están en K . Si w_{-1} y w_1 son las imágenes más cercanas a w_0 , la región M acotada por λ_{-1}, λ_1 bisectores de $[w_0, w_{-1}]$, $[w_0, w_1]$ respectivamente constituye un

polígono normal para el grupo cíclico $\langle T \rangle$. Lo anterior es cierto porque si λ_k fuera bisector, - el cual es parte del polígono- implicaría que λ_k intersecta a λ_{-1} o λ_1 lo que contradice que v_0, w_0 y $w_1, i = 1, -1$, estén en K (pues existiría un H -círculo con centro en z_0 y radio r , el cual contiene a v_1, w_0 y v_1 , donde (z_0) es $\lambda_1 \cap \lambda_k$ y r la distancia de z_0 a w_0).

Además $N_0 \subset M$, pues satisface las desigualdades que definen a M y otras más. Pero M no contiene ningún punto fijo sobre su frontera.

Para demostrar esto, sea $V \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que V preserve a a y b y mueve a w_0 y w_1 , a nuevas posiciones w'_0, w'_1 simétricas con respecto a L , L bisector euclidiano perpendicular al segmento $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Dicha V se puede construir mandando a y b en 0 e ∞ , después aplicando una homotecia y finalmente regresando 0 e ∞ en a y b mediante la inversa de la función original.

Con dicha V construimos grupos conjugados $V\Gamma V^{-1}$ y $V\langle T \rangle V^{-1}$, y
 Figura 8.



además observamos que $V(N_0)$ y $V(M)$ son los respectivos polígonos para estos grupos (lema 2.24). Entonces L es un lado de $V(M)$ y $V(M)$ está a la izquierda de L (ver figura 8) por lo cual $b \notin \partial(V(M))$ y tampoco en $\partial(M)$ pues $V(b) = b$, análogamente $a \notin \partial(M)$. ■

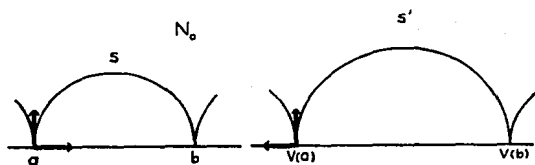
Ahora si un punto de un ciclo está en \mathbb{R} , el ciclo completo también estará, pues $PSL(2, \mathbb{R})$ preserva a \mathbb{R} .

Sea $z_1 \in \mathbb{R}$ y supóngase que z_1 es la intersección de 2 lados y sea $\{z_1, z_2, \dots\}$ el conjunto completo de puntos de \bar{N}_0 equivalentes a z_1 . Obsérvese que cada z_i es la intersección de dos lados de \bar{N}_0 .

Si describimos $\partial(N_0)$ en el sentido positivo, cada lado tiene un punto inicial y un punto final. Cuando un lado s es transformado sobre su conjugado s' , el punto inicial de s es transformado en el punto final de s' , ya que $V(N_0) \subset \text{Ext}(N_0)$ y por ser V conforme preserva la orientación:

$V(N_0)$ está al otro lado de s' puesto que $V(N_0) \cap N_0 = \emptyset$. Si denotamos por a y b los puntos inicial y final de s respectivamente, se afirma que $V(b)$ es el punto inicial de s' . Como V transforma $[\omega, a) \cup (b, \omega]$ en $(V(a), V(b))$ porque los otros vértices reales de \bar{N}_0 están en $[\omega, a) \cup (b, \omega]$ y por la conexidad de \mathbb{R} . Ahora si $V(a)$ es el punto inicial de s' , entonces tomando una base ordenada con vectores basados en a , uno de ellos tangente a s y el otro apuntando hacia b sus imágenes forman una base ordenada no equivalente a la primera y V no preserva la orientación contradiciendo la conformalidad. (Ver figura 9).

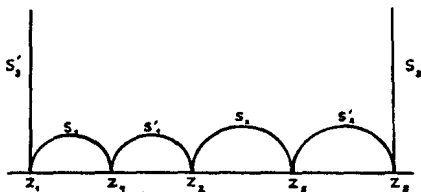
Figura 9.



Por tanto $V(a)$ es el punto final de s' .

Supongamos que s_1 es un lado que empieza en z_1 , el conjugado s'_1 finaliza en un punto equivalente a z_1 y por tanto pertenece al ciclo, llamemos z_2 a este punto. Si existe un lado s_2 que empiece en z_2 , el lado conjugado s'_2 finaliza en z_3 , análogamente podemos encontrar z_4, z_5, \dots . Si después de t -pasos tenemos que s'_t finaliza en z_1 , (un ejemplo que ilustra esta situación para el caso $t=3$ se muestra en la figura 10), entonces decimos que $\{z_1, z_2, \dots, z_t\}$ es un ciclo parabólico de N_0 y cada z_i es llamado vértice parabólico.

Figura 10.



Definición 2.25.- Sea $W_j \in \Gamma$ tal que $W_j(z_j) = z_{j+1}$.

$j = 1, \dots, t-1$; $W_t(z_t) = z_1$.

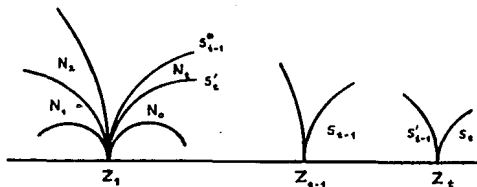
la transformación

$P = W_t W_{t-1} \dots W_1$ transforma a z_1 en el mismo, a dicha transformación se le llama transformación ciclica infinita.

Dicha transformación no es hiperbólica por el teorema anterior y tampoco la identidad:

Se tiene $W_t(z_t) = z_1$ y W_t transforma N_0 en un poligono normal al cual llamaremos N_t , y desde luego N_t tiene como vértice a z_1 , ahora $W_t(s_t) = s'_t$ el cual es lado comun de N_0 y N_t . Denotemos por s_{t-1}^* a $W_t(s'_{t-1})$, ambos s_t y s'_t se intersectan en z_t entonces s_{t-1}^* y s'_t se intersectan en z_1 . Continuando el análisis $W_t W_{t-1}(z_{t-1}) = z_1$ por definición, y $W_t W_{t-1}$ transforma a N_0 en un poligono que denotamos por N_{t-1} , además $W_t W_{t-1}(s_{t-1}) = W_t(s'_{t-1}) = s_{t-1}^*$ lo que nos dice que N_{t-1} y N_t tienen como lado comun a s_{t-1}^* . Procediendo de esta forma encontramos a $N_1, N_{t-1}, \dots, N_2, N_1$. (Ver figura 11).

Figura 11.



Por tanto $P(N_0) = N_1$ y consecuentemente P no es la identidad. ■

De lo anterior deducimos que P es parabólica y z_1 es un punto fijo de un elemento parabólico de Γ . Además P conjuaga los lados extremos de un conjunto de t polígonos.

Definición 2.26.- La intersección de las cerraduras del conjunto de polígonos normales que tienen a z como vértice común (N_1, \dots, N_{t-1}) con el interior de un círculo fijo K de P es llamado sector parabólico T_z .

Proposición 2.27.- Sea $P \in \Gamma$ como en la definición 2.27 y K un círculo fijo de P entonces

$$K = \bigcup_{m=0}^{\infty} P^m T_z$$

Demostración. $z_0 \in \bigcup_{m=0}^{\infty} P^m T_z$ si y sólo si existe una m tal que $z_0 \in P^m T_z$ si y sólo si $z_0 \in P^m (\bigcup_{i=1}^t (N_i \cap K))$ por definición de T_z si y sólo si $z_0 \in K$.

Por tanto $K = \bigcup_{m=0}^{\infty} P^m T_z$.

$\langle z_0 \in K \rightarrow z_0 \in P^m (\bigcup_{i=1}^t (N_i \cap K))$, se puede ver fácilmente conjugando el grupo de tal manera que $z = \omega$. ■

Teorema 2.28.- Cada vértice z de un ciclo parabólico de N_0 es un punto fijo de una transformación $P \in \Gamma$ y P transforma los lados externos de un sector parabólico que pasan por z . Además si N_0 tiene un número finito de lados y no tiene ningún lado libre, \bar{N}_0 intersecta a \mathbb{R} en un número finito de vértices parabólicos. Finalmente P genera el estabilizador de z .

Demostración. Sólo falta demostrar las dos últimas afirmaciones.

Si z_1 es un punto fijo de una transformación $P \in \Gamma$, con P parabólica, entonces z_1 es punto fijo de $T_1 P T_1^{-1}$ con $T_1 = W_{t-1} \dots W_2 W_1$, $i = 1, 2, \dots, t$. Y por tanto \bar{N}_0 intersecta a F en un número finito de vértices.

Por último, como Γ_z es cíclico, éste tiene un generador P_0 . Ahora P_0 o P_0^{-1} mueven a N_0 en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de z , supongamos que P_0 cumple esto. Así P y P_0 rotan a N_0 en el mismo sentido y además $P = P_0^m$ para alguna $m \geq 1$. Luego entonces $P_0(N_0) = N_j$ para j , $1 < j < t$. Entonces $P_0 = W_1 \dots W_j$. Para $j > 1$ el miembro derecho no está en Γ_z , ya que estas transformaciones no fijan a z . Por tanto $j = 1$ y así $P_0 = P$.

Surge ahora la pregunta recíproca.

¿ Puede un punto fijo de un elemento parabólico, ser vértice parabólico ? La respuesta es sí.

Lema 2.29.- Si Γ contiene traslaciones, no existe ninguna sucesión de V_n diferentes, $V_n \in \Gamma$, tal que $c_n \rightarrow \gamma$ (finito) con distintos $\langle c_n \rangle$. En particular, existe una constante $\bar{c} > 0$ tal que para toda V en Γ

$$c = 0 \quad \text{ó} \quad |c| \geq \bar{c}$$

Demostración. Supongamos que $c_n \rightarrow \gamma$, con $\langle c_n \rangle$ distintas. Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$ la cual genera a Γ_ω (grupo parabólico que fija a ω). Entonces

$$T^n v_n T^n = \begin{bmatrix} 1 & r_n \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_n \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n + r_n c_n \lambda & \dots \\ c_n & d_n + s_n c_n \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & d'_n \end{bmatrix} \in \Gamma.$$

Supongamos que $c_n \neq 0$. Entonces para cada n podemos escoger r_n y s_n tal que $1 \leq a'_n < 1 + \lambda |c_n|$, $1 \leq d'_n < 1 + \lambda |c_n|$. Podemos suponer que $c'_n > 0$ (si $c_n < 0$, tomamos $-c_n > 0$), $1 \leq a'_n < 1 + \lambda |c'_n|$ se reduce a $0 \leq \beta_n + r_n \alpha_n < \alpha_n$ donde $\alpha_n = c_n \lambda$ y $\beta_n = a_n - 1$, por lo cual existe $r_n \in \mathbb{Z}$ tal que cumple con la desigualdad. Análogamente podemos encontrar s_n para $1 \leq d'_n < 1 + \lambda |c'_n|$.

De las últimas desigualdades obtenemos

$$0 \leq a'_n d'_n - 1 < 2\lambda |c'_n| + \lambda^2 c_n^2 \text{ y por tanto}$$

$$|b'_n| = |a'_n d'_n - 1/c'_n| < 2\lambda + \lambda^2 |c'_n| < 2\lambda + 2\lambda^2 |\gamma|, \text{ para todo } n > N.$$

Por tanto de las sucesiones a'_n , b'_n y d'_n que hemos acotado podemos extraer subsucesiones convergentes. Esto es cierto si cada subsucesión convergente (V_p) , tiene elementos distintos lo cual es cierto pues $\langle c_n \rangle$ son todos distintos. Lo anterior contradice que Γ sea discreto. ■

Lema 2.30.- La Ecuación del Círculo Hiperbólico con centro en $z_0 = x_0 + iy_0$ y radio r es el círculo euclidiano

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh(r))^2 = (y_0 \sinh(r))^2$$

Demostración. Primero demostraremos la siguiente fórmula

$$\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}$$

El lado izquierdo de la ecuación es invariante bajo $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ demostramos que la parte derecha también lo es:

Sea $V \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $V(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{|V(z) - V(w)|^2}{2\text{Im}(V(z))\text{Im}(V(w))} &= \frac{\left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right|^2}{2\text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)\text{Im}\left(\frac{aw + b}{cw + d}\right)} \\ &= \frac{|(acz + b) - (acw + b)|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \\ &= \frac{|(acz + b) - (acw + b)|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \\ &= \frac{|ad(z-w) + bc(w-z)|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} = \frac{|(ad - bc)(z-w)|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} = \frac{|z-w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \end{aligned}$$

Por tanto como $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodesicas, basta probar la formula cuando z y w estan en el eje imaginario positivo. Aun mas podemos ajustar a traves de una homotecia y suponer que $z = i$ y $w = ir$, $r > 1$.

Se demostro anteriormente que $c(1, r) = \text{ln}(r)$, $r > 1$, asi si escribimos ρ por $c(1, r)$ se tiene

$$\cosh(\rho) = \frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2} = \frac{e^{\text{ln}(r)} + e^{-\text{ln}(r)}}{2} = \frac{r + 1/r}{2} = \frac{r^2 + 1}{2r}$$

Por otro lado, $1 + \frac{|1-ir|^2}{2r} = \frac{2r + (1-r)^2}{2r} = \frac{r^2 + 1}{2r}$ con lo que queda demostrada la formula.

Por ultimo siguiendo con la demostracion del lema.

Sea $C_r(z_0, r) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, z_0) = r\}$ entonces

$$\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}$$

si y solo si $2yy_0 \cosh(r) = 2yy_0 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$

si y solo si $y_0^2(\cosh^2(r)-1) = (x-x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 \cosh(r) + y_0^2 \cosh(r)$

si y solo si $(y_0 \sinh(r))^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0 \cosh(r))^2$ ■

Teorema 2.31.- Sea $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, Γ discreto. Sean $v_0 \in \mathbb{H}^2$ tal que v_0 no es fijo bajo Γ , N_0 el poligono de Dirichlet para Γ y $F \in \Gamma$ parabolico con punto fijo p , entonces p es un vertice parabolico de $p(N_0)$ para algun $v \in \Gamma$.

Demostración.

Sea p un punto fijo de un elemento parabolico. Existe un elemento $V \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $V(p) = i$ y $V(w_0) = 1$, con w_0 centro del poligono de Γ y sea $\Gamma^* = V\Gamma V^{-1}$, este nuevo grupo tiene a $N_0^* = V(N_0)$ como poligono normal con centro en i , este grupo contiene traslaciones. El objetivo de la demostracion es probar que α es un vertice de alguna imagen de N_0^* y por tanto p es un vertice parabolico de alguna imagen de N_0 bajo Γ .

Por consiguiente podemos renombrar Γ y suponer que $p = i$ y $v_0 = 1$.

Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$, el generador de Γ_0 .

Las imagenes de i bajo Γ son de la forma $V_n(i) = \dots + \frac{c_n i + d_n}{c_n i + d_n} = \frac{(a_n i + b_n)(-c_n i + d_n)}{c_n^2 + d_n^2} = \dots + \frac{(ad-bc)_n}{c_n^2 + d_n^2} = \dots + \frac{1}{c_n^2 + d_n^2}$. Donde $\Gamma = \langle V_1, V_2, \dots \rangle$.

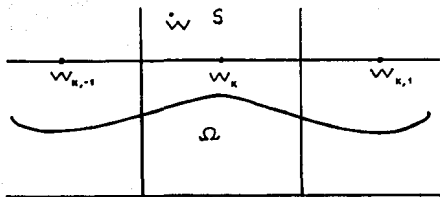
Ahora si $c_n = 0$ entonces $d_n = \pm 1$ (pues $ad-bc = 1$) de donde tenemos que $\text{Im}(V_n(i)) = 1$.

Por el lema 2.29 el conjunto $\{\text{Im}(V_n(i))\}$ esta acotado superiormente. Denotamos por w_k un punto en $\Gamma(i)$ que tenga parte imaginaria maxima.

Las imagenes de w_k que estan en L (recta horizontal que pasa por w_k) son de la forma $w_{k,m} = w_k + m\lambda$, $m \in \mathbb{Z}$. Los \mathbb{H} -bisectores entre w_k y $w_{k,m}$ son lineas verticales. Los 2 mas cercanos a w_k encierran una banda vertical S .

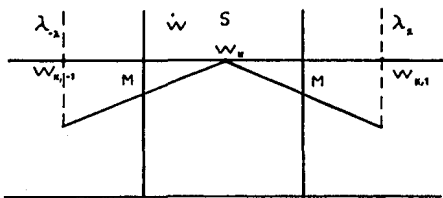
Sea $\Omega = \Gamma(i) - \{w_{k,m}, m \in \mathbb{Z}\}$. Este conjunto esta por debajo de L . Ver figura 12.

Figura 12.



Ahora construimos 2 triángulos como en la figura 13.

Figura 13.



Las 2 regiones determinadas por estos triángulos determinan un conjunto compacto M y por tanto $(\Omega \cap M) \subset \omega$. moviendo los vértices inferiores hacia arriba, podemos suponer que $M \cap \Omega = \emptyset$.

Ahora si denotamos por λ_2 y λ_{-2} los bisectores perpendiculares entre w_1 y $w_{1,2}$ y entre w_k y w_{k-2} se tiene que si C_w es el círculo hiperbólico con centro en w , $w \in S$, entonces $C_w \cap L$ está en la banda determinada por λ_2 y λ_{-2} , (puesto que la recta vertical por w bisecta w_k y el otro punto en $C_w \cap L$).

La ecuación de C_w está dada por:

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y \cosh(\rho))^2 = (y \sinh(\rho))^2$$

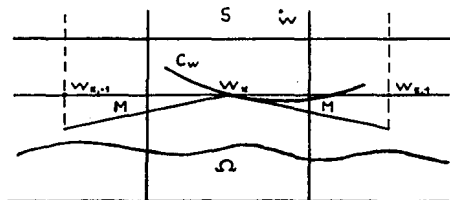
donde $\rho = \rho(w_1, w)$ y $w = (x_0, y_0)$.

La tangente de C_w en w_k está dada por $\frac{y_0 - y_k}{y_k - y_0 \cosh(\rho)}$ donde

$w_k = (x_k, y_k)$.

Si $\text{Im}(w)$ es suficientemente grande, la tangente tiende a 0, por lo cual se puede tomar L' una recta horizontal tal que w está arriba de L' ; el círculo C_w intersecta la región debajo de L solamente en los triángulos que hemos descrito i.e. $C_w \cap \Omega = \emptyset$. Ver figura 14.

Figura 14.



Por tanto $\forall w \in S$ que esté arriba de cierta línea L' , G_j no contiene en su interior ningún punto en Ω .

Así $w \in p(N_0) = N_k$ donde $p(i) = w_k$, puesto que $p(w, w_j) < p(w, \Omega)$ y además $p(w, v_1) < p(w, w_{k,m})$, $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente $p(w, w_j) = p(w, V(w_j)) \forall V \in \Gamma, V \neq Id$.

Esto nos dice que la franja superior a L' en S , pertenece a N_k el cual contiene a α , pero como α es la intersección de dos lados de N_k entonces α es un vértice parabólico. ■

Teorema 2.32.- Sean $\langle s_j, s'_j \mid j = 1, 2, \dots \rangle$ los lados de N_0 y sea $T_j(s_j) = s'_j$ con $T_j \in \Gamma$. Entonces

$$\Gamma = \langle T_1, T_2, \dots \rangle.$$

Demostración. Sea $\theta = \langle T_1, T_2, \dots \rangle$. Se demostrará que $\Gamma \subset \theta$, la inclusión inversa es obvia.

Sea V un elemento arbitrario de Γ y sea $V(N_0) = N^*$. Si unimos un punto de N_0 a un punto de N^* con una línea recta L . Entonces como L es compacto cruza un número finito de polígonos normales.

Haciendo pequeñas desviaciones se puede suponer que L no pasa por ningún vértice. Sean $N_0, N_1, \dots, N_n = N^*$ los polígonos que cruzan L , de z_0 a z_1 y sean W_i los elementos tales que $W_i(N_0) = N_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Usamos inducción finita sobre n : La Transformación W_0 transforma un cierto lado s_0 de N_0 sobre s'_0 el cual es lado común a N_0 y N_1 . Entonces $W_0 \in \theta$, digamos $W_0 = T_{i_0}$. Ahora sea W_1 la transformación que manda s_1 (lado de N_1) sobre s'_1 , el lado común de N_1 y N_2 . Los lados $T_{i_0}^{-1}(s_1)$ y $T_{i_0}^{-1}(s'_1)$ son lados conjugados de N_0 ; la

transformación que los conjugó es $T_{0,1}^{-1} W_1 T_{0,1}$ que llamaremos $T_{1,1}$. Por tanto $W_1 \in \mathcal{C}$.

Supongamos que W_0, W_1, \dots, W_{k-1} están en \mathcal{C} . Y sea $W = W_{k-1} W_{k-2} \dots W_0$, evidentemente $W \in \mathcal{C}$. Sean s_k, s'_k tales que $W_k(s_k) = s'_k$ (s_k lado de N_k y s'_k lado común de N_k y N_{k+1}). Finalmente $W^{-1}(s_k)$ y $W^{-1}(s'_k)$ son lados conjugados de N_0 , la transformación conjugante es $W^{-1} W_k W$ que llamaremos $T_{k,1}$ y se tiene $W_k z \in \mathcal{C}$. Por inducción $W_1, W_2, \dots, W_n \in \mathcal{C}$, y por consiguiente $V = W_n \dots W_1 \in \mathcal{C}$.

CAPITULO 3

CAPITULO III. Ejemplos: Polígono de Ford.

El método de bisectores, el cual hemos explicado en el capítulo anterior, no es el más adecuado para la construcción de polígonos normales. En éste capítulo describiremos otro método basado en los Círculos Isométricos.

De aquí en adelante supondremos que Γ contiene traslaciones.

Definición 3.1.- Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ con $c \neq 0$.

Se define el Círculo Isométrico de T , denotado por $I(T)$ como:

$$I(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid |T'(z)| = 1\}.$$

El Círculo Isométrico es el lugar geométrico de aquellos puntos que son transformados por T sin cambio en la diferencial de la longitud euclídeana.

Obsérvese que $I(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid |cz + d| = 1\}$.

Ahora dada T con $c \neq 0$, tenemos T^{-1} también con $c \neq 0$. Así si $I(T)$ está definido entonces $I(T^{-1})$ está dado por $|cw - a| = 1$.

Proposición 3.2.- Sea $I(T_n)$ cualquier sucesión infinita de círculos isométricos y T_n elementos de un grupo discreto Γ , entonces sus radios tienden a cero.

Demostración. Como el radio de $I(T_n)$ es $1/|c_n|$ y como Γ contiene traslaciones, aplicamos el Lema 2.29 y obtenemos que $|c_n| > \bar{c}$ (ya que $c_n \neq 0$), así, como c_n es una sucesión infinita entonces $c_n \rightarrow \infty$ y por tanto $1/|c_n| \rightarrow 0$ ■

Lema 3.3.- T transforma $I(T)$ en $I(T^{-1})$ y además transforma $\text{Ext}(I(T))$ sobre el $\text{Int}(I(T^{-1}))$ (donde $\text{Ext}(I(T))$ es la componente no acotada en $\mathbb{H}-I(T)$).

Demostración. Sea z tal que $|cz + d| \geq 1$, i.e. $z \in I(T) \cup \text{Ext}(I(T))$. Entonces

$$|cT(z) - a| = |cz + d|^{-1} \leq 1, \text{ esto es } T(z) \in I(T^{-1}) \cup \text{Int}(I(T^{-1})).$$

Análogamente, si z es tal que

$$|cz - a| \leq 1, \text{ i.e. } z \in I(T^{-1}) \cup \text{Int}(I(T^{-1})),$$

entonces

$$|cT^{-1}(z) + d| = |cz - a|^{-1} \geq 1, \text{ esto es } T^{-1}(z) \in I(T) \cup \text{Ext}(I(T)).$$

Sea Γ un grupo real discreto. Ya que Γ contiene traslaciones, el estabilizador de ∞ , Γ_∞ , está generado por la traslación

$$U^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda > 0$$

Una Región Fundamental para Γ_∞ es cualquier banda vertical $R_\infty: \xi < x < \xi + \lambda$.

Ahora para cada $V \in \Gamma - \Gamma_\infty$ esta tiene un círculo isométrico.

Definición 3.4.- Se define la Región Fundamental de Ford como

$$R = R_\infty \cap \left\{ \bigcap_{V \in \Gamma - \Gamma_\infty} \text{Ext } I(V) \right\}$$

Esto es R consiste de la parte de R_∞ que está en el exterior de cada uno de los círculos isométricos.

Teorema 3.5.- La región R dada en la definición 3.4 es una Región Fundamental para Γ .

Demostración.

Primero: Sea $z \in R$ y $T \in \Gamma$. Si $T \in \Gamma_\infty$, entonces T traslada

z fuera de $\bar{R\omega}$ y por tanto fuera de R . Ahora si $T \in \Gamma - \Gamma_0$ entonces $T(z)$ está en el interior de $I(T^{-1})$ i.e. $T(z) \in R$. Por tanto R no contiene puntos equivalentes bajo Γ .

Segundo: Probaremos que cada $z \in \mathbb{H}$ es equivalente a un punto de \bar{R} .

Como hemos observado, los radios de los círculos isométricos son acotados. Entonces existe $B > 0$ tal que $z = x + iy \in \bar{R}$, si $z \in \bar{R\omega}$ y $y \geq B$.

Sea $\alpha \in \mathbb{H} \cap \partial(R)$. Entonces α puede estar en un lado vertical de $R\omega$. Si no, α está en algún círculo isométrico (ya que no puede estar en el interior de algún círculo isométrico). El punto α está en un número finito de círculos isométricos, pues los radios de los círculos isométricos convergen a cero.

Sea $z_0 \in \mathbb{H}$. Trasladamos z_0 en un punto z_1 en $\bar{R\omega}$ por algún elemento de Γ , i.e.

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad T(z_0) = x_1 + iy_1 \quad \text{donde } y_0 = y_1 \text{ y } T \in \Gamma.$$

Si $z_1 \notin \bar{R}$, entonces $z_1 \in I(V_\alpha)$ para algún $V_\alpha \in \Gamma$,

donde $V_\alpha \rightarrow \begin{bmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{bmatrix}$

$$\text{Sea } z_2 = V_\alpha(z_1) = x_2 + iy_2 \quad \text{donde } y_2 = \frac{y_1}{|c_\alpha z_1 + d_\alpha|^2} > y_1$$

Siguiendo, trasladamos z_2 a un punto $z_3 \in \bar{R\omega}$ y haciendo el mismo procedimiento tenemos una sucesión $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = x_n + iy_n$ y tal que $y_0 = y_1 < y_2 = y_3 < \dots$

Si, para alguna n , $y_{2n+1} \geq B$ entonces $z_{2n+1} \in \bar{R}$ y concluimos

la prueba. Si no existiría una sucesión infinita creciente de imágenes de z_0 bajo Γ en el compacto $K = \{z \mid y_0 \leq \text{Im}(z) \leq B, \zeta \leq \text{Re}(z) \leq \zeta + \lambda\}$, lo que contradice que Γ sea discontinuo. ■

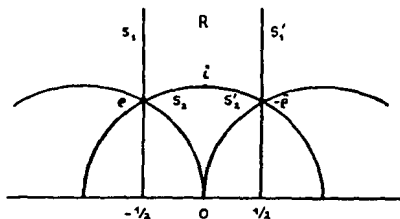
Ejemplo 1: El Grupo Modular.

El Grupo Modular $\Gamma(1)$ es el grupo de todas las matrices de (2×2) de determinante 1 con entradas enteras. El estabilizador de ω es el grupo cíclico generado por

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando R_ω como la banda $|x| < 1/2$, los círculos isométricos más grandes son de radio 1. Los círculos cuyos centros son $0, 1, -1$ son los que intersectan a R_ω . Las intersecciones entre los círculos son $\rho = e^{\pi i/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $-\bar{\rho} = e^{\pi i/6} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Ver figura 1.

Figura 1.



Obsérvese que los demás círculos de radios $\leq 1/2$ no intersectan la región R . Por tanto

$R: \{x^2 + y^2 > 1, |x| < 1/2, y > 0\}$, es una región fundamental

para el grupo modular.

R así definido es un polígono de Dirichlet. Para ver esto tomemos como centro a $2i$, el cual no es un punto fijo del elemento elíptico T .

Es decir, un punto fijo de un elemento elíptico T de $\Gamma(1)$ tiene como parte imaginaria

$$y = \frac{(4 - x^2)^{1/2}}{2|c|} \quad \text{donde } x \text{ es la traza de } T.$$

ya que $|x| < 2$ y $x \in \mathbb{Z}$ tenemos que $y \leq 2/2|c| \leq 1$.

Ahora $2i + 1$, $2i - 1$ son imágenes de $2i$; por tanto $x = \pm 1/2$ son H -bisectores. También como $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ está en el grupo tenemos que $T(2i) = 1/2$. Así el H -bisector perpendicular de $2i$ e $1/2$ es el círculo unitario. Por tanto el polígono normal N con centro en $2i$ está contenido en R . Si $R - N \neq \emptyset$, entonces $R - \bar{N} \neq \emptyset$. Sea $z \in R - \bar{N}$ y sea $z' \in \bar{N}$ equivalente a z . Entonces $z \neq z'$. Ahora $z' \in \bar{R}$, pero como $z \in R$, podemos tener $z' \in R$ ya que un elemento de Γ nunca transforma un punto interior sobre un punto frontera. Los puntos z y z' son distintos y equivalentes y ambos están en una región fundamental. Esto contradice que R sea una región fundamental y por tanto $N = R$.

Los lados de R son s_1, s_1' conjugados por U y s_2, s_2' conjugados por T . Por tanto U y T generan el Grupo Modular. T es elíptica de orden 2 con punto fijo i . Los ciclos son $(\rho, -\bar{\rho})$, (1) y (ω) . La suma de los ángulos en los vértices del primer ciclo es $2\pi/3$, por tanto ρ es un punto fijo de un elemento elíptico de orden 3. El ángulo suma

en el ciclo (1) es $n = 2\pi/2$.

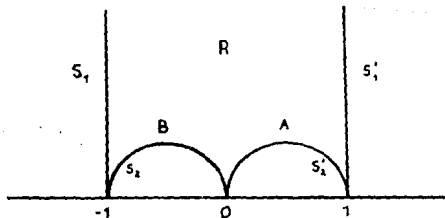
Ejemplo 2.

Sea $\Gamma(2)$, el subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z})$ con entradas a y d impares,

b y c pares.

El estabilizador de ∞ es generado por $U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tomemos R como la banda $|x| < 1$. Existen dos círculos isométricos que intersectan la región R , $A: |2z + 1| = 1$ y $B: |2z - 1| = 1$. Sea E la región arriba de estos círculos. Ver figura 2.

Figura 2.



El círculo isométrico es $|cz + d| = 1$, donde c es par, d impar. Si $c = 2$, tenemos los círculos A y B que no intersectan a R . Si $c \geq 3$, consideremos solamente $|d| < c$. Los círculos con $d = -1$, $d = -(c - 1)$ son tangentes internamente en A y si $d = 1$, $d = (c - 1)$ entonces los círculos son tangentes internamente en B y para otros valores de d están totalmente contenidos en el exterior de R . Por tanto R es el Polígono de Ford.

Los lados s_1, s_1' son conjugados por U^2 ; los lados s_2, s_2' son conjugados por $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto $\Gamma(2) = \langle U^2, Y \rangle$. Los ciclos son $\langle \omega \rangle, \langle -1, 1 \rangle, \langle 0 \rangle$ todos parabolicos.

B I B L I O G R A F I A

- [B] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups.*
 Springer - Verlag, 1983.
- [F] Ford, L. R., *Automorphic Functions.* (Second Edition).
 Chelsea, New York, 1951.
- [L₁] Lehner, J., *A Short Course in Automorphic Functions.*
 Holt, Rinehart and Winston, New York,
 1966.
- [L₂] Lehner, J., *Discontinuous Groups and Automorphic*
 Functions, Mathematical Surveys, Number
 VIII, American Math. Soc. Providence,
 1964.
- [Mar] Marsden, J. E., *Basic Complex Analysis.* W. H. Freeman
 and Company, 1973.
- [Mas] Maskit, B., *Kleinian Groups,* Springer - Verlag,
 1987.
- [T] Thurston, W., *The Geometry and Topology of*
 3-manifolds, Lecture Notes, Dept. of
 Math., Princeton, 1977.