23
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA FUNCION DEL ERROR Y LA PREGUNTA EN LA CLASE DE MATEMATICAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LUISA JUDITH PACHECO LEYTE

México, D. F. 1993

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA FUNCION DEL ERROR Y LA PREGUNTA EN LA CLASE DE MATEMATICAS"

T E S I S

Que para obtener el titulo de:

M A T E M A T I C O

Presenta:

Luisa Judith Pacheco Leyte

México, D. F. 1993

INDICE

Página

CAPITULO II

Página

CAPITULO III

INTRODUCCION

En la vida cotidiana el hombre se enfrenta a muchos problemas: politicos, económicos, sociales, culturales, etc., así también los estudiantes deben afrontar y salir adelante de las dificultades que se le presentan, durante el aprendizaje de sus materias. En la escuela hay asignaturas específicas con cierta connotación negativa para los alumnos, porque son difíciles de entender y aprobar; tal es el caso de Física, Química y, principalmente, Matemáticas, pues se considera que a ésta sólo tienen acceso las personas muy capaces y dedicadas al estudio.

Ante esta circunstancia, en este trabajo mostraré una de las posibles causas del alto índice de reprobación en Matemáticas, así como algunas soluciones para erradicar este mal.

Es importante conocer las causas que originan la deserción y el alto índice de reprobación en Matemáticas, en los niveles medio, medio superior y aun en licenciatura, pues esto conducirá a atacarlas y disminuir este grave problema.

A través de la experiencia docente a nivel bachillerato, se ha notado que una de las causas que provocan el rechazo hacia las Matemáticas, es la inseguridad en el alumno; este sentimiento surge por su escaso conocimiento, respecto a las matemáticas, originado porque no estudia, no entiende o no pregunta para disipar sus dudas. Muchas veces el profesor influye en este sentimiento negativo por su errónea forma de enseñanza o porque no fomenta hábitos de estudio; esto provoca que el alumno sienta aversión por la materia. Cabe señalar que además de las carencias del alumno o deficiencias del profesor, Matemáticas requiere de un esfuerzo mayor por parte del alumno para comprenderlas, debido a que no encuentra relación entre matemáticas y su vida cotidiana. Por otro lado, la inseguridad en los alumnos surge por los frecuentes errores cometidos en las clases de matemáticas; también es conveniente señalar que existen otros tipos de errores, como son: los errores fuera del aula, por ejemplo, cuando un alumno acude, al profesor o al compañero, para resolver algún ejercicio y se equivoca no causa un efecto negativo porque no siente la presión del resto de sus compañeros; los errores cometidos en las respuestas de los exámenes, no afectan tanto a los estudiantes porque aceptan con más facilidad sus fallas; con esto puede decirse que este tipo de errores no tiene mayor trascendencia. Sin embargo, los errores cometidos en la clase, causan sentimientos de inferioridad en los alumnos que inciden en ellos, pues son juzgados como tontos o incapaces por sus compañeros, aun cuando ellos también suelen equivocarse, esto provoca inseguridad y rechazo hacia matemáticas; mientras los alumnos entiendan y asimilen menos la materia se incrementará el número de errores en clase y perderán el interés en responder alguna pregunta o resolver algún problema por miedo a la crítica.

Es importante aclarar que no sólo existen errores de los alumnos, sino también del profesor, quien puede cometerlos durante sus exposiciones; este problema se considera relevante, ya que repercute en la calidad de la enseñanza y en el aprendizaje de los alumnos, pues si un profesor se equivoca en clase, la imagen social de él decae ante éstos.

Los errores de los alumnos y del profesor durante las clases de matemáticas son frecuentes en todos los niveles escolares, pero causan un mayor efecto en secundaria y bachillerato. Se ha observado que los conocimientos adquiridos en estas etapas, son determinantes en la formación profesional de los estudiantes. Los errores cometidos en estos periodos propician inseguridad en los alumnos y les hace pensar que no son aptos para las matemáticas; esta es la razón por la cual ellos eligen una carrera que no tenga mucho contacto con Matemáticas, como Sociología, Filosofía, Derecho, etc.

En este trabajo pretendo dejar en claro que los errores cometidos en clase no deben ser situaciones embarazosas o negativas para la enseñanza, y, por lo tanto, no se tienen que disfrazar, esquivar y recriminar sistemáticamente; por tal motivo propongo al maestro diferentes alternativas de acuerdo al tipo de error cometido, ya sea por el alumno o por el profesor, y así poder enfrentar estas situaciones sacando provecho de ellas al manejarlas de forma adecuada.

Para llevar a cabo dicho proposito iniciaré con algunos aspectos de carácter social, que originan y configuran las funciones del error en la enseñanza tradicional. dando una amplia descripción acerca de la Imagen Social de las matemáticas y del profesor de esta materia. Cabe señalar que tanto Matemáticas como quien imparte ésta ocupan un lugar especial en la sociedad, debido al grado de dificultad que tiene la materia, por esta razón, el trabajo pretende mostrar, al lector, algunas alternativas para modificar su concepción negativa acerca de Matemáticas.

También se presentan diferentes perspectivas del error: la social y la escolar, tratando de rescatar de ambas, los aspectos positivos para beneficio del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; además se verá la clasificación de los errores de acuerdo con las causas que los originan, y se muestran cuáles errores son del profesor y cuáles son de los alumnos, y reparando en las diferencias,si las hay, en cuanto a las causas de unos y de otros.

Otro aspecto a abordar es el análisis de las conductas más usuales del profesor cuando se enfrenta a algún error, de él o de sus alumnos, viendo las posibles actitudes que debe adoptar cuando los estudiantes detectan o no el error.

Finalmente, hago una serie de sugerencias o señalamientos de carácter práctico, para que sean incorporados a la actividad docente (de acuerdo a las circunstancias) y de esta forma, mejorar las condiciones de la enseñanza y propiciar el mayor aprendizaje del alumno, quien adquirirá mayor confianza y seguridad, tanto en el área cognoscitiva como afectiva.

CAPITULO I

ANTECEDENTES.

1.1 IMAGEN SOCIAL DE LAS MATEMATICAS

Debido a los problemas económicos, politicos y sociales de México, casi todos los individuos de la sociedad no llegan a tener estudios de nivel medio superior y superior, por lo cual sus conocimientos elementales de matemáticas como son sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, los han adquirido en la escuela primaria o bien, orillados por la necesidad, los han aprendido de forma aútodidácta cuando no han tenido la oportunidad de asistir a la escuela.

Por tal motivo para la mayor parte de la población, las matematicas se reducen esencialmente a los conocimientos básicos de Aritmética y Geometria; de esta forma, el individuo que asistió a la primaria y secundaria limita sus conocimientos de matemáticas a la solución de problemas en clase y, difícilmente, los aplicará en su vida diaria, con excepción de las operaciones elementales.

Como en la mayoría de las actividades cotidianas sólo se utilizan los conocimientos elementales de Aritmética y Geometría el individuo las ve ajenas a su realidad.

Las matemáticas, desde la educación elemental, se distinguen de las otras asignaturas porque son más abstractas y requieren de una simbología particular; existen reglas para manejar los símbolos, los números y, algo muy importante, se requiere de un lenguaje especial, es decir, además de utilizar el lenguaje común, necesita otro a la vez; Morriz Kline opina que en la matemática moderna se usa un lenguaje que obstaculiza más la comprensión de las matemáticas, al respecto dice:

> "El perfeccionamiento del lenguaje lleva a introducir menos palabras que aún no se comprenden y que sólo causan confusión.
>
> De lo anterior surgió la necesidad de definir claramente cada uno de los términos usados lo que llevó a crear una gran cantidad de términos abstractos que deben ser memorizados.
>
> El abuso de la simbología crea confusión y hace más difícil al

> alumno la lectura y comprension de un tema, ya que debe memorizar el significado y en cada caso traducir el simbolo.
>
> Aparentemente se ha usado la simbología para ocultar la pobreza de ideas y dar apariencia de profundidad a cosas simples." [1]

Puede observarse que el lenguaje especial utilizado en matemáticas, crea una barrera para poder entender esta materia, pero no sólo eso, sino también otros aspectos, éstos contribuyen al distanciamiento entre el individuo y las matemáticas, de los cuales se señalan los siguientes:

1.- En matemáticas cualquier enunciado es universal y válido, por ejemplo: "Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales" o "Todos los triángulos que tengan dos lados iguales son isósceles".

Aquí se requiere del razonamiento del alumno para aceptar que, en cualquier lugar y bajo cualquier circunstania, un triángulo con dos lados iguales siempre será isósceles.

2.- El mundo de las matemáticas es mucho más abstracto que el de otras ramas del conocimiento, por ejemplo, si se dice "carro" el individuo relaciona esta palabra con el objeto, e incluso puede verlo y tocarlo; pero si se dice 8963, 91 o cualquier otra cifra, estos números no se pueden relacionar directamente con algún objeto, si acaso pueden ser escritos para hacerlos más evidentes pero no se pueden ver o tocar como los carros.

Todas estas características: de abstracción, de razonamiento, los algoritmos y las relaciones de falso y verdadero utilizadas en matemáticas, contribuyen a que la sociedad tenga una imagen especial y diferente de la materia en relación con otras asignaturas.

A continuación se indicarán algunas de las diversas experiencias, que los individuos adquieren durante el aprendizaje de las matemáticas. Para esto se hará una comparación entre los procesos mentales que requiere el alumno para asimilar y comprender materias diferentes.

Para entender y asimilar Matemáticas, además de memorizar hay que comparar, abstraer, generalizar, ordenar, pensar lógicamente, tener percepción e imaginación geométrica, inducir, deducir y traducir, es decir, se requiere de más actividad mental que en Historia, por ejemplo, donde el alumno muchas veces se limita a ser receptor de lo que lee o escucha.

Como se puede ver hay una gran diferencia entre los procesos mentales para entender una y otra, esto demuestra que el estudiante debe hacer un mayor esfuerzo para aprender Matemáticas que Historia. Por otro lado, la persona observa que las matemáticas son procedimientos acabados, verdaderos y los resultados únicos, capaces de ser demostrados y, además, su validez no depende de las opiniones o emociones; ante esta circunstancia la sociedad las ve como frías y abstractas

También se debe considerar que el niño en la escuela primaria no logra relacionar las matemáticas con su vida diaria, a excepción de las operaciones elementales, porque en su vida social no hay apoyo; con amigos y familiares se habla de Historia, Ecología o Sociología temas normales de conversación, pero casi nunca se habla de Matemáticas, pues cuando se toca el tema sólo es para probar si los conocimientos del niño son eficientes o no.

Respecto a la enseñanza de las matemáticas, en la escuela primaria es frecuente encontrar a profesores que se sienten inseguros de enseñar esta materia porque no les gusta, y por lo tanto, no transmiten el entusiasmo que se requiere para el estudio de la misma; además, con los alumnos de 4o. 5o. y 6o. grado, el problema es mayor, empiezan con fracciones decimales comunes, cálculo de áreas, conversión de medidas etc., y esto no lo aplican fuera de la escuela (excepto tareas), por ejemplo, calcular el área de un pentágono sólo lo hacen en el cuaderno, a no ser que existan laboratorios de matemáticas donde pudieran ver, más claramente, la aplicación de la materia, y en esta medida trasladar los procedimientos matemáticos a problemas reales y cotidianos, mas casi todas las escuelas primarias carecen de este lugar. El estudiante al no recibir el apoyo adecuado por parte del profesor se enfrenta a dos dificultades: por un lado, se le demanda un mayor esfuerzo, por otro lado, no está recibiendo un buen estimulo para desarrollar este esfuerzo, esto pone al alumno en conflicto, dando lugar a actitudes y sentimientos negativos en él, como son los de rechazo, impotencia, inseguridad e incluso evasión hacia las matemáticas por lo que las considerará extrañas y difíciles.

De aqui que la mayor parte de la población considere a las matemáticas como una actividad muy difícil, y que sólo individuos con una inteligencia brillante, serán quienes podrán entenderlas y trabajar con ellas.

Así la Imagen Social que se tiene de Matemáticas es que éstas son un mundo aislado y remoto del mundo cotidiano.

1.2 LA PERSONALIDAD DEL PROFESOR DE MATEMATICAS EN COMPARACION CON LAS DE PROFESORES DE OTRAS MATERIAS

Se examinarán las características del profesor de matemáticas en relación con las de los profesores de otras materias, pues como se vio en el punto 1.1 de éste capítulo, la imagen social de las matemáticas es muy peculiar y tal vez esto se refleje de alguna manera en el perfil del profesor de matemáticas.

Para profundizar en el tema éste se dividirá en dos partes:

1o. La imagen que se tiene del profesor.

2o. La personalidad del profesor de matemáticas.

1.2.1 LA IMAGEN SOCIAL DEL PROFESOR DE MATEMATICAS

Debido a la Imagen Social de las matemáticas, se dice que el matemático o el profesor de matemáticas es una persona capaz e inteligente; se espera de él un amplio dominio de su materia, y de ser posible, que nunca incurra en errores o equivocacines durante las explicaciones; al respecto dice Kline lo siguiente:

> "Los matemáticos como clase están sobrevalorados en otras cuestiones esenciales. Se tiende a suponer

> que los profesores son de condición superior y que por tanto sólo abrazarán aquellas causas y movimientos que son provechosos para la sociedad.
>
> Esta valoración de los matemáticos es terriblemente negativa, pero parece necesario desacreditar la creencia de que los profesores de matemáticas son infalibles y constituyen un grupo verdaderamente superior." [2]

De esta manera se puede observar que la imagen del profesor de matemáticas se distingue del resto de los profesores; generalmente se cree que el profesor de matemáticas es frio, distante y poco dado al intercambio de ideas y relaciones con los estudiantes, esto no sucede con los profesores de otras materias, porque los estudiantes los ven como personas normales, con estos sienten mayor confianza y familiaridad, por tal motivo, frente a estas materias asumen una actitud más positiva y segura y no son tan severos, como lo hacen con los de matemáticas, al juzgar los errores de estos profesores.

1.2.2 LA PERSONALIDAD DEL PROFESOR DE MATEMATICAS

El profesor de matemáticas es parte de la sociedad y, en esta medida, participa de la imagen social de las matemáticas; esto alimenta en él la idea de ser una persona con una capacidad superior a la común, al entender y enseñar matemáticas.

1.2.2.1 LA ACTIVIDAD MATEMATICA COMO EVASION DE LA REALIDAD

Se ha considerado que hay una relación entre el gusto o inclinación hacia las matemáticas y cierta tendencia a evadir o disminuir el contacto con la realidad. Dado que el mundo de las matemáticas es muy ajeno al mundo cotidiano, el gusto y permanencia del matemático por esta disciplina lo aleja de la realidad. Tal es la razón por la cual algunas personas opinan que éstos individuos se adentran en su campo de estudio para ocultar su inseguridad o como evasión de la realidad; entre ellos está la opinión de Kline:

> "Las matemáticas son adecuadas para atraer a aquellos que no se sienten capaces de tratar con la gente, a aquellos que se alejan del mundo y que reconocen incluso conscientemente su incapacidad para tratar con tales problemas. Las matemáticas pueden servir de refugio." [3]

1.2.2.2 DESEQUILIBRIO ENTRE LA VIDA SOCIAL Y LA DOCENCIA

Existe un distanciamiento entre la actividad docente del profesor de matemáticas y su vida extraprofesional, debido a la poca relación que se da entre las matemáticas y la vida cotidiana, el maestro con las únicas personas con quienes puede hablar de matemáticas son sus colegas o personas relacionadas con esta materia; éste no es el caso del profesor de Historia, Biología, Sociología, etc.; porque estas materias tienen mayor relación con la sociedad (sino véase documentales de televisión), por lo mismo estos profesores tienen la posibilidad de relacionar su vida profesional más ampliamente con la sociedad.

1.2.2.3 DESATENCION DE LAS CONVENCIONES SOCIALES

Los profesores de matemáticas se encierran en su mundo, lo cual trae como consecuencia que sean menos sociables y más renuentes a aceptar los convencionalismos y normas sociales, por ejemplo: a) Su manera de vestir es, en general, menos formal que la de profesores de otras materias u otros profesionistas. b) Tienden a menospreciar las jerarquías académicas y administrativas de sus lugares de trabajo.

1.2.2.4 EL ACERVO LINGÜISTICO DEL PROFESOR DE MATEMATICAS

Otra característica que los distingue es su vocabulario, pues debido al aislamiento bajo determinadas circunstancias, la mayoría de las veces sólo se identifica con profesores de su misma área; esto repercute notoriamente en su acervo lingüístico, porque no se da la oportunidad de enriquecer su vocabulario involucrándose con profesores de otras áreas.

Esta deficiencia extraprofesional se subsana dentro del grupo, es decir, es ahí donde demuestra que su capacidad como profesor es insuperable; puede considerarse, a esta actitud de superioridad, como inconsciente, por esta razón, el profesor de matemáticas actúa, ante su grupo, con cierta compulsión y distribuye muy desproporcionadamente sus actividades en comparación con los profesores de otras materias; en tanto que sus actitudes de comunicación se caracterizan por reflejar seguridad y lucimiento. Todo ello contribuye a que la clase de matemáticas resulte de gran complejidad para los alumnos, debido a las exigencias requeridas por parte del profesor.

Por último, es factible que la conciencia de ser diferente, esté presente en el profesor de matemáticas, su relativo aislamiento lo envuelve en una atmósfera singular la cual ejerce una presión mayor y más constante sobre el, presión que aumenta en relación a las equivocaciones en que incurra durante sus exposiciones, pues él sabe que se le considera más capaz.

C A P I T U L O   II

2.1 LOS ERRORES MATEMATICOS EN EL SALON DE CLASE

En el capítulo anterior se vio, de forma general, la Imagen Social de las Matemáticas y del profesor de esta materia, todo esto encaminado a abordar las situaciones que se presentan cuando se cometen errores en la clase, ahora se verán estas situaciones con mayor detalle. Para esto se harán algunos señalamientos generales acerca del error.

Básicamente, el error puede ser visto, desde dos puntos de vista diferentes:

1o. La Perspectiva Social: El error en la sociedad ocupa un lugar importante porque se considera como una fuente de experiencias y aprendizajes que servirán al individuo para mejorar sus actividades y actitudes en el futuro; por esta razón al error se le han compuesto frases y dichos los cuales muestran su lado positivo. Puede decirse que el error en el ámbito social, no se considera una acción negativa.

2o. La Perspectiva Escolar: En el ámbito escolar la mayoría de las personas han experimentado alguna vez un error; sin embargo, aquí no es bien visto como en la sociedad, porque cuando alguien se equivoca se le considera tonto o ignorante y, en general, se le relaciona con incapacidad. Esta forma de pensar, respecto al error, tiene que desaparecer y se debe retomar la apreciación positiva que tiene la sociedad, es decir, el error debe ser didáctico.

Cabe señalar que dentro de la perspectiva escolar se dará mayor importancia al papel que juega el error en la enseñanza de las matemáticas, más específicamente a la función del error en la clase.

2.1.1 INTERPRETACION SOCIAL DEL ERROR

En este apartado se abordará el tema del error desde el punto de vista social, con la finalidad de precisar más su significado se tomarán algunas definiciones del diccionario.

Error:

1.- Opción falsa o errónea: está usted en un error. Falsa doctrina: Vivir en el error. Equivocación: Un error de cálculo (sinónimos: descuido, inexatitud, errata, falta, lapsus, yerro, aberración). [4]

2.- Erróneo: Equivocado, que contiene error. [4]

3.- Errar: Divagar el pensamiento, la imaginación, la tentación. [5]

4.- Concepto equivocado, Juicio falso. Acción desacertada o equivocada. Cosa hecha erradamente. [6]

Dado que casi todos han experimentado alguna equivocación, el error en la actividad humana ya es algo natural y común del cual se puede aprender. En la sociedad el error ha dado motivo a que se le caracterice con los siguientes dichos:

a) Errar es de humanos.
b) Echando a perder se aprende.
c) El hombre es el único animal que cae dos veces en el mismo error.
d) Al mejor cazador se le va la liebre.
e) El problema no es errar sino reconocerlo.
f) Después de caer cuesta trabajo volver a levantarse.

Estos dichos señalan que: a) Nadie es infalible b) De los errores se obtiene experiencia, c) El hombre incurre en el mismo error dada la poca atención que presta a sus errores, d) Incluso la persona más preparada puede equivocarse. e) Es dificil que alguien acepte abiertamente sus errores, de ser así quizá estos disminuirían. f) Si se comete algún error grave, es más dificil seguir adelante, pero se continúa.

Se observa de estos significados que de los errores se obtiene conocimiento y experiencia sobre los hechos de la vida; estos significados en ningún momento desvalorizan o recriminan a quien comete errores; aunque sería deseable que nadie se equivocara.

Analizando estas frases, en particular el dicho del inciso b señala una utilidad del error: aprender de él, este es el tema principal del trabajo.

De lo anterior puede decirse que equivocarse tiene aspectos positivos, por lo cual socialmente al error se le reconoce con naturalidad, utilidad y generalidad, pues estas experiencias servirán al individuo en lo sucesivo.

2.1.2 INTERPRETACION ESCOLAR DEL ERROR

En la enseñanza escolar con mucha frecuencia se considera al error totalmente negativo, tal es la razón por la cual tanto el profesor como el estudiante tratan en lo posible de no incurrir en él, ya que casi siempre se le relaciona con la incapacidad, con la tontería y hasta con la estupidez. Se puede decir también que el error disminuye la posibilidad de un buen aprendizaje debido a lo siguiente: por un lado, si el alumno se equivoca sus compañeros se burlan de él, logrando así que éste se considere menos capaz y, es probable, que baje su rendimiento escolar; por otro lado, si el maestro se equivoca en la clase, sus alumnos conocerán procedimientos incorrectos.

Debido a la connotación negativa asignada al error puede decirse que, en la escuela, se le evita y recrimina sistemáticamente.

De lo anterior se deduce: el error representa una situación paradógica o contradictoria; por un lado, socialmente se le reconoce cierta utilidad didáctica, y por el otro, en la escuela, es evitado y castigado de diferentes maneras.

Ahora bien, la imagen social del error señala que éste puede ser usado productivamente en la enseñanza, es decir, con los errores algunas veces se retienen mejor los conocimientos que se están adquiriendo durante el aprendizaje; pues, con frecuencia, la equivocación del alumno en matemáticas crea condiciones que no sólo mejorarán su aprendizaje, sino, también, el de sus compañeros e, incluso, hasta el del profesor.

Se considera, por tanto, que la enseñanza de las matemáticas debe enfrentar al error desde un punto de vista social y retomar el dicho: "Echando a perder se aprende", pues, como se ha señalado, en la primera perspectiva, un error siempre enseña; si se canalizan adecuadamente las situaciones de equivocación se generarán recursos para enfrentarlas con provecho.

Uno de tantos aspectos relevantes del error, en relación con el aprendizaje, es que un error en la respuesta o en el procedimiento, no necesariamente indica un menor entendimiento de la cuestión en quien lo comete, con respecto al que no se equivoca, por ejemplo:

En la clase de Cálculo Diferencial e Integral II (CADI II) a los estudiantes de 6o. semestre del Colegio de Bachilleres se les pidió que resolvieran la siguiente integral definida, aplicando el método de integral por partes:

$$\int_0^1 t \cos 2\pi t \; dt$$

Con anterioridad se explicó en qué consistía este método; se resolvieron en el pizarrón, una serie de ejercicios de integral definida aplicando este proceso.

Cuando los alumnos terminaron el ejercicio, se procedió a revisar sus respuestas, algunos tenían su resultado final incorrecto, porque no aplicaron bien el procedimiento, no evaluaron bien o cambiaron los signos; otros tenían la solución correcta, sin embargo, un alumno cuyo resultado fue correcto tenía su procedimiento incorrecto.

El estudiante procedió de la siguiente forma:

$$\int_0^1 t \cos 2\pi t \; dt$$

sea $u = t$ $\qquad$ $dv = \cos 2\pi t$

$du = dt$ $\qquad$ $v = \int_0^1 \cos 2\pi t \; dt$

como $\quad v = \int_0^1 \cos 2\pi t \, dt$

él resuelve esta integral y evalúa

Sea $\quad w = 2\pi t$

$dw = 2\pi \, dt \Rightarrow \frac{dw}{2\pi} = dt$

$$\int_0^1 \cos 2\pi t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \cos w \, dw = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} w \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi(1) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi(0)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad v = \int_0^1 \cos 2\pi t \, dt = 0$$

como $\quad v = 0 \quad$ entonces

$$\int_0^1 t \cos 2\pi t \, dt = t(0) - \int_0^1 (0) \, dt = 0$$

$$\int_0^1 t \cos 2\pi t \, dt = 0 .$$

El resultado es correcto, pero el procedimiento no, porque la evaluación en los límites de integración debe ser hecha hasta el final*, ya que la fórmula del método de integración por partes es una igualdad entre tres integrales, y en este caso, las 3 son definidas.

Por esta razón, el error del estudiante radicó en lo siguiente: primero obtiene

$$v = \int \cos 2\pi \; dt$$

---

* El siguiente ejemplo muestra que no es posible evaluar v, pues la evaluación se debe hacer en el resultado final, después de haber aplicado el método de integral por partes.

$$\int_0^1 t \text{ sen } 2\pi t \; dt$$

$$\text{sea} \quad u = t \qquad dv = \text{sen } 2\pi t \; dt$$

$$du = dt \qquad v = \int_0^1 \text{sen } 2\pi t \; dt$$

si se evalua v se obtiene: $\displaystyle\int_0^1 \text{sen } 2\pi t \; dt$

$$\text{sea} \quad v = 2\pi t$$

$$dv = 2\pi \, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{2\pi} = dt$$

$$\int_0^1 \text{sen } 2\pi t \; dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \text{sen } v \; dv = -\frac{1}{2\pi} \cos v \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t \Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi} \left(\cos 2\pi(1) - \cos 2\pi(0) \right) = 0$$

por medio de un proceso de integración, luego maneja integral definida, por lo que consciente o inconscientemente evalúa v.

Este alumno denota un sentido matemático más desarrollado que los demás estudiantes, pues refleja mayor sentido de captación de cuestiones matemáticas, porque va más allá de la simple mecanización, al suponer la conmutatividad de las operaciones. Aunque también se puede decir que el estudiante razonó así por mera casualidad.

$\therefore\ v = 0$ y si $v = 0$ entonces: $\int_0^1 t \operatorname{sen} 2\pi t \, dt = 0$

ahora, si no se evalúa v $\quad v = \int \operatorname{sen} 2\pi t \, dt$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t$$

sustituyendo

$$\int_0^1 t \operatorname{sen} 2\pi t \, dt = -\frac{1}{2\pi} t \cos 2\pi t \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \cos 2\pi t \, dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(1-0) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t \Big|_0^1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}$$

$\therefore \int_0^1 t \operatorname{sen} 2\pi t \, dt = -\frac{1}{2\pi}$ (resultado correcto)

Con este ejemplo se ve claramente que no siempre hay una relación directa entre error y menor entendimiento, y entre acierto y mayor entendimiento. Posteriormente, se verá como el error puede ser de utilidad en la enseñanza de las matemáticas si es manejado adecuadamente.

2.2 TIPOS DE ERRORES

Vistas ya las dos perspectivas que existen acerca del error: la social y la escolar, ahora en esta sección se verán los errores de tipo escolar, especificamente, los errores que cometen los alumnnos y el profesor dentro del salón en las clases de matemáticas, vistos desde la perspectiva social, es decir, los errores tienen aspectos positivos que pueden ser útiles al proceso enseñanza-aprendizaje.

Los errores no son exclusivos de personas poco inteligentes o incapaces de aprender, cualquier persona comete errores, lo importante es encausarlos por buen camino cuando se presentan y puedan ser aprevechados, y que mejor que quien guie estas situaciones sea el profesor de matemáticas, pues de él depende el aprendizaje de los estudiantes y el gusto por esta materia.

Al conocer los diferentes tipos de errores y las causas que los originan se comprenderá por qué se presentan para así poder atacarlos y procurar reducir su frecuencia; además se debe saber qué hacer en el momento, cuando estos surgen; qué actitud debe adoptar el profesor cuando él o sus alumnos incurran en algún error. Conviene señalar que cometer errores es parte del proceso de aprendizaje.

Es posible que el profesor de matemáticas no siempre tenga tiempo suficiente para analizar error por error, de cada uno de sus alumnos; más bien debe ser consciente de las causas que los originan, esto servirá para cuestionarse si es correcta o no, la manera como imparte su materia, con la finalidad de reafirmar sus aciertos o disminuir o anular sus deficiencias, si eso es posible.

A continuación se expondrá la clasificación de las posibles causas de los diferentes tipos de error, y se darán algunos ejemplos analizando cuáles errores son cometidos por el profesor y cuáles por los alumnos.

2.2.1. CRITERIOS DE CLASIFICACION DE LOS ERRORES

En esta sección se clasifica a los errores en 4 grupos, de acuerdo con las circunstancias en las cuales se pueden presentar y de acuerdo a quien los comete, ya sea el profesor o el estudiante.

En el análisis de cada grupo de errores se mostrará, con mayor detalle de qué manera estas equivocaciones repercuten, sea en beneficio o perjuicio del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, dependiendo, desde luego, de la manera como sean manejados por el profesor, durante las clases de matemáticas.

La clasificación de los errores es la siguiente:

1o. Errores que no son matemáticos.
2o. Errores propiamente matemáticos.
3o. Errores de los profesores.

4o. Errores de los estudiantes.

2.2.1.1 ERRORES NO MATEMATICOS

No todos los errores que cometen los alumnos y el profesor en las clases son derivados de procesos netamente matemáticos, muchas veces existen mecanismos o circunstancias que provocan la equivocación, pero que no se deben necesariamente , a una deficiencia de la materia, sin embargo por ese motivo se llega al error. Las equivocaciones son tan comunes como los errores matemáticos y se deben, principalmente, a la inseguridad y desinterés en la materia. Este tipo de errores deberán ser manejados, de forma especial por el profesor, durante la clase, para no confundirlos con errores matemáticos e incrementar en el estudiante el rechazo de la materia aún sin saber si entendieron o no, los procesos matemáticos.

Algunos errores no matemáticos pueden ser:

-Error Accidental.
-Error por descuido.
-Error por falta de preparación.
-Error por falta de estudio.

A continuación se tratará cada uno de estos errores y las causas que los provocan.

a) EPROR ACCIDENTAL

El error accidental es ajeno al conocimiento y dominio, del alumno y profesor, respectivamente, porque estos pueden estar involucrados en el tema pero pueden equivocarse por razones externas a la materia; por lo tanto el error accidental es aquel que se comete por alguna circunstancia imprevista: como el ruido fuera del salón o la interrupción de la clase por el retardo de algún estudiante, etc.; esto puede ocasionar que el profesor o el alumno cometan fallas al colocar algún signo, paréntesis, o bien, poner un número por otro, obteniendo así un resultado incorrecto. Este error puede hacer creer al alumno o al profesor que tienen deficiencia de conocimientos de la materia.

b) EPROR POR DESCUIDO

El error por descuido se comete cuando el profesor o el alumno no ponen todo el cuidado al resolver, por ejemplo, un problema; aunque se conozca bien la secuencia lógica de alguna demostración o el proceso matemático para la solución de algún ejercicio u operación elemental, muchas veces se cometen errores por razones externas a su conocimiento académico, como puede ser: alguna preocupación o problema personal. Este tipo de equivocaciones puede confundir a quien las comete pues causa el mismo efecto que el error accidental: da la idea de no tener suficientes conocimientos de matemáticas.

c) ERROR POR FALTA DE PREPARACION

Los errores por falta de preparación se presentan cuando el profesor no prepara su clase o bien cuando los estudiantes no repasan el tema visto en la última sesión; ya que muchas veces es necesario volver a elaborar el procedimiento y ordenar los apuntes para retroalimentar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, aun cuando la teoría, ejercicios y problemas vistos en clase hayan quedado claros.

d) ERROR POR FALTA DE ESTUDIO

Este tipo de error se comete cuando los alumnos, y a veces hasta el mismo profesor, no tienen hábitos de estudio y no repasan ni comprenden o memorizan algunos términos matemáticos. Otras veces no ponen cuidado en los procedimientos y por ello se cometen errores.

Estas equivocaciones propician cierta inseguridad en quien las comete, pues los hacen sentir incapaces de enfrentarse a Matemáticas.

En general, este tipo de errorres no matemáticos (a saber: accidental, descuido, falta de preparación y falta de estudio) confunden a quien los comete, tanto a los alumnos como a los profesores, porque al ver que no obtienen el resultado correcto dudarán de sus conociminetos; propiciando, de esta forma, el desinterés por Matemáticas.

El profesor es quien debería identificar estas situaciones explicando en cada caso el motivo de la equivocación del alumno, haciéndole saber que si entiende matemáticas, y de esta manera el estudiante se interesará más por la materia.

Si el profesor es quien se equivoca, por alguna de las razones antes mencionadas, deberá poner mayor atención y empeño en su actividad docente, sólo así obtendrá mejores resultados de él y de sus estudiantes.

A continuación se presentan ejemplos de algunos ejercicios en los cuales sus soluciones incorrectas son causadas por errores no matemáticos.

ERROR POR DESCUIDO

Dentro de los errores por descuido, se encuentran los errores de lectura, como el siguiente:

A los alumnos de 1er. semestre de bachillerato se les pidió que resolvieran el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - 3y = 8 \qquad (1)$$
$$-3x + y = -2 \qquad (2)$$

Un alumno copió mal la 1a. ecuación y en su lugar resolvió:

$$2x - 3y = 6 \qquad (1)$$
$$-3x + y = -2 \qquad (2)$$

En este caso, los valores que obtuvo de X y Y fueron distintos al del sistema original, sin embargo, el procedimiento fue correcto y sus resultados también.

ERROR POR DESCUIDO

El programa de Matemáticas III en la 2a. unidad: función cuadrática. contempla el tema "relación con la ecuación y su resolución". al respecto, a un grupo de 3er. semestre de bachillerato se les pidió resolver el siguiente ejercicio:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

cuyas raíces o soluciones son: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Se dió un tiempo para que los estudiantes resolvieran esta ecuación individualmente para compararlo posteriormente con el resultado en el pizarrón.

Un estudiante al ver la solución mencionó que su resultado tenía los números correctos, y sólo había cambiado los signos en sus raíces. Su respuesta fue: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Al revisar su ejercicio se observó que el alumno había errado en la forma de sustitución del coeficiente de x en la fórmula general.

Este alumno hizo lo siguiente:

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

$a = 2, \quad b = -4, \quad c = -6$ fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

sustitución. $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{4} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{4}$

$$= \frac{-4 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 8}{4} = 1 \qquad x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 8}{4} = -3 \qquad x_2 = -3$$

Su error se debió a un descuido ya que no se fijo en el signo de b y sustituyó 4 en lugar de -4, sin embargo, los signos de a y c los tomó correctamente, también pudo suceder que confundiera el signo de la fórmula con el signo de b.

ERROR POR DESCUIDO

Dentro del tema "Razones y Proporciones" del programa de Matemáticas I, se pidió a los alumnos que contestaran las siguientes preguntas:

Los siguientes vectores se representan con una escala de 1 cm = 80 kg.

¿Cuáles serán las longitudes correctas de los vectores?

a) 800 kg.

b) 430 kg.

Un alumno resolvió el inciso así:

$$1\ \text{cm} = 80\ \text{kg}$$
$$x = 800\ \text{kg} \qquad x = \frac{(80\ \text{kg})(800\ \text{kg})}{1\ \text{cm}}$$

$$\underline{x = 10\ \text{cm}}$$

La solución es correcta pero no su procedimiento.

Este error se debió posiblemente a las siguientes causas:

1o. Copió sólo el resultado.

2o. Copió mal.

3o. Por intuir la respuesta no se preocupó en ordenar su procedimiento.

Como no hubo oportunidad de copiar, es más probable que el error se debió al 3er. punto, por lo que se considera un error por descuido.

Otro alumno resolvió el inciso b de la forma siguiente:

b) 430 kg.

1 cm = 80 kg

x = 340 kg

$$x = \frac{(1\ cm)(340\ kg)}{80\ kg}$$

$$\underline{x = 4.25\ cm}$$

La solución correcta para b es 5.37 cm y el resultado que el estudiante obtuvo fue 4.25 cm, pero tanto el procedimiento que utilizó como su respuesta son correctas, su error consistió en no fijarse bien en los datos del problema.

ERROR POR DEFICIENCIAS EN EL CONOCIMIENTO PREVIO

Durante la clase de CADI II (Cálculo Diferencial e Integral II) al resolver integrales directas se expuso, entre otras, la siguiente:

$$\int (2x^2)^2\,dx = \int 4x^4\,dx = 4\int x^4\,dx = \frac{4}{5}x^5 + C$$

Posteriormente se pidió a los alumnos resolver

$$\int (5x^3)^3\,dx$$

obteniendo el resultado: $\frac{125}{7}x^7 + C$

Cuando se les dijo que no era correcto respondieron que así se había resuelto un ejercicio anteriormente, y sólo siguieron los mismos pasos, por lo tanto consideraban que estaba bien.

Ellos aplicaron el siguiente proceso.

$$\int (5x^3)^3\,dx = \int 125x^6\,dx = 125\int x^6\,dx = \frac{125}{7}x^7 + C$$

Se observó que pueden integrar correctamente, sin embargo, su error consistió en poner x^6 en lugar de x^9, al respecto argumentaron que era x^6 pues $(x^3)^3 = x^{3+3} = x^6$ porque lo mismo se había hecho en el otro ejercicio $(x^2)^2 = x^4$.

Cuando se resolvió $\int (2x^2)^2 \, dx = 4\int x^4 \, dx = \frac{4}{5} x^5 + C$ no se explicó que $(x^2)^2 = x^{2\times 2} = x^4$ pues se suponia que ellos conocian las leyes de los exponentes, por lo cual su error se debió a la falta de estudio.

2.2.1.2 ERRORES PROPIAMENTE MATEMATICOS

Algunos errores en las soluciones de problemas o ejercicios en la clase, se deben a equivocaciones en los procesos matemáticos; estos errores pueden ser cometidos por los alumnos y por el profesor, aunque son más frecuentes en los estudiantes.

Existe una gran variedad de causas por las cuales se cometen este tipo errores matemáticos, por ejemplo: no leer bien el problema, no comprenderlo, no entender el significado de palabras o símbolos, no saber exactamente qué pasos seguir, qué operación hacer primero, qué cálculos aplicar, o bien no identificar cuales son las variables, etc.

A continuación se presentan algunos ejemplos de ejercicios que presentan soluciones incorrectas derivadas de procesos matemáticos erróneos:

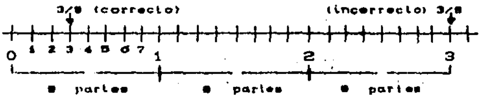
ERROR CONCEPTUAL

El siguiente ejercicio se aplicó a 50 alumnos de 1er. semestre de bachillerato quienes cursan Matemáticas I (Unidad 1, tema: Números racionales), del total del grupo, aproximadamente el 10% razonó así:

Pregunta:

Identificar en la recta numérica 3/8 y 10/3.

Solución:



Dividieron al entero en 8 partes e identificaron cada entero como 1/8, por lo que en tres enteros marcaron 3/8.

De acuerdo a su procedimiento, el alumno si entiende que son 8vos. (o en general, entiende que indica el denominador en un fracción común), pues divide al entero en 8 partes, sin embargo, al pedirle que marque 3/8, estos 8vos. no los relaciona correctamente con tomar sólo 3 partes de un entero dividido en 8, sino que toma tres enteros; este error es de tipo conceptual pues aún no ha entendido como relacionar el numerador con el denominador.

ERROR DE ALGORITMO

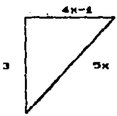
La mayoría de los estudiantes de bachillerato, inciden frecuentemente en los errores de algoritmo, en particular, al pasar los términos de un miembro a otro dentro de una ecuación porque no cambian el signo del término.

El siguiente error se presentó en casi todo un grupo de alumnos de 2o. semestre.

Ejercicio:

El dibujo representa un triángulo rectángulo, calcular el valor de x aplicando el teorema de Pitágoras.

Los estudiantes procedieron de la forma siguiente.



Solución:

1er. paso $(5x)^2 = (4x-1)^2 + (3)^2$

2o. paso $25x^2 = 16x^2 - 8x + 1 + 9$

3er. paso $25x^2 + 16x^2 - 8x + 10 = 0$

4o. paso $41x^2 - 8x + 10 = 0$

Los alumnos no cambiaron los signos de los términos al pasar del 2o. al 1er. miembro de la ecuación en el 3er. paso de su proceso, sin embargo, el razonamiento que siguen es correcto, ellos debían obtener con el cambio correcto de signos la ecuación: $9x^2 + 8x - 10 = 0$ y después calcular el valor de x.

Errores como este se presentan frecuentemente, aún cuando este tipo de reglas a seguir, respecto al cambio de signos, los estudiantes las ven desde secundaria y, en el primer semestre de bachillerato se da un repaso.

ERROR DE MECANIZACION

Generalmente, cuando se les da a los alumnos un nuevo procedimiento, ellos sólo lo mecanizan sin razonarlo, tal es el caso del siguiente error.

En la clase de productos notables y factorización, a los estudiantes del primer semestre de bachillerato, se les explicó como debian factorizar un trinomio, pero antes tenian que identificar si el trinomio era cuadrado perfecto o no ya que se siguen diferentes procedimientos.

Ejemplo 1o.

Factorizar $4x^2 + 8x + 4$

a) obtener raiz del 1o. y 3er. término: $2x$ y 2

b) obtener el doble producto de ambas raices: $2(2x)(2) = 8x$

c) si se obtiene lo mismo que el 2o. término entonces es un trinomio cuadrado perfecto y la factorización queda asi:

$$4x^2 + 8x + 4 = (2x + 2)^2$$

Si al llegar al inciso c no se obtiene lo mismo que el 2o. término entonces el trinomio no es cuadrado perfecto y para factorizarlo se siguen los pasos siguientes:

Ejemplo 2o.

Factorizar $x^2 + 8x + 3$

a) Se completan cuadrados: $x^2 + 8x + 16 - 16 + 3$

$$x^2 + 8x + 16 - 13$$

b) Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto como en el ejemplo 1o.: $x^2 + 8x + 3 = (x + 4)^2 - 13$

Así de este tipo de ejercicios se resolvieron en la clase.

Más adelante se pidió a los alumnos que factorizaran:

$$3x^2 + 12x + 8$$

ellos procedieron así: $3x^2 + 12x + 36 - 36 + 8$

$$3x^2 + 12x + 36 - 28$$

$$(x + 6)^2 - 28$$

(factorización incorrecta)

Este resultado es incorrecto debido a que no tomaron en cuenta el coeficiente de x, esto posiblemente se debe a las dos razones siguientes: a) En el ejemplo 1o. el resultado de la raíz del primer término se obtuvo con facilidad. b) En el ejemplo 2o. el coeficiente de x^2 es 1, sin embargo, se dieron cuenta que no era un trinomio cuadrado perfecto, porque utilizaron el 2o. procedimiento; su error de debió a que mecanizaron el proceso sin razonarlo.

ERROR DE IDENTIFICACION

Este error se presentó aproximadamente, en el 50% de un total de 45 alumnos de 5o. semestre de bachillerato, quienes cursan la asignatura de Estadística Descriptiva e Inferencial I (EDI I).

Dentro del tema elementos de probabilidad, se vió el principio de la adición y la multiplicación, se dieron algunos ejemplos y se dejaron algunos ejercicios para que los alumnos los resolvieran en clase.

Antecedentes.

Principio de la multiplicación:

Los eventos pueden ocurrir simultáneamente.

Si E_1 ocurre de n_1 formas diferentes

E_2 ocurre de n_2 formas diferentes

. .

. .

. .

E_k ocurre de n_k formas diferentes

El número de maneras como se puede realizar E_1 seguido de E_2 seguido de E_3, etc., está dado por:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$

Principio de la adición:

Los eventos no pueden ocurrir simultaneamente.

Si E_1 puede ocurrir de n_1 formas diferentes

E_2 puede ocurrir de n_2 formas diferentes

E_k puede ocurrir de n_k formas diferentes

El número de maneras como se puede realizar el evento E_1 ó E_2 ó E_3 ó ... E_k está dado por:

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k.$

A los alumnos no se les especificó qué principio tenían que aplicar en los ejercicios, pues ellos debían identificarlo según el problema.

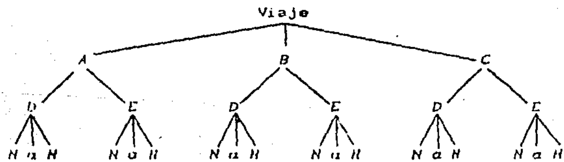
Ejemplo:

Se otorgó un viaje a una persona, pero tiene que escoger uno de dos transportes, uno de tres acompañantes y uno de tres lugares.

¿De cuántas maneras puede hacer el viaje?

Lugares $\left\{\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}\right. \quad (n_1 = 3)$ Transportes $\left\{\begin{array}{l} D \\ E \end{array}\right. \quad (n_2 = 2)$

Acompañantes $\left\{\begin{array}{l} N \\ \alpha \\ H \end{array}\right. \quad (n_3 = 3)$

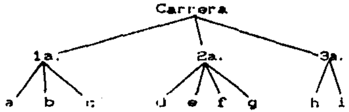


$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ maneras diferentes de hacer el viaje

Ejercicio para los alumnos:

Un estudiante va a decidir qué carrera piensa estudiar; de acuerdo a sus aptitudes puede elegir la primera con 3 especialidades, la segunda con 4 y la tercera con 2.

¿De cuántas formas diferentes puede elegir su carrera?



$n_1 = 3 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 2$

$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ formas diferentes de elegir una carrera.

Como no identificaron exactamente lo que se pedía en el problema, confundieron qué principio tenían que utilizar y aplicaron el principio de la multiplicación. No consideraron que estos eventos no pueden mezclarse unos con otros, es decir, no pueden ocurrir simultáneamente como sucede con los eventos del ejemplo; por lo tanto, este problema se tenía que resolver aplicando el principio de la adición:

$n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 4 + 2 = 9$ formas diferentes de elegir la carrera.

ERROR DE IDENTIFICACION

Los errores de identificación son aquellos que se presentan cuando no se detecta a primera vista qué se debe hacer, por ejemplo:

$$\text{Derivar} \quad f(x) = \left(\frac{x^3 \operatorname{sen}^2 x + \tan x}{1 + x^3} \right)^8$$

Es posible que aunque un alumno sí pueda derivar no aplique correctamente la fórmula, o bien, no tome en cuenta el grado de la función, o por ser una función compuesta se confunda y al momento no sepa qué derivar primero.

Los siguientes ejercicios se aplicaron a alumnos de 8o. semestre de bachillerato, quienes ya sabían integrar por el método de sustitución.

Dos alumnos resolvieron las integrales de la siguiente manera:

1.- $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^2\, 3x \left[3 \operatorname{sen} x + 3x \cos x\right] dx$

solución:

sea $\quad u = (\operatorname{sen} x)\, 3x \qquad du = (3 \operatorname{sen} x + 3x \cos x)\, dx$

(En $u = (\operatorname{sen} x)\, 3x$ no toma en cuenta $(\operatorname{sen} x)^2$)

Sustitución:

$$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{((\operatorname{sen} x)\, 3x)^3}{3} + C$$

Para el estudiante $u = (\operatorname{sen} x)\, 3x$ y $u^2 = ((\operatorname{sen} x)\, 3x)^2$

pero en la integral original se tiene $\int (\text{sen } x)^2\, 3x \ldots$

Este error se debe a lo siguiente: no identificaron claramente $(\text{sen } x)^2\, 3x$ pues lo confundieron con: $((\text{sen } x)\, 3x)$.

2.- $\int_3^6 (1 + x^2)\, dx$

Solución:

El alumno aplica el método de sustitución.

sea $u = 1 + x^2$

$du = 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} du = x\, dx$

$$\therefore \int_3^6 \frac{1}{2} u\, du = \frac{1}{2}\int_3^6 u\, du = \frac{1}{4} u^2 \Big|_3^6 = \frac{1}{4}(1 + x)^2 \Big|_3^6$$

$$= 11.75\ u^2$$

Se observa que el estudiante toma $\frac{1}{2} du = x\, dx$ y así sustituye pero en la integral $x\, dx$ no aparece.

Este error se debió a que no identificó correctamente los elementos del integrando; esta integral se puede resolver separando la función $(1 + x^2)$ así:

$$\int_3^6 1\, dx + \int_3^6 x^2\, dx$$

ERROR POR FALTA DE ANALISIS

El programa de CADI II del Colegio de Bachilleres, contempla, en la 2a. unidad, integral Definida; para adentrar a los alumnos en este tema se comienza con sumas.

En un grupo de 30 alumnos se expusieron los teoremas referentes al tema y se resolvieron algunos ejercicios, posteriormente se paso, al azar, a un estudiante al pizarrón a resolver la siguiente suma

$$\sum_{i=1}^{5} 3i - 2i$$

a la cual aplicó el siguiente procedimiento:

$$\sum_{i=1}^{5} 3i - 2i = \underbrace{\sum_{i=1}^{5} 3i - \sum_{i=1}^{5} 2i}_{\text{paso 1}} = \underbrace{3\sum_{i=1}^{5} i - 2\sum_{i=1}^{5} i}_{\text{paso 2}}$$

$$= \underbrace{(3-2)\sum_{i=1}^{5} i}_{\text{paso 3}} = (1)(1+2+3+4+5) = 15$$

Cuando el estudiante seleccionado terminó el 3er. paso, aproximadamente el 25% del grupo reaccionó negativamente, afirmando que el resultado era incorrecto e insistieron en pasar a resolverlo.

El resto de los alumnos simplemente se quedo callado pues no sabían cuál resultado era el correcto.

Al terminar el alumno la operación, se le preguntó al grupo en general por qué decian que el procedimiento era incorrecto y todos coincidieron en que no debía haber factorizado $\sum i$ y multiplicado por (3-2) pues lo correcto era lo siguiente:

$$\underbrace{3\sum_{i=1}^{5} i - 2\sum_{i=1}^{5} i}_{\text{paso 2}} = \underbrace{3(15) - 2(15)}_{\text{paso 3}} = 45-30 = 15$$

Sin embargo, a pesar de ser igual el resultado mostraron desconfianza por el primer procedimiento y lo consideraron mera casualidad; lo cual demuestra su incapacidad para reflexionar o analizar procedimientos matemáticos nuevos, pues estan acostumbrados a resolverlos de forma mecánica, por lo que incurren en el error de precipitarse a calificar como falso o verdadero algún nuevo proceso sin haberlo analizado.

ERROR DE PROCEDIMIENTO

El siguiente ejercicio se les dejó a los alumnos de 8o. semestre quienes ya sabían el método por partes para resolver integrales.

Ejercicio. $\int x^2 e^x \, dx$

Algunos lo resolvieron así:

$$\int x^2 e^x \, dx \qquad \text{sea} \qquad u = x^2 \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = 2x \, dx \qquad v = e^x$$

$$\therefore \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx \; ^{*}$$ * vuelve a aplicar el método

$$^{*} \quad u = x \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x \, dx \right] = x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x\right]$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x - 2 e^x + C = \underline{\underline{e^x (x^2 - 2x - 2) + C}}$$

Sin embargo, los otros alumnos, no eligieron el camino más fácil, utilizando el mismo procedimiento.

$$\int x^2 e^x \, dx \qquad \text{sea} \qquad u = e^x \qquad dv = x^2$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\therefore \int \underset{x^2}{x^2} e^x \, dx = \frac{x^3 e^x}{3} - \frac{1}{3}\int \underset{x^3}{x^3} e^x \, dx$$

En este caso cada vez aumenta el exponente de x y por tal motivo la integral se hace más compleja para resolverla, el error consistió en no elegir el procedimiento adecuado.

Se observa con este ejemplo que un error no necesariamente conduce a tener un resultado falso sino también será una acción que no conduce a la solución.

Los errores matemáticos en los alumnos no desaparecerán de la noche a la mañana, pues muchos de los profesores no tienen suficiente tiempo para atender a cada uno de sus alumnos, por lo que difícilmente se interrelacionará de forma efectiva con ellos y no analizará las causas de cada error; el maestro debe explicar bien a todo el grupo, el significado de la pregunta, la secuencia correcta de pasos a seguir o las diferentes estratregias para llegar a la solución correcta del problema, redituando así un mayor entendimiento de sus alumnos y disminuyendo considerablemente los errores matemáticos.

2.2.1.3 ERRORES DE LOS PROFESORES DE MATEMATICAS

La mayoría de los profesores de matemáticas cometen errores durante la clase, ya sea en los cálculos, en las fórmulas, o en los paréntesis, etc. cuando esto sucede son criticados severamente por sus alumnos o por los maestros del área, o de otras materias, debido a la Imagen Social que se tiene del profesor y de Matemáticas, esto hace que el maestro se encuentre ante diferentes situaciones que se analizarán más adelante.

Ahora, se verán algunas de las causas que propician los errores del profesor de matemáticas, con la finalidad de reducir o evitar éstos y no esquivarlos de ninguna manera; y si no se pueden evitar, entonces deberan ser aclarados y corregidos, para mejorar de esta forma, las exposiciones del profesor y la calidad de la enseñanza de las matemáticas

De acuerdo con la experiencia docente a nivel bachillerato, se han observado algunas causas que provocan que los profesores de matemáticas incurran en errores, éstas pueden ser: Seguridad de conocimientos, Carga académica, Negligencia u Otra actividad. A continuación se analizará cada una de éstas.

a) SEGURIDAD DE CONOCIMIENTOS

Con frecuencia algunos profesores intentan enseñar un tema que no dominan bien, esto trae como consecuencia que no se desenvuelvan con seguridad frente a su grupo, pues para éste es el maestro *quien les dará el conocimiento*, debido a esta situación el profesor estará tenso y caerá con mucha facilidad en errores que lo harán titubear y sentirse inseguro y cohibido.

El profesor, para no incurrir en errores, expondrá unicamente lo que sí domina del programa, así se sentirá seguro; pero limitará el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Ante tal problema es conveniente que el profesor revise con anterioridad el contenido del programa, prepare clase y, sobre todo, asista a cursos, en el caso de no entender o dominar ciertos temas y aun cuando los domine; de esta forma el maestro eliminará sus errores en clase dando mayor fluidez a los temas y creará así las condiciones propicias para que el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas sea más productivo.

b) CARGA ACADEMICA

Cuando los profesores de matemáticas sólo se dedican a la docencia, muchas veces, tienen un excesivo número de horas-clase y, generalmente, manejan varios programas, esto propicia que se incurra constantemente en errores durante las exposiciones, debido a que no se cuenta con tiempo para revisar los temas o prepararlos antes de cada sesión.

El maestro, cuando no ha preparado clase, para evitar equivocarse, no profundiza (en caso de que así se requiera en el programa) en temas que no domina o definitivamente no los aborda. Si los temas vistos en cada materia son siempre los mismos, entonces se conoce más a fondo el contenido del programa, y en este caso, el maestro no incurrirá en equivocaciones al exponer; pero el cansancio y la tensión hacen decrecer el rendimiento a lo largo del día y es probable que las últimas clases sean mal impartidas, provocando con esto, una mayor proporción de errores por parte del profesor.

Cuando el profesor abarca nuchas horas clase o expone varios programas al día, se confundirá en algunas relaciones o seleccionará incorrectamente estrategias para la solución de algún problema.

Por último, el profesor de matemáticas que se encuentre en este caso, debe tomar en cuenta estos aspectos para mejorar, de forma directa e inmediata, su práctica docente y contribuir así a resolver, en alguna medida, los problemas de la enseñanza de las matemáticas.

c) NEGLIGENCIA

Uno de los problemas más graves de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es, sin duda alguna, el hecho de que algunos profesores tienen un bajo nivel de conocimiento de ésta materia y, sin embargo, por la Imagen Social que se tiene de sí mismos; esto es, debido a la capacidad, a la inteligencia, y a las habilidades que el profesor de matemáticas considera tener, no pondrá todo el cuidado y aplicación que debiera en su trabajo; esta situación se manifiesta en el bajo nivel de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos y de la sociedad en general.

De acuerdo con lo anterior puede decirse que la negligencia es una de las causas más comunes por las cuales el profesor de matemáticas incurre en equivocaciones, como ya se dijo en el párrafo anterior, no creerá necesario preparar clase ni asistir a cursos, o enriquecer sus conocimientos de la materia, así como tampoco tendrá interés en conocer otros aspectos generales de la educación.

d) OTRA ACTIVIDAD

Hasta ahora se han visto algunas de las causas por las cuales el profesor de matemáticas puede cometer errores, y se ha observado que si éstas que están dentro del contexto escolar provocan que los maestros se equivoquen, entonces resulta más preocupante cuando los profesores realizan otra actividad ajena a la docencia, pues ellos incurrirán con mayor frecuencia en errores, porque en general no tienen tiempo para preparar clase, para poder mejorar el método de enseñanza y, sobre todo, para adquirir un mejor conocimiento de las matemáticas.

Cuando el maestro se equivoca con mucha frecuencia durante sus exposiciones, provoca por un lado, que los alumnos atentos en un principio y tratando de entender pierdan el interés y, por otro lado, que el profesor no pueda continuar con la sesión por la desatención del grupo y porque también no halle cómo corregir su error, por no acordarse o no saber el proceso correcto para resolver alguna cuestión matemática.

Es importante señalar que las personas, en toda su vida nunca terminan de aprender y mucho menos un maestro, porque él debe de estar siempre actualizando y mejorando sus conocimientos de matemáticas, así como de didáctica, pues debe tener presente que no basta con tener toda la capacidad en la materia sino, además, debe saber cómo o de qué manera transmitir estos conocimientos.

Por todo lo antes expuesto, las causas que propician el rechazo, la deserción y el alto índice de reprobación, no solamente son originadas por los alumnos, sino también, por los profesores cuyo desarrollo académico no es el adecuado, como se ha señalado anteriormente, porque estos maestros no estimulan el interés del estudiante por matemáticas.

Cabe mencionar que hasta aquí se han hablado de las causas que propician los errores y de las posibles consecuencias como un mero intento por dar una solución a la problemática actual de matemáticas, porque desafortunadamente no se conoce la fórmula mágica que diga "*haga esto y lo otro y así los estudiantes razonarán, entenderán y aprenderán matemáticas para siempre*"; por experiencia personal, esta, meta sólo se logrará en la medida que el profesor quiera, pues es tarea de él crear las condiciones adecuadas para despertar el interés y el gusto de sus alumnos por la materia; siempre y cuando cuente con todos los recursos disponibles como son: los conocimientos básicos de didáctica, psicología, pedagogía y, principalmente, con amplios conocimientos en matemáticas, con todos estos requisitos el maestro logrará un mayor aprovechamiento del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

2.2.1.4 ERRORES DE LOS ESTUDIANTES

A diferencia de los profesores, los estudiantes incurren con mayor frecuencia y con más facilidad en equivocaciones, éstas pueden caer dentro de los errores matemáticos o de los errores no matemáticos.

A través de la experiencia docente, a nivel medio superior, se observa que gran parte de la población estudiantil incide más en errores no matemáticos, debido a que los alumnos se distraen con mucha facilidad y por cualquier motivo.

Ante tal circunstancia, la mayoría de los profesores de matemáticas opina que los alumnos cometen errores porque: "no estudian", "son flojos", "quieren que el maestro les dé todo y no se esfuerzan por aprender", "son tontos", etc. esta forma de pensar respecto al alumno es errónea, hasta cierto punto, porque en realidad algunos maestros no se preocupan porque sus alumnos mejoren, no les alientan a continuar el esfuerzo para resolver algún problema, o hacerles recordar algún concepto importante para poder continuar el proceso y llegar a la solución.

Con este trabajo se pretende que por medio de los maestros, los alumnos tengan menos errores, pues cuando esto se logre, ellos se valorarán mejor sintiéndose seguros de sí, con más ánimo y a gusto en la clase, y esperarán que todo el grupo se dé cuenta de sus logros.

Por último, cuando un alumno se equivoque el profesor debe explicarle porqué su solución es incorrecta; aun cuando sólo sea el signo cambiado debe señalarle su error, para que el estudiante vea claramente en dónde y por qué se equivocó, y no concretarse a decir simplemente: " estás mal ", porque este tipo de respuesta los hace dudar sobre su capacidad de entender y aprender matemáticas.*

---

* La maestra le dice a Enrique:

¿Por dónde sale el sol?

- ¡Por la mañana!
- ¡Estás mal!
- Entonces, ¿sale por la tarde? (7)

C A P I T U L O III

3.1 CONDUCTAS MAS USUALES DEL PROFESOR DE MATEMATICAS

En esta parte del capitulo, se verán cuáles son las conductas del profesor de matemáticas respecto a la presión que recibe de su grupo y al comportamiento que asume frente a sus errores durante la clase.

Para este caso es conveniente citar una frase dicha por Frued: "Las personas se comportan de acuerdo a la situación que se vive en ese momento". En el caso del profesor de matemáticas, las circunstancias de la materia lo inducen a tener determinada conducta.

Si por alguna razón el maestro se equivoca durante la clase, él debe adoptar una actitud más abierta ante sus errores.

Cuando el alumno detecta alguna equivocación del profesor, lo creerá menos inteligente, esta situación hará que la personalidad del profesor disminuya ante su grupo.

Si se busca la causa que ocasionó esa mala impresión del profesor cuando llega a cometer un error, se advierte que no sólo se debe a la equivocación inmediata, sino también a la imagen preconcebida del profesor; de este modo, cuando un maestro se equivoca la crítica surge como una respuesta espontánea; incluso el alumno puede llegar a sentir desconfianza y no creerá en las sucesivas exposiciones del profesor.

Por lo anterior, la actitud del profesor de matemáticas será de cierto temor al cometer alguna equivocación, porque puede ser criticado y su buena imagen se reducirá ante los demás, considerándolo menos capaz. Ante esta circunstancia, se mostrarán las posibles situaciones en donde se puede encontrar el maestro cuando se equivoca durante la clase, así como la manera adecuada de cómo poder afrontar tales situaciones, con la finalidad de que pueda salir adelante sin distorsionar su buena imagen y, sobre todo, sin presentar falsos contenidos de la materia, es decir, sin perjudicar la enseñanza de las matemáticas.

3.1.1 COMO ENFRENTA EL PROFESOR SUS ERRORES

Algunas veces las equivocaciones del profesor no se pueden evitar, y cuando esto sucede se llega a una situación conflictiva; porque hay ocasiones en la cuales no se sabe, en ese momento, qué hacer o qué decir. Difícilmente se erradicarán, de forma total, estos problemas, lo conveniente para estos casos es canalizar la situación adecuadamente, para obtener el mayor provecho en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Sería conveniente que cuando el maestro se equivoque en clase, reconociera sus errores, de esta manera no transmitira planteamientos erróneos.

De acuerdo con la apreciación de la sociedad respecto al error, se destacará uno de los aspectos positivos de éste: a saber, incitar a las personas a que reconozcan sus errores a través de frases como la siguiente:

> "Grande es el hombre que reconoce haber errado, y más grande aún el que guarda silencio cuando ha acertado". (8)

Despues de observar el ejemplo, se desprende que en la sociedad, se les atribuyen grandes cualidades a las personas que saben reconocer sus errores. Otra forma para motivar el reconocimiento del error, se da al mostar el beneficio del cual otras personas disfrutan cuando la persona equivocada acepta su falla, como se puede advertir en la siguiente frase:

> "Reconoce abiertamente tus errores incluso con alegria. Estimula a tus socios a hacer lo mismo expresando tus sentimientos. Jamás castigues..." (9)

Esto muestra, que se deben reconocer los errores y no juzgar severamente a quienes han incurrido en alguno. Por otra parte, no reconocer el error implica una falta de toma de conciencia de las acciones personales.

Hasta aquí se ha visto que en la sociedad se invita a las personas a aceptar sus errores mostrando siempre el lado positivo de esta acción y reconociendo a éstas como honestas y francas.

En cuanto a los errores escolares, si quien se equivoca es el profesor durante la clase, y no reconoce sus fallas, esta conducta repercutirá negativamente en la formación académica de los estudiantes. Al respecto José Martí dice lo siguiente:

> "A los niños no se les ha de decir más que la verdad, porque luego viven creyendo lo que les dijo el libro o el profesor, y trabajan y piensan como si eso fuera verdad, de modo que si sucede que era falso lo que les decían, ya les sale la vida equivocada, y no saben cómo son las cosas de veras, ni pueden volver a ser niños y empezar y aprenderlo todo de nuevo". (10)

De acuerdo con la cita anterior, si el maestro se equivoca es importante que reconozca y corrija su falla para evitar en sus estudiantes conocimientos erróneos.

Tomando en cuenta la apreciación que tiene la sociedad hacia el error, en la enseñanza, no reconocer las equivocaciones es negativo, porque fomenta en los alumnos actitudes dogmáticas y acartonadas acerca del conocimiento y pueden eludir, de esta forma, la duda, la búsqueda de entendimiento, la aventura al investigar etc.

Ahora, en la siguiente tabla, se muestran las variantes que se presentan cuando el profesor comete errores en la clase y si los reconoce o no ante el grupo.

	El maestro lo reconoce	*El maestro no lo reconoce*
El alumno lo nota	*El alumno lo nota y el maestro lo reconoce*	*El alumno lo nota y el maestro no lo reconoce*
El alumno no lo nota	*El alumno no lo nota y el maestro lo reconoce*	*El alumno no lo nota y el maestro no lo reconoce*

A continuación se analizarán cada una de las diferentes variantes presentes en la tabla con relación al profesor de matemáticas; pero antes, es importante señalar que si el alumno se da cuenta del error del maestro puede comentárselo a no a éste y, en ambos casos, exprese la falla del profesor a sus compañeros.

Las equivocaciones más detectables suelen ser las siguientes: un signo cambiado, alguna operación elemental incorrecta, algún número o paréntesis mal empleado, etc., en este caso es probable que el profesor no lo note, y si un alumno se lo indica lo puede corregir y ya, este tipo de errores son sencillos y no tienen mayor trascendencia para algunos profesores; sin embargo, para otros maestros es probable que causen un efecto mayor y no les sea tan fácil aceptarlos; en ocasiones hasta lleguen a molestarse cuando se los corrigo, porque piensan que su buena imagen se demerita en alguna medida.

Si el alumno no lo comenta al profesor, puede ser porque duda de su observación, porque siente miedo indicárselo o por apatía; cuando esto sucede, por lo general el alumno sigue la indicación incorrecta manejada en clase.

Si los alumnos están consicentes de que se les está transmitiendo algo incorrecto y no lo comentan, dudarán de las capacidad del maestro, y tal vez pregunten a otros profesores de la misma materia.

Cuando el estudiante se dá cuenta de la equivocación del maestro y éste no se percata de su error, este alumno ve al profesor como a una persona menos capaz, y si estos errores suceden con frecuencia, el estudiante tiende a devaluar la imagen del profesor y reafirma automáticamente la justificación de su mal aprendizaje, con las siguientes frases:

"Si él no sabe o se equivoca por qué yo no", "por eso no aprendo" o "con razón no me sale".

3.1.1.1 ANALISIS DE LAS SITUACIONES QUE ENFRENTA EL PROFESOR CUANDO SE EQUIVOCA EN CLASE

1o. El alumno lo nota y el maestro lo reconoce.

Esta situación es muy complicada para el maestro, debido a que el estudiante puede comentarlo o no a sus compañeros y de esta forma surgirán, posiblemente, críticas negativas hacia el profesor por haberse equivocado.* Sin embargo, es más honesto cuando el profesor se ha dado cuenta de su error, independientemente de la indicación de los alumnos. que lo reconozca, a pesar de saber que la crítica puede afectarle; y, para hacer frente a la situación, el maestro debe corregir de la forma más adecuada.

2o El alumno lo nota y el maestro no lo reconoce.

Si el alumno se da cuenta de la equivocación en que incurrió el profesor de matemáticas durante la exposición de algún tema, aquél puede comentarlo a sus compañeros e

---

* La palabra matemático se ha convertido en sinónimo de exactitud y de precisión. Así, se aplica al amigo que llega puntualísimo, al que encuentra una solución justa, o a la concordancia de los hechos. (11)

incluso indicárselo al profesor y tal vez el maestro no quiera reconocerlo, por no quedar en evidencia ante el grupo, pues su capacidad se verá reducida y la personalidad que proyecta se empañará, otras veces simplemente quiera tener la razón; estos motivos se presentan con frecuencia en el interior del profesor y le crean conflictos, pues si éste reconoce su error su imagen disminuirá y si no lo acepta probablemente caiga en una contradicción más adelante.

Por lo tanto, si el maestro no reconoce su error, los alumnos interpretarán esto como una falta de capacidad del profesor y se deteriorará su imagen ante ellos.

3o. El alumno lo nota y el maestro lo reconoce.

Cuando el maestro detecta su error y el alumno no, puede decirse que esta situación es más ventajosa para el maestro, porque al no darse cuenta el alumno de la falla, puede corregirla sin poner en entredicho su personalidad como profesor de matemáticas. Como el alumno no ha detectado el error, el profesor, al reparar en la falla, debe tener audacia para utilizarlo como medio didáctico, señalando paso a paso el procedimiento incorrecto para que el estudiante no cometa la misma equivocación, enfrentado así la situación.

4o. El alumno no lo nota y el maestro no lo reconoce.

Si el maestro no reconoce su error, puede ser porque quizá no se dio cuenta de ello y, por tal motivo, continúe con el procedimiento erróneo; pero cuando el profesor está consciente de que se ha equivocado y no lo acepta, aún sabiendo que sus estudiantes no se han percatado de ello, entonces estará transmitiendo información incorrecta que repercutirá negativamente en el aprendizaje de sus alumnos, pues conocerán procesos falsos; pero si más adelante ellos se dan cuenta de esta situación, la excelente personalidad del profesor se verá afectada.

Las diferentes situaciones que ha experimentado el profesor de matemáticas cuando se equivoca en clase, han sido tomadas de la experiencia docente no sólo personal sino también de otros profesores de la misma área, por lo cual se consideran comunes e importantes; por lo tanto, se espera que el lector adopte la actitud que crea más conveniente, sin olvidar que es más honesto y fundamental aceptar las equivocaciones, como se vio en el punto 3.1.1 de éste capítulo.

Por último, cuando se canalizan positivamente los errores escolares, así como las diferentes situaciones que enfrenta el maestro cuando se equivoca, y éste acepte su error, entonces se dará un gran paso en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

3.2 PLANEAR EQUIVOCACIONES PARA LOGRAR CUBRIR ALGUN OBJETIVO DE APRENDIZAJE

En el transcurso de este trabajo se ha visto en el capitulo II, en los puntos 2.1.1 y 2.1.2, que de los errores también se aprende, siempre y cuando estos se manejen de forma adecuada. Entonces ¿por qué no planear equivocaciones para lograr mayor aprendizaje? ¿Qué tan benéfico resultará para la enseñanza de las matemáticas?

Las respuestas a estas preguntas se darán a continuación, y también se mostrará de que forma se puede planear una equivocación, todo esto con la finalidad de lograr mayor aprendizaje.

Cuando un profesor ya ha expuesto la teoria sobre algún tema y se han resuelto varios ejercicios, en donde se abarcan todos los casos posibles, de tal forma que no quede duda alguna, entonces ha llegado el momento para que el maestro planee sus errores y los del grupo, porque el alumno, al tener claro el procedimiento adecuado, detectará con mayor facilidad el error premeditado.

Ahora bien planear una equivocación no es algo simple y sencillo, pues el error no debe ser fácilmente descubierto por los alumnos, (por ejemplo: un signo o un número cambiado o alguna operación aritmética incorrecta) porque de ser asi se corrige imnediatamente, y entonces se pierde el propósito didáctico del error.

Algunas consideraciones para la planeación del error pueden ser:

1.- Un error frecuente en los alumnos.

2.- Un error detectable de manera natural:

a) Natural dentro de la forma de trabajo.

b) Que los alumnos detecten la causa y el error.

Por ejemplo una equivocación premeditada puede ser la siguiente:

En el curso de CADI II, con alumnos de 8o. semestre, al ver integrales indefinidas, se expuso en el pizarrón la siguiente, en donde se tiene el error premeditado.

$$\int \frac{x^3(x-1)^2}{x^6-2x^5-x^4}\,dx$$

Los alumnos por su parte debian ir siguiendo el proceso paso a paso hasta la solución para un mayor entendimiento.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3(x-1)^2}{x^6-2x^5-x^4}\,dx = \int \frac{x^3(x-1)^2}{x^4(x^2-2x-1)}\,dx$

se obtuvo un factor común en el denominador

b) Como $(x^2-2x-1) = (x-1)^2$, entonces sustituyendo queda así:

$$\int \frac{x^3(x-1)^2}{x^4(x-1)^2}\, dx = \int \frac{x^3}{x^4}\, dx$$

c) $\int \frac{1}{x}\, dx$

d) $\int \frac{x^3(x-1)^2}{x^6 - 2x^5 - x^4}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$

Se puede observar que este ejercicio esta resuelto con pasos incorrectos a partir del inciso b. pues la factorización de $(x^2 - 2x - 1)$ no es igual a $(x - 1)^2$ por lo cual el resultado es erróneo.

Los alumnos, al seguir este proceso y ver la respuesta, no notaron el error; por tal motivo se les dijo que el resultado era incorrecto y se les mostró la causa. Con este ejemplo se logró despertar en los estudiantes el interés y prestaron mayor atención a la exposición y solución, paso por paso, de los ejercicios.

Sin embargo, esto no quedo ahí, también se les indicó que ellos podian comprobar si un resultado era o no correcto, como en este caso, para ello debian aplicar la comprobación, es decir, ver aquí que la derivada de $\ln x$ no es:

$$\frac{x^3(x-1)^2}{x^6 - 2x^5 - x^4}$$

Si aún así los alumnos tienen dudas, éstas se deben despejar resolviendo correctamente éste y algún otro ejercicio, con el fin de dejar bien entendido el procedimiento.

El objetivo de llevar a cabo este ejemplo, es propiciar en el alumno mayor interés por la clase, así como buscarle una moraleja o encontrar lo positivo y constructivo de los ejercicios empleados; la moraleja en este ejemplo puede ser: "es importante realizar la comprobación"; todo ello conducirá a un mejor aprendizaje.

3.2.1 PLANEAR UNA EQUIVOCACION EN EL ALUMNO

Aquí lo que se pretende, es llevar al alumno a cometer una equivocación, esto puede hacerse de la siguiente forma:

Si la teoría y los ejercicios quedaron claros para los alumnos, ahora se debe pasar a alguno de ellos a resolver un ejercicio en el pizarrón, el profesor guiará incorrectamente el procedimiento, para obtener error en el resultado.

Si el grupo siguió esto con atención y protesta, porque han notado el error en el procedimiento, esta situación se canalizará como ya se ha descrito, si por el contrario los alumnos no se percatan, será necesario emplear alguna otra técnica de enseñanza para lograr mejores resultados.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

De acuerdo al contenido del trabajo y viendo la necesidad de canalizar adecuadamente las situaciones que se presentan cuando se cometen errores, a continuación se proponen algunas estrategias para que el profesor de matemáticas las afronte positivamente.

Es importante aclarar que éstas sugerencias servirán, principalmente, a los profesores interesados en el aprendizaje de los estudiantes, y resultarán menos prácticas para aquellos cuyo interés sólo se concentra en conservar su buena imagen; por tal motivo, los primeros las utilizarán con más frecuencia y generarán recursos de acuerdo a cada situación; es decir, si el profesor está involucrado en una dinámica de enseñanza agudizará su habilidad en el manejo constructivo de los errores en la medida que:

1o. Está experimentando, al igual que sus alumnos, el gusto por entender, lo cual lo acerca más a las vivencias de los estudiantes.

2o. Se dá cuenta de cómo el error puede ser fundamental al proceso de aprendizaje, pues en algunas ocasiones se aprende más de los errores que de los aciertos, por lo cual el error para el profesor no es reprobable y tendrá una visión más positiva del mismo.

Un profesor al experimentar estas satisfacciones internas tendrá más claro que uno de los propósitos fundamentales del entendimiento es ese gusto y gozo por matemáticas y, por lo tanto, esto le dará más facilidad para que se los transmita a sus alumnos y a la vez lo experimente con ellos, esto va más allá del interés de conservar su buena imagen, pues para éste es más importante que sus alumnos aprendan.

Por lo anterior, éstas sugerencias serán aplicadas cuando el interés del profesor por el aprendizaje de los alumnos esté primero.

1.- Si el docente se equivoca en algún ejercicio después de exponer la teoría, e incluso después de haber resuelto ejercicos, y los alumnos no lo notan, entonces no le estan prestando la atención debida, porque la clase está "aburrida" o sin importancia para ellos, al observar esto, el profesor debe modificar el ritmo de la clase, ya sea dando un pequeño descanso, comentando un suceso no relacionado con la clase, alguna anécdota, etc.; de tal manera que se produzca y mantenga un vivo interés a lo largo del tiempo que falta para terminar la sesión.

2.- Si el maestro se equivoca debe reconocer el error, a pesar de saber que al hacerlo puede perder la imagen que tiene ante el alumno, exponiéndose a que éste dude de él en lo sucesivo. Para que esto no suceda, la corrección debe ser lo más clara posible y el profesor no debe asumir una actitud de impotencia ni debe ser imperante en la respuesta, más bien, la explicación debe ser un convencimiento firme basado en la experiencia y no en la autoridad del profesor.

3.- Al iniciarse un curso de matemáticas, se recomienda que el maestro hable con sus alumnos (por la imagen social que se tiene de la materia y del profesor de matemáticas), éste debe hacerles ver, que cada vez que imparte un curso, él también aprende algo nuevo, pues ser profesor, no implica que todo lo sepa o que nunca se equivoque; por tal motivo, tanto el profesor como el alumno, deben aceptar abiertamente sus errores, siempre y cuando esto no suceda con frecuencia.

4.- Se debe dar confianza a los alumnos para destruir la barrera que dificulta el acercamiento entre estos y el profesor, es decir, mientras más accesible sea el profesor (sin irse a los extremos), los alumnos sentirán mayor seguridad y externarán con más facilidad sus dudas.

5.- Cuando el alumno detecte el error del profesor y se lo indique, el maestro puede manejar la situación mencionando que lo hizo con el fin de ver el grado de interés y atención que hay en grupo, y a la vez, estimularlos cualitativa o cuantitativamente (felicitación o calificación).

6.- Si los errores se canalizan adecuadamente no se debe sentir miedo al cometerlos y a su vez inconscientemente éstos disminuirán. Para esto, el profesor debe de mantener el interés del grupo brindando una exposición clara y comprensible.

SUGERENCIAS DE ALUMNOS A PROFESORES

Se realizó una encuesta, con los alumnos de 5o. y 6o. semestre de bachillerato, acerca de los errores de sus profesores de matemáticas. Los resultados fueron los siguientes:

Los estudiantes comentaron que la mayor parte de los maestros de matemáticas que les impartieron clase desde primer semestre, se molestaban cuando se les corregía alguno de sus errores, pues decían que estaba bien y que ese era el resultado correcto.

Se les pidió, por tanto, algunas sugerencias para los profesores acerca de qué hacer cuando se equivoquen durante la clase, y expusieron las siguientes:

1.- El maestro debe hablar con el grupo al iniciar el semestre, acerca de los de los errores, es decir, comentar que pueden equivocarse como los alumnos; debe entablar una conversación de tal manera que, en lo sucesivo, los alumnos no sientan miedo de indicarle sus errores.

2.- Para que el maestro reduzca el número de errores, debe preparar con anterioridad sus clases y ejercicios, pues en algunas ocasiones, no puede resolver éstos en el momento y sólo los confunde.

3.- Cuando el profesor se equivoque, no debe limitarse simplemente a decir "esta mal" y borrar el pizarrón, sino que indique cuál es el error y por qué se equivocó, para entender mejor.

4.- Que el profesor acepte sus errores.

Para que éstas sugerencias tengan efecto, el profesor las llevará a cabo según sea el caso, ya que él es quien organiza, dirige o guía al grupo dentro del salón de clase.

Si se manejan de esta forma las equivocaciones, no se perderá el hilo conductor de la clase, sino se obtendrá el mayor provecho y así se avanzará con los objetivos del programa.

Por lo anterior se deduce que equivocarse en clase no hará que "el mundo se acabe", sino al contrario, empieza a surgir porque ya se sabe como salir adelante cuando se presentan estas situaciones. Además ya se sabe y se debe tener siempre presente que el error tiene aspectos positivos, que conducirán a obtener mejores resultados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

NOTAS

[1] Morris Kline. El fracaso de la matemática moderna, siglo XXI, 12a. ed., México, cit. en "Reseñas bibliográficas". Educación matemática, (Méx., D.F.) 1: abril, 1989, núm. 1, p. 30.

[2] Morris Kline. El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar, siglo XXI editores, 4a. ed., México, 1974, p. 183.

[3] Ib.

[4] Ramón García; Pelayo y Gross. Pequeño Larousse ilustrado 1991, Ediciones Larousse, México 1991, p. 416.

[5] Diccionario Porrúa de la lengua española p.

[6] Diccionario enciclopédico Universo, Fernández Editores, México, 1988. p. 398.

[7] Quino, Colección Cuadernos de Mafalda, Ed. Nueva Imagen. No. 3, p. 25

[8] *Selecciones del Reader's Digest.* (México, D.F.), agosto, 1983.

[9] *Ib.*

[10] *Ib.*

[11] Educación matemática, (México, D.F.), abril 1991, p.37.

BIBLIOGRAFIA

Adda, Josette. "L' incomprehension en mathématiques et les malentendus" en <u>Educational studies in mathematics</u>, (Boston, U.S.A.), 6: Marzo 1975-1976, pp. 311-325.

——— "Difficultés Liées A' la presentation des questions mathématiques" en <u>Educational studios in mathematics</u>, (Boston, U.S.A.), 7: 1976, 321. pp.

Avila S., Alicia, Eduardo Mancera M. "Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remediar los errores" en <u>Educación matemática</u>, (Méx., D.F.), 1: abril, 1989, núm.1, 48 pp.

Clements, M.A. "Analyzing children's errors on written mathematical tasks" en <u>Educational studies in mathematics</u> (Boston, U.S.A.), 14: 1980, núm. 11. pp. 1-21.

González, M D., Guillermina Waldegg. "Reseñas bibliográficas", tomado de <u>Educación matemática</u>.

Kline, Morris. <u>El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar</u>, siglo XXI editores 4a. edición, México, D.F., 1979, 195 pp.