33
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTIMACION Y SIMULACION EMPIRICA DEL ANALISIS DE DURACION.

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

JUAN CARLOS INCERA DIEGUEZ

México, D. F. 1993

TEMARIO

I INTRODUCCION

EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO, ES MOSTRAR UNA TECNICA UN POCO MAS SOFISTICADA PARA DETERMINAR QUE INSTRUMENTO FINANCIERO ES EL QUE MAS CONVIENE EN EL MOMENTO DE REALIZAR UNA INVERSION.

PRIMERAMENTE, SE REDEFINEN LAS FORMULAS PARA BONOS E HIPOTECAS Y POSTERIORMENTE SE PRESENTA UNA NUEVA EXPRESION DE LA TASA DE DESCUENTO (D_t), DEMOSTRANDOSE QUE TIENE LAS MISMAS PROPIEDADES QUE LA FORMULA YA CONOCIDA.

EN BASE A ESTA EXPRESION, SE INTRODUCE UN NUEVO TERMINO: "DURACION", QUE ES EL CONCEPTO MAS IMPORTANTE DE ESTE TRABAJO; DEDUCIENDO EN BASE A LA DURACION, LAS FORMULAS PARA BONOS, HIPOTECAS Y PORTAFOLIOS DE INVERSION.

UNA VEZ DEMOSTRADA SUS PROPIEDADES, SE LE APLICA VARIAS TECNICAS BASADAS EN REGRESION Y PROCESOS ESCTOCASTICOS, COMPARANDO SUS RESULTADOS CON LOS VALORES QUE SE DIERON EN REALIDAD SIENDO MUY CERCANOS ENTRE SI.

SE EXPLICA LA IDEA DE CADA TECNICA ASI COMO DE LOS PARAMETROS QUE SE UTILIZARON PARA EL CALCULO DE LA FUNCION. TAMBIEN SE ENUMERAN LAS VENTAJAS Y DESVETAJAS DE CADA UNA.

EN LAS CONSIDERACIONES DE CADA CAPITULO, SE DEMUESTRAN ALGUNOS CONCEPTOS MATEMATICOS, FORMULAS O PROPIEDADES QUE DEBEN TENER LOS RESULTADOS Y TECNICAS NOMBRADAS.

1 ANTECEDENTES

UN BONO ES UNA PROMESA DE PAGO POR ESCRITO GENERALMENTE EMITIDA POR UNA PERSONA MORAL PARA CUBRIR UNA DEUDA A UN TIEMPO DETERMINADO.

ESTOS PAGOS SE REALIZAN CON UNA PERIODICIDAD ESTABLECIDA DE ANTEMANO, GENERALMENTE DOS VECES AL AÑO.

ESTOS BONOS SE PUEDEN VENDER EN UN MOMENTO DISTINTO AL PACTADO A UN PRECIO IGUAL, MAYOR O MENOR QUE EL PRECIO DE COMPRA.

EL BONO COMPRENDE

1.- VALOR NOMINAL

2.- TASA DE CUPON

3.- FECHA DE REDENCION

4.- VALOR DE REDENCION

CUANDO EL VALOR DE REDENCION ES IGUAL AL VALOR NOMINAL, SE DICE QUE EL BONO ES COMPRADO A LA PAR. DE OTRA FORMA, SI EL PRECIO DE COMPRA ES MAYOR QUE EL VALOR DE REDENCION, EL BONO ES COMPRADO A PREMIO, EN CASO CONTRARIO, SI EL PRECIO DE COMPRA ES MENOR AL VALOR DE REDENCION, EL BONO ES COMPRADO A DESCUENTO.

LA FORMULA DE LOS BONOS TANTO COMPRADOS A LA PAR COMO LOS COMPRADOS A PREMIO O DESCUENTO SE VERA MAS ADELANTE.

2 BONOS

DEFINICION: ES UNA PROMESA DE PAGO EN EFECTIVO EN PERIODOS SEMESTRALES PARA "UN TENEDOR" O DUEÑO. LA PERIODICIDAD DEL PAGO EN EFECTIVO DEPENDE DE 2 FACTORES:

1.- VALOR NOMINAL: ESTA INCLUIDO SOLO EN EL ULTMO PAGO QUE EL TENEDOR RECIBE EN LA FECHA DE REDENCION. CASI SIEMPRE ES UN MULTIPLO DE $100. SE DENOTA CON LA LETRA F (DEL TERMINO EN INGLES: FACE VALUE).

2.- LA TASA DE CUPON: ES MANIFESTADA COMO LA TASA ANUAL DE RETORNO. SE EXPRESA EN FORMA DECIMAL Y SE DENOTA CON LA LETRA "C" (CUPON RATE), SON LOS PAGOS DE INTERESES EMITIDOS EN EL BONO.

EL PAGO ANUAL DE UN BONO SE OBTIENE DE MULTIPLICAR EL VALOR NOMINAL (F) POR LA TASA DEL CUPON (C), $P = C*F$; ESTE PAGO SE HACE NORMALMENTE EN DOS PERIODOS: UNA PARTE SE PAGA AL PRINCIPIO Y LA OTRA A LOS SEIS MESES. ESTO ES, $(C*F)/2$ ES EL PAGO O REDITO DEL CUPON PAGADERO CADA SEIS MESES HASTA EL VENCIMIENTO. EL PAGO COMPLETO DEL REDITO DE UN BONO TIPICO SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$[(C*F)/2,\ (C*F)/2, \ldots,\ \{(C*F)/2\} + F]$$

DONDE EL PAGO FINAL AL VENCIMIENTO INCLUYE A F; ENTONCES, EL PAGO ES "ESTABLE" EN LA FECHA DE REDENCION. POR EJEMPLO, UN CUPON POR $10'000,000 CON UNA TASA DE INTERES DEL 10% TENDRA EL PAGO DE REDITO:

($500,000; $500,000; ...; $10'500,000)

$$F = 10'000,000$$
$$C = 0.10$$
$$(C*F)/2 = 500,000$$

EL PAGO DEL REDITO DE UN BONO QUE PROMETE UN PAGO CADA SEIS MESES ESTA COMPLETAMENTE DESCRITO POR

- LA FECHA DE REDENCION O VENCIMIENTO
- TASA DE INTERES O CUPON ANUAL
- VALOR NOMINAL

SI DOS BONOS CUALESQUIERA, DIFIEREN ENTRE SI EN ALGUNA DE ESTAS TRES CARATERISTICAS, SUS VALORES DE REDENCION U OBLIGACION FUTURA SERAN DIFERENTES.

SI R ES LA TASA ANUAL DE INTERES (TASA INTERNA DE RETORNO), LA TASA SEMESTRAL SERA R/2 Y LA FUNCION DE DESCUENTO ESTARA DADA POR

$$D_t = [1 + (R/2)]^{-t}$$

DONDE D_t ES LA FUNCION DE DESCUENTO.
t ESTA DADO EN PERIODOS SEMESTRALES (SI t=2, QUIERE DECIR QUE EXISTEN DOS PERIODOS DE PAGO DE SEIS MESES CADA UNO, ES DECIR UN AÑO).

EL PRECIO DE UN BONO CON VENCIMIENTO (REDENCION) EN M AÑOS SERA:

$$p = \sum_{t=1}^{2M} D_t f_t = \sum_{t=1}^{2M} f_t * [1+(R/2)]^{-t} = \frac{(C*F)/2}{1+(R/2)} + \frac{(C*F)/2}{[1+(R/2)]^2} +$$

$$\ldots + \frac{(C*F)/2}{[1+(R/2)]^{2M}} + \frac{F}{[1+(R/2)]^{2M}}$$

$$= [(C*F)/2] * [\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t}] + F * [1+(R/2)]^{-2M} \qquad (2.0.1)$$

DONDE f_t ES LA FUNCION DEL PRECIO.

EXISTEN 2M INTERVALOS DE SEIS MESES EN UN PERIODO DE M AÑOS. EL PAGO EN EFECTIVO ES (C*F)/2 EN UNA FECHA DE PAGO SEMESTRAL Y F ES PAGADERO HASTA LA ULTIMA FECHA DE PAGO, DONDE LA TASA DE INTERES UTILIZADA EN LA FUNCION DE DESCUENTO (D_t) ES LA TASA SEMESTRAL CALCULADA COMO LA TASA ANUAL DIVIDIDA ENTRE 2. LA ULTIMA EXPRESION MUESTRA QUE EL VALOR DEL BONO SE PUEDE ESTUDIAR EN DOS TERMINOS: EL PRIMERO,

$[(C*F)/2] * [\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t}]$, DONDE ENVUELVE LA SUMA DE LOS

FACTORES DE DESCUENTO, MULTIPLICADA POR (C*F)/2 QUE EXPRESA EL VALOR CORRESPONDIENTE DE LOS PAGOS DE CUPON; Y EL SEGUNDO, QUE ES EL VALOR NOMINAL QUE SE RECIBIRA EN LA FECHA DE REDENCION.

CUANDO LA FECHA DE VENCIMIENTO (REDENCION) ES MUY LEJANA, (2.0.1) REQUIERE DE UN GRAN NUMERO DE SUMANDOS. POR EJEMPLO, SI M=100, EXISTIRAN 101 TERMINOS EN LA SUMATORIA, AFORTUNADAMENTE LA SUMA DE LOS FACTORES DE DESCUENTO SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t} = (2/R) * [1 - (1+(R/2))^{-2M}] \qquad (2.0.2)$$

MULTIPLICANDO (2.0.2) POR (C*F)/2 Y SUSTITUYENDO EN (2.0.1) SE OBTIENE

$$p = ([(C*F)/R] * [1-(1+(R/2))^{-2M}]) + F * (1+(R/2))^{-2M} \quad (2.0.3)$$

LA CUAL ES MAS FACIL DE UTILIZAR QUE (2.0.1), DEBIDO A QUE NO INVOLUCRA LA SUMA DE LOS DESCUENTOS.

CON EL FIN DE ESTANDARIZAR EL PRECIO DE LOS BONOS TENIENDO DIFERENTES VALORES NOMINALES, p EN LA ECUACION (2.0.3) USUALMENTE SE DIVIDE ENTRE F Y SE EXPRESA COMO UN PORCENTAJE, EN ESTE SENTIDO, EL PRECIO ESTANDARIZADO SE EXPRESA COMO

$$p = 100 * (C/R) *[1-(1+(R/2))^{-2M}] +100 * (1+(R/2))^{-2M} \quad (2.0.4)$$

DONDE $p = 100 * (P/F)$, ESTO ES, QUE EL PRECIO DE UN BONO ESTA EXPRESADO COMO UN PORCENTAJE DE SU VALOR NOMINAL. CONOCIENDO EL PRECIO p, SE PUEDE CALCULAR EL PRECIO P, MULTIPLICANDO p POR F/100. POR EJEMPLO, BONOS QUE SE VENDEN A PRECIO $p = 89$, SE ESTAN VENDIENDO AL 89% DE SU VALOR NOMINAL. LOS BONOS EN LOS CUALES SU VALOR p SEA IGUAL A 100, SE DENOMINAN BONOS REDIMIBLES A LA PAR. SI $p>100$ LOS BONOS RECIBEN EL NOMBRE DE BONOS COMPRADOS CON PREMIO Y SI $p<100$ SE LES LLAMAN BONOS COMPRADOS CON DESCUENTO.

2.1 BONOS REDIMIBLES A LA PAR.

LA ECUACION (2.0.4) PUEDE REESCRIBIRSE COMO

$$p = ((C/R)*100) + (100* [1-(C/R)]*[1+(R/2)]^{-2M}) \qquad (2.1.1)$$

SE PUEDE OBSERVAR QUE $p = 100$ SI $C = R$. BONOS CON ESTAS CARACTERISTICAS SE DENOMINAN REDIMIBLES A LA PAR. EL PRECIO DE ESTOS BONOS NO PUEDE VARIAR EN EL VENCIMIENTO M CUANDO $C = R$. DADO QUE $p = 100 * (P/F)$, SE SIGUE QUE $p = F$ (EL PRECIO DE UN BONO REDIMIBLE A LA PAR SIEMPRE ES IGUAL AL VALOR NOMINAL). PARA ESTE TIPO DE BONOS, F ES LA INVERSION PRINCIPAL Y LA TASA DE CUPON (INTERES), $(C*F)/2 = (R*F)/2$, ES EL INTERES GANADO SOBRE EL PERIODO SEMESTRAL. AL PASO DEL TIEMPO,EL PRECIO DE UN BONO REDIMIBLE A LA PAR SIEMPRE PERMANECERA IGUAL A CIEN AL TIEMPO QUE LA TASA DE INTERES NO CAMBIE Y SEA IGUAL A LA TASA DE CUPON.

2.2 BONOS COMPRADOS CON DESCUENTO.

SI C < R, EL BONO ES COMPRADO CON DESCUENTO (Y p < 100). PARA DEMOSTRAR ESTO, SE RESTA 100 DE AMBOS LADOS DE (2.1.1), QUEDANDO LA EXPRESION DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$d = 100 - p = [100*((C/R)-1)]* [(1+(R/2))^{-2M} - 1] \qquad (2.2.1)$$

SI C < R , EL LADO DERECHO ES POSITIVO PUESTO QUE $(1+(R/2))^{-2M}-1 < 0$ Y $C/R - 1 < 0$ POR LO TANTO, d = 100-p, ES UN NUMERO POSITIVO. DE AQUI EL POR QUE ES LLAMADO DESCUENTO. (ES LA CANTIDAD DE DINERO RESTADA DEL VALOR NOMINAL DE CIEN PARA DETERMINAR EL PRECIO). ESTO ES, QUE LOS BONOS VENDIDOS CON DESCUENTO DEBEN SER VENDIDOS A UN PRECIO MENOR QUE EL VALOR NOMINAL.

EN UN CASO EXTREMO, CUANDO C = 0, EL PAGO DEL REDITO DE UN BONO ESTANDARIZADO SE EXPRESA COMO $0, $0,..., $100.
LOS BONOS CON ESTA CARACTERISTICA, SE DENOMINAN BONOS CON CUPON CERO O BONOS CON DESCUENTO PURO. EL VALOR DE ESTOS CUPONES SERA

$$P = 100 * [1+(R/2)]^{-2M} \qquad (2.2.2)$$

LOS BONOS CON DESCUENTO PURO POSEEN UN ESPECIAL PROCESO DE REINVERSION. POR EJEMPLO, SI HAN PASADO 6 MESES Y LA TASA DE INTRERES NO HA CAMBIADO, EL PRECIO DEL BONO SERA:

$$p' = 100 * [1+(R/2)]^{-(2M-1)} \qquad (2.2.3)$$

COMO FALTAN 2M-1 PERIODOS SEMESTRALES ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO, SE DEDUCE QUE

$$p' = [1+(R/2)]* p = p + [(R/2)* p] \qquad (2.2.4)$$

2.3 BONOS COMPRADOS CON PREMIO.

SI C >, R SE DENOMINA BONO COMPRADO CON PREMIO. EN ESTE CASO, DE LA ECUACION (2.2.1) SE PUEDE OBSERVAR QUE p-100 > 0; ESTO ES, EL PRECIO ES MAYOR AL VALOR NOMINAL. A ESTE PAGO ADICIONAL, SE LE LLAMA "PREMIO".

LOS BONOS COMPRADOS CON PREMIO PROMETEN PAGOS QUE EXCEDEN EL INTERES GANADO. EL INTERES GANADO EN UN SEMESTRE ES (R*P)/2, PERO EL REDITO DEL CUPON RECIBIDO POR EL INVERSIONISTA ES 100*(C/2). EL REDITO DEL CUPON EXCEDE EL INTERES GANADO.

2.4 HIPOTECAS

2.4.1 VALUACION GENERAL.

LAS HIPOTECAS SON EMPRESITOS ENCONTRADOS QUE SE UTILIZAN PRIMORDIALMENTE PARA FINANCIAR LA COMPRA DE RESIDENCIAS, COMERCIOS, ETC. LAS HIPOTECAS TIPICAS TIENEN UN PAGO ESTABLE DEL REDITO, DONDE CADA PERIODO DE PAGO ES EL MISMO. ESTO IMPLICA QUE UNA PARTE ES EL PAGO (O SU INTERES) Y OTRA ES UNA REDUCCION EN LA AMORTIZACION DEL DEBITO.

LAS HIPOTECAS TIPICAS REQUIEREN DE PAGOS MENSUALES, ASI QUE LA TASA MENSUAL DE INTERES ES R/12, DONDE R ES LA TASA ANUAL DE INTERES. SI y ES EL PAGO MENSUAL, EL VALOR DE UNA HIPOTECA ES:

$$V = y * \left[\sum_{t=1}^{12M} (1+(R/12))^{-t} \right] \qquad (2.4.1.1)$$

DONDE M ES EL NUMERO DE AÑOS AL VENCIMIENTO. AQUI EL PAGO DEL REDITO ES: (Y, Y, ..., Y), ENTONCES, (2.4.1.1) ES EL DESCUENTO PARA LOS PAGOS EN EFECTIVO CON EL FACTOR APROPIADO DE DESCUENTO Y DONDE y PUEDE SALIR DE LA SUMA, OBTENIENDO

$$\sum_{t=1}^{12M} [1+(R/12)]^{-t}$$

QUE REPRESENTA EL VALOR DE UNA ANUALIDAD QUE PROMETE UN PESO DE PAGO CADA MES. UNA ANUALIDAD SIMILAR SE EVALUO PARA EL PAGO DEL REDITO DEL CUPON DE UN BONO. UTILIZANDO EL MISMO PROCEDIMIENTO, EL VALOR DE UNA HIPOTECA SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$V = y * (12/R) * [1- (1+(R/12))^{-12M}] = A * y \qquad (2.4.1.2)$$

DONDE:

$$A = (12/R) * [1 - (1+(R/12))^{-12M}] = V/y \qquad (2.4.1.3)$$

Y A DENOTA EL FACTOR DE LA HIPOTECA QUE ES IGUAL AL VALOR DE LA HIPOTECA CON UN PAGO MENSUAL y. CONOCIENDO EL FACTOR DE LA HIPOTECA, SE PUEDE CALCULAR y SI V ES CONOCIDO DE ANTEMANO. EL VALOR DE LA HIPOTECA SIEMPRE ES PROPORCIONAL AL PAGO MENSUAL, PERO EL FACTOR DE PROPORCIONALIDAD ES UNA FUNCION DE LA TASA ANUAL DE INTERES R Y DEL NUMERO DE AÑOS M AL VENCIMIENTO.

EJEMPLO:

\$100'000,000 SON PRESTADOS AL 30% POR 30 AÑOS. ENCONTRAR EL PAGO MENSUAL QUE SALDA ESTE PRESTAMO HIPOTECARIO.

$V = \$100'000,000; \; A = (12/.30) * [1 - (1+.30/12)^{(-12)*(30)})]$

$= (40) * [1 - ((1 + .025)^{(-360)})]$

$= 39.994488 = (100'000,000) \,/\, 39.994488$

$= \$\, 2'500,300 = y$

DONDE 39.994488 ES EL FACTOR DE LA HIPOTECA.

2.5 DURACION

LA DURACION DE UN VALOR ES UNA MEDIDA DE SU PROMEDIO DE VIDA. ES UN PROMEDIO DE LAS FECHAS EN QUE LOS PAGOS SON PROMETIDOS, DONDE ESTAS FECHAS TIENEN UN PERIODO DE LIQUIDEZ ALEJADO. MACAULAY (1938) FUE EL PRIMERO EN UTILIZAR EL TERMINO DE "DURACION" Y DEDUJO LA PRIMER FORMULA COMO UNA MEDIDA DEL PROMEDIO DE VIDA DE UN VALOR (O INVERSION).

HICKS, INDEPENDIENTEMENTE INVENTO "DURACION" (PERO LE LLAMO "PERIODO PROMEDIO"), COMO LA ELASTICIDAD DEL PRECIO DEL BONO CON RESPECTO AL FACTOR DE DESCUENTO $(1+R)^{-1}$ Y MOSTRO QUE CAMBIOS EN LA TASA DE INTERES, NO AFECTAN EL PRECIO RELATIVO DE DOS VALORES, CADA UNO CON LA MISMA DURACION.

EXISTEN UNA GRAN VARIEDAD DE FORMULAS PARA LA DURACION DE UN PAGO DE REDITO.

2.5.1 DURACION EN GENERAL.

PRIMERAMENTE, SE OBTENDRA LA FORMULA GENERAL DE DURACION Y POSTERIORMENTE, LAS ESPECIFICAS PARA BONOS E HIPOTECAS.

SI EL PAGO EN EFECTIVO ES GENERALMENTE ESCRITO COMO: $\delta(t)$ PARA $t = 1,\ldots,M$, DONDE EL PAGO DE REDITOS ES

$$p = \sum_{t=1}^{M} [\, \delta(t) * (1+R')^{-t}] \qquad (2.5.1.1)$$

DONDE R' ES LA TASA DE INTERES APROPIADA PARA INTERVALOS DE TIEMPO ENTRE DOS PAGOS EN EFECTIVO. SI EL PAGO ES ANUAL, $R' = R$, DONDE R ES LA TASA INTERNA DE RETORNO EXPRESADA COMO TASA ANUAL DE INTERES. SI EL PAGO ES SEMESTRAL $R' = R/2$ Y SI ES MENSUAL $R' = R/12$.

LA DURACION DE UN INSTRUMENTO FINANCIERO SE DEFINE COMO:

$$D = \frac{1+R'}{P} * \frac{d_P}{d_{R'}} \qquad (2.5.1.2)$$

RESULTADO QUE FUE MOSTRADO POR HICKS (1946) COMO LA ELASTICIDAD DE P CON RESPECTO AL FACTOR DE DESCUENTO $(1+R')^{-1}$. SIEMPRE QUE D SEA INTERPRETADA COMO ELASTICIDAD.

LA ECUACION (2.5.1.2) PROPORCIONA EL CALCULO NUMERICO DE LA DURACION. DERIVANDO (2.5.1.1) CON RESPECTO A R' SE OBTIENE:

$$\frac{D_P}{d_{R'}} = - \sum_{t=1}^{M} t * [\delta(t)]*(1+R')^{-(t+1)} \qquad (2.5.1.3)$$

UTILIZANDO (2.5.1.2):

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{M} t*[\delta(t)]*(1+R')^{-t}}{P} = \sum_{t=1}^{M} t * \left[\frac{[\delta(t)]*(1+R')^{-t}}{P}\right] \qquad (2.5.1.4)$$

SEA $W(t) = [\delta(t) * (1+R')^{-(t+1)}] / P$, RECONOCIENDO QUE:

$\sum_{t=1}^{M} W(t) = 1$ Y $0 \leq W \leq 1$ PARA TODA t, ENTONCES

$$D = \sum_{t=1}^{M} W(t) * t \qquad (2.5.1.5)$$

POR LO TANTO, D ES UN "PROMEDIO DE MEDICION" DE LOS PERIODOS EN QUE LOS PAGOS OCURREN Y D ES LA MEDIDA EN UNIDADES DE INTERVALOS DE TIEMPO ENTRE PAGOS. SI EL PAGO DEL REDITO REPRESENTA EL PAGO SEMESTRAL DE UN BONO, D ESTARA DADO EN PERIODOS DE 6 MESES. POR EJEMPLO SI D = 5 , SIGNIFICA QUE LA DURACION ES EN 5 PERIODOS DE 6 MESES CADA UNO (2 ½ AÑOS). SI EL PAGO DEL REDITO REPRESENTA A UNA HIPOTECA CON PAGOS MENSUALES, D ESTARA DADO EN MESES.

2.5.2 DURACION DE LOS BONOS.

CALCULAR UNA INVERSION PUEDE SER TEDIOSO SI SE UTILIZA LA FORMULA (2.5.1.5). APLICANDO LAS PROPIEDADES DEL PAGO DEL REDITO, SE PUEDE REDUCIR (2.5.1.5) A UNA EXPRESION QUE NO CONTENGA SUMAS, ASI, SE PUEDEN UTILIZAR SOLO LOS VALORES DE P, R', C, M EN LA FORMULA, AL DERIVAR LA DURACION DIRECTAMENTE. PARA UN BONO, SE PUEDE ESCRIBIR (2.5.1.1) COMO (2.0.1), QUEDANDO:

$$p = ([(100)*(C/2)]/R'*[1-(1+R')^{-M}])+(100)*(1+R')^{-M} \qquad (2.5.2.1)$$

$$\text{SEA } A = [(100)*(C/2)]/R' * [1-(1+R')^{-M}] \qquad (2.5.2.2)$$
$$B = (100) * (1+R')^{-M}$$

AQUI, A ES EL VALOR DEL REDITO DEL PAGO DE CUPON Y B ES EL VALOR DEL PAGO GLOBAL, ENTONCES:

$$P = A + B \qquad (2.5.2.3)$$

DERIVANDO A Y B CON RESPECTO A R':

$$\frac{d_A}{d_{R'}} = -\frac{A}{R'} + \frac{M*(100)*(C/2)*(1+R')^{-(M+1)}}{R'} \qquad (2.5.2.4)$$

$$\frac{d_B}{d_{R'}} = -M*(100)*(1+R')^{-(M+1)}$$

MULTIPLICANDO CADA ECUACION POR 1 + R', SE OBTIENE:

$$-(1+R')*\frac{d_A}{d_{R'}} = \frac{(1+R')*A}{R'} - \frac{M*(100)*(C/2)*(1+R')^{-(M+1)}*(1+R')}{R'}$$

$$= \frac{(1+R')*A}{R'} - \frac{M*(100)*(C/2)*(1+R')^{-M}}{R'}$$

$$= \frac{(1+R')*A}{R'} - \frac{M*(C/2)*B}{R'} \qquad (2.5.2.5)$$

Y

$$-(1+R')*\frac{d_B}{d_{R'}} = (1+R')*M*(100)*(1+R')^{-(M+1)} = M*(100)*(1+R')^{-M}$$

$$= M*B$$

SEA AHORA

$$D = \frac{-(1+R')}{P} * \frac{d_P}{d_{R'}} = -\frac{(1+R')}{P} * \frac{d_A}{d_{R'}} - \left[\frac{(1+R')}{P} * \frac{d_B}{d_{R'}}\right] \qquad (2.5.2.6)$$

ENTONCES, UTILIZANDO (2.22) SE OBTIENE QUE

$$D = \frac{1+R'}{R'} * \frac{A}{P} + \left[M * \left[1 - \frac{(C/2)}{R'} \right] \right] * \frac{B}{P} \qquad (2.5.2.7)$$

BABCOCK (1984) RECOMENDO UTILIZAR ESTA FORMULA. SE PUEDE OBSERVAR QUE LA DURACION ESTA DIVIDIDA EN DOS TERMINOS: SI SE TIENE UN BONO REDIMIBLE A LA PAR, ENTONCES $(C/2) = R'$ Y EL SEGUNDO TERMINO DESAPARECE; ASI, LA DURACION SE REDUCE A

$$[\ (1+R')/R\ ] * [\ A\ /\ P\ ].$$

SI ES UN BONO COMPRADO CON PREMIO O DESCUENTO, EL SEGUNDO TERMINO ES RELEVANTE Y SE INTERPRETA COMO UN AJUSTE DE LA DURACION DE UN BONO REDIMIBLE A LA PAR QUE DA EL EFECTO DE PREMIO O DESCUENTO EN LA DURACION.

UNA FORMULA ALTERNATIVA SE OBTIENE SUBSTITUYENDO $P-B = A$ EN (2.5.2.2). REDUCIENDO TERMINOS SEMEJANTES SE OBTIENE

$$D = \frac{1+R'}{R'} + \frac{B}{P} * \left[(M-1) - (1/R') - (M* (C/2)/R') \right] \qquad (2.5.2.8)$$

ESTA FORMULA TAMBIEN DIVIDE A LA DURACION EN 2 PARTES. LA PRIMERA, $[(1+R')/R']$, ES LA DURACION DE UNA PERPETUIDAD QUE PROMETE $1 CADA PERIODO. PARA VER ESTO, NOTESE QUE EL PRECIO DE UNA PERPETUIDAD ES $p* = 1/R'$.

ENTONCES

$$-\frac{1+R'}{P^*} * \frac{d_P^*}{d_{R'}} = \frac{1+R'}{(1/R')} * (1/R')^2 = \frac{1+R'}{R'} = d^* \qquad (2.5.2.9)$$

QUE ES POR DEFINICION LA DURACION DEL FLUJO. ENTONCES (2.5.2.8) TOMA LA DURACION DE UNA PERPETUIDAD Y UN AJUSTE QUE ES EL SEGUNDO TERMINO EN ORDEN PARA CALCULAR LA DURACION DEL BONO.

POR LO ANTERIOR, SE PUEDE ESCRIBIR LA DURACION COMO

$$D = d^* + (ADJ) \text{ DONDE } ADJ = \frac{B}{P} * \left[(M-1)-(1/R')-[M*(C/2)/R'] \right] \quad (2.5.2.10)$$

UTILIZANDO LAS DEFINICIONES DE P Y B, (2.5.2.10) SE PUEDE REDUCIR A:

$$D = \frac{1+R'}{R'} - \frac{M*([C/2]-R') + (1+R')}{[(1+R')^M*(C/2)]-[(C/2)-R']} \quad (2.5.2.11)$$

ESTA FORMULA ES MAS FACIL DE APLICAR DEBIDO A QUE NO INVOLUCRA UN PRECALCULO DE B Y P. EL SEGUNDO TERMINO ES SIMPLEMENTE EL NEGATIVO DEL TERMINO DE AJUSTE EN (2.5.2.10). SE PUEDE NOTAR QUE TANTO EL DENOMINADOR COMO EL NUMERADOR CRECCEN RAPIDAMENTE JUNTO CON M EN EL TERMINO DE AJUSTE, Y LA TASA DE CUPON SE CONVIERTE EN POSTIVA. ESTO SIGNIFICA QUE LA DURACION PARA TODO TIPO DE BONOS, TIENDE A PARECERSE A LA DURACION DE UNA PERPETUIDAD CUANDO LA REDENCION CRECE. DEBIDO A QUE EL AJUSTE CRECE.

LA ECUACION (2.5.2.11) MUESTRA QUE UN INCREMENTO EN LA TASA INTERNA DE RETORNO REDUCE LA DURACION DADA UNA TASA DE CUPON C Y REDENCION M. LA DURACION DE LA PERPETUIDAD, $(1+R')/R'= 1+(1/R')$, DECRECE CLARAMANTE CUANDO R' CRECE.

2.5.3 DURACION DE LAS HIPOTECAS.

CON UNA SENCILLA MODIFICACION A LAS FORMULAS DE DURACION PARA BONOS, SE LLEGA A LAS FORMULAS APROPIADAS PARA HIPOTECAS. SI "P" ES EL VALOR DE LA HIPOTECA, Y y ES EL PAGO MENSUAL, ENTONCES

$$P = \frac{y}{R'} * [1 - (1+R')^{-M}] \quad (2.5.3.1)$$

DONDE M ES EL NUMERO DE PAGOS MENSUALES Y R'=R/12 ES LA TASA DE INTERES MENSUAL. EL PAGO MENSUAL ESTA DADO COMO:

$$y = \frac{R' * P}{1 - (1+R')^{-M}} \quad (2.5.3.2)$$

PARA UNA TASA DE INTERES ANUAL INICIAL, SI SE ASUME QUE LOS PAGOS MENSUALES ESTAN DADOS PARA UNA TASA ANUAL, Y SI NO CAMBIA COMO LA TASA INTERNA DE RETORNO, Y SOLAMENTE P CAMBIA AL CAMBIAR R', LA HIPOTECA SE CONVIERTE EN UNA ANUALIDAD CON PAGOS MENSUALES IDENTICOS; ENTONCES, EL VALOR DE LA RENTA ES SIMILAR AL VALOR A DEL VALOR DEL BONO, DONDE y ES SUSTITUIDO POR (100) * (C/2) Y R' SE CONVIERTE EN R/12.

UTILIZANDO (2.5.1.5), SE OBTIENE:

$$\frac{d_P}{d_{R'}} = \frac{-P}{R'} + \left[\frac{M*y}{R'} \right] * (1+R')^{-(M+1)} \qquad (2.5.3.3)$$

Y LA DURACION ESTA DADA POR:

$$D = [(1+R')/P] * [(d_P/d_{R'})]$$

$$= [(1+R')/R']-[((M*y)/R')* ([(1+R')^{-M}]/P)] \qquad (2.5.3.4)$$

NOTANDOSE QUE P ESTA DADO POR (2.5.3.1) PARA UNA y DADA. LA DURACION PUEDE ESCRIBIRSE COMO:

$$D = [(1+R')/R'] - ([M*(1+R')^{-M}]/[1-(1+R')^{-M}])$$

$$= [(1+R')/R'] - [M/[((1+R')^{M})-1]] \qquad (2.5.3.5)$$

EN CONSECUENCIA, LA DURACION DE UNA HIPOTECA, SOLO ESTA EN FUNCION DE LA TASA DE INTERES O DE LA TASA INTERNA DE RETORNO. SE PUEDE NOTAR QUE LA DURACION ES INDEPENDIENTE DEL VALOR DE LA HIPOTECA P Y DEL PAGO MENSUAL y SI ES EL MISMO PARA CADA MES Y NO CAMBIA LA TASA R'.

2.5.4 DURACION DE UN PORTAFOLIO.

DEBIDO A QUE EXISTE UNA GRAN VARIEDAD DE DIFERENTES INSTRUMENTOS FINACIEROS, LOS INVERSIONISTAS ESCOGEN VARIOS DE ESTOS AL MISMO TIEMPO, FORMANDO ASI UN PORTAFOLIO DE INVERSIONES. CADA PORTAFOLIO PRODUCE UNA LIQUIDEZ QUE ES UN COMPLICADO MODELO DE PAGO EN EFECTIVO. POR EJEMPLO, SI UN INVERSIONISTA COMPRA UN BONO POR CINCO AÑOS AL 10% Y OTROS BONOS POR TRES AÑOS AL 12% (VALOR NOMINAL DE $100 CADA UNO), EL MODELO DE PAGO POR PERIODOS SEMESTRALES ES EL SIGUIENTE:

($73, $73, $73, $73, $73, $873, $25, $25, $25, $525)

CADA MODELO DE PAGO TIENE UNA DURACION QUE PUEDE CALCULARSE SIMPLEMENTE COMO EL PROMEDIO DE LAS DURACIONES DE LAS DIFERENTES INVERSIONES QUE FORMAN EL PORTAFOLIO.

PARA PODER OBTENER LA DURACION DE UN PORTAFOLIO DE 2 INVERSIONES, SEA p1 EL VALOR DE LA INVERSION 1 Y p2 EL VALOR DE LA INVERSION 2. SEAN n1, n2 EL NUMERO DE INVERSIONES COMPRENDIDAS EN EL PORTAFOLIO.
EL VALOR TOTAL DEL PORTAFOLIO ES $V = (n1*p1) + (n2*p2)$.
SEA $B1 = (p1*n1)/V$ Y $B2 = (p2*n2)/V$; ENTONCES, B1 Y B2 SON LAS RESPECTIVAS PROPORCIONES DE LA INVERSION DE LOS DOS VALORES.
SUPONGASE QUE D1, D2 SON LAS RESPECTIVAS DURACIONES. POR TANTO LA DURACION DEL PORTAFOLIO SERA:

$$D = (B1 * D1) + (B2 * D2) \tag{2.5.4.1}$$

2.6 CONSIDERACIONES AL CAPITULO 2

2.6.1 FACTORES DE DESCUENTO.

LA SUMA DE LOS FACTORES DE DESCUENTO SE EXPRESA COMO:

$$\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t} = (2/R) * [(1-(1+(R/2))^{-2M})]$$

DEMOSTRACION.

SEA $x = (1+(R/2))^{-1}$ ENTOCES $\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t} = \sum_{t=1}^{2M} x^{t}$ (2.6.1.1)

MULTIPLICANDO (2.6.1.1) POR x:

$$x * [\sum_{t=1}^{2M} (1+(R/2))^{-t} = \sum_{t=1}^{2M} x^{(t+1)} \qquad (2.6.1.2)$$

RESTANDO (2.6.1.2) DE (2.6.1.1):

$$\sum_{t=1}^{2M} x^{t} - \sum_{t=1}^{2M} x^{(t+1)} = (x+x^2+...+x^{2M}) - (x^2+x +...+x^{2M+1})$$

$$= x - x^{(2M+1)}$$

DIVIDIENDO ENTRE (1 -x):

$$\frac{x - x^{(2M+1)}}{(1-x)} = \frac{[1+(R/2)]^{-1} - [1+(R/2)]^{-(2M-1)}}{1 - [1/(1+(R/2))]}$$

$$= \frac{[1/(1+(R/2))] - [1/(1+(R/2))^{(2M-1)}]}{[1+(R/2)-1] / (1+(R/2))}$$

$$= \frac{(1+(R/2))}{(R/2)*(1+(R/2))} - \frac{(1+(R/2))}{(R/2)*[(1+(R/2))^{(2M-1)}]}$$

$$= (2/R) * \frac{([(1+(R/2))^{2M}] - 1)}{[(1+(R/2))^{2M}]}$$

$$= (2/R) * [1 - (1+(R/2))^{-2M}]$$

POR LO TANTO:

$$\sum_{t=1}^{2m} (1+(R/2))^{-t} = (2/R) * [1 - (1+(R/2))^{-2M}] // \quad (2.6.1.3)$$

2.6.2 PRECIO DE UNA PERPETUIDAD.

EL PRECIO DE UNA PERPETUIDAD ES $p^{*} = 1/R'$

DEMOSTRACION.

SEA F EL VALOR DE CADA PAGO, ENTONCES, EL VALOR PRESENTE DE ESTE REDITO SERA:

$$p = \sum_{t=1}^{\infty} F * (1+R')^{-t}$$

DONDE R' ES LA TASA DE INTERES POR EL INTERVALO DE TIEMPO ESPECIFICADO.

SEA $b = [1 / (1+R')]$, ENTONCES

$$p = \sum_{t=1}^{\infty} F * b^{t} = F * [\sum_{t=1}^{\infty} b^{t}] = F * (b+b^{2}+\ldots.) \quad (2.6.2.1)$$

MULTIPLICANDO POR b SE OBTIENE:

$$b * p = F * (b^{2}+b^{3}+b^{4}+\ldots) \quad (2.6.2.2)$$

RESTANDO (2.6.2.2) DE (2.6.2.1):

$$(1-b) * p = F * b \quad (2.6.2.3)$$

$$\text{ENTONCES, } p = (F * b) / (1 - b) \quad (2.6.2.4)$$

SUSTITUYENDO b SE OBTIENE:

$$1 - b = 1 - (1/(1+R')) = R' / (1 + R')$$ SE SIGUE QUE

$$\frac{b}{1-b} = [1 / (1+R')] * [(1+R')/R']$$

$$= 1 / R' //$$

ENTONCES $p = F / R'$ (2.6.2.5)

2.6.3 DURACION DE UN PORTAFOLIO.

LA DURACION DE UN PORTAFOLIO ES DE LA FORMA

$$D = (B1 * D1) + (B2 * D2) \qquad (2.6.3.1)$$

DEMOSTRACION.

SEAN $(F'_1, F'_2, \ldots, F'_M)$ Y $(F^2_1, F^2_2, \ldots, F^2_n)$ LOS PERIODOS DE PAGO RESPECTIVOS DE LAS DOS INVERSIONES. POR DEFINICION, LOS VALORES DE CADA INVERSION ESTAN DADOS POR:

$$V1 = \sum_{t=1}^{M} F't * (1+R')^{-t}; \quad V2 = \sum_{t=1}^{n} F^2t * (1+R')^{-t} \qquad (2.6.3.2)$$

LAS DURACIONES SON:

$$D1 = \sum_{t=1}^{M} t*(F't) * [(1+R')^{-t}]/V1$$

(2.6.3.3)

$$D2 = \sum_{t=1}^{n} t*(F^2t) * [(1+R')^{-t}]/V2$$

PARA ENCONTRAR LA DURACION DEL PORTAFOLIO, LAS 2 FUNCIONES SE DEBEN SUMAR, ESTO ES:

$$(F'_1+F^2_1+F'_2+F^2_2+\ldots+F'_t+F^2_t)$$

SI UNA DE LAS DOS INVERSIONES TIENE DIFERENTE REDENCION, F'_t Y / O F^2_t PUEDEN SER CERO PARA ALGUNO DE LOS COMPONENTES. EL VALOR DEL PORTAFOLIO ES:

$$V = \sum_{t=1}^{M+n} (F'_t + F^2_t) * (1+R')^{-t} = V1 + V2 \qquad (2.6.3.4)$$

LA DURACION DEL PORTAFOLIO POR DEFINICION ES:

$$D = \sum_{t=1}^{M+n} t * (F'_t + F^2_t) * [\ (1+R')^{-t}\ ] / V \qquad (2.6.3.5)$$

PERO:

$$\sum_{t=1}^{M+n} t * (F'_t + F^2_t) * [(1+R')^{-t}]$$

$$= \sum_{t=1}^{M} t*(F'_t)*(1+R')^{-t} + \sum_{t=1}^{n} t*(F^2_t)*(1+R')^{-t}$$

$$= (\ V1 * D1\ ) + (\ V2 * D2\ ) \qquad (2.6.3.6)$$

UTILIZANDO (2.6.3.2) Y SUSTITUYENDO EN (2.6.3.5):

$$D = [(\ V1*D1\ ) + (\ V2*D2\ )] / V$$

$$= \frac{V1}{V} * D1 + \frac{V2}{V} * D2 \qquad (2.6.3.7)$$

Y $(V1 / V) = B1$; $(V2 / V) = B2$ QUE ES IGUAL A (2.6.3.1)//

POR LO TANTO, UNA ECUACION GENERAL ES:

$$D = (B1*D1) + (\ B2*D2) + \ldots + (BS*DS)$$

DONDE EXISTEN S BONOS EN EL PORTAFOLIO.

ESTO ES, LA DURACION EN UN PORTAFOLIO ES EL PROMEDIO PONDERADO DE LAS DURACIONES DE LAS INVERSIONES, DONDE LAS MEDIAS SON LAS RESPECTIVAS PROPORCIONES INVERTIDAS DE CADA INSTRUMENTO FINANCIERO, Y DONDE LOS PESOS SUMAN LA UNIDAD, ES DECIR

$$B1 + B2 = 1$$

3 EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES

LA TRANSFORMACION DEL VALOR FUTURO EN VALOR PRESENTE ES UNA CARACTERISTICA BASICA EN EL ANALISIS DEL VALOR DE UN CAPITAL. COMO SE VIO EN EL CAPITULO 2, ESTO SE ENCUENTRA MEDIANTE

$$V = \sum_{t=1}^{n} d_t * [F(t)] \qquad (3.0.1)$$

QUE ES SIMPLEMENTE LA SUMA DE LOS VALORES PRESENTES DE LOS PAGOS EN EFECTIVO REALIZADOS DURANTE UN PERIODO. LA FORMULA DEL FACTOR DE DESCUENTO SE EXPRESA COMO:

$$d_t = (1 + R)^{-1} \qquad (3.0.2)$$

ESTA FORMULA POSEE LA SIGUIENTES PROPIEDADES:

1.- $0 < d_t < 1$. EL VALOR PRESENTE ES MENOR QUE EL VALOR FUTURO.

2.- $d_t < d_{t-1}$. PAGOS EN EFECTIVO MAS ALEJADOS EN EL FUTURO, TIENEN UN VALOR PRESENTE MENOR QUE EL VALOR PRESENTE DE PAGOS MAS CERCANOS.

ALGUNAS OBSERVACIONES HAN DEMOSTRADO QUE LA RELACION EN LA ECUACION (3.0.2) ES MUY RARA EN EL MERCADO FINANCIERO.
VALORES CON DIFERENTES FECHAS DE VENCIMIENTO SON GENERALMENTE DESCONTADOS CON UNA TASA INTERNA DE RETORNO (REDITO AL VENCIMIENTO) DIFERENTE.
EN OTRAS PALABRAS, R EN (3.0.2) SE OBSERVA RARA VEZ EN LA FECHA DE PAGO EN EFECTIVO t. PARA UN ANALISIS GENERAL, LA RELACION FUNCIONAL ENTRE R y t ADQUIERE MAYOR IMPORTANCIA. PARA DEMOSTRAR ESTO Y PARA CONSERVAR LAS PROPIEDADES DEL FACTOR DE DESCUENTO, LA ECUACION (3.0.2) PUEDE SER MODIFICADA ASI:

$$d_t = \frac{1}{[1 + h(0,t)]^t} \qquad (3.0.3)$$

DONDE h(0,t) SE INTERPRETA COMO LA TASA DE RETORNO APROPIADA PARA EL DESCUENTO DEL PAGO EN EFECTIVO [F(t)], LA CUAL TOMA DIFERENTES VALORES PARA DIFERENTES "t's" Y A VECES ES LLAMADA EL PERIODO "DE TENENCIA" DE AHI QUE SE DENOTE CON h, DEL TERMINO INGLES "HOLDING", POR TANTO:

$$[1 + h(0,t)]^t * V = F(t) \qquad (3.0.4)$$

SI EL INSTRUMENTO FINANCIERO ES COMPRADO EN EL TIEMPO 0 AL VALOR V Y EL ACTIVO (CAPITAL) ES TENIDO POR t PERIODOS, ENTONCES SE ACUMULA EN EL VALOR F(t) PARA EL TENEDOR.

LA TASA INTERNA DE RETORNO SOBRE ESTE PERIODO ES h(0,t). EL CERO EN LA EXPRESION INDICA LA FECHA CUANDO LA INVERSION V ES REALIZADA. EL ARREGLO DE LOS VALORES

$$h(0,1),\ h(0,2),\ldots,\ h(0,t),\ldots \qquad (3.0.5)$$

ES EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES. SI $h(0,t) > h(0,t-1)$ PARA TODA t, SE LE DENOMINA COMO UN PERIODO DE DESLIZAMIENTO ASCENDENTE.
SI $h(0,t) < h(0,t-1)$, PARA TODA t, SE DENOMINA COMO UN PERIODO DESCENDENTE.
SI $h(0,t) = h(0,t-1)$, PARA TODA t, EL PERIODO ES CONSTANTE.

SE PUEDE REPRESENTAR A h(0,t) COMO R, DEBIDO A QUE LA TASA DE INTERES EN LA FUNCION DE DESCUENTO (3.0.3) ES INDEPENDIENTE DE t. LA FECHA t CUANDO OCURRE EL PAGO F(t), SE DENOMINA EL PERIODO DE PAGO EN EFECTIVO.
AL PERIODO DE DESLIZAMIENTO DESCENDETE SE LE CONOCE TAMBIEN COMO PERIODO INVERTIDO.

A LOS PERIODOS QUE CRECEN CON t HACIA UN CIERTO PUNTO Y LUEGO DECRECEN CUANDO t CRECE, SON LLAMADOS PERIODOS "OSCILANTES".

ES IMPORTANTE NOTAR QUE h(0,t) ES UNA TASA DE INTERES APLICABLE A UN INTERVALO DE LONGITUD t EN UN CALENDARIO.
EN (3.0.4) ES UNA TASA DE CRECIMIENTO ANUAL DURANTE t AÑOS SI SE UTILIZA t COMO MEDIDA DE CALENDARIO EN AÑOS. POR OTRO LADO, SI SE UTILIZA UNA TASA SEMESTRAL, t ESTA DADO EN PERIODOS SEMESTRALES Y ASI RESPECTIVAMENTE.

EN LA LITERATURA DE FINANZAS, EXISTE EN OCASIONES UNA CONFUSION ACERCA DE COMO ESTAN EXPRESADAS LAS TASAS DE INTERES; AQUI, SE ENTENDERA QUE h(0,t) ES UNA TASA DE INTERES O CRECIMIENTO POR PERIODO PARA t PERIODOS, DONDE LA LONGITUD DE CADA PERIODO CALENDARIO ESTA ASUMIDA.

3.1 TASAS ADELANTADAS.

SUPONGASE QUE UN INVERSIONISTA INVIERTE $1 EN UN INSTRUMENTO FINANCIERO A UN PERIODO. ESTA INVERSION PROMETE UN PAGO DE $[1+h(0,t)] = F(1)$ UN PERIODO DESPUES.
ESTE SERA EL PAGO DE CONTADO EN UN PERIODO DEBIDO A QUE EL VALOR PRESENTE ES $\$1 = F(1) / [1+h(0,t)]$.

SUPONGASE QUE EL PAGO F(1) ES INMEDIATAMENTE REINVERTIDO DURANTE OTRO PERIODO, AL FINAL DE ESTE NUEVO PERIODO, EL PAGO SERA F(2), ENTONCES EL VALOR PRESENTE DE F(2) ES F(1). CONTINUANDO ASI SE PUEDE RELACIONAR F(1) Y F(2) MEDIANTE

$$F(1) = \frac{F(2)}{[1+h(1,2)]} \qquad (3.1.1)$$

DONDE h(1,2) ES LA TASA DE INTERES DE UN PERIODO APLICADO AL INTERVALO DE TIEMPO ENTRE t = 1 y t = 2. EL VALOR PRESENTE DE F(1) SE PUDE EXPRESAR COMO:

$$1 = \frac{F(1)}{1+h(0,1)} = \frac{F(2)}{[1+h(0,1)]*[1+h(1,2)]} \qquad (3.1.2)$$

EXISTEN DOS TASAS DE INTERES DE UN PERIODO CADA UNA EN (3.1.2), PERO ESTAS TASAS, h(0,1) y h(1,2), ESTAN APLICADAS A 2 INTERVALOS DIFERENTES DE TIEMPO.
LA TASA DE INTERES h(1,2) ES LA TASA ADELANTADA DEBIDO A QUE EN EL TIEMPO t=0, ESTA TASA SERA APLICADA A UN PERIODO EN EL FUTURO.

ALTERNATIVAMENTE,UN INVERSIONISTA PUEDE INVERTIR INICIALMENTE $1 EN UN VALOR DE 2 PERIODOS QUE PROMETE UN PAGO AL FINAL DEL SEGUNDO PERIODO.

EN EQUILIBRIO, ESTE PAGO AL FINAL DEL SEGUNDO PERIODO, DEBE SER EL MISMO SI ESE $1 SE INVIERTE EN PERIDOS SUSCESIVOS DE UN PERIODO CADA UNO.

EN EQUILIBRIO Y BAJO CERTEZA, EL RETORNO F(2) DEBE SER EXACTAMENTE EL MISMO PARA CADA UNA DE LAS 2 ESTRATEGIAS.
AQUI, LAS TASAS DE INTERES DEBEN SER TALES QUE, LAS DOS ESTRATEGIAS SEAN EQUIVALENTES.
EL VALOR PRESENTE DE F(2) DEBE SER $1; ESTO ES:

$$1 = \frac{F(2)}{[1+h(0,2)]^2} \qquad (3.1.3)$$

LAS EXPRESIONES (3.1.3) Y (3.1.2) IMPLICAN QUE:

$$[1+h(0,2)]^2 = [1+h(0,1)] * [1+h(1,2)] \quad . \qquad (3.1.4)$$

LA TASA ADELANTADA $h(1,2)$ SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA FUNCION DE LAS TASAS DE INTERES OBSERVADAS EN EL PERIODO INICIAL:

$$[1+h(1,2)] = \frac{[1+h(0,2)]^2}{[1+h(0,1)]} \qquad (3.1.5)$$

LA EXPRESION DEL LADO DERECHO CONTIENE SOLAMENTE LAS TASAS DE INTERES $h(0,1)$ y $h(0,2)$, OBSERVADAS AL TIEMPO $t=0$.
LAS TASAS ADELANTADAS PUEDEN SER INMEDIATAMENTE CALCULADAS DADO UN PERIODO DE TASAS OBSERVADAS INICIALMENTE.

LA ECUACION (3.1.4) ES FACIL DE INTERPRETAR: UNA INVERSION DE $1 INVERTIDA EN UN PERIODO CRECE AL VALOR $1+h(0,1)$ DESPUES DE UN PERIODO. ESTA ACUMULACION REINVERTIDA EN OTRO PERIODO IMPLICA QUE CRECE A LA TASA $h(1,2)$ AL VALOR $[1+h(0,1)] * [1+h(1,2)]$.
EN EL OTRO LADO DE LA ECUACION, UNA INVERSION DE $1 INVERTIDA A DOS PERIODOS CRECE A $[1+h(0,2)]^2$ EN DOS PERIODOS.

EL EQUILIBRIO EN LAS TASAS DE INTERES DEBE SER, TAL QUE LA ACUMULACION DE CADA UNA DE LAS DOS ESTRATEGIAS SEA EQUIVALENTE EN (3.1.4).
CONSIDERANDO A $h(0,2)$ COMO LA TASA DE RETORNO REALIZADA POR PERIODO PARA DOS PERIODOS, EN (3.1.4), $[1+h(0,2)]$ ES LA MEDIA GEOMETRICA DE $[1+h(0,1)]$ y $[1+h(1,2)]$.

LA ECUACION (3.1.4) SE PUEDE EXTENDER A ESTRATEGIAS DE INVERSION MAS COMPLEJAS; DEFINIENDO A LA TASA ADELANTADA $h(\pi,t)$ COMO:

$$[1+h(0,t)]^t = [1+h(0,\pi)]^\pi * [1+h(\pi,t)]^{t-\pi} \qquad 0 < \pi < t \qquad (3.1.6)$$

ESTA ECUACION APARECE EN EQUILIBRIO CUANDO UN INVERSIONISTA INICIALMENTE INVIERTE $1 EN UN INSTRUMENTO FINANCIERO, TENIENDO UN PAGO EN EFECTIVO AL FINAL DE π PERIODOS.
DESPUES DE QUE TRANSCURRIERON LOS π PERIODOS, LA ACUMULACION $[1+h(0,\pi)]^\pi$ ES INVERTIDA A $t-\pi$ PERIODOS PAGANDO EN EFECTIVO AL FINAL DEL PERIODO t.
POR SUPUESTO, EL MISMO RETORNO OCURRE BAJO UNA INVERSON INICIAL EN UN PERIODO t. ES EN ESTA MANERA QUE LAS TASAS ADELANTADAS $h(\pi,t)$, SE PUEDEN DEFINIR PARA TODA π MENOR O IGUAL A t.

BAJO CERTEZA, LAS TASAS ADELANTADAS SERAN LAS TASAS FUTURAS. DADO UN PERIODO INICIAL EN DONDE ESTAS TASAS PUEDEN SER ADELANTADAS. ESTO ES, EN APARIENCIA, QUE EL FUTURO ESTA ENCLAVADO EN EL PRESENTE. SORPRENDENTEMENTE EL CURSO DE LAS TASAS FUTURAS ESTA CONTENIDO IMPLICITAMENTE EN UN TIPO DE TASAS OBSERVADAS.

ASUMIENDO QUE TODAS LAS TASAS DE INTERES SON POSITIVAS, SE SIGUE QUE $d_t < d_{t-1}$.
DADA LA DEFINICION DE d_t EN (3.0.3), SE TIENE QUE:

$$\frac{d_{t-1}}{d_t} = \frac{[1+h(0,t)]^t}{[1+h(0,t-1)]^{t-1}} = [1+h(t,t-1)] > 1 \qquad (3.1.7)$$

LAS CARACTERISTICAS DE d_t COMO FACTOR DE DESCUENTO SE PRESERVAN PERMITIENDO QUE EL PERIODO SEA NO ESTABLE.

POR OTRA PARTE, EN ESTE SISTEMA MAS GENERAL, TODOS LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS SON PERFECTOS SUSTITUTOS BAJO CERTEZA. SI SE INVIERTE $1 EN UN ISTRUMENTO FINANCIERO A UN PERIODO t, ACUMULARA $[1+h(0,t)]^t$ AL FINAL DE ESTE PERIODO. DESPUES DE QUE UN PERIODO HA TRANSCURRIDO, SE PUEDE DESCONTAR ESTE FLUJO A LA TASA DEL PERIODO t-1 PARA DETERMINAR SU VALOR.

CLARAMENTE ESTE VALOR ES

$$\frac{[1+h(0,t)]^t}{[1+h(1,t)]^{t-1}} = [1+h(0,1)] \qquad (3.1.8)$$

EL CUAL ES INDEPENDIENTE DE t, Y DESPUES DE QUE DOS PERIODOS HAN TRANSCURRIDO, EL NUEVO VALOR SERA $[1+h(0,2)]^2$.

TODOS LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS CON EL MISMO VALOR INICIAL TENDRAN EL MISMO VALOR ACUMULADO EN FECHAS FUTURAS.
CLARO ESTA QUE, VIVIENDO BAJO UN MUNDO DE INCERTIDUMBRE COMO ESTE, LAS TASAS FUTURAS NO SERAN IGUALES A LAS TASAS ADELANTADAS ACTUALES QUE EXISTIRAN EN INTERVALOS DE TIEMPO FUTUROS. DE HECHO, EXISTIENDO ESTAS EVIDENCIAS, SE SUGIERE QUE LAS TASAS ADELANTADAS NO SON BUENAS PREDICTORAS DE LAS TASAS FUTURAS.

BAJO INCERTIDUMBRE LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS PUEDEN NO SER PERFECTOS SUSTITUTOS, NO OBSTANTE, LAS TASAS ADELANTADAS OBTENIDAS DE LAS CONSIDERACIONES EN EQUILIBRIO Y BAJO CERTIDUMBRE, JUEGAN UN PAPEL MUY IMPORTANTE BAJO INCERTIDUMBRE, DEBIDO A QUE LA DISTANCIA DEL PERIODO DE ESTAS PREDICCIONES POR TASAS ADELANTADAS SIRVE COMO UN COMPONENTE VARIABLE O ESTOCASTICO EN EL MOMENTO DEL PERIODO SOBRE EL TIEMPO Y SERAN ANALIZADAS DESDE ESTE ENFOQUE.

3.2 EJEMPLOS DEL CALCULO DE LAS TASAS ADELANTADAS.

LAS TASAS ADELANTADAS SE COMPORTAN EN FUNCION DEL PERIODO INICIAL OBSERVADO, LA TABLA 1 (DEL APENDICE) MUESTRA LAS TASAS CALCULADAS DADO UN PERIODO CRECIENTE Y DECRECIENTE; LA PRIMER COLUMNA ENSEÑA EL PERIODO DE VENCIMIENTO, LA SEGUNDA EL PERIODO INICIAL, LA COLUMNA TRES DESCRIBE EL PERIODO QUE EXISTIRA DESPUES DE UN PERIODO SI LAS TASAS FUTURAS SON IGUALES A LAS TASAS ADELANTADAS. EL PRIMER TERMINO DE ESTA COLUMNA, ES LA TASA DE UN PERIODO DESDE EL PRESENTE, Y ASI SUSCESIVAMENTE.

EN GENERAL, LAS TASAS ADELANTADAS SE CALCULAN DE ACUERDO A LA SIGUIENTE FORMULA:

$$[1+h(\pi,t+\pi)] = \frac{[1+h(0,t+\pi)]^{t+\pi}}{[1+h(0,\pi)]^{\pi}} \qquad (3.2.1)$$

DONDE π ES EL PERIODO EN EL CUAL LA TASA ADELANTADA COMIENZA. ESTA FORMULA ES UNA VARIACION DE (3.1.6).

PARA UN PERIODO CRECIENTE, SE DEDUCE QUE LAS TASAS DE INTERES SOBRE EL MISMO PERIODO DE VENCIMIENTO TIENDEN GENERALMENTE, PERO NO SIEMPRE, A INCREMENTARSE CUANDO TRANSCURRE EL TIEMPO. CONSIDERESE QUE LA TASA DE UN PERIODO ES 30%, EN UN PERIODO CRECE A 31%, EN EL SIGUIENTE, AUMENTA A 31.86% Y ASI SUSCESIVAMENTE. LA TASA A UN PERIODO AUMENTA AL PASO DEL TIEMPO HASTA EL OCTAVO PERIODO, DESPUES LA TASA DECRECE.
LA TASA A UN PERIODO SE INCREMENTA HASTA A UNA TASA DECRECIENTE EN EL PERIODO OCHO. LAS TASAS A DOS PERIODOS SE INCREMENTAN HASTA UNA TASA DECRECIENTE EN EL SEPTIMO PERIODO.

LAS TASAS A TRES PERIODOS SE INCREMENTAN HASTA UNA TASA DECRECIENTE EN EL SEXTO PERIODO. EL PERIODO INICIAL SE INCREMENTA CUANDO LA TASA DECRECE. ESTO CAUSA QUE EL PERIODO EN LOS TIEMPOS SIBSECUENTES, AUMENTE GENERALMENTE HASTA SER ESTABLE.

EXISTEN EXCEPCIONES COMO TODO, EL PERIODO QUE COMIENZA EN t=6, "OSCILA" Y LUEGO COMIENZA A DECRECER. SI EL PERIODO SE INCREMENTA SOBRE OTROS TIEMPOS, LA TASA A CORTO PLAZO DECRECERA EN LOS PERIODOS SUBSECUENTES.

PARA EL PERIODO DECRECIENTE, LAS TASAS ADELANTADAS SE COMPORTAN DE MANERA INVERSA. LA TASA A UN PERIODO DECRECE SISTEMATICAMENTE HASTA EL TIEMPO t=8. EL PERIODO DESPUES DEL PRIMER PERIODO, TIENDE A TENER MENOR NIVEL. EVENTUALMENTE, LA EXCEPCION SE REFLEJA EN EL TIEMPO t=4, CUANDO LA "OSCILACION" HACE SU APARICION. EL PERIODO TIENDE A SER IRREGULAR.

EN GENERAL, LAS TASAS A CORTO PLAZO DECRECERAN EN PERIODOS CERCANOS A t=0.

LOS PERIODOS ESTABLES TIENEN TASAS ADELANTADAS IGUALES A LA TASA INICIAL. SI $h(0,t)=0.30$ PARA TODA t, ENTONCES, $(h(\pi,t)) = 0.30$ PARA TODA $\pi < t$.
BAJO CERTIDUMBRE, EL CURSO DE LAS TASAS ADELANTADAS ESTA COMPLETAMENTE DESCRITO EN EL PERIODO INICIAL, PUDIENDO SER CALCULADAS DE ESTA MANERA. EL COMPORTAMIENTO DE LAS TASAS EN EL FUTURO, PUEDE SEGUIR UN MODELO IRREGULAR DE PERIODOS REMOTOS EN ADELANTE; PERO EN EL FUTURO INMEDIATO, LAS TASAS TENDERAN A INCREMENTARSE (DECREMENTARSE) SI EL PERIODO SE INCREMENTA (DECREMENTA).

3.3 CURVAS DE REDITO.

DADO QUE EL FACTOR DE DESCUENTO EN LA ECUACION (3.0.3) ESTA BIEN DEFINIDO PARA PERIODOS NO ESTABLES, LA TASA INTERNA DE RETORNO JUEGA UN PAPEL MUY IMPORTANTE EN EL ANALISIS DE UN PORTAFOLIO. UTILIZANDO LOS FACTORES DE DESCUENTO EN (3.0.3) SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$p = [100*[C/2] * \sum_{t=1}^{2M} [1+h(0,t)]^{-t} + 100*(1+[h(0,2M)^{-2M}] \quad (3.3.1)$$

DONDE $h(0,t)$ ES AHORA UNA TASA SEMESTRAL, $100*(C/2)$ ES EL BONO CON CUPON CERO PAGADERO SEMESTRALMENTE Y 100 ES EL VALOR NOMINAL DEL BONO.

LA ECUACION (3.3.1) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$p = [100*(C/2) * \sum_{t=1}^{2M} [1+(R/2)]^{-t}] + 100*[1+(R/2)]^{-2M} \quad (3.3.2)$$

DONDE $R/2$ ES LA TASA INTERNA DE RETORNO SEMESTRAL (Y R LA TASA INTERNA DE RETORNO ANUAL). DADOS C, M Y EL PERIODO, SE PUEDE CALCULAR p EN (3.3.1). EN ESTE SENTIDO, SE OBSERVA QUE (3.3.1) IMPLICA QUE ALGUNA TASA INTERNA DE RETORNO ESTA IMPLICITAMENTE EXPRESADA EN (3.3.2).

A MENUDO EN REPORTES ESTADISTICOS, SOLO SON REPORTADAS LAS TASAS DE RETORNO DE BONOS DISPONIBLES. LOS BONOS CON CUPON CERO NO ESTAN DISPONIBLES HOLGADAMENTE EN TODOS LOS VENCIMIENTOS.
AL DAR UN RANGO COMPLETO DE LOS REDITOS CON RESPECTO AL VENCIMIENTO DE ESTOS BONOS, SE PUEDE DETERMINAR UN PERIODO FUNDAMENTAL DE LAS TASAS DE INTERES.

SEAN R1', R2', ..., Rt', ... LAS TASAS INTERNAS DE RETORNO SEMESTRALES DE LAS INVERSIONES EN EL TIEMPO t=0. EL CORRESPONDIENTE ACTIVO DE LOS PRECIOS SE PUEDE EXPRESAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$100 = p_1 = [100*(R_1')*(1+[R_1'])^{-1}] + 100 * (1+R_1')^{-1}$$

$$100 = p_2 = [100*(R_2')* ((1+R_2')^{-1}+(1+R_2')^{-2})) + 100*(1+R_2')^{-2}$$

$$\vdots \qquad (3.3.3)$$

$$100 = p_{(2M)} = [100* (R_{2M}')* \sum_{t=1}^{2M} [1+R_{2M}']^{-t}] + 100*(1+R_{2M}')^{-2M}$$

ESTA SERIE DE ECUACIONES SE ASEMEJAN A (3.3.2) PARA VARIOS VENCIMIENTOS. PUESTO QUE TODOS LOS BONOS SON REDIMIBLES A LA PAR, TODOS TIENEN EL MISMO PRECIO DE 100, LA TASA SEMESTRAL C/2 QUE ES IGUAL A LA TASA INTERNA DE RETORNO SEMESTRAL Rt'. LA EXPRESION DE Rt' COMO UNA FUNCION DEL PERIODO SE LE CONOCE COMO CURVA DE REDITO PAR.

EL BONO REDIMIBLE A LA PAR SEMESTRALMENTE CON PRECIO p_1=100, POSEE UNA TASA INTERNA R_1'. OBSERVANDO QUE ESTE ES UN BONO CON CUPON CERO ENTONCES h(0,1) = R_1'.
EL BONO A UN PERIODO CON PRECIO p_2=100 ES CON CUPON NO CERO. AL DARSE R_2' CUALQUIERA, SE PUEDE CALCULAR h(0,2), CONOCIENDO EL PRECIO p_2, SE PUEDE EXPRESAR:

$$100 = p_2 = [100 * (R_2') * ([1+h(0,1)]^{-1}+[1+h(0,2)]^{-2})] + 100 * [1+h(0,2)]^{-2} \qquad (3.3.4)$$

SI SE CONOCE R_2' Y h(0,1), SE CALCULA EL VALOR DE h(0,2) EN LA ECUACION (3.3.4) PARA EL VALOR p_3 LA ECUACION SERA:

$$100 = p_3 = [100 * (R_3') * \sum_{t=1}^{3} (1+h(0,t))]^{-t} + 100*[1+h(0,3)]^{-3} \qquad (3.3.5)$$

AHORA, CONOCIENDO R_3', h(0,1) y h(0,2), SE PUEDE CALCULAR EL VALOR DE h(0,3).
ESTA ECUACION SE PUEDE EXTENDER HASTA EL ULTIMO PERIODO (h(0,1), h(0,2), ..., h(0,2M)), QUE ES DETERMINADO POR LA CURVA DE REDITO PAR.

LAS CURVAS DE REDITO EXISTEN PARA OTRA CLASE DE BONOS; EN GENERAL, EN EL LIMITE CUANDO LA TASA DE CUPON TIENDE A CERO, LA CURVA DE REDITO SE ACERCARA AL PERIODO DE LA TASA DE INTERES.

LAS HIPOTECAS TAMBIEN POSEEN CUPONES SESGADOS. EL PRECIO DE UNA HIPOTECA ES:

$$p = F * [\sum_{t=1}^{M} (1+R')^{-t}] \qquad (3.3.6)$$

DONDE F ES EL PAGO MENSUAL, M EL NUMERO DE MESES AL VENCIMIENTO Y R' LA TASA DE RETORNO MENSUAL. LA ECUACION (3.3.6) PUEDE ESCRIBIRSE COMO:

$$p = F * [\sum_{t=1}^{M} (1+h(0,t)^{-t})] \qquad (3.3.7)$$

DONDE h(0,t) ES LA TASA INTERNA DE RETORNO MENSUAL EN LA EXTENSION DEL PERIODO DEL INTERVALO t DADO EN MESES.
CONOCIENDO EL PERIODO, EL PAGO MENSUAL F SE PUEDE UTILIZAR (3.3.7) PARA CALCULAR EL PRECIO p. ENTONCES, AL CONOCERLO SE PUEDE UTILIZAR (3.3.6) PARA CALCULAR R'.

EL CUPON SESGADO ES ENTONCES h(0,M) - R', EXPRESADO EN TASAS MENSUALES. KAUFMAN Y MORGAN EN 1980, MOSTRARON QUE EL CUPON SESGADO DE LAS HIPOTECAS TIENDE A SER MAS GRANDE QUE EL DE LOS BONOS; ESTO SE DEBE A QUE EL PAGO GLOBAL DE UN BONO DEMASIADO CERCANO, SE ASEMEJA A UN BONO CON CUPON CERO. MORGAN EN 1978, DEMOSTRO QUE EL CUPON SESGADO PARA LAS HIPOTECAS SE INCREMENTABA CONFORME A LA LONGITUD DEL PERIODO.

PARA ILUSTRAR EL CUPON SESGADO DE UNA HIPOTECA, HAY QUE NOTAR QUE LAS DOS ECUACIONES, (3.3.6) Y (3.3.7), IMPLICAN QUE:

$$\sum_{t=1}^{M} (1+R')^{-t} = \sum_{t=1}^{M} [1+h(0,t)]^{-t} \qquad (3.3.8)$$

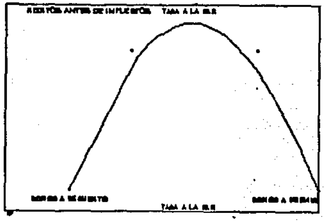
POR LO QUE CONOCIENDO EL PERIODO h(0,t) t=1,2,...,M, EXPRESADO COMO EN EL LADO DERECHO DE LA ECUACION, LA TASA INTERNA DE RETORNO PUEDE SER CALCULADA COMO EN EL LADO IZQUIERDO DE LA ECUACION.
EL CUPON SESGADO PARA UNA HIPOTECA CON VENCIMIENTO A M MESES ES h(0,M) - R'.

LAS TABLAS 3 Y 4 (DEL APENDICE) ILUSTRAN EL CALCULO DEL SESGO. EN LA PRIMERA EL PERIODO UTILIZADO ES EL MISMO QUE EN EL DE LA TABLA 2 (DEL APENDICE) PARA CALCULAR LA CURVA DEL REDITO.

ESTE PERIODO MUESTRA LOS REDITOS ANUALES EN UNA BASE CALCULADA SEMESTRALMENTE. UNA INTERPOLACION LINEAL SE UTILIZO PARA TRANSFORMAR ESTO EN UNA BASE APLICADA MENSUALMENTE.

ESTA INTERPOLACION SE ILUSTRA EN LA FIGURA 3.1 CON EL REDITO A 6 MESES, COMO EN LAS TABLAS 2 Y 3 (DEL APENDICE).

FIGURA 3.1 REDITOS ANTES DE IMPUESTOS EQUIVALENTES A LOS REDITOS DESPUES DE IMPUESTOS



SE ILUSTRAN COMO PUNTOS SOBRE LA CURVA. LOS REDITOS PARA MESES ENTRE FECHAS QUE ESTAN CONECTADAS; POR EJEMPLO LA PRIMER TASA SEMESTRAL ES 9% (BASE ANUAL) Y LA TASA A 12 MESES ES 9.41%. LA TASA DEL SEPTIMO MES (BASE ANUAL) ES

$$9.00 + \frac{(9.41 - 9)}{6} = 9.00 + .0683 = 9.0683\%$$

Y ASI SUSCESIVAMENTE.

PARA CAMBIAR DE REDITOS ANUALES A MENSUALES, SIMPLEMENTE SE DIVIDE ENTRE 12, ENTONCES EL REDITO AL SEPTIMO MES EN UNA BASE MENSUAL ES 9.0683/12 = .7557%, Y EL VALOR DEL FLUJO MENSUAL OCURRIDO EN ESE MISMO MES ES $F/[(1.007557)^7]$.

ASI SE UTILIZA EL MISMO METODO PARA FLUJOS MENSUALES EN OTRAS FECHAS; LOS REDITOS EN LAS HIPOTECAS SE OBTIENEN DEL PERIODO ILUSTRADO EN LA TABLA 3 (DEL APENDICE) PARA VENCIMIENTOS CON 6 MESES ALEJADOS. OTRA VEZ, SE ENCUENTRA QUE LA CURVA DE REDITO CORRE SOBRE EL PERIODO. LA DIFERENCIA ES QUE EL CUPON SESGADO ESTA EXPRESADO EN PUNTOS BASICOS EN LA CUARTA COLUMNA. UNA COMPARACION CON EL CUPON SESGADO PARA LOS BONOS EN LA TABLA 2 (DEL APENDICE) MUESTRA QUE EL SESGO DE LAS HIPOTECAS ES MUCHO MAYOR. COMO TODO, EL CUPON SESGADO DE LAS HIPOTECAS TAMBIEN REFLEJA EL COMPUTO MENSUAL CONSIDERANDO QUE EL SESGO DE LOS BONOS REFLEJA SOLO EL COMPUTO SEMESTRAL.

UNA COMPARACION DIRECTA ENTRE LOS CUPONES SESGADOS DE LOS INSTRUMENTOS DE INVERSION, NECESITA QUE LOS FLUJOS DE LOS DOS INSTRUMENTOS SEAN CALCULADOS EN LA MISMA MEDIDA.

LA ULTIMA COLUMNA DE LA TABLA 3 (DEL APENDICE) MUESTRA EL CUPON SESGADO DE LAS HIPOTECAS CON FLUJOS SEMESTRALES (EL MISMO FLUJO QUE TIENEN LOS BONOS). EL COMPUTO MENSUAL CUENTA SOLO UNA PEQUEÑA PORCION DEL CUPON SESGADO, VIENDOSE CLARAMENTE QUE EL CUPON SESGADO DE LAS HIPOTECAS ES MAS GRANDE QUE EL DE LOS BONOS.

PARA PERIODOS MUY LARGOS, EL CUPON SESGADO DE UN HIPOTECA PUEDE SER MUY GRANDE. LA TABLA 4 (DEL APENDICE) ILUSTRA ESTO EL PERIODO SE INCREMENTA LINEALMENTE DESDE 9% HASTA EL 12.8% SOBRE UN PERIODO DE 10 AÑOS. EL CUPON SESGADO ES DE 161 PUNTOS PARA UNA HIPOTECA A 10 AÑOS PROMETIENDO UN PAGO DE CONTADO, Y DE 156.7 PUNTOS PARA HIPOTECAS QUE PROMETEN PAGOS SEMESTRALES.

MORGAN, EN 1978, MOSTRO QUE LOS CUPONES SESGADOS DE UNA HIPOTECA, SE INCREMENTAN CON LA LONGITUD DEL PERIODO DE PAGO. ESTO ES, QUE SI SE ELEVA EL PERIODO EN LA COLUMNA DOS POR UN NUMERO DE PUNTOS INDEXADO PARA TODO VENCIMIENTO, EL CUPON SESGADO EN LA COLUMNA CUATRO, SE INCREMENTARA.

3.4 IMPLICACION DEL CUPON SESGADO.

EN LOS MERCADOS FINANCIEROS, LA TASA INTERNA DE RETORNO ES EL INDICADOR UTILIZADO MAS COMUNMENTE. EL CUPON SESGADO DISTORSIONA ESTA MEDIDA DE PODER. UN CUPON SESGADO POSITIVO (NEGATIVO), IMPLICA QUE EL PODER DE CRECIMIENTO ES MAYOR (MENOR) QUE LA TASA INTERNA DE RETORNO. POR EJEMPLO, EN LA TABLA 4 (DEL APENDICE) EL PERIODO MUESTRA QUE LA TASA DE RETORNO DE UN BONO CON CUPON CERO A 10 AÑOS ES 12.8%, CONSIDERANDO QUE LA TASA INTERNA ES 11.19%, AMBAS CALCULADAS MENSUALMENTE.

SI TODOS LOS PAGOS MENSUALES DE UNA HIPOTECA SON REINVERTIDOS CUANDO ESTOS OCURREN A LAS TASAS ADELANTADAS, DESPUES DE 10 AÑOS LA HIPOTECA CRECERA HASTA LA TASA DEL 10% POR AÑO CALCULADO MENSUALMENTE.

EN EQUILIBRIO Y BAJO CERTEZA, TODOS LOS INSTRUMENTOS DE INVERSION SON PERFECTOS SUSTITUTOS. ESTO SIGNIFICA QUE UNA CONTINUA REINVERSION DEL PAGO EN EFECTIVO DE UNA HIPOTECA, OBTIENE EL VALOR DE UNA INVERSION ENCONTRADA EN CADA UNA DE LAS FECHAS EN EL FUTURO, QUE ES EXACTAMENTE EQUIVALENTE AL VALOR DE UN BONO CON CUPON CERO EN LA MISMA FECHA, SI LOS MONTOS EQUIVALENTES FUEREN INVERTIDOS INICIALMENTE EN AMBOS INSTRUMENTOS DE INVERSION.

LA TASA INTERNA NO INDICA LA TASA CRECIENTE DE UNA INVERSION ENCONTRADA BAJO UN PERIODO ESTABLE. PARA PERIODOS CON UN CRECIMIENTO BRUSCO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO, COMO LO MUESTRA LA TABLA 4 (DEL APENDICE), SE PUEDE CONSIDERAR MENOR QUE LA TASA INTERNA VERDADERA SI LAS ACTUALES TASAS ADELANTADAS FUESEN LAS ACTUALES TASAS FUTURAS.
PARA MOSTRAR ESTA DIFERENCIA, SUPONGASE QUE $10'000,000 SE INVIERTEN EN UN BONO CON CUPON CERO AL 12.8% DURANTE 10 AÑOS CON CALCULO MENSUAL. EL VALOR SERA

$$10'000,000 * (1 + [.128/12])^{120} = \$35'723,420$$

DE OTRA MANERA, SI ES UNA INVERSION DE UN BONO CON CUPON CERO AL 11.19% , EN 10 AÑOS SERA

$$10'000,000 * (1 + [.1119/12])^{120} = \$30'459,562$$

LA DIFERENCIA EN LA ACUMULACION DE $5'263,858 ESTRICTAMENTE DEBIDA AL CUPON SESGADO Y MUESTRA CLARAMENTE QUE LA TASA INTERNA QUEDA SUBSTANCIALMENTE BAJO EL CRECIMIENTO POTENCIAL DEL VALOR DE UNA HIPOTECA INVERTIDA.

3.5 MEDIDA DEL PERIODO.

LAS OBSERVACIONES EN LAS TASAS DURANTE EL PERIODO (h(0,t)), NO SON SENCILLAS, LA MAYORIA DE LOS VENCIMIENTOS VIENEN SIN SU VALOR; LOS BONOS CON CUPON CERO EN CIRCULACION, SON MUY POCOS Y LOS BONOS PROPUESTOS POR OMISION COMO LOS BONOS CORPORATIVOS QUE CONTIENEN UN PREMIO INCLUIDO, SE PUEDEN VER COMO UNA ADICION A LA TASA LIBRE, ESTO ES, QUE PARA DETERMINAR EL RENDIMIENTO (h(0,t)), SE DEBE PRIMERO, ESTIMAR EL PROMEDIO LO CUAL NO SIEMPRE ES SENCILLO.
POR OTRO LADO, LAS TASAS INTERNAS DE RETORNO DE LOS VALORES DEL GOBIERNO EN CIRCULACION SE PUEDEN CALCULAR CON UNA LISTA DE PRECIOS PUBLICADOS POR EL MISMO.

3.6 CUPON SESGADO.

COMO SE VIO ANTERIORMENTE, SE SABE QUE EL CUPON SESGADO ES TAN GRANDE (EN VALOR ABSOLUTO) COMO GRANDE ES LA TASA DEL CUPON, ESTO ES, EN AUSENCIA DE OTROS EFECTOS QUE CONTRIBUYAN AL SESGO, SE PUEDE ESPERAR QUE LOS BONOS CON PREMIO POSEAN UNA TASA INTERNA MAS BAJA QUE LOS BONOS CON DESCUENTO CON PERIODOS DE DESCUENTO ASCENDENTE.

3.7 IMPUESTOS PREFERENTES.

EL GOBIERNO FEDERAL COBRA IMPUESTOS SOBRE LOS REDITOS DE LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS A UNA TASA ORDINARIA. ESTAS PUEDEN VARIAR SUSTANCIALMENTE ENTRE LOS INVERSIONISTAS CONTRIBUYENTES.

COMO SEA, EL GOBIERNO COBRA IMPUESTOS DE LA GANACIA ENTRE LA COMPRA Y VENTA DE LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS INVERTIDOS A UNA TASA QUE PRODUCE ESA GANANCIA.

ESTA ULTIMA TASA PARA MUCHOS CONTRIBUYENTES ES MENOR QUE LA TASA DE IMPUESTO SOBRE LA RENTA. ESTA DIFERENCIA ENTRE LAS TASAS SIGNIFICA QUE LOS BONOS CON DESCUENTO POSEEN UNA VENTAJA PREFERENCIAL SOBRE LOS BONOS A LA PAR, DEBIDO A QUE LA PARTE DE DESCUENTO QUE CONSTITUYE EL RETORNO, ESTA TASADA EN UNA TASA MENOR QUE LA DE LOS DEMAS CONTRIBUYENTES.
LOS INVERSIONISTAS CONTRIBUYENTES ESTAN DISPUESTOS A ACEPTAR UN REDITO DE LA PRETASA MENOR AL COMPRAR ESTOS. SI LA TASA INTERNA NO CAMBIA CON EL TIEMPO, EL PRECIO DE UN BONO CON DESCUENTO SE INCREMENTARA AL PASO DEL TIEMPO HASTA QUE SEA IGUAL AL VALOR NOMINAL AL MOMENTO DEL VENCIMIENTO.

HACIENDO CASO OMISO DE QUE LAS TASAS DE INTERES CAMBIAN CON EL TIEMPO, SI TALES BONOS SE MANTIENEN HASTA SU VENCIMIENTO, UNA PARTE DEL RETORNO CRECIENTE ESTA EN EL PRECIO. ESTE VALOR ESTA TASADO DE ACUERDO A LA TASA DE IMPUESTO DEL CAPITAL GANADO; VISTO QUE TODAS LAS TASAS DE CUPON RECIBIDAS CUANDO EL TIEMPO PASA, ESTA CALCULADO A UNA TASA ORDINARIA DE IMPUESTO.

EN EQUILIBRIO, LOS INVERSIONISTAS CONTRIBUYENTES ESTAN INTERESADOS EN EL RETORNO DESPUES DE IMPUESTOS DESDE LA PERSPECTIVA DEL PAGADOR MARGINAL, LOS REDITOS DE LOS DIFERENTES INSTRUMENTOS DE INVERSION QUE TIENEN EL MISMO VENCIMIENTO TENDERAN A EQUILIBRARSE HASTA QUE LOS RETORNOS DESPUES DE IMPUESTOS SEAN LOS MISMOS.

SI LA TASA MARGINAL DE IMPUESTO A PAGAR EXCEDE LA TASA DE IMPUESTOS DEL PERIODO DEL CAPITAL GANADO, ENTONCES EL REDITO DE LA TASA INTERNA DEL PREIMPUESTO PARA LOS BONOS A LA PAR, DEBE EXCEDER AL REDITO DE LAS MISMA TASA PARA LOS BONOS CON DESCUENTO CON EL MISMO VENCIMIENTO.

EL REDITO DEL PREIMPUESTO ACEPTADO SOBRE LOS BONOS A PREMIO NO ES MENOR QUE SOBRE LOS BONOS A LA PAR.
LOS REDITOS ESTAN DETERMINADOS, ASI QUE LOS BONOS TENDRAN IGUALES TASAS DE RETORNO DESPUES DE IMPUESTOS.

LA PORCION DE LA CURVA ATRIBUIDA A LOS BONOS CON PREMIO, PRODUCE UN DESLIZAMIENTO ASCENDENTE EN VISTA DE LAS DOS CONSIDERACIONES SOBRE EL RIESGO Y LOS COSTOS DE LAS TRANSACCIONES DESCRITAS ANTERIORMENTE.
ESTAS VARIACIONES EN LOS REDITOS DE LOS BONOS CON EL MISMO VENCIMIENTO, PUEDEN AYUDAR A EXPLICAR LAS DIFERENCIAS ENTRE LOS REDITOS.

3.8 LLAMAMIENTO.

ALGUNOS BONOS DE LA TESORERIA SON CANJEABLES A LA PAR DESPUES DE UNA FECHA FUTURA CONOCIDA COMO FECHA DE LLAMAMIENTO. ESTA FECHA ESTA DADA A 5 Y 10 AÑOS ANTES DE QUE EL BONO VENZA.
SI UN BONO ES LLAMADO, ESTO SIGNIFICA QUE LA TESORERIA PUEDE LLAMAR O REDIMIR EL BONO AL VALOR NOMINAL EN O DESPUES DE LA FECHA DE LLAMO. SI POR EJEMPLO, UN BONO LLAMADO ES VENDIDO AL PRECIO DE PREMIO DE $110 EN EL MERCADO Y ES POSTERIOR A LA FECHA DE LLAMO, LA TESORERIA PUEDE LLAMAR EL BONO Y PAGAR SOLO $100, PUDIENDOLO VOLVER A EMITIR COMO UN BONO A LA PAR QUE TENDRA UNA TASA DE CUPON MENOR Y ESO SALVA A LA TESORERIA DE ALGUNOS COSTOS DE INTERES.

SI LOS BONOS NO ESTAN EN PELIGRO DE SER LLAMADOS, DEBIDO A QUE LA FECHA DE LLAMO ES DEMASIADO ALEJADA, ESTOS BONOS PODRAN SER VENDIDOS CON PREMIO.
LA TESORERIA RUTINARIAMENTE CONSIDERA ESTOS BONOS TENIENDO UN VENCIMIENTO IGUAL EN LA FECHA DE LLAMO, PORQUE SI LAS TASAS DE INTERES NO VARIAN, ESTOS BONOS PROBABLEMENTE SERAN LLAMADOS EN ESA FECHA AL 100%, JUSTO COMO SI LA FECHA DE LLAMO FUESE LA DE VENCIMIENTO.

3.9 BONOS CON FLUJO.

ALGUNOS VALORES DE LA TESORERIA CON UN PERIODO DEMASIADO LARGO, EMITIDOS HACE 20 AÑOS O MAS, TENIAN UNAS TASAS DE CUPON EXTREMADAMENTE BAJAS CON RESPECTO A OTROS BONOS. ESTO SIGNIFICA QUE TALES BONOS SE DEBEN VENDER CON DESCUETO. MUCHOS DE ESTOS BONOS SE PUEDEN COLOCAR A LA PAR PARA PAGAR LOS IMPUESTOS FEDERALES, SI EL DUEÑO O TENEDOR MURIESE AL MOMENTO.

POR EJEMPLO, SUPONGASE QUE UNA DEUDA POR IMPUESTOS ES DE $10'000,000 Y EL DUEÑO FALLECIESE Y QUE ESTOS BONOS FUERON VENDIDOS EN EL MERCADO A $8'500,000. ESTOS PUEDEN SER UTILIZADOS PARA SUFRAGAR LOS IMPUESTOS DEL GOBIERNO QUE SALVARON $1'500,000, DONDE EL IMPUESTO DEL DINERO FUESE AUMENTADO EN OTRA PARTE.

DESDE QUE TALES BONOS TUVIERON UN VALOR ADICIONAL PARA EL INVERSIONISTA QUE PREVIO SU MUERTE, ESTE INVERSIONISTA ESTA DISPUESTO A PAGAR MAS POR ELLOS QUE POR OTRO TIPO DE BONOS, AUNQUE GANASE UN REDITO MENOR. ENTONCES, EL PRECIO DE ESTOS BONOS SE INCREMENTARA PARA ESTE INVERSIONISTA CONTRIBUYENTE ESPECIAL Y LOS BONOS TENDERAN A SER VENDIDOS A REDITOS MUY BAJOS.

LOS DEMAS ASPECTOS DE LOS VALORES DE LA TESORERIA HACEN DIFICIL EXPLICAR LA IMPLICACION DEL PERIODO EN UN DIAGRAMA DE DISPERSION DE LOS REDITOS.

LOS INTENTOS PARA CREAR UN RANGO DE LOS METODOS BASICOS A LOS METODOS MUY SOFISTICADOS; LA OBTENCION DE LOS METODOS UTILIZADOS DEPENDE DE COMO SE OBTUVIERON Y ACOMODARON LOS DATOS.
SI SE REQUIERE DE DETALLES FINOS PARA EVITAR LOS ERRORES DE MEDICION (OBSERVACION) EN LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS, SE NECESITA DE TECNICAS MAS SOFISTICADAS. DE NO SER ASI, TECNICAS MENOS EXACTAS PUEDEN SER SUFICIENTES.

CONSIDERENSE ALGUNOS DE LOS METODOS MENOS SOFISTICADOS, POR EJEMPLO, BRADLEY Y CRANE (1973) AJUSTARON LA ECUACION

$$Ln\,(1+R_m) = a + (b_1 * M) + (b_2 * Ln(M)) \qquad (3.9.0.1)$$

CON LA REGRESION POR MINIMOS CUADRADOS $Ln(1+R_m)$ ES EL LOGARITMO NATURAL DE 1 MAS EL REDITO DEL VENCIMIENTO M; Ln(M) ES EL LOGARITMO NATURAL DEL VENCIMIENTO; a, b_1 , b_2 , SON LOS PARAMETROS.
ESTA CURVA NO ES TOMADA EN CUENTA POR EL CUPON SESGADO, LAS DIFERENCIAS DE LOS IMPUESTOS, EL LLAMAMIENTO O LOS BONOS CON FLUJO.
SOLO MUESTRA UNA ROBUSTA RELACION ENTRE EL REDITO Y EL VENCIMIENTO. ESTA ECUACION EN OCACIONES ES MEJOR APLICARLA A ACTIVOS ESPECIALES DONDE LOS DATOS ESTAN DADOS DE FORMA TAL, QUE LOS EFECTOS ESPECIALES HAN SIDO ELIMINADOS. POR EJEMPLO, SI SE APLICA ESTA REGRESION A BONOS CON REDITOS A LA PAR, SE SABE DE ANTEMANO QUE EL CUPON SESGADO ESTA RESTRINGIDO DE FORMA QUE PUEDE ATRIBUIRSE A BONOS A LA PAR.

LA ECUACION EN BRADLEY-CRANE, ES UN METODO PARA SUAVIZAR ESTA RELACION Y PARA EXTENDER ESTO A TODOS LOS VENCIMIENTOS. AUNQUE BRADLEY Y CRANE NO LO HICIERON, SE PUEDE UTILIZAR PARA ESTIMAR LA CURVA DEL REDITO PAR PARA OBTENER EL PERIODO TAL COMO SE OBTUVO ANTERIORMENTE.

ECHOLS Y ELLIOT (1976), UTILIZARON LA ECUACION

$$Ln(1+R_i) = a+(b_1 * (1/M_i))+(b_2 * (M))+(b_3 * C_i) \qquad (3.9.0.2)$$

DONDE R_i ES EL REDITO AL VENCIMIENTO, M_i EL VENCIMIENTO Y C_i LA TASA DE CUPON PARA EL BONO "i". ESTA ECUACION SE PUEDE APLICAR A TODO TIPO DE BONOS, NO SOLO PARA LOS QUE SON A LA PAR.

HABIENDO EFECTUADO LA REGRESION PARA OBTENER LOS VALORES DE a, b_1, b_2 Y b_3, SE PUEDE PERMITIR QUE C_i SEA CERO, ENTONCES LA REGRESION PROPORCIONARA EL PERIODO CORRESPONDIENTE.

LA RELACION NO TOMA EN CUENTA LOS EFECTOS DEL LLAMAMIENTO, DIFERENCIAL DE IMPUESTOS O IMPUESTOS ESTATALES. LA ECUACION SE APLICA MEJOR A DATOS QUE DE ANTEMANO ELIMINARON LOS EFECTOS ANTERIORMENTE DESCRITOS POR OTROS METODOS.

COHEN, KRAMER Y WAUGH (1966), AJUSTARON UNA VARIEDAD DE ECUACIONES PARA DIAGRAMAS DE DISPERSION. FUERON LOS PRIMEROS EN SUGERIR QUE SE UTILIZARAN LAS TECNICAS DE REGRESION PARA OBTENER LA CURVA DEL REDITO. SUS ECUACIONES CONSISTEN EN ESPECIFICAR EL REDITO AL VENCIMIENTO O DE SU LOGARITMO, COMO UNA FUNCION DEL VENCIMIENTO; EL CUADRADO DE ESTE Y EL CUADRADO DEL LOGARITMO DEL VENCIMIETO.

DE SUS VARIAS ECUACIONES, LA ECUACION

$$R_m = a + (b*M) + (C*[Log(m)]^2) \qquad (3.9.0.3)$$

ES LA QUE MEJOR AJUSTA LOS DATOS. CABE SEÑALAR QUE NO REALIZARON ESFUERZOS PARA SUPRIMIR LOS EFECTOS ESPECIALES.

APROXIMACIONES MAS SOFISTICADAS PARA MEDIR EL PERIODO ESTAN INCLUIDAS EN LOS TRABAJOS DE McCULLOCH (1971), (1975); CARLETTON Y COUPER (1976) Y HOULET (1980).

3.9.1 McCULLOCH.

LA METODOLOGIA GENERAL DE McCULLOCH FUE EXPUESTA EN SU TRABAJO DE 1971 Y LO EXTENDIO EN 1975 PARA INCLUIR LOS EFECTOS DEL DIFERENCIAL DE IMPUESTOS.
ESTIMO QUE LA FUNCION DE DESCUENTO $\delta(t)=1/[1+h(0,t)]$, BAJO EL SUPUESTO DE CONTINUIDAD, TRANSFORMO LA FUNCION ESTIMADA DEL PERIODO; ASI LA FORMA GENERAL DE LA FUNCION DE DESCUENTO ESPECIFICA QUE $\delta(t)$ ES UNA RELACION CUADRATICA EN t; ENTONCES, EN EL INTERVALO $t_0 \leq t \leq t_1$ RESULTA QUE

$$\delta(t) = a_{01} + (b_{01} * (t)) + (c_{01} * [t^2])$$

EL PROCESO DE ESTIMACION CONSISTE EN DETERMINAR LOS PARAMETROS DE LA FUNCION SIN ESTE INTERVALO INMEDIATO $t_1 \leq t \leq t_2$ DONDE a_{12}, b_{12} Y c_{12}, SON LOS PARAMETROS Y SE REQUIERE QUE SEAN TALES QUE, HAGAN QUE $\delta(t)$ TENGA EL MISMO VALOR EN t_1.

LOS INTERVALOS SON PEQUEÑOS EN EL EJE DEL VENCIMIENTO, DONDE EXISTE UN GRAN NUMERO DE OBSERVACIONES; ESTO EXPRESA EL MEJOR AJUSTE (O RESOLUCION) DE LOS INTERVALOS DE VENCIMIENTO, DENTRO DE LOS CUALES SE TIENE AL QUE CONTIENE MAYOR INFORMACION ACERCA DEL PERIODO.

ESTA CURVA CUADRATICA, QUE REPRESENTA A LA FUNCION DE DESCUENTO, SE LE CONOCE COMO UN SPLINE CUADRATICO. HABIENDO ESPECIFICADO A LA FUNCION DE DESCUENTO DE ESTA MANERA, SE PUEDE SUSTITUIR EN LA ECUACION DEL PRECIO PARA CUALQUIER BONO.

EL PRECIO PARA CUALQUIER BONO DEPENDERA DE LOS PARAMETROS EN LA FUNCION DE DESCUENTO. CADA UNO DE ESTOS PARAMETROS SE MULTIPLICA POR UN PAGO EN EFECTIVO APROPIADO Y UN TIEMPO (O EL CUADRADO DE ESTE) CUANDO EL PAGO SE REALIZA.
SI EL PAGO NO OCURRE EN EL TIEMPO ESPECIFICADO, LOS PARAMETROS SE MULTIPLICARAN POR CERO. SI SE ESPECIFICA ESTA RELACION PARA TODOS LOS BONOS (POSIBLEMENTE SE EXCLUYA A LOS BONOS LLAMADOS Y CON FLUJO), SE PUEDE CORRER UNA REGRESION QUE PERMITA CONOCER LOS PARAMETROS ESTIMADOS DE LA FUNCION DE DESCUENTO.

EJEMPLO.

CONSIDERESE UNA FUNCION DE DESCUENTO DEFINIDA POR:

$$\delta(t) = \begin{cases} a_{01}+(b_{01}*t)+(c_{01}*\ (t^2)) & 0 \le t \le 2 \\ a_{11}+(b_{11}*t)+(c_{11}*\ (t^2)) & 0 \le t \le \infty \end{cases} \qquad (3.9.1.1)$$

CUANDO $t=0$ $\delta(0)=1$, LO QUE SIGNIFICA QUE LA TASA DE INTERES ES CERO EN $t=0$. POR LO QUE $a_{01}= a_{11}=1$ Y SE QUIERE QUE $\delta(t)$ SEA CONTINUA EN $t=2$, ENTONCES $2b_{01}+ 4c_{01} = 2b_{11}+ 4c_{11}$ ó $c_{11} = [b_{01}/2] - [b_{11}/2] + c_{01}$. ESTO SIGNIFICA QUE LA FUNCION DE DESCUENTO SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1\ +(b_{01}*t)+(b_{01}*[t^2]) & 0 \le t \le 2 \\ 1\ +(b_{11}*[t-(t^2/2)]+([(b_{01}1/2)+\ c_{01}]*t^2) & 2 \le t \le \infty \end{cases}$$

$$(3.9.1.2)$$

AQUI, EXISTEN TRES PARAMETROS EN LA FUNCION A ESTIMAR: b_{01}, b_{11}, c_{01}. SI SE ASUME QUE $\delta(t)$ OBTIENE LA FUNCION DE DESCUENTO PARA t MEDIDA EN SEMESTRES, EL PRECIO PARA UN BONO CON CUPON CERO SEMESTRAL SERA

$$p_1 = 100*[\delta(1)] = 100 + (100 * b_{01}) + (100* c_{01}) \qquad (3.9.1.3)$$

EL PRECIO DE UN BONO A UN AÑO CON UNA TASA DE CUPON C(2) ES:

$$P_2 = [100 * (C(2)/2) * (\delta(1))] + 100 * (\delta(2))$$

$$= [100*(C(2)/2)* (1+b_{01}+c_{01})] +[100*(1+b_{11}*(2-(4/2))+ 4*[(b_{01}/2) + c_{01}])]$$

$$= [100*(C(2)/2)* (1+b_{01}+c_{01})] +[100* (1+(2*b_{01})+4(c_{01}))]$$

$$= [100*(C(2)/2)] +[(100*b_{01})* ((C(2)/2)+2)] +[(100*c_{01}) * ((C(2)/2)+4)] \quad (3.9.1.4)$$

EL PRECIO DENTRO DE M SEMESTRES M > 2 ES:

$$P_{(m)} = [100*(C(m)/2) * \sum_{t=1}^{m} \delta(t)] + 100 * [\delta(m)] \quad (3.9.1.5)$$

AHORA BIEN,

$$\sum_{t=1}^{m} \delta(t) = m+[b_{01}*(1+ \sum_{t=1}^{m}(t^2/2))]+[b_{11}*(\sum_{t=2}^{m}(t-(t^2/2))]+ [c_{01}*(1+ \sum_{t=2}^{m}(t^2))] \quad (3.9.1.6)$$

Y

$$\delta(m) = 1+[b_{11}* (m -(m^2/2))]+[m^2* ((b_{01}/2)+c_{01})] \quad (3.9.1.7)$$

SUSTITUYENDO (3.9.1.6) Y (3.9.1.7) EN (3.9.1.5):

$$P_{(m)} =[100*(m)*(C(m)/2)]+(100*(C(m)/2))*([b_{01}* (1+ \sum_{t=2}^{m}(t^2/2))] +[b_{11}*(\sum_{t=2}^{m}(t-(t^2/2)))]+[c_{01}* (1+ \sum_{t=2}^{m}(t^2))]) + (100 * [1+[b_{11}*(m-(m^2))]+(m^2)* ((b_{01}/2)+c_{01})]) \quad (3.9.1.8)$$

AGRUPANDO Y REDUCIENDO:

$$p_{(m)} = [(100*(m)*(C(m)))/2]+[b_{01}*[(100*(C(m))/2)*(1+\sum_{t=2}^{m}(t^2/2))]+(100*(m^2)/2)] +$$

$$[(b_{11})*([(100*(C(m)/2))*\sum_{t=2}^{m}(t-(t^2/2))]+100*(m-(m^2/2)))]$$

$$+[(c_{01})*([100*(C(m)/2))*(1+\sum_{t=2}^{m}(t^2))]+(100*(m^2))] \qquad (3.9.1.9)$$

FINALMENTE, SE PUEDEN REDEFINIR LAS VARIABLES DE LA SIGUIENTE FORMA: POR (3.9.1.3) SE TIENE

$$y_{(1)} = (b_{01}*X_{11})+(c_{01}*X_{21})+(b_{11}*X_{31}) \qquad (3.9.1.3')$$

DONDE $y_{(1)} = (p_1-100)$, $X_{11}=(100)$, $X_{21}=(100)$ Y $X_{31}=(0)$.
POR (3.9.1.4):

$$y_{(2)} = (b_{01}*X_{12})+(c_{01}*X_{22})+(b_{11}*X_{32}) \qquad (3.9.1.4')$$

DONDE

$$y_{(2)} = [(p_2-100)*(C(2)/2)],\ X_{12}=[100*((C(2)/2)+2)],$$

$$X_{22}=[100*((C(2)/2)+4)] \text{ Y } X_{32}=0.$$

PARA (3.9.1.9):

$$y_{(m)} = (b_{01}*X_{1m})+(c_{01}*X_{2m})+(b_{11}*X_{3m}) \qquad (3.9.1.9')$$

DONDE

$$y_{(m)} = [p_m-(m*100*(C(m))/2]$$

$$X_{1m} =[(100*(C(m)/2))*(1+\sum_{t=2}^{m}(t^2/2))]+(100*[m^2]/2)$$

$$X_{2m} =[(100*(C(m)/2))*(1+\sum_{t=2}^{m}(t^2/2))]+[100*(m^2)]$$

$$X_{3m} =[(100*(C(m)/2))*(\sum_{t=2}^{m}(t-(t^2/2)))]+[100*(m-(m^2/2))]$$

LAS ECUACIONES (3.9.1.3'), (3.9.1.4') Y (3.9.1.9') SE PUEDEN EXPRESAR COMO:

$$y_{(j)} = (b_{01} * X_{1j}) + (c_{01} * X_{2j}) + (b_{11} * X_{3j}) \quad j=1,2,..,m \quad (3.9.1.10)$$

CONOCIENDO EL PRECIO DE UN INSTRUMNETO FINANCIERO, SU TASA DE CUPON Y SU VENCIMIENTO, LAS VARIABLES y, X_{1j}, X_{2j} Y X_{3j}, SON NUMEROS PARTICULARES.

PARA UNA COLECCION DE BONOS DIFERENTES (NO MENOS DE TRES), SE PUEDE CORRER UNA REGRESION DE MINIMOS CUADRADOS EN LA ECUACION (3.9.1.10) PARA ESTIMAR b_{01}, c_{01} Y b_{11}.

LA IDEA ESCENCIAL DE McCULLOCH ES REGRESAR LOS PRECIOS DE LOS BONOS SOBRE LAS MODIFICACIONES A LAS VARIABLES DEL PAGO EN EFECTIVO PARA ESTIMAR LA FUNCION DE DESCUENTO. EN EFECTO, LAS ACTUALES TRANSACCIONES DE LOS PRECIOS DE LOS BONOS NO SON CONOCIDOS.

LAS PUBLICACIONES SOLO MUESTRAN EL PRECIO DE COMPRA Y VENTA DADOS POR EL GOBIERNO. SUS PREECIS ACTUALES PUEDEN ESTAR ENTRE: $p_{(j)} = (p_{(j)}{}^{a} + p_{(j)}{}^{b})/2$ DONDE $p_{(j)}{}^{a}$ Y $p_{(j)}{}^{b}$ SON LOS PRECIOS DE COMPRA Y VENTA RESPECTIVAMENTE DEL VALOR j. ESTO SIGNIFICA QUE EL PRECIO ACTUAL PUEDE VARIAR DE ESTE A LO MAS EN LA MITAD DE LA DIFERENCIA $(p_{(j)}{}^{a} - p_{(j)}{}^{b})$.

ESTA DIFERENCIA TIENDE A INCREMENTARSE CON EL VENCIMIENTO. McCULLOCH TOMO ESTO EN CUENTA UTILIZANDO LA TECNICA DE LOS MINIMOS CUADRADOS.

LA REGRESION DE McCULLOCH TIENE LAS R's MUY ALTAS Y LAS VARIANZAS ESTIMADAS DE LOS PRECIOS TIENDEN A SER COMPLETAMENTE PEQUEÑAS. EN SU TRABAJO (1975), EL PRECIO DEL BONO ESTA ESPECIFICADO COMO UNA FUNCION DE LAS TASAS DE IMPUESTOS.

LA FUNCION DE DESCUENTO ES ESTIMADA COMO UN SPLINE CUBICO. ESTA FUNCION DESPUES DE IMPUESTOS, PUEDE TRANSFORMARSE PARA UN PERIODO DESPUES DE IMPUESTOS.

LA TASA DE IMPUESTO MARGINAL ES LA TASA QUE MINIMIZA EL ERROR EN LOS PRECIOS ESTIMADOS Y ASI PREVEE EL MEJOR AJUSTE.

LA FUNCION DE DESCUENTO PARA UN NUMERO MAYOR DE AÑOS, AJUSTA LOS DATOS EXTREMADAMENTE BIEN.
LOS REDITOS DE LOS BONOS "LLAMADOS" NO SIEMPRE SE ESTIMAN, Y POR SUPUESTO, LOS REDITOS DE LOS BONOS CON FLUJO NO SON PREDECIDOS DEL TODO, PERO SE PUEDE ESTIMAR LA PARTE DEL PRECIO DEL BONO QUE CONSTITUYE EL VALOR DEL BONO PARA LOS PROPOSITOS DEL ESTADO.

3.9.2 CARLETON-COOPER.

EN 1976 PROPUSIERON ESTIMAR LA FUNCION DE DESCUENTO DIRECTAMENTE DE LOS PAGOS EN EFECTIVO UTILIZANDO LA ECUACION DEL BONO i:

$$P(i) = (b_1 * X_{1i}) + (b_2 * X_{2i}) + \ldots + (b_n * X_{ni}) \qquad (3.9.2.1)$$

DONDE b_t ES EL FACTOR DE DESCUENTO $[(1+h(0,t)]^{-t}$ PARA EL PAGO DESCONTADO X_{ti} EN EL TIEMPO t DEL BONO_i. PARA ALGUNOS BONOS $X_{ti}=0$, DEBIDO A QUE t ES UNA FECHA ANTES DEL VENCIMIENTO DEL BONO.

PARA UN GRAN NUMERO DE BONOS, SE PUEDE APLICAR UNA REGRESION PARA ESTIMAR LOS FACTORES DE DESCUENTO b_1, b_2, ..., b_n. LA TRANSFORMACION DE LOS FACTORES DE DESCUENTO EN LAS TASAS DEL PERIODO ES MUY SIMPLE. EL USO DE ESTE METODO NO REQUIERE UNA PRESENTACION A PRIORI COMO EN LA FORMA FUNCIONAL REQUERIDA POR McCULLOCH, Y LAS FECHAS DETERMINADAS DURANTE EL AÑO, A CUYOS PAGOS DE INTERES QUE HAN DE MANTENERSE BAJO EL NUMERO DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES X_{ti}, QUE SE REQUIEREN EN LA ECUACION PARA ESTIMAR LA FUNCION DE DESCUENTO JUSTAMENTE AL MENOS EN EL ULTIMO PERIODO A CORTO PLAZO. ESTE METODO SOLO PUEDE ESTIMAR PUNTOS DENTRO DEL PERIODO COMO EN EL PROCEDIMIENTO DE McCULLOCH.

AL MENOS QUE SE INTERPOLE O AJUSTE OTRA CURVA A TRAVES DE LOS PUNTOS DEL PERIODO, NO SE PUEDE UTILIZAR ESTA ESTIMACION PARA EVALUAR FLUJOS QUE PUEDAN OCURRIR CON OTROS INSTRUMENTOS QUE TIENEN PAGOS ENTRE DOS FECHAS DE PAGO DE INTERESES.

UNA DERIVACION DE LAS TASAS ADELANTADAS DE LOS PUNTOS ESTIMADOS EN EL PERIODO, MUESTRA QUE ESTAS POSEEN UNA FLUCTUACION MUY GRANDE COMO FUNCION DEL VENCIMIETNO. LOS CAMBIOS MUY PEQUEÑOS EN LAS TASAS DEL PERIODO QUE OCURREN CUANDO EL VENCIMIENTO CAMBIA, PUEDEN TENER UN EFECTO MUY BRUSCO EN LA OBTENCION DE LAS TASAS ADELANTADAS.

CARLETON Y COOPER, SUGIRIERON PRECAUCION EN EL MOMENTO DE LA ESTIMACION DEL PERIODO EN LOS MODELOS DONDE LAS TASAS ADELANTADAS JUEGAN UN PAPEL PRIMORDIAL.
COMO SE RECORDARA, LAS TASAS ADELANTADAS ENVUELVEN UNA RELACION DE FUNCIONES DE DESCUENTO, POR EJEMPLO, UN PEQUEÑO ERROR EN LA ESTIMACION DE LA FUNCION DE DESCUENTO PUEDE INFLUIR DRAMATICAMENTE EN EL CALCULO DE LAS TASAS ADELANTADAS.

EL PROCEDIMIENTO DE ESTIMACION NO TOMA EXPLICITAMENTE EN CUENTA LOS EFECTOS DEL DIFERENCIAL DE LA TASACCION.

SI SE OBSERVA AL PERIODO ESTIMADO COMO EL APROPIADO PARA LA EVALUACION DE LOS PAGOS ANTES DE IMPUESTOS, LOS EFECTOS DE LOS IMPUESTOS NO NECESARIAMENTE TIENEN QUE ESTAR INCLUIDOS.

ALTERNATIVAMENTE, LOS PAGOS X_{ti} PUEDEN SER MODIFICADOS PARA QUE REPRESENTEN LOS PAGOS DESPUES DE IMPUESTOS Y EL PERIODO RESULTANTE PUEDA SER COMPARADO CON EL PERIODO DESPUES DE IMPUESTOS PROPUESTO POR McCULLOCH.

RECIENTEMENTE, CHAMBERS, CARLETON Y WALDEMAN (1984), EXTENDIERON LA TECNICA DE ESTIMACION PARA DETERMINAR LOS PARAMETROS DE UNA FUNCION DE DESCUENTO.
ESTA NUEVA TECNICA SUAVIZA LA FUNCION DE DESCUENTO Y PROVEE DE ESTIMADORES DE REDITOS A TODOS LOS PUNTOS.

ASUMIERON QUE EL PERIODO ES UN POLINOMIO, ASI QUE, EN LOS PAGOS DE DESCUENTO CONTINUOS, EL PRECIO DEL BONO ES UN POLINOMIO EXPONENCIAL.
LA TECNICA ES LA MISMA QUE LA EMPLEADA POR McCULLOCH, EXCEPTO QUE ESTE, UTILIZA SPLINES POLINOMIALES Y CONSIDERA LOS PAGOS EN TODAS LAS FECHAS FUTURAS.

3.9.3 HOUGLET.

EN 1980, COMBINO PROPIEDADES DE LAS TECNICAS DE McCULLOCH Y CARLETON-COOPER, Y EN ADICION, INTENTO TOMAR EN CUENTA EL IMPUESTO DIFERENCIAL, EL CUPON SESGADO (COMO EFECTOS ESPECIALES), LLAMAMIENTO Y BONOS FLUIDOS.
ESTOS EFECTOS POSTERIORES, ESTAN ESTIMADOS COMO ESPECIFICACIONES EN LAS QUE EL FACTOR DE AJUSTE EN LA TASA DE PERIODO EN UNA FECHA, ES UNA FUNCION LINEAL DE LA MEDICION DE ESTOS EFECTOS. ESTO ES, QUE EXISTE UN PERIODO PARA LOS BONOS LLAMADOS Y BONOS FLUIDOS.

PARA TRASLADARSE DE UN PERIODO A OTRO, SOLO SE REQUIERE DE LAS ESPECIFICACIONES CORRECTAS DE LOS PARAMETROS EN LA FUNCION. AHORA, LA INFORMACION OBTENIDA PARA CADA BONO EN EL CONJUNTO, PUEDE SER RELEVANTE PARA LA ESTIMACION DE LOS PARAMETROS EN LA RELACION LINEAL.
PARA DARLE FORMALIDAD, EL PRECIO DEL BONO j PUEDE EXPRESARSE COMO:

$$P(j) = \sum_{t=1}^{m} [(X_{jt} * \delta\ (t))] \ /\ [\ 1 + K_v]^t \qquad (3.9.3.1)$$

DONDE m ES EL VENCIMIENTO, X_{jt} ES EL PAGO DE CONTADO Y K_v ES LA TASA DE AJUSTE EN EL PRERIODO t PARA BONOS DEL TIPO (v).
SI EL BONO j ES DE ESTE TIPO Y $(1+K_v)^t$ ES EL COEFICIENTE DE AJUSTE, ENTONCES

$$\delta(t)*((1+K_v)^{-t} = [1+h(0,t)]^{-t} * [(1+K_v)^{-t}] = [1+h_v(0,t)]^{-t}$$

REPRESENTA EL FACTOR DE DESCUENTO APROPIADO PARA EVALUAR BONOS DEL TIPO v.'
LA TASA DE AJUSTE K_v ESTA DADA COMO:

$$K_v = b_{v0}=(b_{v1}* Z_1)+...+(b_{vq}* Z_q) \qquad (3.9.3.2)$$

DONDE Z = 1,2,...,q ES UNA PROPIEDAD DE LA MEDIDA DEL BONO Y $(b_{v0}, b_{v1}, ..., b_{vq})$ SON LOS PARAMETROS A ESTIMAR.

ALGUNOS DE ESTOS PARAMETROS PUEDEN SER LOS MISMOS PARA BONOS DE DISTINTO TIPO. POR EJEMPLO, LOS BONOS LLAMADOS PUEDEN TENER UN COEFICIENTE QUE PUEDE SER EL MISMO QUE PARA DOS BONOS DISTINTOS: UNO CON DESCUENTO Y OTRO CON PREMIO.
PERO PUEDEN EXISTIR OTROS COEFICIENTES QUE DIFIERAN ENTRE BONOS CON PREMIO Y CON DESCUENTO, Y ADEMAS, ALGUNOS DE LOS COEFICIENTES PUEDEN INDICAR UNA INTERACCION ENTRE LAS CARACTERISTICAS.

ALGUNAS DE LAS Z'_s VARIABLES PUEDEN SER FALSAS; POR EJEMPLO: SE ESPECIFICA QUE $Z_1=1$ SI EL BONO ES LLAMADO Y $Z_0=0$ DE OTRA FORMA.
UNO DE LOS OBJETIVOS DE LA TECNICA DE HOUGLET ES ESTIMAR LOS PARAMETROS

b_{vs}, S=0,1,...,q PARA UTILIZAR EL METODO DE CARLETON-COOPER.

HOUGLET FIJA LOS PUNTOS EN EL TIEMPO t, EN EL CUAL LOS PUNTOS $\delta(t)$ ESTAN ESTIMADOS. ESTOS ESTAN ELEGIDOS A PRIORI DE TAL FOORMA QUE HACEN MAXIMIZAR EL AJUSTE DE LA ESTIMACION EN LA REGION DONDE SE ENCUENTRA LA MAYORIA DE LAS OBSERVACIONES A CORTO PLAZO.

ESTO ES SIMILAR A LA TECNICA DE McCULLOCH, DESDE QUE EL PAGO X_{jt} PUEDA OCURRIR EN FECHAS ENTRE PUNTOS PRE ESPECIFICADOS, ES NECESARIO MODIFICARLOS Y TRASLADARLOS APROPIADAMENTE, ESTO ES, PARA UTILIZAR TASAS ADELANTADAS QUE ESTAN IMPLICITAS EN LOS FACTORES DE DESCUENTO.
LOS $\delta(t)$'s SI EL PAGO X_{jt} SE ENCUENTRA ENTRE t_0 Y t_1.

POR EJEMPLO, UNA PARTE DEL X_{jt} SE MUEVE A t_0 Y LA OTRA PARTE A t_1. SI X_{jt}^* ES LA PARTE QUE SE TRASLADA A t_0, ENTONCES $[X_{jt}^*] * [1+h_v\ (b_0,t)]^{-(t-t_0)}$ ES EL MONTO AÑADIDO AL FLUJO EN t_0, UN METODO SIMILAR COLOCA EL REMANENTE DE X_{jt} EN t_1.
DE ESTA FORMA EL VALOR PRESENTE DE LOS PAGOS DE LOS BONOS PAGAN LO MISMO Y EL PRECIO DEL BONO NO VARIA.

FINALMENTE, HOUGLET INTRODUCE ALGUNAS CONDICIONES DE "SUAVIDAD" EN LAS TASAS ADELANTADAS, ASI QUE NO PUEDEN SALTAR BRUSCAMENTE COMO EN EL PROCEDIMIENTO DE CARLETON-COOPER.

EL METODO DE HOUGLET UTILIZA LAS MEJORES PROPIEDADES DE LOS METODOS DE McCULLOCH Y CARLETON-COOPER. EL TRABAJO COMPLETADO EN 1980 NO HA SIDO AUTORIZADO, DEBIDO A QUE SOLAMENTE ES UNA DISERTACION DE LOS TRABAJOS YA EXPUESTOS.

VASICEL Y FONG (1982), INTRODUJERON UN METODO DE ESTIMACION DE LA FUNCION DE DESCUENTO UTILIZANDO FUNCIONES DE SPLINES EXPONENCIALES. EL TRABAJO DE HOUGLET Y VASICEL-FONG, REPRESENTA LOS ESFUERZOS PARA ACOTAR LOS ESTIMADORES DEL PERIODO QUE POSEEN UN ERROR DE MEDICION MINIMO.

3.10 CONSIDERACIONES AL CAPITULO 3.

3.10.1 EXPRESION DEL PRECIO DEL BONO N-ESIMO.

DEMOSTRACION DE LA EXPRESION DEL PRECIO DEL BONO N-ESIMO.

PARA $t = 2$:

$$100*(R'2)* [(1+h(0,1)^{-1}) + (1+h(0,2)^{-2})]+100 * [1+h(0,2)^{-2}]$$

$$= p_{(2)} = 100;$$

SUPONIENDO VALIDO PARA $t = n$:

$$100 = p_{(n)} = 100*(R'(n))*[\sum_{t=1}^{n}(1+h(0,t)^{-t})]+[100*(1+h(0,n)^{-n})]$$

POR DEMOSTRAR QUE ES VALIDO PARA $(n+1)$:

$$100*(R'(n)) * [\sum_{t=1}^{n}(1+h(0,t)^{-t})] + [100* (1+h(0,n)^{-n})] +$$

$$[100*(R'(n+1)) *(1+h(0,n+1)^{-(n+1)})] +[100*(1+h(0,n+1)^{-(n+1)})]$$

$$= [100*(R'(n+1))* (\sum_{t=1}^{n+1}(1+h(0,t)))] +[100* (1+h(0,n+1)^{-(n+1)})]$$

LA TABLA 2 (DEL APENDICE) MUESTRA UN EJEMPLO DE LA RELACION EXISTENTE ENTRE LA CURVA DEL REDITO PAR Y EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES. LA CARACTERISTICA MAS IMPORTANTE DE ESTA TABLA, ES QUE EL PERIODO SE EXTIENDE POR LA CURVA DE REDITO EXCEPTO PARA LA PRIMERA TASA.

LA DIFERENCIA ENTRE LA TASA DEL PERIODO Y LA CURVA DE REDITO PAR PARA CUALQUIER PERIODO DE VENCIMIENTO SE LE CONOCE COMO CUPON SESGADO.
PARA UNA CURVA DE REDITO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE, EL SESGO TIENDE A AGRANDARSE JUNTO CON EL VENCIMIENTO. PARA CURVAS DE REDITO DESCENDENTES, EL CUPON SESGADO ES NEGATIVO, ES DECIR, EL PERIODO SE EXTIENDE POR DEBAJO DE LA CURVA DE REDITO PAR CON EXCEPCION DE LA PRIMERA TASA. LA RELACION ENTRE EL CUPON SESGADO Y LA CURVA DE REDITO ES EL PRECIO DE UN BONO DURANTE n AÑOS:

$$p = (100*(C/2)* [\sum_{t=1}^{2n} (1+h(0,t)^{-t})]) + [1+h(0,2n)^{-2n}]*100 \tag{3.10.1.1}$$

DONDE $h(0,t)$ ES LA TASA SEMESTRAL DE DESCUENTO DE UN PAGO EN EL SEMESTRE "t" Y $C > 0$ ES LA TASA ANUAL; p SE EXPRESA COMO

$$p = ([100*(C/2)]*[\sum_{t=1}^{2n}(1+R')^{-t}]) + [100*(1+R')^{2n}] \quad (3.10.1.2)$$

DONDE R' ES LA TASA INTERNA DE RETORNO SEMESTRAL.
RESTANDO (3.10.1.2) DE (3.10.1.1) SE OBTIENE:

$$F = (C/2)*[\sum_{t=1}^{2n}(1+h(0,t)^{-t}) - (1+R')^{-t}] + [(1+h(0,2n)^{-2n}) - ((1+R')^{-2n})] = 0 \quad (3.10.1.3)$$

ESTO PERMITE OBSERVAR COMO LA TASA INTERNA R', ESTA RELACIONADA CON EL PERIODO $[h(0,1), h(0,2),..., h(0,2n)]$.

SUPONIENDO QUE EL PERIODO POSEE UN DESLIZAMIENTO ASCENDENTE, ENTONCES $h(0,1) < h(0,2) < ... < h(0,2n)$.
CONSIDERENSE VARIOS VALORES POSIBLES DE R' QUE PERMITAN HACER CIERTA LA ECUACION (3.10.1.3).

SUPONGASE QUE $R' > h(0,2n)$, ENTONCES:

$1+h(0,t)^{-t} > (1 + R')^{-t}$, PARA TODA t. DE AQUI, QUE $F>0$; CONSECUENTEMENTE PARA $F = 0$, SE SIGUE QUE: $R' \leq h(0,2n)$.

AHORA, SUPONGASE QUE $R' < h(0,1)$, POR LO QUE:

$1+h(0,t)^{-t} < (1+R')^{-t}$. DE AQUI QUE $F < 0$ EN (3.10.1.3).

SE TIENE QUE $h(0,1) \leq R' \leq h(0,2n)$.
SUPONIENDO QUE $n > (1/2)$, EL BONO NO TIENE CUPON CERO. SI $R' = h(0,2n)$, PARA TODA $t < 2n$:

$1+h(0,t)^{-t} > (1+R')^{-t}$, DE AQUI, ALGUNOS TERMINOS EN (3.10.1.3) SON POSITIVOS Y NINGUNO ES NEGATIVO; ASI $F > 0$ SI $R' = h(0,1)$, POR LO TANTO, PARA $t > 1$:

$1+h(0,1)^{-t} < (1+R')^{-t}$, ENTONCES $F < 0$.

DE ESTE PROCESO DE ELIMINACION, SE OBSERVA QUE $h(0,1) < R' < h(0,2n)$, DE ESTA MANERA, LOS TERMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN (3.10.1.3) SE CANCELAN, POR LO QUE $F = 0$.

PROCEDIENDO CON EL MISMO RAZONAMIENTO PARA OTROS VENCIMIENTOS (OTROS VALORES DE n), SE MUESTRA A R' COMO UNA FUNCION DE n. ESTO PRODUCE LA CURVA DE REDITO Y SE TIENE INMEDIATAMENTE QUE $(h(0,2n) - (R'))$ (CUPON SESGADO), ES POSITIVO CUANDO EL PERIODO TIENE UN DESLIZAMIENTO ASCENDENTE.

DE MANERA ANALOGA SE DEMUESTRA QUE, CUANDO EL PERIODO TIENE UN DESLIZAMIENTO DESCENDENTE, EL CUPON SESGADO ES NEGATIVO.

EN LOS CASOS ANTERIORES SE ASUME UN DESCUENTO SEMESTRAL Y SE DEFINE A LA FUNCION DE DESCUENTO COMO $\delta^*(t) = 1+h(0,t)^{-t}$, DONDE $h(0,t)$ ES LA TASA SEMESTRAL POR PERIODO DURANTE t PERIODOS.

3.10.2 BONOS DE DESCUENTO (TASAS DE CUPON DISTINTO DE CERO).

EL REDITO DE UN CUPON ORDINARIO DE UN BONO CON DESCUENTO ESTA SUJETO A LAS TASAS ORDINARIAS DE IMPUESTOS EN EL AÑO RECIBIDO. EL REDITO DE UN CUPON SEMESTRAL ES 10% (C/2) DONDE C ES LA TASA ANUAL DEL CUPON. SEA T LA TASA ORDINARIA DE IMPUESTOS; EL PAGO DEL CUPON DESPUES DE IMPUESTOS POR UN PERIODO DE 6 MESES ES: $(1 - T)* \ (100(C/2))$.
AL VENCIMIENTO, EL BONO RECUPERARA SU VALOR NOMINAL DE 100. SI $p < 100$ FUE EL PRECIO PAGADO, EL CAPITAL GANADO AL VENCIMIENTO ES $100 - p$. ESTA GANANCIA RECIBIDA A LA REDENCION ESTA TASADA CON IMPUESTO SOBRE LA GANANCIA DEL CAPITAL EN Tg.

AL VENCIMIENTO, EL VALOR DE REDENCION DESPUES DE IMPUESTOS DEL BONO ES $100 - (Tg * (100 - p))$. ENTONCES $Tg = T$. EL INVERSIONISTA CONTRIBUYENTE VE AL PERIODO COMO:

$$(1-T)* (100(C/2)),(1-T)* (100(C/2)),...,(1-T)* (100(C/2)),(1-T)*(100(C/2)) + 100 - (Tg*(100-p).$$

SI SE PIENSA A $\delta(t)$ COMO UNA FUNCION DE DESCUENTO DESPUES DE IMPUESTOS, SE DEBE ASEMEJAR A LOS TERMINOS DESCONTADOS EN EL PERIODO DESPUES DE IMPUESTOS.ESTO SERA IGUAL AL PRECIO PAGADO:

$$p = (1-T)*(100(C/2)) * [\sum_{t=1}^{n} \delta(t) + (100 -(Tg*(100-p))) * (\delta(t))] \qquad (3.10.2.1)$$

ESTA EXPRESION PUEDE SER RESUELTA PARA p, ASI SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA FUNCION DE OTRAS VARIABLES. POR OTRO LADO, EL PRECIO PUEDE SER EXPRESADO EN TERMINOS DE UNA TASA DE DESCUENTO ANTES DE IMPUESTOS:

$$p = 100 * (C/2))* [\sum_{t=1}^{n} \delta^*(t) + 100 * \delta^*(m)] \qquad (3.10.2.2)$$

DONDE LOS PAGOS ANTES DE IMPUESTOS ESTAS DESCONTADOS A UNA TASA DEL PERIODO ANTERIOR A IMPUESTOS.

3.10.2.1 BONOS CON PREMIO.

NO TODAS LAS TASAS DE CUPON RECIBIDAS DE UN BONO CON PREMIO ESTAN SUJETAS A TASAS DE IMPUESTOS. COMO SE RECORDARA, EL PRECIO DE UN BONO A LA PAR, CAE A SU VALOR NOMINAL AL VENCIMIENTO. EL INVERSIONISTA CONTRIBUYENTE TIENE LA OPCION DE TOMAR ESTO COMO UN CAPITAL PERDIDO AL VENCIMIENTO O AMORTIZAR LA PERDIDA LINEALMENTE Y LUEGO DEDUCIR ESTA DE LA TASA DEL CUPON ACTUAL Y PAGAR EL IMPUESTO EN EL REMANENTE. LOS CONTRIBUYENTES DE QUIENES T EXCEDE A Tg, QUE USUALMENTE ES EL CASO, ENCUENTRAN UNA VENTAJA AL AMORTIZAR LA PERDIDA. SI p ES EL PRECIO INICIAL Y T ES LA TASA DE IMPUESTOS ORDINARIA, EL PAGO DEL BONO DESPUES DE IMPUESTOS DE UN PERIODO SEMESTRAL ES:

$$100 * (C/2) - T* [(100*(C/2)-((P-100)/m))] = (1-T)*100(C/2) + T*((p-100)/m) \qquad (3.10.2.1.1)$$

DONDE m ES El VENCIMIENTO DADO EN PERIODOS SEMESTRALES. EN LA EXPRESION DEL PAGO DESPUES DE IMPUESTOS, EL MONTO T * (p-100)/m PUEDE SER CONSIDERADO COMO EL SALVAMENTO DEL IMPUESTO DEBIDO A LA AMORTIZACION. SIENDO $\delta(t)$ LA FUNCION DE DESCUENTO DESPUES DE IMPUESTOS, EL PRECIO DE UN BONO ES:

$$p = [(1-T)*100(C/2) + T((P- 100)/2))] * [\sum_{t=1}^{m} \delta(t) + 100 * \delta(t)] \qquad (3.10.2.1.2)$$

EN TERMINOS DEL PERIODO ANTES DE IMPUESTOS, EL PRECIO SE PUEDE CALCULAR COMO EN (3.10.2.2).

3.10.3 REGRESION GENERAL.

EL PROBLEMA DE AJUSTAR UNA LINEA POR MINIMOS CUADRADOS PUEDE SER MANEJADO A TRAVES DEL USO DE MATRICES. ESTO ES IMPORTANTE POR LA SIGUIENTE RAZON: SI SE QUIERE AJUSTAR CUALQUIER MODELO LINEAL EN LOS PARAMETROS β_0, β_1, ... POR MINIMOS CUADRADOS, LOS CALCULOS NECESARIOS SON EXACTAMENTE LOS MISMOS QUE LOS UTILIZADOS EN EL CALCULO CON DOS PARAMETROS, β_0 Y β_1 (EN FORMA MATRICIAL).

LA FORMULA GENERAL DE UNA REGRESION LINEAL ES:

$$Y = X\beta + E \qquad (3.10.3.1)$$

DONDE Y ES EL VECTOR DE OBSERVACIONES (n x 1)

X ES UNA MATRIZ CONOCIDA (n x p)

β ES EL VECTOR DE PARAMETROS (p x 1)

E ES EL VECTOR DE ERRORES (n x 1)

Y DONDE $E(e) = 0$ Y $V(e) = I(\sigma^2)$; ASI QUE LOS ELEMENTOS NO ESTAN CORRELACIONADOS. SI $E(e) = 0$, LA OTRA FORMA DE ESCRIBIR EL MODELO ES:

$$E(Y) = X\beta \qquad (3.10.3.2)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} \qquad E(e) = \begin{bmatrix} E(e_1) \\ E(e_2) \\ E(e_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(e) = 0$$

$$VAR\,(\underline{e}) = E\,[(\underline{e} - 0)*(\underline{e} - 0)^T] = E(\underline{e}\underline{e}^T) = e^2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} e^2_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e^2_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e^2_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = I\sigma^2$$

LA SUMA DE LOS CUADRADOS DEL ERROR ES:

$$e'e = (Y - X\hat{\beta})^1 * (Y - X\hat{\beta})$$

$$= Y'Y - (\hat{\beta}'X'Y) - (Y'X\hat{\beta}') + (\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}) \qquad (3.10.3.3)$$

$$= Y'Y - (2\hat{\beta}'X'Y) + (\hat{\beta}'X'X\hat{\beta})$$

DERIVANDO (3.10.3.3) CON RESPECTO A $\hat{\beta}$:

$$\frac{d_{e'e}}{d_{\hat{\beta}}} = -(2X'Y) + (2X^TX\hat{\beta}) \qquad (3.10.3.4)$$

IGUALANDO A CERO:

$$-(2X'Y) + (2X^TX\hat{\beta}) = 0 \implies (X^TX)\hat{\beta} = X'Y \qquad (3.10.3.5)$$

QUE ES LA ECUACION NORMAL.

AQUI EXISTEN DOS COSAS A CONSIDERAR:

1.- EXISTEN ECUACIONES INDEPENDIENTES DESCONOCIDAS EN p, O BIEN ALGUNAS ECUACIONES DEPENDEN DE OTRAS, ASI QUE EXISTEN MENOS DE p ECUACIONES INDEPENDIENTES EN LAS p DESCONOCIDAS (LAS p DESCONOCIDAS SON ELEMENTOS DE b).

2.- SI ALGUNA DE LAS ECUACIONES NORMALES DEPENDE DE OTRAS, $X'X$ ES SINGULAR, ASI QUE, $(X'X)^{-1}$ NO EXISTE. ESTO DA PIE A QUE EL MODELO SE EXPRESA EN TERMINOS DE POCOS PARAMETROS O DE RESTRICCIONES ADICIONALES EN LOS MISMOS.

DESPEJANDO A $\hat{\beta}$ DE (3.10.3.5) SE OBTIENE EL ESTIMADOR DE β:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X^T Y \qquad (3.10.3.6)$$

ESTA ECUACION TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1) $\hat{\beta}$ ES EL ESTIMADOR QUE MINIMIZA LA SUMA DE LOS ERRORES $e'e$.

2) LOS ELEMENTOS DE β SON FUNCIONES LINEALES DE LAS OBSERVACIONES Y1, Y2, ..., Yn y PROVEE DE ESTIMADORES INSESGADOS A LOS ELEMENTOS DE β QUE TIENEN LA VARIANZA MINIMA.

PARA LAS ECUACIONES (3.9.0.1) Y (3.9.0.2), SE PUEDE UTILIZAR LA REGRESION LINEAL GENERAL. ENTONCES, PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS EN (3.9.0.1) SE OBTIENE LA ECUACION

$$Ln\ (1 + Rm) = a + \beta_1 M + \beta_2 Ln(M)$$

SEA $Rm' = Ln\ (1 + Rm);\ M' = Ln(M)$

$$\Longrightarrow (3.9.0.1) = Rm' = a + \beta_1 M + \beta_2 M'$$

DONDE:

$$Rm' = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_{11} & M_{12} \\ 1 & M_{21} & M_{22} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 1 & M_{n1} & M_{n2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} \qquad (3.10.3.7)$$

ó

$$Rm' = (M*\beta) + e \qquad (3.10.3.8)$$

Y EL ESTIMADOR PARA $\hat{\beta}$ ES:

$$\hat{\beta} = (\ M^T * M\ )^{-1} * M^T * Rm' \qquad (3.10.3.9)$$

SIGUIENDO EL MISMO PROCEDIMIENTO, SE LLEGA A QUE (3.9.0.2) SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$R' = a + b_1 M_1' + b_2 M_2 + b_3 M_3' \qquad (3.10.3.10)$$

DONDE:

$R' = Ln\ (\ 1 + R\ ),\ M_1' = (1/M),\ M_3' = Ci$

EL ESTIMADOR PARA β ES:

$$\hat{\beta} = (M^T * \ M)^{-1} * M^T * R' \qquad (3.10.3.11)$$

PARA LA ECUACION DE COHEN, KRAMER Y WAUGH, SE PUEDE LINEALIZAR HACIENDO LA SIGUIENTE SUSTITUCION:

$M' = (Log\ M)^2$

ENTONCES, (3.9.0.3) QUEDARIA DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$Rm = a + bM + cM' \qquad (3.10.3.12)$$

Y SIGUIENDO CON EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR, $\hat{\beta}$ SERIA DE LA FORMA

$$\hat{\beta} = (M^T * M)^{-1} * \ M^T * R \qquad (3.10.3.13)$$

PARA LAS ECUACIONES DE McCULLOCH Y CARLETON-COOPER, SE UTILIZA LA GENERALIZACION DE LOS CASOS ANTERIORES, ES DECIR, SE TIENEN n PARAMETROS Y n ECUACIONES INDEPENDIENTES.

LOS ESTIMADORES SON:

$$\hat{B} = (X^T * X)^{-1} * X^T * Y \qquad (3.10.3.14)$$

DONDE X ES UNA MATRIZ DE $(n \times p)$; X^T UNA MATRIZ DE $(p \times n)$ Y

$\hat{B}$ ES UN VECTOR DE $(1 \times n)$.

3.10.4 SPLINES CUADRATICOS Y CUBICOS.

LOS POLINOMIOS SON UTILIZADOS COMO LA FORMA BASICA DE APROXIMACION EN TODAS LAS AREAS DEL ANALISIS NUMERICO. SE DEBE ESTA POPULARIDAD GRACIAS A SU ESTRUCTURA SIMPLE, QUE LOS HACE FACILES DE CONSTRUIR APROXIMACIONES MAS EFECTIVAS QUE MUCHOS OTROS METODOS.

PRIMERAMENTE SE VERA QUE ES UN POLINOMIO PARA LUEGO UTILIZARLO PARA INTERPOLAR Y DE AHI, LA FORMA DE LOS SPLINES CUBICOS Y CUADRATICOS.

UN POLINOMIO $p(x)$ CON GRADO $\leq n$ ES POR DEFINICION UNA FUNCION DE LA FORMA:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \qquad (3.10.4.1)$$

CON COEFICIENTES $a_0, a_1, \dots, a_n$. ESTE POLINOMIO TIENE EXACTAMENTE GRADO n, EN EL CASO DE QUE EL COEFICIENTE a_n SEA DISTINTO DE CERO, A LA ECUACION (3.10.4.1) SE LE DENOMINA FORMA GENERAL, QUE ES LA FORMA ESTANDAR PARA EXPRESAR UN POLINOMIO EN PROBLEMAS MATEMATICOS.

UNA MANERA MAS UTIL Y QUE PERMITE REDUCIR LA PERDIDA DE SIGNIFICANCIA, SE LE DENOMINA FORMA GENERAL MODIFICADA Y SE DENOTA COMO:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n \qquad (3.10.4.2)$$

DONDE c ES EL CENTRO ESCOGIDO. ES BUENA PRACTICA UTILIZAR (3.10.4.2) CON CENTRO c ESCOGIDO EN CUALQUIER PARTE DEL INTERVALO [a,b] CUANDO SE INTERESA UN POLINOMIO EN ESTE INTERVALO. LOS COEFICIENTES EN (3.10.4.2) PROVEEN VALORES DERIVADOS, ESTO ES:

$$a_i = p^{(i)}(c)/i! \qquad i = 0,1,\dots,n$$

SI $p(x)$ ESTA DADO POR (3.10.4.2), LA FORMA GENERAL MODIFICADA PROVEE LA SERIE DE EXPANSION DE TAYLOR PARA $p(x)$ ALREDEDOR DEL CENTRO c.

UNA GENERALIZACION ROBUSTA DE LA FORMA MODIFICADA ES LA FORMULA DE NEWTON:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-c_1) + a_2(x-c_1)(x-c_2) + a_3(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$$
$$+ \dots + a_n(x-c_1)\dots(x-c_n) \qquad (3.10.4.3)$$

ESTA FORMA JUEGA UN FACTOR MUY IMPORTANTE EN LA CONSTRUCCION DE UN POLINOMIO DE INTERPOLACION. REDUCE LA FORMA MODIFICADA SI LOS CENTROS $c_1, c_2, \dots, c_n$ SON IGUALES A c, Y A LA FORMA GENERAL SI LOS CENTROS $c_1, c_2, \dots, c_n$ SON IGUALES A CERO.

NO ES NECESARIO EVALUAR CADA UNO DE LOS n+1 TERMINOS EN (3.10.4.3) SEPARADAMENTE Y LUEGO SUMARLOS. ESTO LLEVARIA A n+[n(n+1)]/2 SUMAS Y [n*(n+1)]/2 MULTIPLICACIONES. SI SE NOTA QUE EL FACTOR $x - c_1$ ESTA EN TODOS LOS TERMINOS SALVO EL PRIMERO, ENTONCES:

$$p(x) = a_0 + \{(x-c_1)*[a_1+a_2(x-c_2)+a_3(x-c_2)*(x-c_2)+...+$$
$$a_n(x-c_2)(x-c_3)* \ ... \ * \ (x-c_n)]\}$$

OTRA VEZ, CADA TERMINO ENTRE LLAVES, EXCEPTO EL PRIMERO, CONTIENE A $x - c_2$, ESTO ES:

$$p(x) = a_0 + \{(x-c_1)*(a_1+[x-c_2])*[a_2+a_3(x-c3)+...+$$
$$a_n(x-c_3)*...*(x-c_n)]\}$$

CONTINUANDO DE ESTA MANERA, SE OBTIENE p(x) EN LA FORMA ANIDADA:

$$p(x) = a_0 + \{[(x-c_1)*(a_1+(x-c_2))]*[a_2+(x-c_3)*(a_3+...+$$
$$(x-c_{n-1})*(a_{n-1}+[x-c_n]a_n)...\}]\}$$

ESTA EVALUACION PARA CUALQUIER VALOR PARTICULAR DE X, TOMA 2n SUMAS Y n MULTIPLICACIONES.

EL ALGORITMO DE LA FORMA DE NEWTON PARA LA MULTIPLICACION ANIDADA(1) DADOS LOS n+1 COEFICIENTES $a_0, \ldots, a_n$ ES DE LA FORMA DE NEWTON (3.10.4.3) DEL POLINOMIO p(x) JUNTO CON LOS CENTROS $c_1, \ldots, c_n$ DADO EL NUMERO Z.

$$a'_n = a_n$$

$$a_i = a_i' + a_{i+1}(c_{i+1} - z) \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 0$$

(1)VER D. CONTE SAMUEL, DE BOOR CARL: ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS: INTERNATIONAL STUDENT EDITION 1980 p.p. 33-40

SUSTITUYENDO EN (3.10.4.3), SE OBTIENE:

$$p(x)=a_0+a_1(x-c_1)+a_2(x-c_1)*(x-c_2)+...+a_n(x-c_1)*...*(x-c_n)$$

$$=a_0'+a_1'*(c_1-z)+[a_1'+a_2'*(c_2-z)]*(x-c_1)+[a_1'+a_2'*(c_2-z))*$$

$$(x-c_1)] + [a_2'+a_3' (c_3-z)](x-c_1)(x-c_2)]$$

$$\vdots$$

$$+[a_{n-1}'+a_n'(c_n-z)]*(x-c_1)*...*(x-c_{n-1}) +a_n'(x-c_1)*...*$$

$$(x-c_{n-1})*(x-c_n)$$

$$= a_0'+a_1'(x-z) +a_1'(x-z)*(x-c_1)+...+a_n'(x-z)*$$

$$(x-c_1)*...*(x-c_{n-1})$$

3.10.4.1 FORMA DE LAGRANGE.

SI $p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + ... + a_n l_n(x)$ (3.10.4.1.1)

CON

$$l_k(x) = \prod_{i=0,i=k}^{n} (x-x_i) / (x_k-x_i) \quad k = 0,1,...,n \qquad (3.10.4.1.2)$$

LA FUNCION $l_k(x)$ ES EL PRODUCTO DE N FACTORES LINEALES, POR LO TANTO ES UN POLINOMIO DE GRADO n.

LA ECUACION (3.10.4.1.1) DESCRIBE UN POLINOMIO DE GRADO $\leq$ n, $l_k(x)$ DESAPARECE A x_i PARA TODA i DISTINTA DE k Y TOMA EL VALOR DE x_i:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ SI } i = k \\ 0 \text{ SI } i = k \end{cases} \qquad i = 0,1,...,n$$

ESTO MUESTRA QUE

$$p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k l_k (x_i) \approx a_i \qquad i = 0,1,...,n$$

LOS COEFICIENTES a_0, ..., a_n EN LA FORMA DE LAGRANGE SON SIMPLEMENTE LOS VALORES DEL POLINOMIO p(x) EN LOS PUNTOS $x_0,...,x_n$. CONSECUENTEMENTE, PARA UNA FUNCION ARBITRARIA F(x)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} F(x_k)\, l_k(x) \qquad (3.10.4.1.3)$$

ES UN POLINOMIO DE GRADO $\leq$ n QUE INTERPOLA F(x) EN $x_0,...,x_n$. DE ACUERDO A ESTO SE ESTABLECE EL SIGUIENTE TEOREMA.

DADA UNA FUNCION $F(x)$ VALUADA Y $n+1$ PUNTOS DISTINTOS $x_0, \ldots, x_n$, EXISTE EXACTAMENTE UN POLINOMIO DE GRADO $\leq n$ QUE INTERPOLA A $F(x)$ EN $x_0, \ldots, x_n$.

LA ECUACION (3.10.4.1.3) ES LA FORMULA DE LAGRANGE PARA INTERPOLACION POLINOMIAL.

3.10.4.2 TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

LA FORMULA DE NEWTON PARA INTERPOLACION POLINOMIAL ES

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F[x_0,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j) \text{(2)} \qquad (3.10.4.2.1)$$

LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE ORDEN MAYOR SE PUEDEN CONSTRUIR CON LA SIGUIENTE FORMULA:

$$F[x_0,\ldots,x_k] = \frac{F[x_1,\ldots,x_k] - F[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (3.10.4.2.2)$$

SEA $p_i(x)$ EL POLINOMIO DE GRADO $\leq i$ QUE COINCIDE CON $F(x)$ EN $x_0,\ldots,x_i$ COMO ANTES Y SEA $q_{k-1}(x)$ EL POLINOMIO DE GRADO $\leq k-1$ QUE CONCUERDA CON $F(x)$ EN LOS PUNTOS $x_1,\ldots,x_n$; ENTONCES:

$$p(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} * [q_{k-1}(x)] + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} * [p_{k-1}(x)]$$

$$(3.10.4.2.3)$$

ES UN POLINOMIO DE GRADO IGUAL A k Y SE PUEDE MOSTRAR FACILMENTE QUE

$$p(x_i) = F(x_i) \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

POR LA UNICIDAD DE LA INTEPOLACION POLINOMIAL, SE TIENE QUE $p(x) = p_k(x)$. ENTONCES:

$F[x_0,\ldots,x_k]$ = COEFICIENTE PRICIPAL DE $p_k(x)$, POR DEFINICION:

$$= \frac{\text{COEFICIENTE PRINCIPAL DE } p_{k-1}(x)}{x_k - x_0} \qquad \text{POR } (3.10.4.2.3)$$

$$= \frac{F[x_1,\ldots,x_k] - F[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

POR DEFINICION QUE ES (3.10.4.2.2)

---

(2)p.p. 41 - 50

3.10.4.3 ERROR DEL POLINOMIO DE INTERPOLACION.

SEA $F(x)$ UNA FUNCION VALUADA EN LOS REALES EN EL INTERVALO $I=[a,b]$ Y SEAN $x_0,\ldots,x_n$ $n+1$ PUNTOS DISTINTOS EN I. CON $p_n(x)$, EL POLINOMIO DE GRADO $\leq n$ CON INTERPOLACIONES $F(x)$ EN $x_0,\ldots,x_n$, EL ERROR DE INTERPOLACION $e_n(x)$ DE $p_n(x)$ ESTA DADO POR:

$$e_n(x) = F(x) - p_n(x) \qquad (3.10.4.3.1)$$

SEA AHORA $\bar{x}$ CUALQUIER PUNTO DISTINTO DE $x_0,\ldots,x_n$. SI $p_{n+1}(x)$ ES EL POLINOMIO DE GRADO $\leq n+1$ QUE INTERPOLA $F(x)$

EN $x_0,\ldots,x_n$ Y A $\bar{x}$, ENTONCES $p_{n+1}(\bar{x}) = F(\bar{x})$.

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + p[x_0,\ldots,x_n,x] \prod_{j=0}^{n} (x-x_j)\text{, ENTONCES}$$

$$F(\bar{x}) = p_{n+1}(\bar{x}) = p_n(\bar{x}) + F[x_0,\ldots,x_n,\bar{x}] \prod_{j=0}^{n} (\bar{x}-x_j)$$

POR LO TANTO

PARA TODA $\bar{x}$ DISTINTA DE $x_0,\ldots,x_n$ SE OBTIENE:

$$e_n(\bar{x}) = F[x_0,\ldots,x_n,\bar{x}] \prod_{j=0}^{n} (\bar{x} - x_j) \qquad (3.10.4.3.2)$$

NO SE PUEDE EVALUAR EL LADO DERECHO DE (3.10.4.3.2) SIN CONOCER EL VALOR DE

$F(\bar{x})$. PERO EL NUMERO $F[x_0,\ldots,x_n,x]$(3) ESTA CERCANO A LA DERIVADA n+1 DE $F(x)$; UTILIZANDO ESTA INFORMACION SE PUEDE ESTIMAR $e_n(\bar{x})$ EN CUALQUIER TIEMPO.

DE ACUERDO AL TEOREMA ANTES MENCIONADO, SE PUEDE INTERPOLAR UNA FUNCION CON CUATRO PUNTOS MEDIANTE POR POLINOMIO CUBICO. CADA UNA DE LAS PARTES CUBICAS DE $p_i(x)$ SE REQUIERE PARA INTERPOLAR A $F(x)$ CON SOLO DOS PUNTOS. DE AQUI, SE PUEDE AMORTIGUAR COMPLETAMENTE UN GRADO DE LIBERTAD AL ESCOGER $p_i(x)$.

EN EL SEGMENTO DE INTERPOLACION SE PUEDE DETERMINAR $p_i(x)$ PARA INTERPOLAR $F(x)$ EN $x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}$:

$$p_i'(x_i) = p'(x_i) \qquad p_i'(x_{i+1}) = p'(x_{i+1}) \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.10.4.3.3)$$

---

(3)p.p. 50 - 52

DE LA FORMULA DE NEWTON (3.10.4.2.1) PARA $i= 1,2,...,n$ =

$$p_i(x) = F(x_i) + F[x_i,x_i]*(x-x_i) +F[x_i,x_i,x_{i+1}]*(x-x_i)^2$$
$$+ F[x_i,x_i,x_{i+1},x_{i+1}]*(x-x_i)^2* (x-x_{i+1})$$

DADO QUE $(x -x_{i+1}) = (x-x_i) + (x_i- x_{i+1})$, SE OBTIENE:

$$p_i(x)=F(x_i)+F'(x_i)(x-x_i)+(F[x_i,x_i,x_{i+1}]-F[x_i,x_i,x_{i+1},x_{i+1}]$$
$$\delta x_i)*(x-x_i)^2 + F[x_i,x_i,x_{i+1},x_{i+1}](x-x_i)^3$$

DONDE $\delta x_i= x_{i+1}- x_i$, Y SE PUEDEN LEER DIRECTAMENTE LOS COEFICIENTES c_{1i}, c_{2i}, c_{31}, c_{41}, PARA $p_i(x)$. UTILIZANDO LAS ABREVIACIONES:

$$f_i = f(x_i) \qquad S_i = f'(x_i) \qquad i = 1,2,...,n+1 \qquad (3.10.4.3.4)$$

SE OBTIENE QUE $c_{1,i} = f_i$; $c_{2,i} = S_i$

$$c_{3,1} = f[x_i, x_i, x_{i+1}] - f[x_i, x_i, x_{i+1}]\delta x_i$$
$$= \frac{f[x_i,x_{i+1}] - S_i}{\delta x_i} - c_{4,1}(\delta x_i)$$
$$(3.10.4.3.5)$$

$$c_{4,1} = \frac{f[x_i,x_{i+1},x_{i+1}] - f[x_i,x_i,x_{i+1}]}{\delta x_i}$$
$$= \frac{S_{i+1} + S_i - 2f[x_i,x_{i+1}]}{(\delta x_i)^2}$$

SI SE CONTINUA UTILIZANDO $f_i= f(x_i)$, $i+1,...,N+1$ EN (3.10.4.3.5) Y HACIENDO CASO OMISO DE LA ELECCION ARBITRARIA DE LOS NUMEROS S_i, $i=1,2,...,n+1$ EL RESULTADO DE LA FUNCION CUBICA $g_3(x)$ INTERPOLA A $f(x)$ EN $x_1,...,x_{n+1}$ GROSAMENTE, $g_3(x)$ ES CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE EN $[a,b]$; LA EXPRESION (3.10.4.3.5) IMPLICA QUE:

$$p'_{i-1}(x_i) = S_i = p'_i(x_i) \qquad i= 2,3,...,n$$

COMO SE DEMOSTRO ANTERIORMENTE, SIEMPRE ES POSIBLE DETERMINAR LOS NUMEROS $S_i,...,S_{n+1}$, EN LA MEDIDA QUE $g_3(x)$ ES CONSTANTEMENTE DIFERENCIABLE. ESTE METODO PARA DETERMINAR $g_3(x)$ ES CONOCIDO COMO SPLINE CUBICO DE INTERPOLACION.

EL REQUERIMIENTO DE QUE $g_3(x)$ SEA CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE ES EQUIVALENTE A LA CONDICION:

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i) \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

ó $$2C_{3,i-1} + 6C_{4,i-1}\,\delta x_{i-1} = 2C_{3,1} \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

DE AQUI, (3.10.4.3.5) SE QUIERE:

$$\frac{2(f[x_{i-1},x_i] - S_{i-1})}{\delta x_i} + 4C_{4,i-1}(\delta x_{i-1}) =$$

$$\frac{2(\ f[x_i,x_{i+1}] - S_i)}{\delta x_i} - 2C_{4,1}(\delta x_i) \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

SI SE UTILIZA (3.10.4.3.5) PARA EXPRESAR $C_{4,i-1}$ Y $C_{4,1}$ EN TERMINOS

DE f's Y S's, SIMPLIFICANDO SE OBTIENE:

$$(\delta x_i)S_{i-1} + 2(\delta x_{i-1}+\delta x_i)S_i + (\delta x_{i-1})S_{i+1}$$

$$= 3\ (f[x_{i-1},x_i]\delta x_i + f[x_i,x_{i+1}]\delta x_{i-1}) \quad i=2,3,\ldots,n \qquad (3.10,4.3.6)$$

ESTE ES UN SISTEMA DE N-1 ECUACIONES LINEALES CON n+1 S' DESCONOCIDAS, SI SE ESCOGE S_1 Y S_{n+1}, SE PUEDE RESOLVER (3.10.4.3.6) PARA $S_2,\ldots,S_N$ POR EL METODO DE ELIMINACION GAUSS.(4)

ESTAS SON LAS CONDICIONES PARA QUE LA FUNCION DE DESCUENTO PROPUESTA POR McCULLOCH SEA ESCRITA COMO UN SPLINE CUBICO O CUADRATICO.

---

(4)p.p. 288 - 290

4 LA DURACION Y LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DEL PERIODO.

EL DESARROLLO VISTO EN EL CAPITULO ANTERIOR, FORMA LOS ANTECEDENTES DE LAS APLICACIONES DE LA DURACION EN LA FORMULACION DE ESTRATEGIAS DE INVERSION PARA LOS VALORES CON RENDIMIENTO FIJO. ESTA NUEVA APROXIMACION COMENZO CON FISHER Y WEIL EN 1971, DESARROLLANDO LA PRIMERA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION DE UN BONO QUE RESULTA AL TOMAR EN CUENTA UN PERIODO NO ESTABLE. LOGICAMENTE SE NECESITABA UNA NUEVA DEFINICION DE LA DURACION.

BIERWAN EN 1977 Y BIERWAN Y KAUFMAN EN 1977, MOSTRARON LAS NUEVAS DEFINICIONES ACERCA DE LA DURACION. ESTA DE MAS DECIR QUE UNA DEFINICION O MEDIDA APROPIADA DE LA DURACION, DEPENDE DE LA MANERA DE ASUMIR EN QUE EL TIEMPO CAMBIA DE PERIODO A PERIODO. EL MODO EN EL CUAL EL PERIODO CAMBIA ES LLAMADO PROCESO ESTOCASTICO. DE AQUI QUE LA DURACION BASADA EN LA FORMACION DE PORTAFOLIOS CON RENDIMIENTOS FIJOS A IMPLEMENTAR UNA ESTRATEGIA DE INVERSION DEPENDE DE UN PROCESO ESTOCASTICO.

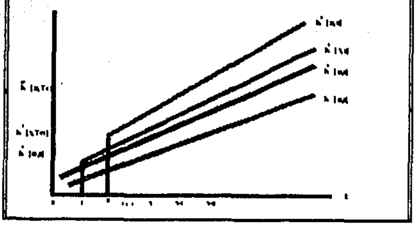
4.1 PROCESOS ESTOCASTICOS.

SUPONGASE QUE UN INVERSIONISTA OBSERVA INICIALMENTE EL PERIODO $h(0,t)$, $t = 1,2,...$, UN INSTANTE DESPUES DE COLOCAR UN FONDO DE INVERSION, Y QUE EL PERIODO CAMBIA ALEATORIAMENTE A $h^*(0,t)$, $t = 1,2,...$

LAS TASAS ADELANTADAS EN $h^*(0,t)$ SE CONVIERTEN EN LAS TASAS FUTURAS ACTUALES. ESTA SIMPLE CONSIDERACION EN EL CAMBIO DEL PERIODO, FORMA LA BASE DE UNA LARGA LISTA DE CLASES DE PROCESOS ESTOCASTICOS. CADA UNO DE ESTOS PROCESOS, QUEDA EXPLICADO CUANDO LA DIFERENCIA $h^*(0,t)-h(0,t)$ $t=1,2,...$ ESTA ESPECIFICADA EXPLICITAMENTE COMO UNA FUNCION DE UNA O MAS VARIABLES ALEATORIAS.

SE ASUME QUE LAS ACTUALES TASAS DE INTERES OBSERVADAS ERAN R Y EN EL INSTANTE DESPUES DE HABER COLOCADO LA INVERSION, LA TASA DE INTERES CAMBIA A R^* Y PERMANECE EN ESE NIVEL. AQUI SE SUPONE QUE EL PERIODO CAMBIA DE $h(0,t)$ A $h^*(0,t)$ $t=1,2,...$, Y QUE LAS TASAS ADELANTADAS SE CONVIERTEN EN LAS ACTUALES TASAS FUTURAS. ESTO SE ILUSTRA EN LA FIGURA 4.1, DONDE $h(0,t)$ ES EL PERIODO OBSERVADO. INMEDIATAMENTE DESPUES DE QUE LA INVERSION SE REALIZA, EL PERIODO CAMBIA A: $h^*(0,t)$. AL PRICIPIO DEL SIGUIENTE PERIODO, EL PERIODO ADELANTADO $h^*(1,t)$, SE CONVIERTE EN EL GRUPO DE LAS ACTUALES TASAS.

FIGURA 4.1: SECUENCIAS DE LAS TASAS DE LOS PERIODOS - T



SI NO EXISTEN CAMBIOS MAS ADELANTE, DESPUES DE ESO EL PERIODO ADELANTADO A ESTA ESTRUCTURA ES: $h^{*}(2,t)$, ENTONCES SE OBTIENE EL PERIODO AL PRINCIPIO DEL SEGUNDO PERIODO Y ASI DURANTE TODO EL TIEMPO.
SE PUEDE GRAFICAR LA EVOLUCION DE t DURANTE TODO EL PERIODO. EN EL TIEMPO $t = 0$ ESTA TASA ES $h(0,t)$. AL PRINCIPIO DEL SEGUNDO PERIODO, EL PERIODO ES: $h^{*}(1,t)$, LA TASA DEL PERIODO t EN LA ESTRUCTURA ES $h^{*}(1,t+1)$.

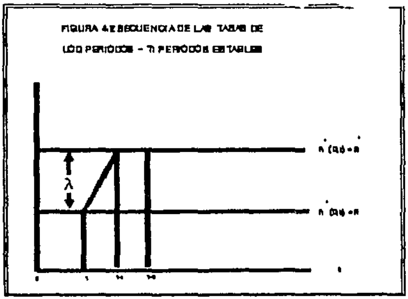
AL PRINCIPIO DEL SIGUIENTE PERIODO, LA ESTRUCTURA DEL PERIODO ES $h^{*}(2,t)$ Y LA TASA DEL PERIODO t^{*} ES $h^{*}(2,t+2)$ Y ASI SUCESIVAMENTE. LA TASA DEL PERIODO t SIEMPRE SE ENCUENTRA DESPLAZANDO A LA ESTRUCTURA APROPIADA DEL PERIODO PARA EL PERIODO Y ENCONTRANDO LA TASA RELEVANTE DE DESCUENTO DE UN PAGO QUE OCURRIRA t PERIODOS MAS TARDE. LA EVOLUCION DE LA TASA DEL PERIODO t ESTA DADA POR LA LINEA PUNTEADA EN EL DIAGRAMA.

SI SE COMIENZA EN EL PERIODO $h(0,t)$, INSTANTANEAMENTE SE TRASLADA A $h^{*}(0,t)$, Y EN LOS PERIODOS SUCESIVOS SE CONVERTIRA EN $h^{*}(1,t+1)$, $h^{*}(2,t+2)$,.... SI NO EXISTE UN CAMBIO ALEATORIO ASCENDENTE INICIAL, LAS TASAS DE INTERES EN LOS PERIODOS SUCESIVOS t SERAN $h(0,t)$,$h(1,t+1)$, $h(2,t+2)$,..., DONDE LAS QUE COMIENZAN EN EL PERIODO DESPUES DEL TIEMPO CERO, SON TOMADAS DE LAS TASAS ADELANTADAS CALCULADAS DEL PERIODO INICIAL. DESDE QUE EL PERIODO INICIAL ES ALEATORIO, ES POSIBLE QUE UNA GRAN VARIEDAD DE SIMULACIONES DE LAS TASAS DE INTERES FUTURAS SE DESARROLLE.

EN OTRAS PALABRAS, EXISTE UNA SIMULACION FUTURA PARA TODAS LAS TASAS DE INTERES QUE CORRESPONDAN A CADA CAMBIO ALEATORIO INICIAL.

SI EL CAMBIO INICIAL ESTA ATRIBUIDO A UNA VARIABLE ALEATORIA SIMPLE, TODA LA SECUENCIA DE LAS TASAS FUTURAS DE INTERES DEPENDE DEL VALOR DE LA VARIABLE ALEATORIA. EN ESTE SENTIDO, SE PUEDE ASOCIAR UNA SECUENCIA DE TASAS SOBRE EL TIEMPO CON UNA VARIABLE ALEATORIA SIMPLE O SE PUEDE ASOCIAR UNA SECUENCIA DE TASAS SOBRE EL TIEMPO CON UN VECTOR DE VARIABLES ALEATORIAS.

CONTRASTANDO ESTA EVOLUCION DE LAS TASAS CON EL CASO ESPECIAL EN EL CUAL EL PERIODO INICIAL ES ESTABLE. SI EL PERIODO ESTABLE CAMBIA ADITIVAMENTE POR UN VALOR 1 ALEATORIO COMO EN LA FIGURA 4-2, LAS TASAS $h^*(1,t+1)$, $h^*(2,t+2)$,... SON LEIDAS DE LAS CURVAS ESTABLES DEBIDO A QUE EL PERIODO ADELANTADO SIEMPRE ES EL MISMO POR DEFINICION (COMO SE VIO EN EL CAPITULO ANTERIOR). CUANDO SE PUEDA REPRESENTAR LA TASA OBSERVADA INICIAL POR $R = h\,[0,t]$ PARA TODA t Y LAS TASAS SIGUIENTES POR $R^* = h^*\,[0,t]$ PARA TODA t, ALGUNOS DE LOS CONCEPTOS PREVIOS ESTAN PRESENTES EN ESTA APROXIMACION MAS GENERAL A UN CAMBIO ALEATORIO DEL PERIODO.



BAJO CONDICIONES DE CERTEZA, EN EL CAPITULO 3 SE DEMOSTRO QUE

$$[1 + h(0,2)]^2 = [1 + h(0,1)] * [1 + h(1,2)] \qquad (4.1.1)$$

ES LA MANERA DE DEFINIR LA TASA ADELANTADA $h(1,2)$. QUE ES UNA NOCION DE EQUILIBRIO. ESTA ECUACION SIGNIFICA QUE SI SE INVIERTE $1 EN UN VALOR CON CUPON CERO, CRECE A $[1+h(0,1)]$ EN UN PERIODO.

SI ESTE MONTO ES REINVERTIDO EN OTRO VALOR DE UN PERIODO, ENTONCES, $h(1,2)$ CRECERA A $[1+h(0,1)] * [1+h(1,2)]$, Y DEBERA SER EQUIVALENTE AL RETORNO DE INVERTIR $1 EN UN INSTRUMENTO FINANCIERO DURANTE DOS PERIODOS, $[1+h(0,2)]^2$; LA IGUALDAD EN (4.1.1) RESULTA SI LOS RETORNOS DE LAS ESTRATEGIAS SON EQUIVALENTES.

AHORA, SI SE INTRODUCE LA INCERTIDUMBRE SOLO EN EL PRIMER PERIODO, AUN CUANDO $h(0,t)$ SEA OBSERVADA, Y LAS TASAS ADELANTADAS SE PUEDEN OBTENER DE ESTA, EL PERIODO CAMBIA ALEATORIAMENTE A $h^*(0,t)$, INMEDIATAMENTE DESPUES DE UNA INVERSION INICIAL. DESPUES DE ESO, SE ASUME LA CERTEZA PARA PREVALECER DE MODO TAL, QUE LOS PERIODOS ADELANTADOS SE CONVIERTEN EN LOS PERIODOS ACTUALES, Y LAS ACTUALES TASAS PUEDAN SER LEIDAS DE ESTAS COMO SE DESCRIBE EN LA FIGURA 4.1.

LA INCERTIDUMBRE INICIAL TIENE UN EFECTO EN LOS PERIODOS POSTERIORES QUE PUEDE REPRESENTARSE COMO LA DIFERENCIA

$$h^*(\pi,\pi+t) - h(\pi,\pi+t) \qquad t = 1,2,.... \qquad (4.1.2)$$

DONDE $h^*(\pi,\pi+t)$ ES LA TASA DEL PERIODO ACTUAL A LA FECHA π Y $h(\pi,\pi+t)$ ES LA TASA ADELANTADA EN EL PERIODO INICIAL OBSERVADO $h(0,t)$. ESTA DIFERENCIA SE PUEDE EXPRESAR DE MUCHAS MANERAS, UNA DE ELLAS ES

$$h^*(\pi,\pi+t) = h(\pi,\pi+t) + [h^*(\pi,\pi+t) - h(\pi,\pi+t)] \qquad (4.1.3)$$

BAJO HIPOTESIS PURA DEL PERIODO, ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR QUE LA TASA ACTUAL $h^*(\pi,\pi+t)$ ES IGUAL A LA TASA ESPERADA $h(\pi,\pi+t)$, MAS UN COMPONENTE INESPERADO: $[h^*(\pi,\pi+t)- h(\pi,\pi+t)]$. LA INCERTIDUMBRE ENVUELTA EN EL CAMBIO QUE PRODUCE $h^*(0,t)$ SE ENCAJA AHORA EN UN COMPONENTE INESPERADO DE LAS TASAS FUTURAS. POR OTRO LADO, SI SE QUIERE TENER EN CUENTA LO QUE SE LLAMA PREMIO CON LIQUIDEZ, LA TASA ESPERADA ES $h(\pi,\pi+t) - L(\pi,\pi+t)$, DONDE $L(\pi,\pi+t)$ ES EL PREMIO CON LIQUIDEZ. LA TASA FUTURA SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$h^*(\pi,\pi+t) = h(\pi,\pi+t) - L(\pi,\pi+t) +(h^*(\pi,\pi+t)-[h(\pi,\pi+t)]$$

$$+ [L(\pi,\pi+t)]) \qquad (4.1.4)$$

EL ULTIMO TERMINO ENTRE CORCHETES SE CONVIERTE EN EL COMPONENTE INESPERADO DE LA TASA FUTURA. SE PUEDE DESCOMPONER (4.1.2) UTILIZANDO LA HIPOTESIS DE EXPECTACION, ESTO ES, QUE SIENDO $h(0,t)$ LA ACTUAL TASA DEL PERIODO t, SEA LA TASA ESPERADA DEL PERIODO t, π PERIODOS MAS TARDE; ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR LA TASA ACTUAL FUTURA DEL PERIODO t COMO

$$h^*(\pi,\pi+t) = h(0,t) + [h^*(\pi,\pi+t) - (h(0,t))] \quad (4.1.5)$$

DONDE $(h^*(\pi,\pi+t) - [h(0,t)])$ SE CONVIERTE EN EL COMPONENTE INESPERADO. (4.1.2) PUEDE EXPRESARSE EN UNA GRAN VARIEDAD DE MANERAS, PORQUE (4.1.3), (4.1.4) Y (4.1.5) SON ESCENCIALMENTE LAS MISMAS.

ESTAS FORMAS NO TIENEN SIGNIFICADO ESPECIAL A NO SER DE QUE SE ESTE DISPUESTO A ESPECIFICAR LA FORMA DE DESCOMPOSICION POR ALGUNA HIPOTESIS DE ASEVERACION EXPLICITA, QUE TENGA UN COMPORTAMIENTO EN LA IMPLICACION EN LOS MERCADOS DE VALORES.

LAS ESTRATEGIAS DE LOS PORTAFOLIOS ADECUADOS U OPTIMOS PARA DESPLAZAR LOS PERIODOS "NO ESTABLES" DEPENDEN DE LA ESPECIFICACION DEL PROCESO ESTOCASTICO DEL PERIODO. ESTA ESTIPULA EXPLICITAMENTE COMO $h^*(0,t)$ ESTA DETERMINADA COMO UNA FUNCION DE UNA O MAS VARIABLES ALEATORIAS.

ESTO ES SUFICIENTE PARA ESTABLECER LA DIFERENCIA $h^*(\pi,\pi+t) - [h(\pi,\pi+t)]$ PARA TODA t, COMO UNA FUNCION DE LAS VARIABLES ALEATORIAS SUFICIENTES. ALGUNAS DE ESTAS ESPECIFICACIONES Y SUS IMPLICACIONES PARA LOS MODELOS DE DURACION SE MOSTRARAN MAS ADELANTE.

EL PUNTO MAS IMPORTANTE ES QUE EXISTEN MUCHAS MEDIDAS DE LA DURACION. SE DEFINIO LA DURACION COMO EL PROMEDIO DE LAS FECHAS EN LAS CUALES SE HARAN LOS PAGOS FUTUROS.

$$D = \sum_{t=1}^{W} W(t) * t$$

UTILIZANDO UN PERIODO ESTABLE, EL PESO APROPIADO AL TIEMPO t CONSISTE EN EL VALOR DEL PAGO OCURRIDO EN EL MISMO TIEMPO RELATIVO AL VALOR TOTAL DEL PERIODO. CADA PROCESO ESTOCASTICO DEL PERIODO IMPLICA UNA MEDIDA DE LA DURACION, ASI PROCESOS ESTOCASTICOS DIFERENTES, IMPLICAN DIFERENTES MEDICIONES DE LA MISMA.

4.2 ESPECIFICACIONES DE UN PROCESO ESTOCASTCO.

SE VERAN CUATRO PROCESOS ESTOCASTICOS. CADA UNO CONSIDERADO EN UNO U OTRO TIEMPO, ES UN FACTOR DE PROCESO. CADA CAMBIO ALEATORIO INSTANTANEO DE $h(0,t)$ A $h^*(0,t)$, t=1,2,..., ES UNA FUNCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA O FACTOR.

EN CADA PROCESO, ESTE FACTOR ALEATORIO TIENE EL MISMO SIGNIFICADO QUE EL REDITO DEL VENCIMIENTO. EL FACTOR ALEATORIO ES UN NUMERO DE UN PERIODO DADO, COMO EL REDITO AL VENCIMIENTO ES UN NUMERO DE LA TASA DE DESCUENTO APLICADA A PERIODOS FUTUROS.

UN FACTOR DEL PROCESO ESTOCASTICO APLICADO A LOS PERIODOS "NO ESTABLES" ES UNA GENERALIZACION O EXTENSION DE UN CAMBIO ALEATORIO DE UN PERIODO ESTABLE.

4.2.1 CAMBIOS ADITIVOS.

UNA MANERA MUY SIMPLE PARA ESPECIFICAR LA DIFERENCIA $h^{*}(0,t) - [h(0,t)]$, ES MENCIONAR QUE ESTA DIFERENCIA ES ALEATORIA E INDEPENDIENTE DEL PERIODO DEL VENCIMIENTO t, ENTONCES

$$h^{*}(0,t) = h(0,t) + \tau \qquad t = 1,2,\ldots \qquad (4.2.1.1)$$

DONDE τ ES UNA VARIABLE ALEATORIA. HABIENDO OBTENIDO $h^{*}(0,t)$ DE ESTA MANERA, LAS TASAS FUTURAS SIMPLEMENTE SE DESARROLLAN COMO LAS TASAS ADELANTADAS QUE SE OBTIENEN DE $h^{*}(0,t)$.

LA DIFERENCIA $h^{*}(\pi,\pi+Tt) - [h(\pi,\pi+t)]$ ES UNA FUNCION EXPLICITA DE τ. ES UN PROCESO ESTOCASTICO ADITIVO, DEBIDO A QUE UNA UNIDAD SIMPLEMENTE SE AÑADE AL PERIODO ACTUAL, EN ORDEN DE CALCULAR EL NUEVO PERIODO INSTANTANEO. A ESTE PROCESO SE LE CONOCE COMO CAMBIO PARALELO, CONCEPTO IGUAL QUE SE OBTIENE AL AGREGAR UNA CONSTANTE A $h(0,t)$; SE PRODUCE UNA LINEA $h^{*}(0,t)$ QUE ES PARALELA A $h(0,t)$, SI $h(0,t)$ ES NO ESTABLE.

EL VALOR DE LA VARIABLE ALEATORIA τ, ES A VECES LLAMADO UN IMPACTO INSTANTANEO.

PARA RANGOS RAZONABLES DE TASAS DE INTERES (POR EJEMPLO $0 < h(0,t) < 2$ PARA TODA t), LA DIFERENCIA $h^{*}(\pi,\pi+t) - [h(\pi,\pi+t)]$ SERA SIEMPRE UNA CONSTANTE PARA TODA t. CONSECUENTEMENTE, SI EL PROCESO ES ADITIVO, LA TASA FUTURA $h^{*}(\pi,\pi+t)$ SE OBTIENE POR UNA ADICION ESENCIAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA A $h(\pi,\pi+t)$, Y LA VARIABLE AÑADIDA SERA UNA FUNCION DE τ, EL IMPACTO INSTANTANEO.

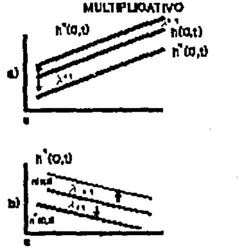
4.2.2 CAMBIOS MULTIPLICATIVOS.

COMENZANDO SIN EL TERMINO DE SIMPLICIDAD, SE PUEDE ESPECIFICAR AL PROCESO COMO

$$h^{*}(0,t) = \tau * [h(0,t)] \qquad t = 1,2,\ldots \qquad (4.2.2.1)$$

DONDE τ ES UNA VARIABLE ALEATORIA POSITIVA; ENTONCES, SI $\tau=1$ EL PERIODO NO CAMBIA, SI $\tau > 1$ EL PERIODO CAMBIARA ASCENDENTEMENTE Y SI $\tau < 1$ EL CAMBIO SERA DESCENDENTE.
SI EL PERIODO TIENE UN DESLIZAMIENTO ASCENDENTE INICIAL Y $\tau > 1$, EL PERIODO CAMBIARA ASCENDENTEMENTE Y LAS TASAS A LARGO PLAZO INSTANTANEAMENTE SON MAYORES QUE LAS TASAS A CORTO PLAZO. SIMILARMENTE, SI EXISTE UN DESLIZAMIENTO DESCENDENTE Y $\tau < 1$ LAS TASAS A LARGO PLAZO DECRECEN INSTANTANEAMENTE MAS RAPIDO QUE LAS TASAS A CORTO PLAZO. ESTO SE ILUSTRA EN LA FIGURA 4.3(a). POR OTRO LADO, SI EL PERIODO TIENE DESLIZAMIENTO DESCENDENTE, LAS TASAS A CORTO PLAZO CAMBIAN INSTANTANEAMENTE MAS QUE LAS TASAS A LARGO PLAZO COMO SE ILUSTRA EN LA FIGURA 4.3(b).

FIGURA 4.3 : TASAS DEL PERIODO MULTIPLICATIVO



SE DEBE TOMAR EN CUENTA QUE ESTAS COMPARACIONES SON DE TASAS DE INTERES QUE CAMBIAN INSTANTANEAMENTE, NO SE SIGUE QUE NO ASI SOBRE EL TIEMPO DONDE LOS MISMOS RESULTADOS PREVALECERAN. LA DIFERENCIA $h^*(\pi,\pi+t)-[h(0,t)]$ NO SIEMPRE SE OBTENDRA PARA $\tau > 1$, CUANDO $h(0,t)$ TIENE DESLIZAMIENTO ASCENDENTE. UN SIMPLE EJEMPLO LO DEMOSTRARA:

SEAN $h(0,1)$, $h(0,2)$, $h(0,3) = (.083,.084,.0847)$ Y $\tau = 1.015$, ENTONCES: $h^*(0,1)$, $h^*(0,2)$, $h^*(0,3) = (.08425,.08526,.08597)$. SE PUEDEN CALCULAR LAS TASAS ADELANTADAS DE ESTOS PERIODOS:

$$h^*(1,2) = \frac{[1+h^*(0,2)]^2}{[1+h^*(0,1)]} = .08628$$

Y $h^*(1,3) = .08683$.

ASI $h^*(1,2) - [h(0,1)] = (.08628 - .083) = .00328$ Y

$h^*(1,3) - [h(0,2)] = .0028$.

LA TASA A UN AÑO AUMENTO EN 33 PUNTOS Y LA TASA DEL SEGUNDO AÑO AUMENTO 28 PUNTOS DESPUES DE QUE TRANSCURRIO UN AÑO. EL PROCESO MULTIPLICATIVO PUEDE SER CONSISTENTE CON LA OBSERVACION EMPIRICA, AL PASO DEL TIEMPO TASAS A CORTO PLAZO TIENEN MAYOR FLUCTUACION QUE LAS TASAS A LARGO PLAZO.

4.2.3 CAMBIOS FISHER-WEIL.

FISHER Y WEIL FUERON LOS PRIMEROS EN PLANEAR LAS ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION BASADAS EN LAS FLUCTUACIONES DEL PERIODO EN VEZ DE LAS FLUCTUACIONES DEL REDITO AL VENCIMIENTO. TRABAJARON SIN LA IDEA DE CONTINUIDAD Y SUPUSIERON UN PROCESO ESTOCASTICO SIN ESTA IDEA.

NO SE ASUME CONTINUIDAD, PERO ES UN CAMBIO DE PERIODO ANALOGO. EL PROCESO ESTOCASTICO SIN CONTINUIDAD SE PUEDE ESCRIBIR

$$[1 + h^*(0,t)] = \tau * [1 + h(0,t)] \qquad t = 1,2,... \qquad (4.2.3.1)$$

DONDE τ ES UNA VARIABLE ALEATORIA POSITIVA CON UN RANGO QUE SIEMPRE IMPLICA QUE $h^*(0,t) > 0$. SE PUEDE REESCRIBIR (4.2.3.1) COMO

$$h^*(0,t) = (\tau-1) + (\tau*[h(0,t)]) \qquad t = 1,2,... \qquad (4.2.3.2)$$

ASI ESTE PROCESO ES UNA COMBINACION DE LOS CAMBIOS ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS Y DONDE LOS CAMBIOS ESTAN RELACIONADOS CON LA VARIABLE ALEATORIA τ. ES FACIL VER QUE ESTE PROCESO PRODUCE UN MODELO SIMILAR AL COMPORTAMIENTO DE LA FIGURA 4.3. OTRA VEZ, SE PUEDE OBSERVAR QUE A TRAVEZ DEL TIEMPO, LAS TASAS A CORTO PLAZO PUEDEN CAMBIAR MAS QUE LAS TASAS A LARGO PLAZO.

4.2.4 CAMBIOS LOGARITMICOS.

NINGUNO DE LOS PROCESOS ANTERIORES, TOMA EN CUENTA QUE LAS TASAS A CORTO PLAZO FLUCTUAN INSTANTANEAMENTE MAS QUE LAS TASAS A LARGO PLAZO PARA AMBOS DESLIZAMIENTOS (ASCENDENTE O DESCENDENTE) DEL PERIODO. CHANG EN 1979 NOTO ESTO Y PLANTEO DOS PROCESOS QUE TOMAN EN CUENTA ESTA CARACTERISTICA.

SU PROCESO DE ADICION LOGARITMICA SE ESCRIBE

$$h^*(0,t) = \frac{\tau * (Ln[1+\alpha*(t)])}{\alpha * (t)} + h(0,t) \quad t = 1,2,...$$

(4.2.4.1)

DONDE τ ES UNA VARIABLE ALEATORIA Y α ES UN PARAMETRO POSITIVO. SE PUEDE NOTAR QUE Ln[1+ α*(t)], QUE ES POSITIVO, SE INCREMENTA CON t A UNA TASA MAS PEQUEÑA QUE α*(t); ASI QUE LA RELACION Ln[1+α*(t)] / α*(t) DECRECE CUANDO t CRECE.

PARA UN VALOR DADO DE α, LAS TASAS A CORTO PLAZO ESTAN IMPACTANDO INSTANTANEAMENTE POR INCREMENTOS MAS LARGOS QUE LAS TASAS A LARGO PLAZO.
EL VALOR POSITIVO DE α REGULA EL GRADO EN EL CUAL LAS TASAS A CORTO PLAZO FLUCTUAN MAS QUE LAS A LARGO PLAZO.
LA EXTENSION DEL VALOR DE α, INDICA CUAN ESTRECHA ES LA RELACION ENTRE LOS CAMBIOS DE LAS TASAS A CORTO Y LARGO PLAZO. CUANO α TIENDE A CERO, Ln[1+α*(t)]/a*(t), TIENDE A LA UNIDAD. ENTONCES, SI α SE HACE MUY PEQUEÑA EL PROCESO DE ADICION LOGARITIMICA SE CONVIERTE EN EL PROCESO ADITIVO.

LA ANALOGIA ENTRE ESTE PROCESO Y EL PROCESO DE FISHER-WEIL ES

$$[1+h^*(0,t)] = \left[1 + \frac{\tau * (Ln[1+\alpha*(t)])}{\alpha * (t)} \right] * [1+h(0,t)]$$

(4.2.4.2)

ASI QUE

$$h^*(0,t) = \frac{\tau * (Ln[1+\alpha*(t)])}{\alpha * (t)} + \left[1 + \frac{\tau * (Ln[1+\alpha*(t)])}{\alpha * t} \right] * [h(0,t)] \quad t = 1,2,..$$

(4.2.4.3)

ES LLAMADO EL IMPACTO MULTIPLICATIVO - LOGARITMICO.

ESTE PROCESO ES UNA COMBINACION DE LOS PROCESOS MULTIPLICATIVO Y ADITIVO Y PRESERVA LA CARACTERISTICA DE QUE LA FLUCTUACION DE LAS TASAS A CORTO PLAZO SON MAYORES QUE LAS DE LARGO PLAZO. AMBOS PROCESOS LOGARITMICOS INVOLUCRAN UN ESTADO DEPENDIENTE DEL TERMINO. LOS COMPONENTES ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS SON FUNCIONES DEL TERMINO DEL VENCIMIENTO.

ESTA ES UNA MANERA EN EL CUAL EL IMPACTO DEL PERIODO PUEDE VARIAR CON EL VEMCIMIENTO t A LA MEDIDA EN QUE α TIENDE A CERO, EL IMPACTO MULTIPLICATIVO LOGARITMICO TIENDE A SER EL IMPACTO DE FISHER-WEIL.

A MEDIDA DE QUE EL VALOR DE α ES GRANDE, SE AMPLIA LA RELACION ENTRE EL CAMBIO DE LAS TASAS A CORTO Y LARGO PLAZO.

4.3 LA DURACION COMO ELASTICIDAD.

SE REDEFINIRA LA DURACION COMO LA CORRESPONDENCIA APROPIADA A LA SUPOSICION FUNDAMENTAL DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS, Y AUN ASI, CONSERVAR LA INTERPRETACION DE ELASTICIDAD.

EL PRECIO DE UN VALOR ES

$$p = \sum_{t=1}^{m} (F(t)) * (1+R)^{(-t)} \qquad (4.3.1)$$

DONDE R ES EL REDITO AL VENCIMIENTO, m EL VENCIMIENTO, F(t) EL PAGO EN EFECTIVO PROMETIDO EN LA FECHA t.
DERIVANDO p CON RESPECTO A R:

$$\frac{d_p}{d_R} = -\sum_{t=1}^{m} t*(F(t))*(1+R)^{-(t+1)} \qquad (4.3.2)$$

MULTIPLICANDO (4.3.2) POR (1+R) Y DIVIDIENDO ENTRE p:

$$\frac{1+R}{p}\,\frac{d_p}{d_R} = -\frac{\sum_{t=1}^{m} t*(Ft)*(1+R)^{-(t+1)}*(1+R)}{p} = -\frac{\sum_{t=1}^{m} t*(Ft)*(1+R)^{-t}}{p} \qquad (4.3.3)$$

$$= -D$$

DONDE D ES LA DURACION. MULTIPLICANDO POR R Y DIVIDIENDO ENTRE (1+R) SE OBTIENE

$$\frac{(1+R) * R* \ d_p}{p * (1+R) * d_R} = \frac{R * d_p}{p * d_R} = -\frac{D*R}{1+R} \qquad (4.3.4)$$

QUE ES LA ELASTICIDAD DE p CON RESPECTO A R.

ALTERNATIVAMENTE, LA ELASTICIDAD DE p CON RESPECTO AL FACTOR DE DESCUENTO $\beta = (1+R)^{-1}$, ES LA DURACION Y PUEDE EXPRESARSE COMO

$$\frac{\beta}{p} * \frac{d_p}{d_R} = D \qquad (4.3.5)$$

LA ECUACION EN (4.3.4) SE UTILIZA PARA APROXIMAR EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO EN LAS TASAS DE INTERES. SE PUEDE ESCRIBIR

$$\frac{\delta p}{p} \approx - \frac{D}{1+R} * \delta R \qquad (4.3.6)$$

DONDE δp Y δR, SON LOS CAMBIOS FINITOS QUE HAN SIDO SUSTITUIDOS POR dp Y dR, RESPECTIVAMENTE.

EN EL CONTEXTO DE QUE UN PERIODO CAMBIANTE ES OPUESTO AL REDITO AL VENCIMIENTO, SE ESTA INTERESADO EN PRODUCIR UNA ECUACION PARECIDA A LA ECUACION (4.3.6), PARA MOSTRAR QUE EL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE UN VALOR CORRESPONDE A UN CAMBIO ALEATORIO EN EL PERIODO. EL PRECIO DE UN VALOR PUEDE EXPRESARSE COMO

$$p = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [\ 1+h(0,t)\ ]^{-t} \qquad (4.3.7)$$

INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO DEL PERIODO, ESTE PRECIO CAMBIA A

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [1+h^{*}(0,t)]^{-t} \qquad (4.3.8)$$

EL PRECIO ESTA EXPRESADO COMO UNA FUNCION ALEATORIA DEL IMPACTO τ, PORQUE EL NUEVO PERIODO $h^{*}(0,t)$, ES UNA FUNCION DE τ; POR EJEMPLO BAJO EL PROCESO FISHER-WEIL ENTONCES (4.3.8) SE CONVIERTE EN

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * \tau^{-t} * [1+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.3.9)$$

SUSTITUYENDO EN (4.3.7) Y DERIVANDO (4.3.9) CON RESPECTO A τ:

$$p'(\tau) = \frac{dp}{d\tau} = - \sum_{t=1}^{m} t * F(t) * \tau^{-(t+1)} * [1+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.3.10)$$

EVALUANDO ESTA FUNCION EN $\tau = 1$:

$$p'(\tau) = \left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau = 1} = -\sum_{t=1}^{m} t * F(t)*[1+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.3.11)$$

DIVIDIENDO (4.3.11) ENTRE EL PRECIO ORIGINAL [p(1)]:

$$\frac{p'(\tau)}{p(1)} = \frac{1}{p} * \left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau = 1} = -\frac{\sum_{t=1}^{m} t * F(t)*[1+h(0,t)]^{-t}}{P} \qquad (4.3.12)$$

SI SE DEFINE LA DURACION POR EL PROCESO DE FISHER-WEIL:

$$D_{F-W} = \frac{\sum_{t=1}^{m} t * F(t) * [1+h(0,t)]^{-t}}{P} \qquad (4.3.13)$$

SE PUEDE REESCRIBIR (4.3.12) COMO

$$\frac{1}{p} * \left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau = 1} = - D_{F-W} \qquad (4.3.14)$$

UTILIZANDO ESTA ECUACION PARA APROXIMAR EL PORCENTAJE DEL CAMBIO EN EL PRECIO SE PUEDE ESCRIBIR

$$\frac{\delta p}{p} \approx - D_{F-W} * \delta\tau \qquad (4.3.15)$$

DONDE δp Y $\delta\tau$ HAN SIDO SUSTITUIDOS POR dp Y $d\tau$, RESPECTIVAMENTE.
EN LA ECUACION (4.3.15) δp REPRESENTA UNA APROXIMACION DE $p(\tau) - p(1)$; EL PRECIO NUEVO ES MENOR QUE EL ORIGINAL Y $\delta\tau$ ES EL CAMBIO $(\tau - 1)$. EL NUEVO VALOR DE τ ES MENOR QUE EL ORIGINAL.

ESTA NUEVA EXPRESION DEL PORCENTAJE DEL CAMBIO DEL PRECIO INVOLUCRA UNA NUEVA DEFINICION DE LA DURACION DADA EN (4.3.13).

PARA DISTINGUIR ESTA MEDIDA DE DURACION DE OTRAS, EL SUB-INDICE F-W INDICA QUE SE TRATA DEL PROCESO FISHER-WEIL.

SIMILARMENTE, LA MEDIDA ANTERIOR DE LA DURACION, EXPRESADA EN LA ECUACION (4.3.3), SE PUEDE ESCRIBIR CON EL SUB - INDICE M DE MACAULAY, QUIEN FUE EL PRIMERO EN UTILIZARLA.
ENTONCES:

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{m} t * F(t) * [1+R]^{-t}}{p} \qquad (4.3.16)$$

DONDE R ES EL REDITO AL VENCIMIENTO.

LA DURACION D_{F-W} TIENE MUCHAS DE LAS PROPIEDADES DE D_M. SI EL INTRUMENTO FINANCIERO ES UN BONO CON CUPON CERO, ENTONCES SOLO EXISTE UN PAGO Fm,DISTINTO DE CERO: $F(m) * [1+h(0,m)]^{-m}$ ASI QUE $D_{F-W} = m$. SI SE PERMITE QUE $W(t)^{F-W} = Ft*[1+h(0,t)]^{-t}$ SEA UN PESO Y SE SUSTITUYE EN (4.3.13), SE OBSERVA QUE D_{F-W} ES UN PROMEDIO DE LAS FECHAS DE VENCIMIENTO EN EL CUAL EL PAGO OCURRE Y

$$\sum_{t=1}^{m} W(t)^M = 1. \text{ SIMILARMENTE PARA } D_M,$$

$W(t)^M = F(t)*(1+R)^{-t}$ ES UN PESO; ASI QUE

$$\sum_{t=1}^{m} W(t)^M = 1.$$

LA MAYOR DIFERENCIA ENTRE (4.3.13) Y (4.3.16) SIMPLEMENTE ES EN LOS PESOS DISTINTOS. SI EL PERIODO TIENE UN DESLIZAMIENTO ASCENDENTE R (EL REDITO AL VENCIMIENTO) EXCEDE (0,1), PERO ES MENOR QUE h(0,m),' Y SE OBSERVA QUE $W(t)^M < W(t)^{F-W}$ PARA VALORES PEQUEÑOS DE t, Y $W(t)^M > W(t)^{F-W}$ PARA VALORES GRANDES DE t.

ESTO SIGNIFICA QUE SE LE DA MAS PESO A LAS FECHAS CERCANAS EN D_{F-W} Y MENOR PESO A LOS PAGOS LEJANOS; DE AQUI SE SIGUE QUE $D_{F-W}<D^M$ PARA PERIODOS CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE Y $D^{F-W}>D^M$ PARA PERIODOS CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE.

EXISTEN DOS PUNTOS IMPORTANTES PARA ENTENDER ESTE DESARROLLO.

PRIMERO: LA NUEVA APROXIMACION DEL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO, ECUACION (4.3.15), ESTA DADA EN TERMINOS DEL IMPACTO ALEATORIO τ, Y NO ESTA EXPRESADO EN TERMINOS DE UN CAMBIO EN EL REDITO AL VENCIMIENTO.

SEGUNDO: EL IMPACTO ALEATORIO DE (4.3.15) EL PERIODO QUE SE DIFERENCIA CON EL PROCESO ESTOCASTICO ASUMIDO, Y LA DURACION EN (4.3.15) QUE PUEDE SER DEPENDIENTE DEL PROCESO ESTOCASTICO.

4.3.1 PROCESO ESTOCASTICO ADITIVO.

LA DURACION D_A SE DEFINE:

$$\frac{D_A}{1+h(0,D_A)} = \frac{\sum_{t=1}^{m} F(t) * \left[\frac{t}{(1+h(0,t))}\right] * [1+h(0,t)]^{-t}}{p} \tag{4.3.1.1}$$

Y EL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO SE APROXIMA COMO

$$\frac{\delta p}{p} \approx \frac{-D_A}{1+h(0,D_A)} * \tau \tag{4.3.1.2}$$

PARA OBTENER D_A DE LA ECUACION (4.3.1.1), ES NECESARIO CONOCER EL PERIODO h(0,t), DE LOS PUNTOS t ENTRE LAS FECHAS DE PAGO. PARA PODER UTILIZAR (4.3.1.2) SOLO SE NECESITA EL CALCULO DEL LADO DERECHO DE LA ECUACION (4.3.1.1). EL VALOR DE τ EN (4.3.1.2) ES TAMBIEN EL CAMBIO EN τ PORQUE EL VALOR INICIAL DE τ ES CERO.

4.3.2 PROCESO ESTOCASTICO MULTIPLICATIVO.

LA DURACION D_{MS} SE DEFINE

$$\frac{D_{MS}*h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} = \frac{\sum_{t=1}^{m} Ft * \left[\frac{t*h(0,t)}{1+h(0,t)}\right] * [1+h(0,t))]^{-t}}{p} \tag{4.3.2.1}$$

Y EL PORCENTAJE DEL CAMBIO DEL PRECIO, ES APROXIMADAMENTE

$$\frac{\delta p}{p} \approx \frac{-D_{MS}*h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} * (\tau-1) \tag{4.3.2.2}$$

AQUI $\tau-1 = \delta\tau$, PORQUE EL VALOR INICIAL DE τ ES UNO. PARA PODER UTILIZAR (4.3.2.2) NO SE NECESITA CALCULAR D_{MS}, EL LADO DERECHO DE (4.3.2.2) ES SUFICIENTE.

4.3.3 PROCESO ESTOCASTICO LOGARITMICO.

LA DURACION PARA EL PROCESO LOGARITMICO ES $D_{LA}(\alpha)$ Y SE DEFINE COMO

$$\frac{Ln\,[\;1+\alpha*D_{LA}(\alpha)\;]}{1+h[0,D_{LA}(\alpha)]} = \frac{\sum_{t=1}^{m} Ft * \left[\frac{Ln\ (1+\alpha*t)}{1+h(0,t)}\right] * [1+h(0,t)]^{-t}}{p} \qquad (4.3.3.1)$$

Y SU APROXIMACION ES

$$\frac{\delta p}{p} \approx \frac{-\,Ln[\;1+\alpha*D_{LA}(\alpha)\;]}{\alpha*[\;1+h(0,D_{LA}(\alpha)\;]} * \tau \qquad (4.3.3.2)$$

LA DURACION PARA EL PROCESO MULTIPLICATIVO LOGARITMICO ES $D_{LM}(\alpha)$ Y SE DEFINE COMO

$$Ln\,[1+(\alpha*D_{LM}(\alpha))] = \frac{\sum_{t=1}^{m} Ft*Ln[1+(\alpha*t)] * [1+h(0,t)]^{-t}}{p} \qquad (4.3.3.3)$$

Y SU APROXIMACION ES

$$\frac{\delta p}{p} \approx \frac{-\,Ln[\;1+(\alpha*D_{LM}(\alpha))\;]}{\alpha} * \tau \qquad (4.3.3.4)$$

4.4 EJEMPLOS.

LA DURACION DE MACAULAY (D_M) SIEMPRE ES APLICABLE EN LA FORMULA DE APROXIMACION PARA EL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO. PARA UTILIZAR LA FORMULA EN LA ECUACION (4.3.6), SE NECESITA SABER EL REDITO ACTUAL, LA DURACION Y EL CAMBIO DEL REDITO.

LAS FORMULAS DE APROXIMACION CORRESPONDIENTES A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS PUEDEN SER CORREGIDAS UTILIZANDO SOLO LOS IMPACTOS QUE CORRESPONDEN A ESTOS PROCESOS.

POR OTRA PARTE, PARA CALCULAR CADA UNA DE ESTAS DURACIONES, SE DEBE CONOCER EXPLICITAMENTE EL PERIODO, Y EN EL CASO DE LOS PROCESOS LOGARITMICOS, ADEMAS EL VALOR DE α.

PARA ILUSTRAR LOS CALCULOS INVOLUCRADOS, TOMESE DOS PERIODOS PARTICULARES, UNO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE Y OTRO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE. ENTONCES CADA UNO DE ESTOS PERIODOS SERA IMPACTADO DE ACUERDO CON CADA UNO DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS, Y SE UTILIZARAN LAS FORMULAS DE APROXIMACION.

LA TABLA 5 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS DOS PERIODOS INICIALES, EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE AUMENTA RAPIDAMENTE Y ESTOS TIENDEN A SER ESTABLES; EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE CAE RAPIDAMENTE Y ESTOS TIENDEN A SER ESTABLES. PARA SIMPLIFICAR TOMESE COMO 100 EL PAGO EN CADA PERIODO; UTILIZANDO ESTOS PERIODOS EL PRECIO DE CADA PAGO SERA:

$$P_{as} = 100 * \sum_{t=1}^{m} [1+h(0,t)]^{-t} = \$814.96$$

$$P_{dec} = 100 * \sum_{t=1}^{m} [1+h(0,t)]^{-t} = \$944.60 \qquad (4.4.1)$$

PARA LOS PERIODOS ASCENDENTES Y DESCENDENTES, RESPECTIVAMENTE.

PARA EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE, EL REDITO AL VENCIMIENTO ES 10.65%. PARA EL PERIODO CON DESLIZMIENTO DESCENDENTE ES 8.53%. AUNQUE LOS PAGOS SON LOS MISMOS PARA AMBOS PERIODOS, EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE MUESTRA UN VALOR MAS GRANDE PARA EL PERIODO.

ESTO IMPLICA QUE LA TASA INTERNA DE RETORNO DEBE SER MENOR PARA EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE PARA OBTENER UN PRECIO TAN ALTO. LA DURACION DE MACAULAY ESTA INVERSAMENTE RELACIONADA CON LA TASA INTERNA DE RETORNO, DEBIDO A QUE UN REDITO PEQUEÑO DA UN PESO GRANDE EN LAS FECHAS DE PAGO TEMPRANAS. ENTONCES, SE PUEDE ESPERAR QUE LA DURACION DE MACAULAY SEA GRANDE PARA EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE.

LA TABLA 6 (DEL APENDICE) MUESTRA LAS DURACIONES PARA AMBOS PERIODOS, NOTANDOSE QUE LA DURACION DE MACAULAY (D_M = 7.8942 AÑOS) ES REALMENTE GRANDE PARA EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE. COMO SE HABIA MENCIONADO, LA DURACION DE FISHER-WEIL D_{F-W} EXCEDE A D_M PARA PERIODOS DESCENDENTES Y VICEVERSA PARA PERIODOS ASCENDENTES.

LAS DURACIONES PARA LOS PROCESOS ESTOCASTICOS LOGARITMICOS TIENDEN A SER MENORES QUE LAS OTRAS DURACIONES. ESTO OCURRE DEBIDO A QUE LOS LOGARITMOS EN LAS FORMULAS DE DURACION SE INCREMENTAN MUY LENTAMENTE JUNTO CON LAS FECHAS DE PAGO Y ESTOS TIENEN MAYOR PESO EN LAS FECHAS DE PAGO CERCANAS.

LOS PROCESOS LOGARITMICOS DE LA TABLA 6 ESTAN CALCULADOS UTILIZANDO EL VALOR DE α =.1. FUE NECESARIO INTERPOLAR EN DICHA TABLA PARA CALCULAR LAS DURACIONES PARA LOS PROCESOS ADITIVOS, MULTIPLICATIVOS Y LOGARITMICOS. ESTO FUE PERFECTO, ASUMIENDO QUE LAS TASAS DEL PERIODO ENTRE FECHAS DE PAGO ESTAN DADAS POR UNA RELACION LINEAL. POR EJEMPLO, PARA EL PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE, LA DURACION ADITIVA ESTA DADA POR

$$6.3721 = \frac{D_A}{1+h(0,D_A)}$$

ALGUNOS CALCULOS MUESTRAN QUE

$$6.352 = \frac{7}{1+h(0,7)} < 6.3721 = \frac{D_A}{1+h(0,D_A)} < \frac{8}{1+h(0,8)} = 7.246 \tag{4.4.2}$$

PARA EL PERIODO ASCENDENTE, $h(0,7) = .102$ Y $h(0,8) =.104$; ASUMIENDO LINEALIDAD: $h(0,t) = h(0,t)+.002 * (t-7)$ PARA $7 \leq z \leq 8$ Ó $h(0,t) + .002\Phi$ DONDE Φ ES EL INCREMENTO A 7 PARA OBTENER t. UTILIZANDO (4.3.3.) SE PUEDE DETERMINAR ESTE INCREMENTO:

$$\frac{7+\Phi}{1+h(0,7+\Phi)} = \frac{7+\Phi}{1.102+.002} = \frac{D_A}{1+h(0,D_A)} = 6.3721 \tag{4.4.3}$$

RESOLVIENDO PARA Φ Y DEJANDO QUE Da = 7 + Φ.

EN LAS TABLAS 7 A 11 (DEL APENDICE), CADA UNO DE LOS TERMINOS DE LA TABLA 5 ESTAN IMPACTADOS DE ACUERDO A LOS PROCESOS ADITIVO, MULTIPLICATIVO, FISHER-WEIL, ADITIVO LOGARITMICO Y MULTIPLICATIVO LOGARITMICO.

$$\frac{\Phi p}{p} = \left[\frac{- D_A}{1+h(0,D_A)} * \tau_1\right] - \left[\frac{D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1 + h(0,D_{MS})} * (\tau_2 - 1)\right] \qquad (4.5.2)$$

EN EL LADO DERECHO EXISTEN DOS TERMINOS.

EXISTE UN PERIODO QUE CORREPONDE A CADA UNA DE LAS VARIABLES CONTENIDAS EN EL PROCESO ESTOCASTICO DE LA ECUACION (4.5.1). POR OTRA PARTE, CADA UNO DE ESTOS TERMINOS CORRESPONDE A LA FUNCION IMPLICITA PARA DETERMINAR LA DURACION (POR EJEMPLO: $- D_A/[1+h(0,D_A)]$) QUE PUEDE EXISTIR SIENDO LA VARIABLE ALEATORIA CORREPONDIENTE EL UNICO PERIODO IMPACTADO.

LA TABLA 12 (DEL APENDICE) ILUSTRA EL CASO DE LA COMBINACION ALEATORIA ADITIVA Y MULTIPLICATIVA. LOS VALORES DE LAS VARIABLES ALEATORIAS ESTAN ESCOGIDOS DE MANERA TAL, QUE EL PERIODO OSCILE EN MODELOS COMPLETAMENTE DISTINTOS A LOS INICIALES. EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO SE PUEDE COMPARAR CON LA APROXIMACION DE MACAULAY; Y SE PUEDE IDENTIFICAR EL IMPACTO POR SEPARADO PARA CADA UNO DE LOS COMPONETES.

4.6 ALGUNAS CARACTERISTICAS IMPORTANTES DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS.

EXISTEN ESCENCIALMENTE DOS MANERAS DE VER UN PROCESO ESTOCASTICO SOBRE EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES.
PRIMERO: DESDE EL PUNTO DE VISTA DE QUE LOS MERCADOS FINANCIEROS SON EFICIENTES, EN EL SENTIDO DE QUE LA INFORMACION DISPONIBLE DE LOS VALORES DE LAS INVERSIONES ESTAN PREVIAMENTE CONTENIDOS EN EL PERIODO ACTUAL, DE MODO QUE, HACIENDO CASO OMISO DE COMO LA ESPERANZA ESTA FORMADA, EL PERIODO FUTURO EN ESCENARIOS EN EQUILIBRIO DEPENDE DE LA INFORMACION TODAVIA A SER REVELADA PERO EN EL CUAL NO ES ANTICIPADA. EN ESTE CONTEXTO, EL PROCESO ESTOCASTICO ES UNA FORMA DE REPRESENTAR EL IMPACTO INCIERTO DE LA INFORMACION EN LOS PERIODOS FUTUROS CON EL PROPOSITO DE CONSTRUIR EL ACTUAL PORTAFOLIO OPTIMO.

SEGUNDO: SIN HACER CASO DE LA EFICIENCIA DEL MERCADO O DE LA MANERA EN QUE LA INFORMACION PASADA O FUTURA, AFECTA A PERIODOS FUTUROS, EL INVERSIONISTA ENCUENTRA ESTO RAZONABLE Y QUIZAS MAS BARATO QUE EL BUSCAR MAS INFORMACION, Y CONSIDERAR LAS FUTURAS FLUCTUACIONES EN EL PERIODO COMO UN PROCESO ESTOCASTICO.
ESTO ES COMPARABLE AL CASO EN EL QUE EL JUGADOR APUESTA CON VOLADOS. PUEDE ENCONTRAR SU FUNCION DE PROBABILIDAD MUY SIMPLE Y BARATA PARA DETERMINAR EL COMPORTAMIENTO DE SU APUESTA.

LOS IMPACTOS ESTAN ESPECIFICADOS, ASI QUE EL PERIODO SE INCREMENTA EN 50 PUNTOS O MAS PARA EL PROCESO ADITIVO, PERO PARA LOS OTROS PROCESOS, VARIA DEBIDO A LA NATURALEZA DEL IMPACTO Y ALGUNAS VECES LAS TASAS A CORTO PLAZO SE INCREMENTAN EN MAS DE 50 PUNTOS Y LAS TASAS A LARGO PLAZO SE INCREMENTAN EN MENOS O VICEVERSA.

PARA CADA NUEVO PERIODO OBTENIDO POR ESTOS PROCEDIMIENTOS, EL PRECIO NUEVO Y LA TASA INTERNA DE RETORNO ESTAN CALCULADOS. EL PORCENTAJE DEL CAMBIO EN EL PRECIO DE LA INVERSION ESTA APROXIMADO POR MACAULAY.

PARA TODOS LOS CASOS, LA FORMULA DE MACAULAY ES LA QUE MAS SE APROXIMO AL VERDADERO PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO DE LA INVERSION.

LA FORMULA DE MACAULAY ES MUY ACEPTABLE PARA LOS PROPOSITOS DE ESTAS APROXIMACIONES. ESTA ES UNA FORMULA EN LA QUE LOS VECINOS DEPENDEN DE LA INCLINACION DEL PERIODO, NO SOBRE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS Y ESTO NO DA UNA APROXIMACION MAS GRUESA QUE LA QUE SE OBTIENE DEL IMPACTO EN EL PROMEDIO.

4.5 CAMBIOS ALEATORIOS MULTIVARIADOS.

EL CAMBIO ALEATORIO DEL PERIODO DE $h(0,t)$ A $h^*(0,t)$ PUEDE SER MUY COMPLEJO. LOS PROCESOS ANTES DESCRITOS, ENVUELVEN SOLO A UNA VARIABLE ALEATORIA. DADA LA FORMA FUNCIONAL DEL PROCESO, DONDE LA VARIABLE ALEATORIA τ ESTA DETERMINADA, EL NUEVO PERIODO $h^*(0,t)$ ESTA ESPECIFICADO. SI EL CAMBIO O IMPACTO ES UNA FUNCION CON MAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA, UNA NUEVA VARIEDAD DE PERIODOS SE PUEDEN CREAR. AQUI SE MOSTRARAN LAS FORMAS PARA LA DURACION POR MEDIO DE PROCESOS CON 2 O MAS VARIABLES ALEATORIAS.

UNO DE LOS CAMBIOS ALEATORIOS MAS SIMPLES CONSISTE EN UNA COMBINACION DE LOS PROCESOS ADITIVO Y MULTIPLICATIVO. SEA

$$h^*(0,t) = \tau_1 + \tau_2 * h(0,t) \qquad t = 1,2,... \qquad (4.5.1)$$

DONDE τ_1 Y τ_2 SON VARIABLES ALEATORIAS NO CORRELACIONADAS. ESTE PROCESO, DESCRITO POR BIERWAG EN 1977, PERMITE QUE EL PERIODO CAMBIE DE FORMA TAL QUE ALGUNA DE LAS TASAS EN $h^*(0,t)$, SE INCREMENTEN Y OTRAS DECREZCAN.

SI $\tau_1 > 0$ Y $\tau_2 < 1$ (ó $\tau_1 < 0$ Y $\tau_2 > 1$), LOS COMPONENTES ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS TRABAJAN EN DIRECCIONES OPUESTAS, ASI QUE EL PERIODO PUEDE MOVERSE MUY COMPLEJAMENTE.
EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO DE UNA INVERSION PUEDE APROXIMARSE POR

$$\frac{\Phi p}{p} = \left[\frac{-D_A}{1+h(0,D_A)} * \tau_1 \right] - \left[\frac{D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} * (\tau_2 - 1) \right] \tag{4.5.2}$$

EN EL LADO DERECHO EXISTEN DOS TERMINOS.

EXISTE UN PERIODO QUE CORREPONDE A CADA UNA DE LAS VARIABLES CONTENIDAS EN EL PROCESO ESTOCASTICO DE LA ECUACION (4.5.1). POR OTRA PARTE, CADA UNO DE ESTOS TERMINOS CORRESPONDE A LA FUNCION IMPLICITA PARA DETERMINAR LA DURACION (POR EJEMPLO: $- D_A/[1+h(0,D_A)]$) QUE PUEDE EXISTIR SIENDO LA VARIABLE ALEATORIA CORREPONDIENTE EL UNICO PERIODO IMPACTADO.

LA TABLA 12 (DEL APENDICE) ILUSTRA EL CASO DE LA COMBINACION ALEATORIA ADITIVA Y MULTIPLICATIVA. LOS VALORES DE LAS VARIABLES ALEATORIAS ESTAN ESCOGIDOS DE MANERA TAL, QUE EL PERIODO OSCILE EN MODELOS COMPLETAMENTE DISTINTOS A LOS INICIALES. EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO SE PUEDE COMPARAR CON LA APROXIMACION DE MACAULAY; Y SE PUEDE IDENTIFICAR EL IMPACTO POR SEPARADO PARA CADA UNO DE LOS COMPONENTES.

4.6 ALGUNAS CARACTERISTICAS IMPORTANTES DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS.

EXISTEN ESCENCIALMENTE DOS MANERAS DE VER UN PROCESO ESTOCASTICO SOBRE EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES.
PRIMERO: DESDE EL PUNTO DE VISTA DE QUE LOS MERCADOS FINANCIEROS SON EFICIENTES, EN EL SENTIDO DE QUE LA INFORMACION DISPONIBLE DE LOS VALORES DE LAS INVERSIONES ESTAN PREVIAMENTE CONTENIDOS EN EL PERIODO ACTUAL, DE MODO QUE, HACIENDO CASO OMISO DE COMO LA ESPERANZA ESTA FORMADA, EL PERIODO FUTURO EN ESCENARIOS EN EQUILIBRIO DEPENDE DE LA INFORMACION TODAVIA A SER REVELADA PERO EN EL CUAL NO ES ANTICIPADA. EN ESTE CONTEXTO, EL PROCESO ESTOCASTICO ES UNA FORMA DE REPRESENTAR EL IMPACTO INCIERTO DE LA INFORMACION EN LOS PERIODOS FUTUROS CON EL PROPOSITO DE CONSTRUIR EL ACTUAL PORTAFOLIO OPTIMO.

SEGUNDO: SIN HACER CASO DE LA EFICIENCIA DEL MERCADO O DE LA MANERA EN QUE LA INFORMACION PASADA O FUTURA, AFECTA A PERIODOS FUTUROS, EL INVERSIONISTA ENCUENTRA ESTO RAZONABLE Y QUIZAS MAS BARATO QUE EL BUSCAR MAS INFORMACION, Y CONSIDERAR LAS FUTURAS FLUCTUACIONES EN EL PERIODO COMO UN PROCESO ESTOCASTICO.
ESTO ES COMPARABLE AL CASO EN EL QUE EL JUGADOR APUESTA CON VOLADOS. PUEDE ENCONTRAR SU FUNCION DE PROBABILIDAD MUY SIMPLE Y BARATA PARA DETERMINAR EL COMPORTAMIENTO DE SU APUESTA.

LOS PROCESOS CON UNA VARIABLE SE PUEDEN UTILIZAR COMO LAS BASES PARA PROCESOS MAS SOFISTICADOS; UN EJEMPLO DE ESTO, ES EL PROCESO MULTIPLICATIVO Y ADITIVO.

UN PROCESO MAS FLEXIBLE QUE PRODUCE CAMBIOS MAS COMPLEJOS PUEDE SER CONSTRUIDO, LA FORMA MAS EXTREMA DE ESTO CONSISTE EN ESPECIFICAR EL PROCESO DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$h^*(0,t) = r_t + h(0,t) \qquad t = 1,2,... \qquad (4.6.1)$$

DONDE r_t $t = 1,2,...$ ES UN CONJUNTO DE VARIABLES ALEATORIAS SIN QUE NINGUNA DE ELLAS ESTE CORRELACIONADA CON LAS OTRAS.

EN ESTE PROCESO EXISTEN MUCHOS CAMBIOS ASI COMO EXISTEN NUEVAS TASAS EN EL PERIODO A DETERMINAR.

SI $h^*(0,t)$ ES MAS COMPLEJO, SE PUEDE ESPECIFICAR COMO

$$h^*(0,t) = f\,[h(0,t),\theta_1,\theta_2,...,\theta_n] \qquad t=1,2,...,n \qquad (4.6.2)$$

DONDE θ_j $j=1,2,...,n$ SON LAS VARIABLES ALEATORIAS, PUEDE SER POSIBLE TRANSFORMAR LAS θ's EN LAS r'_t s, DE ESTE MODO SE PRODUCE LA ECUACION (4.6.1), EN LA FORMA DE ADICION CON LAS NUEVAS VARIABLES r_t, QUE SON FUNCIONES DE LAS θ'_js.

ESTA FORMA DEL PROCESO ESTOCASTICO CON LA DEPENDENCIA ROMPE LA RELACION FUNCIONAL ENTRE $h^*(0,t)$ Y $h^*(0,\pi)$ PARA π=t. ESTA ES UNA FORMA EXTREMA DE LA HIPOTESIS SEGMENTADA, EN LA CUAL SE ASUME QUE LAS TASAS PARA CADA VENCIMIENTO SON FUNCIONALMENTE INDEPENDIENTES DE LAS TASAS EN OTROS VENCIMIENTOS, DEBIDO A QUE NO EXISTE NINGUNA RELACION ENTRE LOS MERCADOS DE LOS BONOS PARA CADA VENCIMIENTO. COMO REGLA GENERAL, EL NUMERO DE VARIABLES ALEATORIAS QUE DEPENDEN DEL PERIODO INCLUYE EL MAYOR GRADO DE LA SEGMENTACION FUNCIONAL.

UN NUMERO PEQUEÑO DE VARIABLES ALEATORIAS, COMO EN EL CASO DE UNA SOLA VARIABLE, EL MAYOR GRADO ES EL GRADO DE DEPENDENCIA FUNCIONAL ENTRE TASAS A DIFERENTES VENCIMIENTOS. ENTONCES, SI SE INCLINA A CREER QUE LAS TASAS EN EL PERIODO SON UNA RELACION FUNCIONAL DEL NUMERO PEQUEÑO DE VARIABLES ALEATORIAS QUE SE NECESITAN ESPECIFICAR.

BRENNAN Y SCHWARTZ EN 1982, UTILIZARON UN PROCESO ESTOCASTICO QUE INCLUIA JUSTAMENTE A DOS VARIABLES ALEATORIAS DEPENDIENTES DEL PERIODO. AUNQUE REALIZARON SU MODELO SIN LA SUPOSICION DE CONTINUIDAD, LA ESENCIA DE SU PROCESO PUEDE SER DESCRITA EN LA FORMA

$$h^*(0,t) = (\beta_t * r_1) + (1-\beta_t) * r_n + h(0,t) \qquad (4.6.3)$$

DONDE r_1 Y r_n SON VARIABLES ALEATORIAS QUE AFECTAN RESPECTIVAMENTE A LA TASA A CORTO PLAZO $h^*(0,1)$, Y LA TASA A LARGO PLAZO $h^*(0,n)$, DONE β_t ES UN PARAMETRO QUE DEPENDE DEL PERIODO, CON LA PROPIEDAD DE QUE $\beta_1 = 1$ Y $\beta_n = 0$

CADA TASA EN EL PERIODO ESTA IMPACTADA POR ALGUNA COMBINACION DE UNA TASA CON IMPACTO A CORTO Y A LARGO PLAZO.

LA NOCION FUNDAMENTAL ES QUE LOS VENCMIENTOS INTERMEDIOS SE COMPARTAN DE MANERA TAL, QUE REFLEJEN UNA COMBINACION DE LAS PROPIEDADES DE LOS PERIODOS A CORTO Y LARGO PLAZO. EXISTE UNA INDEPENDENCIA FUNCIONAL ENTRE LOS MERCADOS DE PERIODOS A CORTO PLAZO Y LOS MERCADOS DE PERIODOS A LARGO PLAZO; PUDIENDOSE ARGUMENTAR QUE ESTO REFLEJA LA DISTINCION TRADICIONAL ENTRE LOS MERCADOS DE DINERO (VALORES A CORTO PLAZO QUE TIENEN MUCHA LIQUIDEZ Y PUEDEN SER UN SUSTITUTO DE DINERO) Y LOS MERCADOS DE CAPITAL (INSTRUMENTOS A LARGO PLAZO UTILIZADOS PRIMERAMENTE PARA FINANCIAR EL CAPITAL REAL DE LA ECONOMIA).
AUNQUE LA ESPECIFICACION DE UN PROCESO ESTOCASTICO CONSTITUYE ALGO DE UN PROCEDIMIENTO ARBITRARIO; EXISTEN PAUTAS QUE SE PUEDEN UTILIZAR EN LAS ESPECIFICACIONES.

4.7 CONSIDERACIONES AL CAPITULO 4

4.7.1 PROCESOS ESTOCASTICOS.

LA TEORIA DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS ESTA RELACIONADA CON LA INVESTIGACION DE LA ESTRUCTURA DE FAMILIAS DE VARIABLES ALEATORIAS X_τ A DONDE τ CORRE EN UN CONJUNTO DE INDICES T. LOS VALORES DE X_τ PUEDEN SER UNIDIMENSIONALES, BIDIMENSIONALES, TRIDIMENSIONALES O N-DIMENSIONALES. SE PUEDE DEFINIR UN PROCESO ESTOCASTICO COMO

UNA FUNCION $X : \Omega \times T -> R$; TAL QUE PARA $\tau \in T$ FIJO, $X(\Omega,\tau)$ ES UNA VARIABLE ALEATORIA, DONDE

Ω : ESPACIO MUESTRAL
T : ESPACIO PARAMETRAL O CONJUNTO DE INDICES
S : EL CONJUNTO DE TODOS LOS POSIBLES RESULTADOS O ESTADOS DEL PROCESO.

UN PROCESO DE MARKOV ES UN PROCESO ESTOCASTICO CON LA PROPIEDEAD DE QUE DADO EL VALOR DE $X(\tau)$, LOS VALORES DE $X(S)$ CON $S > T$ NO DEPENDEN DE LOS VALORES DE $X(u)$ CON $u < t$; ESTO ES, LA PROBABILIDAD DE QUE CUALQUIER COMPORTAMIENTO FUTURO DEL PROCESO CUANDO SU ESTADO PRESENTE ES CONOCIDO EXACTAMENTE, NO ES ALTERADO POR EL COMPORTAMIENTO ADICIONAL PASADO.

EN TERMINOS FORMALES, UN PROCESO SE DICE QUE ES DE MARKOV SI

$$\beta(a < X(\tau) \leq b \,/\, X(\tau_1) = x_1, X(\tau_2) = x_2, \ldots, X(\tau_n) = x_n) =$$

$$P\,(a \leq X(\tau) \leq b \,/\, X(\tau_n)) \quad = x_n$$

PARA CUALQUIER $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$.

UNA CADENA DE MARKOV EN EL TIEMPO DISCRETO (X_n) ES UN PROCESO DE MARKOV CUYO ESPACIO DE ESTADOS ES UN CONJUNTO NUMERABLE Y PARA EL CUAL $T = (0,1,\ldots)$.
ES CONVENIENTE NUMERAR AL ESPACIO DE ESTADOS DEL PROCESO POR LOS ENTEROS NO NEGATIVOS $(0,1,\ldots)$ Y SE DICE QUE X_n ESTA EN EL ESTADO i SI $X_n = i$.

4.7.1.1 OTRA EXPRESION DE $(1 + R)^{-1}$.

$(1 + R)^{-1}$ SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$\frac{\beta}{p} * \frac{d_p}{d_\beta} = D$$

SEA $\beta = (1+R)^{-1}$, ENTONCES $p = \sum_{t=1}^{m} F(t) * (\beta)^t$ (4.7.1.1.1)

DERIVANDO p CON RESPECTO A β:

$$\frac{d_p}{d_\beta} = \sum_{t=1}^{m} t * F(t) * (\beta)^{(t-1)} \qquad (4.7.1.1.2)$$

MULTIPLICANDO (4.7.1.1.2) POR β Y DIVIDIENDO ENTRE p

$$\frac{\beta}{p} * \frac{d_p}{d_\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{m} t*F(t)*(\beta)^{(t-1)}*\beta}{p} = \frac{\sum_{t=1}^{m} t*F(t)*(\beta)^{t}}{p} = D//$$

(4.7.1.1.3)

4.7.1.2 LIMITES.

DEMOSTRACION DE QUE

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{Ln\ (1+(\alpha*t))}{\alpha * t} \right] = 1.$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{Ln\ (1+(\alpha*t))}{\alpha * t} \right] = \frac{0}{0} = \infty$$

COMO SE LLEGA A UNA EXPRESION INDETERMINADA, SE APLICA LA REGLA DE L'HOPITAL

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \lim_{=\alpha \to 0} \frac{\frac{d\ (\ Ln[1+(\alpha*t)]\ )}{d_\alpha}}{\frac{d\ (\alpha * t)}{d_\alpha}}$$

(4.7.1.2.1)

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} = \frac{\frac{t}{(1+[\alpha*t])}}{t} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{t}{t*[1+(\alpha*t)]}$$

(4.7.1.2.2)

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} \frac{t}{t*[1+(\alpha*t)]} = \frac{t}{t} = 1$$

POR LO TANTO

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{\mathrm{Ln}\ (1+(\alpha*t))}{\alpha * t} \right] = 1//$$

4.7.2 OBTENCION DE LAS MEDIDAS DE DURACION.

4.7.2.1 PROCESO ADITIVO.

EL PRECIO DE UNA INVERSION, INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO DEL PERIODO, SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [1+\tau+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.7.2.1.1)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A τ SE OBTIENE

$$\frac{d_p}{d_\tau} = p'(\tau) = - \sum_{t=1}^{m} t*F(t) * [1+\tau+h(0,t)]^{-(t+1)} \qquad (4.7.2.1.2)$$

EVALUANDO (4.7.2.1.2) EN τ = 0 (QUE ES EL VALOR QUE SE OBTIENE DEL PRECIO ORIGINAL AL CUAL LA INVERSION SE HA CUMPLIDO), SE OBTIENE

$$\left.\frac{d_p}{d_\tau}\right|_{\tau=0} = p'(0) = - \sum_{t=0}^{m} F(t)*[t* (1+h(0,t))^{-1}]*[1+h(0,t)]^{-t}$$

$$(4.7.2.1.3)$$

DIVIDIENDO ENTRE EL PRECIO ORIGINAL p(0)

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{- \sum_{t=1}^{m} F(t)*[t*(1+h(0,t))^{-1}]*[1+h(0,t)]^{-t}}{p(0)}$$

$$(4.7.2.1.4)$$

AHORA DEFINIENDO LA DURACION PARA ESTE PROCESO COMO

$$\frac{D_A}{1+h(0,D_A)} = \frac{-\sum_{t=1}^{m} F(t) * \left[\frac{t}{1+h(0,t)}\right] * [1+h(0,t)]^{-t}}{p}$$

(4.7.2.1.5)

EXPRESANDO A D_A DE ESTA MANERA, SE PERMITE DAR UNA INTERPRETACION COMPARABLE A LAS OTRAS MEDIDAS DE DURACION. SI ES UN BONO CON CUPON CERO DE TAL FORMA QUE F(m) ES EL UNICO PAGO DISTINTO DE CERO, ENTONCES D_A = m (EL VENCIMIENTO).

SI EL PERIODO ES CIERTO PARA TODAS LAS MEDIDAS DE DURACION, ESTO ES, CUANDO EL PERIODO ES ESTABLE, LA DURACION SE REDUCE A LA DURACION DE MACAULAY.
UTILIZANDO (4.7.2.1.4) PARA APROXIMAR EL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO, SE OBTIENE

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{-D_A}{1+h(0,D_A)} *' \tau \qquad (4.7.2.1.6)$$

4.7.2.2 PROCESO MULTIPLICATIVO.

CON ESTE PROCESO EL PRECIO DE UNA INVERSION INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO AL PERIODO, SE PUEDE ESCRIBIR:

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [\ 1+ (\tau * h(0,t))\ ]^{-t} \qquad (4.7.2.2.1)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A τ:

$$p'(\tau) = \frac{d_p}{d_\tau} = -\sum_{t=1}^{m} F(t) * \left[\frac{t*[h(0,t)]}{1+(\tau * h(0,t))}\right] * (1+[\tau * h(0,t)])^{-t}$$

(4.7.2.2.2)

COMO EN EL PROCESO ADITIVO, SE DEFINE LA DURACION COMO

$$\frac{D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1+H(0,D_{MS})} = \frac{-\sum_{t=1}^{m} F(t)*\left[\frac{t*[h(0,t)]}{1+h(0,t)}\right]*[1+h(0,t)]^{-t}}{p}$$

(4.7.2.2.3)

EVALUANDO EN $\tau = 1$, DONDE D_{MS} ES LA DURACION DEL PROCESO MULTIPLICATIVO, ENTONCES DIVIDIENDO ENTRE $p(\tau)$:

$$\frac{p'(\tau)}{p(\tau)} = \frac{1}{p} * \left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau=1} = \frac{-D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} \qquad (4.7.2.2.4)$$

Y SU APROXIMACION ES

$$\frac{\Phi p}{p} \approx -\frac{Dms\ h(0,Dms)}{1+h(0,Dms)} * \Phi\tau \qquad (4.7.2.2.5)$$

4.7.2.3 PROCESO LOGARITMICO.

CON ESTE PROCESO, EL PRECIO DE UNA INVERSION INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO AL PERIODO SE DESCRIBE COMO

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t)*\left[\frac{1+\tau*Ln(1+(\alpha*t))+h(0,t)}{\alpha*t}\right]^{-t} \qquad (4.7.2.3.1)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A τ Y EVALUANDO EN CERO:

$$\left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau=0} = p'(0) = -\sum_{t=1}^{m} F(t)*\left[\frac{1}{\alpha}*\frac{\tau*Ln(1+(\alpha*t))}{\alpha*t}\right]*[1+h(0,t)]^{-t}$$

(4.7.2.3.2)

AHORA, DEFINIENDO LA DURACION COMO

$$\frac{Ln[1+\alpha*D_{LA}(\alpha)]}{1+h(0,D_{LA}(\alpha))} = \frac{-\sum_{t=1}^{m} F(t)*\left[\frac{Ln(1+(\alpha*t))}{1+h(0,t)}\right]*[1+h(0.t)]^{-t}}{p} \qquad (4.7.2.3.3)$$

DONDE $D_{LA}(\alpha)$ ES LA DURACION DEL PROCESO ADITIVO CORRESPONDIENTE A UN VALOR ESPECIFICO DE α. DIVIDIENDO p:

$$\frac{\Phi p}{p} \approx \frac{-Ln\ [\ 1+D_{LA}(\alpha)\ ]}{\alpha*[1+h(0,D_{LA}(\alpha))]} * \Phi\tau \qquad (4.7.2.3.4)$$

BAJO EL PROCESO MULTIPLICATIVO, EL PROCESO DE FISHER-WEIL ES ANALOGO

$$p(\tau) = \sum_{t=1}^{m} F(t)* \left[1+\frac{\tau*[Ln(1+(\alpha*t))]}{\alpha*t}\right]^{-t} * [1+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.7.2.3.5)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A τ Y EVALUANDO EN CERO:

$$\left.\frac{dp}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -\sum_{t=1}^{m} F(t)*\left[\frac{Ln\ (1+(\alpha*t))}{\alpha}\right] * [1+h(0,t)]^{-t} \qquad (4.7.2.3.6)$$

ENTONCES LA DURACION ES:

$$Ln\ [1+\ (\alpha*D_{LM}(\alpha)\ )] = \frac{-\sum_{t=1}^{m} F(t)*[Ln(1+(\alpha*t))]*[1+h(0,t)]^{-t}}{p} \qquad (4.7.2.3.7)$$

DIVIDIENDO ENTRE p(0):

$$\frac{\Phi p}{p} \approx -\frac{Ln\ [1+(\alpha*(D_{LM}(\alpha)))]}{\alpha} * \Phi\tau \qquad (4.7.2.3.8)$$

4.7.3 CAMBIOS ALEATORIOS MULTIVARIADOS.

UNO DE LOS CAMBIOS ALEATORIOS MAS SIMPLES ES EL QUE SE PRESENTO CON LOS COMPONENTES ADITIVO Y MULTIPLICATIVO. EN ESTE CASO, EL PERIODO NUEVO INSTANTANEO SE CONVIERTE A:

$$h^*(0,t) = \tau_1 + [\tau_2 * h(0,t)] \qquad t = 1,2,... \qquad (4.7.3.1)$$

DONDE τ_1 Y τ_2 SON VARIABLES ALEATORIAS.

SE ASUME QUE

1.- τ_1 Y τ_2 NO ESTAN CORRELACIONADAS.

2.- $h(0,t)$ ES NO ESTABLE.

SI LAS VARIABLES ESTAN CORRELACIONADAS DE MODO QUE $\tau_1 = g(\tau_2)$, ENTONCES SUSTITUYENDO $g(\tau_2)$ PARA τ_1, SE REDUCE EL IMPACTO A UNA EXPRESION CON UNA VARIABLE ALEATORIA. SI $h(0,t) = R$, PARA TODA t, DE MODO QUE EL PERIODO SEA ESTABLE: $h^*(0,t) = \tau_1 + [\tau_2 * R] = R^* = R + \tau_3$, DONDE $\tau_3 = \tau_1 + (\tau_2 - 1) * R$; ESTO IMPLICA QUE LA COMBINACION LINEAL $\tau_1 + (\tau_2 * R)$ SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA SOLA VARIABLE ALEATORIA. ENTONCES EN ESTE PROCESO, LA DURACION SE REDUCE A LA DURACION DE MACAULAY.

EL PRECIO DE UNA INVERSION INMEDIATAMENTE DESPUES DEL IMPACTO ALEATORIO SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [1+\tau_1+(\tau_2 * (h(0,t)^{-t}))] \qquad (4.7.3.2)$$

DONDE F(t) ES EL PAGO PROMETIDO POR UNA INVERSION AL TIEMPO t.
TOMANDO LA DERIVADA CON RESPECTO A LAS VARIABLES ALEATORIAS:

$$dp(\tau_1,\tau_2) = -\sum_{t=1}^{m} F(t)*t*[1+\tau_1+(\tau_2*h(0,t))^{-(t+1)}]*(d_{\tau 1}+h(0,t)d_{\tau 2}) \qquad (4.7.3.3)$$

COMO EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA, SE PUEDE DIVIDIR ENTRE $p(\tau_1,\tau_2)$ Y EVALUAR EN $\tau_1=0$ Y $\tau_2= 1$; LOS VALORES A LOS CUALES LA INVERSION SE PAGO EN UN PRINCIPIO.

DE ESTO RESULTA:

$$\frac{d_p(0,1)}{p(0,1)} = \frac{-\sum_{t=1}^{m} t*F(t)*[1+\tau_1+(\tau_2*h(0,t))]^{-(t+1)}*[d\tau_1+h(0,t)*d\tau_2)}{p(0,1)}$$

$$= -\left[\frac{D_A}{1+h(0,D_A)} * d_{\tau 1}\right] - \left[\frac{D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} * d_{\tau 2}\right] \qquad (4.7.3.4)$$

UTILIZANDO LAS DEFINICIONES ANTERIORES DE LAS DURACIONES D_A Y D_{MS}, Y SI EL PERIODO ES ESTABLE $D_A = D_M$, LA APROXIMACION SE REDUCE A LA DE MACAULAY. SE PUEDE APROXIMAR EL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO SUSTITUYENDO Φp, $\Phi\tau_1=\tau_1$, $\Phi\tau_2=\tau_2=(\tau_1-1)$ PARA dp, $d_{\tau 1}$, Y $d_{\tau 2}$ RESPECTIVAMENTE.

ESTO PRODUCE LA ECUACION DE APROXIMACION

$$\frac{\Phi p}{p} \approx -\left[\frac{D_A}{1+h(0,D_A)} * \tau_1\right] - \left[\frac{D_{MS}\ h(0,D_{MS})}{1+h(0,D_{MS})} * (\tau_2-1)\right] \qquad (4.7.3.5)$$

QUE SE PUEDE COMPARAR CON LA APROXIMACION DE MACAULAY DE LA TABLA 12 (DEL APENDICE).

4.7.4 GENERALIZACION A CUALQUIER NUMERO DE VARIABLES ALEATORIAS.

SE PUEDE DESCRIBIR EL NUEVO PERIODO INSTANTANEO COMO UNA FUNCION GENERAL DESCRITA POR

$$h^*(0,t) = f\ (\theta_1,\theta_2,\ldots,\ \theta_n) \qquad (4.7.4.1)$$

DONDE θ_j ES LA j-ESIMA VARIABLE ALEATORIA. EN ESTA EXPRESION SE ASUME QUE CUALQUIER VARIABLE ALEATORIA NO ESTA CORRELACIONADA CON LAS OTRAS VARIABLES ALEATORIAS. ESTO SIGNIFICA QUE NO ES POSIBLE REDUCIR LA EXPRESION (4.7.4.1) A UNA EXPRESION MAS SIMPLE QUE CONTENGA UN NUMERO MENOR DE VARIABLES ALEATORIAS. LA FORMA DE LA FUNCION f, DESCRIBE LA MANERA EN LA CUAL LAS VARIABLES ALEATORIAS EN CONJUNTO DETERMINAN EL NUEVO PERIODO. EN EL CASO EN QUE NO EXISTA UN IMPACTO, DONDE $h^*(0,t)$ SE CONVIERTA EN $h(0,t)$ (QUE PRODUCE EL PRECIO ORIGINAL EN LA ECUACION (4.7.3.5)), SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$h(0,t) = f(\theta_{10},\theta_{20},\ \ldots,\ \theta_{n0}) \qquad (4.7.4.2)$$

DONDE θ'_{j0} $j=1,2,\ldots,n$ REPRESENTA EL CONJUNTO DE VALORES QUE REPRODUCEN EL PERIODO ORIGINAL PARA TODA t.
EN VISTA DE QUE NO SE PUEDE REDUCIR LAS FUNCIONES (4.7.4.1) Y (4.7.4.2) A UNA FUNCION CON POCAS VARIABLES ALEATORIAS, EL CONJUNTO DE VALORES θ'_{j0} $j=1,2,\ldots,n$ SERA UNICO.

SI EL PERIODO ES ESTABLE ANTES Y DESPUES DEL IMPACTO, ENTONCES (4.7.4.1) Y (4.7.4.2) SE REDUCEN A UN PROCESO CON UNA VARIABLE ALEATORIA Y MUCHOS CONJUNTOS DIFERENTES DE ELLOS PUEDEN PRODUCIR EL MISMO IMPACTO.

EN OTRO CASO, SUPONGASE QUE EXISTEN n VARIABLES ALEATORIAS QUE SON VALORES DE $h^*(0,t)$ PARA DIFERENTES t's; ENTONCES EL PROCESO SE PUEDE REDUCIR A UNO QUE NO NECESITE MAS VARIABLES ALEATORIAS QUE VALORES DE $h^*(0,t)$ A DETERMINAR.

EL PRECIO DE UNA INVERSION DESPUES DEL IMPACTO ES

$$p(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) = \sum_{t=1}^{m} F(t) * [1+f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)]^{-t} \qquad (4.7.4.3)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A LAS θ'_S:

$$d_p(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) = -\sum_{t=1}^{m}[t*F(t)]*[1+f(\theta_1,\ldots,\theta_n)]^{-(t+1)} * $$
$$[f_1*(d_{\theta 1}) + f_2*(d_{\theta 2}) + \ldots + f_n*(d_{\theta n})] \qquad (4.7.4.4)$$

DONDE f_i ES LA DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCION f CON RESPECTO A θ_j.

DIVIDIENDO AMBOS MIEMBROS DE ENTRE $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ Y EVALUANDO EN θ_j PARA TODA j:

$$\left.\frac{d_p(\theta_1,\ldots,\theta_n)}{p(\theta_1,\ldots,\theta_n)}\right|_{\theta_1 = \theta_{j0}} \quad \text{PARA TODA } j$$

$$= \frac{-\sum_{t=1}^{m} t*F(t)*[1+h(0,t)]^{-(t+1)} * \sum_{j=1}^{m} (f^*_j) * (d_{\theta j})}{p(\theta_{10},\theta_{20},\ldots,\theta_{n0})} \qquad (4.7.4.5)$$

DEFINIENDO LA DURACION PARA CADA UNA DE LAS n-VARIABLES ALEATORIAS:

$$\frac{(f^*_j)*D_j}{1+h(0,D_j)} = \frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{m} t * (f^*_j)}{1 + h(0,t)}}{P} \qquad (4.7.4.6)$$

DONDE D_j ES LA DURACION CORRESPONDIENTE A LA j-ESIMA VARIABLE ALEATORIA. LA SIGUIENTE ECUACION OBTIENE LA FUNCION IMPLICITA DE LA DURACION QUE RESULTA SI SOLO LA j-ESIMA VARIABLE ALEATORIA OCURRE CUANDO LAS OTRAS ESTAN FIJAS EN θ_{j0}.

SUSTITUYENDO (4.7.4.6) EN (4.7.4.5) SE OBTIENE LA ECUACION DE APROXIMACION

$$\frac{\bullet p^n}{p} \approx \frac{-\sum_{t=1}^{m} (f^*_j)*(D_j)* (\theta_j - \theta_{j0})}{1 + h(0,D_j)} \qquad (4.7.4.7)$$

DONDE $(\theta_j - \theta_{j0})$ SE APROXIMA A $d_{\theta j}$. EN GENERAL, (4.7.4.7) SE PUEDE UTILIZAR COMO UNA ECUACION DE APROXIMACION DEL PORCENTAJE DE CAMBIO EN EL PRECIO Y SE PUEDE COMPARAR CON LA APROXIMACION DE MACAULAY. ADEMAS, SI LA FUNCION f SE PUEDE REDUCIR A UNA FUNCION CON POCAS VARIABLES ALEATORIAS, EL EFECTO ES EL QUE SE REDUCEN EL NUMERO DE TERMINOS EN LA ECUACION (4.7.4.7).

5 INVESTIGACION EMPIRICA

LA INVESTIGACION EMPIRICA DEL ANALISIS DE DURACION SE PUEDE DIVIDIR EN DOS GRUPOS PARA SU ESTUDIO. EN EL PRIMERO, LA INMUNIZACION Y OTRAS TECNICAS DE INVERSION SON SIMULADAS UTILIZANDO EL PERIODO ESTIMADO CON UNA VARIEDAD DE CONJUNTOS DE DATOS; EL OBJETIVO DE ESTOS ESTUDIOS ES MOSTRAR QUE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION TRABAJA MEJOR QUE OTRAS MAS SENCILLAS Y A VECES MAS ATRACTIVAS. EL SEGUNDO GRUPO CONSISTE EN MODELOS DE REGRESION DESIGNADOS A MOSTRAR LAS CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS. EL OBJETIVO ES ENSEÑAR LA EXTENSION A LA CUAL LOS CAMBIOS EN LOS PERIODOS PUEDEN SER EXPLICADOS MEDIANTE UN FACTOR O VARIABLE A TRAVES DEL TIEMPO. SI UN MODELO SENCILLO EXPLICA ADECUADAMENTE LOS CAMBIOS DE LOS PERIODOS, SE ENTIENDE QUE LA ESTRATEGIA DE LA DURACION DE LAS INVERSIONES TRABAJA MEJOR DE LO PENSADO.

5.1 ESTUDIOS DE INMUNIZACION.

CUANDO EL PROCESO ESTOCASTICO ES COMPLEJO Y EL PERIODO NO ES NECESARIAMENTE ESTABLE, EL REMANENTE DEL PROCEDIMIENTO DE LA INMUNIZACION ES EL MISMO, SOLO LA MEDIDA DE LA DURACION CAMBIA.
LA INMUNIZACION REQUIERE QUE LA DURACION SEA IGUAL AL TIEMPO REMANENTE EN EL PERIODO PLANEADO, PERO LA MEDIDA DE LA DURACION PODRA SER CALCULADA COMO IMPLICITA POR EL PRINCIPAL PROCESO, GENERANDO LOS CAMBIOS EN LOS PERIODOS DE LAS TASAS DE INTERES.
ESTA FORMA DE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION ES UTILIZADA EN LOS SIGUIENTES ESTUDIOS.

5.1.1 FISHER Y WEIL.

L. FISHER Y R. WEIL EN 1971, MANEJARON LAS PRIMERAS SIMULACIONES DE UNA ESTRATEGIA DE INMUNIZACON DE UN PORTAFOLIO. UTILIZARON LOS DATOS CONJUNTADOS POR DURAN PARA LAS TASAS DE INTERES ENTRE LOS AÑOS 1925 - 1968(1). CADA UNO DE ESTOS PERIODOS ESTA CONSTRUIDO COMO UNA CURVA QUE REPRESENTA EL LIMITE INFERIOR DE LAS TASAS DE INTERES DE LOS BONOS CORPORATIVOS EN UN PUNTO DEL TIEMPO. CADA PERIODO ESTA ENCAMINADO A MEDIR UN PERIODO LIBRE POR OMISION. FISHER Y WEIL CONSIDERARON PERIODOS PLANEADOS POR 5,10 Y 20 AÑOS.

---

(1)EL TRABAJO INICIAL DE DURAN ESTIMO ESTOS REDITOS SOLO PARA LOS AÑOS 1900 - 1942. DESPUES, LOS REDITOS SE ESTIMARON UTILIZANDO EL PROCEDIMIENTO DE DURAN Y ESTAN PUBLICADOS EN EL ALMANAQUE ECONOMICO PUBLICADO POR LAS NOTAS DE LA CONFERENCIA NACIONAL DE INDUSTRIAS.

COSTRUYERON UN NUMERO DE PORTAFOLIOS DE BONOS HIPOTETICOS BASADOS EN LO QUE SE LLAMA "EL PROCESO ESTOCASTICO FISHER-WEIL", LA INMUNIZACION DE LOS PORTAFOLIOS SE CONTRUYO AL ADQUIRIR DOS BONOS: UNO CON EL VENCIMIENTO IGUAL A LA LONGITUD DEL PERIODO PLANEADO, Y EL OTRO CON LA DURACION MAS LARGA POSIBLE. EL CUPON DE CADA BONO FUE DEL 4%.

EN EL PERIODO 1925-1968, EXISTEN 39 PERIODOS DE 5 AÑOS PLANEADOS OMITIDOS, 34 PERIODOS DE 10 AÑOS Y 24 PERIODOS PLANEADOS DE 20 AÑOS. AL FINAL DE CADA AÑO DURANTE EL PERIODO PLANEADO, EL INVERSIONISTA REINVIERTE LOS CAPITALES ACUMULADOS Y EL REDITO DEL CUPON ES UN NUEVO PORTAFOLIO TENIENDO UNA DURACION IGUAL AL TIEMPO REMANENTE EN EL PERIODO PLANEADO. AL FINAL, R_i ES LA TASA DE RETORNO ANUAL DE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION, R_m ES LA TASA DE RETORNO DE UN BONO TENIDO CON UN VENCIMIENTO A VECES IGUAL AL PERIODO PLANEADO C Y REINVERTIENDO TODO EL REDITO DEL CUPON TAL CUAL AL BONO, Y R_p ES LA TASA DE RETORNO PROMETIDA AL PRINCIPIO DEL PERIODO, Y DADO POR EL PERIODO COMO LA TASA APLICADA EN UN BONO CON CUPON CERO, TENIENDO UN VENCIMIENTO IGUAL AL PERIODO PLANEADO.

SI LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION TRABAJA CORRECTAMENTE EN TODO EL TIEMPO, ENTONCES $R_i = R_p$ PARA CADA PERIODO PLANEADO.

ALGUNOS RESULTADOS SE MUESTRAN EN LA TABLA 14 (DEL APENDICE) SOBRE LOS PERIODOS 1925-1968; LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION TIENDE A TENER VALORES MAS CERCANOS AL RETORNO PROMETIDO QUE LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO. PARA ESTAS SIMULACIONES, F-W CONCLUYERON QUE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION ES MAS PROBABLE A CAER O ESTAR CERCA DE LA TASA PROMETIDA QUE LA DE VENCIMIENTO.

5.1.2 BIERWAG, KAUFMAN, TOEVS Y SCHWEITZER (1981).

EN ESTE ESTUDIO, LOS AUTORES ACTUALIZARON LOS RESULTADOS DE F-W PARA LOS PERIODOS PLANEADOS DE 10 AÑOS CON LOS DATOS DE DURAN, EXTENDIENDOLOS A 1978 Y UTILIZARON OTRAS MEDIDAS DE DURACION CORRESPONDIENTES A DIFERENTES PROCESOS ESTOCASTICOS.

LOS RESULTADOS SE MUESTRAN EN LA TABLA 15 (DEL APENDICE), CON CINCO DIFERENTES TIPOS DE DURACION INMUNIZADA (DI). ESTAS DURACIONES CORRESPONDEN A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS VISTOS EN EL CAPITULO ANTERIOR.

DI 1.- DURACION DE MACAULAY. CALCULADA UTILIZANDO EL REDITO AL VENCIMIENTO PARA CADA BONO. APROPIADA PARA PERIODOS ESTABLES.

DI 2.- PROCESO ADITIVO.

DI 3.- PROCESO F-W.

DI 4(0.1).- PROCESO MULTIPLICATIVO LOGARITMICO CON $\alpha = .1$

DI 4(1.0).- PROCESO MULTIPLICATIVO LOGARITMICO CON $\alpha = 1.0$

EN ADICION A ESTAS CINCO ESTRATEGIAS DE INMUNIZACON, LOS RESULTADOS SE HAN COMPARADO CON LAS SIGUIENTES ESTRATEGIAS "ACTIVAS"

ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO. UN BONO CON VENCIMIENTO IGUAL AL REMANENTE DEL PERIODO PLANEANDO ES MANEJADO Y TODO REDITO DEL CUPON ES REINVERTIDO EN EL.

ESTRATEGIA DEL BONO CORTO. UN PORTAFOLIO ES TOTALMENTE COLOCADO EN UN BONO A UN PERIODO Y ES DEVUELTO SOBRE EL VENCIMIENTO.

ESTRATEGIA DEL BONO LARGO. UN BONO A 20 AÑOS ES MANTENIDO DE FORMA TAL,. QUE SU VENCIMIENTO DECLINA A LO LARGO DEL PERIODO PLANEADO Y SE CONVIERTE EN UN BONO A 10 AÑOS AL FINAL DEL PERIODO.

LA INMUNIZACION DE LOS PORTAFOLIOS CONSISTE EN DOS BONOS: UNO CON VENCIMIENTO A 20 AÑOS Y OTRO CON VENCIMIENTO IGUAL A LA LONGITUD DEL REMANENTE DEL PERIODO PLANEADO. LA PROPORCION DE CADA BONO ES TAL, QUE LA INMUNIZACION APROPIADA DE LA DURACION ES IGUAL A LA LONGITUD DEL REMANENTE DEL PERIODO PLANEADO.

LOS RESULTADOS MUESTRAN QUE LAS ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION INVARIABLEMENTE ESTAN MAS CERCANAS A LA TASA DE RETORNO PROMETIDA QUE LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO. ADEMAS, CON UNA CONSIDERABLE FRECUENCIA, LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION GANA DENTRO DE LOS PUNTOS DE LA TASA PROMETIDA. LOS RESULTADOS DE LAS ESTRATEGIAS ACTIVAS ESTAN MUY CERCANOS A LO QUE SE ESPERA OBTENER. LAS ESTRATEGIAS DE DURACION CORTA, TIENDEN A PRODUCIR SUS MAS ALTOS (BAJOS) RETORNOS EN PERIODOS GENERALMENTE CON TASAS ASCENDENTES (DESCENDENTES); LAS ESTRATEGIAS DE DURACION LARGA TIENDEN A PRODUCIR SUS MAS ALTOS (BAJOS) RETORNOS EN PERIODOS GENERALMENTE CON TASAS DESCENDENTES (ASCENDENTES).

LAS ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION MAS SOFISTICADAS, DI2 Y DI4(1.0), NO MUESTRAN TRABAJAR CONSISTENTE Y SUSTANCIALMENTE MEJOR QUE LAS ESTRATEGIAS DE DURACION BASADAS EN LA TASA INTERNA DE RETORNO; LA DURACION DE MACAULAY, LOS PROCESOS ADITIVOS (DI 2 Y F-W (DI 3)) MUESTRAN DAR RESULTADOS QUE SON INDISTIGUIBLES EN TODOS LOS PERIODOS CONSIDERADOS.

PARA CAMBIOS PEQUEÑOS EN EL PERIODO, ESTOS DOS PERIODOS ESTAN TEORICAMENTE CERCANOS UNO DEL OTRO. LOS PROCESOS MULTIPLICATIVOS LOGARITMICOS DI4(1.0) Y DI4(0.1), SON INFERIORES, EXEPTO PARA EL PERIODO 1925-1949.

ESTAS OBSERVACIONES EMPIRICAS SUGIEREN 3 PRINCIPALES CONCLUSIONES:

1.- LA INMUNIZACION UTILIZADA POR LA DURACION DE MACAULAY (DI 1) (CALCULADAS LAS DURACIONES DE LOS INSTRUMENTOS DE INVERSION UTILIZANDO LAS TASAS INTERNAS DE RETORNO), TRABAJA COMO LA MEJOR DE LAS MEDIDAS SOFISTICADAS DE LA DURACION QUE SON PENSADAS CONSIDERABLES PARA EL MOVIMIENTO DEL PERIODO.

2.- LAS ESTRATEGIAS DE DURACION (EXCEPTO POSIBLEMENTE PARA CASOS ESPECIALES COMO LOS DE LAS DI4), TIENDEN A TENER RETORNOS QUE EN PROMEDIO ESTAN MAS CERCANOS A LOS RETORNOS PROMETIDOS INICIALMENTE QUE LAS ESTRATEGIAS DEL VENCIMIENTO. ESTO ES, LAS ESTRATEGIAS DE LA INMUNIZACION DE LA DURACION TIENDEN A APROXIMARSE MAS CERCANAMENTE A UN RETORNO LIBRE DE RIESGO SOBRE UN PERIODO PLANEADO QUE LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO.

3.- UN PEQUEÑO MEJORAMIENTO O MINIMIZAR EL ERROR EN VERIFICAR EL RETORNO PROMETIDO, SE PUEDE OBTENER UTILIZANDO EL PROCESO LOGARITMICO.

5.1.3 INGERSOLL (1983).

INGERSOLL UTILIZO LOS DATOS DEL CENTRO DE INVESTIGACION SOBRE PRECIOS DE UNA INVERSION (C.I.S.P.I.) EN SUS SIMULACIONES DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION. CON ESTOS DATOS ESTIMO LOS PERIODOS SEMESTRALES, SIGUIENDO EL METODO DE HOUGLET VISTO EN EL CAPITULO 3. TODOS LOS BONOS CANJEABLES Y FLUIDOS A 10 AÑOS FUERON EXCLUIDOS DE LOS EJEMPLOS Y DE LAS MEDIDAS DEL PRECIO/COMPRA UTILIZADOS COMO LA ESTIMACION DE LOS PRECIOS DE TRANSACCION.

EL PERIODO ESTIMADO PUEDE UTILIZARSE PARA CUALQUIER PAGO FUTURO Y CALCULAR PRECIOS DE INVERSIONES HIPOTETICAS.

CONSIDERO TRES ESTRATEGIAS DE INVERSION:
PORTAFOLIOS PARA PERIODOS PLANEADOS DE 5 AÑOS. EL PORTAFOLIO MEZCLA DOS BONOS, DONDE UNO TIENE UNA DURACION JUSTAMENTE UN POCO MAYOR QUE EL PERIODO PLANEADO Y OTRO TIENE UNA DURACION LIGERAMENTE UN POCO MENOR.

DE LA LISTA DE BONOS ACCESIBLES Y SU DURACION CALCULADA, ESTOS DOS BONOS DEL PORTAFOLIO PARA PERIODOS EXTREMOS SON FACILMENTE IDENTIFICADOS. EL PORTAFOLIO ES MEZCLA DE DOS BONOS ACCESIBLES TENIENDO LAS DURACIONES MAS LARGAS Y MAS CORTAS.

EL PORTAFOLIO MIXTO ES UNA MEZCLA DIVERSIFICADA DE TODOS LOS BONOS ACCESIBLES, UN PEQUEÑO VALOR DEL PORTAFOLIO SE TIENE DE CUALQUIER BONO.
EN ESTE SENTIDO, UN BONO NO SIMPLE PUEDE DENOMINAR LOS RESULTADOS. CADA UNO DE LOS PORTAFOLIOS FUERON ESCOGIDOS DE FORMA QUE SU DURACION FUESE IGUAL A 5 AÑOS.

EL DESMPEÑO DE ESTA INMUNIZACION DE LOS PORTAFOLIOS ES COMPARADO CON EL DE OTRAS TRES ESTRATEGIAS. DOS ESTRATEGIAS INGENUAS Y LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO.
PARA LAS ESTRATEGIAS INGENUAS, EL INVERSIONISTA TIENE BONOS A 2 ó 10 AÑOS Y REINVIERTE EN AMBOS CADA 6 MESES.

LAS ESTRATEGIAS INGENUAS SON ESTRATEGIAS CORTAS Y LARGAS. EL VENCIMIENTO DEL PORTAFOLIO CONSISTE EN UN BONO SIMPLE CUYO VENCIMIENTO IGUALA A LA LONGITUD DEL PERIODO PLANEADO.

TODOS LOS REDITOS DEL CUPON SON REINVERTIDOS EN EL MISMO BONO A INTERVALOS SEMESTRALES. SE SUPONE QUE INGERSOLL UTILIZO SOLO BONOS A LA PAR EN SUS SIMULACIONES.

LA TABLA 16 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS DE ESTAS ESTRATEGIAS PARA LOS PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS, CONTENIDOS EN EL PERIODO 1950 - 1979. CON ESTA TABLA, LA RAIZ CUADRADA DE LAS DIFERENCIAS ESTA CALCULADA COMO SIGUE:
SEA R_{pt} EL RETORNO PROMETIDO PARA EL PERIODO PLANEADO A 5 AÑOS; SEA R_{st} EL REDITO ANUAL ACTUAL DE LA ESTRATEGIA S SOBRE EL MISMO PERIODO. LA (R.C.D.) PARA LAS ESTRATEGIAS SE DEFINE COMO:

$$(R.C.D.) = [(1/N)*\{\sum_{t=1}^{n}(R_{st} - R_{pt})^2\}]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.1.3.1)$$

DONDE $(R_{st} - R_{pt})$ ESTA MEDIDA EN PUNTOS PORCENTUALES DONDE EXISTEN n OBSERVACIONES O PERIODOS PLANEADOS. PARA EL INDICE, EL REDITO DEL VENCIMIENTO ES R_{pt}, COMO MEDIDA DEL PERIODO ESTIMADO AL PRINCIPIO DEL PERIODO PLANEADO, Y TODAS LAS DURACIONES ESTAN CALCULADAS POR EL METODO DE F-W UTILIZANDO LOS PERIODOS ESTIMADOS.

PARA LA TABLA DE LA TASA INTERNA DE RETORNO, LA TABLA PROMETIDA ES EL REDITO DE UN BONO TENIENDO UNA DURACION DE MACAULAY POR 5 AÑOS Y TODAS LAS DURACIONES DE LAS ESTRATEGIAS DE DURACION ESTAN CALCULADAS BAJO LA DURACION DE MACAULAY.

INGERSOLL ENCONTRO DIFERENCIAS SUSTANCIALES ENTRE ESTA MEDIDA DEL REDITO EN ALGUNOS PERIODOS Y TOMO EN CUENTA AMBOS RESULTADOS.

ES CLARO QUE LAS ESTRATEGIAS DE DURACION Y VENCIMIENTO TIENEN SUSTANCIALMENTE MAS PEQUEÑAS R.C.D QUE LAS ESTRATEGIAS INGENUAS. ESTO INDICA QUE LAS ESTRATEGIAS INGENUAS SON MAS RIESGOSAS PARA PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS QUE LAS OTRAS, EXCEPTO POSIBLEMENTE, PARA LA ESTRATEGIA DE DURACION (UTILIZADA COMO INDICE DE LA TABLA).

EL RIESGO DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS ES UNO DE LOS CANDIDATOS MAS FUERTES PARA UNA EXPLICACION ACEPTABLE; SE ASUME QUE LAS DURACIONES VERDADERAS DE LOS PORTAFOLIOS INMUNIZADOS SON MENORES A 5 AÑOS Y ES MUY PROBABLE QUE LAS VERDADERAS DURACIONES DEL VENCIMIENTO Y DE LOS PORTAFOLIOS INMUNIZADOS ESTEN MUY JUNTAS, Y ASI, SE EJECUTAN SIMILARMENTE.

INGERSOLL CAMBIO EL PROCEDIMIENTO DE HOUGLET HASTA OBTENER UN PERIODO SUAVIZADO Y ENCONTRO QUE ESTO REDUCE LA (R.C.D) PARA TODAS LAS ESTRATEGIAS CON LAS CUALES EL VENCIMIENTO SE ENCONTRABA MEJOR. ESTE PROCESO DE ESTIMACION ENVUELVE EL METODO DE HOUGLET, CONSECUENTEMENTE, UN PROCEDIMIENTO DE ESTIMACION ALTERNATIVO PUEDE PRODUCIR DISTINTOS RESULTADOS. UN PERIODO SUAVIZADO PUEDE IMPLICAR EL MISMO PROCESO ESTOCASTICO, SOLO RUIDOS INDEPENDIENTES SE PUEDEN REMOVER POR LA SUAVIZACION, ESPECIALMENTE SI LA MISMA METODOLOGIA ES UTILIZADA.

ESTIMAR BAJO OTRO PROCEDIMIENTO, POR EJEMPLO EL DE McCULLOCH, PUEDE IMPLICAR NO SOLO UNA CURVA SUAVE, SINO UNA CONSISTENTE CON UN PROCESO ESTOCASTICO DIFERENTE.

LOS ESFUERZOS PARA EXPLICAR LOS RESULTADOS DE INGERSOLL SACO A LA LUZ EL PROBLEMA DE OBTENER PERIODOS ESTIMADOS DE LOS PRECIOS DE COMPRA/VENTA. DIFERENTES CURVAS DEL PERIODO QUE APARECEN PARA EXPLICAR BIEN EL PROMEDIO DEL PRECIO DE COMPRA/VENTA PUEDEN IMPLICAR COMPLETAMENTE DIFERENTES PROCESOS ESTOCASTICOS, DE AQUI, DIFERENTES MEDIDAS DE LA DURACION.

5.1.4 BIERWAG, KAUFMAN Y TOEVS (1982)

EN LAS SIMULACIONES REALIZADAS POR (BKT), SE ASUMEN PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS DEBIDO A QUE LOS PRECIOS USADOS NO ESTAN PERMITIDOS PARA ESTIMACIONES SEGURAS DEL PERIODO PARA VENCIMIENTOS MAS ALLA DE 13 AÑOS Y LAS DURACIONES OBTENIDAS SON CONSIDERABLEMENTE MENORES QUE EL VENCIMIENTO.

LA TABLA 17 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS DE ESTAS SIMULACIONES PARA LOS PERIODOS 1957 A 1974. CLARAMENTE SE OBSERVA QUE LAS CINCO ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION TRABAJAN MEJOR QUE LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO. ESTO INDICA QUE LOS PERIODOS ESTIMADOS SON PROBABLEMENTE MAS SUAVES QUE LAS CURVAS ESTIMADAS DE HOUGLET Y EL MOVIMIENTO DEL PERIODO ESTIMADO ES DIFERENTE.

LA TABLA 18 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS AL APLICARLA SOBRE LOS DATOS DE DURAN EN EL MISMO PERIODO. LOS RESULTADOS SON SIMILARES Y ESTO SUGIERE QUE LOS DATOS DE DURAN PUEDEN SER UN CONJUNTO APROPIADO PARA ILUSTRAR LOS RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES DE ESTE TIPO.

COMPARANDO ESTOS RESULTADOS CON EL PERIODO PLANEADO A 10 AÑOS EN LAS SIMULACIONES DE F-W, MUESTRAN QUE LA PRECISION DE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION TIENDE A CAER CON PERIODOS PLANEADOS CORTOS. ESTO INDUDABLEMENTE REFLEJA LA VARIANZA GRANDE DE LAS TASAS A CORTO PLAZO RELATIVAS A LAS TASAS A LARGO PLAZO Y PUEDE INDICAR QUE LOS MODELOS SENCILLOS TIENDEN A REVELAR CUALQUIER ERROR EN EL PROCESO CON UNA GRAN PROBABILIDAD EN LOS MODELOS CON PERIODOS "TENIDOS" CORTOS. SI UN PROCESO MULTIFACTORIAL ES EXACTAMENTE UN CAMBIO GENERADO EN EL PERIODO Y SI LA CORRELACION ENTRE LAS TASAS A CORTO Y LARGO PLAZO TIENDE A SER RELATIVAMENTE PEQUEÑA, ENTONCES LA PRECISION EN LAS ESTRÀTEGIAS DE INMUNIZACION A CORTO PLAZO SERA MAS AFECTADA QUE LAS ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION A LARGO PLAZO Y MUY AFECTADAS POR LAS FLUCTUACIONES A CORTO PLAZO CONSIDERANDO ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION SOBRE PERIODOS DE 5 AÑOS O MENOS, QUE ESTAN PROBABLEMENTE AFECTADOS POR LOS MOVIMIENTOS DE AMBAS TASAS.

5.1.5 BRENNAN Y SCHWARTZ (1983).

BRENNAN Y SCHWARTZ EN SU ESTUDIO ESTIMARON LOS PERIODOS CON LOS DATOS DEL (C.I.S.P.I.). LOS PERIODOS ESTIMADOS FUERON PERIODOS MENSUALES TOMADOS DE DICIEMBRE DE 1958 A DICIEMBRE DE 1979. UTILIZANDO EL SPLINE CUADRATICO DE McCULLOCH DESCRITO EN EL CAPITULO 3. DESEARON COMPROBAR LOS RESULTADOS DE LA INMUNIZACION DE UN PORTAFOLIO CON LOS RESULTADOS DE LA COMPENSACION ACORDE CON UN MODELO DE DOS FACTORES.

LA TABLA 19 (DEL APENDICE) MUESTRA SUS RESULTADOS PARA DIFERENTES PERIODOS DE 5 AÑOS CONTENIDOS EN EL CONJUNTO DE DATOS. CADA PORTAFOLIO INMUNIZADO ES UN PORTAFOLIO CONSTRUIDO SOBRE LOS PRIMEROS 20 VENCIMIENTOS. EL PESO DEL PORTAFOLIO SE OBTIENE EN LA MISMA MANERA QUE INGERSOLL, SE UTILIZO LA DURACION DE F-W.

CADA BONO SIMULADO EN EL PORTAFOLIO, TIENE ASUMIDA UNA TASA DE CUPON IGUAL AL PROMEDIO DE LAS TASAS DE CUPON EN LA MUESTRA PARA ESE VENCIMIENTO. EL ERROR CUADRATICO MEDIO (E.C.M) ES 25.65 PUNTOS PORCENTUALES Y ES COMPARABLE A LA TABLA (R.C.D) DE INGERSOLL PARA LA INMUNIZACION DE PORTAFOLIOS DE 28.7, PARA PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS CUBRIENDO APROXIMADAMNETE EL MISMO PERIODO (1950 A 1979). DESAFORTUNADAMENTE, BRENNAN Y SCHWARTZ NO SIMULARON LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO, PERO MOSTRARON QUE ESOS RESULTADOS SE PUEDEN COMPARAR CON METODOS MAS SOFISTICADOS SOBRE LOS PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS.

5.2 ESTUDIOS DE REGRESION

5.2.1 BABBEL.

BABBEL, EN 1983, TRATO DE AJUSTAR LA INMUNIZACION DE LAS DURACIONES PARA EL ERROR DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS CUANDO EL TIEMPO PASABA. EN ESTA FORMA, LA INFORMACION REBUSCADA DE LOS CAMBIOS MAS RECIENTES EN EL PERIODO SE PUEDE INCORPORAR DENTRO DE LA ACTUAL DECISION DE REBALANCEO. EL PROCESO ESTOCASTICO DE F-W (EN ESTA FORMA DE DESEQUILIBRIO) ESTIPULA QUE $1 + h^*(0,t) \approx (1+r) * [1 + h(0,t)]$, DONDE h^* ES EL NUEVO PERIODO AL TIEMPO $t = 0$ Y h ES EL PERIODO ANTERIOR.

EN ESTE PROCESO, r ES EL MISMO PARA TODOS LOS PERIODOS AL VENCIMIENTO t. EN MATERIA DE REALIZACION, SE PUEDE ESCRIBIR $1 + h^*(0,t) = (1 + r_t) * [1 + h(0,t)]$ COMO UNA ENTIDAD, Y ASI PODER CALCULAR LOS VALORES DE r_t DESPUES DE QUE SE HA OBSERVADO EL NUEVO PERIODO.

BABBEL ESCRIBIO $\beta_t = r_t / r_1$ Y ESTUDIO EL PATRON DE β_t QUE SE HA OBSERVADO EN EL PASADO Y TRATO DE DEDUCIR LOS ESTIMADOS ESTABLES (PREDICCION) DE ESTOS, UTILIZANDO LOS CAMBIOS DEL PERIODO EN EL PASADO RECIENTE.

RECURRIENDO A LA REGRESION Y A OTROS PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER ESTOS ESTIMADOS, Y TENIENDO LAS PREDICCIONES DE LAS β'_s, SE PUEDE MODIFICAR EL PROCESO F-W DE FORMA TAL, QUE SE PUEDA ACOMODAR LA INCORPORACION DE ESTA NUEVA INFORMACION.

POR EJEMPLO, SEA r_1 QUE SE COMPORTA COMO EN EL PROCESO DE F-W, ENTONCES:

$[1+h*(0,t)] = [1+(r1*\hat{\beta}t) * (1 + h(0,t))]$ DONDE $\hat{\beta}t$ ESTA DADO POR EL PROCESO DE ESTIMACION.

ESTE PROCESO MODIFICADO, COMO LO ANOTA BABBEL, IMPLICA UN NUEVO Y DIFERENTE PROCESO SIMPLE.

BABBEL UTILIZO EL PROCEDIMENTO DE ESTIMACION DESPUES DE IMPUESTOS DE McCULLOCH PARA MEDIR EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES. ESTE CONSISTE EN AJUSTAR UN SPLINE CUBICO AL SIGNIFICADO DEL PRECIO DE COMPRA/VENTA EN LOS DATOS DEL (C.I.S.P.I.).

PROBO VARIAS ESTRATEGIAS PARA LOS PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS TOMADOS DEL PERIODO DE ESTUDIO DE 1947 A 1980.
LAS ESTRATEGIAS SE DIVIDEN EN " NO VISTO HACIA EL FUTURO" Y "VISTO HACIA EL FUTURO". LOS RESULTADOS SE MUESTRAN EN LA TABLA 20 (DEL APENDICE). PARA LAS ESTRATEGIAS "VISTAS A FUTURO", LA DURACION DE LOS PORTAFOLIOS ESTAN AGRUPADOS CON VALORES MAS CORTOS QUE LAS DEL PERIODO.

ESTANDO AGRUPADOS CON VALORES PEQUEÑOS, AL FINAL DE LOS 6 PRIMEROS MESES, LA DURACION DEL PORTAFOLIO SERA EXACTAMENTE DE 4.5 AÑOS. ESTE PROCEDIMIENTO TIENDE A REDUCIR LOS COSTOS DE TRANSACCION DEL REBALANCEO. EN LAS ESTRATEGIAS "NO VISTAS A FUTURO" LAS DURACIONES ESTAN AGRUPADAS CON VALORES APROPIADOS.

BABBEL CONSIDERO PARA LOS COSTOS DE LAS TRANSACCIONES QUE TODAS LAS COMPRAS SON A LOS PRECIOS DE COMPRA Y TODAS LAS VENTAS A LOS PRECIOS DE VENTA.
LA "ESTRATEGIA VIEJA DE DURACION" NO ENVUELVE LOS AJUSTES DE β_t, LOS ASUME; EN EFECTO, SI $\beta_t = 1$ PARA TODA t, LA "NUEVA DURACION" ENVUELVE EL AJUSTE DE β_t. EL FUNDAMENTO DEL "MERCADO DE DINERO" CONSISTE EN INVERTIR EN VALORES DE LA TESORERIA A MENOS DE DOCE MESES.

EL ERROR SEMIESTANDARD (EL CONCEPTO MAS IMPORTANTE), CONSISTE EN LA RAIZ CUADRADA DEL ERROR CALCULADO SOLO PARA LOS CASOS DE "BANCARROTA", EN LOS CUALES EL RETORNO REALIZADO DEL PERIODO PLANEADO CAE POR DEBAJO DEL RETORNO PROMETIDO.

DOS CONCLUSIONES IMPORTANTES SE PUEDEN OBTENER DE LA PRUEBA DE BABBEL: PRIMERO, LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO NO CUMPLE (INMUNIZA) TAN BIEN COMO LAS ESTRATEGIAS DE DURACION; EL ERROR SEMIESTANDARD EN LOS CASOS DE "NO VISTA AL FUTURO" ES 10 VECES MAS GRANDE; SEGUNDO, LAS ESTRATEGIAS DE LA NUEVA DURACION NO SE PRESTAN A INMUNIZAR MEJOR QUE LAS ANTIGUAS.

BABBEL NOTO QUE LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO FALLABA AL TOPAR CON EL RETORNO MARCADO Y OBTENER VALORES MENORES QUE LA ESTRATEGIA DE LA NUEVA DURACION, PERO ESTO ESTABA ESPERADO PARA UN PERIODO DE TASAS CRECIENTES Y, EN CUALQUIER CASO, LA MAGNITUD DE LOS ERRORES EN LA NUEVA DURACION TIENDE A SER PEQUEÑA.

5.2.2 NELSON Y SCHAEFER.

NELSON Y SCHAEFER EN 1983, ASUMIERON QUE EL PERIODO DE LAS TASAS DE INTERES SE DESLIZA SOBRE EL TIEMPO, ACORDE A UN PROCESO DE EQUILIBRIO MULTIFACTORIAL QUE PUEDE SER DESCRITO EN UN TIEMPO CONTINUO. EN ESTE MODELO SE ASUME QUE LOS K-FACTORES SE DESLIZAN A TRAVES DEL TIEMPO ACORDES A UN PROCESO DE DIFUSION CONJUNTO.

DADO QUE EL REDITO EN UN BONO DE DESCUENTO PURO ES UNA FUNCION DE K-FACTORES, SE PUEDEN DESCRIBIR LOS DIFERENCIALES ESTOCASTICOS DEL PRECIO DE UN BONO COMO UNA FUNCION DE LAS DERIVADAS DE LA TASA DESCONTADA CON RESPECTO A CADA FACTOR. EL COEFICIENTE DEL COMPONENTE ALEATORIO DEL PRECIO DIFERENCIAL DEL BONO ES UNA FUNCION LINEAL DE ESTAS DERIVADAS Y SOSTIENE UN CONCEPTO FUERTE DE LA DURACION. A ESTOS COEFICIENTES SE LES LLAMA "FACTORES SENSITIVOS" DEL PROCESO ESTOCASTICO.

EN EL MODELO TRADICIONAL DE DURACION, UN CAMBIO INSTANTANEO EN EL PERIODO RESULTA EN EL CAMBIO DE PRECIO DE UN BONO QUE PUEDE EXPRESARSE COMO UN COEFICIENTE (EXPRESADO COMO UNA FUNCION DE LA DURACION), MULTIPLICADO POR UN CAMBIO ALEATORIO EN EL PERIODO.

EN EL TRABAJO DE NELSON Y SCHAEFER, EL COEFICIENTE QUE ESTA MULTIPLICADO POR UN FACTOR DE CAMBIO ALEATORIO, ES UN FACTOR DEL COEFICIENTE SENSITIVO QUE PUEDE SER ESTIMADO EMPIRICAMENTE. EN EL CONTEXTO DE EQUILIBRIO, CUALESQUIERA DOS INVERSIONES QUE TIENEN EXACTAMENTE EL MISMO FACTOR SENSITIVO, TENDRAN EXACTAMENTE EL MISMO RETORNO Y, HABLANDO ESTADISTICAMENTE, SON INDISTINGUIBLES. PARA ESTE PRINCIPIO BASICO DE LA TEORIA MODERNA DEL PORTAFOLIO, ES POSIBLE CONSTRUIR UN PORTAFOLIO DE INVERSIONES QUE "IMITE" A LOS RETORNOS DE OTROS VALORES DADOS.

SOLO ES NECESARIO QUE EL FACTOR SENSITIVO DEL PORTAFOLIO CONTRUIDO SE ASEMEJE A LAS INVERSIONES DADAS A IMITARSE.

FUNDAMENTALMENTE, ESTO ES PRECISAMENTE LO QUE ENVUELVE LA ESTRATEGIA DE INMUNIZACION. EL PORTAFOLIO INMUNIZADO TIENE UNA DURACION QUE SE ASEMEJA AL VENCIMIENTO (O DURACION) DE UN BONO CON CUPON CERO, Y ASI SE IMITA O COMPORTA COMO UN BONO CON CUPON CERO SOBRE UN PERIODO PLANEADO.

SEA O NO UN BONO CON CUPON CERO, EXISTE Y ES COTIZADO EN EL MERCADO. NELSON Y SCHAEFER ESTIMARON EL FACTOR SENSITIVO Y TRATARON DE MOSTRAR EL EXITO DE LA IMITACION.

TRABAJANDO CON PERIODOS QUE HABIAN SIDO ESTIMADOS EN DOS FORMAS DISTINTAS. UTILIZARON LA APROXIMACION LINEAL DE SCHAEFER (1981) CON LOS DATOS DEL (C.I.S.P.I.) SOBRE EL PERIODO 1925 A 1979.

MODELOS DE UNO Y DOS FACTORES SE IDEARON. LA TASA A CORTO PLAZO (1 AÑO) ES ESPECIFICADA COMO UN FACTOR Y LA TASA A LARGO PLAZO (13 AÑOS) SE ESPECIFICA COMO UN SEGUNDO FACTOR. LAS DERIVADAS DE LAS TASAS DE DESCUENTO QUE INTEGRAN EL FACTOR SENSITIVO ESTAN ESTIMADAS POR CAMBIOS REGRESIVOS EN LA TASA t O CAMBIOS EN LA TASA A CORTO PLAZO Y SEPARADAMENTE EN LOS CAMBIOS EN LA TASA A LARGO PLAZO.

LOS FACTORES SENSITIVOS SE HAN CALCULADO DE UN PROMEDIO DE LOS COEFICIENTES DESLIZADOS ESTIMADOS EN ESTA REGRESION SOBRE SUBPERIODOS.

LAS ESTRATEGIAS A SER SIMULADAS, SON DIFERENTES DE LAS REPORTADAS EN SIMULACIONES PREVIAS, NELSON Y SCHAEFER QUISIERON VER COMO UNA ESTRATEGIA PARTICULAR IGUALABA EL FUNCIONAMIENTO DE ALGUN VALOR MARCADO. ESPECIFICARON BONOS A DESCUENTO PUROS DE 5, 10 Y 15 COMO BONOS MARCADOS.

LOS RETORNOS DE ESTOS BONOS SERAN SIMULADOS POR VARIAS ESTRATEGIAS DE PORTAFOLIOS. LA ESTRATEGIA DEL VENCIMENTO ES ESPECIFICADA COMO UNA ESTRATEGIA INGENUA AL COMPARARLA CON OTRAS. LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO CONSISTE EN CONSTRUIR UN PORTAFOLIO CUYO VENCIMIENTO PROMEDIO ES IGUAL AL DE EL VALOR MARCADO.

LA ESTRATEGIA DE DURACION CONSISTE EN CONSTRUIR TENIENDO UNA DURACION F-W IGUAL A LA DE UN VALOR MARCADO. LA ESTRATEGIA A CORTO PLAZO UTILIZA LA TASA A CORTO PLAZO COMO UN FACTOR SIMPLE Y CONSISTE EN CONSTRUIR UN PORTAFOLIO CON UN FACTOR SENSITIVO PROMEDIO IGUAL AL DEL VALOR MARCADO. UNA ESTRATEGIA A LARGO PLAZO ESTA DESIGNADA COMO UN MODELO CON UN FACTOR SIMPLE. FINALMENTE, UN MODELO CON DOS FACTORES, ES SIMILARMENTE DESIGNADO UTILIZANDO LAS TASAS A CORTO Y LARGO PLAZO COMO FACTORES.

LA TABLA 21 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS PARA LOS BONOS MARCADOS A 5 AÑOS. LOS RETORNOS EN EL BONO MARCADO Y EL PORTAFOLIO INMUNIZADO SON COMPARADOS AL FINAL DE CADA MES. EL PORTAFOLIO INMUNIZADO ES RECONSTRUIDO AL FINAL DE CADA MES.

EL BONO NUNCA DECLINA EN EL VENCIMIENTO COMO EN OTRAS SIMULACIONES.

LA ESTRATEGIA CONVENCIONAL DE LA DURACION INVARIABLEMENTE SE DESEMPEÑA MUY BIEN COMO UNA MEDIDA DE LA DESVIACION ESTANDARD DE LA DIFERENCIA EN LOS RETORNOS Y POR EL RELATIVO REMANENTE PEQUEÑO INEXPLICADO EN LA VARIANZA MARCADA, EXCEPTO PARA LA ESTRATEGIA A CORTO PLAZO, LAS DIFERENCIAS ENTRE LAS ESTRATEGIAS APARECEN MUY PEQUEÑAS.

EL MODELO DE DOS FACTORES SE APLICA SOLO PARA LOS BONOS MARCADOS A 10 AÑOS Y SE DESEMPEÑA PEOR QUE LA DURACION DE F-W.

ESTE ES UN RESULTADO DESTACADO, EN VISTA DE QUE EL MODELO DE DOS FACTORES DE LA MOCION DEL PERIODO EXPLICA MEJOR EL MOVIMIENTO DEL PERIODO (POR DEFINICION) QUE UN MODELO CON UN FACTOR.

NELSON Y SCHAEFER SUGIRIERON QUE EL MODELO DE DOS FACTORES NO SE DESEMPEÑA MEJOR, DEBIDO A QUE EL PESO EN EL PORTAFOLIO TIENDE A COLOCARSE EN BONOS A CORTO PLAZO; LOS REDITOS EN LOS CUALES NO SE HAN EXPLICADO BIEN POR LA TASA A UN AÑO, ESTO RESULTA DE LAS TASAS CONSIDERADAS PORQUE DE LA APARENTE INTUICION DE CONTRADICCION.

AUNQUE UN MODELO DE DOS FACTORES PUEDE EXPLICAR LA EVOLUCION DE LOS REDITOS OBSERVADOS MEJOR QUE UN MODELO DE UN FACTOR, ESTO NO ASEGURA QUE UN PORTAFOLIO APOSTADO, BASADO EN DOS FACTORES, SE IGUALARA MAS CERCANAMENTE AL REDITO MARCADO QUE UN PORTAFOLIO APOSTADO BASADO EN UN FACTOR.

5.2.3 **BRENNAN Y SCHWARTZ** (1983).

LAS SIMULACIONES DE BRENNAN Y SCHWARTZ INVOLUCRAN ESTIMACIONES DE REGRESION Y UN MODELO CON DOS FACTORES. AUNQUE EL MODELO DE BRENNAN-SCHWARTZ ES MUY SIMILAR AL MODELO DE NELSON-SCHAEFER, ESTE ES MAS RESTRINGIDO.

ASUMIERON UN FACTOR A CORTO PLAZO Y OTRO A LARGO PLAZO, PERO CON LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

1. LA DESVIACION ESTANDARD DE CADA TASA DE INTERES ES PROPORCIONAL AL NIVEL DE TAL TASA.
2. LA TASA A CORTO PLAZO TIENDE A REGRESAR HACIA LA TASA A LARGO PLAZO.
3. EL CAMBIO PROPORCIONAL INSTANTANEO ESPERADO EN LA TASA A LARGO PLAZO, ES UNA FUNCION LINEAL DE LOS NIVELES ACTUALES DE LAS TASAS A CORTO Y LARGO PLAZO.

CONOCIENDO LOS ESTIMADORES DE LOS PARAMETROS EN SU SISTEMA, EL PROCEDIMIENTO DE BRENNAN Y SCHWARTZ ES MUY PARECIDO AL DE NELSON Y SCHAEFER.

IGUALARON LOS FACTORES SENSITIVOS PARA PRODUCIR UNA ESTRATEGIA DE APUESTA PARA UN PERIODO PLANEADO CONOCIDO. LA TABLA 22 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS DE ESTA ESTRATEGIA UTILIZANDO LOS DOS FACTORES. ESTAS SIMULACIONES SON SIMILARES A LAS ANTERIORES, UNA INVERSION ES COLOCADA Y CONTINUAMENTE REBALANCEADA DE MANERA QUE IGUALA EL FACTOR SENSITIVO DE UN BONO A DESCUENTO PURO CUYO VENCIMIENTO SIEMPRE IGUALA EL TIEMPO REMANENTE EN UN PERIODO PLANEADO.

LA APUESTA OBTENIDA EN LA TABLA 22 SE PUEDE COMPARAR CON LOS RESULTADOS DE UNA APUESTA DE DURACION CONVENCIONAL EN LA TABLA 19 PARA EL MISMO PERIODO PLANEADO Y UTILIZANDO LOS MISMOS DATOS FUNDAMENTALES DEL C.I.S.P.I. Y PERIODOS ESTIMADOS. EL FACTOR DOBLE REDUCE EL ERROR CUADRATICO DE LA DIFERENCIA ANUAL EN LA TASA DE RETORNO PROMETIDA PARA EL PERIODO PLANEADO Y LA TASA REALIZADA EN UN 50%. AUNQUE ESTO ES UN ADELANTO SUBSTANCIAL, BRENNAN Y SCHWARTZ OBSERVARON QUE EL DESEMPEÑO DEL MODELO DE DURACION CONVENCIONAL ES PROBABLEMENTE MEJOR DENTRO DE LIMITES ACEPTABLES PARA PROPOSITOS PRACTICOS.

COMPARANDO LAS TABLAS 19 Y 22, SE OBSERVA QUE LA DIFERENCIA EN VALOR ABSOLUTO ENTRE EL RETORNO PROMETIDO Y REALIZADO NO SIEMPRE ES PEQUEÑA PARA LAS DOS APUESTAS.

LOS MODELOS DE SIMULACION CON DOS FACTORES NO SIEMPRE SE DESEMPEÑAN MEJOR QUE LOS MODELOS DE SIMULACION CON UN FACTOR.

5.2.4 BIERWAG, KAUFMAN Y TOEVS (1982); BIERWAG Y ROBERTS (1985)

UNA CRITICA QUE SE HA HECHO AL ANALISIS DE LA DURACION DEL PORTAFOLIO CASI DESDE EL PRINCIPIO, FUE LA DE LA NOCION QUE LA INMUNIZACION PERMITE AL INVERSIONISTA GANAR MAS QUE UNA TASA DE RETORNO LIBRE DE RIESGO, SI LA TASA DE INTERES CAMBIA. DEBIDO A QUE LOS RETORNOS SON FUNCIONES "CONVEXAS" DE LAS TASAS DE INTERES, CUALQUIER CAMBIO EN LAS TASAS RESULTA EN GRANDES RETORNOS. EN UNA CRITICA ANTERIOR, INGERSOLL, SKELTON Y WEIL (1978) NEGARON VIGOROSAMENTE QUE DICHAS CONVEXIDADES PODRIAN EXISTIR EN EQUILIBRIO DEBIDO A QUE ESTAS PERMITIAN AL INVERSIONISTA VENDER BONOS CON CUPON CERO A CORTO PLAZO (O EMITIRLOS) Y PROCEDIAN A COMPRAR EL PORTAFOLIO INMUNIZADO.

SI LAS TASAS DE INTERES CAMBIAN EN CUALQUIER SENTIDO, UNA GANANCIA SEGURA SE PUEDE REALIZAR CON UNA INVERSION "CERO".

CONFINANDOSE A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS CONTINUOS, INGERSOLL, SKELTON Y WEIL CONCLUYERON QUE LAS DURACIONES Y LOS PRINCIPALES PROCESOS ESTOCASTICOS UTILIZADOS EN LA INFORMACION PARA INMUNIZAR LOS PORTAFOLIOS, SON INCONSISTENTES CON EL EQUILIBRIO, EXCEPTO CUANDO LOS PERIODOS SON ESTABLES Y CON CAMBIOS ADITIVOS.

BIERGAW, KAUFMAN Y TOEVS EN 1982, INTRODUJERON LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DISCRETOS DEL MOVIMIENTO DEL PERIODO Y MOSTRARON QUE EXISTE UN GRAN GRUPO DE PROCESOS EQUILIBRADOS QUE SE PUEDEN ESCOGER PARA OBTENER LAS DURACIONES O MEDIDAS SENSITIVAS QUE SON UTILIZADAS EN INVENTAR APUESTAS O PORTAFOLIOS INMUNIZADOS. POR OTRO LADO, BIERWAG EN 1987, MOSTRO QUE LAS MEDIDAS DE DURACION UTILIZADAS EN EL PASADO, SON CONSISTENTES CON LOS PROCESOS EN EQUILIBRIO.

PARA CULAQUIER PROCESO DE UN FACTOR SE MUESTRA QUE LA SERIE DE TIEMPO ES:

$$R_{t\pi} - R_{q\pi} = \beta_{tq}(D_t)*(R_{k\pi} - R_{q\pi}) \qquad t = 1,2,... \qquad \pi = 1,2,... \tag{5.2.4.1}$$

DONDE $R_{t\pi}$ ES EL RETORNO POR UNIDAD SOBRE EL PERIODO π DE UN BONO CON CUPON CERO CON VENCIMIENTO t; q, y k (k=q) SON LOS VENCIMIENTOS DE LAS DOS INVERSIONES REFERIDAS, D_t ES LA DURACION DEL t-ESIMO PERIODO DE UN BONO CON DESCUENTO PURO ([D_t=t] PARA BONOS CON DESCUENTO PURO) Y ESTA MEDIDO CON RELACION A UN PROCESO EN EQUILIBRIO DONDE $\beta_{tq}(D_t)$, ES UNA FUNCION DE D_t, QUE MIDE LA SENSIBILIDAD DE LOS CAMBIOS EN $R_{t\pi} - R_{qt}$ A CAMBIOS EN $R_{k\pi} - R_{q\pi}$.

LA ECUACION (5.2.4.1) ES COMPARABLE A LA ECUACION DEL M.P.C.A (MODELO DEL PRECIO DEL CAPITAL ACTIVO), EN LA CUAL $R_{k\pi}$ MIDE EL RETORNO "DEL MERCADO" Y $R_{q\pi}$ MIDE EL RETORNO LIBRE DE RIESGO.

LA FUNCION $\beta_{tq}(D_t)=1$ CUANDO t=k Y $\beta_{tq}(D_t)=0$ CUANDO t=q. ESTAS β'_s REPRESENTAN LOS FACTORES SENSITIVOS Y PUEDEN COMPARARSE CON LOS FACTORES SENSITIVOS ESTIMADOS POR NELSON Y SCHAEFER.

EMPIRICAMENTE, EXISTEN UNA GRAN VARIEDAD DE MANERAS PARA PROCEDER, CONOCIENDO LA ECUACION (5.2.4.1) Y DADO UN PROCESO ESTOCASTICO, IMPLICA QUE $\beta_{tq}(D_t)$ ES UNA FUNCION PARTICULAR.

POR EJEMPLO; SI SE TOMA UN PROCESO ESTOCASTICO EN EQUILIBRIO QUE REMONTE A LA DURACION F-W, ENTONCES, $\beta_{tq}(D_t)=(D_t-q)/(k-q)$, DONDE D_t = t SI $R_{t\pi}$ ES EL RETORNO DE UN BONO CON CUPON CERO.

EN ESTE CASO, $\beta_{tq}(D_t)$ ES LINEAL EN t.

SE PUEDE SIMPLEMENTE ESTIMAR LAS β's PARA CADA t, CORRIENDO UNA REGRESION SOBRE LAS OBSERVACIONES EN LOS INTERVALOS DE TIEMPO. ESTO PRODUCE LOS ESTIMADORES

$\hat{\beta}_{1q}, \hat{\beta}_{2q}, \ldots$, PUDIENDOSE UTILIZAR ESTOS ESTIMADORES COMO LOS FACTORES SENSITIVOS EN ANALOGIA A LO QUE SE REALIZO CON NELSON-SCHAEFER PARA CONSTRUIR UN PORTAFOLIO QUE REPRODUZCA EL RETORNO EN UN PERIODO t DE UN BONO CON DESCUENTO PURO.

BIERWAG, KAUFMAN Y TOEVS, ESTIMARON LAS β'_s EN LA ECUACION (5.2.4.1) UTILIZANDO EL PERIODO ESTIMADO POR BABBEL, TOMANDO LOS DATOS DEL C.I.S.P.I. PARA EL PERIODO DE ENERO DE 1942 A ENERO DE 1980. LOS PERIODOS SON ESTIMADOS A INTERVALOS SEMESTRALES Y SE ASUME QUE SON BONOS CON DESCUENTO PURO CUYO VENCIMIENTO ES SEMESTRAL.

LOS RETORNOS SOBRE LOS INTERVALOS SEMESTRALES PARA BONOS CON CUPON CERO (HIPOTETICOS), FUERON CALCULADOS SIENDO q=1 (6 MESES) Y k=17 (8.5 AÑOS), LAS β'_s FUERON ESTIMADAS PARA EL PERIODO COMPLETO. LA TABLA 23 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS DE ESTA REGRESION.

RESULTADOS SIMILARES SE OBTUVIERON PARA OTRAS REGRESIONES CUANDO SE ESPECIFICARON INVERSIONES ALTERNATIVAS. LAS β'_s ESTIMADAS SON MONOTONAS EN TERMINOS DEL VENCIMIENTO, LA R^2 ES MUY GRANDE Y SE APROXIMA A UNO CUANDO t SE APROXIMA A 17.

EL AJUSTE DE LA REGRESION ES PEOR PARA INVERSIONES A CORTO PLAZO QUE PARA INVERSIONES A LARGO PLAZO. PARA PROBAR UN CAMBIO ESTRUCTURAL EN LAS β'_s, EL PERIODO SE DIVIDIO A LA MITAD Y SE ESTIMARON SEPARADAMENTE EN CADA MITAD.

LAS PRUEBAS MOSTRARON QUE EXISTE UNA FUERTE EVIDENCIA DEL CAMBIO ESTRUCTURAL EN LAS β'_s, ESTO ES, UN CAMBIO EN EL PROCESO ESTOCASTICO PRINCIPAL ENTRE LAS DOS MITADES DEL PERIODO.

BIERWAG Y ROBERTS EN 1985, ESTIMARON LA ECUACION (5.2.4.1) UTILIZANDO ESTOS DATOS EN BRUTO, ESTO ELIMINO ALGUNA POSIBLE DISTORSION CAUSADA POR LA SUAVIZACION DEL PERIODO. SE UTILIZARON DATOS BASADOS EN LOS PRECIOS DE COMPRA/VENTA DE LOS BONOS DEL GOBIERNO CANADIENSE PARA LOS PERIODOS DE ENERO DE 1963 A DICIEMBRE DE 1982. LA BASE DE DATOS CONSISTE EN EL PROMEDIO DEL PRECIO DE COMPRA/VENTA.

LA DURACION DE MACAULAY DE TODOS LOS BONOS SE CALCULO EN CADA MES. NUEVE DURACIONES MARCADAS SE ESPECIFICARON: 6 MESES, 1 AÑO, 2 AÑOS,..., 8 AÑOS. EN CADA MES, UN BONO CON DURACION CERCANA A CADA DURACION MARCADA FUE IDENTIFICADO.

LOS RETORNOS MENSUALES DE ESTOS BONOS MARCADOS FUERON CALCULADOS PARA CADA MES EN EL PERIODO.

LAS DURACIONES A 6 MESES Y 5 AÑOS FUERON ESCOGIDAS COMO INVERSIONES DE REFERENCIA Y LA REGRESION EN LA ECUACION (5.2.4.1) FUE CORRIDA.

LA TABLA 24 (DEL APENDICE) MUESTRA LOS RESULTADOS DE ESTAS REGRESIONES. LOS PERIODOS INTERPOLADOS NO SON SIGNIFICATIVAMENTE DIFERENTES DE CERO COMO CONCLUSION DE HIPOTESIS Y LAS R^2 SON MAS GRANDES QUE 0.80 EN TODAS LAS REGRESIONES EXCEPTO LOS TERMINOS MAS CORTOS Y MAS LARGOS.

EL RELATIVO VALOR BAJO DE R^2 PARA LA REGRESION DEL PERIODO A CORTO PLAZO NO ES INESPERADO. LOS PLAZOS CORTOS FUGACES Y LOS CAMBIOS DEFORMES DEL PERIODO AL TERMINO REDUCIDO, SE HAN OBTENIDO FRECUENTES VALORES REDUCIDOS EN LAS REGRESIONES DE LAS R^2. LA DETERMINACION DEL AJUSTE EN LA REGRESION PARA INVERSIONES CON DURACIONES A LARGO PLAZO ES UN MISTERIO.

UN DESDOBLAMIENTO EN LOS DATOS DENTRO DE UN PERIODO DIVIDIDO A LA MITAD, MOSTRO QUE ERA UNA CLARA EVIDENCIA EN EL CAMBIO EN EL PROCESO ENTRE LOS PERIODOS. LOS AJUSTES DE LA REGRESION SON MEJORES EN EL SEGUNDO PERIODO QUE EN EL PRIMERO. LA MONOTONIA DE LAS β'_S ES A TRAVES DE PERIODOS TEMPRANOS EXCEPTO PARA $\beta_4 < 1$, CUANDO $\beta_5 = 1$.

LA SEGUNDA MITAD DEL PERIODO MOSTRO MONOTONIA CON $\beta_4 < 1$ Y $\beta_6 > 1$, COMO SE ESPERABA, PERO DETERIORACION EN LA REGRESION PARA LA DURACION AL OCTAVO AÑO. ESTOS RESULTADOS UTILIZANDO DATOS BRUTOS, MUESTRAN RESULTADOS MIXTOS CON RELATIVAMENTE BUENOS AJUSTES EN LAS DURACIONES INTERMEDIAS.

LAS REGRESIONES FUERON COMPARADAS CON ALGUNAS REGRESIONES DEL VENCIMIENTO SIMILARES, EN ESTAS REGRESIONES INGENUAS SIMPLEMENTE SE SUSTITUYE EL VENCIMIENTO PARA LA DURACION Y SE CORRE LA REGRESION. LA TABLA 25 (DEL APENDICE) MUESTRA ESTOS RESULTADOS. LOS AJUSTES EN LAS R^2 MUESTRAN ALGUNAS RELACIONES FUERTES. LAS β'_S ESTIMADAS SON MONOTONAS COMO SE ESPERABA PARA VENCIMIENTOS FUERA DE 7 AÑOS, PERO DESPUES PRESENTAN UN PATRON NO MUY CLARO. SE HA ARGUMENTADO QUE LAS DURACIONES EN CADA VENCIMIENTO ESTAN CERCANAS A UNA CONSTANTE A TRAVES DE LA SERIE DE TIEMPO, ASI QUE LA MONOTONIA DE LAS β'_S REFLEJA LAS DURACIONES COMO SE ESPERABA EN LA ECUACION (5.2.4.1). EN ESTAS REGRESIONES TEMPRANAS DEL VENCIMIENTO, LAS VARIANZAS DE LAS DURACIONES CAEN DENTRO DE CADA REGRESION, AUNQUE PEQUEÑAS, SON MAS GRANDES QUE EN LAS REGRESIONES DE LAS DURACIONES.

SE PUEDE ESPERAR QUE LAS R^2 DECREZCAN PARA ESTAS REGRESIONES SI LOS MODELOS DE DURACION SON EN EFECTO SUPERIORES.

ESTO NO ES CIERTO, SUGIERE QUE EN LA UTILIZACION DE LOS DATOS BRUTOS, NO IMPORTA EL GOLPEAR A LA DURACION EXACTAMENTE EN LA CONSTRUCCION DE UNA ESTRATEGIA DE APUESTA.

EXISTE UN RANGO EN LA DURACION TAL QUE, CUALQUIER DURACION EN EL RANGO PROBABLEMENTE TRABAJE MEJOR QUE OTRAS. ESTAS SON INTERPRETACIONES ESPECULATIVAS DE LOS RESULTADOS.

5.2.5 GULTEKIN Y ROGALSKI.

GULTEKIN Y ROGALSKI EN 1984, COMENZARON A MANEJAR LA APROXIMACION LINEAL UTILIZADA FRECUENTEMENTE EN LOS CAPITULOS ANTERIORES: $\Phi p/p \approx -D_{(\Phi r)}$, DONDE Φp ES EL CAMBIO EN EL PRECIO p DE UNA INVERSION INDUCIDA POR UN CAMBIO EN LA TASA INTERNA DE RETORNO Φr. Y DONDE D ES LA DURACION DE MACAULAY MODIFICADA (LA DURACION DE MACAULAY DIVIDIDA ENTRE 1+R). G-R ARGUMENTARON QUE $\Phi p/p$ ES UNA BUENA MEDIDA DE LA TASA DE RETORNO POR UNIDAD SOBRE UN MES; ENTONCES SE PUEDE ESPERAR QUE LA TASA DE RETORNO SEA UNA FUNCION LINEAL DE LA DURACION.

ESTA $\Phi p/p$ ES UN SALTO IMAGINARIO. COMO SE DICE COMUNMENTE, $\Phi p/p$ ES EL PORCENTAJE INSTANTANEO DEL CAMBIO EN EL PRECIO INDUCIDO POR UN CAMBIO EN LAS TASAS DE INTERES.

UTILIZANDO $\Phi p/p$ EN ESTA ECUACION COMO UNA MEDIDA DE LOS INTERESES DE RETORNO SOBRE UN INTERVALO DE TIEMPO, SE LLEGA A ALGUNAS CONTRADICCIONES: SUPONGASE QUE EL BONO ES CON DESCUENTO PURO, ENTONCES, SOBRE EL TIEMPO $\Phi p/p$ ES UNA MEDIDA DE LA TASA DE RETORNO SI LAS TASAS DE INTERES NO CAMBIAN. ENTONCES, $\Phi p/p > 0$ CUANDO $\Phi r = 0$, CONTRARIO A LA ECUACION.

SUPONIENDO QUE EL BONO ES A LA PAR Y QUE LAS TASAS DE INTERES NO CAMBIAN, ENTONCES, $\Phi p/p = 0$ Y $\Phi r = 0$.

ESTO IMPLICA QUE LOS BONOS A LA PAR TIENEN TASA DE RETORNO CERO A NO SER QUE LAS TASAS DE INTERES CAMBIEN!.

UN PORCENTAJE EN EL CAMBIO EN EL PRECIO INSTANTANEO TIENE QUE VER UN POCO CON LA MEDIDA DEL RETORNO DEL BONO SOBRE UN INTERVALO DE TIEMPO.

GULTEKIN Y ROGALSKI NOTARON ESTO Y REALIZARON UNA GRAN CANTIDAD DE RUTINAS BASADAS EN ESTA SUPOSICION. PROPUSIERON PROBAR LA LINEALIDAD DE LA RELACION ENTRE LA TASA DE RETORNO Y LA DURACION, EXPRESANDOLA COMO:

$$\tilde{R}_{\pi}(m) = \tilde{\Gamma}1_{\pi} + \tilde{\Gamma}2_{\pi} Dk_{\pi-1}(m) + \tilde{\Gamma}3_{\pi} Dk^{2}{}_{\pi-1}(m) + \tilde{\Gamma}4_{\pi} C_{\pi}(m) + \tilde{e}_{\pi}(m) \qquad (5.2.5.1)$$

DONDE $\tilde{R}_{\pi}(m)$ ES EL RETORNO DE UNA INVERSION CON VENCIMIENTO m DURANTE EL INTERVALO DE TIEMPO π; $Dk_{\pi-1}(m)$ ES LA DURACION CORREPONDIENTE AL R-ESTIMO PROCESO ESTOCASTICO A LA FECHA (π-1) SOBRE LA INVERSION CON VENCIMIENTO m; $Dk^{2}_{\pi-1}(m)$ ES EL CUADRADO DE LA REGRESION, Y $C_{\pi}(m)$ ES LA TASA DE CUPON DE LA INVERSION.

LOS COEFICIENTES : $\tilde{\Gamma}1_{\pi}, \tilde{\Gamma}2_{\pi}, \tilde{\Gamma}3_{\pi}$ y $\tilde{\Gamma}4_{\pi}$ SON LIBRES DE VARIANZA

CON π, PERO NO CON EL VENCIMIENTO (m). FINALMENTE, $\tilde{e}_{\pi}(m)$ ES EL ERROOR USUAL.

SOBRE UN MES π SE PUEDE CORRER LA REGRESION PARA BONOS QUE TIENEN DIFERENTES VENCIMIENTOS. SOBRE EL TIEMPO, SE PUEDE ESTUDIAR LA EVOLUCION DE LOS COEFICIENTES ESTIMADOS. G-R UTILIZARON LA HIPOTESIS:

$\tilde{\Gamma}3_{\pi} = \tilde{\Gamma}4_{\pi} = 0.$

UNA ECUACION SATISFACTORIA, NO SE HA PODIDO OBTENER DE LAS NOCIONES FUNDAMENTALES SOBRE EL PRINCIPIO DE EQUILIBRIO. LA ECUACION DE G-R ESTA SUJETA A LAS MAS SEVERAS CRITICAS. LA JUSTIFICACION DE LA MEDICION DE

$\tilde{R}_{\pi}(m)$ COMO LA TASA DE RETORNO OBTENIDA DE LA ECUACION DE APROXIMACION.

EN LAS ECUACIONES LINEALES QUE TENIAN LAS β'_{S} LINEALES DE RETORNO EN LA DURACION NO ES UN ASPECTO NECESARIO EN EL ANALISIS DE DURACION FUERA DE EQUILIBRIO.

LOS COEFICIENTES $\tilde{\Gamma}2_{\pi}$ TIENEN LA INTERPRETACION DE SER UN CAMBIO GENERAL EN LAS TASAS DE INTERES Y SE ASUME QUE DEBE SER IGUAL PARA TODOS LOS BONOS INDISTINTAMENTE DEL VENCIMIENTO m. MAS AUN, COMO SE NOTO EN VARIOS ESTUDIOS, EL CAMBIO EN LAS TASAS TIENDE A SER MAS LARGO PARA INVERSIONES A CORTO PLAZO QUE PARA INVERSIONES A LARGO PLAZO.

ESTAS $\tilde{\Gamma}2_{\pi}$ SON UNA FUNCION IMPLICITA DE $Dk_{\pi-1}(m)$ Y UNA NO LINEALIDAD EN LA RELACION ESTA IMPLICITA, PORQUE SUSTITUYENDO

$\tilde{\Gamma}2_{\pi}$ CON UNA FUNCION DE $Dk_{\pi-1}(m)$ PRODUCE UNA NO LINEALIDAD.

ESTA ESPECIFICACION IMPLICA QUE LOS ESTIMADORES POR MINIMOS CUADRADOS DE OTROS COEFICIENTES ESTAN SESGADOS POR DEBAJO, DE FORMA TAL, QUE PRUEBAS SENSITIVAS SE PUEDEN CONDUCIR UTILIZANDO ESTOS RESULTADOS DE LA REGRESION.

5.3 CONSIDERACIONES AL CAPITULO 5

5.3.1 INMUNIZACION : UN PROCESO ESTOCASTICO CON UN SOLO FACTOR.

COMO SE HA NOTADO, LOS TEOREMAS DE INMUNIZACION SE PUEDEN MODIFICAR PARA SER CONSISTENTES CON LOS PERIODOS NO ESTABLES QUE TIENEN CAMBIOS ALEATORIOS A TRAVES DEL TIEMPO COMO UN PROCESO ESTOCASTICO DE UN SOLO FACTOR. AQUI SE MOSTRARA QUE LAS INMUNIZACIONES QUE SE OBTUVIERON SE PUEDEN ESCRIBIR EN LA MISMA FORMA EN ESTE CONTEXTO MAS GENERAL, LA CONDICION DE INMUNIZACION SE PUEDE PRESENTAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

<u>CONOCIENDO UN PROCESO ESTOCASTICO CON UN SOLO FACTOR, DENOMINADO COMO EL PROCESO p, Y UN PERIODO PLANEADO CON LONGITUD q, UN PORTAFOLIO DE INVERSIONES CON REDITO CONSTANTE ES INMUNIZADO, SI ES ESCOGIDO DE FORMA QUE</u>

$$D_p = q$$

PARA DEMOSTRAR ESTO, SE ASUME QUE LOS PERIODOS CAMBIAN DE $h(0,t)$ A $h^*(0,t)$ $t = 1,2,\ldots,$ INSTANTANEAMENTE DEPUES DE QUE SE HUBO DE COLOCAR EL PORTAFOLIO. SEA τ EL FACTOR SIMPLE ALEATORIO, ASI:

$$h^*(0,t) = f(t,\tau) \tag{5.3.1.1}$$

CON LA PROPIEDAD DE QUE $f(t,0) = h(0,t)$. LA FORMA FUNCIONAL f TOMA EN CUENTA POSIBLES FORMAS PARA DIFERENTES PROCESOS. EN GENERAL, SE ASUME QUE f Y f' SON CONTINUAS EN t, DONDE f' ES LA DERIVADA PARCIAL CON RESPECTO A τ. SI ES UN PROCESO ADITIVO, POR EJEMPLO, SE PUEDE SIMPLEMENTE ESCRIBIR $f(t,\tau) = h(0,t) + \tau$; SI ES DE LA FORMA F-W SE ESCRIBIRA: $f(t,\tau) = ((1+\tau) * [1+h(0,t)]) -1$.
SEAN LOS PAGOS SUSCESIVOS DE UN PORTAFOLIO $F_1, F_2, \ldots,$ EL VALOR INICIAL DEL PORTAFOLIO ES:

$$W = \sum_{t=1}^{n} F(t) * [1+h(0,t)]^{-t} \tag{5.3.1.2}$$

INMEDIATAMENTE DESPUES DE LA INVERSION, EL PERIODO CAMBIA Y SU VALOR SE CONVIERTE EN

$$W(\tau) = \sum_{t=1}^{n} F(t) * [1+f(t,\tau)]^{-t} \tag{5.3.1.3}$$

SI EL PERIODO NO CAMBIA SUBSECUENTEMENTE A LA FECHA q, EL VALOR DE LA INVERSION ACUMULADA SERA

$$W_q(\tau) = [1+f(q,\tau)]^q * [\sum_{t=1}^{n} F(t)*[1+f(t,\tau)^{-t}] \qquad (5.3.1.4)$$

DERIVANDO CON RESPECTO A τ:

$$W'_q(\tau) = q*[1+f(q,\tau)]^{q-1} * f'(q,\tau) * [\sum_{t=1}^{n} F(t)*(1+f(t,\tau))^{-t} -$$

$$([1+f(q,\tau)]^q * (\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*[1+f(t,\tau)]^{-(t+1)} * f'(t,\tau)))]$$

$$(5.3.1.5)$$

SI $\tau = 0$ SE REDUCE A:

$$W'_q(0) = [q*[1+h(0,q)]^{q-1} * f'(q,0)*W] - [[1+h(0,q)]^q *$$

$$(\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*f'(t,0)*(1+h(0,t))^{-(t+1)})]$$

$$=[1+h(0,q)]^q * \left[\frac{q*f'(q,0)}{1+h(0,q)} - \sum_{t=1}^{n} \frac{t*F(t)*f'(t,0)*[1+h(0,t)]^{-(t+1)}}{W}\right]$$

$$(5.3.1.6)$$

LA DURACION CORREPONDIENTE AL PROCESO ESTOCASTICO ESTA DADA IMPLICITAMENTE POR

$$\frac{Df'(D,0)}{1+h(0,D)} = \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{F(t)*[1+h(0,t)]^{-t}}{W}\right] * \left[\frac{t*f'(t,0)}{1+h(0,t)}\right]$$

$$(5.3.1.7)$$

SUSTITUYENDO (5.3.1.7) EN ALGUNAS DE LAS VARIAS FORMAS DE F SE PRODUCE LA MISMA DURACION AQUI EXPUESTA.

LA ECUACION (5.3.1.6) SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$W'_q(0) = [1+h(0,q)]^q * \left[\frac{q*f'(q,0)}{1+h(0,q)} - \frac{Df'(D,0)}{1+h(0,D)} \right] \qquad (5.3.1.8)$$

SE VE CLARO QUE $W'_q(0) = 0$ SI $D = q$.

ESTO SI EL PROCESO ESTOCASTICO $f(t,\tau)$ ES CONOCIDO, ENTONCES LA DURACION SE PUEDE CALCULAR COMO EN (5.3.1.7) Y EL INVERSIONISTA PUEDE ESCOGER BONOS DE TAL FORMA QUE D=q Y $W'_q(0) = 0$. EN ESTE SENTIDO, UNA CONDICION NECESARIA PARA INMUNIZAR ESTABLECE QUE SI $W''_q(0) > 0$, ENTONCES D=q ES UNA CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA UNA INMUNIZACION LOCAL.

SI $W''_q(\tau) > 0$ PARA TODA τ Y SI $W''_q(0) = 0$ EN D=q, ENTONCES, D=q ES UNA CONDICION NECESARIA Y SUFUCIENTE PARA UNA INMUNIZACION GLOBAL.

CAMBIOS PEQUEÑOS EN EL PERIODO, CAMBIOS PEQUEÑOS EN τ, RESULTAN EN SOLO PEQUEÑAS DESVIACIONES EN LA ACUMULACION FINAL DE LAS CUALES NO SE TENDRAN MAS CAMBIOS.

SI NO SE CONOCE EL PROCESO ESTOCASTICO, NO EXISTE FORMA DE CALCULAR LA DURACION CORREPONDIENTE. SI SE ESCOGE EL PROCESO EQUIVOCADO Y SE UTILIZA LA DURACION CORRESPONDIENTE, NO SE PUEDE ASEGURAR QUE $W'_q(0) = 0$. EN ESTE CASO, LA ACUMULACION ESTA SUJETA A UN RIESGO EN EL PROCESO ESTOCASTICO:

$$W''_q(\tau) = q*(q-1)*[1+f(q,\tau)]^{q-2}*f''(q,\tau)*[\sum_{t=1}^{n} F(t)*[1+f(t,\tau^{-t}]$$

$$-q*[1+f(q,\tau)]^{q-1}*f'(q,\tau)*(\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*[1+f(t,\tau)]^{-(t+1)}*f'(t,\tau))$$

$$-q*[1+f(q,\tau)]^{q-1}f'(q,\tau)*\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*[1+f(t,\tau)]^{-(t+1)}* f'(t,\tau)$$

$$+ [1+f(q,\tau)]^{q}* (\sum_{t=1}^{n} t*(t-1)* F(t)* [1+f(t,\tau)])^{-(t+2)}* f''(t,\tau)$$

(5.3A.1)

SI τ = 0 SE REDUCE A

$$W''_q(0) = q*(q-1)*[1+h(0,q)]^{q-2}* f''(q,0)W - q*[1+h(0,q)]^{q-1}*$$

$$f'(q,0)* \left(\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*[1+h(0,t)]^{-(t+1)}*f'(t,0)\right) - q*[1+h(0,q)]^{q-1}$$

$$* f'(q,0)* \left(\sum_{t=1}^{n} t*F(t)*[1+h(0,t)]^{-(t+1)}*f'(t,0)\right) +$$

$$[1+h(0,q)]^{q} * \left(\sum_{t=1}^{n} t*(t-1)*F(t)*[1+h(0,t)]^{-(t+2)}* f''(t,0) \right)$$

$$= [1+h(0,q)]^{q} * \left[\frac{q*(q-1)*f''(q,0)W}{[1+h(0,)]} - 2 \left[\left[\frac{q*f'(q,0)}{1+h(0,q)} \right] * \right.\right.$$

$$\left.\left. \left[\sum_{t=1}^{n} t*F(t)* [1+h(0,t)]^{-(t+1)}* f'(t,0) \right] \right] + \right.$$

$$\left. \sum_{t=1}^{n} t*(t-1)* F(t)* [1+h(0,t)]^{-(t+2)}* f''(t,0) \right] \qquad (5.3A.2)$$

5.3.2 MODELOS DE EQUILIBRIO DISCRETOS DE UN SOLO FACTOR.

BIERWAG, KAUFMAN Y TOEVS MOSTRARON QUE EXISTE UNA GRAN VARIEDAD DE MODELOS DE EQUILIBRIO DISCRETOS DE UN SOLO FACTOR.
ESTOS SON MODELOS EN LOS CUALES SE PUEDE IDENTIFICAR UN FACTOR ALEATORIO DE FORMA TAL, QUE $W_q(\tau)$ ES UNA FUNCION LINEAL DE τ.

EN ESTE SENTIDO, NO SE OBTIENEN "CONVEXIDADES" EN EQUILIBRIO Y NO EXISTEN OPORTUNIDADES PARA RESULTADOS ARBITRARIOS LIBRES DE RIESGO. ESTOS MODELOS CORRESPONDEN A PROCESOS ESTOCASTICOS QUE TIENEN BIEN DEFINIDAS LAS DURACIONES QUE SE PUEDEN UTILIZAR EN EL SENTIDO MAS USUAL.

BIERWAG EN 1987, MOSTRO QUE DADA UNA MEDIDA DE DURACION, SE PUEDE OBTENER MAS DE UN SOLO PROCESO ESTOCASTICO.

POR EJEMPLO, LA DURACION D_{F-W} QUE SE SABE DE ANTEMANO QUE SE DERIVA DE UN PROCESO CONVEXO, EL CUAL $W''_q(\tau) > 0$ SE PUEDE OBTENER DE UN PROCESO ESTOCASTICO EN EQUILIBRIO EN EL CUAL $W_q(\tau)$ ES LINEAL.

LA CRITICA DE INGERSOLL, SKELETON-WEIL A LOS PROCESOS EN DESEQUILIBRIO ES INFUNDAMENTADA. AQUI SE MOSTRARA COMO ESTOS MODELOS DE EQUILIBRIO PARA UN SOLO FACTOR SE PUEDEN CONSTRUIR.

SEA P(0,t) EL PRECIO ACTUAL, AL TIEMPO CERO DE $1 A RECIBIR EN LA FECHA t EN EL FUTURO. ESTO ES, P(0,t) ES EL PRECIO DE UN BONO CON DESCUENTO PURO (O UN BONO CON CUPON CERO) QUE PAGA $1 EN t PERIODOS.

ESTE BONO CON DESCUENTO PURO NO PROMETE NINGUN PAGO ANTES O DESPUES DE LA FECHA t. UN PERIODO DEL PRECIO ACTUAL DEL BONO SE ASUME A MOVERSE A $P_S(1,t)$ SI EL ESTADO S OCURRE. ESTE $P_S(1,t)$ ES EL PRECIO EN EL ESTADO S AL TIEMPO DEL PERIODO A RECIBIR $1 EN LA FECHA t.

EXISTEN DOS CAMINOS AL MENOS, EN LOS CUALES UNA INVERSION DE P(0,t) UNIDADES AHORA, SE PUEDA ACUMULAR A $1 t PERIODOS DESDE AHORA.

UN CAMINO OBVIO ES EL DE COMPRAR INICIALMENTE EL BONO A t PERIODOS Y TENERLO POR t PERIODOS. OTRO CAMINO ES COMPRAR X BONOS A UN PERIODO, POR LOS CUALES SE PAGARA X(P(0,1))= P(0,t) UNIDADES. ESCOGIENDO X TAL QUE X*P(0,1)= P(0,t), PORQUE DE ESTA MANERA INICIALMENTE SE INVERTE EL MISMO NUMERO DE UNIDADES QUE EN LA OTRA ESTRATEGIA, DESPUES DE UN PERIODO CUANDO SE TENGA X UNIDADES DEBIDO A QUE CADA UNO DE LOS BONOS A UN PERIODO PAGAN 1 DESPUES DE UN PERIODO.

SI P(1,t) ES EL PRECIO DE UN PERIODO AHORA DE $1 A SER RECIBIDO EN EL TIEMPO t, ENTONCES X=P(1,t) EN EQUILIBRIO BAJO CERTIDUMBRE.

SI X > P(1,t), ENTONCES X/P(1,t) ES MAYOR QUE LA UNIDAD Y ES EL NUMERO DE UNIDADES QUE SE PUEDEN ACUMULAR AL TIEMPO t AL COMPRAR BONOS A UN PERIODO Y REINVERTIRLOS; Y, ESTE MONTO EXCEDE LA UNIDAD GANADA AL COMPRAR EL BONO A UN PERIODO t Y CONSERVARLO. SIMILARMENTE, SI X P < (1,t), ENTONCES X/P(1,t) ES MENOR QUE LA UNIDAD Y ES EL NUMERO DE UNIDADES QUE SE PUEDEN ACUMULAR AL TIEMPO t AL COMPRAR UN BONO A UN PERIODO Y REINVERTIRLO. ESTE MONTO ES MENOR QUE LA UNIDAD GANADA AL COMPRAR UN BONO CON PERIODO t Y CONSERVARLO.

ESTO EN EQUILIBRIO : $X [P(0,1)] = P(0,t)$ ó
$X = P(1,t) = P(0,t)/P(0,1)$.

SIN PERDIDA DE GENERALIDAD, SI SE ASUME QUE:

$$P_S(1,t) = P(1,t) + G(S,t) \qquad t = 1,2,... \qquad S=1,2,... \tag{5.3.2.1}$$

DE FORMA TAL, QUE $G(S,t)$ REPRESENTA LA EXTENSION DE LA DESVIACION EN LOS SIGUIENTES PRECIOS DEL PERIODO $P_S(1,t)$ DE LOS ACTUALES PRECIOS ADELANTADOS CALCULADOS EN $P(1,t)$. CLARO QUE $G(S,1) = 0$, SI EXISTE LA PRESENCIA DEL RIESGO. DIVIDIENDO AMBOS TERMINOS ENTRE $P(0,t)$ SE OBTIENE EL RETORNO POR UNIDAD SOBRE UN PERIODO DE LA INVERSION $P(0,t)$ UNIDADES INICIALES EN EL BONO AL PERIODO t.
ESTO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$\begin{aligned} R_S(1,t) &= P(1,t) / P(0,t) + G(S,t) / P(0,t) \\ &= [\ 1 / P(0,1)\ ] + [\ G(S,t) / P(0,t)\ ] \qquad (5.3.2.2) \\ &= R_f + G(S,t) / P(0,t) \qquad t = 1,2,..,n \end{aligned}$$

DONDE R_f ES EL RETORNO LIBRE DE RIESGO POR UNIDAD SOBRE EL PERIODO.

ASUMIENDO MERCADOS COMPLETOS Y DOS ESTADOS, $S=1,2,...,n$ SIGNIFICA QUE EL RETORNO POR UNIDAD SOBRE UN PERIODO EN CUALQUIER BONO A t PERIODOS SE PUEDE EXPRESAR COMO EL RETORNO POR UNIDAD DE UN PORTAFOLIO QUE CONTIENE LOS BONOS LLAMADOS REFERIDOS.
SEAN v Y m LOS VENCIMIENTOS DE LOS POSIBLES BONOS REFERIDOS, ENTONCES:

$$\begin{aligned} R_S(1,t) &= [\beta_{vt} * R_S(1,v)] + [(1-\beta_{vt}) * R_S(1,m)] \\ &= R_S(1,m) + (\ \beta_{vt} * [\ R_S(1,v) - R_S(1,m)]\ ) \qquad (5.3.2.3) \end{aligned}$$

DONDE β_{vt} ES LA PROPOSICION DE LA INVERSION INICIAL COLOCADA EN LOS BONOS REFERIDOS CON VENCIMIENTO v.

AHORA CONSIDERESE UNA INVERSION INICIAL EN UN PORTAFOLIO $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t, ...$ DONDE α_t ES LA PROPORCION INVERTIDA EN UN BONO A t PERIODOS.

EL RETORNO POR UNIDAD DE ESTE PORTAFOLIO SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$R_s(\alpha) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t * R_s(1,t) = R_s(1,m) + ([\sum_{t=1}^{n} \beta_{vt} * \alpha_t] *$$

$$[R_s(1,v) - (R_s(1,m))]) \qquad (5.3.2.4)$$

AHORA, SUPONIENDO QUE EL RETORNO POR UNIDAD EN ESTE PORTAFOLIO ES EL MISMO QUE EL DE UN BONO A π PERIODOS:

$$\sum_{t=1}^{n} \beta_{vt} * \alpha_t = \beta_{v\pi} \qquad (5.3.2.5)$$

UNA NOCION DE LA DURACION SE PUEDE OBTENER DE ESTA ECUACION. EL PORTAFOLIO PROBABLEMENTE TENDRA UN BONO CON DESCUENTO PURO CON VENCIMIENTO π. ES NATURAL SUPONER QUE EL PORTAFOLIO TIENE UNA DURACION DE π. SI β_{vt} ES UNA FUNCION MONOTONA DE t, ENTONCES CADA BONO CON DESCUENTO PURO ES UNICO.

DOS BONOS NO SEMEJANTES PUEDEN TENER EL MISMO RETORNO POR UNIDAD. BAJO ESTA CONDICION DE MONOTONIA, EL VENCIMIENTO DE TODO BONO A DESCUENTO PURO SE PUEDE UTILIZAR COMO UN UNICO INDICADOR DE ESTA β, Y RETOMANDO LA NOCION DE DURACION AL VENCIMIENTO EN ESTE SENTIDO, LA DURACION DE UN PORTAFOLIO INDICA EL BONO CON CUPON CERO AL CUAL ES EQUIVALENTE.

LA ECUACION (5.3.2.5) DA UNA DEFINICION IMPLICITA DE LA DURACION DE UN PORTAFOLIO, ES POSIBLE SI EL LADO IZQUIERDO SE SATISFACE QUE:

$$\beta_{vt} < [\sum_{t=1}^{n} \beta_{vt} * \alpha_t] < \beta_{v\pi+1} \qquad (5.3.2.6)$$

PARA ALGUN π SI β_{vt} ES MONOTONAMENTE CRECIENTE EN t.

EN ESTE CASO, EL RETORNO DEL PORTAFOLIO ES EQUIVALENTE A UN PORTAFOLIO QUE CONTENGA BONOS CON DESCUENTO PURO CON VENCIMIENTOS π Y $\pi+1$. EN GENERAL, EL RETORNO DE CUALQUIER PORTAFOLIO ES EQUIVALENTE AL RETORNO DE ALGUNOS BONOS CON DESCUENTO PURO O DE ALGUN PORTAFOLIO DE DOS BONOS DISTINTOS CON DESCUENTO PURO.

DEFINICIONES EXPLICITAS DE LA DURACION SE PUEDEN OBTENER DE LA CONSTRUCCION DE $G(S,t)$ QUE DEFINE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS. POR EJEMPLO, SUPONGASE $G(S,t) = k_s(t-1)*P(0,t)$, DONDE k_s ES UN PARAMETRO QUE ES FUNCION DEL ESTADO; ENTONCES $G(S,1) = 0$ COMO SE REQUIERE.

UTILIZANDO (5.3.2.2) Y (5.3.2.3) SE PUEDE DEFINIR β_{vt} COMO:

$$\beta_{vt} = \frac{R_s(1,t) - R_s(1,m)}{R_s(1,v) - R_s(1,m)} = \frac{k_s(t-1) - k_s(m-1)}{k_s(v-1) - k_s(m-1)} \tag{5.3.2.7}$$

QUE ES UNA FUNCION LINEAL DE t. SUSTITUYENDO EN (5.3.2.5) IMPLICA QUE

$$\sum_{t=1}^{n} \alpha_t * \frac{t-m}{v-m} = \frac{\pi - m}{v-m} \tag{5.3.2.8}$$

ó

$$\sum_{t=1}^{n} \alpha_t * t = \pi \tag{5.3.2.9}$$

SI EL PORTAFOLIO $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, \ldots)$ IMPLICA LOS PAGOS $(F_1, F_2, \ldots, F_t, \ldots)$ ENTONCES

$$\alpha_t = \frac{F(t) * P(0,t)}{V} \tag{5.3.2.10}$$

DONDE V ES EL VALOR DEL BONO.

SI SE DEFINE $P(0,t) = [1+h(0,t)]^{-t}$ ENTONCES EN (5.3.2.9) SE OBTIENE

$$\sum_{t=1}^{n} F(t) * t * [1+h(0,t)]^{-t} / V = \pi \tag{5.3.2.11}$$

LA EXPRESION DEL LADO IZQUIERDO ES LA MEDICION DE LA DURACION F-W. RETORNANDO A (5.3.2.1) SE PUEDE CONOCER EL ESTADO QUE

$$P_s(1,t) = P(1,t) + [k_s(t-1) * P(0,t)] \qquad t=1,2,\ldots \tag{5.3.2.12}$$

ES UN PROCESO ESTOCASTICO EN EQUILIBRIO QUE DA LA MEDIDA DE D_{F-W}; SE PUEDE DEFINIR SIMILARMENTE G(S,t), DE FORMA TAL, QUE LAS OTRAS MEDIDAS DE DURACION DADAS EN EL CAPITULO ANTERIOR, SE PUEDEN DEFINIR COMO DURACIONES EN EQUILIBRIO.

CUANDO S=1,2,..., SOLO UNA DE LAS DOS POSIBLES REALIZACIONES PUEDE OCURRIR. EN (D-K-T) UNA VERSION INCOMPLETA DE MERCADO ESTA DESCRITA EN EL SENTIDO QUE UNA COLECCION INFINITA DE POSIBLES RETORNOS PUEDA OCURRIR, PERO AUN EL COEFICIENTE β_{vt} EN (5.3.2.3) NO SE AFECTA EL REMANENTE Y LA MEDIDA DE LA DURACION PERMANECE IGUAL.

SOLO UNA LIGERA MODIFICACION AL PROCESO ESTOCASTICO ES NECESARIA PARA ESTE RESULTADO.

UNA VERSION DE (5.3.2.3) SE PUEDE UTILIZAR. UN ERROR NO SISTEMATICO ES AÑADIDO A LA ECUACION BAJO LAS SUPOSICIONES QUE REPRESENTAN "RUIDO" O ERROR DE MEDICION, QUE NO ESTA CORRELACIONADO CON LA DIFERENCIA EN EL RETORNO EN LAS INVERSIONES REFERIDAS.

BIBLIOGRAFIA

- GERALD O. BIERWAG 1987 DURATION ANALYSIS, MANAGING INTEREST RATE RISK, BALLINGER PUBLISHING COMPANY, p.p. 137 - 314

- J. F. WESTON; E. F. BRIGHAM 1984 FINANZAS EN ADMINISTRACION EDIT. INTERAMERICANA 7a. EDICION VOL. II

- SAMUEL D. CONTE; CARL DE BOOR 1983 ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS INTERNATIONAL STUDENT EDITION THIRD EDITION p.p. 31 - 62

- N.R. DRAPER; H. SMITH 1981 APPLIED REGRESSION ANALYSIS. JOHN WILEY AND SONS p.p. 70 - 88

- R. COURANT; F. JOHN 1982 INTRODUCCION AL CALCULO Y AL ANALISIS MATEMATICO VOL. I EDIT LIMUSA p.p. 483

6 CONCLUSIONES

LA ESTRATEGIA DE DURACION, SE PRESENTA COMO UNA MEJOR OPCION PARA LA TOMA DE DECISIONES EN EL MOMENTO DE REALIZAR UNA INVERSION, DEBIDO A QUE COMO SE TIENE QUE APLICAR LA REGRESION EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS TASAS DE INTERES DEL INSTRUMENTO EN QUE SE QUIERE INVERTIR. ESTO TRAE CONSIGO UNA DISMINUCION DEL POSIBLE ERROR EN LAS OBSERVACIONES.

EN EL MOMENTO QUE SE QUIERA UTILIZAR LA REGRESION, SE TIENE QUE TOMAR EN CUENTA TODOS LOS AGENTES EXTERNOS QUE PUEDAN INFLUIR EN EL RESULTADO DE LA MISMA. DEPENDIENDO DE LA TECNICA QUE SE QUIERA UTILIZAR, ESTOS AGENTES SE ELIMINARAN O DISMINUIRAN, TRAYENDO CON SIGO UN MEJOR RESULTADO.

EN MEXICO, SE DEBE TOMAR EN CUENTA UN AGENTE EXTRENO MUY IMPORTANTE: EL DE LA INFLACION; AUNQUE DE 1987 A LA FECHA HA ESTADO CONTROLADO, SI SE QUIERE TOMAR DATOS ANTERIORES A ESTA FECHA, SE ENCONTRARA QUE LA TASAS DE INTERES SE ELEVABAN MUCHO DEBIDO A ESTE FACTOR.

CONSIDERANDO ESTE FACTOR Y COMO ESTA CONSTRUIDO SU MODELO, LA ESTRATEGIA QUE PARA UN SERVIDOR ES LA MEJOR, ES LA ESTRATEGIA PLANTEADA POR McCULLOCH, DEBIDO A QUE ELIMINA LOS AGENTES EXTERNOS ANTES DE REALIZAR SU REGRESION.

AUNQUE PUEDA TRAER CONSIGO PROBLEMAS EL PLANTEAR EN EL MODELO UNOS ERRORES MINIMIZADOS DE ANTEMANO POR UNA REGRESION, ESTE MODELO PROBO EN LAS SIMULACIONES, QUE SUS RESULTADOS SE ASEMEJAN BASTANTE A LOS QUE EN REALIDAD SE OBTUVIERON AL REALIZARSE LA INVERSION.

A N E X O

TABLA 1
CALCULO DE LAS TASAS ADELANTADAS PARA UN PERIODO INICIAL CRECIENTE Y DECRECIENTE

TERMINO CRECIENTE

t	h(0,t)	h(1,t+1)	h(2,t+2)	h(3,t+3)	h(4,t+4)	h(5,t+5)	h(6,t+6)	h(7,t+7)	h(8,t+8)	h(9,t+9)
1	0.3000	0.3100	0.3187	0.3258	0.3314	0.3354	0.3379	0.3389	0.3383	0.3361
2	0.3050	0.3143	0.3222	0.3286	0.3334	0.3367	0.3481	0.3386	0.3372	
3	0.3095	0.3180	0.3253	0.3309	0.3349	0.3374	0.3448	0.3377		
4	0.3135	0.3213	0.3278	0.3326	0.3359	0.3376	0.3426			
5	0.3170	0.3240	0.3298	0.3338	0.3364	0.3373				
6	0.3200	0.3263	0.3313	0.3346	0.3363					
7	0.3225	0.3280	0.3323	0.3348						
8	0.3245	0.3293	0.3327							
9	0.3260	0.3300								
10	0.3270									

TERMINO DECRECIENTE

t	h(0,t)	h(1,t+1)	h(2,t+2)	h(3,t+3)	h(4,t+4)	h(5,t+5)	h(6,t+6)	h(7,t+7)	h(8,t+8)	h(9,t+9)
1	0.3000	0.2901	0.2817	0.2748	0.2694	0.2655	0.2630	0.2619	0.2623	0.2642
2	0.2950	0.2859	0.2782	0.2721	0.2674	0.2642	0.2624	0.2621	0.2632	
3	0.2905	0.2821	0.2753	0.2699	0.2659	0.2634	0.2624	0.2628		
4	0.2865	0.2789	0.2728	0.2681	0.2649	0.2632	0.2628			
5	0.2830	0.2762	0.2708	0.2669	0.2644	0.2634				
6	0.2800	0.2739	0.2693	0.2661	0.2644					
7	0.2775	0.2722	0.2683	0.2658						
8	0.2755	0.2709	0.2678							
9	0.2740	0.0000								
10	0.2730									

TABLA 2
TRANSFORMACION DE UNA CURVA DE REDITO A LA PAR EN LA TASA DE INTERES DEL PERIODO

VENCIMIENTO (EN PERIODOS SEMESTRALES)	TASA INTERNA DE RETORNO ANUAL	ESTRUCTURA DEL PERIODO (EN TASAS ANUALES)	CUPON SESGADO (EN PUNTOS BASICOS)
t	R	2h(0,t)	
1	0.0700	0.0700	0
2	0.0740	0.0741	1
3	0.0770	0.0772	2
4	0.0790	0.0793	3
5	0.0800	0.0804	4
6	0.0805	0.0809	4
7	0.0810	0.0814	4
8	0.0815	0.0820	5
9	0.0820	0.0825	5
10	0.0825	0.0831	6
11	0.0830	0.0837	7
12	0.0833	0.0841	8
13	0.0836	0.0844	8
14	0.0839	0.0848	9
15	0.0842	0.0852	10
16	0.0845	0.0856	11
17	0.0847	0.0858	11
18	0.0849	0.0861	12
19	0.0851	0.0864	13
20	0.0854	0.0868	14

NOTA: h(0,t) ES LA TASA SEMESTRAL DE RENDIMIENTO DE LA FECHA DE VENCIMIENTO t Y 2h(0,t) ES LA TASA ANUAL DE ESTE REDITO.

TABLA 3
CUPONES SESGADOS PARA HIPOTECAS DADO UN PERIODO MENSUAL

PERIODO DEL VENCIMIENTO (PERIODO DE 6 MESES)	TASA ANUAL DEL PERIODO	TASA ANUAL DE RETORNO (PAGOS EN EFECTIVO MENSUALES DE HIPOTECAS)	CUPON SESGADO PAGOS EN EFECTIVO SEMESTRALES (EN PTOS.BASICOS)	CUPON SESGADO PAGOS EN EFECTIVO SEMESTRALES (EN PTOS.BASICOS)
t	2h(0,t)	R		
1	0.0700	0.0700	0	0
2	0.0741	0.0719	22	14
3	0.0772	0.0740	32	23
4	0.0793	0.0759	34	28
5	0.0804	0.0772	32	27
6	0.0809	0.0782	27	23
7	0.0814	0.0789	25	22
8	0.0820	0.0795	25	22
9	0.0825	0.0800	25	23
10	0.0831	0.0805	26	24
11	0.0837	0.0809	28	26
12	0.0841	0.0813	28	26
13	0.0844	0.0816	28	26
14	0.0848	0.0820	28	27
15	0.0852	0.0824	29	28
16	0.0856	0.0826	30	29
17	0.0858	0.0828	30	28
18	0.0861	0.0831	30	29
19	0.0864	0.0833	31	30
20	0.0868	0.0835	33	32

EL PERIODO HA SIDO MODIFICADO POR INTERPOLACION LINEAL, PARA PROPORCIONAR PERIODOS MENSUALES PARA CADA UNO DE LOS PRIMEROS 6 MESES, LA TASA ANUAL DE LAS HIPOTECAS SE SUPONE AL 7%, ESTO ES, UNA CURVA ESTABLE PARA LOS 6 PRIMEROS MESES. COMO EJEMPLO, LA TASA ANUAL AL 8vo. MES ESTA DADA COMO (8–6)*(7.41–7.00)/12+7 EL 17vo, MES ES: (17–12)*(7.72–7.41)/12+9, Y ASI SUCESIVAMENTE.

TABLA 4
CUPONES SESGADOS DE HIPOTECAS CON UN PERIODO MENSUAL

PERIODO DEL VENCIMIENTO (PERIODOS SEMESTRALES)	TASA DEL PERIODO ANUAL	REDITO AL VENCIMIENTO ANUAL DE UNA HIPOTECA CON PAGOS MENS.	CUPON SESGADO DE HIPOTECAS, (PAGO MENSUAL EN PUNTOS BASICOS)	CUPON SESGADO DE HIPOTECAS, (PAGOS SEMESTRALES (EN PUNTOS BASICOS)
t	2h(0,t)	R		
1	0.0900	0.0900	0	0.00
2	0.0920	0.0909	11	6.90
3	0.0940	0.0921	19	13.90
4	0.0960	0.0934	26	21.00
5	0.0980	0.0947	33	28.30
6	0.1000	0.0959	40	35.60
7	0.1020	0.0972	48	43.10
8	0.1040	0.0984	56	50.70
9	0.1060	0.0996	64	58.60
10	0.1080	0.1008	72	66.50
11	0.1100	0.1020	80	74.70
12	0.1120	0.1032	88	83.00
13	0.1140	0.1043	97	91.50
14	0.1160	0.1055	105	100.20
15	0.1180	0.1066	114	109.10
16	0.1200	0.1077	123	118.20
17	0.1220	0.1088	132	127.50
18	0.1240	0.1098	142	137.00
19	0.1260	0.1108	152	146.70
20	0.1280	0.1119	161	156.70

TABLA 5
IMPACTO ESPECIFICO DEL CALCULO DE LA DURACION Y EL PORCENTAJE DE CAMBIO DEL PRECIO

	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCEDNDENTE
t	h(0,t)	h(0,t)
1	8.00%	11.00%
2	8.50%	10.50%
3	8.90%	10.10%
4	9.20%	9.90%
5	9.60%	9.60%
6	9.90%	9.40%
7	10.20%	9.20%
8	10.40%	9.00%
9	10.60%	8.80%
10	10.80%	8.60%
11	10.95%	8.45%
12	11.10%	8.30%
13	11.25%	8.15%
14	11.35%	8.05%
15	11.45%	7.95%
16	11.50%	7.85%
17	11.55%	7.75%
18	11.60%	7.70%
19	11.62%	7.68%
20	11.65%	7.65%

TABLA 6
CALCULO DE LAS DURACIONES DE LOS PERIODOS OBTENIDOS EN LA TABLA 5

A) PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

D_M = 7.3452 AÑOS

D_{F-W} = 7.0485 AÑOS

$\dfrac{D_A}{1+h(0,D_A)}$ = 6.3721, D_A = 7.0221 AÑOS

$\dfrac{D_{MS}[h(0,D_{MS})]}{1+h(0,D_{MS})}$ = .67638, D_{MS} = 7.2723 AÑOS

$\dfrac{Ln(1+.1D_{LA})}{1+h(0,D_{LA})}$ = .445346, D_{LA} = 6.2922 AÑOS

$Ln(1 + .1\ D_{LM})$ = .4920, D_{LM} = 6.3561 AÑOS

B) PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

D_M = 7.8942 AÑOS

D_{F-W} = 8.1956 AÑOS

$\dfrac{D_A}{1+h(0,D_A)}$ = 7.5538, D_A = 8.2301 AÑOS

$\dfrac{D_{MS}[h(0,D_{MS})]}{1+h(0,D_{MS})}$ = .6418, D_{MS} = 7.7309 AÑOS

$\dfrac{Ln(1+.1D_{LA})}{1+h(0,D_{LA})}$ = .5089, D_{LA} = 7.42244 AÑOS

$Ln(1 +.1D_{LM})$ = .5527, D_{LM} = 7.6380 AÑOS

TABLA 7
CAMBIOS ADITIVOS

t	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE $h^{*}(0,t)$	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE $h^{*}(0,t)$
1	8.50%	11.50%
2	9.00%	11.00%
3	9.40%	10.60%
4	9.70%	10.40%
5	10.10%	10.10%
6	10.40%	9.90%
7	10.70%	9.70%
8	10.90%	9.50%
9	11.10%	9.30%
10	11.30%	9.10%
11	11.45%	8.95%
12	11.60%	8.80%
13	11.75%	8.65%
14	11.85%	8.55%
15	11.95%	8.45%
16	12.00%	8.35%
17	12.05%	8.25%
18	12.10%	8.20%
19	12.12%	8.18%
20	12.15%	8.15%
CAMBIO DEL REDITO	0.0048	0.0051

APROXIMACIONES DEL CAMBIO DEL PRECIO
PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

MACAULAY: $\beta p/p = -(Dm^{*}\beta R)/1+R=$
$-7.3452 / 1.1065 * (.0048) = -.0319$

IMPACTO ESPECIFICO :

$\beta p/p = -(Da^{*}I) / [1+h(0,t)] =$

$-6.3721 * (.0050) = -.0319$

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY : $\beta p/p = -(Dm^{*}\beta R) / 1+R =$

$-7.8942/1.0853 * (.0051) = -.0371$

IMPACTO ESPECIFICO : $\beta p/p = -DmI / 1+h(O,Da) =$

$-.75530 * (.0050) = -.0378$

ACTUALES PRECIOS AL CAMBIO PERIODO ASCENDENTE:

$\beta p/p = -.0310$; PERIDO DESCENDENTE: $\beta p/p = -.0367$

TABLA 8
IMPACTO FISHER-WEIL

	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE
t	$h^*(0,t)$	$h^*(0,t)$
1	8.50%	11.51%
2	9.00%	11.01%
3	9.40%	10.61%
4	9.70%	10.41%
5	10.10%	10.10%
6	10.41%	9.90%
7	10.71%	9.70%
8	10.91%	9.50%
9	11.11%	9.30%
10	11.31%	9.10%
11	11.46%	8.95%
12	11.61%	8.80%
13	11.76%	8.65%
14	11.86%	8.55%
15	11.96%	8.45%
16	12.01%	8.35%
17	12.06%	8.25%
18	12.11%	8.20%
19	12.13%	8.18%
20	12.16%	8.15%
CAMBIO DE REDITO:	0.0049	0.0051

APROXIMACIONES AL CAMBIO DEL PRECIO
PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

MACAULAY: βp/p = -(Dm*βR) / 1+R =
-7.3452/1.1065 *(.0049) = -.0325

IMPACTO ESPECIFICO:βp/p = -(Df-w)*(I-1)=
-7.0485 * (.0046) = -.0324

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY: βp/p = -(Dm*βR) / 1+R =
-7.8942/1.0853 * (.0051) = -.0371

IMPACTO ESPECIFICO:βp/p= -(Df-w)*(I-1) =
-8.1956 * (.0046) = -.0377

ACTUALES PRECIOS AL CAMBIO

PERIODO ASCENDENTE: βp/p = -.0316

PERIODO DESCENDENTE: βp/p = -.0366

TABLA 9
IMPACTOS MULTIPLICATIVOS

	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE
t	h*(0,t)	h*(0,t)
1	8.38%	11.52%
2	8.90%	10.99%
3	9.32%	10.57%
4	9.63%	10.37%
5	10.05%	10.05%
6	10.37%	9.84%
7	10.68%	9.63%
8	10.89%	9.42%
9	11.10%	9.21%
10	11.31%	9.00%
11	11.46%	8.85%
12	11.62%	8.69%
13	11.78%	8.53%
14	11.88%	8.43%
15	11.99%	8.32%
16	12.04%	8.22%
17	12.09%	8.11%
18	12.15%	8.06%
19	12.17%	8.04%
20	12.20%	8.01%
CAMBIO DEL REDITO:	0.005	0.0041

APROXIMACIONES AL CAMBIO DEL PRECIO

MACAULAY: βp/p= -(Dm*βR) / 1+R =
-7.3452/1.1065 * (.0050) = -.0332

IMPACTO ESPECIFICO: βp/p= -[Dms*h(0,Dms)] / [1+h(0,Dms)]
(l-1) = -.67638(.047) =-.0318

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY: βp/p= -(Dm*βR) / 1+R =
-7.8942/1.0853*(.0041) = -.0298

IMPACTO ESPECIFICO: βp/p= -Dms[h(Dms)]/[1+h(0,Dms)]*
(l-1) = -.6418 * (.047) = -.0302

ACTUAL PRECIO DE CAMBIO: PERIODO ASCENDENTE
βp/p = -.0309; PERIODO DESCENDENTE: βp/p = -.0295

TABLA 10
IMPACTOS MULTIPLICATIVOS LOGARITMICOS

t	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE * h (0,t)	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE * h (0,t)
1	85.70%	11.57%
2	9.05%	11.05%
3	9.42%	10.62%
4	9.70%	10.40%
5	10.09%	10.09%
6	10.37%	9.87%
7	10.65%	9.65%
8	10.84%	9.44%
9	11.03%	9.23%
10	11.22%	9.02%
11	11.35%	8.85%
12	11.49%	8.69%
13	11.63%	8.53%
14	11.73%	8.43%
15	11.82%	8.32%
16	11.86%	8.21%
17	11.90%	8.10%
18	11.94%	8.04%
19	11.96%	8.02%
20	11.98%	7.98%
CAMBIO DEL REDITO:	0.004	0.0042

APROXIMACION AL PRECIO DEL CAMBIO
PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

MACAULAY : βp/p = (Dm*βR) / 1+R =
-7.3452/1.1065*(.0040) = -.0266
IMPACTO ESPECIFICO : βp/p =
-Ln (1+.1Dla)/.1*[1+h(0,Dla)]*(l) =
-.44536/.1*(.006)=-.0267

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY: βp/p=-(Dm*βR) / 1+R =

-7.8942/1.0853*(.0042) = -.0305

IMPACTO ESPECIFICO : βp/p =

-Ln(1+.1Dla*(l)/.1(1+h(0,Dla)) =

-.5089/.1 = -.0305
ACTUAL PRECIO DE CAMBIO
PERIODO ASCENDENTE: βp/p=-.0262
PERIODO DESCENDENTE: βp/p=-.0299

TABLA 11
IMPACTOS ADITIVOS LOGARITMICOS

	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE
t	* h (0,t)	* h (0,t)
1	8.62%	11.63%
2	9.09%	11.10%
3	9.47%	10.68%
4	9.75%	10.45%
5	10.13%	10.13%
6	10.42%	9.91%
7	10.70%	9.70%
8	10.89%	9.48%
9	11.07%	9.27%
10	11.26%	9.05%
11	11.40%	8.89%
12	11.54%	8.73%
13	11.68%	8.57%
14	11.77%	8.46%
15	11.86%	8.35%
16	11.90%	8.24%
17	11.94%	8.13%
18	11.98%	8.07%
19	12.00%	8.04%
20	12.02%	8.00%
CAMBIO DEL REDITO :	0.0044	0.0045

APROXIMACION AL PRECIO DEL CAMBIO
PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

MACAULAY : $\beta p/p = -(Dm^*\beta R) / 1+R =$
$-7.3452^*(.0044)/1.1065 = -.0292$
IMPACTO ESPECIFICO : $\beta p/p =$
$-Ln(1+.1Dlm)^*(l) / .1 =$
$-.4920^*(.0006)/.1 = -.0295$

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY: $\beta p/p = -7.8942^*(.0045) / 1.0853 =$
$-.0327$
IMPACTO ESPECIFICO: $\beta p/p =$
$-Ln(1+.1Dlm)^*(l) / .1 = -.5527/.1 =$
$-.0332$

ACTUALES PRECIOS AL CAMBIO

PERIODO ASCENDENTE: $\beta p/p = -.0289$

PERIODO DESCENDENTE: $\beta p/p = -.0324$

TABLA 12
COMBINACION DE LOS IMPACTOS ADITIVO
Y MULTIPLICATIVO

	PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE	PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDETE
t	$\overset{*}{h}$ (0,t)	$\overset{*}{h}$ (0,t)
1	8.16%	10.62%
2	8.57%	10.21%
3	8.90%	9.88%
4	9.14%	9.72%
5	9.47%	9.47%
6	9.72%	9.31%
7	9.96%	9.14%
8	10.13%	8.98%
9	10.29%	8.82%
10	10.46%	8.65%
11	10.58%	8.53%
12	10.70%	8.41%
13	10.83%	8.28%
14	10.91%	8.20%
15	10.99%	8.12%
16	11.03%	8.04%
17	11.07%	7.96%
18	11.11%	7.91%
19	11.13%	7.90%
20	11.15%	7.87%
CAMBIO DEL REDITO :	-0.003	0.0007

APROXIMACIONES AL CAMBIO DEL PRECIO
PERIODO CON DESLIZAMIENTO ASCENDENTE

MACAULAY: βp/p= -Dma βr/ 1+R =
-7.3452*(-.0030)/1.1065 = .0199
IMPACTO ESPECIFICO: βp/p=
-Da*(I1)/[1+h(0,Da)] - Dms*[h(O,Dms)]*(I2-1) /[1+h(0,Dms)]
= -6.3721*(.016) - .6738*(-.18)=
-.0198

PERIODO CON DESLIZAMIENTO DESCENDENTE

MACAULAY: βp/p= -(Dm*βR) / 1+R =
-7.8942/1.0853*(.0007) = -.0051
IMPACTO ESPECIFICO: βp/p=
[-Da*(I1)/{1+h(O,Da)}] -[Dms{h(0,Dms)}*(I2-1)/1+h(0,Dms)]
= -7.55386*(.016) -.6818*(-.18) = -.0052

ACTUALES PRECIOS DE CAMBIO

PERIODO ASCENDENTE: βp/p = -.0203
PERIODO DESCENDENTE: βp/p = -.0052

TABLA 13

CALCULO DE LAS TASAS FUTURAS PARA EL VALOR = 1.015

t	$h^*(0,t)$	$h^*(1,t+1)$	$h^*(2,t+2)$
1	0.08425	0.08628	0.08738
2	0.08526	0.08683	
3	0.08597		

TABLA 14

RESULTADOS DE LA INMUNIZACION DE FISHER-WEIL EN EL PERIODO 1925-1968

LONGITUD DEL PERIODO (AÑOS)	PORCENTAJE DEL TIEMPO $\lvert R_i-R_p \rvert < \lvert R_m-R_p \rvert$	PORCENTAJE DEL TIEMPO $R_i > R_p$
5	77	41
10	82	24
15	96	0

TABLA 15

RETORNOS PROMETIDOS Y REALIZADOS PARA ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS DE UN PORTAFOLIO, PERIODO PLANEADO A 10 AÑOS,1925-1978. BIERWAG, KAUFMAN TOEVS Y SCHWEITZER (1981)

ESTRATE-GIA	RETORNO%							
	PROMESA (EN PROMEDIO ANUAL)	REALIZACION (EN PROMEDIO ANUAL)	REALIZACION MENOS PROMESA	(A)	(B)	MAYOR QUE LA PROMESA	MAYOR REALIZACION	MENOR REALIZACION
			1925- 1978 (a)					
INMUNIZACION(d)								
DI1	3.364	3.286	-0.078	86	48	9	0	0
DI2		3.289	-0.075	89	48	9	0	0
DI3		3.289	-0.075	89	48	9	0	0
DI4(.1)		3.270	-0.094	82	27	2	0	0
DI4(1.)		3.236	-0.138	52	34	11	2	0
V		3.329	-0.035	-	16	41	0	0
B(a)		2.927	-0.437	2	7	48	50	48
B(b)		3.194	-0.170	9	7	45	48	52
			1925-1949(c)					
INMUNIZACION(d)								
DI1	3.697	3.552	-0.145	93	13	0	0	0
DI2		3.555	-0.142	93	13	0	0	0
DI3		3.555	-0.142	93	13	0	0	0
DI4(.1)		3.595	-0.102	93	20	0	0	0
DI4(1.)		3.668	-0.029	93	53	27	0	0
V		3.465	-0.232	-	0	0	0	0
B(a)		1.801	-1.896	0	0	0	0	100
B(b)		4.749	1.052	7	0	100	100	0
INMUNIZACION(d)								
DI1	2.257	2.214	-0.043	79	50	14	0	0
DI2		2.214	-0.043	86	50	14	0	0
DI3		2.214	-0.043	86	50	14	0	0
DI4(.1)		2.214	-0.043	86	50	7	0	0
DI4(1.)		2.212	-0.045	64	50	7	7	0
V		2.214	-0.043	-	36	29	0	0
B(a)		2.074	-0.183	7	14	43	50	43
B(b)		1.987	-0.270	21	21	36	43	57

TABLA 15

RETORNOS PROMETIDOS Y REALIZADOS PARA ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS DE UN PORTAFOLIO, PERIODO PLANEADO A 10 AÑOS,1925-1978. BIERWAG, KAUFMAN TOEVS Y SCHWEITZER (1981)

ESTRATEGIA	RETORNO%							
	PROMESA (EN PROMEDIO ANUAL)	REALIZACION (EN PROMEDIO ANUAL)	REALIZACION MENOS PROMESA	(A)	(B)	MAYOR QUE LA PROMESA	MAYOR REALIZACION	MENOR REALIZACION
INMUNIZACION(d)								
DI1	4.064	4.026	-0.038	87	80	13	0	0
DI2		4.027	-0.037	87	80	13	0	0
DI3		4.027	-0.037	87	80	13	0	0
DI4(.1)		3.93	-0.134	67	13	0	0	0
DI4(1.)		3.759	-0.305	0	0	0	0	0
V		4.234	0.170	-	13	93	0	0
B(a)		4.848	0.784	0	7	100	100	0
B(b)		2.767	-1.297	0	0	0	0	100

(a): EL ULTIMO PORTAFOLIO EN CADA PERIODO SE COMPRO 10 AÑOS ANTES DEL ULTIMO AÑO EN EL PERIODO
(b): BONO MANTENIDO CON UN VENCIMIENTO INICIAL DE 20 AÑOS
(c): TASA DE RETORNO ANUAL DE 10 AÑOS A LA FECHA DE COMPRA
(d): EL PORTAFOLIO CONSISTE EN BONOS INICIALES A 10 Y 20 AÑOS
(A): ACERCAMIENTO A LA ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO PROMETIDO
(B): JUNTO CON LOS CINCO PUNTOS PORCENTUALES DE LA PROMESA
V : VENCIMIENTO
B(a): BONO CORTO
B(b): BONO LARGO

RAIZ CUADRADA DE LAS DIFERENCIAS (EN PUNTOS PORCENTUALES) DE LOS ACTUALES REDITOS Y REDITOS CALCULADOS PARA SEIS ESTRATEGIAS DE UN PORTAFOLIO SOBRE PERIODOS "TENIDOS" A 5 AÑOS EN 1950-1979, INGERSOLL (1983)

	RAIZ CUADRADA DE LAS DIFERENCIAS DIFERENCIAS DE LOS REDITOS (PUNTOS PORCENTUALES)	
	INDICE MARCADO	TASA INTERNA DE RETORNO
ESTRATEGIAS INGENUAS		
BONOS A 2 AÑOS	58.7	65.0
BONOS A 10 AÑOS	97.9	99.6
ESTRATEGIA DEL VENCIMIENTO	34.6	36.2
ESTRATEGIAS DE LA DURACION		
	35.1	32.3
	39.7	36.2
	28.7	34.8

TABLA 17
RETORNOS PROMETIDOS Y CUMPLIDOS PARA ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS DE UN PORTAFOLIO, BABBEL (1983)

ESTRATEGIA	A	PROMEDIO DEL REDITO CUMPLIDO	PROMEDIO DEL EXCESO DEL REDITO	RAIZ CUADRADA DEL ERROR	B	C	MAYOR QUE LO PROMETIDO
DI1	4.9	4.95	−0.02	0.045	77%	67%	28%
DI2	4.9	4.95	−0.02	0.044	72	67	44
DI3	4.9	4.95	−0.02	0.044	72	67	44
DI4(.1)	4.9	4.94	−0.03	0.049	61	67	6
DI4(1.)	4.9	4.91	−0.06	0.083	27	56	11
V	4.9	4.98	0.01	0.082	38	–	67

NOTA: PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS. EL PERIODO COMIENZA EN CADA AÑO, 1957–1974

V: VENCIMIENTO
A: PROMEDIO DEL REDITO PROMETIDO
B: DENTRO DE 5 PUNTOS PORCENTUALES DE LO PROMETIDO
C: ACERCAMIENTO DE LA PROMESA AL VENCIMIENTO

TABLA 18
RETORNOS PROMETIDOS Y CUMPLIDOS PARA ESTRATEGIAS ALTERNATIVAS DE UN PORTAFOLIO (DATOS DE DURAN)

ESTRATEGIA	A	PROMEDIO DEL REDITO CUMPLIDO	PROMEDIO DEL EXCESO DEL REDITO	RAIZ CUADRADA DEL ERROR	B	C	MAYOR QUE LO PROMETIDO
DI1	4.9	4.96	−0.03	0.069	59%	65%	23%
DI2	4.9	4.96	−0.03	0.069	59	65	35
DI3	4.9	4.96	−0.03	0.069	59	65	35
DI4(.1)	4.9	4.95	−0.04	0.077	53	58	18
DI4(1.)	4.9	4.92	−0.07	0.101	35	35	18
V	4.9	5.00	0.01	0.089	53	–	65

NOTA: PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS, LOS PERIODOS EMPIEZAN EN CADA AÑO, 1957–1974
V: VENCIMIENTO
A: PROMEDIO DEL REDITO PROMETIDO
B: DENTRO DE 5 PUNTOS PORCENTUALES DE LO PROMETIDO
C: ACERCAMIENTO PROMETIDO AL VENCIMIENTO

TABLA 19
SIMULACION DE LOS RESULTADOS DE INMUNIZACION PARA UNA ESTRATEGIA DE DURACION CONVENCIONAL. PERIODOS TENIDOS A 5 AÑOS (BRENNAN Y SCHWARTZ 1983)

FECHA DEL INICIO DEL PERIODO TENIDO	TASA DE RETORNO ANUAL REALIZADA	TASA DE RETORNO ANUAL PROMETIDA	DIFERENCIA (PUNTOS PORCENTUALES)
DIC.1958	0.037310	0.038344	-10.34
DIC.1959	0.047141	0.048137	-9.96
DIC.1960	0.032955	0.033832	-8.77
DIC.1961	0.038344	0.038688	-3.44
DIC.1962	0.035403	0.034880	5.23
DIC.1963	0.039375	0.039546	-1.71
DIC.1964	0.038516	0.040059	-15.43
DIC.1965	0.049130	0.046808	26.55
DIC.1966	0.048964	0.055973	21.56
DIC.1967	0.055490	0.057896	-4.83
DIC.1968	0.059806	0.082294	19.09
DIC.1969	0.080099	0.060755	-21.95
DIC.1970	0.065142	0.055168	43.87
DIC.1971	0.062801	0.061544	76.33
DIC.1972	0.062958	0.068078	14.14
DIC.1973	0.066073	0.072649	-20.05
DIC.1974	0.071134	0.072649	-15.15

ERROR CUADRATICO MEDIO: 25.65 PUNTOS PORCETUALES

TABLA 20
ESTRATEGIAS DE PORTAFOLIO SOBRE PERIODOS PLANEADOS A 5 AÑOS; DE ENERO DE 1947 A ENERO DE 1975; BABBEL (1983)

	PROMEDIO DEL RETORNO	ERROR ESTIMADO (a)
ESTRATEGIAS NO VISTAS A FUTURO		
VENCIMIENTO	4.837	0.0163
VIEJA DURACION	4.835	0.0012
NUEVA DURACION	4.831	0.0015
ESTRATEGIAS VISTAS A FUTURO		
VENCIMIENTO	4.843	0.0098
VIEJA DURACION	4.849	0.0015
NUEVA DURACION	4.820	0.0016

(a): CALCULADO COMO LA RAIZ CUADRADA DEL ERROR SOLO SOBRE RETORNOS CUANDO EL RETORNO REALIZADO FUE MENOR QUE EL RETORNO PROMETIDO

TABLA 21
RESULTADOS DE LA IGUALACION DE UN BONO A DESCUENTO PURO MARCADO CON VENCIMIENTO A 5 AÑOS (NELSON Y SCHAEFER 1983)

ESTRATEGIA	RETORNO MEDIO (% ANUAL) BONO MARCADO	PORTAFOLIO	DIFERENCIA	DESVIACION ESTANDARD DE LA DIF	(A)
V	3.253	3.106	0.147	1.321	11.50
D	3.253	3.072	0.181	1.271	10.65
C P	3.253	3.270	-0.017	1.674	18.47
L P	3.253	3.097	0.156	1.277	10.75
V	2.648	2.137	0.511	0.780	11.36
D	2.648	2.187	0.461	0.757	10.71
C P	2.648	3.159	-0.511	0.930	16.16
L P	2.648	2.169	0.479	0.769	11.04
V	2.298	2.243	0.055	0.928	10.23
D	2.298	2.197	0.100	0.932	10.30
C P	2.298	2.343	-0.046	1.220	17.66
L P	2.298	2.235	0.062	0.925	10.15
V	4.854	4.992	-0.138	1.757	13.91
D	4.854	4.886	-0.033	1.658	12.39
C P	4.854	4.371	0.482	2.162	21.07
L P	4.854	4.939	-0.085	1.676	12.67

V: VENCIMINETO.
D: DURACION.
C P: CORTO PLAZO.
L P: LARGO PLAZO.

NOTA: LAS DIFERENCIAS ENTRE LOS RETORNOS ESTAN CALCULADAS SEMESTRALMENTE. EL VENCIMIENTO DE UN BONO MARCADO NUNCA DECLINA SOBRE LA SERIE DE TIEMPO 1930 A 1979.

A PORCENTAJE DEL REMANENTE DE LA VARIANZA MARCADA (a).

(a) EL CALCULO COMO LA VARIANZA DE LA DIFERENCIA EN LOS RETORNOS COMO UN PORCENTAJE DE LA VARIANZA DE LOS RETORNOS DE UN BONO MARCADO.

TABLA 22
SIMULACION DE RESULTADOS DE INMUNIZACION CON UN MODELO DE DOS FACTORES, PERIODOS APOSTADOS A 5 AÑOS (BRENNAN Y SCHWARTZ 1983)

FECHA DE INICIO DEL PERIODO APOSTADO	TASA DE RETORNO ANUAL REALIZADA	TASA DE RETORNO ANAUL PROMETIDA	DIFERENCIA (EN PUNTOS PORCENTUALES)
DIC. 1958	0.040572	0.037828	27.44
DIC. 1959	0.049130	0.048137	9.92
DIC. 1960	0.034880	0.034182	6.98
DIC. 1961	0.038860	0.039032	-1.72
DIC. 1962	0.036445	0.035924	5.20
DIC. 1963	0.039717	0.040059	-3.42
DIC. 1964	0.042611	0.040742	18.68
DIC. 1965	0.046308	0.047141	-8.33
DIC. 1966	0.045472	0.047141	-16.69
DIC. 1967	0.055490	0.057417	-19.27
DIC. 1968	0.059171	0.061859	-26.88
DIC. 1969	0.078471	0.079657	-11.80
DIC. 1970	0.060597	0.061859	-12.61
DIC. 1971	0.055812	0.057097	-12.84
DIC. 1972	0.063740	0.062644	10.96
DIC. 1973	0.068530	0.068692	-1.53
DIC. 1974	0.072800	0.073440	-6.03

ERROR CUADRATICO: 14.05 PUNTOS PORCENTUALES.

TABLA 23
ESTIMACIONES DEL FACTOR SENSITIVO (BETAS) DE ENERO DE 1942 A ENERO DE 1980 (BIERWAG, KAUFMAN Y TOEVS)

A	β	ESTADISTICA T	R^2
3	0.128212	9.5471	0.7462
4	0.254667	11.5099	0.8104
5	0.359151	13.3413	0.8517
6	0.445533	15.6196	0.8873
7	0.518242	17.9153	0.9119
8	0.578979	20.1009	0.9287
9	0.631752	22.6364	0.9430
10	0.680159	25.9433	0.9560
11	0.726577	30.4686	0.9677
12	0.772401	36.9415	0.9778
13	0.818028	46.8093	0.9860
14	0.863527	63.4211	0.9924
15	0.908905	97.0940	0.9967
16	0.954438	198.4689	0.9992
17	1.000000	----	1.0000
18	1.045820	210.5980	0.9993
19	1.091949	108.5678	0.9974
20	1.138466	74.5799	0.9945
21	1.185617	57.5199	0.9907
22	1.233372	47.0324	0.9862
23	1.282139	39.6287	0.9806
24	1.330902	33.8312	0.9736
25	1.382813	28.9715	0.9644
26	1.435478	24.7053	0.9517
27	1.490237	20.9584	0.9341

A: VENCIMIENTO DEL BONO CON DESCUENTO PURO (PERIODOS SEMESTRALES).

NOTA: PERIODOS SOBRE BONOS CON DESCUENTO PURO CALCULADO CADA SEMESTRE UTILIZANDO EL PERIODO DE BABBEL. INVERSIONES DE REFERENCIA: UN BONO A 6 MESES Y UN BONO CON VENCIMIENTO EN 17 PERIODOS SEMESTRALES.

TABLA 24
REGRESION DEL RETORNO EN EXCESO POR UNIDAD PARA VARIAS CATEGORIAS DE DURACION, EN EXCESO DE RETORNO POR UNIDAD EN INVERSIONES REFERIDAS: BONO A 6 MESES Y 5 AÑOS (BIERWAG Y ROBERTS)

DURACION EN AÑOS	ESTIMACION INTERCEPTADA	DESLIZAMIENTO ESTIMADO (β)	AJUSTE DE LAS R^2	ESTADISTICA DE DURBIN-WATSON
1	–0.1111 (–.5029)	12.8400 (19.868)	0.6849	2.2299
2	–0.1323 (–.3597)	0.4088 (30.004)	0.8714	2.2418
3	–0.2515 (–.4755)	0.6947 (44.902)	0.9044	2.0412
4	–0.5337 (–.8225)	0.8073 (42.544)	0.8946	2.5297 *
6	0.5695 (.4951)	1.2705 (37.766)	0.8699	2.2708
7	0.7249 (0.4925)	1.5960 (37.079)	0.8657	2.0883
8	2.7357 (1.1698)	0.6516 9.5277	0.2965	2.1337

NOTA : DATOS DE LOS BONOS DEL GOBIERNO CANADIENSE,1963-1982.
PRUEBA T ENTRE PARENTESIS.

* AUTOCORRELACION NEGATIVA A NIVEL DEL 1%

TABLA 25

REGRESION DEL EXCESO DE RETORNO POR UNIDAD PARA VARIAS CATEGORIAS DEL VENCIMIENTO EN EXCESO DE RETORNO POR UNIDAD EN LAS INVERSIONES REFERIDAS: BONOS A 6 MESES Y 5 AÑOS (BIERWAG Y ROBERTS)

VENCIMIENTO EN AÑOS	ESTIMACION INTERCEPTADA	DESLIZAMIENTO INTERCEPTADO(β)	AJUSTE DE R^2	ESTADISTICA DE DURBIN-WATSON
1	-0.1484 (-.6477)	0.1310 (14.2323)	0.4982	2.0735
2	-0.3158 (-.9385)	0.4121 (30.2056)	0.8171	1.9610
3	-0.1115 (-.2443)	0.6757 (37.3217)	0.8760	2.4955
4	-0.3439 (-.7642)	0.7034 (38.8289)	0.8817	2.1452
6	0.1975 (.2783)	1.0093 (35.3830)	0.8603	2.3354
7	-0.5352 (-.0531)	1.3880 (34.2236)	0.8522	2.5800
8	-0.3865 (-.4235)	1.2173 (33.0349)	0.8423	2.3239
10	0.4493 (.4069)	1.2149 (27.3221)	0.7893	2.3793
12	1.2604 (.9288)	1.7421 (31.7628)	0.8323	2.2603
15	0.5400 (.3123)	0.8415 (12.0560)	0.4131	1.7837
17	-0.7198 (-.4168)	0.7094 (10.2002)	0.3356	2.0294
20	0.0310 (.0165)	2.0883 (27.5425)	0.7878	2.4355
25	1.0014 (.5224)	1.9548 (25.5258)	0.7648	2.2681

NOTA: DATOS DE LOS BONO DEL GOBIERNO CANDIENSE 1963-1982, ESTADISTICA T ENTRE PARENTESIS.