3
20
00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DIMENSION DE LONGITUD FINITA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

CARLOS JOSE ENRIQUE
SIGNORET POILLON

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D.F. 1993

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la teoría de anillos conmutativos el concepto de *dimensión de Krull* juega un papel muy importante; ésto se debe principalmente a su estrecha relación con la geometría algebraica donde mide el tamaño de las variedades algebráicas en forma natural de manera que en casos especiales coincide con los conceptos usuales de dimensión.

En 1967 Gabriel y Rentschler [12] introducen la noción de *desviación* para un conjunto parcialmente ordenado. Cuando esta desviación se aplica a la retícula de los submódulos de un módulo dado se obtiene una generalización de la dimensión de Krull para anillos no conmutativos; la referencia clásica de esta generalización es la monografía de Gordon-Robson [4].

Desde el punto de vista de teoría de anillos, la desviación de Gabriel-Rentschler es particularmente interesante pues por su caracter reticular es susceptible de dualización y generalizaciones. El primero en incursionar en esta dirección es Lemonnier [6] cuando en 1972 introduce el concepto de *codesviación* para un conjunto parcialmente ordenado. Esta codesviación se define como la desviación del conjunto ordenado con el orden opuesto (la retícula dual). Cuando esta codesviación es aplicada a la retícula de los submódulos de un módulo dado se obtiene una dualización de la dimensión de Krull, la *dimensión dual de Krull*.

La dimensión de Krull mide cuánto se aparta el módulo en cuestión de ser artiniano y la dimensión dual de Krull mide cuánto se aparta éste de ser neteriano. Precisamos estas consideraciones: sea M un R-módulo fijo y sea α un ordinal; la dimensión de Krull de M, denotada por KdM, está dada inductivamente de la siguiente manera:

i) $KdM = -1$ si $M = 0$.

ii) $KdM = \alpha$ si $KdM \nless \alpha$ y para toda cadena descendente

$$M = M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \ldots$$

de submódulos de M, existe un índice r tal que si $n \geq r$, entonces $Kd(M_n/M_{n+1}) < \alpha$.

Así es claro que $KdM = 0$ si y sólo si M es un módulo artiniano. Naturalmente, la definición de la dimensión dual de Krull, denotada por dKdM, se obtiene considerando cadenas ascendentes en vez de descendentes; así también resulta claro que $dKdM = 0$ si y sólo si M es un módulo neteriano.

Más aún, los módulos con Kd son precisamente aquéllos que se vuelven artinianos en la categoría cociente de R-mod con cierta subcategoría; por ejemplo, si $\mathbf{A}_1$ denota la clase de los R-módulos con Kd menor que 1 (es decir de los módulos artinianos), entonces $KdM = 1$ si y sólo si M es artiniano en la categoría cociente $R\text{-mod}/\mathbf{A}_1$. Nuevamente, consideraciones análogas aplican a la dimensión dual de Krull.

Por otro lado, un módulo tiene longitud finita si y sólo si es simultáneamente artiniano y neteriano, es decir, si pertenece a la clase $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{N}_1$ ($\mathbf{N}_1$ es la clase de los R-módulos con dKd menor que 1, es decir, de los módulos neterianos). Estos hechos motivan el estudio de las relaciones entre la Kd y la dKd de un módulo. En este trabajo se introduce un tercer concepto de dimensión, la *dimensión de longitud finita*, abreviada por fld. Ésta mide cuánto se aparta el módulo en cuestión de tener longitud finita, de manera que un módulo es de longitud finita si y sólo si tiene fld nula. Dicho en otros términos tenemos que, si $\mathbf{L}_1$ denota a la clase de los R-módulos con fld menor que 1, entonces $\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{N}_1$.

La dimensión de longitud finita también tiene sustento desde el punto de vista reticular. En 1985 Pouzet y Zaguia [11] dan una generalización a la desviación de Gabriel-Rentschler introduciendo el concepto de *Γ-desviación*. Ésta mide cuánto se aparta un conjunto parcialmente ordenado dado de tener subconjuntos con un tipo de orden representado en un conjunto fijo Γ. Si $\Gamma = \{\omega^*\}$, se obtiene la desviación; si $\Gamma = \{\omega\}$, se obtiene la codesviación. Aplicada la $\{\omega^*,\omega\}$-desviación a la retícula de los submódulos de un módulo dado, se obtiene la fld del módulo.

El capítulo 1 expone los preliminares sobre conjuntos parcialmente ordenados, categorías de Serre y categorías cociente necesarios para el desarrollo de la tesis. En el capítulo 2 se exponen formalmente los conceptos de dimensión mencionados arriba y se presenta el modelo que se sigue en la exposición de la dimensión de longitud finita. Se presenta también la Γ-desviación de Pouzet-Zaguia. Algunos resultados obtenidos en esta tesis pueden ser obtenidos como consecuencia del trabajo de Pouzet-Zaguia pero conservamos nuestras pruebas pues son más detalladas y más modulares. Destaca en este sentido el hecho de que para que un módulo tenga las tres dimensiones, es suficiente que tenga cualquiera de ellas. Incluimos en el capítulo 2 la prueba del resultado general y en el capítulo 3 nuestra prueba particular.

Para estudiar las relaciones entre estas tres dimensiones es necesario introducir una nueva operación entre subcategorías de Serre, la llamada *operación dos puntos*. Esto se lleva a cabo en la segunda sección del capítulo 3, donde se estudian diversas relaciones en el caso finito.

Una herramienta muy importante para el estudio de la dimensión de Krull es el concepto de *módulo crítico*. Para la dimensión de longitud finita introducimos el correspondiente concepto en la tercera sección del capítulo 3. Estos módulos críticos son precisamente los módulos que se vuelven simples en cierta categoría cociente de R-mod. Aquí se ve la profunda analogía que existe entre los módulos con fld y los módulos de longitud finita. Introducimos la noción de *serie de composición fl-crítica* y probamos que todo módulo con fld posee series de composición fl-críticas, lo cual es una propiedad de la fld no compartida ni por la dimensión de Krull ni por la dimensión dual de Krull. Además probamos un teorema del tipo de Jordan-Hölder-Dedekind en cuanto al caracter invariante del número de términos con cociente α-fl-crítico en las series de composición fl-críticas; este teorema nos permite definir la *longitud fl-crítica* de los módulos con dimensión de Krull.

A lo largo de todo este trabajo R denota un anillo asociativo con unidad y R-mod la categoría de los R-módulos izquierdos unitarios. Con $N \leq M$ denotamos que N es un R-submódulo izquierdo de M, mientras que $M < N$ denota que N es un R-submódulo propio de M.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al Dr. Francisco Raggi

C., no sólo por haberme dirigido en este trabajo de tesis, sino por su decisiva influencia en mi carrera, así como por sus pacientes y acertadas indicaciones. También deseo expresar mi profundo agradecimiento al Dr. José Ríos M. por su inagotable buena disposición, por su invaluable ayuda y sus importantes sugerencias. Finalmente quiero manifestar mi agradecimiento a todos mis amigos y compañeros que me ayudaron y apoyaron durante la realización de esta tesis.

Noviembre, 1992.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo está dedicado a presentar algunos conceptos preliminares. No se pretende tratar los temas en forma exhaustiva, sino al contrario, se intenta exponer en forma clara el mínimo de material necesario así como introducir la notación y terminología que se usan a lo largo de toda la tesis.

La sección 1.1 está dedicada a los *conjuntos parcialmente ordenados* así como a las *retículas*. Nos interesan particularmente las *condiciones de cadena* en retículas *modulares*.

En la sección 1.2 presentamos las *subcategorías de Serre*, concepto fundamental en este trabajo. Este tipo de categorías nos permiten, en la sección 1.3, dar la definición de la *categoría cociente*, noción introducida por Grothendieck en 1957. En estas dos secciones seguimos la exposición clásica de Faith [3].

1.1 CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y RETÍCULAS.

1.1.1 DEFINICIÓN. Sea P un conjunto; una relación $\leq$ en P es un *orden parcial en* P si es reflexiva, transitiva y antisimétrica, es decir, si cumple con

i) Si $a \in P$, entonces $a \leq a$,

ii) Para a, b y $c \in P$, $a \leq b$ y $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$,

iii) Para a y $b \in P$, $a \leq b$ y $b \leq a \Longrightarrow a = b$.

Una pareja $(P,\leq)$, donde $\leq$ es un orden parcial en el conjunto P, es llamado un *conjunto parcialmente ordenado* (c.p.o. por brevedad). Se acostumbra referirse a P como conjunto parcialmente ordenado cuando el orden parcial $\leq$ está dado implícitamente.

Para a y $b \in P$, escribimos $a < b$ si $a \leq b$ pero $a \neq b$.

Un c.p.o. es una *cadena* si la relación $\leq$ en P es un *orden total*, es decir, si cumple con

iv) Si a y $b \in P$, entonces $a \leq b$ ó $b \leq a$.

Sea P un c.p.o. y sean $\phi \neq X \subseteq P$ y $a \in P$; entonces

1) a es el *elemento mayor* de X si $a \in X$ y $x \leq a \ \forall \ x \in X$,

2) a es un *elemento máximo* de X si $a \in X$ y, para $x \in X$, $a \leq x \Longrightarrow x = a$,

3) a es el *elemento menor* de X si $a \in X$ y $a \leq x \ \forall \ x \in X$,

4) a es un *elemento mínimo* de X si $a \in X$ y, para $x \in X$, $x \leq a \Longrightarrow x = a$,

5) a es una *cota superior* de X si $x \leq a \ \forall \ x \in X$,

6) a es una *cota inferior* de X si $a \leq x \ \forall \ x \in X$,

7) a es la *unión*, ó el *supremo* de X, si es el elemento menor del conjunto de las cotas superiores de X,

8) a es la *intersección*, ó el *ínfimo* de X, si es el elemento mayor del conjunto de las cotas inferiores de X.

Observamos que elementos mayores, menores, uniones e intersecciones no necesariamente existen para todo subconjunto X de P, pero que cuando existen, son únicos. Por el contrario, elementos máximos y mínimos pueden no ser únicos. En caso de existir, denotamos a la unión e intersección de X por

$$\vee X \quad e \quad \wedge X,$$

ó bien

$$\bigvee_{x\in X} x \quad e \quad \bigwedge_{x\in X} x\ ,$$

respectivamente. En particular, si a y b $\in$ P, denotamos con $a\vee b = \vee\{a,\ b\}$ y $a\wedge b = \wedge\{a,\ b\}$, cuando existen. También denotamos con $1 = \vee P$ y $0 = \wedge P$, cuando existen.

Un c.p.o. P es una *retícula* si cualesquiera dos elementos a y b de P tienen unión e intersección, es decir, si para cualesquiera a y b $\in$ P, existen $a\vee b$ y $a\wedge b$. Una retícula P es *completa* si para todo $\phi \neq X \subseteq P$, existen $\vee X$ e $\wedge X$.

Si P es una retícula y $Q \subseteq P$, decimos que Q es una *subretícula* de P si se cumple que a y b $\in Q \Rightarrow a\vee b$ y $a\wedge b \in Q$.

1.1.2 EJEMPLOS.

1) Sea A un conjunto y sea $P = \mathcal{P}(A)$, el conjunto potencia de A; decimos que, para a y b $\in$ P, $a \preceq b \Leftrightarrow a \subseteq b$. Este c.p.o. es una retícula completa pues si $B \subseteq P$, $\vee B = \bigcup_{b\in B} b$ y $\wedge B = \bigcap_{b\in B} b$ (de aquí los nombres de

unión e intersección).

2) Sea A un conjunto y sea $P = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid B \text{ es finito}\}$ ordenado parcialmente con la inclusión como en el ejemplo 1); P es una retícula pues, para a y b $\in$ P, $a \vee b = a \cup b$ y $a \wedge b = a \cap b$. Sin embargo P no es completa si A no es finito.

3) Sea $P = \mathbb{N}$; si a y b $\in$ P, decimos $a \leq b \leftrightarrow a|b$. P es una retícula pues $a \vee b = (a,b)$, el máximo común divisor de a y b, y $a \wedge b = [a,b]$, el mínimo común múltiplo de a y b.

4) Si R es un anillo y M $\in$ R-mod, sea

$$\mathcal{L}(M) = \{N \mid N \text{ es R-submódulo de } M\}$$

y, para N y L $\in \mathcal{L}(M)$, $N \leq L \leftrightarrow N \subseteq L$. $\mathcal{L}(M)$ es una retícula pues $N \wedge L = N \cap L$ y $N \vee L = N + L$.

5) Sea $(P,\leq)$ una retícula. Invertimos el orden parcial de P, es decir definimos, para a y b $\in$ P, $a \ll b$ si $b \leq a$; entonces $(P,\ll)$ es una retícula en donde unión e intersección han sido intercambiadas. Esta nueva retícula se llama la *retícula opuesta* a P y se denota por P^{op}.

6) Sea P una retícula, a y b $\in$ P; el *intervalo* $[a,b] = \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$ es una subretícula de P.

La siguiente proposición, de fácil prueba, será utilizada más adelante.

<u>1.1.3</u> <u>PROPOSICIÓN</u>. Sea P una retícula; entonces son equivalentes:

a) P es completa.

b) Para todo $X \subseteq P$, existe $\vee X$.

c) Para todo $X \subseteq P$, existe $\wedge X$.

Más aún, en ese caso

$$\vee X = \wedge\{z \in P \mid z \geq x \ \forall\ x \in X\} \text{ y}$$
$$\wedge X = \vee\{z \in P \mid z \leq x \ \forall\ x \in X\}.$$

<u>1.1.4</u> <u>DEFINICIÓN</u>. Sean P y Q c.p.o.; una función α: P $\longrightarrow$ Q es un *morfismo de c.p.o.* ó una *función creciente* si

$$a \leq b \Rightarrow \alpha(a) \leq \alpha(b)$$

para todo a y b $\in$ P.

Sean P y Q retículas; una función α: P $\longrightarrow$ Q es un *morfismo de retículas* si

$$\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b) \text{ y } \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$$

para todo a y b $\in$ P.

Un *isomorfismo de retículas* es un morfismo de retículas biyectivo.

Es fácil verificar la siguiente:

<u>1.1.5</u> <u>PROPOSICIÓN</u>. Si P y Q son retículas, entonces toda función creciente P $\longrightarrow$ Q es un morfismo de retículas.

Si P es una retícula, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ en P son conmutativas y asociativas. Más aún, tenemos que, para a $\leq$ b en P, se cumple

$$(c \wedge b) \vee a \leq (c \vee a) \wedge b$$

para toda c $\in$ P. P recibe un nombre especial si se cumple la desigualdad contraria.

1.1.6 DEFINICIÓN. Sea P una retícula. Decimos que P es *modular* si

$$(c \wedge b) \vee a = (c \vee a) \wedge b$$

para cualesquiera a, b y c $\in$ P con $a \leq b$.

1.1.7 EJEMPLO. La retícula $\mathcal{L}(M)$ de los submódulos del R-módulo M (ejemplo 1.1.2.4) es una retícula modular (de aquí el nombre de *modular*).

1.1.8 DEFINICIÓN. Sea P una retícula; decimos que P es *neteriana* (resp. *artiniana*) si toda cadena ascendente (resp. descendente) en P

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$$

$$(\text{resp. } b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots)$$

se estaciona, es decir, existe un número natural *r* tal que $a_i = a_{i+1}$ (resp. $b_i = b_{i+1}$) para toda $i \geq r$.

Sea P una retícula modular; dos intervalos I y J son *similares* si existen a y b $\in$ P tales que $I = [a \wedge b, a]$ y $J = [b, a \vee b]$ ó viceversa. Dos intervalos I y J son *proyectivos* si existen intervalos $I = I_0, I_1, \ldots, I_n = J$ en P tales que I_{j-1} e I_j son similares para todo $1 \leq j \leq n$.

Dos cadenas finitas en P

(1) $$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n = b \text{ y}$$

(2) $$a = b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_m = b$$

son *equivalentes* si $n = m$ y existe una permutación π de $\{1,2,\ldots,n\}$ tal que los intervalos $[a_{i-1}, a_i]$ y $[b_{\pi(i)-1}, b_{\pi(i)}]$ son proyectivos para toda $1 \leq i \leq n$.

Un *refinamiento* de una cadena como (1) es una cadena obtenida de

(i) introduciendo un número finito de términos nuevos.

Un intervalo $[a,b]$ en P es *simple* si contiene sólo a y b, es decir si $[a,b] = \{a,b\}$.

Si $a \leq b$ en P, una *serie de composición* para $[a,b]$ es una cadena

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$$

tal que el intervalo $[a_{i-1},a_i]$ es simple para todo $1 \leq i \leq m$.

Finalmente, una retícula modular P con 0 y 1 es una *retícula de longitud finita* si existe una serie de composición para $[0,1] = P$.

1.1.9 EJEMPLO. Un R-módulo M es artiniano (resp. neteriano, resp. de longitud finita) si la retícula $\mathcal{L}(M)$ de los R-submódulos de M es artiniana (resp. neteriana, resp. de longitud finita).

1.1.10 PROPOSICIÓN. Sean P una retícula modular; para a y $b \in P$, los intervalos $[a\wedge b,a]$ y $[b,a\vee b]$ son isomorfos.

Demostración:

Sean f: $[a\wedge b,a] \longrightarrow [b,a\vee b]$ dada por $f(x) = x\vee b$, y g: $[b,a\vee b] \longrightarrow [a\wedge b,a]$ dada por $g(y) = y\wedge a$. Es fácil probar que f y g son morfismos de retículas y que f y g son inversas una de la otra. ∎

1.1.11 COROLARIO. Dos intervalos proyectivos en una retícula modular son isomorfos.

1.1.12 PROPOSICIÓN. Sea P una retícula. Entonces P es neteriana (resp. artiniano) si y sólo si todo subconjunto no vacío de P tiene elemento máximo (resp. mínimo).

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $\phi \neq A \subseteq P$ y supongamos A no tiene elementos máximos; sea $a_1 \in A$ y como a_1 no es máximo existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 < a_2$. Como a_2 tampoco es máximo, podemos continuar este proceso obteniendo una cadena en A

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$$

que no se estaciona, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Clara.

Los enunciados duales pueden ser demostrados considerando la retícula P^{op}. ∎

1.1.13 PROPOSICIÓN. Sean P una retícula modular y $a \in P$. Consideramos las dos subretículas de P dadas por $P' = \{x \in P \mid x \leq a\}$ y $P'' = \{x \in P \mid a \leq x\}$. Entonces P es neteriana (resp. artiniana) $\Leftrightarrow$ P' y P'' lo son.

Demostración:

$\Rightarrow$) Clara.

$\Leftarrow$) Sea

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$$

una cadena ascendente en P. Consideramos las cadenas ascendentes en P' y P'' respectivamente

$$b_1 \wedge a \leq b_2 \wedge a \leq b_3 \wedge a \leq \dots \quad y$$

$$b_1 \vee a \leq b_2 \vee a \leq b_3 \vee a \leq \dots.$$

Por hipótesis existen r y $s \in \mathbb{N}$ tales que $b_r \wedge a = b_{r+1} \wedge a = b_{r+2} \wedge a = \dots$

y $b_s \vee a = b_{s+1} \vee a = b_{s+2} \vee a = \ldots$. Sean $n = \text{máx}\{r,s\}$, $u = b_n \wedge a = b_{n+1} \wedge a$ y $v = b_n \vee a = b_{n+1} \vee a$; obtenemos $u \leq b_n \leq b_{n+1} \leq v$ y por lo tanto $b_{n+1} = b_{n+1} \wedge v = b_{n+1} \wedge (b_n \vee a) = b_n \vee (b_{n+1} \wedge a) = b_n \vee a = b_n$. De esta forma tenemos que $b_n = b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots$, es decir, P es neteriana.

El enunciado dual puede ser demostrado considerando la retícula P^{op}. ▮

<u>1.1.14</u> <u>PROPOSICIÓN</u>. Si P es una retícula neteriana (resp. artiniana) entonces P tiene 1 (resp. 0).

Demostración:

Por la proposición 1.1.12, P tiene un elemento máximo a. Sea $x \in P$; como $a \leq a \vee x$, tenemos que $a = a \vee x$ y por lo tanto $x \leq a$, es decir, a es el elemento mayor de P.

El enunciado dual se puede probar considerando la retícula opuesta P^{op}. ▮

<u>1.1.15</u> <u>*COROLARIO*</u>. Sea P una retícula modular con 0 y 1. Entonces P es de longitud finita $\Leftrightarrow$ P es neteriana y artiniana.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1$$

una serie de composición para P. Como $[a_{i-1}, a_i]$ es simple para cada $1 \leq i \leq n$, entonces es neteriana y artiniana para cada $1 \leq i \leq n$; por la proposición 1.1.13, también lo es $P = [0,1]$.

$\Leftarrow$) Si P es artiniana, existe un $a_1 \in P$ mínimo con la propiedad de ser no cero. Por la misma razón existe un $a_2 \in P$ mínimo tal que $a_1 < a_2$. Continuando con este proceso obtenemos una cadena en P

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots.$$

Como P es neteriana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \dots$. La construcción de la cadena implica que $a_m = 1$ y que los intervalos $[a_{i-1},a_i]$ son simples para toda $1 \le i \le m$, es decir, que ésta es una serie de composición para P. ▮

1.1.16 TEOREMA (Schreier). Sea P una retícula modular y sean $a \le b$ en P. Entonces cualquier pareja de cadenas finitas en P

(1) $$a = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m = b \text{ y}$$

(2) $$a = b_0 \le b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n = b$$

tienen refinamientos equivalentes.

Demostración:

Sean $a_{i,j} = (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-1}$ y $b_{j,i} = (b_j \wedge a_i) \vee a_{i-1}$ para $i = 1,2,\dots,m$ y $j = 1,2,\dots,n$. Sean $x = a_i \wedge b_j$ y $y = a_{i-1,j}$: entonces:

$x \vee y = (a_i \wedge b_j) \vee a_{i-1,j} = (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-1} \vee (a_{i-1} \wedge b_j) =$

$= ((a_i \wedge b_j) \vee (a_{i-1} \vee b_j)) \vee b_{j-1} = (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-1} = a_{i,j}$

(pues $a_{i-1} \wedge b_j \le a_i \wedge b_j$). Tenemos también que:

$y \wedge x = (a_i \wedge b_j) \wedge a_{i-1,j} = (a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1}) \wedge b_j = (a_{i-1} \vee b_{j-1}) \wedge (a_i \wedge b_j)$.

Por lo tanto $[a_{i-1,j}, a_{i,j}] = [y, x \vee y]$ y $[x \wedge y, x] =$ $= [(a_{i-1} \vee b_{j-1}) \wedge (a_i \wedge b_j), a_i \wedge b_j]$. Sean $x' = b_j \wedge a_i$ y $y' = b_{j-1,i}$; entonces, intercambiando i y j, obtenemos $[b_{j-1,i}, b_{j,i}] = [y', x' \vee y']$ y $[x' \wedge y', x'] = [(a_{i-1} \vee b_{j-1}) \wedge (a_i \wedge b_j), a_i \wedge b_j]$. De aquí se sigue que

$[a_{i-1,j}, a_{i,j}]$ y $[b_{j-1,i}, b_{j,i}]$ son proyectivos. Las cadenas (1) y (2) tienen los refinamientos

(3) $\quad a = a_{0,1} \leq a_{1,1} \leq a_{2,1} \leq \ldots \leq a_{m,1} \leq a_{1,2} \leq \ldots \leq a_{m,n} = b$ y

(4) $\quad a = b_{0,1} \leq b_{1,1} \leq b_{2,1} \leq \ldots \leq b_{n,1} \leq b_{1,2} \leq \ldots \leq b_{n,m} = b$.

Como $a_i = b_{n,i}$ y $b_j = a_{m,j}$, (4) es un refinamiento de (1), (3) es un refinamiento de (2) y (3) y (4) son equivalentes. ▮

<u>1.1.17 COROLARIO</u> (Jordan-Hölder-Dedekind). Sea P una retícula modular y sean $a \leq b$ en P. Entonces cualesquiera dos series de composición para $[a,b]$ son equivalentes.

En vista de este corolario, tenemos la siguiente:

<u>1.1.18 DEFINICIÓN</u>. Si P es una retícula de longitud finita, entonces la *longitud* de P está dada por: $\ell(P)$ = longitud de cualquier serie de composición de P.

<u>1.1.19 OBSERVACIÓN</u>. Los conceptos de unión e intersección pueden ser definidos cuando P no es ya un conjunto sino una clase. La mayoría de los resultados de esta sección pueden ser aplicados en esa situación más general. En el capítulo 3 usamos estos hechos (por ejemplo el teorema 1.1.3.) en ese contexto.

1.2 SUBCATEGORÍAS DE SERRE.

1.2.1 DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{A}$ una categoría; decimos que $\mathcal{A}$ es *preaditiva* si cada conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')$ es un grupo abeliano y las funciones de composición

$$\mathrm{Hom}(A',A'') \times \mathrm{Hom}(A,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,A'')$$

son bilineales para cualesquiera A, A', $A'' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, es decir,

$$f\circ(g_1+g_2) = (f\circ g_1)+(f\circ g_2) \text{ y}$$

$$(f_1+f_2)\circ g = (f_1\circ g)+(f_2\circ g),$$

cuando están definidas.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías preaditivas, entonces un funtor $T: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es *aditivo* si para cualesquiera A y $A' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, la función

$$(\ast) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A),T(A'))$$

inducida por T es un morfismo de grupos.

Decimos que la categoría $\mathcal{A}$ es *abeliana* si cumple las siguientes condiciones:

A1) $\mathcal{A}$ es preaditiva.

A2) Toda familia finita de objetos de $\mathcal{A}$ tiene un producto (y un coproducto).

A3) Todo morfismo en $\mathcal{A}$ posee núcleo y conúcleo.

A4) Todo morfismo α en $\mathcal{A}$ tiene una factorización $\alpha = \gamma\circ\beta$ donde β es un conúcleo y γ es un núcleo.

Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ que es abeliana, decimos que $\mathcal{B}$ es una *subcategoría abeliana* de $\mathcal{A}$ si el funtor inclusión

$$\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$$

es exacto.

1.2.2 EJEMPLOS.

1) Si R es un anillo, R-mod es una categoría abeliana.

2) La categoría $\mathcal{T}ors$ de grupos de torsión es una subcategoría abeliana de $\mathcal{Ab}$, la categoría de los grupos abelianos.

3) La categoría N_1 de los R-módulos Noetherianos es una subcategoría abeliana de R-mod; más aún, ésta es una subcategoría plena (es decir, las funciones descritas en (*) son suprayectivas, donde T es el funtor inclusión).

1.2.3 DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Una *subcategoría de Serre* de $\mathcal{A}$ es una subcategoría no vacía plena $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ tal que para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{A}$, se tiene que $M \in \mathcal{S} \leftrightarrow L$ y $N \in \mathcal{S}$. Es decir, $M \in \mathcal{S}$ si y sólo si cada subobjeto de M y cada objeto cociente de M pertenecen a $\mathcal{S}$.

Notamos que la intersección arbitraria de subcategorías de Serre de $\mathcal{A}$ es una subcategoría de Serre de $\mathcal{A}$.

1.2.4 EJEMPLOS.

1) Las siguientes clases son subcategorías de Serre de R-mod:

a) $N_1 = \left\{M \in \text{R-mod} \mid M \text{ es neteriano}\right\}$,

b) $A_1 = \left\{M \in \text{R-mod} \mid M \text{ es artiniano}\right\}$ y

c) $L_1 = \{M \in R\text{-mod} \mid M \text{ tiene longitud finita}\}$.

2) Si $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor, entonces el *núcleo* de F es la subcategoría plena $\mathcal{K}$ de $\mathcal{A}$ cuyos objetos son

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{K}) = \{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \mid F(1_A)=0\}.$$

Si F es exacto entonces $\mathcal{K}$ es una subcategoría de Serre de $\mathcal{A}$ cerrada por coproductos.

3) Las siguientes son subcategorías de Serre de $\mathbb{Z}$-mod:

a) Clase de grupos de torsión.

b) Clase de grupos finitamente generados.

c) Clase de grupos finitos.

d) Clase de p-grupos (p un número primo).

<u>1.2.5</u> <u>PROPOSICIÓN</u>. Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y $\mathcal{S}$ es una subcategoría de Serre de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{S}$ es abeliana.

Demostración:

Como $\mathcal{S}$ es subcategoría plena, entonces es preaditiva. Para cada morfismo en $\mathcal{S}$, existen en $\mathcal{A}$ núcleo y conúcleo; como $\mathcal{S}$ es subcategoría de Serre, éstos pertenecen a $\mathcal{S}$. De aquí se sigue que se cumplen los axiomas A1, A2, A3 y A4. ∎

1.3 CATEGORÍAS COCIENTE.

Consideramos una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y una subcategoría de Serre (abreviado por s.c.S. de aquí en adelante) $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$. Denotamos a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ por $\mathcal{A}(A,B)$. Sean A y $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ fijos.

Si A', A'', B' y $B'' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, $A'' \subseteq A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B'' \subseteq B$, entonces el epimorfismo canónico

$$p_{B'B''}: B/B' \longrightarrow B/B''$$

y el monomorfismo canónico

$$i_{A''A'}: A'' \longrightarrow A'$$

definen un homomorfismo de grupos

(1) $$(i_{A''A'}, p_{B'B''}): \mathcal{A}(A',B/B') \longrightarrow \mathcal{A}(A'',B/B'')$$

dado por

$$f \longmapsto p_{B'B''} \circ f \circ i_{A''A'} \quad .$$

Sea I la familia de las parejas ordenadas $\langle A',B' \rangle$ tales que $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $A/A' \in \mathcal{S}$ y $B' \in \mathcal{S}$. Definimos un orden parcial en I de la siguiente manera:

$$\langle A',B' \rangle \leq \langle A'',B'' \rangle \longleftrightarrow A' \supseteq A'' \text{ y } B' \subseteq B''.$$

De esta forma I está dirigido por este orden parcial puesto que, como $\mathcal{S}$ es s.c.S., $A/(A' \cap A'') \in \mathcal{S}$ y $B'+B'' \in \mathcal{S}$ y así $\langle A' \cap A'', B'+B'' \rangle \in I$ y es cota superior de $\langle A',B' \rangle$ y de $\langle A'',B'' \rangle$.

Consideramos ahora la familia de grupos $J = \left\{ \mathcal{A}(A',B/B') \mid A/A' \in \mathcal{S} \text{ y } B' \in \mathcal{S} \right\}$. La familia I y los homomorfismos (1) hacen de J un sistema dirigido pues para cada $\langle A',B' \rangle \in I$ tenemos

$\mathcal{A}(A',B/B') \in J$, y, cada vez que $\langle A',B'\rangle \le \langle A'',B''\rangle$, tenemos el homomorfismo $\mathcal{A}(A',B/B') \longrightarrow \mathcal{A}(A'',B/B'')$ descrito en (I).

I.3.1 DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{S}$ una s.c.S. de $\mathcal{A}$. La *categoría cociente* $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ está definida de la siguiente manera:

1) $\mathrm{Obj}(\mathcal{A}/\mathcal{S}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.

2) Para A y B $\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}/\mathcal{S})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(A,B) = \varinjlim J$, donde el sistema dirigido J está descrito arriba.

Si $f'\colon A' \longrightarrow B/B'$ y $f''\colon A'' \longrightarrow B/B''$ son morfismos en $\mathcal{A}$ y $\langle A',B'\rangle$, $\langle A'',B''\rangle \in I$, decimos que $f' \equiv f'' \pmod{\mathcal{S}}$ si existe $\langle A^+,B^+\rangle$ en I cota superior de $\langle A',B'\rangle$ y $\langle A'',B''\rangle$ tal que f' y f'' inducen el mismo morfismo $A^+ \longrightarrow B/B^+$. Es fácil ver que ésto define una relación de equivalencia en $\mathrm{Hom}(\mathcal{A})$. Sea G el conjunto de clases de equivalencia $[f]$ bajo esta relación. Si $f_i\colon A_i \longrightarrow B/B_i$ con $\langle A_i,B_i\rangle \in I$ $(i=1,2)$, definimos una suma en G por

$$[f_1]+[f_2] = [f_1^*+f_2^*],$$

donde $f_i^*\colon A_1\cap A_2 \longrightarrow B/(B_1+B_2)$ es inducido por f_i $(i=1,2)$. Se puede verificar que esta operación está bien definida y que $(G,+)$ es un grupo abeliano.

Si $\langle A_1,B_1\rangle \in I$, la función

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1,B/B_1) \longrightarrow G$$
$$f \longmapsto [f]$$

es compatible con el sistema dirigido. Además tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(A,B) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A',B/B') \cong G$$

que denotaremos con ρ.

En estos términos, si $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{Y}}(A,B)$ y $\rho(t)=[f]$, decimos que t *está representado por* f.

A continuación definimos la composición de morfismos en $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$. Sean $f^\wedge \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{Y}}(A,B)$ y $g^\wedge \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{Y}}(B,C)$, representados por f y g, respectivamente. Tenemos $f\colon A' \longrightarrow B/B'$ y $g\colon B'' \longrightarrow C/C'$ con A/A', B', B/B'' y $C' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{Y})$. Sea $A'' = f^{-1}((B''+B')/B')$, entonces $A/A'' \in \mathcal{Y}$ y f induce un $\mathcal{A}$-morfismo $f'\colon A'' \longrightarrow (B''+B)/B'$. Sea $C''/C' = g(B''\cap B')$, entonces $C'' \in \mathcal{Y}$ y g induce un $\mathcal{A}$-morfismo $g'\colon B''/(B''\cap B') \longrightarrow C/C''$. Sea h la siguiente composición:

$$A'' \xrightarrow{f'} (B''+B')/B' \cong B''/(B''\cap B') \xrightarrow{g'} C/C''.$$

Como A/A'' y $C'' \in \mathcal{Y}$, h determina un elemento único $h^\wedge \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{Y}}(A,C)$. Definimos $g^\wedge \circ f^\wedge = h^\wedge$.

A continuación vemos la estrecha relación que existe entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$.

<u>1.3.2 DEFINICIÓN</u>. Sea $T\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{Y}$ el funtor tal que $T(A) = A$ para cualquier $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ y que lleva $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ en su límite Tf en $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A',B/B')$. A este funtor lo llamamos *el funtor canónico en la categoría cociente*.

<u>1.3.3 LEMA</u>. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$, entonces

a) $Tf = 0 \leftrightarrow \mathrm{im} f \in \mathcal{Y}$.

b) Tf es inyectiva $\leftrightarrow \ker f \in \mathcal{Y}$.

c) Tf es suprayectivo $\leftrightarrow \mathrm{coker} f \in \mathcal{Y}$.

Demostración:

a) Si $\operatorname{im} f \in \mathcal{S}$, entonces la imagen de f en $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B/\operatorname{im} f)$ es cero, por lo tanto f es cero en $\varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A', B/B)$, es decir, $Tf = 0$.

Recíprocamente, si $Tf = 0$, entonces existen $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ tales que f induce el morfismo cero en $A' \longrightarrow B/B'$; por lo tanto $f(A') \subseteq B' \in \mathcal{S}$. Por otro lado tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow f(A') \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow A/(A'+\ker f) \longrightarrow 0$$

y como $A/(A'+\ker f)$ es cociente de A/A' y $A/A' \in \mathcal{S}$, entonces $\operatorname{im} f \in \mathcal{S}$.

b) Si Tf es mono e i: $\ker f \hookrightarrow A$ es la inclusión canónica, entonces $f \circ i = 0$ y por lo tanto $0 = T(f \circ i) = Tf \circ Ti$, así que $Ti = 0$ pues Tf es inyectivo; por el inciso a), $\ker f = \operatorname{im} i \in \mathcal{S}$.

Recíprocamente, sea $0 \neq f^{\wedge} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(TC, TA)$, representado por $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(C', A/A')$; reemplazando A' por $A'+\ker f$, podemos suponer que $\ker f \subseteq A'$ y así f induce un monomorfismo f'': $A/A' \longrightarrow B/f(A')$. Como $f^{\wedge} \neq 0$, $\operatorname{im} f$ e $\operatorname{im}(f'' \circ f')$ no pertenecen a $\mathcal{S}$, por lo tanto $Tf \circ f^{\wedge} \neq 0$; entonces Tf es inyectivo.

c) La prueba es dual a la del inciso b). ∎

1.3.4 LEMA. Sea

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{A}$. Entonces

$$0 \longrightarrow TK \xrightarrow{Ti} TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tq} TQ \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, es decir T es un funtor exacto. Además Tf es una equivalencia en $\mathcal{A}/\mathcal{S} \iff \ker f \in \mathcal{S}$ y $\operatorname{coker} f \in \mathcal{S}$.

Demostración:

Ti es inyectivo por la proposición anterior. Sea $k^{\wedge}: TX \longrightarrow TA$ un morfismo tal que $Tf \circ k^{\wedge} = 0$. Tenemos que probar que existe un morfismo $g^{\wedge}: TX \longrightarrow TK$ tal que $Ti \circ g^{\wedge} = k^{\wedge}$. Observamos que $k^{\wedge}$ está representado por un morfismo $k: X' \longrightarrow A/A'$ con X/X', $A' \in \mathcal{S}$. Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & K/K\cap A & \xrightarrow{i'} & A/A' & \xrightarrow{f'} & B/fA'
\end{array}$$

donde p, q y r son canónicos.

Como $Tf \circ k^{\wedge} = 0$, entonces $(f' \circ k)(X') \in \mathcal{S}$; sea $X'' = k^{-1}(\mathrm{im}\, i')$. Tenemos que X'/X'', $X/X'' \in \mathcal{S}$ y k restringido a X'' es la composición de $g: X'' \longrightarrow K/K\cap A'$ e i'. Sea $g^{\wedge}$ la imagen de g en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,K)$; entonces $Ti \circ g^{\wedge} = k^{\wedge}$.

La prueba de la parte correspondiente al coker es dual.

Si Tf es una equivalencia, entonces $\ker f \in \mathcal{S}$ y $\mathrm{coker} f \in \mathcal{S}$ por la proposición anterior. Supongamos ahora que $\ker f \in \mathcal{S}$ y $\mathrm{coker} f \in \mathcal{S}$ y sean

$$q: A \longrightarrow \mathrm{coim} f,\ j: \mathrm{im} f \longrightarrow B \text{ y } h: \mathrm{coim} f \longrightarrow \mathrm{im} f$$

los morfismos canónicos. El morfismo identidad $\mathrm{coim} f \longrightarrow \mathrm{coim} f$ pertenece a $\mathcal{A}(\mathrm{coim} f, A/i(K))$, y su imagen en $\mathcal{A}/\mathcal{S}(\mathrm{coim} f, A)$ es una inversa de Tq. Análogamente Tj es equivalencia y por lo tanto también lo es $Tf = Tj \circ Th \circ Tq$. ∎

1.3.5 TEOREMA. Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, $\mathcal{S}$ una s.c.S. de $\mathcal{A}$ y $T\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ el funtor canónico en la categoría cociente. Entonces $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ es una categoría abeliana y T es un funtor exacto.

Demostración:

$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ es preaditiva por la discusión previa al lema 1.3.1. Toda familia finita de objetos en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ tiene producto y coproducto en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, por el lema 1.3.4. Por ese mismo lema T es un funtor exacto y por lo tanto aditivo.

Sea $f^{-}\colon TA \longrightarrow TB$ un morfismo en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ representado por $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A', B/B')$ con A/A', $B' \in \mathcal{S}$. Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "f^{-}"] & TB \arrow[d, "Tp_{B/B'}"] \\
TA' \arrow[u, "Ti_{A'A}"] \arrow[r, "Tf"] & T(B/B')
\end{tikzcd}$$

donde $i_{A'A}\colon A' \longrightarrow A$ y $p_{B/B'}\colon B \longrightarrow B/B'$ son canónicos; como $0 = \ker i_{A'A}$, $A/A' = \operatorname{coker} i_{A'A}$, $B' = \ker p_{B/B'}$ y $0 = \operatorname{coker} p_{B/B'}$ son objetos en $\mathcal{S}$, por el lema 1.3.3 tenemos que $Ti_{A'A}$ y $Tp_{B/B'}$ son equivalencias en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$. Entonces f^{-} tiene ker (coker) en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ si y sólo si Tf tiene ker (coker) en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, pero Tf los tiene por el lema 1.2.3. Este mismo lema prueba A$_4$). ∎

1.3.6 LEMA. Sea $\mathcal{S}$ una s.c.S. de $\mathcal{A}$. Consideramos la sucesión exacta corta en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} P_1 \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{A}$ y equivalencias α, β y γ en $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & TM_1 \arrow[r, "Tf_1"] & TN_1 \arrow[r, "Tg_1"] & TP_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración:

El morfismo f es la imagen en el límite directo de un morfismo $f' \in \mathcal{A}(M',N/N')$ donde M/M', $N' \in \mathcal{S}$. Como Tf' es mono, por el lema 1.3.3, $\ker f \in \mathcal{S}$.

Consideramos los siguientes; $q\colon M' \longrightarrow \operatorname{coim} f'$ el canónico, $M_1 = \operatorname{coim} f'$, $N_1 = N/N'$, $f_1\colon M_1 \longrightarrow N_1$ el inducido por f', $P_1 = \operatorname{coker} f_1$, $g_1\colon N_1 \longrightarrow P_1$ el canónico, $\alpha = Tq\circ(TI_{M'M})^{-1}$, $\beta = Tp_{N/N'}$ y γ el inducido por $(Tg_1)\circ\beta$. $\blacksquare$

CAPITULO 2

CONCEPTOS DE DIMENSIÓN

Este capítulo está dedicado a presentar los conceptos de la *dimensión* en teoría de anillos que usamos en el capítulo 3.

En la sección 2.1 presentamos la *dimensión de Krull* según la exposición clásica de Gordon-Robson [4]. Este es el modelo que seguimos en el capítulo 3 para introducir la *dimensión de longitud finita*.

La sección 2.2 está dedicada a los *módulos críticos*, concepto fundamental para la dimensión de Krull. Esta noción servirá para dar una definición análoga para la dimensión de longitud finita en el tercer capítulo. El corolario 2.2.7 es de especial importancia para el capítulo 3; seguimos la prueba de Lenagan [9].

En la sección 2.3 presentamos los conceptos de *desviación* y *codesviación*. La noción de desviación es introducida por Gabriel y Rentschler [12] en el contexto más general de conjuntos parcialmente ordenados; la aplicación clásica en teoría de anillos es la dimensión de Krull (secc. 2.1). Lemonnier [6] da una dualización de este concepto, introduciendo la codesviación, que no es más que la desviación del conjunto parcialmente ordenado opuesto. Es esta manera la más natural de presentar la *dimensión dual de Krull*. La exposición que seguimos aquí es la de Chambless [2] y la original de Lemonnier.

En 1985 Pouzet y Zaguia [11] introducen una generalización de la desviación de Gabriel-Rentschler, la Γ-*desviación*. Este concepto, al cual está dedicada la sección 2.4, mide, con la ayuda de un ordinal, cuánto se aparta un conjunto parcialmente ordenado dado de la clase de los conjuntos que no contienen ningún subconjunto con un tipo de orden representado en Γ. La exposición que seguimos aquí es la original de Pouzet-Zaguia.

2.1 DIMENSIÓN DE KRULL

<u>2.1.1 DEFINICIÓN</u>. Sea $M \in$ R-mod; la *dimensión de Krull* de M, denotada por KdM, se define como sigue:

i) Si $M = 0$, $KdM = -1$;

ii) Si α es un ordinal y $KdM \nless \alpha$, entonces $KdM = \alpha$ si no existe ninguna cadena infinita descendente

$$M = M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \dots$$

de submódulos de M tal que $Kd(M_i/M_{i+1}) \nless \alpha$ para $i=0,1,2,\dots$

Es posible que no exista ningún ordinal α con esa propiedad, en cuyo caso decimos que M no tiene dimensión de Krull. La dimensión de Krull del anillo R, es la del R-módulo regular ${}_RR$, si ésta existe.

<u>2.1.2 EJEMPLOS</u>.

i) $KdM = 0 \leftrightarrow M$ es artiniano.

2) $Kd\mathbb{Z} = 1$.

3) $Kd(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$.

4) $Kd(\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = n+1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ (Gordon-Robson [4], pag 60).

<u>2.1.3</u> <u>TEOREMA</u>. Sea $M \in R$-mod y $N \leq M$; entonces $KdM = \sup\left\{KdN,\; Kd(M/N)\right\}$, si algún lado existe.

Demostración:

Supongamos $KdM = \alpha$. Sea

$$N = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \ldots$$

una cadena descendente en N. Consideramos la cadena descendente en M

$$M \geq N = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \ldots$$

por lo tanto $Kd(M/N) \nless \alpha$ y $Kd(N_i/N_{i+1}) \nless \alpha$ para toda i no pueden suceder, así que $KdN \leq \alpha$. Sea ahora

$$M/N = M_0/N \geq M_1/N \geq M_2/N \geq \ldots$$

una cadena descendente en M/N; como $\left. {(M_i/N)} \middle/ {(M_{i+1}/N)} \right. \cong M_i/M_{i+1}$, entonces $Kd\left(\left. {(M_i/N)} \middle/ {(M_{i+1}/N)} \right. \right) = Kd(M_i/M_{i+1}) \nless \alpha$ para toda i no puede suceder, así que $Kd(M/N) \leq \alpha$.

Hasta este momento tenemos que $KdM \geq \text{máx}\left\{KdN,\; Kd(M/N)\right\}$ para cualquier módulo M y cualquier submódulo N de M.

Para la desigualdad contraria, sean $\alpha_1 = KdN$ y $\alpha_2 = Kd(M/N)$; usamos un argumento inductivo sobre $\beta = \text{máx}\left\{\alpha_1,\; \alpha_2\right\}$.

i) Si $\beta = 0$, entonces $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, es decir, N y M/N son Artinianos; por lo tanto M es Artiniano y $KdM = 0$.

ii) Si $\beta > 0$, sea

$$M = M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \dots$$

una cadena descendente en M. Consideramos las cadenas descendentes

$$M/N = (M_0+N)/N \geq (M_1+N)/N \geq (M_2+N)/N \geq \dots$$

y

$$N = M \cap N = M_0 \cap N \geq M_1 \cap N \geq M_2 \cap N \geq \dots$$

en M/N y N, respectivamente.

Como $^{((M_i+N)/N)}/_{((M_{i+1}+N)/N)} \cong (M_i+N)/(M_{i+1}+N)$, entonces $Kd((M_i+N)/(M_{i+1}+N)) \nless \alpha_2$ para toda i no puede suceder; por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|i| \geq n \Rightarrow Kd((M_i+N)/(M_{i+1}+N)) < \alpha_2$.

En forma similar, $Kd((M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N)) \nless \alpha_1$ para toda i no puede suceder; por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq m \Rightarrow$ $Kd((M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N)) < \alpha_1$.

Sea $r = \text{máx}\{n,m\}$; entonces $i \geq r \Rightarrow Kd((M_i+N)/(M_{i+1}+N)) < \alpha_2$ y $Kd((M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N)) < \alpha_1$. Consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \to {}^{M_i \cap N}/_{M_{i+1} \cap N} \to M_i/M_{i+1} \to {}^{M_i+N}/_{M_{i+1}+N} \to 0 \quad .$$

y observamos que los dos extremos tienen Kd menor que β si $i \geq r$. Por hipótesis de inducción aplicada al módulo M_i/M_{i+1} y al submódulo ${}^{M_i \cap N}/_{M_{i+1} \cap N}$, tenemos que $Kd(M_i/M_{i+1}) =$ $\text{máx}\{Kd((M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N)), Kd((M_i+N)/(M_{i+1}+N))\} < \beta$. Resumiendo, tenemos que $i \geq r \Rightarrow Kd(M_i/M_{i+1}) < \beta$. Por lo tanto $\alpha \leq \beta$. ▌

2.1.4 TEOREMA.

$KdR = \sup\{KdM \mid M$ es un R-módulo finitamente generado$\}$, si algún lado existe.

Demostración:

$Kd(R^{(n)}) = KdR$ si ésta existe, por lo tanto $KdM \leq KdR$ para todo M finitamente generado. Pero R mismo es finitamente generado y así se da la igualdad. ∎

2.1.5 TEOREMA. a) Toda imagen homomorfa de un anillo R con Kd tiene Kd menor o igual a KdR.

b) La propiedad de tener Kd es Morita-invariante.

c) Si R es un anillo con Kd y P es un R-módulo proyectivo finitamente generado, entonces EndP es un anillo con Kd menor o igual a KdR.

Demostración:

a) Es consecuencia de la proposición 2.1.3.

b) Una equivalencia de categorías preserva retículas de submódulos.

c) Si $S = EndP$, entonces existe un monomorfismo de $\mathcal{L}(S)$, la retícula de ideales izquierdos de S, en $\mathcal{L}(P)$, la retícula de submódulos de P, dado por

$$I \longmapsto IP$$

entonces $KdS \leq KdP \leq KdR$. ∎

2.1.6 TEOREMA (Gabriel). Todo R-módulo neteriano tiene Kd.

Demostración:

Supongamos que el módulo neteriano M no tiene Kd. Sea $\mathcal{S} = \{N \leq M \mid M/N \text{ no tiene Kd}\}$; como M es neteriano y $0 \in \mathcal{S}$, podemos considerar $M' = \text{máx } \mathcal{S}$. Entonces M' es neteriano, no tiene Kd y todos sus cocientes propios tienen Kd. Pero como los factores propios de M' forman un conjunto, podemos encontrar un ordinal α tal que KdL $< \alpha$ para todo L cociente propio de M'. Entonces KdM' $\leq \alpha$, lo cual es una contradiccion. ∎

Recordemos que si un módulo M no contiene sumas directas infinitas de submódulos, entonces existe una cota superior para el número de sumandos. En ese caso decimos que M tiene *dimensión uniforme finita.*

2.1.7 PROPOSICIÓN: Si M tiene Kd entonces tiene dimensión uniforme finita.

Demostración:

El resultado es trivial si $M = 0$, es decir, si KdM $= -1$. Supongamos que M es un módulo no nulo con Kd pero que no tiene dimensión uniforme finita, y supongamos que KdM $= \alpha$ es mínima. Entonces $M \geq \coprod_{i=1}^{\infty} A_i$ con $0 \neq A_i \leq M$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea $M_n = \coprod_{j=1}^{\infty} A_{2^n j}$; consideramos la cadena descendente infinita

$$M_0 > M_1 > M_2 > \ldots$$

en M. Cada cociente M_i/M_{i+1} es una suma directa infinita y $\mathrm{Kd}(M_i/M_{i+1}) \leq \alpha$. Por la minimalidad de α, tenemos que $\mathrm{Kd}(M_i/M_{i+1}) = \alpha$. Entonces, por la definición de Kd, se tiene que KdM $> \alpha$, lo cual es una contradicción. ∎

2.2 *MÓDULOS CRÍTICOS*

2.2.1 DEFINICIÓN. Sea α un ordinal y $M \in$ R-mod; decimos que M es *α-crítico* si $KdM = \alpha$ pero $KdM' < \alpha$ para todo cociente propio M' de M. Decimos que M es *crítico* si es α-crítico para algún ordinal α.

2.2.2 EJEMPLO. Un R-módulo M es 0-crítico si es simple. Todo módulo artiniano tiene submódulos 0-críticos. Es una generalización de este hecho el siguiente

2.2.3 TEOREMA. Todo módulo no nulo con Kd contiene un submódulo crítico.

Demostración:

Si M es crítico, entonces no hay nada que probar. Si no es crítico y $KdM = \alpha$, entonces existe $0 \neq M_1 \leq M$ tal que $Kd(M/M_1) = \alpha$. Si M_1 es crítico, terminamos; si no, entonces existe $0 \neq M_2 \leq M_1$ tal que $Kd(M_2/M_1) = Kd(M_1) = \alpha$. Continuando en esta forma obtenemos una cadena

$$M = M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \dots$$

de submódulos de M tal que $Kd(M_i/M_{i+1}) = \alpha$ para $i = 0,1,2,\dots$.

Como $KdM = \alpha$, esta cadena debe terminar; pero sólo puede terminar en un submódulo α-crítico de M. ▮

2.2.4 LEMA. Si un módulo M tiene una cadena descendente infinita de submódulos

$$M = M_0 > M_1 > M_2 > M_3 > \dots$$

y una cadena ascendente infinita de submódulos

$$0 = A_0 < A_1 < A_2 < A_3 < \dots$$

tal que, para cada $i \geq 0$,

(1) $$M_i \cap A_{i+1} \nsubseteq A_i + M_{i+1} .$$

entonces M no tiene Kd.

Demostración:

Sea $B = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cap M_i$. Demostramos que (1) se verifica en M/B. Supongamos que $M_i \cap A_{i+1} \subseteq A_i + M_{i+1} + B$; como $B \subseteq A_i + M_{i+1}$, tenemos que $M_i \cap A_{i+1} \subseteq A_i + M_{i+1}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B = 0$.

Como M tiene Kd, tiene dimensión uniforme finita (teorema 2.1.7), así que podemos escoger n tal que la dimensión uniforme de M_n sea mínima. Como, por (1), $M_n \cap A_{n+1} \neq 0$, tenemos que $M_n \supseteq (M_n \cap A_{n+1}) \oplus M_{n+1}$, y por lo tanto

$$\text{dim.unif.}(M_n) \geq 1 + \text{dim.unif.}(M_{n+1}) \geq 1 + \text{dim.unif.}(M_n) > \text{dim.unif.}(M_n)$$

lo cual es una contradicción. ∎

2.2.5 TEOREMA. Sea M un módulo con Kd y c un ordinal límite tal que existe una cadena ascendente infinita $\{A_\lambda \mid \lambda < c\}$ de submódulos de M tal que $M = \bigcup_{\lambda < c} A_\lambda$. Supongamos que para un ordinal fijo α, se cumple $\text{Kd}(A_\lambda) \leq \alpha$ para todo $\lambda < c$. Entonces $\text{KdM} \leq \alpha$.

Demostración:

Supongamos que $KdM \nleq \alpha$; entonces existe una cadena

$$M = M_0 > M_1 > M_2 > M_3 > \dots$$

en M tal que $Kd(M_i/M_{i+1}) \geq \alpha$ para toda $i=0,1,2,\dots$ Tenemos que $M \nleq M_1$, $A_\lambda \nleq M_1$ para alguna λ, y, sin pérdida de generalidad, $A_1 \nleq M_1$. Por lo tanto, con $A_0 = 0$, $A_1 \cap M_0 \nleq A_0+M_1$. Supongamos entonces que para $0 \leq i \leq n-1$, se cumple que $M_i \cap A_{i+1} \nleq A_i+M_{i+1}$. Si $M_n \leq A_n+M_{n+j}$ para cada $j \geq 1$, entonces $M_{n+j-1} \leq A_n+M_{n+j}$, así que $M_{n+j-1} = (M_{n+j-1} \cap A_n)+M_{n+j}$. Por lo tanto $(M_{n+j-1}/M_{n+j}) \cong (M_{n+j-1} \cap A_n)/(M_{n+j} \cap A_n)$. Consideramos la cadena

$$A_n \cap M_n > A_n \cap M_{n+1} > A_n \cap M_{n+2} > \dots$$

en donde todos los cocientes tienen $Kd \geq \alpha$, lo cual contradice el que $Kd(A_n) \leq \alpha$. Entonces existe $j \geq 1$ tal que $M_n \nleq A_n+M_{n+j}$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $M_n \nleq A_n+M_{n+1}$. Como $M_n = M_n \cap (\bigcup_{\lambda<c} A_\lambda)$, existe una $\lambda > n$ tal que $M_n \cap A_\lambda \nleq A_n+M_{n+1}$; sin pérdida de generalidad supongamos que $M_n \cap A_{n+1} \nleq A_n+M_{n+1}$. Tenemos entonces que para toda n, la condición (i) del lema 2.2.4 se cumple, lo cual es una contradicción a que KdM existe. Por lo tanto $KdM \leq \alpha$. ▮

<u>2.2.6</u> <u>COROLARIO</u>. Si un módulo tiene Kd y es suma de submódulos que tienen $Kd \leq \alpha$, entonces $KdM \leq \alpha$.

Demostración:

Cada módulo cociente no nulo de M contiene un submódulo no nulo de $Kd \leq \alpha$. Por lo tanto podemos construir una cadena ascendente

$\left\{A_\lambda \mid \lambda \leq \gamma\right\}$ de submódulos de M tal que $M = A_\gamma$, para cada λ,

$Kd(A_{\lambda+1}/A_\lambda) \leq \alpha$, y para cada ordinal límite λ, $A_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} A_\delta$. Si $KdM \nleq \alpha$, sea c el menor ordinal tal que $Kd(A_c) \nleq \alpha$; el teorema 2.2.5 implica que c no es límite. Entonces $Kd(A_c) = \text{máx}\left\{Kd(A_c/A_{c-1}), Kd(A_{c-1})\right\} \leq \alpha$, lo cual es una contradicción. ∎

2.2.7 COROLARIO. Sean M un R-módulo con Kd y α un ordinal. Entonces M tiene un submódulo máximo con respecto a la propiedad de tener Kd menor ó igual a α.

2.3 DESVIACIÓN Y CODESVIACIÓN

2.3.1 DEFINICIÓN. Sea $(P,\leq)$ un c.p.o. La *desviación* de P, denotada por devP, está definida inductivamente de la siguiente manera:

a) $devP = -1$ si $\leq$ es el orden discreto en P, es decir, si para cualesquiera a y $b \in P$, se tiene que $a \nleq b$.

b) Si α es un ordinal, suponemos que la desviación ha sido definida cuando ésta es menor que α. Decimos que $devP = \alpha$ si

i) $devP \nless \alpha$, y

ii) Para toda sucesión decreciente $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$

en P, existe un número natural n tal que

$$dev[x_{i+1}, x_i] < \alpha$$

si $i \geq n$.

Si no existe ningún ordinal con esa propiedad, decimos que P no tiene desviación.

Es consecuencia inmediata de la definición anterior la siguiente

2.3.2 PROPOSICIÓN. Si $\text{dev}P = \alpha$ y $\beta < \alpha$, entonces existe una sucesión decreciente $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$ en P tal que $\text{dev}[x_{i+1}, x_i] \geq \beta$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

2.3.3 DEFINICIÓN. La *codesviación* de P, denotada por codevP, está definida por $\text{codev}P = \text{dev}(P^{op})$, si ésta existe.

2.3.4 EJEMPLOS. Sea M un módulo y sea $\mathcal{L}(M)$ la retícula de submódulos de M (ejemplo 1.1.2.4). Entonces

1) M es artiniano $\leftrightarrow$ $\text{KdM} = 0 \leftrightarrow \text{dev}(\mathcal{L}(M)) = 0$.

2) M es neteriano $\leftrightarrow$ $\text{codev}(\mathcal{L}(M)) = 0$.

3) En general, $\text{KdM} = \alpha \leftrightarrow \text{dev}(\mathcal{L}(M)) = \alpha$. Ésto nos da la justificación para la siguiente

2.3.5 DEFINICIÓN. Sea M un módulo y α un ordinal; la *dimensión dual de Krull* de M, denotada por dKdM, está dada por $\text{dKdM} = \text{codev}(\mathcal{L}(M))$, si ésta existe.

2.3.6 EJEMPLOS.

1) $\text{dKd}\mathbb{Z} = 0$.

2) $dKd(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 1$.

Sea P un c.p.o.; consideramos los siguientes subconjuntos de P^2:

$D(P) = \left\{ (e,e') \in P^2 \mid e \leq e' \right\}$,

$D_{-1}(P) = \left\{ (e,e') \in D(P) \mid e = e' \right\}$,

$D_0(P) = \left\{ (e,e') \in D(P) \mid [e,e'] \text{ es Artiniano} \right\}$ y, para un ordinal α,

$$D_\alpha(P) = \left\{ (e,e') \in D(P) \mid \forall\ (e' \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots \geq e) \subseteq P,\ \exists\ r \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq r \Rightarrow (x_{n+1}, x_n) \in \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta(P) \right\}.$$

Observamos que

$$D_{-1}(P) \subseteq D_0(P) \subseteq D_1(P) \subseteq \ldots \subseteq D_\alpha(P) \subseteq \ldots \subseteq P^2.$$

También observamos que, como P es un conjunto, existe un ordinal ζ tal que $D_\zeta(P) = D_{\zeta+1}(P) = \ldots$. De esta forma $devP = \alpha \Leftrightarrow D_\alpha(P) = D(P)$ y α es el menor ordinal con esa propiedad.

2.3.7 LEMA. Sea P un c.p.o. y sea $(e',e'') \in D(P) \setminus D_{\alpha+1}(P)$; entonces existe $e \in [e',e'']$, $e' \neq e \neq e''$, tal que $(e',e) \notin D_{\alpha+1}(P)$ y $(e,e'') \notin D_\alpha(P)$.

Demostración:

Como $(e',e'') \notin D_{\alpha+1}(P)$, entonces existe una sucesión decreciente

$$e'' \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots \geq e'$$

en P tal que $\forall\ n_0,\ \exists\ n \geq n_0$ con $(x_{n+1}, x_n) \notin \bigcup_{\beta<\alpha+1} D_\beta(P)$, en particular $(x_{n+1}, x_n) \notin D_\alpha(P)$; por lo tanto existe una sucesión de índices

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tales que $(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) \notin D_\alpha(P)$ para toda i. Tomamos $e = x_{n_1}$; así que $(e', e) \notin D_{\alpha+1}(P)$ y $(e, e'') \notin D_\alpha(P)$. ▮

2.3.8 TEOREMA (Lemonnier). Sea P un c.p.o. Entonces devP existe si y sólo si codevP existe.

Demostración:

Sea codevP = α; probamos por recursión transfinita que devP también existe.

Supongamos devP no existe; entonces existe un ordinal β tal que $D_\beta(P) = D_{\beta+1}(P) \neq D(P)$. Sea $(e_1, e_1') \in D(P) \setminus D_\beta(P)$, por lo tanto, por el lema anterior existe $e_2 \in [e_1, e_1']$ tal que $e_1 < e_2 \lneq e_1'$ y (e_1, e_2) y $(e_2, e_1') \notin D_\beta(P)$. Por el mismo lema existe $e_3 \in [e_2, e_1']$ tal que $e_2 < e_3 < e_1'$ y (e_2, e_3) y $(e_3, e_1') \notin D_\beta(P)$. Continuando de esta forma obtenemos una sucesión creciente en P

$$e_1 < e_2 < e_3 < \ldots < e_n < \ldots < e_1'$$

tal que $(e_n, e_{n+1}) \notin D_\beta(P)$.

Por otro lado, como codevP = α, existe una $r \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq r \rightarrow$ codev$[e_n, e_{n+1}] < \alpha$. Por la hipótesis de inducción, dev$[e_n, e_{n+1}]$ existe si $n \geq r$ y por lo tanto (e_n, e_{n+1}) pertenece a algún $D_\gamma(P)$; observamos que $\gamma \leq \beta$ forzosamente, lo cual contradice el que $(e_n, e_{n+1}) \notin D_\beta(P)$.

La implicación recíproca puede ser probada considerando la retícula P^{op}. ▮

Es una generalización del teorema de Gabriel (teor. 2.1.6) el siguiente:

2.3.9 COROLARIO. Todo c.p.o. neteriano tiene desviación.

2.4 Γ-DESVIACIÓN

2.4.1 DEFINICIÓN. Sea Γ una familia de tipos de orden tal que $\#(\gamma) \geq 3$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y sea P un c.p.o. Definimos la *Γ-desviación* de P, denotada por ΓdevP, inductivamente de la siguiente manera:

(1) ΓdevP $= 0$ si ningún tipo $\gamma \in \Gamma$ se sumerge en P, es decir, si no existe ninguna función creciente $f: \gamma \longrightarrow P$ con $\gamma \in \Gamma$.

(2) Sea α un ordinal; suponemos que ha sido definida la Γ-desviación de un c.p.o. cuando ésta es menor que α. Decimos que ΓdevP $= \alpha$ si

a) ΓdevP $\nless \alpha$,

b) para todo $\gamma \in \Gamma$ y para toda función creciente $f: \gamma \longrightarrow P$, existen a y b $\in \gamma$ tales que $a < b$ y Γdev$[f(a),f(b)] < \alpha$.

Si no existe ningún ordinal con esta propiedad, decimos que P no tiene Γ-desviación.

Denotamos por η al tipo de orden de la cadena $\mathbb{Q}$ de los racionales. Si P es un c.p.o., decimos que P es *dispersado* si no existe ninguna función creciente $\mathbb{Q} \longrightarrow P$, es decir, si P no tiene ningun subconjunto con tipo de orden η.

Si $p \in P$, denotamos por $[p,\rightarrow]$ y por $[\leftarrow,p]$ a $\{x \in P \mid p \leq x\}$ y $\{x \in P \mid x \leq p\}$, respectivamente.

2.4.2 LEMA. Sean P y Q dos c.p.o.. Si P tiene Γ-desviación y Q se sumerge en P entonces Q tiene también Γ-desviación y $\Gamma devQ \leq \Gamma devP$.

Demostración:

Sea $\Gamma devP = \alpha$. Usamos un argumento inductivo sobre α.

i) Si $\alpha = 0$, ningun tipo de orden en Γ se sumerge en P. Por lo tanto ningun tipo de orden en Γ se puede sumergir en Q y así $\Gamma devQ = 0$.

ii) Si $\alpha > 0$, sean $\gamma \in \Gamma$ y $f: \gamma \longrightarrow Q$ creciente; si $g: Q \longrightarrow P$ creciente, entonces $g \circ f: \gamma \longrightarrow P$ es creciente y por lo tanto existen a y $b \in \gamma$ tales que $a < b$ y $\Gamma dev[(g \circ f)(a),(g \circ f)(b)] < \alpha$. Como $[(g \circ f)(a),(g \circ f)(b)]$ es isomorfo (bajo g^{-1}) a $[f(a),f(b)]$, tenemos que $\Gamma dev[f(a),f(b)] < \alpha$ y por lo tanto $\Gamma devQ \leq \alpha$. ∎

2.4.3 TEOREMA. Sea Γ una familia de tipos de orden tal que $\#(\gamma) \geq 3$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y sea P un c.p.o.. Si P es dispersado entonces P tiene Γ-desviación. El recíproco es cierto si Γ contiene un tipo de orden numerable.

Demostración:

Si para todo $\gamma \in \Gamma$ y para toda función creciente $f: \gamma \longrightarrow P$ existen $a < b \in \gamma$ tales que $[f(a),f(b)]$ tiene Γ-desviación, entonces, para $\alpha = \sup \left\{\Gamma dev(x,y) \mid x < y \in P \text{ y } \Gamma dev(x,y) \text{ existe}\right\}$, se tiene que P tiene Γ-desviación y $\Gamma devP \leq \alpha+1$.

Por lo tanto podemos suponer que existe un $\gamma \in \Gamma$ y una función creciente $f: \gamma \longrightarrow P$ tal que para toda $a < b \in \gamma$, $[f(a),f(b)]$ no tiene Γ-desviación. Por el lema anterior, $[f(a),\rightarrow]$ y $[\leftarrow,f(b)]$ no tienen

Γ-desviación. Como $\#(\gamma) \geq 3$, entonces existe un elemento de P, digamos $x_{1/2}$, tal que $[\leftarrow,x_{1/2}]$ y $[x_{1/2},\rightarrow]$ no tienen Γ-desviación.

Sean $P_{1/4} = [\leftarrow,x_{1/2}]$ y $P_{3/4} = [x_{1/2},\rightarrow]$. Igual que arriba, existen $x_{1/4} \in P_{1/4}$ y $x_{3/4} \in P_{3/4}$ tales que los subconjuntos $[\leftarrow,x_{1/4}]$ y $[x_{1/4},\rightarrow]$ de $P_{1/4}$ y $[\leftarrow,x_{3/4}]$ y $[x_{3/4},\rightarrow]$ de $P_{3/4}$ no tienen Γ-desviación. Continuando de esta manera construimos una cadena de tipo η en P.

Para el recíproco, suponemos que Γ tiene un tipo de orden numerable. Si P no es dispersado entonces tiene una cadena de tipo η. Para demostrar que P no tiene Γ-desviación, por el lema anterior basta probar que Q no tiene Γ-desviación.

Supongamos que Q tiene Γ-desviación y sea $\Gamma\mathrm{dev}Q = \alpha$. Sea $\gamma \in \Gamma$ tal que $\#(\gamma) \leq \aleph_0$. Como $\gamma \leq \eta$ entonces $\alpha > 0$. Por lo tanto para toda función creciente $f: \gamma \longrightarrow Q$ existen $a < b \in \gamma$ tales que
$\mathrm{dev}[f(a,f(b)] < \alpha$; por otro lado $\eta \leq [f(a),f(b)]$ y por lo tanto, por el lema anterior, tenemos $\Gamma\mathrm{dev}Q < \alpha$, lo cual es una contradicción. ∎

2.4.4 EJEMPLOS.

1) Si $\Gamma = \{\omega^*\}$, entonces $\Gamma\mathrm{dev}P = \mathrm{dev}P$ (prop.2.4 (ii)).

2) Si $\Gamma = \{\omega\}$, entonces $\Gamma\mathrm{dev}P = \mathrm{codev}P$.

CAPÍTULO 3.

DIMENSIÓN DE LONGITUD FINITA.

En este capítulo, el más importante de este trabajo, introducimos el concepto de la *dimensión de longitud finita* para un R-módulo.

En la sección 3.1 estudiamos las propiedades básicas de esta dimensión siguiendo el modelo de Gordon-Robson [4] expuesto en la sección 2.1 para la dimensión de Krull. Asimismo estudiamos las relaciones existentes entre esta dimensión, la de Krull y la dual de Krull, generalizando el teorema de Lemonnier (teor. 2.3.8).

En la sección 3.2 damos una definición de subcategoría de Serre *construíble* e introducimos una operación entre este tipo de subcategorías. Ésto nos permite obtener más información sobre la categoría de módulos con dimensión de longitud finita dada. Con esta herramienta profundizamos en las relaciones entre las tres dimensiones en el caso finito.

En la sección 3.3 damos la definición de módulo *fl-crítico* y de *series de composición fl-críticas* para un módulo con dimensión de longitud finita, probamos que todo módulo con fld tiene series de composición fl-críticas y damos un teorema de unicidad semejante al teorema de Jordan-Hölder-Dedekind, así como un resultado análogo al teorema de la dimensión.

3.1. *PROPIEDADES Y RELACIONES BÁSICAS.*

3.1.1 DEFINICIÓN. Sea $M \in R$-mod y α un ordinal.

La *dimensión de longitud finita* de M, denotada por $\mathrm{fld}M$, está definida de la siguiente manera:

1) $\mathrm{fld}M = -1$ si $M = 0$;

2) Si α es un ordinal y $\mathrm{fld}M \nless \alpha$, entonces $\mathrm{fld}M = \alpha$ si

i) No existe ninguna cadena de submódulos

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \ldots$$

en M tal que $\mathrm{fld}(M_i/M_{i-1}) \nless \alpha$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

ii) No existe ninguna cadena de submódulos

$$M = M'_0 \geq M'_1 \geq M'_2 \geq \ldots$$

en M tal que $\mathrm{fld}(M'_j/M'_{j+1}) \nless \alpha$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Si no existe ningún ordinal con esta propiedad, decimos que M no posee dimensión de longitud finita.

La dimensión de longitud finita del anillo R es la correspondiente del R-módulo regular ${}_RR$, si ésta existe.

Observamos que, para $M \in R$-mod, $\mathrm{fld}M = (\omega^*,\omega)\mathrm{dev}(\mathcal{L}(M))$.

3.1.2 EJEMPLOS.

1) $\mathrm{fld}M = 0 \Leftrightarrow M$ es de longitud finita.

2) $\mathrm{fld}\mathbb{Z} = 1$.

3) $\mathrm{fld}(Z_{p^\infty}) = 1$.

<u>3.1.3</u> <u>TEOREMA</u>. Si $M \in R$-mod y $N \leq M$, entonces $\mathrm{fld}M = \max\left\{\mathrm{fld}N,\ \mathrm{fld}(M/N)\right\}$, si algún lado existe.

Demostración:

Supongamos que $\mathrm{fld}M = \gamma$. Sean

$$0 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \text{ y}$$

$$N = N_0' \geq N_1' \geq N_2' \geq \dots$$

cadenas en N; éstas son también cadenas en M y por lo tanto $\mathrm{fld}(N_i/N_{i-1}) \nleq \gamma$ para toda i no puede suceder, y $\mathrm{fld}(N_j'/N_{j+1}') \nleq \gamma$ para toda j no puede suceder; así que $\mathrm{fld}N \leq \gamma$. Sean ahora

$$0 = (M_0/N) \leq (M_1/N) \leq (M_2/N) \leq \dots \text{ y}$$

$$M/N = (M_0'/N) \geq (M_1'/N) \geq (M_2'/N) \geq \dots$$

cadenas en M/N, entonces $\mathrm{fld}((M_i/N)/(M_{i-1}/N)) = \mathrm{fld}(M_i/M_{i-1}) \nleq \gamma$ para toda i no puede suceder, y $\mathrm{fld}((M_j'/N)/(M_{j+1}'/N)) = \mathrm{fld}(M_j'/M_{j+1}') \nleq \gamma$ para toda j no puede suceder; así que $\mathrm{fld}(M/N) \leq \gamma$.

Tenemos hasta este momento que $\mathrm{fld}M \geq \max\left\{\mathrm{fld}N,\ \mathrm{fld}(M/N)\right\}$ para cualquier módulo M y cualquier submódulo N de M. Recíprocamente, sean $\gamma_1 = \mathrm{fld}N$ y $\gamma_2 = \mathrm{fld}(M/N)$; usamos un argumento iriductivo sobre $\delta = \max\left\{\gamma_1,\ \gamma_2\right\}$. Sean

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \text{ y}$$

$$M = M_0' \geq M_1' \geq M_2' \geq \dots$$

cadenas en M. Consideramos las cadenas

$$0 = (M_0+N) \leq (M_1+N) \leq (M_2+N) \leq \dots \text{ y}$$

$$(M+N) = (M'_0+N) \geq (M'_1+N) \geq (M'_2+N) \geq \ldots$$

en M/N; entonces $\mathrm{fld}((M_i+N)/(M_{i-1}+N)) \nless \gamma_2$ para toda i no puede suceder, y $\mathrm{fld}((M'_j+N)/(M'_{j+1}+N)) \nless \gamma_2$ para toda j no puede suceder; por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq n \Rightarrow \mathrm{fld}((M_i+N)/(M_{i-1}+N)) < \gamma_2$ y $\mathrm{fld}((M'_i+N)/(M'_{i+1}+N)) < \gamma_2$. También consideramos las cadenas

$$0 = (M_0 \cap N) \leq (M_1 \cap N) \leq (M_2 \cap N) \leq \ldots \text{ y}$$

$$N = (M'_0 \cap N) \geq (M'_1 \cap N) \geq (M'_2 \cap N) \geq \ldots$$

en N; entonces $\mathrm{fld}((M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N)) \nless \gamma_1$ para todo i no puede suceder, y $\mathrm{fld}((M'_j \cap N)/(M'_{j+1} \cap N)) \nless \gamma_1$ para toda j no puede suceder; por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq m \Rightarrow \mathrm{fld}((M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N)) < \gamma_1$ y $\mathrm{fld}((M'_i \cap N)/(M'_{i+1} \cap N)) < \gamma_1$.

Sea $r = \max\{n, m\}$; entonces $i \geq r \Rightarrow \mathrm{fld}((M_i+N)/(M_{i-1}+N)) < \gamma_2$, $\mathrm{fld}((M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N)) < \gamma_1$, $\mathrm{fld}((M'_i+N)/(M'_{i+1}+N) < \gamma_2$ y $\mathrm{fld}((M'_i \cap N)/(M'_{i+1} \cap N)) < \gamma_1$. Consideramos la sucesiones exactas cortas

$$0 \to {}^{M_i \cap N}/_{M_{i-1} \cap N} \to {}^{M_i}/_{M_{i-1}} \to {}^{M_i+N}/_{M_{i-1}+N} \to 0 \text{ y}$$

$$0 \to {}^{M'_i \cap N}/_{M'_{i+1} \cap N} \to {}^{M'_i}/_{M'_{i+1}} \to {}^{M'_i+N}/_{M'_{i+1}+N} \to 0$$

y observamos que, en ambos casos, los dos extremos tienen fld menor que δ si $i \geq r$. Por hipótesis de inducción aplicada al módulo M_i/M_{i-1} y al submódulo ${}^{M_i \cap N}/_{M_{i-1} \cap N}$, ó bien al módulo M'_i/M'_{i+1} y al submódulo ${}^{M'_i \cap N}/_{M'_{i+1} \cap N}$, tenemos que

$\mathrm{fld}(M_i/M_{i-1}) = \max\{\mathrm{fld}((M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N)), \mathrm{fld}((M_i+N)/(M_{i-1}+N))\} < \delta$ y

$\mathrm{fld}(M'_i/M'_{i+1}) = \max\{\mathrm{fld}((M'_i \cap N)/(M'_{i+1} \cap N)), \mathrm{fld}((M'_i+N)/(M'_{i+1}+N))\} < \delta$, si $i \geq r$.

Resumiendo, $i \geq r \Rightarrow \mathrm{fld}(M_i/M_{i-1}) < \delta$ y $\mathrm{fld}(M'_i/M'_{i+1}) < \delta$. Por lo tanto $\gamma \leq \delta$. ∎

3.1.4 COROLARIO.

$\mathrm{fldR} = \sup\{\mathrm{fldM} \mid M$ es un R-módulo finitamente generado$\}$, si algún lado existe.

Demostración:

$\mathrm{fld}(R^{(n)}) = \mathrm{fldR}$ si ésta existe, por lo tanto $\mathrm{fldM} \leq \mathrm{fldR}$ para todo módulo finitamente generado M. Pero R mismo es finitamente generado y así se da la igualdad.

3.1.5 TEOREMA. $\sup\{\mathrm{fldE(S)} \mid S$ es R-módulo simple$\}$ = $\sup\{\mathrm{fldM} \mid M$ es R-módulo finitamente cogenerado$\}$, si algún lado existe.

Demostración:

Si M es finitamente cogenerado, existe un monomorfismo $M \rightarrowtail \prod_{i=1}^{n} E(S_i)$ donde S_i es un R-módulo simple para toda $i = 1,2,\ldots,n$; la proposición se sigue como en el corolario anterior.

Nótese que esta proposición también es cierta para Kd y para dKd.

3.1.6 TEOREMA. a) Toda imagen homomorfa de un anillo R con fld tiene fld menor ó igual a fldR.

b) La propiedad de un anillo de tener fld es Morita-invariante.

c) Si R es un anillo con fld y P es un R-módulo finitamente generado proyectivo, entonces $\mathrm{fld(EndP)} \leq \mathrm{fldR}$.

Demostración:

En forma análoga a la proposición 2.1.5. ∎

<u>3.1.7 TEOREMA.</u> Para $M \in R$-mod son equivalentes:

a) KdM existe.

b) dKdM existe.

c) ΓldM existe.

Demostración:

La equivalencia entre a) y b) es corolario inmediato del teorema 2.3.8 Probaremos b) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ a).

b) $\Longrightarrow$ c): Supongamos $\mathrm{dKdM} = \alpha$ y $\mathrm{KdM} = \beta$; sea $\gamma = \text{máx}\left\{ \alpha+\beta,\ \beta+\alpha \right\}$, usamos un argumento inductivo sobre γ.

i) si $\gamma = 0$, M es neteriano y artiniano simultáneamente y por lo tanto es de longitud finita y así ΓldM = 0.

ii) si $\gamma > 0$, sean

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \text{ y}$$

$$M = M_0' \geq M_1' \geq M_2' \geq \dots$$

cadenas en M; como éstos son submódulos de M, entonces, para toda i, $\mathrm{Kd}(M_i/M_{i-1}) \leq \beta$, $\mathrm{Kd}(M_i'/M_{i+1}') \leq \beta$, $\mathrm{dKd}(M_i/M_{i-1}) \leq \alpha$ y $\mathrm{dKd}(M_i'/M_{i+1}') \leq \alpha$, pero podemos tomar una $n \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq n \Longrightarrow \mathrm{dKd}(M_i/M_{i-1}) < \alpha$ y $\mathrm{Kd}(M_i'/M_{i-1}') < \beta$; por lo tanto, si $i \geq n$, entonces se tiene que $\max\left\{\mathrm{dKd}(M_i/M_{i-1})+\mathrm{Kd}(M_i/M_{i-1}), \mathrm{Kd}(M_i/M_{i-1})+\mathrm{dKd}(M_i/M_{i-1})\right\} < \gamma$ y $\text{máx}\left\{\mathrm{dKd}(M_i'/M_{i+1}')+\mathrm{Kd}(M_i'/M_{i+1}'), \mathrm{Kd}(M_i'/M_{i+1}')+\mathrm{dKd}(M_i'/M_{i+1}')\right\} < \gamma$. De esta manera, por hipótesis de inducción, para $i \geq n$, se tiene que

$\text{fld}(M_i/M_{i-1})$ y $\text{fld}(M'_i/M'_{i+1})$ existen. Sea η un ordinal tal que $\text{fld}(M_i/M_{i-1}) \leq \eta$ y $\text{fld}(M'_i/M'_{i+1}) \leq \eta$ para todo $i \geq n$. Por lo tanto fldM existe y $\text{fldM} \leq \eta$.

c) $\longrightarrow$ a): Sea $\text{fldM} = \alpha$, usamos un argumento inductivo sobre α.

i) si $\alpha = 0$, M es de longitud finita y por lo tanto artiniano, así que $\text{KdM} = 0$.

ii) si $\alpha > 0$, sea

$$M = M'_0 \geq M'_1 \geq M'_2 \geq \ldots$$

una cadena en M; como $\text{fldM} = \alpha$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq n \longrightarrow \text{fld}(M'_i/M'_{i-1}) < \alpha$. Entonces, por hipótesis de inducción, $\text{Kd}(M'_i/M'_{i-1})$ existe si $i \geq n$; como antes, sea η un ordinal tal que $\text{Kd}(M'_i/M'_{i-1}) \leq \eta$ para todo $i \geq n$, por lo tanto $\text{KdM} \leq \eta$. ▮

3.1.8 COROLARIO. Si una de las tres dimensiones de M existe entonces $\text{máx}\left\{ \text{KdM}, \text{dKdM} \right\} \leq \text{fldM} \leq \text{máx}\left\{ \text{KdM+dKdM}, \text{dKdM+KdM} \right\}$.

Demostración:

Notamos en la prueba de la implicación (b $\longrightarrow$ c) del teorema anterior que $\eta \leq \gamma$. ▮

3.2. LAS CATEGORÍAS $\mathbb{A}_\alpha$, $\mathbb{N}_\alpha$ Y $\mathbb{L}_\alpha$.

Para α un ordinal, consideramos las siguientes subcategorías de Serre de la categoría R-mod:

$\mathbf{A}_\alpha = \{M \in R\text{-mod} \mid KdM < \alpha\}$,

$\mathbf{N}_\alpha = \{M \in R\text{-mod} \mid dKdM < \alpha\}$ y

$\mathbf{L}_\alpha = \{M \in R\text{-mod} \mid fldM < \alpha\}$.

Así por ejemplo, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{N}_0 = \mathbf{L}_0 = \{0\}$, $M \in \mathbf{A}_1 \leftrightarrow M$ es artiniano, $M \in \mathbf{N}_1 \leftrightarrow M$ es neteriano y $M \in \mathbf{L}_1 \leftrightarrow M$ es de longitud finita. Observamos que $\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{N}_1$.

3.2.1 DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad tal que $\mathbf{P} = \{M \in Obj(\mathfrak{C}) \mid M \text{ satisface } \mathcal{P}\}$ es una s.c.S. de $\mathfrak{C}$ para toda categoría abeliana $\mathfrak{C}$. Decimos entonces que $\mathbf{P}$ es una *subcategoría de Serre construíble*, ó, en forma breve, una s.c.S.c.

3.2.2 EJEMPLO. $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{N}_\alpha$ y $\mathbf{L}_\alpha$, para todo ordinal α, son s.c.S.c.

Aunque la definición de s.c.S.c. está dada para categorías abelianas en general, aquí estamos interesados principalmente en las s.c.S. de R-mod dadas en el ejemplo anterior.

Además de las operaciones usuales de unión, $\vee$, e intersección, $\wedge$, entre subcategorías de Serre, definimos otra operación, la *operación dos puntos* (:).

3.2.3 DEFINICIÓN. Sean $\mathbf{U}$ y $\mathbf{T}$ s.c.S.c., $\mathfrak{C}$ una categoría abeliana y $\phi_U: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}/_U$ el funtor canónico en la categoría cociente; entonces, para $M \in \mathfrak{C}$,

$$M \in (\mathbf{U}:\mathbf{T}) \leftrightarrow \phi_U(M) \in \mathbf{T}.$$

$\underline{3.2.4}$ $\underline{\text{EJEMPLOS}}$. $A_{\alpha+1} = (A_\alpha:A_1)$, $N_{\alpha+1} = (A_\alpha:A_1)$, $L_{\alpha+1} = (L_\alpha:L_1)$, para cualquier ordinal α.

$\underline{3.2.5}$ $\underline{\text{TEOREMA}}$. Si U y T son s.c.S.c. entonces $(U:T)$ también lo es.

Demostración:

Sea

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $\mathfrak{C}$. Si L, $N \in (U:T)$, entonces $\phi_U(L)$ y $\phi_U(N) \in T$, pero ϕ_U es exacto, así que la sucesión

$$0 \to \phi_U(L) \to \phi_U(M) \to \phi_U(N) \to 0$$

es exacta; como T es de Serre, $\phi_U(M) \in T$ y por lo tanto $M \in (U:T)$.

Recíprocamente, si $M \in (U:T)$, entonces $\phi_U(M) \in T$; como T es de Serre, $\phi_U(L)$ y $\phi_U(N) \in T$, así que L y $N \in (U:T)$. ∎

$\underline{3.2.6}$ $\underline{\text{LEMA}}$. Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de s.c.S.c. de R-mod. Sean K_i las clases en R-mod definidas de la siguiente manera:

$$K_1 = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha ,$$

y, para $i > 1$,

$$K_i = \{M \mid \exists\ 0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ suc. ex. con } L \text{ y } N \in K_{i-1}\}.$$

Entonces $\bigvee_{\alpha \in I} S_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Demostración:

Sea $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Primero probamos que U es una s.c.S. Sea

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en R-mod. Supongamos que $M \in U$; entonces $M \in K_i$ para alguna i. Usámos un argumento inductivo sobre i.

i) Si $i = 1$, entonces $M \in \bigcup_{x \in \Gamma} S_x$, así que $M \in S_{x_0}$ para alguna $x_0 \in \Gamma$; pero S_{x_0} es una s.c.S., entonces L y $N \in S_{x_0} \subseteq U$.

ii) Si $i > 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tal que M' y $M'' \in K_{i-1}$. Sean A y B el producto fibrado y la suma fibrada, respectivamente, en el diagrama conmutativo completado con C y D:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que M' y $M'' \in K_{i-1} \subseteq U$, así que, por hipótesis de inducción, A, B, C y $D \in U$, digamos $A \in K_n$, $B \in K_m$, $C \in K_p$ y $D \in K_q$. Como $K_r \subseteq K_s$ si $r \leq s$, entonces A y $D \in K_z$, donde $z = \text{máx}\{n, q\}$, B y

$C \in K_w$ donde $w = \text{máx}\{m,\ p\}$; de esta manera $L \in K_{x+1}$ y $N \in K_{w+1}$, y por lo tanto L y $N \in U$.

Supongamos ahora que L y $N \in U$, digamos $L \in K_n$ y $N \in K_m$; como arriba, L y $N \in K_z$ donde $z = \text{máx}\{n,\ m\}$ y por lo tanto $M \in K_{z+1} \subseteq U$.

A continuación probamos que $\bigvee_{x\in\Gamma} S_x = U$. Claramente $S_x \subseteq K_1 \subseteq U$ para todo $x \in \Gamma$ y por lo tanto $\bigvee_{x\in\Gamma} S_x \subseteq U$. Recíprocamente, sea S una s.c.S. tal que $S_x \subseteq S$ para todo $x \in \Gamma$ y sea $M \in U$, digamos $M \in K_i$. Usamos un argumento inductivo sobre i

i) Si $i = 1$, entonces $M \in K_1 = \bigcup_{x\in\Gamma} S_x \subseteq S$, así que $M \in S$.

ii) Si $i > 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tal que L y $N \in K_{i-1}$; por hipótesis de inducción, L y $N \in S$, que es una s.c.S., entonces $M \in S$. Por el teorema 1.1.3 hemos probado que

$U = \bigwedge \left\{S \mid S \text{ es s.c.S. y } S_x \subseteq S\ \forall\ x\in\Gamma\right\} = \bigvee_{x\in\Gamma} S_x$. ∎

Damos a continuación algunas propiedades básicas de la operación $(\ :\ )$.

<u>3.2.7</u> <u>TEOREMA</u>. Sean U, T y S s.c.S.c. Entonces

a) $T \subseteq S \Longrightarrow (U:T) \subseteq (U:S)$.

b) $U \vee T \subseteq (U:T)$.

c) $((U:T):S) = (U:(T:S))$.

d) $(U:T\wedge S) = (U:T)\wedge(U:S)$ y $(U\wedge T:S) = (U:S)\wedge(T:S)$.

e) $(U:T\vee S) = (U:T)\vee(U:S)$.

Demostración:

Para cualquier s.c.S. H en esta prueba, sea ϕ_H: R-mod $\longrightarrow$ R-mod$/_H$ el funtor canónico en la categoría cociente.

a) Sea $M \in (U:T)$; como $T \subseteq S$, $\phi_U M \in T \Rightarrow \phi_U M \in S$, esto es, $M \in (U:S)$.

b) Sean K_i las clases definidas como en el lema 3.3.6 para $U \vee T$. Si $M \in U \vee T$, entonces $M \in K_i$ para alguna i; usamos un argumento inductivo sobre i.

i) Si $i = 1$, entonces $M \in U \cup T$ y por lo tanto $M \in U$ ó $M \in T$. Si $M \in U$, entonces $\phi_U M = 0 \in T$; si $M \in T$, $\phi_U M = M \in T$. En ambos casos $M \in (U:T)$.

ii) Si $i > 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tal que L y $N \in K_{i-1}$; como L y $N \in U \vee T$, por hipótesis de inducción, L y $N \in (U:T)$, que es una s.c.S., así que $M \in (U:T)$.

c) Nótese que $\phi_{(U:T)} M = 0 \Leftrightarrow M \in (U:T) \Leftrightarrow \phi_U M \in T \Leftrightarrow (\phi_T \circ \phi_U) M = 0$. De aquí tenemos que $M \in (U:(T:S)) \Leftrightarrow (\phi_T \circ \phi_U) M \in S \Leftrightarrow (\phi_S \circ \phi_T \circ \phi_U) M = 0 \Leftrightarrow M \in ((U:T):S)$.

d) Para la primera afirmación, $M \in (U:T \wedge S) \Leftrightarrow \phi_U M \in T \wedge S \Leftrightarrow \phi_U M \in T$ y $\phi_U M \in S \Leftrightarrow M \in (U:T) \wedge (U:S)$. Para la segunda afirmación, $M \in (U \wedge T:S) \Leftrightarrow \phi_{U \wedge T} M \in S \Leftrightarrow \phi_U M \in S$ y $\phi_T M \in S \Leftrightarrow M \in (U:S) \wedge (T:S)$.

e) Sean K_i y P_j las clases definidas como en el lema 3.3.6 para $T \vee S$ y $(U:T) \vee (U:S)$, respectivamente, y sea $M \in (U:T \vee S)$; entonces $\phi_U M \in K_i$ para alguna i. Usamos un argumento inductivo sobre i.

i) Si $i = 1$, entonces $\phi_U M \in T \cup S$, así que $\phi_U M \in T$ ó $\phi_U M \in S$, esto es, $M \in (U:T)$ ó $M \in (U:S)$ y por lo tanto $M \in (U:T) \cup (U:S) \subseteq (U:T) \vee (U:S)$.

ii) Si $i > 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \phi_U L \longrightarrow \phi_U M \longrightarrow \phi_U N \longrightarrow 0$$

tal que $\phi_U L$ y $\phi_U N \in K_{i-1}$. Como L y N $\in$ (U:T∨S), por hipótesis de inducción tenemos que L y N $\in$ (U:T)∨(U:S) que es una s.c.S., por lo tanto M $\in$ (U:T)∨(U:S).

Recíprocamente, sea M $\in$ (U:T)∨(U:S), entonces $M \in P_j$ para alguna j. Usamos un argumento inductivo sobre j.

i) Si j = 1, entonces M $\in$ (U:T)∪(U:S) y por lo tanto M $\in$ (U:T) ó M $\in$ (U:S), esto es, $\phi_U M \in T$ ó $\phi_U M \in S$; entonces $\phi_U M \in T \cup S \subseteq T \vee S$, así que M $\in$ (U:T∨S).

ii) Si j > 1, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tal que L y N $\in P_{j-1}$. Como L y N $\in$ (U:T)∨(U:S), por hipótesis de inducción tenemos que L y N $\in$ (U:T∨S), que es una s.c.S.; por lo tanto M $\in$ (U:T∨S). ▮

<u>3.2.8</u> <u>TEOREMA</u>. $L_2 = A_2 \wedge (A_1 \vee N_1) \wedge N_2$.

Demostración:

Sea $S = A_1 \vee N_1$. Afirmamos que $S = (A_1:N_1) \wedge (N_1:A_1)$. Sea ϕ_{N_1}: R-mod $\longrightarrow$ R-mod$/N_1$ el funtor canónico en la categoría cociente. Sea $M \in (A_1:N_1) \wedge (N_1:A_1)$; como $M \in (A_1:N_1)$, $\phi_{N_1} M$ es artiniano. Supongamos que $M \notin A_1 \vee N_1$; sea $\mathcal{S} = \left\{ N \leq M \mid N \notin A_1 \vee N_1 \right\}$, entonces $\mathcal{S} \neq \phi$ pues $M \in \mathcal{S}$. Sea $\phi_{N_1} M'$ un elemento mínimo de $\phi_N \mathcal{S}$; tenemos que $M' \notin A_1 \vee N_1$, $M' \leq M$ y si $N \leq M$, entonces

$$1)\ M'/N \in N_1 \text{ ó}$$

2) $N \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$.

Reemplazamos M por M'

Sea ψ_{A_1}: R-mod $\longrightarrow$ R-mod/$\mathbf{A}_1$ el funtor natural en la categoría cociente. Como $M \in (\mathbf{A}_1;\mathbf{N}_1)$, $\psi_{A_1}M$ es neteriano; sea $\mathscr{S}' = \left\{N \leq M \mid M/N \notin \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1\right\}$, entonces $\mathscr{S}' \neq \phi$ pues $0 \in \mathscr{S}'$. Sea $\psi_{A_1}M'$ un elemento máximo de $\psi_{A_1}\mathscr{S}'$; tenemos que $M/M' \notin \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$, $M' \leq M$ y si $M' \leq N \leq M$, entonces

1) $M/N \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$ ó

2) $N/M' \in \mathbf{A}_1$.

Reemplazamos M por M'.

De esta manera M tiene las siguientes propiedades:

$M \notin \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$, y si $N \leq M$, entonces

1) $M/N \in \mathbf{N}_1$ ó $N \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$ y

2) $M/N \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$ ó $N \in \mathbf{A}_1$.

Sea ahora $K \leq M$ el submódulo artiniano máximo de M, el cual existe por el corolario 2.2.7; entonces M/K no tiene submódulos artinianos. Notamos que $M/K \notin \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$: de otra manera $K \in \mathbf{A}_1$ y $M/K \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$ implicaría $M \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1$, lo cual no es cierto.

Reemplazamos M por M/K, y éste último tiene las mismas propiedades que M y, además no tiene submódulos artinianos.

Si $N < M$ entonces $N \notin \mathbf{A}_1 \rightarrow M/N \in \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1 \rightarrow N \notin \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{N}_1 \rightarrow M/N \in \mathbf{N}_1$.
Sea

$$0 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \ldots$$

una cadena ascendente en M. De lo anterior tenemos que M/N_1 es neteriano y por lo tanto la cadena

$$0 = N_i/N_i \leq N_2/N_i \leq \dots$$

en M/N se estaciona, digamos $N_k/N_i = N_{k_0}/N_i$ para todo $k \geq k_0$; entonces $N_k = N_{k_0}$ $\forall$ $k \geq k_0$ y ésto implica que $M \in N_i \subseteq A_i \vee N_i$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, del teorema 3.3.7 tenemos que $A_i \vee N_i \subseteq (A_i : N_i)$ y $A_i \vee N_i \subseteq (N_i : A_i)$; entonces $A_i \vee N_i \subseteq (A_i : N_i) \wedge (N_i : A_i)$ y así hemos probado la afirmación.

Finalmente, como $L_2 = (L_1 : L_1)$, tenemos que $L_2 = (A_1 \wedge N_1 : N_1 \wedge A_1) = (A_1 : A_1 : N_1) \wedge (N_1 : A_1 : N_1) = A_2 \wedge (A_1 : N_1) \wedge (N_1 : A_1) \wedge N_2 = A_2 \wedge S \wedge N_2 = A_2 \wedge (A_1 \vee N_1) \wedge N_2$ y ésto completa la prueba. ∎

<u>3.2.9</u> <u>TEOREMA</u>. $\bigvee_{i+j=k+1} (A_i \wedge N_j) = \bigwedge_{i+j=k} (A_i \vee N_j)$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Sea $M \in \bigwedge_{i+j=k} (A_i \vee N_j)$, entonces $M \in A_i \vee N_j$ para todo $i+j = k$. Sean, como en el lema 3.3.6, las clases ${}_{i,j}K_n$ definidas como sigue:

$${}_{i,j}K_1 = A_i \cup N_j$$

y, para $n > 1$,

$${}_{i,j}K_n = \left\{ M \mid \exists\ 0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ suc. ex. con } L \text{ y } N \in {}_{i,j}K_{n-1} \right\};$$

de esta manera $A_i \vee N_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}_{i,j}K_n$ y ésto sucede para toda pareja de subíndices i y j tales que $i+j = k$.

Entonces para todo $i+j = k$, $\exists$ $n_r \in \mathbb{N}$ tal que $M \in {}_{i,j}K_{n_r}$ y tomamos n_r mínima con esa propiedad. Sea $m = \sum_{i+j=k} n_r$ (nótese que esta suma es finita y que $m \geq k+1$). Usamos un argumento inductivo sobre m.

i) Si $m = k+1$, entonces $n_r = 1 \vee i+j = k$, así que $M \in {}_{i,j}K_1 = \mathbf{A}_i \cup \mathbf{N}_j$ para todo $i+j = k$; pero existe i_0 tal que $M \in \mathbf{A}_{i_0} - \mathbf{A}_{i_0-1}$ $(i_0 > 0)$, y sea $j_0 = k-i_0$; tenemos $M \in (\mathbf{A}_{i_0-1} \cup \mathbf{N}_{j_0+1}) - \mathbf{A}_{i_0-1}$, así que $M \in \mathbf{N}_{j_0+1}$ y ésto implica que $M \in \mathbf{A}_{i_0} \wedge \mathbf{N}_{j_0+1} \subseteq \bigvee_{i+j=k+1} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$.

ii) Por claridad escribimos la hipótesis de inducción:

si $N \in \bigwedge_{i+j=k} (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{N}_j)$, $N \in {}_{i,j}K_{n_s}$ para todo $i+j = k$ y $m' = \sum_{i+j=k} n_s < m$,

entonces $N \in \bigvee_{i+j=k} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$. Supongamos, pues, que $m > k+1$.

Existe r_0 tal que $n_{r_0} > 1$, entonces una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con L y $N \in {}_{i,j}K_{n_{r_0}-1}$ $(i_0+j_0 = k)$; nótese que L y $N \in {}_{i,j}K_{n_r}$ para todo $i+j = k$. Calculamos las correspondientes m' y m'' para L y N, respectivamente:

$$m' = \sum_{i+j=k} n_r' \leq \sum_{r \neq r_0} n_r + (n_{r_0}-1) < m, \text{ y}$$

$$m'' = \sum_{i+j=k} n_r'' \leq \sum_{r \neq r_0} n_r + (n_{r_0}-1) < m.$$

Como L y N también pertenecen a $\bigwedge_{i+j=k} (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{N}_j)$, la hipótesis de inducción aplica a L y N; tenemos entonces que L y $N \in \bigvee_{i+j=k} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$, que es una s.c.S. Por lo tanto $M \in \bigvee_{i+j=k+1} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$.

Recíprocamente, sea $M \in \bigvee_{i+j=k+1} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$. Sean las clases K_n definidas como en el lema 3.3.6 para $\bigvee_{i+j=k+1} (\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{N}_j)$. Tenemos entonces que $M \in K_{n_0}$ para alguna n_0. Usamos un argumento inductivo sobre n_0.

i) Si $n_0 = 1$, entonces $M \in K_1 = \bigcup_{i+j=k+1} (A_i \wedge N_j)$, así que existen i_0 y j_0 tales que $M \in A_{i_0} \wedge N_{j_0}$ e $i_0+j_0 = k+1$. Sean i y j arbitrarios tales que $i+j = k+1$. Consideramos dos casos: si $i \geq i_0$, entonces $M \in A_i \subseteq A_i \vee N_j$; si $i < i_0$, entonces $j \geq j_0$ y por lo tanto $M \in N_j \subseteq A_i \vee N_j$. En ambos casos $M \in A_i \vee N_j$ y ésto sucede para todo $i+j = k$; entonces

$M \in \bigwedge_{i+j=k} (A_i \vee N_j)$.

ii) Si $n_0 > 1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con L y $N \in K_{n_0-1}$. Como L y $N \in \bigvee_{i+j=k+1} (A_i \wedge N_j)$, entonces, por hipótesis de inducción, L y $N \in \bigwedge_{i+j=k} (A_i \vee N_j)$, que es una s.c.S.; de aquí se sigue que $M \in \bigwedge_{i+j=k} (A_i \vee N_j)$. ▮

3.2.10 TEOREMA. $L_n \supseteq \bigwedge_{i+j=n} (A_i \vee N_j)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Usamos un argumento inductivo sobre n.

i) Si $n = 1$, $L_1 = (A_0 \vee N_1) \wedge (A_1 \vee N_0)$.

ii) Si $n > 1$, $L_n = (L_1 : L_{n-1}) \supseteq (L_1 : \bigwedge_{i+j=n-1} (A_i \vee N_j)) =$

$(A_1 \wedge N_1 : \bigwedge_{i+j=n-1} (A_i \vee N_j)) = (A_1 : \bigwedge_{i+j=n-1} (A_i \vee N_j)) \wedge (N_1 : \bigwedge_{i+j=n-1} (A_i \vee N_j)) =$

$(\bigwedge_{i+j=n-1} (A_1 : A_i \vee N_j)) \wedge (\bigwedge_{i+j=n-1} (N_1 : A_i \vee N_j)) =$

$(\bigwedge_{i+j=n-1} (A_{i+1} \vee (A_1 : N_j))) \wedge (\bigwedge_{i+j=n-1} ((N_1 : A_i) \vee N_{j+1})) \supseteq$

$(\bigwedge_{i+j=n-1} (A_{i+1} \vee A_1 \vee N_j)) \wedge (\bigwedge_{i+j=n-1} (N_1 \vee A_i \vee N_{j+1})) =$

$(\bigwedge_{i+j=n-1} (A_{i+1} \vee N_j)) \wedge (\bigwedge_{i+j=n-1} (A_i \vee N_{j+1})) \supseteq \bigwedge_{r+s=n} (A_r \vee N_s)$. ▮

3.2.11 TEOREMA. $L_n = \bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n} (A_{l_1}:N_{l_2}:A_{l_3}:\ldots:N_{l_k})$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Usamos un argumento inductivo sobre n.

i) Si $n = 1$, $L_1 = (A_0:N_1)\wedge(A_1:N_0)\wedge(N_1:A_0)\wedge(N_0:A_1)$.

ii) Si $n > 1$, $L_n = (L_1:L_{n-1}) = (A_1\wedge N_1:L_{n-1}) =$

$$= (A_1: \bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-1} (A_{l_1}:N_{l_2}:\ldots:N_{l_k})) \wedge$$

$$\wedge\ (N_1: \bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-1} (A_{l_1}:N_{l_2}:\ldots:N_{l_k})) =$$

$$= (\bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-1} (A_1:A_{l_1}:N_{l_2}:\ldots:N_{l_k})) \wedge$$

$$\wedge\ (\bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-1} (N_1:A_{l_1}:N_{l_2}:\ldots:N_{l_k})) =$$

$$= \bigwedge_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n} (A_{l_1}:N_{l_2}:\ldots:N_{l_k}).\quad \blacksquare$$

3.3 SERIES DE COMPOSICIÓN FL-CRÍTICAS.

3.3.1 DEFINICIÓN. Sea α un ordinal y $M \in$ R-mod; decimos que M *es α-fl-crítico* si M es simple en R-mod$/_{\mathbf{L}_\alpha}$, es decir, si

i) $\mathrm{fld}M = \alpha$ y

ii) si $N \leq M$, entonces $\mathrm{fld}N < \alpha$ ó $\mathrm{fld}(M/N) < \alpha$.

M es *fl-crítico* si es α-fl-crítico para algún ordinal α.

3.3.2 PROPOSICIÓN. Si M es α-fl-crítico y $N \leq M$, entonces sucede una y sólo una de las siguientes:

i) N es α-fl-crítico,

ii) M/N es α-fl-crítico.

Demostración:

Supongamos $\mathrm{fld}N = \alpha$. Sea $N' \leq N$; entonces $N' \leq M$ y por lo tanto $\mathrm{fld}N' < \alpha$ ó $\mathrm{fld}(M/N') < \alpha$. Si $\mathrm{fld}N' < \alpha$, terminamos; si $\mathrm{fld}(M/N') < \alpha$, entonces $\mathrm{fld}(N/N') < \alpha$. Así que N es α-fl-crítico.

Supongamos $\mathrm{fld}N < \alpha$. En esta situación, $\mathrm{fld}(M/N) = \alpha$. Sea $N'/N \leq M/N$, entonces $N \leq N' \leq M$ y por lo tanto $\mathrm{fld}N' < \alpha$ ó $\mathrm{fld}(M/N') < \alpha$. Si $\mathrm{fld}N' < \alpha$, entonces $\mathrm{fld}(N'/N) < \alpha$ y terminamos; si $\mathrm{fld}(M/N') < \alpha$, entonces, como ${}^{(M/N)}/_{(N'/N)} \cong M/N'$, tenemos que $\mathrm{fld}({}^{(M/N)}/_{(N'/N)}) < \alpha$. Así que M/N es α-fl-crítico. ∎

3.3.3 DEFINICIÓN. Sea $M \in R$-mod. Una *serie de composición fl-crítica* para M es una cadena finita de submódulos de M

$$M = M_0 > M_1 > \ldots > M_{n-1} > M_n = 0$$

tal que M_i/M_{i+1} es fl-crítico para toda $i = 0,1,2,\ldots,n-1$.

3.3.4 TEOREMA. Sea $M \in R$-mod; entonces M posee Kd si y sólo si existe una serie de composición fl-crítica para M.

Demostración:

Sea $\mathrm{fld}M = \alpha$. Usamos un argumento inductivo sobre α.

i) Si $\alpha = 0$, M es un módulo de longitud finita; por lo tanto existe una serie de composición para M, es decir, una sucesión de submódulos de M

$$M = M_0 > M_1 > M_2 > \dots > M_{n-1} > M_n = 0$$

tales que M_i/M_{i+1} es simple $\forall$ $i = 0,1,2,\dots,n-1$; entonces estos cocientes son módulos 0-fl-críticos y por lo tanto la serie de composición es una serie de composición fl-crítica.

ii) Si $\alpha > 0$, sea ϕ: R-mod $\longrightarrow$ $^{R\text{-mod}}/_{\mathbf{L}_\alpha}$ el funtor canónico en la categoría cociente. De esta manera $\phi(M)$ tiene longitud finita y por lo tanto existe una serie de composición para $\phi(M)$

$$\phi(M) = \phi(M_0) > \phi(M_1) > \dots > \phi(M_{n-1}) > \phi(M_n) = 0$$

y cada cociente $\phi(M_i)/\phi(M_{i+1})$ es simple ($i = 0,1,2,\dots,n-1$); de esta manera $M/M_0 \in \mathbf{L}_\alpha$, $M_n \in \mathbf{L}_\alpha$ y, para $i = 0,1,2,\dots n-1$, M_i/M_{i+1} es fl-crítico.

Como $\text{fld}(M/M_0) < \alpha$ y $\text{fld}(M_n) < \alpha$, por hipótesis de inducción, existen series de composición fl-críticas para esos módulos, digamos

$$M/M_0 = N_0/M_0 > N_1/M_0 > N_2/M_0 > \dots > N_r/M_0 = M_0/M_0$$

y

$$M_n = L_0 > L_1 > L_2 > \dots > L_s = 0,$$

respectivamente; entonces $N_i/N_{i+1} \cong {}^{(N_i/M_0)}/_{(N_{i+1}/M_0)}$ y L_j/L_{j+1} son fl-críticos para todo $i = 0,1,2,\dots,r-1$ y para todo $j = 0,1,2,\dots,s-1$. Yuxtaponemos las cadenas obteniendo

$$M = N_0 > N_1 > \dots > N_r = M_0 > M_1 > \dots > M_n = L_0 > L_1 > \dots > L_s = 0$$

donde todos los cocientes de términos consecutivos son fl-críticos, es decir, ésta es una serie de composición fl-crítica.

Recíprocamente, supongamos que la cadena

$$M = M_0 > M_1 > \dots > M_{n-1} > M_n = 0$$

es una serie de composición fl-crítica para M. En particular M_i/M_{i+1}

tiene fld para toda $i \geq 0$.

Procedemos por inducción sobre n.

i) Si $n = 1$, entonces $\text{fld}M = \text{fld}(M_0/M_1)$.

ii) Si $n > 1$, observamos que la cadena en M_1

$$M_1 > M_2 > \dots > M_{n-1} \dot{>} M_n = 0$$

es una serie de composición fl-crítica que tiene n-1 términos. Por la hipótesis de inducción, $\text{fld}M_1$ existe.

Consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \to M_1 \to M_0 \to M_0/M_1 \to 0 \quad ;$$

entonces, como los dos extremos tienen fld, el término central, M, tiene también fld. Por el teorema 3.1.7, M tiene Kd. ∎

<u>3.3.5</u> <u>TEOREMA</u>. Sea $M \in$ R-mod y sea $\text{fld}M = \alpha$. Entonces cualesquiera dos series de composición fl-críticas para M tienen el mismo número de cocientes α-fl-críticos.

Demostración:

Sea ϕ : R-mod $\longrightarrow$ $^{\text{R-mod}}/_{L_\alpha}$ el funtor canónico en la categoría cociente y sean

(1) $$M = M_0 > M_1 > M_2 > \dots > M_n = 0 \text{ y}$$

(2) $$M = N_0 > N_1 > N_2 > \dots > N_m = 0$$

dos series de composición fl-críticas para M. Consideramos las cadenas en $\phi(M)$

(3) $$\phi(M) = \phi(M_0) \geq \phi(M_1) \geq \phi(M_2) \geq \dots \geq \phi(M_n) = \phi(0) \text{ y}$$

(4) $$\phi(M) = \phi(N_0) \geq \phi(N_1) \geq \phi(N_2) \geq \dots \geq \phi(N_m) = \phi(0)$$

En éstas, las contenciones estrictas corresponden a cocientes α-fl-críticos de (1) y (2) pues al pasar a la categoría cociente, todo módulo de fld $< \alpha$ se vuelve nulo. Por lo tanto, después de quitar términos iguales, (3) y (4) son dos series de composición de $\phi(M)$ que es un módulo de longitud finita; por el teorema de Jordan-Hölder-Dedekind, tienen el mismo número de términos. Entonces el número de términos α-fl-críticos en (1) y (2) es el mismo. ∎

El teorema anterior nos permite introducir la siguiente:

<u>3.3.6</u> <u>DEFINICIÓN</u>. Sea $M \in$ R-mod y supongamos que fld$M = \alpha$. La *longitud α-fl-crítica* de M, denotada por $l_\alpha(M)$, es el número de cocientes α-fl-críticos en cualquier serie de composición fl-crítica de M.

<u>3.3.7</u> <u>LEMA</u>. Sean $M \in$ R-mod y fld$M = \alpha$; entonces existe una serie de composición fl-crítica para M con $l_\alpha(M)$ términos.

Demostración:

Sea

(1) $$M = M_0 > M_1 > \dots > M_{n-1} > M_n = 0$$

una serie de composición para M. Sea M_k un término de (1) tal que M_k/M_{k+1} es α-fl-crítico y sea M_{k+s} <u>el siguiente</u> término de (1) tal que M_{k+s}/M_{k+s+1} también es α-fl-crítico. Entonces M_k/M_{k+s+1} es α-fl-crítico igualmente. De esta manera podemos suprimir de (1) los términos M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_{k+s} obteniendo una nueva serie de composición fl-crítica para M.

Después de aplicar este procedimiento $n-l_\alpha(M)$ veces obtenemos una

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

serie de composición fl-crítica para M donde todos los cocientes son α-fl-críticos. Esta serie tiene longitud $l_\alpha(M)$. ▮

3.3.8 TEOREMA. Sean $M \in$ R-mod y $N \leq M$. Suponemos que α = fldM = fldN = fld(M/N). Entonces

$$l_\alpha(M) = l_\alpha(N) + l_\alpha(M/N).$$

Demostración:

Consideramos

$$N = N_0 > N_1 > \dots > N_{n-1} > N_n = 0$$

y

$$M/N = M_0/N > M_1/N > \dots > M_{m-1}/N > M_m/N = 0$$

series de composición fl-críticas para N y M/N, respectivamente. Por el lema 3.3.7., podemos suponer que $l_\alpha(N) = n$ y $l_\alpha(M/N) = m$. Observamos que

$$M = M_0 > M_1 > \dots > M_{m-1} > M_m = N = N_0 > N_1 > \dots > N_{n-1} > N_n = 0$$

es una serie de composición fl-crítica para M que consta sólo de términos α-fl-críticos. Como su longitud es $n+m$, tenemos

$l_\alpha(M) = l_\alpha(N) + l_\alpha(M/N)$. ▮

A partir de este teorema podemos obtener el siguiente resultado que es análogo al Teorema de la Dimensión.

3.3.9 COROLARIO. Sean $M \in$ R-mod y $N, K \leq M$. Suponemos que α = fldM = fldN = fldK = fld(K/K∩N). Entonces

$$l_\alpha(K+N) + l_\alpha(K \cap N) = l_\alpha(K) + l_\alpha(N).$$

Demostración:

Consideramos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K+N \longrightarrow (K+N)/N \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow K\cap N \longrightarrow K \longrightarrow K/(K\cap N) \longrightarrow 0$$

de las cuales obtenemos, a través del isomorfismo $(K+N)/N \cong K/(K\cap N)$, que $l_\alpha(K+N) - l_\alpha(N) = l_\alpha(K) - l_\alpha(K\cap N)$. ∎

BIBLIOGRAFÍA

[1] F.W. Anderson and K.R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[2] L. Chambless, "N-Dimension and N-Critical Modules. Application to Artinian Modules". Comm. Alg.8 (16), 1980, p.1561-1592.

[3] C. Faith, Algebra: Rings, Modules and Categories I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[4] R. Gordon and J.C. Robson, "Krull Dimension", Mem. Amer. Math. Soc. No 133, 1973.

[5] T. Jech, Set Theory, Academic Press, New York, 1978.

[6] B. Lemonnier, "Déviation des Ensembles et Groupes Abéliens totalement ordonnés", Bull. Sc. Math. 96 (1972) p.289-303.

[7] B. Lemonnier, "Sur les Anneaux qui ont une Déviation", C. R. Acad. Sc., Paris, serie A, 275 (1972), p.357-359.

[8] B. Lemonnier, "Dimension de Krull et Codéviation: Application au Theorème d'Eakin", Comm. Alg. 6 (1978), p.1647-1665.

[9] T. H. Lenagan, "Modules with Krull Dimension", Bull. London Math. Soc., 12 (1980), 39-40.

[10] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, Dimensions of Ring Theory, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[11] M. Pouzet and N. Zaguia, "Dimension de Krull des Ensembles ordonnés", Discrete Mathematics 53 (1985), p.173-192. North Holland.

[12] R. Rentschler and P. Gabriel, "Sur la Dimension des Anneaux et Ensembles ordonnés", C. R. Acad. Sc., Paris, t.265, serie A. 1967, p.712-715.

[13] B. Stenström, Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.