30
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE ALGEBRA SUPERIOR

PARA INGENIERIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FELIPE SEGUNDO CUEVAS

MEXICO, D. F. 1993

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

INTRODUCCION

Esta tesis está planeada como notas de clase para un curso inicial de Algebra Superior y va dirigida a estudiantes de ingeniería.

La presentación de la teoría se hace de manera formal incluyendo demostraciones. Se sugiere al profesor antes de iniciar el curso dar a los estudiantes un breve comentario de qué son las demostraciones, cómo se hacen y por qué hay que hacerlas; esto es con el fin de que el estudiante vaya adquiriendo poco a poco la facultad de abstracción. Si el el profesor no desea ver las demostraciones puede ocupar únicamente los resultados de las notas para dar el curso, sin que ello afecte la calidad de la teoría.

En las notas se da una introducción formal a las funciones, sus operaciones y tipos, aplicando ésta teoría a la cardinalidad de conjuntos.

Continúa con las estructuras básicas del álgebra que son los grupos, anillos y campos, y de manera formal introduce los sistemas de los números naturales, enteros, racionales y complejos. Estos temas los puede considerar el profesor como optativos para su curso, excepto el de los números complejos.

Finalmente la teoría de los espacios vectoriales, combinaciones lineales, bases y dimensión se utiliza para dar formalidad a los últimos temas de las notas. Estos son: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Agradezco los comentarios y observaciones hechos para la realización correcta de este trabajo a:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica, Director de ésta tesis.
M. en C. Carlos Signoret Poillón.
M. en C. María de Lourdes Palacios Fabila.
M. en C. Mario Pineda Ruelas.
Mat. Rogelio Jiménez Fragoso.

§ 1. CONJUNTOS

Diremos simplemente que un conjunto es una colección de objetos, y que los objetos son los elementos del conjunto. Se acostumbra utilizar letras mayúsculas A, B, C, ... para representar conjuntos y letras minúsculas a, b, c, ... para representar a los elementos.

Cuando un elemento a pertenezca al conjunto A escribiremos "$a \in A$", y se lee " el elemento a pertenece al conjunto A". En caso contrario se escribirá "$a \notin A$", es decir, a no es elemento del conjunto A. Por ejemplo: consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, entonces las proposiciones siguientes se cumplen:

$$3 \in \mathbb{N}, \quad -1 \notin \mathbb{N}$$

En efecto, sabemos que 3 es un número natural y que -1 no lo es.

Para definir un conjunto debemos establecer un criterio que nos permita decidir cuándo un elemento dado pertenece al conjunto, para ello hay dos maneras de hacerlo:

1.- Listando todos los elementos que pertenecen al conjunto o

2.- Señalando una característica común que posean los elementos del conjunto.

El conjunto cuyos elementos son los números 1,3,5,7,9 se representa como $\{1,3,5,7,9\}$ y, claramente se observa que el número 1 pertenece al conjunto, mientras que el número 2 no pertenece; esto es,

$$1 \in \{1,3,5,7,9\} \quad y \quad 2 \notin \{1,3,5,7,9\}$$

A esta forma de representar un conjunto se le llama forma tabular o por extensión.

El conjunto anterior representémoslo ahora como $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es impar $\leq 9\}$ que se lee " el conjunto de los elementos de $\mathbb{N}$ que son impares y menores o iguales que 9". Esta forma de representar un conjunto se llama forma por comprensión.

EJEMPLOS:

1.- Sea S el conjunto de los días de la semana. Entonces S = {Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado} y S = {d / d es día de la semana} son las formas tabular y por comprensión de expresar al conjunto S.

2.- El conjunto $M = \{1, -1\}$ podemos nombrarlo por comprensión como el conjunto $\{x \ / \ x^2 - 1 = 0\}$.

3.- El conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ podemos nombrarlo por comprensión como el conjunto $A = \{x \ / \ x \in \mathbb{N} \text{ y } x \leq 5\}$.

4.- La forma tabular del conjunto A de todos los números naturales que son múltipos de 5 es $A = \{5,10,15,20,25,30,...\}$. Y la forma por comprensión es, $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x = 5k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$.

5.- El conjunto E de los elementos de las estaciones del año es, por forma tabular E = {Primavera, Verano, Otoño, Invierno}; mientras que la forma por comprensión de E es, E = {e / e es estación del año}.

6.- El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq x \leq 2\}$ y el intervalo de números reales $[1,2]$ son las formas por comprensión y tabular de representar a todos los números reales mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 2.

§ 2. SUBCONJUNTOS

DEFINICION 2.1 : Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es subconjunto de B si cada elemento de A es un elemento de B.

Por ejemplo: el conjunto $A = \{a,b,c\}$ es subconjuto del conjunto $B = \{a,b,c,d,e\}$ pues cada elemento de A es un elemento de B.

Para expresar que A es subconjunto de B utilizamos la notación "$A \subset B$" que se lee "A es subconjunto de B" o "A está contenido en B".

Así pues $A \subset B$ si y sólo si, $x \in A$ implica $x \in B$.

También decimos que A no es subconjunto de B en caso de que exista al menos un elemento de A que no pertenezca a B. Así por ejemplo, el conjunto $A = \{a,b,f\}$ no es subconjunto de $B = \{a,b,c,d,e\}$ pues el elemento $f \in A$ es tal que $f \notin B$. Usamos la notación $A \not\subset B$ para expresar que A no es subconjunto de B o que A no está contenido en B.

EJEMPLOS:

1.- Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ de los números naturales y enteros cumplen las siguientes afirmaciones:

i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

ii) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$

En efecto, en el primer caso sabemos que todo número natural es también un número entero y, en el segundo caso tenemos que los números enteros negativos no pertenecen al conjunto de los números naturales.

2.- Sea $A = \{-2,3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x$ satisface la ecuación $x^2-x-6 = 0\}$.

En este caso $A \subset B$ pues los números $x = -2$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación $x^2-x=6$. Además también $B \subset A$ pues las soluciones de dicha ecuación son $x = -2$ y $x = 3$; así $B = \{-2,3\}$ y por consiguiente $A = B$.

DEFINICION 2.2 : Decimos que dos conjuntos son iguales si se contienen mutuamente, es decir, $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ya que los conjuntos A y B del ejemplo 2 se contienen mutuamente, son iguales.

Otra notación alternativa para subconjuntos es la siguiente:

i) $B \supset A$

ii) $B \not\supset A$

que se leen "B contiene a A" y "B no contiene a A", respectivamente.

Dada la ecuación $x+1 = 0$, donde x es un número natural, vemos que no tiene solución; esto es, no existe ningún número natural x tal que $x+1 = 0$, pues todo número natural x es mayor que cero, y por consiguiente $x+1 > 0$.

De la misma manera la ecuación $x^2 < 0$ no se verifica para ningún número real, ya que el cuadrado de todo número real es siempre mayor que cero.

Para expresar el hecho que no existen elementos que satisfagan ciertas propiedades se usa el símbolo "Ø", el cual se lee como "conjunto vacío".

Por lo tanto

$$\{x \in \mathbb{N} \ / \ x+1 = 0\} = \emptyset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 0\} = \emptyset$$

Es decir, cada conjunto escrito anteriormente carece de elementos.

La siguiente proposición acerca de subconjuntos se sigue a partir de la definición de subconjunto.

PROPOSICION 2.3 : Todo conjunto es subconjunto de sí mismo; es decir, $A \subset A$ para todo conjunto A. ∎

Cuando todos los elementos de un conjunto poseen la misma propiedad utilizamos el símbolo de universalidad "$\forall$" para expresar este hecho. Así por ejemplo, en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, todo elemento es mayor que cero.

Lo anterior lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\forall\ x \in \mathbb{N} \text{ se cumple } x > 0$$

y se lee "para todo número natural x, se cumple que x es mayor a cero".

De igual manera todo número real satisface que su cuadrado es siempre mayor o igual a cero; lo cual lo representamos utilizando el símbolo de universalidad de la siguiente manera

$$(\forall\ x \in \mathbb{R})\ \ (x \geq 0)$$

y se lee "para todo número real x, su cuadrado es mayor o igual a cero".

Consideremos ahora la proposición $x^2 > x$, donde x toma valores en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$; esta proposición es verdadera para todo valor de x mayor o igual a 2, pero para el número natural $x = 1$ la proposición $(1)^2 > 1$ es falsa. Podemos decir entonces que existe un número natural para el cual la proposición $x^2 > x$ no se cumple, y usamos el símbolo de existencia "$\exists$" para expresarlo, escribiéndolo de la siguiente manera:

$$\exists\ x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^2 > x \text{ es falso}$$

y se lee "existe un número natural x para el cual $x^2 > x$ es falso".

Cuando no exista ningún número con cierta propiedad, como por ejemplo:

"no existe ningún número real x que satisfaga la ecuación $x^2+1 = 0$"

escribiremos lo siguiente:

$$\nexists\, x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2+1 = 0$$

que se lee "no existe x en $\mathbb{R}$ tal que $x^2+1 = 0$".

DEFINICION 2.4 : Decimos que un conjunto A es subconjunto propio del conjunto B si A es subconjunto de B y, B no es subconjunto de A; es decir, $A \subset B$ y $B \not\subset A$.

EJEMPLOS:

3.- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

4.- Los números racionales $\mathbb{Q}$ forman un subconjunto propio de los números reales $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

5.- Consideremos los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b\}$. El conjunto B es subconjunto propio de A ya que $A \supset B$ y $A \not\subset B$.

DEFINICION 2.5 : La potencia de un conjunto A, P(A), es el conjunto de todos los posibles subconjuntos del conjunto A.

EJEMPLO:

6.- Sea $A = \{1,2\}$. Entonces $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
Obsérvese que el conjunto vacio pertenece a P(A), $\emptyset \in P(A)$, pues $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto.

§ 3. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Dados los conjuntos $A = \{a,b\}$ y $B = \{c,d\}$ podemos reunir a todos los elementos de ambos conjuntos en un solo conjunto $\{a,b,c,d\}$ y llamarlo "la unión de los conjuntos A y B". Entonces, la unión de A y B es el conjunto de elementos que pertenezcan ya sea al conjunto A o al conjunto B; se representa utilizando el símbolo de unión de conjuntos "$\cup$" como $A \cup B$ que se lee "A unión B". En caso de que un elemento pertenezca a ambos conjuntos, este aparecerá una sola vez en el conjunto unión.

EJEMPLOS:

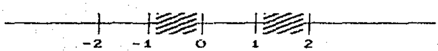
1.- La unión de los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{4,5\}$ es el conjunto

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}.$$

2.- La unión de los conjuntos $A = \{a,b\}$ y $B = \{b,c,d\}$ es el conjunto

$$A \cup B = \{a,b,c,d\}.$$

3.- En los números reales, la unión de los intervalos $(-1,0)$ y $(1,2)$ es simplemente $(-1,0) \cup (1,2)$.



DEFINICION 3.1 : La unión de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

De la definicón anterior de conjuntos es fácil verificar las siguientes propiedades de la unión de conjuntos.

PROPIEDADES 3.2 :

i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

ii) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad).

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociatividad).

iv) $A \subset C$, $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.

De igual manera, dados dos conjuntos A y B cualesquiera formemos un nuevo conjunto con los elementos comunes a ambos. Este conjunto lo llamaremos la intersección de A y B, y lo representaremos con el símbolo de intersección de conjuntos "$\cap$". Así tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 3.3 : La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{x \;/\; x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

EJEMPLOS:

4.- Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,6,8,10\}$ y $B = \{2,3,5,7\}$ tenemos que

$$A \cap B = \{2,3\},$$

pues los números 2 y 3 pertenecen a ambos conjuntos.

5.- Consideremos los conjuntos de los números naturales y números enteros; en este caso $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$. En general, si $A \subset B$ será $A \cap B = A$.

Las siguientes propiedades de la intersección de conjuntos se siguen también a partir de la definición.

PROPIEDADES 3.4 :

i) $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$.

ii) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad).

iii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociatividad).

iv) $A \subseteq B$, $C \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B$.

Las siguientes leyes son llamadas "Leyes distributivas" y muestran como actúa una unión sobre una intersección de conjuntos y viceversa.

PROPOSICION 3.5 : Dados los conjuntos A, B y C arbitrarios las igualdades siguientes son ciertas:

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

DEMOSTRACION:

Demostremos primero el inciso (i).

Elijamos $x \in A \cup (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ o $x \in (B \cap C)$, por definición de unión de conjuntos. Si $x \in A$ tenemos que $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De otro modo, si $x \in B \cap C$ se sigue que $x \in B$ y $x \in C$, y por la propiedad 3.2 (i) $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$; así que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se sigue por la definición de subconjunto que $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$.

Tomemos ahora $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por la definición de intersección y unión de conjuntos tenemos que $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$; es decir, ($x \in A$ o $x \in B$) y ($x \in A$ o $x \in C$). Si $x \in A$ tendremos por la propiedad 3.2 (i) que $x \in A \cup (B \cap C)$. De otra manera, si $x \notin A$, se tiene que $x \in B$ y $x \in C$. Entonces $x \in B \cap C$ y, también $x \in A \cup (B \cap C)$. Hemos demostrado ahora que $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \subset [A \cup (B \cap C)]$ y por mutua contención se sigue que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostremos ahora el inciso (ii).

Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$; es decir, $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$). Si $x \in B$, tenemos que $x \in A \cap B$; entonces por la propiedad 3.2 (i), $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si $x \in C$, tenemos $x \in A \cap C$ y, también $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Lo anterior muestra que

$$[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)].$$

Ahora bien, ya que $A \cap B \subset A$ y $A \cap C \subset A$, por la propiedad 3.2 (iv) se tiene que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A$. Análogamente, $A \cap B \subset B$ y por lo tanto $A \cap B \subset B \cup C$ lo cual se sigue de la propiedad 3.2 (i), de igual manera $A \cap C \subset C$ y por lo tanto $A \cap C \subset B \cup C$, por lo que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset B \cup C$. Así tenemos que $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset [A \cap (B \cup C)]$ y, por contención mutua $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.■

Veamos ahora algunos ejemplos que ilustren los resultados de la proposición anterior.

EJEMPLOS:

6.- Sea $A = \{1,2,3,4,5,\}$, $B = \{1,2,3,5,6\}$ y $C = \{2,4,7,8\}$. Entonces

$$B \cap C = \{2\},$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,7,8\},$$

Así, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{2\} = \{1,2,3,4,5\}$.

Por otra parte:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,5,7,8\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Por lo tanto, tal como se demostró en la proposición 3.5.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7.- Sean A, B y C los conjuntos del ejemplo anterior. Tenemos ahora que

$$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

$$A \cap B = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5,6\} = \{1,2,3,5\},$$

$$A \cap C = \{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,7,8\} = \{2,4\},$$

Por lo tanto:

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5\}$ y,

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3,5\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4,5\}$ cumpliéndose la igualdad $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Cuando tenemos un conjunto arbitrario no vacío podemos considerarlo como la totalidad de elementos de que disponemos, y cualquier subconjunto tomado de esta totalidad lo consideraremos como un subconjunto de elementos de nuestro universo o totalidad. Así por ejemplo, si tenemos al conjunto de números reales $\mathbb{R}$, podemos considerar a $\mathbb{R}$ como el universo de elementos y decir que cualquier número real o cualquier intervalo de números reales pertenecen al universo $\mathbb{R}$.

DEFINICION 3.6: Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universo y A un subconjunto de $\mathbb{U}$. Definimos el complemento de A como el conjunto de todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A. Lo denotamos mediante el símbolo A^c que se lee "complemento de A". En símbolos tenemos

$$A^c = \{x \in \mathbb{U} \ / \ x \notin A\}.$$

EJEMPLOS:

8.- Tomemos como conjunto universo al conjunto $\mathbb{U} = \{1,2,3,\ldots,10\}$ y $A = \{2,4,6,8\}$ un subconjunto de $\mathbb{U}$. Entonces $A^c = \{1,3,5,7,9,10\}$.

9.- Sea ahora $\mathbb{U} = \mathbb{N}$ y sea $A = \{2,4,6,8\}$ un subconjunto de $\mathbb{U}$. En este caso $A^c = \{1,3,5,7,9,10,11,12,\ldots\}$.

Podemos decir de lo anterior que el complemento de un conjunto varía según el universo en consideración.

La complementación de conjuntos tiene las siguientes propiedades.

PROPEDADES 3.7 :

i) $A \cap A^c = \emptyset$

ii) $A \cup A^c = \mathbb{U}$

iii) $(A^c)^c = A.$

DEMOSTRACION:

i) Por definición de intersección de conjuntos tenemos

$$A \cap A^c = \{x \ / \ x \in A \ y \ x \in A^c\}.$$

Es obvio que este conjunto es vacío, pues ningún elemento satisface al mismo tiempo ser elemento de A y no pertenecer a A.

ii) Es obvio que $A \cup A^c \subset \mathbb{U}$. Para cualquier elemento $x \in \mathbb{U}$ y por la propiedad (i) anterior tenemos que $x \in A$ o bien $x \in A^c$. Cualquiera que sea el caso, $x \in A$ o $x \in A^c$, la propiedad 3.2 (i) implica $x \in A \cup A^c$ y, por lo tanto $\mathbb{U} \subset A \cup A^c$. De esta manera, por contención mutua se concluye que $A \cup A^c = \mathbb{U}$.

iii) Dado un elemento $x \in A$, las propiedades (i) y (ii) anteriores implican que $x \notin A^c$; pero de nuevo tenemos que $x \in (A^c)^c$, pues si x no es elemento de A^c, será elemento del complemento de A^c. Entonces por definición de subconjunto se tiene que $A \subset (A^c)^c$.

Tomemos un elemento $x \in (A^c)^c$. Se tiene de nuevo que $x \notin A^c$ pues x es un elemento del complemento de A^c; pero $x \notin A^c$ implica que $x \in A$. Entonces $(A^c)^c \subset A$, por mutua contención concluimos que $A = (A^c)^c$. ∎

Las siguientes propiedades son conocidas como leyes de DeMorgan, y muestran cómo actúa la complementación de conjuntos sobre la unión y la intersección.

PROPOSICION 3.8 : (Leyes de DeMorgan)

Para cualesquiera conjuntos A y B valen las siguientes propiedades:

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

DEMOSTRACION:

(i) Sea $x \in (A \cup B)^c$. Por definición de complemento se tiene que $x \notin (A \cup B)$ y, por lo tanto x no es elemento de ninguno de los conjuntos A y B, esto es, $x \notin A$ y $x \notin B$. Pero si $x \notin A$ y $x \notin B$ tenemos que $x \in A^c$ y $x \in B^c$, o sea, $x \in A^c \cap B^c$ y, por lo tanto $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Análogamente, $x \in A^c \cap B^c$ implican que $x \in A^c$ y $x \in B^c$; por lo que $x \notin A$ y $x \notin B$. De lo anterior se sigue que $x \notin (A \cup B)$, por lo que x debe ser elemento de $(A \cup B)^c$. Así tenemos que $(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c$ concluyendo por mutua contención que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

ii) Elijamos un elemento $x \in (A \cap B)^c$. Entonces $x \notin (A \cap B)$ y por lo tanto $x \notin A$ o $x \notin B$; luego $x \in A^c$ o $x \in B^c$, por lo que $x \in A^c \cup B^c$. Esto demustra que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Ahora bien, por la propiedad de intersección de conjuntos tenemos que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, por lo que al tomar los complementos tendremos que $A^c \subset (A \cap B)^c$ y $B^c \subset (A \cap B)^c$, tomando la unión de las dos expresiones anteriores obtendremos que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ con lo que se demuestra la contención mutua y por lo tanto, la igualdad de los conjuntos $(A \cap B)^c$ y $A^c \cup B^c$. ■

En la demostración anterior se utilizó en el inciso (ii) un resultado que dice:

"Si A es un subconjunto de B, al tomar complementos será B^c un subconjunto de A^c"; esto es, $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

Lo anterior se sigue de observar que un elemento x que pertenece al universo y no pertenece a B, tampoco puede pertenecer a A, pues A es subconjunto de B. Por lo tanto, $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, es decir, $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$ y, por definición de subconjunto tenemos que $B^c \subset A^c$.

EJEMPLOS:

9.- Consideremos al conjunto $\mathbb{U} = \{a,b,c,d,e\}$ y los subconjuntos de $\mathbb{U}$ $A = \{a,e\}$ y $B = \{a,c,e\}$.

Los complementos de A y B con respecto al conjunto $\mathbb{U}$ son respectivamente, $A^c = \{b,c,d\}$ y $B^c = \{b,d\}$. El complemento del conjunto $A \cup B = \{a,c,e\}$ es $(A \cup B)^c = \{b,d\}$, por lo tanto $A^c \cap B^c = \{b,d\} = (A \cup B)^c$ cumpliéndose la propiedad 3.8 (i).

11.- De nuevo consideremos los conjuntos $\mathbb{U}$, A y B como en el ejemplo anterior. En este caso $A \cap B = \{a,e\}$ y su complemento $(A \cap B)^c = \{b,c,d\}$. Por otra parte, la unión de los complementos de A y B es $A^c \cup B^c = \{b,c,d\}$, cumpliéndose la propiedad 3.8 (ii).

DEFINICION 3.9 : La diferencia entre los conjuntos A y B es el conjunto

$$A - B = \{x \ / \ x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Se sigue de la definición de diferencia de conjuntos que $A - B = A \cap B^c$.

EJEMPLOS:

12.- La diferencia de los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,c,e\}$ es el conjunto $A - B = \{b\}$, pues b es el único elemento de A que no pertenece a B.

De igual modo $B - A = \{e\}$, por lo que podemos decir que la diferencia entre conjuntos no es conmutativa, es decir $A - B \neq B - A$.

13.- Utilizando las leyes distributivas y las leyes de DeMorgan verifiquemos la igualdad de las siguientes expresiones:

i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

iii) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

SOLUCION :

$$\text{i)}\quad A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c \qquad \text{(Por definición)}$$
$$= A \cap (B^c \cap C^c) \qquad \text{(Ley de DeMorgan)}$$
$$= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \qquad \text{(Asociatividad)}$$
$$= (A - B) \cap (A - C). \qquad \text{(Por definición)}$$

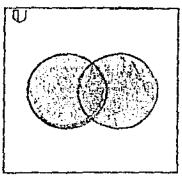
$$\text{ii)}\quad A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c \qquad \text{(Por definición)}$$
$$= A \cap (B^c \cup C^c) \qquad \text{(Ley de DeMorgan)}$$
$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \qquad \text{(Ley distributiva)}$$
$$= (A - B) \cup (A - C). \qquad \text{(Por definición)}$$

$$\text{iii)}\quad (A - B) - C = (A - B) \cap C^c \qquad \text{(Por definición)}$$
$$= (A \cap B^c) \cap C^c \qquad \text{(Por definición)}$$
$$= A \cap (B^c \cap C^c) \qquad \text{(Asociatividad)}$$
$$= A \cap (B \cup C)^c \qquad \text{(Ley de DeMorgan)}$$
$$= A - (B \cup C). \qquad \text{(Por definición)}$$

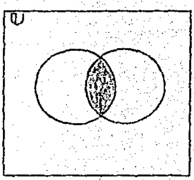
Es conveniente en ocasiones representar las operaciones entre conjuntos mediante diagramas que reciben el nombre de "Diagramas de Venn".

El conjunto universo $\mathbb{U}$ se representa mediante un rectángulo y los subconjuntos de $\mathbb{U}$ mediante circulos.

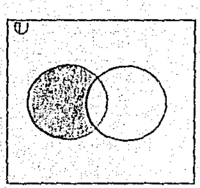
En los siguientes diagramas la parte sombreada representa la operación entre conjuntos que se indica abajo de cada rectángulo.



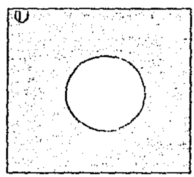
$A \cup B$



$A \cap C$



$A - B$



A^c

Los siguientes ejercicios son llamados problemas de conteo y se hace uso de las operaciones con conjuntos y diagramas de Venn para solucionarlos.

EJEMPLOS:

13.- En un grupo de 44 alumnos, 20 deben presentar exámen de español y 18 exámen de matemáticas. Si 10 alumnos deben presentar español pero no matemáticas, se desea averiguar:

a) ¿Cuántos alumnos deben presentar las dos materias?

b) ¿Cuántos alumnos deben presentar por lo menos una materia?

c) ¿Cuántos alumnos no tienen que presentar ninguna materia?

SOLUCION:

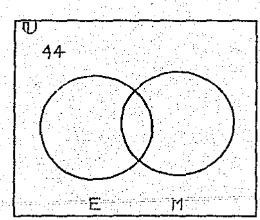
Tomemos como conjunto universo a los 44 alumnos; E y M serán los subconjuntos de $\mho$ que estén formados por los alumnos que deben presentar exámen de español y matemáticas, respectivamente. Así tendremos que

$\mho$ = {x / x es alumno de la división}

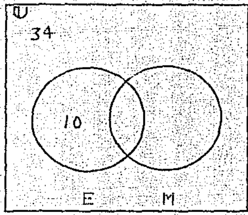
E = {x / x es alumno que debe presentar exámen de español}

M = {x / x es alumno que debe presentar exámen de matemáticas}

Mediante diagramas de Venn representémos los conjuntos anteriores:

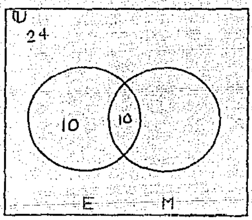


El conjunto de alumnos que deben presentar español pero no matemáticas es el conjunto E − M. Sabemos que 10 alumnos presentarán únicamente español, por lo que E − M tiene 10 elementos.



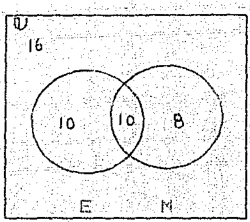
E − M

El conjunto E ∩ M está formado por los alumnos que presentan español y matemáticas. Sabemos que en total 20 alumnos presentarán español y, 10 de ellos será su única materia por aprobar. Por lo tanto, los 10 alumnos restantes presentarán tanto español como matemáticas y el conjunto E ∩ M tendrá 10 alumnos.



E ∩ M

De igual manera, de los 18 alumnos que presentarán matemáticas, 10 de ellos, como ya sabemos, presentarán ambas materias. Por lo que los 8 alumnos restantes serán los que presenten matemáticas pero no español; el conjunto M − E tendrá entonces 8 elementos.



M − E

Podemos concluir lo siguiente:

a) 10 alumnos deben presentar ambas materias.

b) Los alumnos que presentarán al menos una materia son aquellos que pertenecen al conjunto E o al conjunto M; es decir, aquellos que pertenecen al conjunto E ∪ M. Podemos decir entonces que 28 alumnos presentarán al menos una materia.

c) Finalmente, los alumnos que no deben presentar ninguna materia son aquellos que pertenecen al conjunto $(A \cup B)^c$. Puesto que el universo está formado por 44 alumnos y, 28 de ellos presentarán al menos una materia se sigue que el número de alumnos que no presentan ninguna materia es 44 − 28 = 16. Concluimos así el ejemplo 13.

14.- Se tiene un conjunto U de objetos. De estos objetos 90 tiene la propiedad A; 100 tienen la propiedad B y 75 la propiedad C. De los objetos 5 poseen las tres propiedades simultáneamente y 20 no tienen ninguna de las tres propiedades. También 20 de los objetos tienen sólo la propiedad A, 60 sólo la propiedad B y 30 sólo la propiedad C. 10 de los objetos tienen las propiedades B y C simultáneamente.

Se desea saber:

a) ¿Cuántos de los objetos tienen las propiedades A y C simultáneamente?

b) ¿Cuántos de los objetos tienen las propiedades A y B simultáneamente?

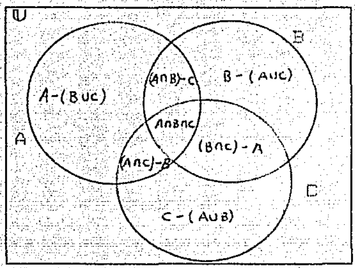
c) ¿Cuántos de los objetos no tienen ni la propiedad B ni la propiedad C?

d) ¿Cuántos de los objetos tiene la propiedad A, la propiedad B o ambas?

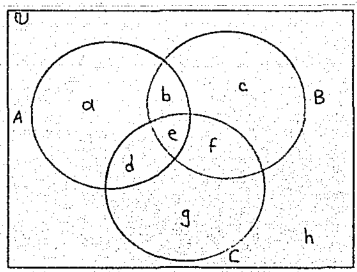
e) ¿Cuántos objetos tiene $\mathbb{U}$?

SOLUCION:

Mediante diagramas de Venn representemos la intersección de los conjuntos A, B y C, nombrando cada subconjunto en que queda dividido $\mathbb{U}$.



Usemos letras minúsculas para denotar la cantidad de elementos que posee cada subconjunto antes mencionado. Observemos que los subconjuntos en que hemos dividido al conjunto $\mathbb{U}$ son conjuntos ajenos, esto es, no poseen elementos comunes y, por lo tanto su intersección es vacía. De esta manera, el número de elementos que posee $\mathbb{U}$ es la suma de las cantidades de elementos que poseen cada subconjunto de $\mathbb{U}$.



Basándonos en los datos de nuestro problema podemos escribir lo siguiente:

i) El conjunto universo posee

$$a + b + c + d + e + f + g + h$$

elementos.

ii) Hay 90 elementos que poseen la propiedad A y se sigue del diagrama anterior que

$$90 = a + b + d + e.$$

iii) Los elementos que poseen la propiedad B son 100 y, se tiene entonces que

$$100 = b + c + e + f.$$

iv) El conjunto C posee 75 elementos, por lo que

$$75 = d + e + f + g.$$

v) Los elementos que poseen las tres propiedades A, B y C simultáneamente son los que pertenecen al conjunto $A \cap B \cap C$ y se tiene entonces que

$$e = 5.$$

vi) $(A \cup B \cup C)^c$ es el conjunto de los elementos que no poseen ninguna de las propiedades A, B o C. Entonces, por los datos del ejercicio se tiene que

$$h = 20.$$

vii) $A - (B \cup C)$ es el conjunto de elementos que poseen solamente la propiedad A, por lo que

$$a = 20.$$

viii) $B - (A \cup C)$ representa a los elementos que poseen solamente la propiedad B y, tendremos que

$$c = 60.$$

ix) Análogamente, $C - (A \cup B)$ es el conjunto de elementos que tienen la propiedad C y ninguna otra. Tendremos entonces que

$$g = 30.$$

x) Hay 10 elementos en el conjunto $B \cap C$, que son los que poseen tanto la propiedad B como la propiedad C. Por lo tanto

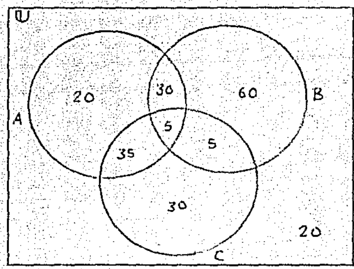
$$e + f = 10.$$

Hasta el momento conocemos los valores de a, c, e, g y h. Los valores de b, d y f podemos encontrarlos por sustitución directa en las ecuaciones anteriores.

A continuación damos una tabla con todos los valores de nuestras letras a, b, c, ... , h.

a = 20
b = 30
c = 60
d = 35
e = 5
f = 5
g = 30
h = 20

Nuestro diagrama quedará ahora de la siguiente manera:



Con todos los datos obtenidos podemos contestar a las preguntas del ejercicio:

a) $A \cap C$ tiene 35 + 5 elementos. Entonces 40 elementos poseen las propiedades A y C simultáneamente.

b) $A \cap B$ tiene 30 + 5 elementos. Por lo tanto, 35 elementos poseen las propiedades A y B simultáneamente.

c) $(B \cup C)^c$ tiene 20 + 20 elementos. 40 elementos no poseen ni la propiedad B ni la propiedad C.

d) $A \cup B$ tiene 20 + 30 + 60 + 35 + 5 + 5 elementos. Hay 155 elementos que poseen la propiedad A, la propiedad B o ambas.

e) Finalmente $\mathbb{U}$ tiene 20 + 30 + 60 + 35 + 5 + 5 + 30 + 20 = 205 elementos.

§ 4. PAR ORDENADO

Supongamos que tenemos cuatro habitaciones y deseamos hospedar a tres visitantes. Numeremos las habitaciones y los huéspedes con los números {1,2,3,4} y {1,2,3}, respectivamente.

Formemos parejas eligiendo como primer elemento una habitación y, segundo elemento un visitante. Algunas de las parejas que podemos formar son:

(1,3)	Habitación 1 se le asigna al visitante 3.
(2,2)	Habitación 2 se le asigna al visitante 2.
(4,1)	Habitación 4 se le asigna al visitante 1.

Observemos que las parejas (3,2) y (2,3) son distintas, pues la primera establece que la habitación 3 le es asignada al visitante número 2, mientras que la segunda pareja dice que la habitación 2 le es asignada al visitante número 3. Es importante entonces el orden en que aparecen los elementos en cada pareja.

DEFINICION 4.1 : El par ordenado formado por los elementos a y b es $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Diremos que a es el primer elemento y b el segundo.

Si $a \neq b$, la pareja ordenada (a,b) tendrá dos elementos que son {a} y {a,b}. Mientras que si a = b la pareja ordenada (a,a) tendrá un solo elemento que es {a}, pues $(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Por último diremos que dos parejas ordenadas (a,b) y (a',b') son iguales si y sólo si a = a' y b = b'.

§ 5. PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

DEFINICION 5.1 : El producto cartesiano de los conjunto A y B es el conjunto de parejas ordenadas (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Esto es

$$A \times B = \{(a,b) \mathbin{/} a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

El producto cartesiano de A y B se lee "A cruz B".

EJEMPLOS:

1.- El producto cartesiano de los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b,c\}$ es

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$$

2.- El producto cartesiano del conjunto $A = \{1,2\}$ consigo mismo es

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

También se denota $A \times A$ como A^2.

Observemos que en general $A \times B \neq B \times A$, pues como hemos visto anteriormente, la pareja ordenada (a,b) no necesariamente es igual a la pareja ordenada (b,a).

DEFINICION 5.2 : Una relación entre los conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

EJEMPLOS:

3.- Del producto cartesiano del ejemplo 5.2 podemos tomar las siguientes relaciones:

$R_1 = \emptyset$, pues el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

$R_2 = \{(1,a)\}$.

$R_3 = \{(1,c),(2,b),(2,a)\}$.

$R_4 = A \times B$; etc.

Para expresar que la pareja ordenada (a,b) pertenece a la relación R se ocupa también la notación aRb, la cual se lee "a está relacionado con bajo la relación R", y es equivalente a la expresión $(a,b) \in R$.

4.- Definamos la relación R en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$R = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ m \text{ es múltiplo de } n\}.$$

Esta relación está formada por las siguientes parejas:

$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ ....

$(2,2)$, $(2,4)$, $(2,6)$ ...

$(3,3)$, $(3,6)$, $(3,9)$ ....

......

Podemos observar que esta relación tiene una infinidad de elementos.

DEFINICION 5.9 : El dominio de una relación R entre A y B es el conjunto de todos los elementos de A que aparezcan en el primer lugar de alguna pareja ordenada de R. Se representa con el símbolo "dom R" que se lee "dominio de R". Por lo tanto

$$\text{dom } R = \{x \in A \ / \ xRy, \text{ para algún } y \in B\}.$$

EJEMPLOS:

5.- El dominio de la relación R dada en el ejemplo 4 es

$$\text{dom } R = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}.$$

6.- La relación $\emptyset$ tiene al conjunto vacío como su dominio; es decir,

$$\text{dom } \emptyset = \emptyset$$

7.- El dominio de la relación A x B, donde A y B son conjuntos arbitrarios, es A; esto es dom (A x B) = A.

DEFINICION 5.4 : La imagen de una relación R entre A y B es el conjunto de todos los elementos de B que aparezcan en el segundo lugar de alguna pareja ordenada de R. Se representa con el símbolo "Im R" que se lee "la imagen de la relación R". Entonces

$$\text{Im } R = \{y \in B \ / \ xRy \text{ para alguna } x \in A\}.$$

EJEMPLOS:

8.- En la relación A x B la imagen es Im (A x B) = B.

9.- Dada la siguiente relación

$$R = \{(a,1), (a,2), (b,1)\}$$

su imagen es Im R = {1,2}.

La relación inversa de $R \subset A \times B$ se obtiene intercambiando el orden de los elementos de todas las parejas ordenadas de R. La relación así obtenida será un subconjunto de B x A.

EJEMPLO:

10.- La inversa de la relación dada en el ejemplo 4 es

(1,1), (2,1), (3,1) ...

(2,2), (4,2), (6,2) ...

(3,3), (6,3), (9,3) ...

......

Podemos decir entonces que la relación inversa de "m es múltiplo de n" es la relación "n es divisible por m".

Lo anterior lo podemos expresar de la siguiente manera:

Dada la relación $R = \{(n,m) \ / \ n \in A,\ m \in B\}$ su relación inversa, que se denota por R^{-1} es

$$R^{-1} = \{(m,n) \ / \ m \in B,\ n \in A \text{ y } (n,m) \in R\}.$$

§ 6. FUNCIONES

DEFINICION 6.1 : Una función es una relación R entre A y B que satisface lo siguiente:

i) dom R = A; es decir, todo elemento de A está relacionado con algún elemento de B.

ii) Todo elemento de A está relacionado con uno y solamente un elemento de B.

Para representar que "f es función de A en B" se ocupa la notación siguiente:

$$f: A \longrightarrow B \qquad \text{ó} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

El conjunto B recibe el nombre de codominio o contradominio de la función.

Nótese que el conjunto A es el dominio de la relación f.

EJEMPLOS:

1.- La relación $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 = 1\}$ no es función.

En efecto, despejando el valor de y en la ecuación $x^2+y^2 = 1$ tendremos

$$x^2+y^2 = 1$$

$$y^2 = 1-x^2$$

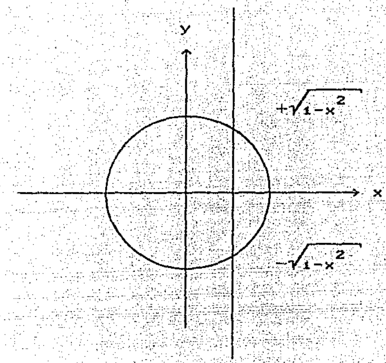
$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$|y| = \sqrt{1-x^2}$$

observando de la última igualdad que para cada valor de x obtenemos dos valores de y; estos son

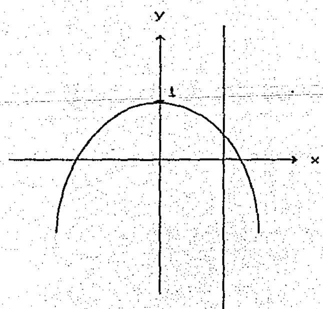
$$\left(x, +\sqrt{1-x^2}\right) \qquad y \qquad \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$$

Si dibujamos la gráfica de la ecuación $x^2+y^2 = 1$ que es una circunferencia unitaria, y trazamos una recta paralela al eje y, esta cortará la gráfica en dos puntos.



Una recta paralela al eje y
cortará en dos puntos la gráfica

2.- La relación $\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y = 1\}$ representa una función. En efecto, despejando y de la ecuación $x^2+y = 1$ obtenemos $y = 1-x^2$; por lo que para cada valor de x obtendremos un solo valor de y.



Una recta paralela al eje
y cortará en un solo punto la gráfica

3.- La relación $R = \{(x,y) \ / \ |x| = |y|\}$ no es una función, pues la ecuación $|x| = |y|$ implica que $y = \pm x$. Entonces, las siguientes parejas ordenadas pertenecen a R

$$(1,1) \quad (1,-1)$$
$$(3,3) \quad (3,-3)$$
$$(-5,-5) \quad (-5,5)$$
$$(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \quad (-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), \text{ etc.}$$

en general (x,x) y $(x,-x) \in R$ para todo número real x.

4.- La relación $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$ es llamada la función identidad y se denota mediante el símbolo $I_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Decimos que y es imagen, bajo la función f, del elemento x si $(x,y) \in f$, lo cual lo expresamos como $y = f(x)$.

DEFINICION 6.2 : La imagen de una función $f:A \longrightarrow B$ es el conjunto de todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de A. Se utiliza el símbolo "Im f", que se lee "imagen de f"; entonces

$$\text{Im } f = \{b \in B \ / \ b = f(a), \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Se acostumbra también llamar a la imagen de f, rango de f y tenemos que la imagen de una función es un subconjunto del codominio.

EJEMPLOS:

5.- Determinar el dominio e imagen de la función $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

Solución: Como la ecuación $\frac{x+3}{x-2}$ no tiene sentido para $x = 2$ el dominio de f es $\text{dom } f = \mathbb{R}-\{2\}$.

Para determinar la imagen de f hacemos $\frac{x+3}{x-2} = a$, y enseguida despejamos x en términos de a:

$$\frac{x+3}{x-2} = a$$

$$x+3 = a(x-2)$$

$$x+3 = ax-2a$$

$$2a+3 = ax-x$$

$$2a+3 = x(a-1)$$

$$x = \frac{2a+3}{a-1}$$

en este momento nos damos cuenta que a no puede valer 1, así que

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}-\{1\}.$$

6.- Determinar el dominio y rango de la función $y = \sqrt{4-x^2}$.

Solución: El dominio de f es el conjunto de todos los números reales tales que $4-x^2 \geq 0$; esto es

$$4-x^2 \geq 0$$

$$4 \geq x^2$$

$$\sqrt{4} \geq \sqrt{x^2}$$

$$2 \geq |x|$$

$$x \in [-2,2]$$

entonces $\operatorname{dom} f = [-2,2]$.

Para determinar la imagen de f hagamos $a = \sqrt{4-x^2}$, observando que $a \geq 0$ pues estamos considerando la raíz cuadrada positiva. Despejando x en términos de a obtendremos:

$$a = \sqrt{4-x^2}$$

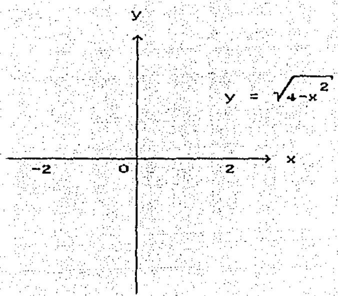
$$a^2 = 4-x^2$$

$$x^2 = 4-a^2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4-a^2}$$

$$|x| = \sqrt{4-a^2}$$

Para que la ecuación inmediata anterior se cumpla, debe ser también $a \in [-2,2]$. Así a satisface, $a \in [-2,2]$ y $a \geq 0$, por lo que Im $f = [0,2]$.



DEFINICION 6.3 : Dos funciones $f:A \longrightarrow B$ y $g:C \longrightarrow D$ son iguales si y sólo si:

i) $A = C$,

ii) $f(x) = g(x)$ para todo elemento x

iii) $B = D$.

Por lo tanto, f y g son iguales si tienen mismo dominino, codominio y regla de correspondencia.

DEFINICION 6.4 : Sea $f:A \longrightarrow B$ y C un subconjunto de B. Definamos la imagen inversa de C bajo f como el conjunto de todos los elementos $x \in A$ tales que su imagen $f(x) \in C$. lo denotamos por el símbolo $f^{-1}(C)$ "imagen inversa del conjunto C bajo f" y por lo tanto,

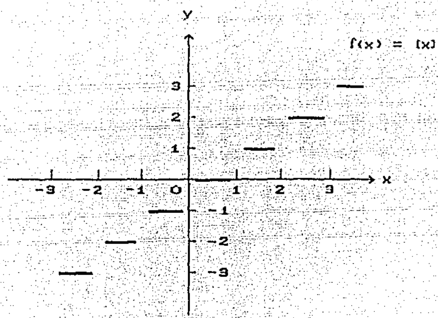
$$f^{-1}(C) = \{x \in A \ / \ f(x) \in C\}.$$

EJEMPLO:

7.- La función parte entera de x, $f(x) = [x]$, se define como el mayor entero menor o igual a x. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es $\mathbb{Z}$.

La imagen inversa del conjunto {0} es el conjunto de los números reales cuya parte entera es 0. Esto es $f^{-1}(\{0\}) = [0,1)$.

La imagen inversa del conjunto {-1,2} es el conjunto de los números reales cuya parte entera es -1 o 2. Así $f^{-1}(\{-1,2\}) = [-1,0) \cup [2,3)$.



Función parte entera de x

§ 7. COMPOSICION DE FUNCIONES

DEFINICION 7.1 : Definimos la composición de las funciones $f:A \longrightarrow B$ y $g:B \longrightarrow C$ como la nueva función "f compuesta con g", denotada por $g\circ f:A \longrightarrow C$ que asigna a cada elemento de A el elemento $g(f(a)) \in C$.

EJEMPLOS:

1.- Para las funciones $f,g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2+4x$ y $g(x) = 3x^3$ la función composición "f compuesta con g" es $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(3x^2+4x) = 3(3x^2+4x)^3$.

Podemos también hablar de la función composición "g compuesta con f" denotada por $f\circ g(x) = f(g(x))$. En este caso tendremos que $f\circ g(x) = f(g(x)) = f(3x^3) = 3(3x^3)^2+4(3x^3)$. De lo anterior concluimos que la composición de funciones no es una operación conmutativa.

2.- La función identidad $I_A:A \longrightarrow A$ es tal que para toda función $f:A \longrightarrow A$ se cumple que $f\circ I_A = I_A\circ f = f$. Es decir, la función identidad es neutra bajo la composición. Lo anterior se sigue al observar que $I_A(x) = x$, $\forall\ x \in A$.

3.- Para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x$ la función composición $g\circ f$ "f compuesta con g" es $g(f(x)) = g(x^2) = -x^2$. Mientras que la función composición $f\circ g$ "g compuesta con f" es $f(g(x)) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$. De nuevo tenemos que $g\circ f \neq f\circ g$.

DEFINICION 7.2 : El dominio de la función composición $g\circ f$ es el conjunto de las $x \in \text{dom } f$, tales que $f(x) \in \text{dom } g$. Esto es

$$\text{dom } (g\circ f) = \{x \in \text{dom } f \ / \ f(x) \in \text{dom } g\}.$$

EJEMPLOS:

4.- Encontrar el dominio de la composición $g \circ f$, donde $f(x) = \frac{1+x}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{1-x}$.

Solución: El dominio de la función f es el conjunto de los números reales distintos de cero, dom $f = \mathbb{R}-\{0\}$; mientras que el dominio de la función g es el conjunto de los números reales distintios de uno, dom $g = \mathbb{R}-\{1\}$.

Utilizando la definición de dominio de composición de funciones tenemos

$$\begin{aligned} \text{dom } (g \circ f) &= \{x \in \text{dom } f \ / \ f(x) \in \text{dom } g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}-\{0\} \ / \ \tfrac{1+x}{x} \in \mathbb{R}-\{1\}\} \\ &= \{x \neq 0 \ / \ \tfrac{1+x}{x} \neq 1\}^{*} \\ &= \{x \neq 0 \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}-\{0\}. \end{aligned}$$

* $\left[\frac{1+x}{x} \neq 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.\right]$

Establezcamos ahora la regla de correspondencia de la función composición $(g \circ f)$.

Por definición de composición se tiene que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es decir,

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{\frac{1+x}{x}}{1-\frac{1+x}{x}} = -(1+x).$$

Si en este momento intentáramos encontrar el dominio de la función composición $(g \circ f)$ fijándonos en su regla de correspondencia, en este caso $(g \circ f)(x) = -(1+x)$, obtendríamos un resultado incorrecto. De la regla de correspondencia se observa que dom $g \circ f = \mathbb{R}$ y por lo tanto podemos valuar en $x = 0$, según el dominio. Pero $(g \circ f)(0)$ no está definido, pues $f(0)$ carece de sentido.

Es pues, importante calcular el dominio de la composición $(g\circ f)$ utilizando la definición 7.2.

5.- Sea $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Calcular el dominio de cada función composición $(g\circ f)$ y $(f\circ g)$, respectivamente.

Solución: El dominio de la función f consta de los valores x, para los cuales $1+x$ es mayor o igual a cero, esto es $\text{dom } f = (-\infty,1]$. El dominio de la función g es el conjunto de los reales distintos de 1, $\text{dom } g = \mathbb{R}-\{1\}$.

Ahora bien , $\text{dom }(g\circ f) = \{x \in \text{dom } f \ / \ f(x) \in \text{dom } g\}$

$$= \{x \in (-\infty,1] \ / \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}-\{1\}\}$$
$$= \{x \in (-\infty,1] \ / \ \sqrt{1-x} \neq 1\}$$
$$= \{x \in (-\infty,1] \ / \ x \neq 0\}^{*}$$
$$= (-\infty,0) \cup (0,1].$$

* $(\sqrt{1-x} = 1$ si y sólo si $x = 0)$

Por otro lado, $\text{dom }(f\circ g) = \{x \in \text{dom } g \ / \ g(x) \in \text{dom } f\}$

$$= \{x \in \mathbb{R}-\{1\} \ / \ \frac{x+1}{x-1} \in (-\infty,1]\} \ \ldots \ (1)$$

Analizemos la expresión $\frac{x+1}{x-1} \in (-\infty,1]$. Esto equivale a resolver la desigualdad $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$.

Esto es , $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$ si y sólo si $\frac{x+1}{x-1} - 1 \leq 0$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{x+1-x+1}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2}{x-1} \leq 0$$
$$x-1 < 0$$
$$x < 1.$$

Entonces la expresión $\frac{x+1}{x-1} \in (-\infty,1]$ se satisface cuando $x < 1$, es decir, cuando $x \in (-\infty,1)$.

Continuemos calculando el dominio de la función composición $(f\circ g)$, que por la ecuación (1) y el análisis anterior tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f\circ g) &= \{x \in \mathbb{R}-\{1\} \ / \ \tfrac{x+1}{x-1} \in (-\infty, 1]\} \\ &= \{x \neq 1 \ / \ x \in (-\infty, 1)\} \\ &= (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Observemos que no ha sido necesario establecer las reglas de correspondencia de las funciones $g\circ f$ y $f\circ g$ para encontrar su dominios respectivos.

DEFINICION 7.3 : Un inverso derecho de $f:A \longrightarrow B$ es una función $g:B \longrightarrow A$ que satisface $g o f = I_A$. Esto es, $g o f$ es la función identidad en A. De igual modo, g es inverso izquierdo de f si se satisface $f o g = I_B$.

Si g es inverso derecho e izquierdo de f, entonces g se llama inverso de f y decimos que f es invertible.

EJEMPLO:

6.- De nuevo el símbolo $[x]$ representa la parte entera de x. Sean las funciones $f:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definidas por $f(n) = 2n$ y $g(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ respectivamente. Entonces $g o f:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $(g o f)(n) = g(2n) = \left[\frac{2n}{n}\right] = n$, es decir, $g o f = I_{\mathbb{Z}}$.

Por otra parte $f o g:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(f o g)(n) = f(g(n)) = f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = 2\left[\frac{n}{2}\right]$, que es un número distinto de n, cuando n es un número entero impar. Puesto que $(f o g)(n) = 2\left[\frac{n}{2}\right] \neq n$ para todo número entero impar, se tiene que $f o g \neq I_{\mathbb{Z}}$.

En este caso g es inverso izquierdo de f, pero no es inverso derecho.

TEOREMA 7.4 : Si $f:A \longrightarrow B$ tiene inverso derecho $g_1:B \longrightarrow A$ e inverso izquierdo $g_2:B \longrightarrow A$, entonces $g_1 = g_2$ y f es invertible.

DEMOSTRACION:

Por definición de inversos se tiene que $g_1 o f = I_A$ y $f o g_2 = I_B$. Por lo tanto

$$g_1 = g_1 o I_B = g_1 o (f o g_2) = (g_1 o f) o g_2 = I_A o g_2 = g_2. \blacksquare$$

COROLARIO 7.5 : Si $f:A \longrightarrow B$ es invertible, entonces su inverso $g:B \longrightarrow A$ es único. $\blacksquare$

§ 8. FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

En ocasiones cuando tenemos una función f y consideramos su relación inversa resulta que ella no es función, por ejemplo:
Para la relación $R = \{(a,1),(b,1)\} \subset A \times B$, donde $A = \{a,b\}$ y $B = \{1,2\}$ su relación inversa es el conjunto $\{(1,a),(1,b)\} \subset B \times A$, el cual no representa una función pues al elemento $1 \in B$ le asigna dos elementos de A.

Encontremos condiciones que nos garanticen cuando la relación inversa de una función es también una función. Para ello comenzemos con las siguientes definiciones.

DEFINICION 8.1.: Una función $f:A \longrightarrow B$ se llama inyectiva si para cualquier par de elementos distintos a_1 y a_2 de A se satisface que $f(a_1) \neq f(a_2)$. Equivalentemente, si dos imágenes son iguales $f(a_1) = f(a_2)$, necesariamente provienen del mismo elemento, es decir, $a_1 = a_2$.

DEFINICION 8.2 : Una función $f:A \longrightarrow B$ se llama suprayectiva si $\operatorname{Im} f = B$. Esto es, si para todo elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

DEFINICION 8.3: Una función $f:A \longrightarrow B$ es biyectiva, si es a la vez inyectiva y suprayectiva.

EJEMPLOS:

1.- La función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva, pues los elemento $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ son distintos, sin embargo sus imágenes $f(1) = (1)^2 = 1$ y $f(-1) = (-1)^2 = 1$ son iguales.

2.- La función $f(x) = 2x+1$ es inyectiva. Para mostrarlo tomemos dos imágenes iguales, $f(a_1) = f(a_2)$ y, mostremos que $a_1 = a_2$. En efecto, se sigue de la siguiente igualdad $f(a_1) = f(a_2)$

$2a_1+1 = 2a_2+1$ (definición de f)

$2a_1 = 2a_2$ (restando 1 a ambas ecuaciones)

$a_1 = a_2$. (multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambas ecuaciones)

3.- La función $f:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(z) = z^2$ no es suprayectiva, pues los números enteros negativos no son imagen de ningún número entero.

PROPOSICION 8.4 : Una función es invertible si y sólo si es biyectiva.

DEMOSTRACION:

Supongamos primero que f es una función biyectiva y definamos una función $g:B \longrightarrow A$ de la siguiente manera:

Como f es suprayectiva, para cada elemento $b \in B$ existe un elemento de A tal que $b = f(a)$; además esta a es única pues f es también inyectiva. Definimos la relación $g:B \longrightarrow A$ como $g(b) = a$ para cada $b \in B$. Esta relación es una función pues la inyectividad de f asegura que al elemento $b \in B$ le asignaremos uno y sólo un elemento $a \in A$ bajo la relación g.

Tenemos entonces que para cualquier $b \in B$, $g(b) = a$ y por lo tanto $(f\circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$. Así $f\circ g = I_B$ y, g es inverso izquierdo de f. De igual manera tenemos que para cualquier $a \in A$, si $f(a) = b$ entonces $g(b) = a$ y, $(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$. Es decir, $g\circ f = I_A$ y g es inverso derecho de f. Como g es inverso derecho o izquierdo de f se tiene que f es invertible. Entonces el suponer que f es biyectiva implica que f es invertible.

Ahora supongamos que f es invertible; es decir, existe su inverso $g:B \longrightarrow A$ que satisface $g\circ f = I_A$. Mostraremos que con la nueva suposicion f debe ser biyectiva.

Escojamos dos elementos $a_1, a_2 \in A$ de tal manera que $f(a_1) = f(a_2)$. Como $a_1 = I_A(a_1) = (g\circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g\circ f)(a_2) = I_A(a_2) = a_2$ se sigue que f es inyectiva.

Para cualquier $b \in B$ tenemos $b = I_B(b) = (f\circ g)(b) = f(g(b))$; es decir, b es la imágen de $g(b) \in A$ bajo f y, así f es suprayectiva.■

PROPOSICION 8.5 : La composición de dos funciones inyectivas es una función inyectiva.

DEMOSTRACION:

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ funciones inyectivas. Escojamos elementos $a_1, a_2 \in A$ tales que $(g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2)$. Por definición de composición de funciones se tiene que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ y, como g es función inyectiva debe ser $f(a_1) = f(a_2)$. De igual manera por ser f también función inyectiva se tiene que $a_1 = a_2$. La igualdad $a_1 = a_2$ implica que $g\circ f$ es función inyectiva.■

PROPOSICION 8.6 : La composición de dos funciones suprayectivas es una función suparyectiva.

DEMOSTRACION:

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ funciones suprayectivas. La función composición es $g\circ f: A \longrightarrow C$. Para cada elemento $c \in C$ existe un elemento $b \in B$ tal que $c = f(b)$ porque g es suprayectiva. Pero también para este elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $b = f(a)$ pues f es suprayectiva. Ahora bien, de lo anterior obtenemos que $c = g(b) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$, por lo que para $c \in C$ existe $a \in A$ tal que $c = (g\circ f)(a)$; es decir, $g\circ f$ es suprayectiva.■

COROLARIO 9.7: La composición de dos funciones biyectivas es una función biyectiva. ∎

EJERCICIOS:

1.- Demuestra que $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $f:\mathbb{R}-\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$ es biyectiva.

2.- ¿Es inyectiva la siguiente función?

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 1/x, & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

3.- ¿Es biyectiva la siguiente función?

$f:[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = |x|$ valor absoluto de x.

4.- Sean $f:A \longrightarrow B$ y $g:B \longrightarrow C$ funciones tales que $g \circ f$ es inyectiva. Demuestra que necesariamente f es inyectiva.

5.- Sean $f:A \longrightarrow B$ y $g:B \longrightarrow C$ funciones tales que $g \circ f$ es suprayectiva. Demuestra que necesariamente g es suprayectiva.

§ 9. CARDINALIDAD

Decimos que dos conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si existe alguna función biyectiva $f:A \longrightarrow B$.

EJEMPLOS:

1.- Los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b,c\}$ tienen la misma cantidad de elementos pues la función $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ es biyectiva. La notación anterior significa que f es función del conjunto A al conjunto B, $f:\{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\}$ y $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

2.- Puesto que la función identidad $I_A : A \longrightarrow A$ es una biyección, confirma el hecho obvio de que A tiene el mismo número de elementos que A.

3.- Algo menos obvio es que los números naturales tengan el mismo número de elementos que el conjunto de los números naturales pares. La función biyectiva que demuestra esto es $f:\mathbb{N} \longrightarrow P$ dada por $f(n) = 2n$, y donde P representa al conjunto de los números naturales pares.

4.- Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen la misma cantidad de elementos. Para convencernos de ello demostremos que la siguiente función es una biyección:

$$f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \left[\frac{n}{2} \right].$$

i) Inyectividad. Elijamos dos elementos n y m en $\mathbb{N}$ distintos y, analizemos las siguientes posibilidades:

a) n es par y m es impar.

En este caso ,puesto que $(-1)^n$ es positivo por ser n par y, $(-1)^m$

es negativo por ser m impar se tiene que $(-1)^n[\frac{n}{2}]$ es distinto a $(-1)^m[\frac{m}{2}]$, lo que significa que $f(n) \neq f(m)$ cuando $n \neq m$.

b) n y m son pares distintos.

Existen pues elementos k y t en $\mathbb{N}$, $k \neq t$ tales que $n = 2k$ y $m = 2t$. por lo tanto $f(n) = (-1)^n[\frac{n}{2}] = (-1)^{2k}[\frac{2k}{2}] = [k] = k$ y $f(m) = (-1)^m[\frac{m}{2}] = (-1)^{2t}[\frac{2t}{2}] = [t] = t$. Como $k \neq t$ se tiene que $f(n) \neq f(m)$.

c) El caso n y m impares distintos es análogo al inciso (b).

Por lo tanto, f es inyectiva.

ii) Suprayectividad. Dado un elemento arbitrario $z \in \mathbb{Z}$ mostremos que existe un elemento $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $z = f(n)$. De nuevo consideremos los casos posibles:

a) z es entero positivo.

Ya que z es positivo, podemos elegir a n de la forma $n = 2z$ el cual es positivo, por ser producto de positivos, y $n = 2z \in \mathbb{N}$. Este n así elegido es tal que $f(n) = (-1)^n[\frac{n}{2}] = (-1)^{2z}[\frac{2z}{2}] = [z] = z$. Hemos encontrado al elemento n, $n = 2z$, que satisface $f(n) = z$.

b) z es un entero negativo.

Si $z < 0$ se tiene que $-2z > 0$ y, por lo tanto está en $\mathbb{N}$. Elijamos ahora al elemento n de la siguiente forma: $n = -2z+1$.

Tendremos ahora que $f(n) = (-1)^n[\frac{n}{2}] = (-1)^{-2z+1}[\frac{-2z+1}{2}] = -[-z+\frac{1}{2}] = -(-z)$.

Recordando que $(-1)^{-2z+1} = -1$, pues $-2z+1$ es impar y, que $-z > 0$, por lo que tenemos que $[-z+\frac{1}{2}] = -z$.

En ambos caso (a) y (b) hemos encontrado para un elemento arbitrario $z \in \mathbb{Z}$ un elemento $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $z = f(n)$. Así, f es suprayectiva y, por lo tanto biyectiva.

La función $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ asigna los elementos de $\mathbb{N}$ con los elementos de $\mathbb{Z}$ en el siguiente orden:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N}: & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{Z}: & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, \ldots \end{array}$$

Sea $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ el conjunto de los primeros números naturales. Decimos que un conjunto no vacio A es finito si para algún $n \in \mathbb{N}$ existe una biyección $f: I_n \longrightarrow A$.

DEFINICION 9.1 : Definimos el número cardinal o número de elementos de un conjunto no vacio A como el número natural n para el cual existe una función biyectiva $f: I_n \longrightarrow A$, denotando la cardinalidad de A mediante el símbolo $|A|$ y conviniendo en que $|\emptyset| = 0$. A los conjuntos que no son finitos les llamaremos infinitos.

Los siguientes lemas muestran como podemos comparar los números cardinales de los conjuntos A y B mediante una función entre A y B.

LEMA 9.2 : Si A y B son conjuntos finitos y $f: A \longrightarrow B$ es una función inyectiva entonces $|A| \leq |B|$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que A tiene n elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ distintos entre sí. Entonces los elementos $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ son distintos entre sí pues f es inyectiva y, por lo tanto hay n de ellos; por lo que B posee al menos n elementos, es decir $|A| \leq |B|$.∎

LEMA 9.3 : Si A y B son conjuntos finitos y $f: A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva, entonces $|A| \geq |B|$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $|B| = m$. Sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ con $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Para cada $i = 1,2,\ldots,m$ y cada b_i existe un elemento a_i en A tal que $f(a_i) = b_i$. Los m elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son distintos entre sí, porque si sucediera que $a_i = a_j$ con $i \neq j$, $f(a_i)$ sería igual a $f(a_j)$, esto es, $b_i = b_j$ con $i \neq j$ lo cual contradice lo supuesto anteriormente. Así, A posee al menos m elementos y $|A| \geq |B|$. ■

§ 10. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

DEFINICION 10.1 : Una relación $R \subset A \times A$ se llama de equivalencia si satisface lo siguiente:

i) Para todo $a \in A$, la pareja ordenada (a,a) pertenece a R.

ii) Cada vez que la pareja ordenada (a,b) esté en R, entonces está también la pareja (b,a).

iii) Cada vez que las parejas ordenadas (a,b) y (b,c) estan en R, también está la pareja (a,c).

Las propiedades antes escritas se conocen como propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, respectivamente.

EJEMPLOS:

1.- Si A es un conjunto arbitrario, entonces la relación $R = \{(a,a) \ / \ a \in A\} \subset A \times A$ es una equivalencia. Se conoce con el nombre de la diagonal de $A \times A$ y, debido a la propiedad de reflexividad está contenida en cualquier otra equivalencia de $A \times A$.

2.- Dado $A = \{a,b,c\}$ y $R \subset A \times A$, $R = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. La relación así definida no es equivalencia pues no cumple ninguna de las tres condiciones de la definición 10.1

3.- Dado un número fijo $k \in \mathbb{N}$ definamos la relación $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

Los números enteros n y m formarán la pareja ordenada (n,m) si existe algún número entero s para el cual se cumpla que $n-m = ks$. La relación R será entonces el siguiente conjunto

$$R = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \text{ existe } s \in \mathbb{Z} \text{ para el cual } n-m = ks\}$$

Mostremos que la relación R es una equivalencia.

i) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ la pareja (n,n) está en R, pues para $s = 0$ se satisface que $n-n = ks$.

ii) Que la pareja (n,m) pertenezca a R implica que existe un número $s \in \mathbb{Z}$ tal que $n-m = ks$. Multilicando por -1 la igualdad anterior obtenemos $-(n-m) = -(ks)$ ó $m-n = k(-s)$, por lo que la pareja (m,n) también pertenece a la relación R.

iii) Finalmente, que las parejas (n,m) y (m,r) estén en R significa que hay enteros s y t tales que $n-m = ks$ y $m-r = kt$.

Sumando ambas igualdades obtenemos que $(n-m) + (m-r) = ks + kt$ ó $n-r = k(s+t)$, por lo que la pareja (n,r) también pertenece a R.

Puesto que R es reflexiva, simétrica y transitiva, se sigue que es una equivalencia.

Una relación de equivalencia $R \subset A \times A$ divide al conjunto A, como veremos más adelante, en subconjuntos ajenos entre sí. Cada subconjunto contiene a los elementos x de A para los cuales la pareja ordenada (a,x) está en R, siendo a un elemento de A.

<u>**DEFINICION 10.2**</u> : Sea R una equivalencia en $A \times A$ y a un elemento de A. La clase de equivalencia de a módulo R, denotada por el símbolo $[a]_R$, es el conjunto de los $x \in A$ para los cuales la pareja ordenada (x,a) está en R.

Así, $[a]_R = \{x \in A \ / \ xRa\}$; recordando que xRa significa que la pareja ordenada (x,a) está en R, y se lee "x está relacionado con a bajo la relación R". Obsérvese que es indistinto definir la clase de equivalencia de a módulo R como el conjunto $\{x \in A \ / \ xRa\}$ o como el conjunto $\{x \in A \ / \ aRx\}$, pues como R es equivalencia, es simétrica y por lo tanto xRa si y sólo si aRx.

EJEMPLOS:

4.- La diagonal del conunto $A = \{1,2,3\}$ es la equivalencia $R \subset A \times A$ que consiste de las siguiente parejas ordenadas:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

La clase de equivalencia del elemento $1 \in A$ es el conjunto de todos los elementos de A tales que $xR1$ ó $1Rx$. Como el único elemento relacionado bajo R con el 1 es el 1 mismo, se sigue que $[1]_R = \{1\}$. Análogamente para 2 y $3 \in A$ se tiene que $[2]_R = \{2\}$ y $[3]_R = \{3\}$.

Observemos que el conjunto A ha sido dividido en tres subconjuntos mutuamente ajenos; a saber, $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

5.- Como caso particular tomemos $k = 2$ en la relación R del ejemplo 3. Entonces la relación R quedará de la siguiente manera:

$$R = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \text{ existe } s \in \mathbb{Z} \text{ para el cual } n-m = 2s\}.$$

Calculemos las clases de equivalencia módulo R de los elementos 0 y 1.

La clase de equivalencia módulo R del elemento 0 es $[0]_R = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ xR0\}$. Por definición de R, la expresión $xR0$ significa que existe algún número $s \in \mathbb{Z}$ tal que $x-0 = 2s$ ó $x = 2s$; es decir, los números relacioados con 0 bajo R serán los enteros pares. Así

$[0]_R = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \text{ existe } s \in \mathbb{Z} \text{ para el cual } x-0 = 2s\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2s\} = \{x \ / \ x \in \mathbb{Z} \text{ y } x \text{ es par}\}$.

De manera análoga calculamos la clase de equivalencia módulo R del elemento 1.

$[1]_R = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ yR1\} = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ y-1 = 2s \text{ para algún } s \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ y = 2s+1,\ s \in \mathbb{Z}\} = \{y \ / \ y \in \mathbb{Z}, \text{ y es impar}\}$.

Es fácil verificar que $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \ldots$ y $[1]_R = [3]_R = [5]_R = \ldots$

El siguiente lema muestra que dos clases de equivalencia son iguales ó ajenas entre si.

LEMA 10.3: Lo siguiente se cumple para cualesquiera elementos a y b de A.

i) $[a]_R = [b]_R$ si y sólo si a está relacionado bajo R con b.

ii) $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ si y sólo si a no está relacionado bajo R con b.

DEMOSTRACION:

i) Supongamos que a está relacionado con b; esto se expresa como aRb. Sea $x \in [a]_R$, es decir, xRa. Por transitividad de R, xRa y aRb implica que xRb, es decir, $x \in [b]_R$ y, por lo tanto $[a]_R \subset [b]_R$. Análogamente $x \in [b]_R$ implica que xRb. Puesto que aRb, por la simetría de R se cumple que b está relacionado con a, es decir, bRa. Ahora bien, xRb y bRa implica que xRa, por lo que $x \in [a]_R$. Por mutua contención tenemos que $[a]_R = [b]_R$.

Tomemos ahora como hipótesis que $[a]_R = [b]_R$. Por reflexividad de R se cumple que $a \in [a]_R$; pero $[a]_R = [b]_R$ por lo que $a \in [b]_R$ y, por lo tanto aRb. Hemos demostrado el inciso (i).

ii) Supongamos primero que los elementos a y b no están relacionados bajo R. Demostremos que necesariamente debe ser $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$. Si suponemos que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, entonces existe al menos un elemento $x \in [a]_R$ y $x \in [b]_R$; es decir, xRa y xRb. Por simetría y transitividad de R, aRx y xRb implica que aRb. Pero aRb es una contradicción a la hipótesis, por lo que debe ser $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Ahora la hipótesis es que $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, y debemos mostrar que a no está relacionado bajo R con b, $(a,b) \notin R$.

Observemos que no puede suceder que a esté relacionado bajo R con b, pues aRb $\Rightarrow b \in [a]_R$, y por reflexividad $b \in [b]_R$. Lo anterior implica que $b \in [a]_R \cap [b]_R$ y $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, de nuevo contradiciendo la hipótesis. Así $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \Rightarrow (a,b) \notin R$. ∎

DEFINICION 10.4 : Sea R una equivalencia en A. El conjunto de las clases de equivalencia módulo R es denotado por el símbolo A/R, y recibe el nombre de sistema de clases de equivalencia de A módulo R. Así $A/R = \{[a]_R \ / \ a \in A\}$.

EJEMPLOS:

6.- Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y la siguiente relación $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\} \subset A \times A$. La relación es una equivalencia en A, por lo que podemos encontrar las clases de equivalencia de A módulo R.

Los elementos de A que están relacionados con el 1, son el 1 mismo y 3. Por lo tanto $[1]_R = \{1,3\}$. De igual manera tenemos que $[2]_R = \{2\}$ y $[3]_R = \{1,3\}$.

Observemos que $[1]_R = [3]_R = \{1,3\}$ pues 1R3. Además, $[1]_R \cap [2]_R = \emptyset$ pues 1R2; es decir 1 no está relacionado con 2. Lo anterior se cumple tal como lo enunciado en el lema 10.3.

El sistema de clases de equivalencia de A módulo R es para este caso $A/R = \{[a]_R \ / \ a \in A\} = \{\{1,3\},\{2\}\}$.

7.- Las clases de equivalencia definidas por la relación R del ejemplo 10.5, $R = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ \text{existe } s \in \mathbb{Z} \text{ para el cual } n-m = 2s\}$, son $[0]_R = \{x \ / \ x \text{ es entero par}\}$ y $[1]_R = \{y \ / \ y \text{ es entero impar}\}$. Por lo que el sistema de clases de equivalencia será

$$\mathbb{Z}/R = \{\{x \ / \ x \text{ es entero par}\},\{y \ / \ y \text{ es entero impar}\}\}.$$

§ 11. PARTICIONES

DEFINICION 11.1 : Una partición de un conjunto A es una familia de subconjuntos de A, $\{A\}_\alpha$, $\alpha \in I$, donde I es un conjunto de índices y satisfacen:

i) Para $\alpha \neq \beta$, se tiene que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$,

ii) $A_\alpha \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in I$,

iii) $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Entonces una partición del conjunto A es una familia de subconjuntos no vacios de A, mutuamente ajenos y cuya unión es A.

EJEMPLOS:

1.- Para un conjunto arbitrario A existen al menos dos particiones; a saber:

i) La partición cuya familia consta solamente del elemento A, que es $\{A\}$;

ii) La partición que consta de todos los subconjuntos de A que tienen un solo elemento, que es $\{\{a\}\}$, $a \in A$.

Así, para el conjunto $A = \{1,2,3\}$ las particiones antes mencionadas serán:

i) $\{A\} = \{\{1,2,3\}\}$ y

ii) $\{\{a\}\} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

2.- Otras particiones del conjunto A son: $P = \{\{1,2\},\{3\}\}$; $P = \{\{1\},\{2,3\}\}$; $P = \{\{1,3\},\{2\}\}$; etc. Mientras que la familia de subconjuntos de A, $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ no es partición pues $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \neq \emptyset$.

AFIRMACION 1 : Dada una equivalencia $R \subset A \times A$ se tiene que el sistema de clases de equivalencia de A módulo R, $A/R = \{[a]_R \;/\; a \in A\}$, es una partición de A.

DEMOSTRACION:

i) Es obvio que para todo $a \in A$, $[a]_R \neq \emptyset$; pues por reflexividad de R $a \in [a]_R$.

ii) El lema 10.3 asegura que $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ cuando $(a,b) \notin R$, es decir, cualesquiera dos clases de equivalencia distintas entre si son mutuamente ajenas.

iii) Es claro que $\bigcup_{x\in A}[x]_R \subset A$ pues A es el conjunto universo. Si $y \in A$, entonces $y \in [y]_R$, y por las propiedades de la unión de conjuntos se tendrá que $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$. Por la doble contención $A \subset \bigcup_{x\in A}[x]_R$ y $\bigcup_{x\in A}[x]_R \subset A$ concluimos que $A = \bigcup_{x\in A}[x]_R$. ∎

La afirmación anterior nos asegura que dada una relación R de equivalencia en A, podemos generar una partición de A tomando al sistema A/R de las clases de equivalencia de A módulo R.

Veamos ahora, como dada una partición del conjunto A podemos generar una relación de equivalencia en A.

Denotemos con la letra P a una partición $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ del conjunto A y definamos la relación $R_P \subset A \times A$ de la siguiente manera:
La pareja (x,y) está en R_P si y sólo si existe un subconjunto A_α de la partición P de tal manera que x e y estén en A_α.

AFIRMACION 2 : La relación R_P así definida es una relación de equivalencia en A.

DEMOSTRACION:

Sea $a \in A$. Por ser P una partición de A, existe un índice $\alpha \in I$ para el cual $a \in A_\alpha$; y por lo tanto, de acuerdo a la definición de R_P la pareja (a,a) pertenece a R_P. Esto demuestra que la relación es reflexiva.

Si la pareja (a,b) pertenece a R_P existe un índice $\beta \in I$ tal que a y b $\in A_\beta$. Como es lo mismo decir a y b están en R_P que b y a están en R_P, se sigue que la pareja (b,a) $\in R_P$. Por lo tanto, R_P es simétrica.

Por último, dadas las parejas (a,b) y (b,c) $\in R_P$, existen índices γ y $\eta \in I$ tales que a,b $\in A_\gamma$ y b,c $\in A_\eta$. Puesto que la intersección de los conjuntos A_γ y A_η es no vacía, $A_\gamma \cap A_\eta = \{b\}$, los conjuntos A_γ y A_η deberán ser iguales, pues en una partición P los subconjuntos son mutuamenta ajenos. Por lo tanto a,b,c $\in A_\gamma = A_\eta$, lo cual implica que la pareja (a,c) $\in R_P$ y, la relación es transitiva. Como R_P satisface la reflexividad, simetría y transitivadad es entonces, una relación de euivalencia en A.■

EJEMPLOS:

3.- La partición $P = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ del conjunto $A = \{1,2,3\}$ genera, de acuerdo con lo anterior, la relación $R_P = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ la cual es la diagoanl de A x A, que es una equivalencia.

4.- La partición $P = \{\{1,2\},\{3\}\}$ del mismo conjunto A genera la relación $R_P = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, la cual es, por la afirmación 2, una equivalencia en A.

§ 12. GRUPOS ANILLOS Y CAMPOS

En este capítulo se dará la definición de grupo, anillo y campo, ilustando mediante ejemplos cada una de las definiciones y sin profundizar en el estudio de ellos, pues se requeriría bastante tiempo para hacerlo.

DEFINICION 12.1 : Una operación binaria en un conjunto no vacio A es una función de AxA en A, $*: A\times A \longrightarrow A$.

Esto es, una operacion binaria $*$ asigna a cada pareja ordenada de elementos de A un tercer elemento de A, $*(a,b) = a*b$, donde a y $b \in A$. El símbolo $*$ lo podemos cambiar por cualquier símbolo conocido, como por ejemplo "+", "·", "−", etc.

EJEMPLOS:

1.- La suma de números naturales "+" es una operación binaria en $\mathbb{N}$, pues $+(a,b) = a+b \in \mathbb{N}$.

2.- La diferencia de números naturales "−" no es una operación binaria en $\mathbb{N}$, pues $-(a,b) = a-b$ no es un número natural si $b > a$; también se dice que no es una operación cerrada en $\mathbb{N}$.

3.- La composición de funciones de un conjunto en sí mismo es una operación binaria, pues al componer dos funciones obtenemos otra función.

Puesto que una operación binaria, tal como lo dice su nombre, actúa sobre dos elementos, la expresión $a*b*c$ es confusa pues se puede considerar como $(a*b)*c$ o $a*(b*c)$.

Tomemos como ejemplo la operación binaria "$-$" diferencia de números enteros. Para los números $a = 2$, $b = 6$ y $c = 4$ tenemos

$$(a*b)*c = (a-b)-c = (2-6)-4 = (-4)-4 = -8$$

$$a*(b*c) = a-(b-c) = 2-(6-4) = 2-(2) = 0$$

por lo que no necesariamente se cumple $(a*b)*c = a*(b*c)$.

DEFINICION 12.2 : Una operación binaria en A es asociativa si $(a*b)*c = a*(b*c)$ para toda terna de elementos $a,b,c \in A$.

Si la operación binaria es asociativa, las expresiones $(a*b)*c$ y $a*(b*c)$ son iguales; eliminándose la confusión en la expresión $a*b*c$.

DEFINICION 12.3 : Un grupo es un conjunto no vacío G en el cual se ha definido una operación binaria asociativa $*: G\times G \longrightarrow G$ que satisface:

i) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e*a = a*e = a$ para toda $a \in G$.

ii) Para cada $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a*b = b*a = e$.

La propiedad (ii) se conoce como la existencia del inverso de a bajo la operación $*$. Cuando $a*b = b*a$ para cualesquiera dos elementos a y b de G, se dice que G es un grupo conmutativo.

EJEMPLOS:

4.- El conjunto de funciones biyectivas de un conjunto $A = \{a,b,c\}$ en sí mismo con la operación binaria composición de funciones es un grupo no conmutativo, denotado como S_3. El conjunto S_3 está integrado por las funciones siguientes:

$f_1 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $f_2 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, $f_3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $f_4 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$,

$f_5 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $f_6 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

EJERCICIO:

Diga quién es el elemento e de S_3; el inverso bajo la composición para cada uno de los elementos de S_3 y encuéntrese dos funciones los cuales no conmuten bajo la composición.

5.- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación binaria "+" adición, es un grupo conmutativo donde $0 \in \mathbb{Z}$ es el elemento e del grupo y cada entero $z \in \mathbb{Z}$ tiene a $(-z)$ como su inverso aditivo.

6.- El conjunto $G = \{1,-1\}$ de números reales con la operación producto "·" es un grupo conmutativo. En este caso $e = 1$ y cada elemento es inverso multiplicativo de si mismo.

TEOREMA 12.4 : Para cualquier grupo G con operación binaria $*$, se cumple lo siguiente:

i) El elemento $e \in G$ es único.

ii) Vale la ley de cancelación; esto es, $a*x = a*y$ implica que $x = y$.

DEMOSTRACION:

i) Supongamos que existe otro elemento $e' \in G$ neutro bajo la operación $*$; esto es, $e'*a = a*e' = a \ \forall a \in G$. Entonces $e = e*e' = e'$.

ii) Dada la igualdad $a*x = a*y$, como G es grupo, para el elemento $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a*b = b*a = e$. Por lo que tendremos

$b*(a*x) = b*(a*y)$ (existencia del inverso de a)

$(b*a)*x = (b*a)*y$ (asociatividad de la operación $*$)

$e*x = e*y$ (definición de inverso)

$x = y$. ■ (definición de neutro bajo $*$)

LEMA 12.5 : En un grupo G cada elemento posee inverso único bajo la operación $*$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que a tiene dos inversos bajo $*$, b y b'. Entonces $a*b = e$ y $a*b' = e$; comparando las dos igualdades anteriores obtenemos que $a*b = a*b'$. Aplicando la ley de cancelación obtenemos $b = b'$; de esta manera el inverso de a bajo la operación $*$ es único.∎

De ahora en adelante denotaremos al inverso de a bajo $*$ como a^{-1}; así $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$.

DEFINICION 12.6 : Un anillo es un conjunto no vacio A en el cual se han definido dos operaciones binarias asociativas, llamadas suma "+" y producto "·" y satisface además los siguientes axiomas:

i) Hay un elemento $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a \ \forall \ a \in A$.

ii) Para cada $a \in A$ existe un elemento $(-a) \in A$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

iii) $a + b = b + a$ para cualesquiera elementos a y $b \in A$.

iv) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ para cualesquiera elementos a, b y $c \in A$.

Los axiomas (i), (ii) y (iii) dicen simplemente que A es un grupo aditivo conmutativo y el axioma (iv) se conoce como leyes distributivas.

Puede o no suceder que el conjuto A satisfaga los dos axiomas siguientes:

v) $a\cdot b = b\cdot a$ para cualesquiera elementos a y $b \in A$.

vi) Existe un elemento $1 \in A$ tal que $1\cdot a = a\cdot 1 = a$ para todo $a \in A$.

En caso de que A satisfaga también estas dos últimos axiomas se dice que A es un anillo conmutativo con elemento unitario.

EJEMPLOS:

7.- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con las operaciones ordinarias de suma y producto es un anillo conmutativo con elemento unitario.

8.- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con las operaciones de suma y producto no es un anillo pues no satisface los axiomas (i) y (ii).

9.- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la suma y multiplicación de números racionales es un anillo conmutativo con elemento unitario.

10.- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la adición y multiplicación habituales es un anillo conmutativo con elemento unitario.

11.- El conjunto de los enteros módulo 4, denotado con el símbolo $\mathbb{Z}_4$, con la adición y multiplicación módulo 4 es el conjunto de los símbolos $\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$, donde la adición módulo 4 se define como $\overline{i}+\overline{j} = \overline{k}$, donde k es el residuo de la división entera de i+j entre 4; así por ejemplo $\overline{2}+\overline{3} = \overline{1}$, pues 2+3 = 5 dá residuo 1 al ser dividido entre 4.

La multiplicación módulo 4 se define de manera análoga como $\overline{i}\cdot\overline{j} = \overline{k}$, donde k es el residuo de la división entera de i·j entre 4; así por ejemplo $\overline{2}\cdot\overline{3} = \overline{2}$, pues 2·3 = 6 tiene residuo 2 al ser dividido entre 4.

Las tablas de multiplicación y adición módulo 4 quedan de la siguiente manera:

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Es fácil comprobar que este conjunto forma un anillo conmutativo con elemento unitario.

Observemos también que tiene la particularidad de que $\overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{0}$, siendo $\overline{2} \neq \overline{0}$. Esto da lugar a la siguiente definición.

DEFINICION 12.7 : Sea A un anillo conmutativo. El elemento $a \neq 0 \in A$ se llama divisor de cero si existe un elemento $b \neq 0 \in A$ tal que $a\cdot b = 0$

De esta manera el elemento $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ es un divisor de cero.

Los conjuntos de números enteros, racionales y reales no tienen divisores de cero pues si $a\cdot b = 0$, entonces al menos uno de los dos tiene que ser cero; esto es, $a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

DEFINICION 12.8 : Un anillo conmutativo es un dominio entero si no tiene divisores de cero.

Los conjuntos de números enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$ son ejemplos de dominios enteros. De igual manera, el conjunto $\mathbb{Z}_4$ no es un dominio entero, pues hemos visto que existe el elemento $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ distinto de cero tal que $\overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{0}$.

A pesar de que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero, no tiene la propiedad de que sus elementos distintos de cero formen un grupo bajo la multiplicación, pues en $\mathbb{Z}$ no existen todos los inversos multiplicativos.

Los conjuntos de los números racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$ sí tienen esta propiedad, por lo que daremos la siguiente definición.

DEFINICION 12.9 : Un anillo A se dice que es anillo con división si sus elementos distintos de cero forman un grupo bajo la multiplicación.

Finalmente, los anillos conmutativos con división reciben el nombre de campos, con los cuales estamos familiarizados de sus propiedades pues los números racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$ son campos.

DEFINICION 12.10: Un campo es un anillo conmutativo con división.

Podemos resumir las definiciones anteriores diciendo que un campo es un anillo conmutativo con elemento unitario, en el cual todo elemento distinto de cero tiene inverso multiplicativo en el mismo conjunto.

§ 13. NUMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ formado por los números 1,2,3,... los aprendimos desde niños de una manera sencilla al contar colecciónes de objetos tales como dos carros, una pelota, tres dulces, etc.; podemos decir entonces que el conjunto de los números naturales los aprendimos de una manera natural.

En el año de 1899 el matemático italiano Giuseppe Peano basándose en las propiedades más sencillas de los números naturales estableció cinco postulados, que llevan su nombre, los cuales reflejan todas las propiedades de este conjunto.

Postualdos de Peano:

Postulado I. Existe un elemento llamado $1 \in \mathbb{N}$;

Postulado II. Para cada elemento $a \in \mathbb{N}$ existe un único elemento llamado sucesor de a, denotado como a^*.

Postulado III. El número 1 no es sucesor de nadie, esto es $1 \neq a^*$ para cualquier $a \in \mathbb{N}$.

Postulado IV. Si dos números naturales m y n tienen el mismo sucesor entonces son iguales; esto es, $m^* = n^* \Rightarrow m = n$.

Postulado V. (Principio de inducción) Todo subconjunto $C \subset \mathbb{N}$ que cumpla lo siguiente

i) $1 \in \mathbb{N}$,

ii) Cada vez que $c \in C$, entonces el sucesor de c, $c^* \in C$,

es el mismo $\mathbb{N}$.

Con base en estos cinco postulados definirémos las operaciónes básicas de los números naturales.

DEFINICION 13.1 : Definimos la operación suma en $\mathbb{N}$ de la siguiente manera:

i) $a+1 = a^* \ \forall\ a \in \mathbb{N}$;

ii) $a+b^* = (a+b)^*$.

Utilizando los cinco postulados anteriores podemos demostrar propiedades que cumple la suma de números naturales.

PROPIEDADES 13.2 :

a) La operación suma de números naturales "+" es una operación binaria. Esto es, para $a,b \in \mathbb{N}$, $a+b \in \mathbb{N}$.

b) La suma de números naturales es una operación asociativa. Es decir, para números $a,b,c \in \mathbb{N}$ cualesquiera, se cumple que $(a+b)+c = a+(b+c)$.

c) La suma de números naturales es una operación conmutativa. Esto es, para cualesquiera números $a,b \in \mathbb{N}$, $a+b = b+a$.

d) Cumple la ley cancelativa; esto es $a+b = c+b \Rightarrow a = c$.

DEMOSTRACION:

a) Para demostrar que $m+n \in \mathbb{N}$ cada vez que $m,n \in \mathbb{N}$ aplicaremos el postulado v (principio de inducción) respecto de n.

i) La propiedad es cierta para $n = 1$, pues $m+n = m+1 = m^* \in \mathbb{N}$ por definición de sucesor.

ii) Supongamos que se verifica para $n = k$, esto es $m+k \in \mathbb{N}$.
Como sabemos por el postulado I y el inciso (i) de la definición de suma, se verifica $\forall\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow k^* \in \mathbb{N}$, por lo que $m+k+1 \in \mathbb{N}$ pues $m+k \in \mathbb{N}$, que es justamente lo que queríamos demostrar.

b) Para demostrar que $(a+b)+c = a+(b+c)$ lo haremos por recurrencia respecto a c.

i) $(a+b)+1 = a+(b+1)$ pues $(a+b)+1 = (a+b)^*$ y $a+(b+1) = a+b^*$, que por el inciso (ii) de la definición de suma es igual a $(a+b)^*$.

ii) Supongamos que $(a+b)+k = a+(b+k)$. Entonces $(a+b)+(k+1) = (a+b)+k^* = (a+b+k)^*$, por inciso (ii) de la definición de suma.

Por otra parte, $a+(b+k)+1 = a+[(b+k)+1] = a+(b+k)^* = (a+b+k)^*$ demostrándose así que la suma de números naturales es una operación asociativa.

Los incisos c) y d) quedan de ejercicio.∎

DEFINICION 13.3 : Definimos la operación producto en $\mathbb{N}$ de la siguiente manera:

i) $a\cdot 1 = a \ \forall a \in \mathbb{N}$;

ii) $a\cdot b^* = a\cdot b + a$.

La operación producto de números naturales satisface las siguientes propiedades.

PROPIEDADES 13.4 :

a) La multiplicación de números naturales es una operación binaria.

b) Es asociaitiva, pues para cualesquiera números $a,b,c \in \mathbb{N}$ se cumple que $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

c) Es una operación conmutativa, pues para cualesquiera números $a,b \in \mathbb{N}$ se cumple que $a\cdot b = b\cdot a$.

d) Cumple la ley de cancelación; esto es $a\cdot b = c\cdot b \Rightarrow a = c$

Ambas operaciones, adición y multiplicación, están relacionadas por las leyes distributivas

e) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

f) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

DEMOSTRACION:

Demostremos la propiedad (e), las demás propiedades quedan de ejercicio.

i) se verifica para $c = 1$ pues $a\cdot(b+1) = a\cdot b^* = a\cdot b + a$, por definión de $a\cdot b^*$; por otra parte, $a\cdot b + a\cdot 1 = a\cdot b + a$ pues por definición $a\cdot 1 = a$.
ii) Supongamos que se verifica para $c = k$, y demostremos que se verifica para $k+1$. En efecto, de $a\cdot(b+k) = a\cdot b + a\cdot k$ tenemos:
$a\cdot[b+(k+1)] = a\cdot[b + k^*] = a\cdot[(b+k)^*] = a\cdot(b+k) + a = a\cdot b + a\cdot k + a$.
Por otra parte, $a\cdot b + a\cdot(k+1) = a\cdot b + a\cdot k^* = a\cdot b + a\cdot k + a$ demostrándose así que las expresiones $a\cdot[b+(k+1)]$ y $a\cdot b + a\cdot(k+1)$ son iguales. ■

El principio de inducción de los números naturales se utiliza ampliamente en la demostración de proposiciones generales deducidas a partir de proposiciones particulares; por ejemplo, observemos que

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Con base a los resultados anteriores podríamos concluir la ley general para cualquier número natural de la siguiente manera:

"Para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $S_n = \frac{n}{n+1}$"

El siguiente paso es demostrar que verdaderamente es cierta dicha ley. Para ello se hace uso del principio de inducción de los números naturales de la siguiente manera:
i) Se demuestra que vale para el primer natural $n = 1$; esto es, hay que sustituir en la ley general el número $n = 1$ y verificar que se obtiene el resultado de S_1. En efecto, $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.
ii) Suponemos que la ley vale para un cierto natural k, y demostramos

que se cumple también para k+1; esto es, cada vez que $S_n = \frac{n}{n+1}$ debe también ser cierto que $S_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$. En efecto, observemos que S_{n+1} se obtiene sumándole a S_n el término correspondiente para n+1, que en este caso es $\frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Por lo tanto, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$ $\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$ que es justamente lo que queríamos demostrar.

Puesto que el conjunto de números que satisfacen la ley general cumple con el principio de inducción se concluye que dicho conjunto es el de los números naturales. Demos más ejemplos del principio de inducción.

EJEMPLOS:

1.- Demostrar que la suma $S_n = 1+2+3+...+n$ de los primeros n números naturales es $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

En este caso $S_1 = 1$, y para n = 1 se tiene que $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, por lo que el resultado es válido para n = 1.

Suponemos ahora que el resultado es válido para un cierto natural k; es decir $S_k = 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$, y demostramos que también es válido pra k+1.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que es lo queríamos demostrar.

2.- Demostrar que la suma $S_n = 1^2+2^2+3^2+...+n^2$ de los cuadrados de los primeros n números naturales es $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Para n = 1 tenemos que $S_1 = 1^2 = 1$, y $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$, por lo que vale para n = 1.

Suponemos que se cumple para cierto entero k; $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

y demostramos que se cumple también para k+1. Esto es, $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$

$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$ que es

lo que queríamos demostrar.

3.- Demostrar que para todo número natural n se cumple $2^n \geq 2n$.

En este caso, para $n = 1$ se tiene que la proposición $2^1 \geq 2\cdot 1$ es verdadera.

Supongamos ahora que la proposición se cumple para cierto natural k; es decir, $2^k \geq 2k$, y demostremos que se cumple para el siguiente natural k+1. En efecto, observando que $2 \leq 2^k \ \forall\ k \in \mathbb{N}$, se tiene que $2(k+1) = 2k+2 \leq 2^k+2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$; es decir, la proposición se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.- Por medio del principio de inducción demostremos la falsedad del resultado propuesto.

Demostrar que la suma de los cubos de los primeros números naturales $S_n = 1^3+2^3+3^3+...+n^3$, es $S_n = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^3$.

El resultado es cierto para $n = 1$, pues $S_1 = 1^3 = 1$ y $\left(\frac{1(1+1)}{1}\right)^3 = 1$.

Suponemos ahora que se cumple para un natural k, $S_k = 1^3+2^3+...+k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^3$, y demostramos que se cumple para k+1.

$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^3 + (k+1)^3 = \frac{k^3(k+1)^3}{2^3} + (k+1)^3 =$

$\frac{k^3(k+1)^3+8(k+1)^3}{8} = \frac{(k+1)^3(k^3+8)}{8}$.

Podemos darnos cuenta en este momento que el resultado que obtuvimos jamás podrá ser igual a $\frac{(k+1)^3[(k+1)+1]^3}{8} = \frac{(k+1)^3(k+2)^3}{8}$, que es lo esperado de acuerdo a la ley general. De lo anterior podemos decir que la ley general dada para Sn es incorrecta.

EJERCICIOS:

Utiliza el principio de inducción para demostrar la ley general en cada caso.

i) Demuestra que la suma $S_n = 1^3+2^3+3^3+...+n^3$ de los cubos de los primeros n números naturales es $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ii) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = 1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

iii) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = 1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $(x \neq 1)$.

iv) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 +...+ n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

v) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 +...+ n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

vi) Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9. En este caso $S_1 = 1^3+2^3+3^3$.

vii) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

viii) Probar que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 1+2+3+...+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

ix) Probar que 7^n-6n-1 es divisible por 36 $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

x) Probar que $(1+x)^n \geq 1+nx\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ si $x \geq -1$.

El conjunto de los números naturales satisface también una propiedad conocida como el principio del buen orden, y esta es equivalente al principio de inducción.

DEFINICION 13.5 : (Principio del buen orden) Si A es un subconjunto no vacío de números naturales entonces A tiene un elemento que es menor que todos los demás elementos de A.

PROPOSICION 13.6 : El principio de inducción implica el del buen orden.

DEMOSTRACION:

Supongamos que A es un subconjunto no vacío de números naturales, y además que no posee ningún elemento menor que todos los demás de A.

Consideremos al conjunto B de los números naturales menores que todos los elementos de A, $B = \{b \in \mathbb{N} \ / \ b < a \ \forall \ a \in A\}$.

B no es un subconjunto de A pues de lo contrario, y por definición de B, cada elemento $b \in B$ sería menor que sí mismo. Por lo tanto $B \subset A^c$.

Ahora bien, tenemos que

i) $1 \in B$. En efecto, $1 \notin A$ pues de lo contrario A tendría un elemento, el $1 \in \mathbb{N}$, menor que todos los demás de A.

ii) Supongamos que $b \in B$; esto es, $b < a \ \forall \ a \in A$. Entonces $b+1 \in B$. En efecto, si $b+1 \notin B$, $b+1 \geq a$ para alguna $a \in A$. Pero como $b < a$, se tiene que $b+1 \leq a$, y por lo tanto $b+1 = a \in A$. Entonces $b+1$ sería un elemento de A menor que todos los demás de A, contradiciendo la suposición que A no tiene un elemento menor que todos los demás. De esta manera $b+1 \in B$.

Puesto que el conjunto B satisface el principio de inducción se tiene que $B = \mathbb{N}$; pero como $B \subset A^c$ se sigue que $A^c = \mathbb{N}$ y por lo tanto $A = \emptyset$ en contradicción a lo supuesto. De esta manera A necesariamente posee un elemento menor que todos los demás de A. ∎

PROPOSICION 12.7 : El principio del buen orden implica el principio de inducción.

DEMOSTRACION:

Supongamos que M es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface $1 \in M$ y si $n \in M$ entonces $m+1 \in M$.

Suponiendo el principio del buen orden demostraremos que $M = \mathbb{N}$. Para ello cosideremos el complemento de M, M^c, con respecto a $\mathbb{N}$. Si M^c es no vacio, por el principio del buen orden posee un elemento mínimo m'. Luego, como $m'-1 < m'$, se tiene que $m'-1 \not\in M^c$, pues m' es el mínimo de todos ellos; por consiguiente $m'-1 \in M$. Pero también por hipótesis el elemento $(m'-1)+1 \in M$, es decir, $m \in M$, lo cual no es posible pues $m' \in M^c$. De esta manera M^c no puede ser distinto del vacio, y así $M = \mathbb{N}$. ∎

§ 14. NUMEROS ENTEROS

Definamos un nuevo número natural llamado cero, 0, de la siguiente manera: $0 \in \mathbb{N}$ es tal que $0 + a = a + 0 = a \ \forall \ a \in \mathbb{N}$.

Con el conjunto de los números naturales ampliado con el cero, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ definamos la relación siguiente en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: las parejas ordenadas (a,b) y (c,d) están relacionadas bajo R si $a+d = b+c$, donde "+" es la adición usual de números naturales; de esta manera $(a,b)R(c,d)$ si y sólo si $a+d = b+c$.

AFIRMACION 14.1: La relación R así definida es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

DEMOSTRACION:

i) Reflexiva. $(a,b)R(a,b)$ pues $a+b = b+a$ por la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{N}$.

ii) Simétrica. $(a,b)R(c,d)$ implica que $a+d = b+c$. De nuevo por la conmutatividad de la adición tenemos que $c+b = d+a$, lo cual implica $(c,d)R(a,b)$.

iii) Transitiva. Supongamos que $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$. Entonces tenemos:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c,$$

$$(c,d)R(e,f) \Leftrightarrow c+f = d+e.$$

Sumando las expresiones anteriores obtenemos $a+d+c+f = b+c+d+e$, y esto se cumple si y sólo si $a+f+(d+c) = b+e+(c+d)$; por lo que la ley de cancelación de $\mathbb{N}$ implica que $a+f = b+e$, es decir, $(a,b)R(e,f)$. ■

Esta relación R de equivalencia induce una partición de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, que es justamente el sistema de clases de equivalencia de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ módulo R,

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R = \{[(a,b)]_R \ / \ (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

DEFINICION 14.2 : Cada clase de equivalencia de R recibirá el nombre de número entero y el sistema de clases de equivalencia de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ módulo R, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R$ recibirá el nombre de conjunto de los números enteros, denotado por el símbolo $\mathbb{Z}$.

Representemos cada clase de equivalencia con un símbolo fácil de recordar, así por ejemplo:

La clase de equivalencia $[(0,0)]_R = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$ representémosla con 0.

La clase de equivalencia $[(1,0)]_R = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\}$ representémosla con 1.

$\vdots$

La clase de equivalencia $[(n,0)]_R = \{(n,0),(n+1,1),\ldots,(n+p,p),\ldots\}$ representémosla con n.

Las clases de equivalencia anteriores recibirán el nombre de números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.

De igual modo las clases de equivalencia:

$[(0,1)]_R = \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}$ representémosla con -1.

$[(0,2)]_R = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}$ representémosla con -2.

$\vdots$

$[(0,n)]_R = \{(0,n),(1,n+1),\ldots,(p,n+p),\ldots\}$ representémosla con $-n$.

Estas clases de equivalencia recibirán el nombre de números enteros negativos $\mathbb{Z}^-$.

DEFINICION 14.3 : Definimos la operación adición en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera: $[(a,b)]_R + [(b,c)]_R = [(a+c,b+d)]_R$.

Comprobemos ahora que la suma en $\mathbb{Z}$ está bien definida.

AFIRMACION 14.4 : La suma en $\mathbb{Z}$ está bien definida, es decir, no depende del representante elegido para cada clase de equivalencia.

DEMOSTRACION:

Consideremos los elementos (a,b) y (a',b'), (c,d) y (c',d') de una misma clase de equivalencia, respectivamente. Entonces $(a,b)R(a',b')$ y $(c,d)R(c',d')$.

Para mostrar que la suma está bien definida debemos ver que

$$[(a,b)]_R + [(c,d)]_R = [(a',b')]_R + [(c',d')]_R,$$

esto es, $[(a+c,b+d)]_R = [(a'+c',b'+d')]_R$.

Ya que $(a,b)R(a',b') \Rightarrow a+b' = b+a'$ y $(c,d)R(c',d') \Rightarrow c+d' = d+c'$, sumando las expresiones anteriores obtenemos que $a+b'+c+d' = b+a'+d+c'$. Luego entonces $(a+c+b'+d')R(a'+c'+b+d)$, por lo que (ver lema 10.3) las clases de equivalencia $[(a+c,b+d)]_R$ y $[(a'+c',b'+d')]_R$ son iguales, demostrando así que la adición en $\mathbb{Z}$ está bien definida. ■

Puesto que la suma en $\mathbb{Z}$ no depende del representante elegido para cada clase de equivalencia, escribiremos $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ en lugar de $[(a,b)]_R + [(c,d)]_R = [(a+c,b+d)]_R$.

AFIRMACION 14.5 : La operación suma en $\mathbb{Z}$ satisface las siguientes propiedades:

i) Es una operación asociativa.

ii) Existe un elemento neutro para la adición.

iii) Cada número entero tiene un inverso aditivo.

iv) Es una operación conmutativa.

DEMOSTRACION:

i) Tomemos los representantes de clases de equivalencia (a,b), (c,d) y (e,f). Entonces $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = [(a+c,b+d)]+(e,f) = (a+c+e,b+d+f)$. Por otra parte $(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+[(c+e,d+f)] = (a+c+e,b+d+f)$.

ii) Es obvio que el elemento $(0,0)$ satisface ser neutro en la adición pues $(a,b)+(0,0) = (a+0,b+0) = (a,b)$.

iii) Para el representante de clase de equivalencia (a,b), el representante (b,a) es tal que $(a,b)+(b,a) = (a+b,b+a) = (a+b,a+b)$. Pero este elemento está relacionado con $(0,0)$ bajo R pues $a+b+0 = a+b+0$. De esta manera, puesto que $(a+b,a+b)R(0,0)$, se tiene que (b,a) es inverso aditivo de (a,b).

iv) La conmutatividad en $\mathbb{Z}$ se sigue a partir de la conmutatividad en $\mathbb{N}$. ∎

DEFINICION 14.6 : Definimos la operación producto en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera: $[(a,b)]_R \cdot [(c,d)]_R = [(ac+bd,ad+bc)]_R$.

AFIRMACION 14.7 : El producto en $\mathbb{Z}$ está bien definido, es decir, no depende del representante elegido para cada clase de equivalencia.

DEMOSTRACION:

Tomemos los elementos (a,b) y (a',b'), (c,d) y (c',d') de una misma clase de equivalencia, respectivamente. Entonces $(a,b)R(a',b')$ y $(c,d)R(c',d')$.

Primeramente $[(a,b)]_R \cdot [(c,d)]_R = [(ac+bd,ad+bc)]_R$ y también $[(a',b')]_R \cdot [(c',d')]_R = [(a'c'+b'd',a'd'+b'c')]_R$.

Para que las clases de equivalencia anteriores sean iguales deben estar relacionados bajo R sus representantes, es decir, debe ser

$$(ac+bd,ad+bc)R(a'c'+b'd',a'd'+b'c').$$

Puesto que $(a,b)R(a',b')$ se tiene que $a+b' = b+a'$ y $(c,d)R(c',d')$ implica que $c+d' = d+c'$.

La operación producto tiene las siguientes propiedades.

PROPIEDADES 14.8 : La operación producto en $\mathbb{Z}$ satisface:

i) Es una operación binaria.

ii) Es una operación asociativa.

iii) Satisface la ley distributiva $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ y $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$, donde a,b,c son números enteros.

iv) Existe un elemento neutro para la multiplicación, el $1 = [(1,0)]_R \in \mathbb{Z}$, pues $(1,0)\cdot(a,b) = (1\cdot a+0\cdot b, 1\cdot b+0\cdot a) = (a,b)$.

v) Es una operación conmutativa.

§ 15. NUMEROS RACIONALES

A partir del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ construiremos un nuevo conjunto que lo llamaremos el campo de cocientes de un dominio entero.

De ahora en adelante el conjunto de números enteros será representado por el conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, en lugar de considerarlo como un conjunto de clases de equivalencia.

Comenzemos definiendo la siguiente relación entre $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$, dada por $(a,b)R(c,d)$ si $a\cdot d = b\cdot c$.

AFIRMACION 15.1: La relación R definida anteriormente es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACION:

i) Reflexividad. $(a,b)R(a,b)$ pues $a\cdot b = a\cdot b$.

ii) Simetría. $(a,b)R(c,d)$ implica $(c,d)R(a,b)$. En efecto, por la conmutatividad del producto de enteros se tiene que $a\cdot d = b\cdot c$ es lo mismo que $c\cdot b = d\cdot a$.

iii) Transitividad. Supongamos que $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$, entonces $(a,b)R(e,f)$. En efecto, $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a\cdot d = b\cdot c$ y $(c,d)R(e,f) \Rightarrow c\cdot f = d\cdot e$. Ahora bien, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a\cdot d &= b\cdot c && \text{(Hipótesis)}\\
(a\cdot d)\cdot e &= (b\cdot c)\cdot e && \text{(Multiplicando por e)}\\
a\cdot(d\cdot e) &= (b\cdot c)\cdot e && \text{(Asociando)}\\
a\cdot(c\cdot f) &= (b\cdot c)\cdot e && \text{(Sustituyendo)}\\
(a\cdot f)\cdot c &= (b\cdot e)\cdot c && \text{(Conmutando y asociando)}\\
a\cdot f &= b\cdot e && \text{(Cancelando)}
\end{aligned}
$$

lo anterior implica que $(a,b)R(e,f)$ demostrando así que R es una relación de equivalencia. ■

A cada clase de equivalencia módulo R la llamaremos número racional; al sistema de clases de equivalencia módulo R, $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/R$, lo llamaremos el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

La clase de equivalencia $[(a,b)]_R$ la denotaremos con el símbolo $\frac{a}{b}$, y a los elementos de esta clase de equivalencia los llamaremos fracciones.

Así por ejemplo, la clase de equivalencia de la pareja ordenada $(1,2)$, que se representa por $\frac{1}{2}$, es $\frac{1}{2} = [(1,2)]_R = \{(1,2),(2,4),(3,6)...\}$.

Si convenimos en representar también a los elementos de cada clase de equivalencia en forma de fracción $\frac{x}{y}$, la clase de equivalencia de la pareja ordenada $(1,2)$ será ahora representada como

$$\frac{1}{2} = [(1,2)]_R = \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},...\right\}.$$

El siguiente paso es definir operaciones de suma y producto en $\mathbb{Q}$, y demostrar que han sido bien definidas dichas operaciones.

DEFINICION 15.2 : Definimos la operación suma "+" en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + c\cdot b}{b\cdot d}$.

PROPOSICION 15.3 : La operación suma en $\mathbb{Q}$ está bien definida; esto es, no depende de los representantes elegidos de cada de equivalencia.

DEMOSTRACION:

Tomemos elementos cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{c'}{d'}$ de una misma clase de equivalencia, respectivamente. Para mostrar que la suma está bien definida debemos ver que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$. Es decir, las clases de equivalencia anteriores son iguales $\Leftrightarrow$ $b'd'(ad+bc) = bd(a'd'+b'c')$; que es lo mismo que $b'd'ad + b'd'bc = bda'd' + bdb'c'$. Por hipótesis tenemos que $ab' = ba'$ y $cd' = dc'$. Sustituyendo estos datos en el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos el resultado deseado. Esto significa que la suma no depende del representante elegido para cada clase de equivalencia. ∎

La operación suma en $\mathbb{Q}$ satisface las siguientes propiedades de fácil verificación.

PROPIEDADES 15.4 : La suma en $\mathbb{Q}$ tiene las siguientes propiedades:

i) Es una operación asociativa; esto es $\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}) = (\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}$ para cualesquiera elementos en $\mathbb{Q}$.

ii) Es una operación conmutativa; es decir, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{c}{d}+\frac{a}{b}$.

iii) La clase de equivalencia del elemento $\frac{0}{n}$ es neutra bajo la adición. En efecto, $\frac{a}{b}+\frac{0}{n} = \frac{an+0b}{bn} = \frac{an}{bn}$; pero las clase $\frac{a}{b}$ y $\frac{an}{bn}$ son iguales pues sus representantes están relacionados ya que $a\cdot bn = b\cdot an$.

iv) El inverso de $\frac{a}{b}$ bajo la operación suma es el elemento $\frac{-a}{b}$, pues $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b} = \frac{ab+(-ab)}{b\cdot b} = \frac{0}{b\cdot b}$ que es justamente el elemento neutro aditivo.

La siguiente operación que definiremos en $\mathbb{Q}$ es el producto.

DEFINICION 15.5 : Definimos la operación producto o multilplicación "$\cdot$" en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

PROPOSICION 15.6 : La operación producto en $\mathbb{Q}$ está bien definida, esto es, no depende de los representantes elegidos de cada clase de equivalencia.

DEMOSTRACION:

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{c'}{d'}$ elementos de una misma clase de equivalencia. Entonces, por definición de R tenemos que $a\cdot b' = b\cdot a'$ y $c\cdot d' = d\cdot c'$.

Debemos mostrar que $\frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{a'\cdot c'}{b'\cdot d'}$, lo cual se logra comprobando que

$a\cdot c\cdot b'\cdot d' = b\cdot d\cdot a'\cdot c'$ pues indica que las clases de equivalencia anteriores son iguales.

Por hipotesis tenemos que

$$\begin{cases} a\cdot b' = b\cdot a' \\ y \\ c\cdot d' = d\cdot c' \end{cases}$$

multiplicando miembro a miembro obtenemos $a\cdot b'\cdot c\cdot d' = b\cdot a'\cdot d\cdot c'$, que por la conmutatividad del producto en $\mathbb{Z}$ obtenemos el resultado deseado. ■

PROPSICION 15.7 : La operación producto en $\mathbb{Q}$ tiene las siguientes propiedades:

i) Es una operación asociativa, pues $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$.

ii) El elemento neutro para la multilplicación es $\frac{n}{n}$, porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n}$, y pertenece a la misma clase de equivalencia que $\frac{a}{b}$ por estar relacionados.

iii) El inverso de $\frac{a}{b}$ bajo la multiplicación es el elemento $\frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{a\cdot b}{b\cdot a}$ que es equivalente al elemento neutro de la multiplicación.

iv) Se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma; es decir, $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$.

§ 16. NUMEROS COMPLEJOS

El conjunto de los números complejos surgió de la necesidad de resolver ecuaciones tales como $x^2+1 = 0$, $x^2 \leq 0$, $x^2+3x+5 = 0$, etc. que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Este nuevo conjunto debía ser una extensión de los números reales, el cual conservara las operaciones y estructura de $\mathbb{R}$.

Comenzemos definiendo un número complejo como una pareja ordenada (a,b) de números reales. El conjunto de los números complejos será denotado por el símbolo $\mathbb{C}$; así tendremos entonces que

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto de los números reales lo podemos identificar con un subconjunto de los números complejos mediante la función inyectiva $i:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $i(x) = (x,0)$.

Podemos decir que con esta función inyectiva hemos sumergido a los reales en el conjunto de los números complejos; es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

De ahora en adelante convengamos en que los símbolos x y $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, representan al número real x.

Definamos ahora las operaciones de suma y producto en $\mathbb{C}$, y verifiquemos que restringidas al conjunto de los números reales actúan de igual manera que las operaciones usuales de suma y producto en $\mathbb{R}$.

DEFINICION 16.1 : La suma de dos números complejos (a,b) y (c,d) se define de la siguiente manera: $(a,b)+(c,d) = (a+b,c+d)$.

DEFINICION 16.2 : El producto de dos números complejos (a,b) y (c,d) se define de la siguiente manera: $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c-b\cdot d,\ a\cdot d+b\cdot c)$.

EJEMPLOS:

1.- Efectuar la suma de los números complejos $(1,6)$ y $(3,2)$.
Solución: $(1,6)+(3,2) = (1+3,6+2) = (4,8)$.

2.- Efectuar la multiplicación de los números complejos $(1,5)$ y $(2,0)$.
Solución: $(1,5)\cdot(2,0) = (1\cdot 2-5\cdot 0,1\cdot 0+5\cdot 2) = (2,10)$.

Estas operaciones de suma y producto de números complejos cuando se restringen a números de la forma $(x,0)$, donde $x \in \mathbb{R}$, se transforman en las operaciones de suma y producto de números reales. En efecto, para $x,y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(x,0)+(y,0) = (x+y,0+0) = (x+y,0) = x+y.$$

$$(x,0)\cdot(y,0) = (x\cdot y-0\cdot 0,x\cdot 0+y\cdot 0) = (x\cdot y,0) = x\cdot y.$$

PROPIEDADES 16.3 : La operación suma de números complejos tiene las siguientes propiedades:

i) La suma es asociativa; esto es,

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)].$$

ii) La suma es conmutativa; es decir, $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$.

iii) El elemento $(0,0)$ es neutro bajo la adición. En efecto,

$$(a,b)+(0,0) = (a+0,b+0) = (a+b).$$

iv) El inverso de (a,b) bajo la operación suma es $-(a,b) = (-a,-b)$, pues $(a,b)+(-a,-b) = (a-a,b-b) = (0,0)$.

PROPIEDADES 16.4 : La operación producto de números complejos tiene las siguientes propiedades:

i) Es una operación asociativa; es decir,

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) = (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)].$$

ii) Es una operación conmutativa; es decir, $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$.

iii) El elemento $(1,0)$ es neutro bajo la multiplicación. En efecto,

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1) = (a,b).$$

iv) Vale la distributividad del producto respecto de la suma; es decir, $z\cdot(v+w) = z\cdot v + z\cdot w$, donde $z,v,w \in \mathbb{C}$.

En cualquier número complejo $z = (a,b)$, el número a recibe el nombre de parte real y b la parte imaginaria de z; se representan con los símbolos $a = \mathbf{Re(z)}$ y $b = \mathbf{Im(z)}$, respectivamente. Los números de la forma $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$, se llaman números imaginarios puros.

El número $(0,1)$ juega un papel importante en el estudio de los números complejos; se ha adoptado la convención de representarlo con la letra i y llamarlo unidad imaginaria; esto es, $i = (0,1)$.

Una propiedad muy importante del número i derivada a partir de la definición de multiplicación es la siguiente:

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1; \text{ es decir, } i^2 = -1.$$

Con este resultado podemos resolver ecuaciones tales como las mencionadas al principio; por ejemplo, la ecuación $x^2+1 = 0$ tiene por soluciones a los números complejos i y $-i$, pues $(\pm i)^2+1 = -1+1 = 0$.

Otra manera de representar a un número complejo (a,b) es utilizando la unidad imaginaria i de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
a+ib &= \\
&= (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) \\
&= (a,0)+(0\cdot b-1\cdot 0, 0\cdot 0+1\cdot b) \\
&= (a,0)+(0,b) \\
&= (a,b),
\end{aligned}
$$

es decir, obtenemos una igualdad al representar al número complejo (a,b) en la forma $a+ib$.

Llamaremos *representación en forma binómica* de un número complejo (a,b) a la expresión a+ib o a+bi. Con esta nueva representación las operaciones de suma y producto se realizan en la manera usual de binomios.

EJEMPLOS:

3.- Efectuar la suma de los números complejos dados en forma binómica 3+5i y 2+3i.

Solución: $(3+5i)+(2+3i) = (3+2)+(5+3)i = 5+8i$.

4.- Efectuar la multiplicación de los números complejos 5+i y 2+4i.

Solución: $(5+i)\cdot(2+4i) = 5\cdot 2 + 5\cdot 4i + i\cdot 2 + i\cdot 4i = 10+20i+2i+4i^2 = 10-4+22i = 6+22i$. (Recuerde que $i^2 = -1$)

INVERSO MULTIPLICATIVO DE UN COMPLEJO

Dado el número complejo (a,b) no cero, encontremos un número complejo (x,y) de tal manera que $(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$.

De la multiplicación de complejos tenemos que $(a,b)\cdot(x,y) = (a\cdot x-b\cdot y, a\cdot y+b\cdot x) = (1,0)$; por lo que debe ser

$$\begin{cases} a\cdot x-b\cdot y = 1 \\ b\cdot x+a\cdot y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas anteriores obtendremos que

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Ya que (a,b) es no cero, la expresión a^2+b^2 es mayor que cero; por lo que x e y no se indeterminan.

La pareja ordenada $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ recibe el nombre de inverso multiplicativo del número (a,b) y se representa como $(a,b)^{-1}$; de esta manera tenemos que

$$(a,b)\cdot(a,b)^{-1} = (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = 1.$$

Definimos la división de los números complejos z y w, con $w \neq 0$, como $\frac{z}{w} = z\cdot w^{-1}$.

EJEMPLOS:

5.- Efectuar la siguiente división $\frac{(2,4)}{(3,5)}$.

Solución: $\dfrac{(2,4)}{(3,5)} = (2,4)\cdot(3,5)^{-1} = (2,4)\cdot\left(\dfrac{3}{3^2+5^2},\dfrac{-5}{3^2+5^2}\right) =$

$$\left(\frac{6}{3^2+5^2} - \frac{-20}{3^2+5^2},\frac{-10}{3^2+5^2} + \frac{12}{3^2+5^2}\right) = \left(\frac{26}{34},\frac{2}{34}\right).$$

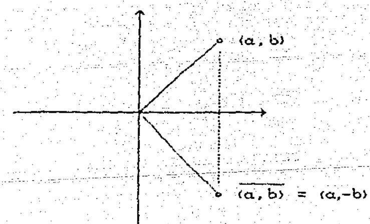
6.- Efectuar la división $\dfrac{1}{i}$.

Solución: $1 = (1,0)$, $i = (0,1)$; de esta manera tenemos $\dfrac{1}{i} = \dfrac{(1,0)}{(0,1)} =$ $(1,0)\cdot(0,1)^{-1} = (1,0)\cdot\left(\dfrac{0}{0^2+1^2},\dfrac{-1}{0^2+1^2}\right) = (1,0)\cdot(0,-1) = (0,-1) = -(0,1) =$ $-i$. De esta manera el inverso multiplicativo de i es $-i$, pues $i\cdot(-i) =$ $-i^2 = -(-1) = 1$.

NUMERO COMPLEJO CONJUGADO

Definimos el conjugado de (a,b), *como* $\overline{(a,b)} = (a,-b)$. La barra sobre el complejo se lee "conjugado".

Su representación geométrica es la reflexión del punto (a,b) sobre el eje x



El conjugado tiene las siguientes propiedades:

Para números complejos z,w cualesquiera tenemos

i) $\overline{z+w}\ \overline{z}+\overline{w}$;

el conjugado de una suma es la suma de los conjugados.

ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

iii) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;

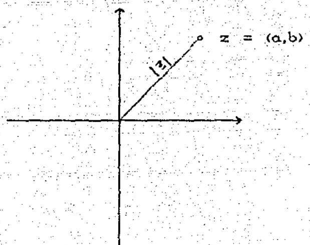
el conjugado de un cociente es el cociente de los conjugados.

iv) $\overline{(\overline{z})} = z$;

el conjugado de un conjugado se nulifica.

NORMA DE UN NUMERO COMPLEJO

Definimos el módulo de un número complejo $z = (a,b)$ como el número real $\sqrt{a^2+b^2}$; se denota con el símbolo $|z|$ que se lee "módulo de z" y es igual a la distancia que hay desde el origen hasta el punto (a,b).



Cuando restringimos el modulo a un número real $(a,0)$, este se convierte en el valor absoluto de los números reales.

El módulo y el conjugado de un complejo están relacionados de la siguiente manera:

Para $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, tenemos que $z \cdot \overline{z} = (a,b) \cdot (a,-b) = (a^2+b^2,0) = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$; es decir, un número complejo multiplicado por su conjugado es igual al módulo elevado al cuadrado de dicho número.

De lo anterior podemos decir para el inverso multiplicativo de un número complejo $z = (a,b)$, que $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{|z|}, \frac{-b}{|z|}\right)$.

NUMERO COMPLEJO DE MODULO UNITARIO

Decimos que un número complejo $z = (a,b)$ tiene módulo unitario en caso que $|z| = 1$. Si el número z tiene módulo distinto de 1 basta dividirlo entre su módulo, para que de esta manera el nuevo número $\frac{z}{|z|}$ tenga módulo 1. En efecto, para $z = (a,b)$ tenemos lo siguiente:

$\frac{z}{|z|} = \left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right)$, y por otra parte tenemos $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2} =$

$$\left(\frac{a^2}{|z|^2} + \frac{b^2}{|z|^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^2+b^2}{|z|^2}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Otra manera de dividir dos números complejos es multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

EJEMPLOS:

7.- Efectuar la división de los números complejos dados en forma binómica $3+2i$ y $-1+4i$.

Solución: $\frac{3+2i}{-1+4i} = \frac{3+2i}{-1+4i} \cdot \frac{-1-4i}{-1-4i} = \frac{(3+2i)\cdot(-1-4i)}{|-1+4i|^2} = \frac{-3-12i-2i-8i^2}{\left(\sqrt{(-1)^2+4^2}\right)^2} =$

$\frac{5-14i}{17} = \frac{5}{17} - \frac{-14}{17}i.$

8.- Efectuar la siguiente división $\frac{i}{3-5i}$.

Solución: Multiplicamos y dividimos por el conjugado de $3-5i$ y obtenemos

$$\frac{i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i} = \frac{i\cdot(3+5i)}{|3-5i|^2} = \frac{3i+5i^2}{\left(\sqrt{3^2+(-5)^2}\right)^2} = \frac{-5+3i}{34} = \frac{-5}{34} + \frac{3}{34}i.$$

RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO COMPLEJO

Resolvamos el problema de encontrar la raíz cuadrada de un número complejo $a+ib$. El resultado esperado $x+iy$ debe cumplir con la igualdad $(x+iy)^2 = a+ib$; esto es,

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a \;\ldots\; (1) \\ 2xy = b \;\ldots\; (2). \end{cases}$$

Lo anterior significa que la ecuación $\sqrt{a+ib} = x+iy$ se cumple si y sólo si $(x+iy)^2 = a+ib$. Pero dos números complejos iguales deben tener el mismo módulo; es decir, $|a+ib| = |(x+iy)^2|$; que es equivalente a

$$|a+ib|^2 = |x^2-y^2+2xyi|^2$$
$$a^2+b^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2$$
$$a^2+b^2 = (x^2+y^2)^2$$
$$\sqrt{a^2+b^2} = x^2+y^2 \;\ldots\; (3)$$

La ecuación (3) junto con la ecuación (1) implican que

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \ldots (4)$$
$$y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \ldots (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) son consecuencia de la ecuacion (1); estas dan dos posibles valores de x y dos de y (positivo y negativo), pero no se pueden combinar arbitrariamente estos valores de x e y pues hay que tener en cuenta el signo de b en la ecuación (2).

Cuando $b > 0$, x e y deben tener el mismo signo; por lo que la solución en esta caso será

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,\ +\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right) .$$

Para $b < 0$, x e y deben tener signos opuestos y la solución en este caso será

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,\ -\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

El caso $b = 0$ se subdivide en los casos $a > 0$ y $a < 0$.

Para el caso $a > 0$ la raíz cuadrada de a es $\pm\sqrt{a}$, que son números reales.

Para el caso $a < 0$ la raíz cuadrada de a es $\pm i\sqrt{|a|}$ que son números imaginarios puros.

Podemos dar una expresión general para la raíz cuadrada de a+ib cuando $b \neq 0$ como

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right),$$

recordando que $\frac{b}{|b|} = 1$ si $b > 0$ y $\frac{b}{|b|} = -1$ si $b < 0$.

EJEMPLOS:

9.- Calcular $\sqrt{1+i}$.

En este caso $a = 1$ y $b = 1$, por lo que las soluciones son

$$\sqrt{1+i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right).$$

10.- Calcular $\sqrt{-3-4i}$.

En este caso $a = -3$ y $b = -4$, así que las soluciones son

$$\sqrt{-3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{25}}{2}} - i\sqrt{\frac{3+\sqrt{25}}{2}}\right) = \pm(1-2i);$$

es decir, los números $x+iy = 1-2i$ y $-1+2i$ son la raíces cuadradas de $-3-4i$.

11.- Calcular $\sqrt{-4}$.

En este caso la raíz cuadrada de -4 no es un número real, pues ningún número real tiene cuadrado negativo. Recordando que $i^2 = -1$, tenemos que $\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$, pues $(\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4$.

La ecuación general de segundo grado Ax^2+Bx+C con coeficientes complejos; es decir, $A,B,C \in \mathbb{C}$, también se resuelve con la fórmula general

$$x = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

En este momento ya estamos en condiciones de dar respuesta a expresiones de la forma $\sqrt{-a}$, donde a es un real positivo.

EJEMPLOS:

12.- Resolver la ecuación general de segundo grado $x^2-(2+3i)x-1+3i = 0$.

Solución: $A = 1$, $B = -(2+3i)$ y $C = -1+3i$; por lo tanto

$$x = \frac{2+3i\pm\sqrt{(2+3i)^2-4(1)(-1+3i)}}{2}$$

$$= \frac{2+3i\pm\sqrt{4+12i-9+4-12i}}{2}$$

$$= \frac{2+3i\pm\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{(2+3i)\pm i}{2},$$

de esta manera $x_1 = \dfrac{2+3i+i}{2} = 1+2i$ y $x_2 = \dfrac{2+3i-i}{2} = 1+i$ son las soluciones buscadas.

13.- Resolver la ecuación de segundo grado con coeficientes reales $x^2+x+1 = 0$.

Solución: En esta caso $A = 1$, $B = 1$ y $C = 1$. Por la fórmula general tenemos

$$X = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(1)}}{2}$$

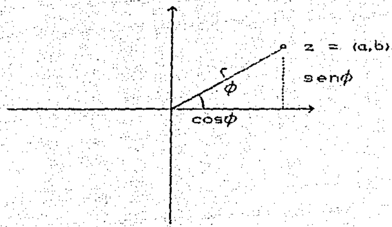
$$= \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

así que las soluciones son $x_1 = \dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

FORMA TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Dado un número complejo $z = (a,b)$ podemos expresarlo por medio de las funciones trigonométricas seno y coseno de la siguiente manera:



$$r \cdot \operatorname{sen}\phi = b; \qquad r \cdot \cos\phi = a \;\ldots\ldots (1)$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ y el ángulo ϕ (medido en radianes) se define de las condiciones anteriores. Este ángulo ϕ recibe el nombre de *argumento de z*, y se representa con el símbolo arg(z).

Sustituyendo a y b de (1) en la expresión $z = a+ib$ tendremos que

$$z = r \cdot (\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi), \;\ldots\ldots (2)$$

y decimos que z está expresado en *forma trigonométrica*.

Por la perioricidad de las funciones seno y coseno podemos encontrar infinidad de ángulos que satisfagan las condiciones (1); de hecho, todos los ángulos de la forma $\phi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, las satisfacen . Para eliminar la dificultad en la elección del argumento de z definimos el *valor principal del argumento de z*, como aquel argumento de z mayor que

$-\pi$ y menor o igual que π; se representa con el símbolo Arg(z) que se lee

"valor principal del argumento de z".

El valor principal del argumento de z se calcula a partir de la ecuación $\tan\phi = \frac{b}{a}$ de la siguiente manera:

i) En el caso de que $\frac{b}{a} > 0$ se determina el ángulo agudo α por su tangente

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$

y se toma $\phi = \alpha$ si $a > 0$, y $\phi = \alpha-\pi$ si $a < 0$. En el caso de que sea $\frac{b}{a} < 0$, el ángulo agudo α se determina por la ecuación

$$\tan\alpha = -\frac{b}{a}$$

y se toma $\phi = -\alpha$ si $a > 0$ y $\phi = \pi-\alpha$ si $a < 0$.

EJEMPLOS:

14.- Exprése en forma trigonométrica el número complejo $z = -4-3i$.

Solución: El módulo de z es $|z| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Puesto que $\frac{b}{a} = \frac{-3}{-4} > 0$, el argumento de z se calcula por $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, tomando $\phi = \alpha-\pi$ por ser $a = -3 < 0$. De esta manera, y recurriendo a las tablas trigonométricas tenemos que $\alpha = \arctan\frac{3}{4} = 0.6435$ rad, por lo que $\phi = 0.6435-\pi = -2.4980$ rad, los cuales convirtiéndolos a grados son $-143°7'48.3''$. De esta manera expresamos a z en forma trigonométrica como $z = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi) = 5\cdot[\cos(-2.4980)+i\operatorname{sen}(-2.4980)]$, ϕ medido en radianes, ó $z = 5\cdot(\cos(-143°7'48.3'')+i\operatorname{sen}(-143°7'48.3''))$, ϕ medido en grados.

15.- Expresar en forma trigonométrica el número complejo $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Solución: El módulo de z es $|z| = 1$. Puesto que $\frac{b}{a} > 0$, calculamos el argumento de z a partir de la ecuación $\tan\alpha = \frac{b}{a} = 1$, y se toma $\phi = \alpha$ por ser $a = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Entonces $\phi = \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. El número z se representa ahora como $z = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$.

16.- Expresar en forma trigonométrica el número complejo $z = -1+i$.

Solución: El módulo de z es $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. Como $\frac{b}{a} = \frac{1}{-1} = < 0$ el argumento de z se calcula de la expresión $\tan\alpha = -\left(\frac{b}{a}\right) = 1$; por lo que $\alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, tomando $\phi = \pi-\alpha = \pi-\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ por ser $a < 0$.

De esta manera tenemos que $z = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi)$.

17.- Expresar en forma trigonométrica el número complejo $z = -3i$.

Solución: El módulo de z es $|z| = 3$ y $\frac{b}{a} = \frac{-3}{0} = -\infty$ queda indefinido; por lo que el argumento de z es $-\frac{\pi}{2}$, pués $\tan(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$. El número z se representa entonces como $z = 3\cdot[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})]$.

18.- Represente en forma trigonométrica el número complejo $z = 2-4i$.

Solución: El módulo de z es $|z| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$, y $\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} < 0$; por lo que ϕ se calcula a partir de la expresión $\tan\alpha = -\frac{b}{a} = 2$, y se toma a ϕ como $-\alpha$ por ser $a > 0$. De esta manera tenemos que $\alpha = \arctan 2 = 1.1071$ rad que equivale a $63°26'5.8''$ y $\phi = -\alpha = -1.1071$ rad. Por lo tanto $z = \sqrt{20}\cdot[\cos(-1.1071)+i\,\mathrm{sen}(-1.1071)]$ medido el ángulo en radianes ó $z = \sqrt{20}\cdot[\cos(-63°26'5.8'')+i\,\mathrm{sen}(-63°26'5.8'')]$ medido el ángulo en grados.

MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA TRIGONOMETRICA

Dados los números complejos $z = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ y $w = s\cdot(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ su producto $z\cdot w$ es igual a

$$
\begin{aligned}
z\cdot w &= r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)\cdot s\cdot(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)\\
&= r\cdot s\cos\phi\cdot\cos\varphi + ir\cdot s\cdot\operatorname{sen}\phi\cdot\cos\varphi + ir\cdot s\cdot\cos\phi\cdot\operatorname{sen}\varphi + i^2r\cdot s\cdot\operatorname{sen}\phi\cdot\operatorname{sen}\varphi\\
&= r\cdot s(\cos\phi\cdot\cos\varphi - \operatorname{sen}\phi\cdot\operatorname{sen}\varphi) + ir\cdot s(\operatorname{sen}\phi\cdot\cos\varphi + \cos\phi\cdot\operatorname{sen}\varphi)\\
&= r\cdot s\cdot\cos(\phi+\varphi) + ir\cdot s\cdot\operatorname{sen}(\phi+\varphi)\\
&= r\cdot s(\cos(\phi+\varphi)+i\operatorname{sen}(\phi+\varphi))^{*}
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS:

19.- Efectuar la multiplicación en forma trigonométrica de los números z y w; siendo $z = 1$ y $w = 1+i$.

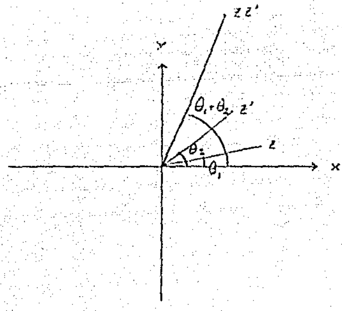
Solución: Primero representamos en forma trigonométrica los números z y w. En este caso $z = 1\cdot(\cos 0+i\operatorname{sen}0)$ y $w = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$. Por lo tanto $z\cdot w = 1\cdot\sqrt{2}\cdot[\cos(0+\frac{\pi}{4})+i\operatorname{sen}(0+\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = w$; que es lo que se esperaba pues $z = 1$.

20.- Efectuar la multiplicación de los números z y w; siendo $z = i$ y $w = 4+3i$.

Solución: La representación geométrica de los números z y w es la siguiente: $z = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$ y $w = 5\cdot[\cos(0.6435)+i\operatorname{sen}(0.6435)]$.

El producto de z por W es $z\cdot w = 1\cdot5\cdot[\cos(\frac{\pi}{2}+0.6435)+i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+0.6435)]$.

* Recordar las identidades trigonométricas
$\cos(A+B) = \cos A\cdot\cos B - \operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}B$
$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A\cdot\cos B + \operatorname{sen}B\cdot\cos A$



Representación geométrica del producto de dos números complejos dados en forma trigonométrica.

EXPONENCIACION DE UN NUMERO COMPLEJO EN FORMA TRIGONOMETRICA

Definimos z^n, para un entero n, como $z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ (n veces). En caso de que z esté representado en su forma trigonométrica $z = r\cdot(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$, demostraremos que $z^n = r^n\cdot[\cos(n\phi)+i\operatorname{sen}(n\phi)]$.

AFIRMACION 16.5 : Para cualquier número natural n, y $z = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ tenemos que

$$z^n = r^n\cdot[\cos(n\phi)+i\operatorname{sen}(n\phi)].$$

DEMOSTRACION:

Demostraremos la afirmación utilizando inducción matemática.

i) El resultado es obvio para $n = 1$, pues para $z = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ tenemos que $z^1 = r^1\cdot[\cos(1\cdot\phi)+i\operatorname{sen}(1\cdot\phi)] = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi) = z$.

ii) Supongamos que el resulatdo se cumple para cierto natural k; es decir, $z^k = r^k\cdot[\cos(k\phi)+i\operatorname{sen}(k\phi)]$.

iii) Demostremos ahora que se cumple para k+1.

Para k+1 tenemos que $z^{k+1} = z^1\cdot z^k = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)\cdot r^k\cdot[\cos(k\phi)+i\operatorname{sen}(k\phi)]$

$= r \cdot r^k \cdot [\cos(\phi+k\phi)+i\,\text{sen}(\phi+k\phi)] = r^{k+1} \cdot [\cos((k+1)\phi)+i\,\text{sen}((k+1)\phi)]^*$, que es justamente lo que queríamos demostrar. ■

EJEMPLOS:

21.- Elevar $z = 3+3i$ al exponente 4.

Solución: Primero representamos a z en forma trigonométrica como

$$z = r\cdot(\cos\phi+i\,\text{sen}\phi) = \sqrt{18}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}).$$

Ahora bien, $z^4 = r^4\cdot(\cos 4\phi+i\,\text{sen}4\phi) = (\sqrt{18})^4\cdot[\cos(4\cdot\frac{\pi}{4})+i\,\text{sen}(4\cdot\frac{\pi}{4})] = 18^2\cdot(\cos\pi+i\,\text{sen}\pi) = 18^2(-1+i\cdot 0) = -18^2$. Por lo tanto $(3+3i)^4 = -18^2$.

22.- Elevar $z = -2-4i$ al exponente 5.

Solución: La representación de z en forma trigonométrica es $z = \sqrt{20}\cdot[\cos(-2.034)+i\,\text{sen}(-2.034)]$; por lo que z^5 es, de acuerdo a la afirmación anterior, $z^5 = (\sqrt{20})^5\cdot[\cos(-2.034\cdot 5)+i\,\text{sen}(-2.034\cdot 5)]$. Se puede uno auxiliar de tablas trigonométricas o de una calculadora para encontrar los valores de seno y coseno de la expresión de z^5.

23.- Elevar $z = i$ al exponente 2.

Solución: En forma trigonométrica z se representa como $1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2})$. Por lo tanto tenemos que $z^2 = 1^2\cdot[\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})+i\,\text{sen}(2\cdot\frac{\pi}{2})] = 1\cdot(\cos\pi+i\,\text{sen}\pi) = 1\cdot(-1+0\cdot i) = -1$. Entonces tenemos que $i^2 = -1$, resultado que ya conocíamos.

24.- Elevar el número complejo $z = 3$ al exponente 2.

Solución: En este caso tenemos $z = 3\cdot(\cos 0+i\,\text{sen}0)$, y $z^2 = 3^2\cdot[\cos(2\cdot 0)+ +i\,\text{sen}(2\cdot 0)] = 3^2\cdot(1+0i) = 3^2 = 9$. Es decir, la exponenciación compleja restringida a números reales es idéntica a la exponenciación real.

*Refiérase al producto de dos números complejos representados en forma trigonométrica mencionado dos páginas atrás.

DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA TRIGONOMETRICA

Dado el número complejo $z \neq 0$ representado en su forma trigonométrica $z = r\cdot(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$ tenemos que $z^{-1} = \frac{1}{r\cdot\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi}$. Ahora bien, multiplicando por el conjugado $\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi$ tendremos que $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi}\cdot\frac{\cos\phi-i\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi-i\operatorname{sen}\phi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\phi-i\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi+i\operatorname{sen}^2\phi} = \frac{1}{r}\cdot[\cos(-\phi)+i\operatorname{sen}(-\phi)]$.* Por lo tanto, $z^{-1} = \frac{1}{r}\cdot[\cos(-\phi)+i\operatorname{sen}(-\phi)]$.

Definamos ahora el cociente de z entre w, para $w \neq 0$, como

$$\frac{z}{w} = z\cdot w^{-1}.$$

Cuando z y w son representados en forma trigonométrica como $z = r\cdot(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ y $w = s\cdot(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$, entonces el cociente de z entre w toma la forma $\frac{z}{w} = z\cdot w^{-1} = \frac{r}{s}\cdot[\cos(\phi-\varphi)+i\operatorname{sen}(\phi-\varphi)]$.

EJEMPLOS:

25.- Efectuar el cociente de $2-2i$ entre $1+i$.

Solución: $2-2i = \sqrt{8}\cdot(\cos\frac{7}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi)$ y $1+i = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{1}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi)$. Por lo tanto $\frac{2-2i}{1+i} = (2-2i)\cdot(1+i)^{-1} = \frac{\sqrt{8}\cdot(\cos\frac{7}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi)}{\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{1}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi)} =$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\cdot[\cos(\frac{7}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi)+i\operatorname{sen}(\frac{7}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi)] = \sqrt{\frac{8}{4}}\cdot[\cos\frac{3}{2}\pi+i\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi] = 2\cdot(0-1i) = -2i.$

26.- Efectúe el cociente $\frac{1}{i}$.

Solución: $1 = 1\cdot(\cos0+i\operatorname{sen}0)$ e $i = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$. Por lo tanto $\frac{1}{i} = \frac{1}{1}\cdot[\cos(0-\frac{\pi}{2})+i\operatorname{sen}(0-\frac{\pi}{2})] = 1\cdot[\cos(-\frac{\pi}{2})+i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})] = 1\cdot(0-i) = -i.$

***Recuérdese la identidad trigonométrica $\cos^2 A+\operatorname{sen}^2 A = 1$, y además que $\cos(A) = \cos(-A)$ y $-\operatorname{sen}(A) = \operatorname{sen}(-A)$.**

RAIZ N-ESIMA DE UN NUMERO COMPLEJO

Para calcular la raiz n-ésima de un número complejo z, debemos comenzar rerpresentando a z en su forma trigonométrica. De esta manera, si $z = r\cdot(\cos\phi+i\,\mathrm{sen}\phi)$ y $w = s\cdot(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\varphi)$ es la raiz n-ésima de z, se debe cumplir que $w^n = z$. Recordando que $w^n = s^n\cdot[\cos(n\varphi)+i\,\mathrm{sen}(n\varphi)]$, se tendrá que $s^n\cdot[\cos(n\varphi)+i\,\mathrm{sen}(n\varphi)] = r\cdot(\cos\phi+i\,\mathrm{sen}\phi]$.

Para que dos números complejos sean iguales, sus módulos tienen que ser iguales y los argumentos difieran entre si en un múltiplo entero de 2π; por lo tanto, $w^n = z$ si y sólo si $s^n = r$ y $\phi = n\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De esta manera $s = \sqrt[n]{r}$ y $\varphi = \dfrac{\phi+2k\pi}{n}$; y por lo tanto, w se expresa como

$$w = \sqrt[n]{r}\cdot[\cos(\frac{\phi+2k\pi}{n})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\phi+2k\pi}{n})]$$

Por la pericricidad de las funciones seno y coseno, y variando k entre 0 y n-1 obtenemos las n raices n-ésimas de z.

$w_0 = \sqrt[n]{r}\cdot[\cos(\frac{\phi}{n})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\phi}{n})]$; (Tomando $k = 0$)

$w_1 = \sqrt[n]{r}\cdot[\cos(\frac{\phi+2\pi}{n})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\phi+2\pi}{n})]$; (Tomando $k = 1$)

$\vdots$

$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\cdot[\cos(\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n})]$. (Tomando $k = n-1$)

EJEMPLOS:

27.- Calcular las raíces cúbicas de $z = 1$.

Solución: $z = 1$ se representa en forma trigonométrica como

$$z = 1\cdot(\cos 0+i\,\mathrm{sen}0).$$

Si w es raiz cúbica de 1, entonces w satisface la ecuación $w^3 = 1$; es decir, para $w = s\cdot(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\varphi)$ tenemos que $w^3 = s^3\cdot[\cos(3\varphi)+i\,\mathrm{sen}(3\varphi)] = 1\cdot(\cos 0+i\,\mathrm{sen}0) = z$.

De lo anterior tendrémos que $w = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\frac{0+2k\pi}{3})+i\,\mathrm{sen}(\frac{0+2k\pi}{3})]$.

Tomando $k = 0,1,2$ en la expresión anterior obtendrémos las raíces cúbicas de 1, las cuales son:

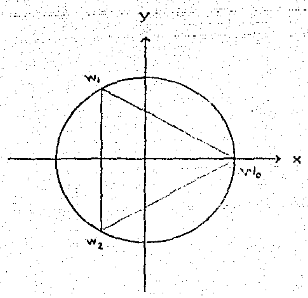
$$w_0 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\tfrac{0}{3})+i\,\mathrm{sen}(\tfrac{0}{3})] = \sqrt[3]{1}\cdot(1+0i) = \sqrt[3]{1} = 1.$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\tfrac{2\pi}{3})+i\,\mathrm{sen}(\tfrac{2\pi}{3})] = \sqrt[3]{1}\cdot[-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}] = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\tfrac{4\pi}{3})+i\,\mathrm{sen}(\tfrac{4\pi}{3})] = \sqrt[3]{1}\cdot[-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}] = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obsérvese que $w_2 = \overline{w_1}$.

La interpretación geométrica de las raíces cúbicas de la unidad, y en general las raíces n-ésimas de la unidad, es de que son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria. Para el caso $n = 3$, las raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unitaria.



Las raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilatero inscrito en la circunferencia unitaria.

28 .- Calcular la raíces cúbicas de $z = i$.

Solución: $z = i$ se representa en forma trigonométrica como $z = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2})$. Por lo tanto, $w = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi/2+2k\pi}{3})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi/2+2k\pi}{3})]$.

Variando k entre 0,1, y 2 obtendrémos las raíces cúbicas de $z = i$.

$$w_0 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi}{6})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})] = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{6}\pi)] = -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\cdot[\cos(\frac{9}{6}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{9}{6}\pi)] = -i.$$

29.- Calcular las raíces cuadradas de $z = -1$.

Solución: $z = -1$ equivale a $z = 1\cdot(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\pi)$. Por lo tanto, las raíces cuadradas de $z = -1$ son $w = \sqrt[2]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi+2k\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(\frac{2+2k\pi}{2})]$, y variando k entre 0, y 1 tendrémos que

$$w_0 = \sqrt[2]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})] = \sqrt[2]{1}\cdot[0+1\cdot i] = i.$$

$$w_1 = \sqrt[2]{1}\cdot[\cos(\frac{3}{2}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi)] = \sqrt[2]{1}\cdot[0-1\cdot\pi] = -i.$$

Por lo tanto tenemos que $\sqrt{-1} = \pm i$.

Recordemos que anteriormente calculamos la raíz cuadrada de un número real negativo como, $\sqrt{-a} = \pm i\cdot\sqrt{a}$, siendo $a > 0$.

30.- Calcular las raíces quintas de $z = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solución: La represntación trigonométrica de Z es $z = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3})$.

Por lo tanto $w = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi/3+2k\pi}{5})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi/3+2k\pi}{5})]$, así que al variar k entre 0,1,2,3,4 obtendrémos cinco raíces cúbicas de z. Estas son:

$$w_0 = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{1}{15}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{1}{15}\pi)].$$

$$w_1 = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{7}{15}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{7}{15}\pi)].$$

$$w_2 = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{13}{15}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{13}{15})].$$

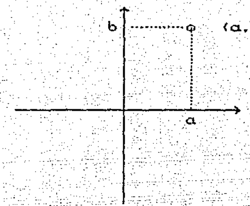
$$w_3 = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{19}{15}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{19}{15}\pi)].$$

$$w_4 = \sqrt[5]{1}\cdot[\cos(\frac{25}{15}\pi)+i\,\mathrm{sen}(\frac{25}{15})\pi].$$

De nuevo, utilizando una calculadora podemos conocer los valores exactos de w_i, $i = 0,1,2,3,4$.

§ 17. ESPACIOS VECTORIALES

Para introducir la noción de espacio vectorial pensemos en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son parejas ordenadas de números reales, las cuales los podemos representar como puntos en el plano



La suma de dos elementos de $\mathbb{R}^2$ y la multiplicación de un real λ por una pareja ordenada son dadas de la siguiente manera:

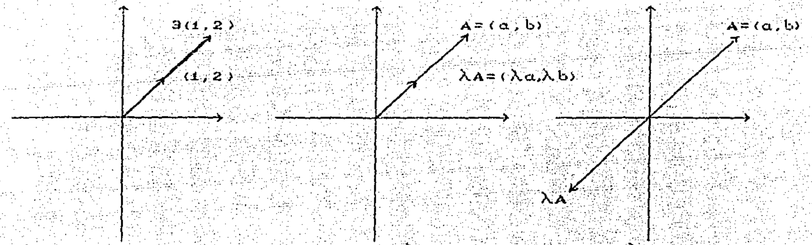
i) La suma de las parejas (a,b) y (c,d) se define como la pareja ordenada $(a+c, b+d)$.

ii) El producto de un número real λ por una pareja ordenada (a,b) será $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.

Llamemos vectores a las parejas ordenadas de $\mathbb{R}^2$ y escalares a los elementos de $\mathbb{R}$.

Si los vectores los representamos por medio de flechas que vayan del origen $O = (0,0)$ al punto indicado, entonces podemos decir que la adición de vectores $A = (a,b)$ y $B = (c,d)$ es el vector determinado por la diagonal del paralelogramo de lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

Geométricamente la multiplicación de un escalar por un vector consiste en aumentar ó disminuir la longitud y cambiar la dirección de un vector, dependiendo del escalar λ.



El vector $(1,3)$ triplica su tamaño al ser multiplicado por el escalar $\lambda = 3$.

Para $0<\lambda<1$, el vector A disminuye en tamaño.

Para $\lambda<0$ el vector λA cambia su dirección en sentido contrario a la dirección de A.

Observemos que el eje de las abscisas consiste de todos los vectores de la forma αe_1, donde e_1 denota al vector $(1,0)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; y el eje de las ordenadas consiste de todos los vectores de la forma βe_2, donde $e_2 = (0,1)$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

Denotemos a los vectores (x_1,x_2), (y_1,y_2) y (z_1,z_2) con las letras $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ respectivamente; esto es

$$\overline{x} = (x_1,x_2), \quad \overline{y} = (y_1,y_2) \quad y \quad \overline{z} = (z_1,z_2).$$

Podemos ver de la definición de adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar que las siguientes propiedades se cumplen:

Para vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in \mathbb{R}^2$ y escalares $a,b \in \mathbb{R}$ cualesquiera, se cumple:

V1. $\overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x}$. (La suma de vectores es conmutativa)

V2. $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z} = \overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$. (La suma de vectores es asociativa)

V3. El vector $\overline{0} = (0,0)$ es tal que $\overline{x}+\overline{0} = \overline{0}+\overline{x} = \overline{x}$. (Neutro aditivo)

V4. Para cada vector $\overline{x}$ hay un vector $-\overline{x}$ tal que $\overline{x}+(-\overline{x}) = \overline{0}$.

...(Inverso aditivo)

V5. $1\overline{x} = \overline{x}$; $1 \in \mathbb{R}$.

V6. $(ab)\overline{x} = a(b\overline{x})$; $a,b \in \mathbb{R}$.

V7. $(a+b)\overline{x} = a\overline{x}+b\overline{x}$; $a,b \in \mathbb{R}$.

V8. $a(\overline{x}+\overline{y}) = a\overline{x}+a\overline{y}$; $a,b \in \mathbb{R}$.

Debido a que existen otros conjuntos que permiten definiciones de suma y multiplicación como las descritas anteriormente y, satisfacen las ocho propiedades mencionadas arriba, es conveniente agruparlos en la siguiente definición.

DEFINICION 17.1 : Un espacio vectorial o espacio lineal V sobre un campo K consiste de un conjunto V, un campo K y dos operaciones definidas en A, llamadas suma de elementos de A y multiplicación de un elemento de A por un escalar de K; de tal manera que para cada $x, y \in V$ se tiene que $x+y \in V$, y para $\lambda \in K$, $\lambda a \in V$. Además satisface las ocho propiedades mencionadas anteriormente.

En ocasiones nos referimos al espacio vectorial V sobre el campo K como un K-espacio vectorial.

EJEMPLOS:

1.- El espacio vectorial de las n-adas, $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbb{R}^n$ el conjunto de las n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con cada $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La suma de cualesquiera dos elementos de $\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

y la multiplicación de un escalar c por una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$

Usando las propiedades de adición y multiplicación de los números reales se verifica fácilmente que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial. Como caso particular, para $n = 2$ obtenemos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ que vimos en la introducción.

2.- Una matriz con coeficientes reales o complejos es un arreglo rectangular de la forma

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array}\right]$$

donde cada elemento a_{ij} es un número real o complejo. Reconocemos en una matriz sus renglones y sus columnas; por ejemplo el renglón i consta de los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ y la columna j consta de los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}$. Por lo que el elemento a_{ij} está localizado en la intersección del i-ésimo renglón y j-ésima columna.

Decimos que una matriz A es de m por n, (mxn), si tiene m renglones y n columnas. El conjunto de matrices de mxn con coeficientes reales o complejos lo denotamos como $\mathbb{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ ó $\mathbb{M}_{mxn}(\mathbb{C})$.

La suma de matrices A y B $\in \mathbb{M}_{mxn}$ se define como $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ donde $(A+B)_{ij}$, A_{ij} y B_{ij} son los elementos en la posición ij de las matrices respectivas A+B, A y B.

Así, para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ se tiene } A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+4 \\ 5+0 & 7+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

El producto de un escalar c por la matriz A se define como $(cA)_{ij} = c(A)_{ij}$.

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y el escalar $c = 2$, su producto 2A es:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(4) \\ 2(3) & 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Con las definiciones anteriores de suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz, el conjunto de las matrices de mxn, es un espacio vectorial, llamado el espacio vectorial de las matrices de mxn.

Como comentario, cuando $m = n$ decimos que la matriz A es cuadrada.

3.- El espacio vectorial de las funciones de un conjunto a los números reales.

Tomemos un conjunto S no vacío y el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathcal{F}(S;\mathbb{R})$ será el conjunto de las funciones $f:S \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}(S,\mathbb{R}) = \{f \;/\; f:S \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

La suma de dos funciones f y $g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ la definimos como $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$ y la multiplicación de un escalar c por la función f es $(cf)(s) = c(f(s))$.

Verifiquemos que las condiciones 1,2,...,8 se cumplen para que el conjunto $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ sea un espacio vectorial.

V1. Para $f,g:S \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene por definición que $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$ Como $f(s)$ y $g(s)$ son números reales, su suma es conmutativa; es decir $f(s)+g(s) = g(s)+f(s)$. Por lo tanto $(f+g)(s) = (g+f)(s)$. Como la igualdad anterior se cumple para toda $s \in S$ y $\text{dom }(f+g) = \text{dom }(g+f) = (\text{dom } f \cap \text{dom } g)$ se sigue que las funciones $f+g$ y $g+f$ son iguales, de acuerdo a la definición 6.3. Por lo tanto la suma de funciones es conmmutativa en el conjunto $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$.

V2. Para $f,g,h \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ tenemos $[f+(g+h)](s) = f(s)+[g(s)+h(s)] =$

$= [f(s)+g(s)]+h(s)$ (Pues la suma en $\mathbb{R}$ es asociativa)

$= [f+g](s)+h(s)$.

De nuevo como la regla de correspondencia y dominio es el mismo para las funciones $f+(g+h)$ y $(f+g)+h$, estas son iguales y la suma es asociativa en $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$

V3. Definamos la función $f_o \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ como la función que a todo elemento $s \in S$ le asigna el número 0; esto es $f_o(s) = 0 \;\forall\; s \in S$.

Esta función es tal que $(f+f_o)(s) = f(s)+f_o(s) = f(s)+0 = f(s)$. Es decir, $f+f_o = f$ por lo que el conjuto $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ posee neutro aditivo.

V4. Para cada función $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ y de acuerdo a la definición de multiplicación de un escalar por una función tendremos que la función $(-1f)$ es tal que:

$f(s)+(-1f)(s)+f(s) = f(s)-f(s) = 0$, para todo $s \in S$.

Es decir, $[f+(-f)](s) = 0 = f_o(s)\ \forall\ s \in S$. Como las funciones $f+(-f)$ y f_o tienen mismo dominio y misma regla de correspondencia, se sigue que son iguales. Por lo tanto $(-1f) = -f$ es el inverso aditivo de f.

V5. Para cualquier función $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ y $1 \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$(1f)(s) = 1(f(s)) = f(s)$.

V6. Para números reales a,b y la función $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ tenemos que: $(ab)(f(s)) = a(bf(s))$ pues el producto es conmutativo en $\mathbb{R}$. Pero, $a(bf(s)) = a((bf)(s)) = [a(bf)](s)$; así que las funciones $(ab)f$ y $a(bf)$ son iguales.

V7. Para un número real a y cualesquiera funciones f y $g \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ se tiene que $[a(f+g)](s) = a[(f+g)(s)] = a[f(s)+g(s)]$. Como $f(s)$ y $g(s)$ son también números reales se sigue que:

$$\begin{aligned} a[f(s)+g(s)] &= af(s)+ag(s) \\ &= (af)(s)+(ag)(s) \\ &= [(af)+(ag)](s). \end{aligned}$$

por lo que las funciones $a(f+g)$ y $af+ag$ son iguales por tener mismo dominio S y misma regla de correspondencia.

V8. Para números reales a,b y una función $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ se tiene lo siguiente:

$[(a+b)f](s) = (a+b)f(s) = af(s)+bf(s) = (af)(s)+(bf)(s) = [(af)+(bf)](s)$.

De nuevo, se sigue que las funciones $(a+b)f$ y $af+bf$ son iguales por lo que el conjunto $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ satisface las ocho propiedades de espacio vectorial. $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ es llamado el espacio vectorial de las funciones de S en $\mathbb{R}$.

4.- El espacio de los polinomios de grado n con coeficientes complejos. Un polinomio de grado n con coeficientes complejos es una expresión de la forma $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$; donde n es un entero no negativo. Los números complejos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio y a_0, a_1x, $a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ son los términos del polinomio. Si el polinomio $p(x)$ = es 0, esto es $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, entonces $p(x)$ se llama el polinomio nulo.

Definimos el grado de un polinomio como el mayor exponente del término con coeficiente distinto de cero que aparezca en la representación $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Lo representaremos con el símbolo $gr(p)$ que se lee "grado del polinomio p" y, convenimos en que el polinomio nulo tenga grado $-\infty$.

Así por ejemplo el polinomio $p(x) = 5x^3+2x^2+x-4$ tiene grado 3, pues el término $5x^3$ tiene el mayor exponente con coeficiente 5 distinto de cero; mientras que el polinomio $g(x) = 0x^2+6x+1$ tiene grado 1, pues el término $0x^2$ tiene coeficiente cero.

Se define la suma de dos polinomios y la multiplicación de un polinomio por un escalar de la siguiente manera:

Para $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ y $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ tenemos $f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$ y, para $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $cf(x) = c(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n) = ca_0+ca_1x+ca_2x^2+\dots+ca_nx^n$.

Con las definiciones anteriores es fácil comprobar que los polinomios de grado n con coeficientes complejos forman un espacio vectorial que se denota comúnmente como $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

5.- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ forma un espacio vectorial sobre sí mismo; es decir los números reales $\mathbb{R}$ son un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$.

6.- Consideremos ahora los campos de los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$.

El conjunto de los números complejos satisface las ocho propiedades de espacio vectorial sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ y también sobre el campo real $\mathbb{R}$; es decir, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

DEFINICION 10.1 : Un subconjunto W de un K-espacio vectorial V es un subespacio de V, si W también es un K-espacio vectorial, bajo las operaciones de suma de elementos y producto por un escalar definidas en V.

Puesto que los elementos de cualquier subconjunto de V satisfacen las propiedades V1, V2, V5, V6, V7 y V8 de espacio vectorial, sólo debemos verificar lo siguiente para que W sea subespacio vectorial de V:

1. $x+y \in W$ cada vez que $x \in W$ e $y \in W$.
2. $ax \in W$ cada vez que $x \in W$ y $a \in K$.
3. El vector cero de V pertenece a W.
4. El inverso aditivo de cada elemento de W pertenece a W.

El siguiente teorema muestra que sólo es necesario comprobar tres de las cuatro condiciones anteriores para que W sea un subespacio vectorial de V.

TEOREMA 10.2 : Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Entonces, W es un subespacio de V si y sólo si satisface lo siguiente:

i) $\overline{0} \in W$.

ii) $x+y \in W$ cada vez que $x \in W$ e $y \in W$.

iii) $ax \in W$ cada vez que $x \in W$ y $a \in K$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que W es un subespacio de V. Entonces W es también un espacio vectorial bajo las operaciones definidas en V; por lo tanto, se satisfacen los incisos (ii) y (iii). Además, existe un vector $\overline{0}'$ en W tal que $\overline{0}' + x = x$ para todo $x \in W$. Pero también $\overline{0}+x = x$ con $\overline{0} \in V$. Por lo que, igualando las ecuaciones anteriores y sumando el inverso aditivo de x obtenemos que $\overline{0} = \overline{0}'$. Entonces, se cumple el inciso (i).

Supongamos ahora que W satisface los incisos anteriores. Para mostrar que W es un subespacio vectorial de V, falta únicamente mostrar que el inverso aditivo de cada vector $x \in W$ está en W. Esto se sigue del inciso (iii), pues $(-1)x \in W$ y, $(-1)x = -x$. Así, W es un subespacio vectorial de V. ∎

EJEMPLOS:

1.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ el subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$ forma un subespacio vectorial. En este caso, los elementos de $\mathbb{R}^2$ serán parejas ordenadas cuya segunda coordenada es cero.

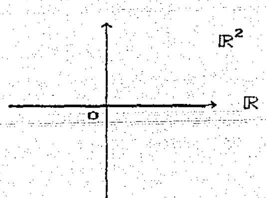
En efecto, el conjunto $\mathbb{R}$ satisface lo siguiente:

i) El vector $\overline{0} = (0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ está también en $\mathbb{R}$, pues su segunda coordenada es cero.

ii) Para elementos $x = (x_1,0) \in W$ y $y = (y_1,0) \in W$, se tiene que $x+y = (x_1,0)+(y_1,0) = (x_1+y_1,0+0) = (x_1+y_1,0) \in W$.

iii) Para $x = (x_1,0) \in W$ y $a \in \mathbb{R}$ tenemos que $ax = a(x_1,0) = (ax_1,a0) = (ax_1,0) \in W$.

Por lo tanto, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, el cual lo podemos visualizar como el eje de las abscisas.



2.- El conjunto W de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un subespacio del conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Esto es,

$W = \{f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$ es subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

En efecto, el conjunto W satisface lo siguiente:

i) La función $f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que asigna cero a cualquier real x es una función continua; por lo que $f_0 \in W$.

ii) Dadas dos funciones continuas f y $g \in W$ se sigue, por ser la suma de funciones continuas una función continua, que $f+g \in W$.

iii) Para un escalar $a \in \mathbb{R}$ y una función continua $f \in W$ se tiene que la función (af) es continua, por lo que $af \in W$. Así, W es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3.- Una función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama función par si $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama función impar si $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -g(x)$.

Ejemplos de funciones pares son: $f(x) = x^2$; $f(x) = \cos(x)$; $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|}$.

Ejemplos de funciones impares son : $g(x) = x^3$; $g(x) = 3x^3-x$; $g(x) = \frac{x}{|x|}$.

Es fácil verificar que los subconjuntos $W_1 = \{f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f \text{ es par}\}$ y $W_2 = \{g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g \text{ es impar}\}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Lo siguiente que veremos es como crear nuevos subespacios vectoriales a partir de los ya existentes.

PROPOSICION 18.3 : La intersección de cualquier familia de subespacios de V, es de nuevo un subespacio de V.

DEMOSTRACION:

Entenderemos como familia de subespacios de V, a un conjunto cuyos elementos son subespacios de V.

Sea S una familia de subespacios de V. Denotemos con la letra W a la intersección de todos los elementos de S. Como el vector cero pertenece a todos los subespacios en S, éste estará en la intersección de todos ellos; es decir, $\overline{0} \in W$.

Los elementos x e $y \in W$ pertenecen a cada subespacio en S, por lo que el vector $ax+y$ es elemento de todos los subespacios en S. Así, el elemento $ax+y \in W$. De acuerdo con el teorema 13.2, W es un subespacio vectorial de V.■

Consideremos ahora la unión de dos subespacios arbitrarios, W y W', del mismo espacio vectorial V.

Por pertenecer el vector cero, $\overline{0}$, a ambos subespacios se tiene que $\overline{0} \in W \cup W'$. De igual manera, para un vector $x \in W \cup W'$ se tiene que $x \in W$ ó $x \in W'$. Luego, para un escalar $a \in K$, $ax \in W$ ó $ax \in W'$ pues ambos son subespacios y, por lo tanto $ax \in W \cup W'$. Pero cundo tenemos dos vectores x e $y \in W \cup W'$ puede suceder que $x \in W$ e $y \in W'$; por lo que no podemos asegurar que $x+y \in W$ ó $x+y \in W'$. De lo anterior vemos que la unión de dos subespacios vectoriales no necesariamente es un subespacio vectorial.

Pensemos ahora que $W \subset W'$. De nuevo, para elementos $x,y \in W \cup W'$ tenemos que $x,y \in W'$, pues $W \cup W' = W'$; por lo tanto, $x+y \in W' = W \cup W'$. De esta manera el conjunto $W \cup W'$ satisface las condiciones del teorema 18.2 para ser subespacio. Es decir la unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio si y sólo si uno de los subespacios está contenido en el otro.

Demos ahora la siguiente definición que nos servirá para crear un subespacio a partir de un número finito de subespacios vectoriales de V sin necesidad que uno esté contenido en el otro.

DEFINICION 18.4 : Definimos la suma de los subconjuntos no vacíos S_1 y S_2 del espacio vectorial V, que se expresa por S_1+S_2, como el conjunto $S_1+S_2 = \{x+y \ / \ x \in S_1, \ y \in S_2\}$. La suma de cualquier número finito de subconjuntos no vacíos de V, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ se define de manera análoga como $S_1+S_2+\ldots+S_n = \{x_1+x_2+\ldots+x_n \,/\, x_i \in S_i$ para $i = 1,2,\ldots,n\}$.

TEOREMA 18.5 : Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces W_1+W_2 es un subespacio de V.

DEMOSTRACION:

Puesto que W_1 y W_2 son subespacios, el vector $\overline{0} \in W_1$ y $\overline{0} \in W_2$, por lo que $\overline{0} = \overline{0}+\overline{0} \in W_1+W_2$. Para vectores $x, y \in W_1+W_2$ existen elementos $x_1, y_1 \in W_1$ y $x_2, y_2 \in W_2$ tales que $x = x_1+x_2$, $y = y_1+y_2$; por lo que $x+y = (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \in W_1+W_2$, pues $x_1+y_1 \in W_1$ y $x_2+y_2 \in W_2$ ya que ambos son subespacios. Para un escalar $a \in K$ se tiene que $ax = a(x_1+x_2) = ax_1+ax_2 \in W_1+W_2$. Tenemos entonces que W_1+W_2 es un subespacio vectorial.■

COROLARIO 18.6 : La suma de cualquier número finito de subespacios de V es un subespacio de V.■

Existe otro tipo de suma de subespacios de V que es importante, por lo que la daremos en la siguiente definición

DEFINICION 18.7 : Un espacio vectorial V es la suma directa de sus subespacios W_1 y W_2 si satisfacen lo siguiente:

i) $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$.

ii) $V = W_1+W_2$; es decir, para todo elemento $v \in V$ existen elementos $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1+w_2$.

Cuando V es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2, lo denotamos con el símbolo $V = W_1 \oplus W_2$.

EJEMPLOS:

4.- El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es la suma directa de los subespacios $W_1 = \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

En efcto, W_1 y W_2 satisfacen lo siguiente:

i) $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$, pues la pareja ordenada $(0,0)$ es la única que pertenece a ambos subespacios.

ii) Cualquier pareja ordenada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se representa como la suma de las parejas ordenadas $(x,0) \in W_1$ y $(0,y) \in W_2$; esto es, $(x,y) = (x,0) + (0,y) \in W_1+W_2$. Por lo que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

5.- Por el ejemplo 3 de esta sección, los conjuntos $W = \{f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ es par$\}$ y $W' = \{g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g$ es impar$\}$ son subespacios del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

La función f_0 es tal que es función par e impar a la vez y, es la única con esta propiedad. Por lo tanto $W \cap W' = \{f_0\} = \{\overline{0}\}$.

Para cualquier función $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos que la función f definida por $f(x) = \frac{1}{2}[h(x)+h(-x)]$ es par y la función g, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x)-h(-x)]$ es impar. Además $h = f+g$, pues

$$\begin{aligned}(f+g)(x) = f(x)+g(x) &= \tfrac{1}{2}[h(x)+h(-x)]+\tfrac{1}{2}[h(x)-h(-x)] \\ &= [\tfrac{1}{2}h(x)+\tfrac{1}{2}h(-x)]+[\tfrac{1}{2}h(x)-\tfrac{1}{2}h(-x)] \\ &= [\tfrac{1}{2}h(x)+\tfrac{1}{2}h(x)]+[\tfrac{1}{2}h(-x)-\tfrac{1}{2}h(-x)] \\ &= h(x);\end{aligned}$$

por defincíón de f y g se tiene que $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} h$ y $\operatorname{dom} g = \operatorname{dom} h$, así que $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = \operatorname{dom} h \cap \operatorname{dom} h = \operatorname{dom} h$. Es decir, $(f+g)$ y h tienen mismo dominio y misma regla de correspondencia, por lo que $f+g = h$. Podemos ahora decir que cualquier función $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se expresa como la suma de una función par y una función impar. Por lo tanto, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es suma directa de los subespacios W y W', y lo expresamos como $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W \oplus W'$.

§ 19. COMBINACIONES LINEALES

En el ejemplo 18.4 vimos que cualquier pareja ordenada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ puede ser escrita como la suma de las parejas ordenadas $(a,0)$ y $(0,b)$; esto es $(a,b) = (a,0)+(0,b)$ y, además el teorema 18.7 nos asegura que dicha representación es única. Entonces, la pareja (a,b) la podemos representar como $(a,b) = a(1,0)+b(0,1)$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

A la representación anterior se le conoce como combinación lineal de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$.

DEFINICION 19.1 : Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V. Decimos que un vector $x \in V$ es una combinación lineal de elementos de S, si existe un número finito de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ tales que $x = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$.

EJEMPLOS:

1.- El vector $(4,-1)$ es combinación lineal de los vectores $(6,2)$ y $(2,3)$, pues para los escalares 1 y -1 se tiene que $(4,-1) = 1(6,2)+(-1)(2,3) = (6,2)+(-2,-3)$.

2.- El polinomio $5x^2+4x-1$ es combinción lineal de los elementos del conjunto $\beta = \{1,x,x^2\}$ pues $5x^2+4x-1 = 5(x^2)+4(x)+(-1)(1)$.

3.- El polinomio $2x^4-x^3-2x+5$ es combinación lineal de los polinomios $p_1(x) = 2-x$, $p_2(x) = 3+x^2$, $p_3(x) = 5+x-x^3$, $p_4(x) = x^2+x^4$, pues para los escalares $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ y $\delta = 2$ se tiene que $2x^4-x^3-2x+5 = \alpha p_1(x)+\beta p_2(x)+\gamma p_3(x)+\delta p_4(x)$.

4.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de las matrices

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, pues $A = 1E_1+3E_2+5E_3$.

5.- El vector (4,8) no puede ser combinación lineal de los vectores (1,0) y (4,0), pues para escalares $a, b \in \mathbb{R}$ la combinación lineal $a(1,0)+b(4,0) = (a+4b,0)$ será siempre distinta de la pareja ordenada (4,8) por tener segundo elemento distinto de cero.

Un resultado importante es que el conjunto de combinaciones lineales de elementos de un subconjunto no vacío de V es, a su vez, un subespacio vectorial de V.

TEOREMA 10.2 : Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, el conjunto W de todas las combinaciones lineales de elementos de S, es el subespacio más pequeño de V que contiene a S; es decir, W es un subconjunto de cualquier subespacio de V que contenga a A.

DEMOSTRACION:

Primero demostraremos que W es un subespacio de V. Como S es no vacío, al menos $\overline{0} \in W$, pues el vector $\overline{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. Ahora bien, si x e y son elementos de W, existen vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ en S y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots b_m$ en K tales que $x = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ y $y = b_1y_1+b_2y_2+\ldots\ b_m$. Por lo que la suma $x+y = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m$ es de nuevo una combinación lineal de elementos de S. De igual manera, para un escalar c, el elemento $cx = c(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n) = (ca_1)x_1+\ldots+(ca_n)x_n$ es combinación lineal de elementos de S, por lo que se concluye que W es un subespacio vectorial.

Sea ahora W' un subespacio cualquiera de V que contenga a S y z un elemento de W. Como z es combinación lineal de elementos de S, z es de la forma $z = c_1s_1+c_2s_2+\ldots+c_ts_t$, con $s_1, s_2, \ldots, s_t \in S$ y $c_1, c_2, \ldots, c_t \in K$.

Puesto que $S \subseteq W'$ implica que $s_i \in W'$, $i = 1,2,\ldots,t$, y por ser W' un subespacio vectorial se tiene que $z \in W'$. Tenemos entonces, por ser z elemento arbitrario de W, que $W \subseteq W'$; es decir, W es el menor subespacio vectorial que contiene a S. ∎

Ya que la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de V es un subespacio de V y por la propiedad 3.4(i) podemos decir que W es la intersección de todos los subespacios W' de V que contienen a S; esto es, $W = \bigcap_{\substack{W' \subseteq V \\ S \subseteq W'}} W'$.

DEFINICION 10.3 : Al subespacio W descrito en el teorema anterior se le llama el subespacio generado por los elementos de S y se denota por $L(S)$. Por conveniencia definiremos $L(\emptyset) = \{\overline{0}\}$.

EJEMPLO:

6.- La diagonal principal de una matriz cuadrada A de $n \times n$ está formada por todos sus elementos a_{ii}, $i = 1,2,\ldots,n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Una matriz cuadrada se llama matriz diagonal si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El conjunto S de las matrices de $n \times n$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

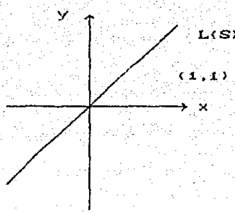
genera al conjunto de matrices diagonales de nxn. Luego, por el teorema 19.2 el conjunto de matrices diagonales de nxn es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_{nxn}$.

DEFINICION 19.4 : Un subconjunto S de un espacio vectorial V, se dice que es generador de V si L(S) = V.

EJEMPLOS:

7.- El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ puede ser generado por el conjunto de vectores {(1,0),(0,1)}. Esto es, L({(1,0),(0,1)}) = $\mathbb{R}^2$.

8.- Dado el conjunto S = {(1,1)} $\subset \mathbb{R}^2$, el subespacio generado por S es L(S) = {a(1,1) / a $\in \mathbb{R}$}. Este subespacio vectorial lo podemos representar geométricamente como la recta x = y en el plano cartesiano.



9.- El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se genera también con el conjunto de vectores {(1,2),(-1,3)}.

En efecto, cualquier elemento (a,b) $\in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores (1,2) y (-1,3) tomando escalares de la siguiente forma

$(a,b) = \frac{3a+b}{5}(1,2) + \frac{b-2a}{5}(-1,3)$.

Los ejemplos 7 y 9 muestran que el conjunto generador de un espacio vectorial no es único.

§ 20. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

En el ejemplo 17.8 vimos que el conjunto de vectores $\{(1,2),(-1,3)\}$ generan a $\mathbb{R}^2$.

Este mismo espacio vectorial lo podemos generar con un conjunto de tres elementos, $\{(1,2),(-1,3),(0,5)\}$; pues cualquier pareja ordenada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se expresa como combinación lineal de estos vectores en la siguiente forma:

$$(a,b) = (a+\beta)(1,2)+\beta(-1,3)+\frac{b-2a-2\beta}{5}(0,5),$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$.

Podemos preguntar por qué estos dos conjuntos que tienen distinto número de elementos generan a un mismo espacio vectorial.

La respuesta es sencilla si observamos que el vector $(0,5)$ es combinación lineal de los vectores $(1,2)$ y $(-1,3)$; esto es, $(0,5) = 1(1,2)+1(-1,3)$. De esta manera, cualquier combinación lineal de los vectores $(1,2)$, $(-1,3)$ y $(0,5)$ pertenece a $L(\{(1,2),(-1,3)\}) = \mathbb{R}^2$.

DEFINICION 20.1 : Un subconjunto S de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe un número finito de vectores $x_1,x_2,\ldots,x_n$ en S y escalares $a_1,a_2,\ldots,a_n$ en K no todos cero, tales que

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = \overline{0}.$$

EJEMPLOS:

1.- El conjunto $\{(1,2),(-1,3),(0,5)\}$ es linealmente dependiente, pues existen escalares $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = -1$ no todos cero, tales que

$$1(1,2)+1(-1,3)-1(0,5) = \overline{0}.$$

2.- Cualquier subconjunto S de V que contenga al vector $\overline{0}$ es linealmente dependiente, pues para cualquier escalar $a \in K$, $a\overline{0} = \overline{0}$.

3.- El subconjunto $S = \{x^2-1, 3x+2, x^2+3x+1\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ es linealmente dependiente, pues para los escalares $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = -1$ no todos cero, se tiene que $1(x^2-1)+1(3x+2)-1(x^2+3x+1) = \overline{0}$.

Observese de la definición 20.1 que un conjunto de vectores de V, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es linealmente dependiente si y sólo si algún vector x_i, $i = 1,2,\ldots,n$,es combinación lineal de los vectores restantes.

En efecto, podemos suponer sin pèrdida de generalidad que $a_1 \neq 0$. Entonces, de la combinación lineal $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = \overline{0}$ obtenemos que $x_1 = a_1^{-1}(-a_2x_2-a_3x_3-\ldots-a_nx_n)$ es combinación lineal del resto de los vectores.

DEFINICION 20.2 : Un subconjunto S de un espacio vectorial, que no es linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente.

Entonces un subconjunto de vectores de V, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente si la única solución a la combinación lineal $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = \overline{0}$, es la solución trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

EJEMPLOS.

4.- El conjunto de vectores $\{(1,2),(-1,3)\}$ es linealmente independiente, pues para escalares a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

$a_1(1,2)+a_2(-1,3) = \overline{0}$

$(a_1, 2a_1)+(-a_2, 3a_2) = \overline{0}$

$(a_1-a_2, 2a_1+3a_2) = (0,0)$

$\therefore a_1-a_2 = 0 \ldots (1)$ y $2a_1+3a_2 = 0 \ldots (2)$.

La igualdad (1) implica $a_1 = a_2$; y sustituyendo en la igualdad (2) tenemos que $5a_1 = 0$, por lo que $a_1 = 0$ y, así, $a_2 = 0$ también.

3.- Cualquier subconjunto de V con un solo elemento no nulo, $\{x\}$, es linealmente independiente.

En efecto. Supongamos que tal conjunto es linealmente dependiente; es decir, existe $a \in K$ y $a \neq 0$, tal que $ax = \overline{0}$. Como a es distinto de cero, existe su inverso multiplicativo $a^{-1} \in K$ y

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}\overline{0}$$

$$(a^{-1}a)x = \overline{0}$$

$$1x = \overline{0}$$

$$x = \overline{0},$$

en contradicción a que $x \neq \overline{0}$. Por lo tanto a solo puede valer cero.

__TEOREMA 20.3__ : Sea V un espacio vectorial y sea $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_1 es linelmente dependiente, entonces S_2 también lo es.■

__COROLARIO 20.4__ : Sea V un espacio vectorial y sea $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_2 es linealmente independiente, entonces S_1 también lo es.■

§ 21. BASE Y DIMENSION

Hemos vsito anteriormente que el conjunto de vectores $\{(1,2),(-1,3)\}$ es generador de $\mathbb{R}^2$ (ejemplo 19.8) y es linealmente independiente (ejemplo 20.4). Un conjunto que posee estas dos caracteristicas es de gran importancia en la teoria de espacios vectoriales, por lo que se les dará un nombre especial en la siguiente defición.

<u>**DEFINICION 21.1**</u> : Una base β para un espacio vectorial V, es un subconjunto de V linealmnete independiente que genera a V.

EJEMPLOS:

1.- Una base para el espacio vectorial $\{\overline{0}\}$ es el conjunto vacio, $\emptyset$, (ver definición 19.3).

2.- Una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es $e_1 = (1,0, \quad ,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots, e_n = (0,0\ldots,1)$. Esta base es conocida como la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

3.- El conjunto $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ forma una base para el espacio vectorial de los polinomios de grado n de variable real, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

4.- Un espacio vectorial puede poseer varias bases; por ejemplo, los conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$ y $\{(1,2),(-1,3)\}$ son ambos, bases de $\mathbb{R}^2$.

El siguiente teorema muestra que cualquier elemento $x \in V$ puede ser expresado de manera única como combinación lineal de los elementos de la base β, y cualquier subconjunto de V que posea estas propiedades debe ser una base de V.

TEOREMA 21.2 : Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un subconjunto de V. Entonces β es base de V si y sólo si cada vector $y \in V$ puede ser expresado de manera única como combinación lineal de elementos de β; esto es, existen escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ de tal manera que $y = a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que β es una base para V. Entonces para cada vector $y \in V$, tenemos que $y \in L(\beta)$, pues $L(\beta) = V$. Por lo tanto, y puede ser expresado como combinación lineal de elementos de β. Supongamos ahora que y se representa como $y = a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$ y también como $y = b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n$ para escalares $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in K$. Restando la segunda igualdad de la primera tenemos que $\overline{0} = (a_1-b_1)x_1+(a_2-b_2)x_2+...+(a_n-b_n)x_n$. Como β es linealmente independiente, debe ser $a_1-b_1 = 0$, $a_2-b_2 = 0,...,a_n-b_n = 0$, por lo que $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2,...,a_n = b_n$. De esta manera hemos demostrado que la representación de y es única.

Para demostrar que un subconjunto β de V que posea las propiedades anteriores es base de V debemos observar lo siguiente:

i) β es un subconjunto generador de V, pues por hipótesis cualquier elemento $x \in V$ puede ser expresado de manera única como combinación lineal de los elementos de β.

ii) β es linealmente independiente, pues el vector $\overline{0}$ puede ser expresado como combinación lineal de elementos de β en la siguiente forma: $\overline{0} = 0x_1+0x_2+...+0x_n$. Como dicha representación es única, se sigue que β es linealmente independiente.■

LEMA 21.3 : Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V y sea x un elemento de V que no pertenece al subespacio generado por S. Entonces el conjunto $S \cup \{x\}$ es linealmente independiente.

DEMOSTRACION:

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos en S linealmente independientes. Tomemos la siguiente combinación lineal igualándola a $\overline{0}$

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+cx = \overline{0}.$$

Debe cumplirse que $c = 0$, pues de lo contrario podemos despejar a x de la siguiente manera

$$x = c^{-1}(-a_1x_1-a_2x_2-\ldots-a_nx_n),$$

lo cual implica que x pertenece al subespacio generado por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto $c = 0$; y como $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, pues los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, se tiene que $S \cup \{x\}$ es linealmente independiente.■

Recordemos del ejemplo 20.1 que los tres vectores de $\mathbb{R}^2$ (1,2), (0,5) y (-1,3) son linealmente dependientes. Puesto que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ puede ser generado con subconjuntos propios que posean dos elementos, se sugiere que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con tres o más elementos necesariamente es linealmente dependiente. Este hecho es cierto y se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 21.4 : Sea V un espacio vectorial sobre K y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces cualquier subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.■

El siguiente teorema muestra que cualesquiera dos bases de un espacio vectorial poseen el mismo número de elementos.

TEOREMA 21.5 : Dos bases cualesquiera del espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos.

DEMOSTRACION:

Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V. Puesto que β posee n elementos, debe ser $m \leq n$; pues de lo contrario los elementos de γ serían linealmente dependientes y no podrían ser base de V. De igual razonamiento se tiene que $n \leq m$, por lo que las dos desigualdades anteriores implican que $n = m$. Así, todas las bases del espacio vectorial V poseen el mismo número de elementos.∎

El toerema precedente da lugar para definir el concepto muy importante de dimensión de un espacio vectorial.

DEFINICION 21.6 : Definimos la dimensión del espacio vectorial V, como el número de elementos que posea cualquier base de V. Utilizaremos el símbolo dim V que se lee "dimensión de V".

Puesto que todas las bases de V poseen el mismo número de elementos, la dimensión de V está bien definida.

EJEMPLOS:

6.- La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n, pues los vectores canónicos $e_1 = (1,0,\ldots,0)$ $e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$ forman una base de este espacio.

7.- La dimensión del espacio de los polinomios de grado n, $\mathbb{P}n(\mathbb{R})$, es n+1, pues los elementos $1, x, x^2, \ldots, x^n$ forman una base.

8.- El conjunto de polinomios de cualquier grado con coeficientes reales, $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, es generado por los elementos $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, que es un conjunto infinito. Por lo tanto la dimensión de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ es infinita.

Obsérvese que nada tiene que ver el número de elementos de un espacio vectorial con el número de elementos de su base; pues por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ tiene cardinalidad infinta, mientras que cualquier base suya posee sólamente dos elementos.

DEFINICION 21.7 : Un conjunto de vectores de V, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ se llama conjunto máximo de vectores linealmente independientes, si al agregar al conjunto cualquier otro elemento de V, el conjunto así formado es linealmente dependiente.

Observemos que cualquier base de V es un conjunto máximo de vectores linealmente indopendientes, y viceversa, un conjunto máximo de vectores linealmente independientes debe ser base.

TEOREMA 21.8 : Sea V un espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto máximo de vectores linealmente independientes de V. Entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V.

DEMOSTRACION:

Puesto que los elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes basta mostrar que generan a V para que constituyan una base de este espacio vectorial.

Para cualquier elemento $w \in V$ se tiene que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente. Entonces existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, no todos cero, tales que $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n + aw = \overline{O}$.

Si $a = 0$ tenemos una relación de dependencia lineal entre los vectores $v_1, \ldots, v_n$, en contradicción a que son linealmente independientes; por lo tanto $a \neq 0$. Así, despejando a w de la igualdad anterior tenemos $w = a^{-1}(-a_1v_1-\dots-a_nv_n)$, que es una combinación lineal de los vectores $v_1,\dots,v_n$, y por lo tanto, $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ genera a V.■

El siguiente corolario muestra que cualquier conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial V puede extenderse a una base de V.

COLORALIO 21.9 : Sea V un espacio de dimensión n y sea $v_1,v_2,\dots,v_r$, con $r<n$, vectores linealmente independientes de V. Entonces existen vectores $v_{r+1},\dots,v_n$ en V tales que $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n\}$ es base de V.

DEMOSTRACION:

Puesto que $r<n$, el cojunto $\{v_1,\dots,v_n\}$ no puede ser base de V, y por lo tanto no es conjunto máximo de vectores linealmente independientes. Elijamos un elemento $v_{r+1} \in V$ de tal manera que $\{x_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$ es linealmente independiente; esto es posible de acuerdo al lema 21.3.

Continuemos este proceso hasta obtener n vectores linealmente independientes $\{v_1,\dots,v_n\}$; el teorema 21.4 asegura que no podemos hallar más de n vectores linealmente independientes en V. Entonces, puesto que $\{v_1,\dots,v_n\}$ forma un conjunto máximo de vectores linealmente independiente es base de V.■

Finalizemos con un teorema, el cual enunciaremos sin demostración. Asegura que conociendo una base β de V con n elementos y un subconjunto S de V linealmente independiente, podemos encontrar un subconjunto $S_1 \subseteq \beta$ de tal manera que $S \cup S_1$ es base de V.

TEOREMA 21.10 : Sea S un espacio vectorial que tiene una base β con n elementos. Sea $S = \{y_1,\dots,y_m\}$ un subconjunto de V linealmente independiente que contenga m elementos, donde $m\leq n$. Entonces existe un subconto S_1 de β que contiene n-m elementos y $S \cup S_1$ es base de V.■

EJEMPLO:

9.- El conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, donde $v_1 = 2-x$, $v_2 = 3+x^2$, $v_3 = 5+x-x^3$ y $v_4 = x^2+x^4$, es un conjunto linealmente independiente del espacio vectorial de los polinomios de grado 4 con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

Puesto que son cuatro vectores, no constituyen una base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$. Así, conociendo la base canónica $\beta = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ podemos tomar un subconjunto S_1 de β con 5-4 = 1 elemento, de tal manera que $S_1 \cup S$ genere a $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

Para encontrar tal subconjunto S_1 de β, debemos escoger cualquier elemento de β y verificar que no pertenece al subespacio generadado por S, L(S). De esta manera el conjunto $S_1 \cup S$ será conjunto máximo de vectores linealmente independiente y, por lo tanto, una base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

Elijamos primeramente al elemento $1 \in \beta$ y expresémoslo como combinación lineal de los elementos de S

$1 = a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4$, para algunos escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ sustituyendo las v_i, $i = 1,2,3,4$ tendremos

$$\begin{aligned} 1 &= a_1(2-x)+a_2(3+x^2)+a_3(5+x-x^3)+a_4(x^2+x^4) \\ &= (a_1 2 - a_1 x)+(a_2 3+a_2 x^2)+(a_3 5+a_3 x-a_3 x^3)+(a_4 x^2+a_4 x^4) \\ &= a_4 x^4-a_3 x^3+(a_4+a_2)x^2+(a_3-a_1)x+(5a_3+3a_2+2a_1) \qquad (*) \end{aligned}$$

Como $1 = 0x^4+0x^3+0x^2+0x+1(1)$, debemos igualar términos comúnes con la ecuación (*). Por lo tanto tendremos

$a_4 = 0$,

$-a_3 = 0$,

$a_4+a_2 = 0$,

$a_3-a_1 = 0$,

$5a_3+3a_2+2a_1 = 1$.

Las ecuaciones anteriores implican que:

$a_4 = 0,$

$a_3 = 0,$

$a_2 = 0,$

$a_1 = 0,$

$5(0)+3(0)+2(0) = 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, es imposible expresar al elemento 1 como combinación lineal de elementos de S; es decir, $1 \notin L(S)$. Así, el conjunto $S \cup \{1\}$ es conjunto máximo de vectores linealmente independientes de V, por lo que constituye una base.

Continuando con este proceso y eligiendo los elementos x, x^2, x^3 y x^4, separadamente, podemos encontrar que todos ellos no pertenecen al subespacio generado por el conjunto S. Por lo tanto, cualquier subconjunto $S_1 \subset \beta$ con un solo elemento es tal que $S \cup S_1$ es base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

A continuación damos las cinco bases que podemos formar a partir de el conjunto S y la base canónica β, y los coeficientes a_i que expresan a cada polinomio de grado cuatro como combinación lineal de los elementos de la base $S \cup S_1$.

Para la base $\beta_1 = \{1, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el polinomio $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, debemos tomar los coeficientes de la siguiente manera:

$a_1 = -b-d,\quad a_2 = -a+c,\quad a_3 = -b,\quad a_4 = a,\quad a_5 = 3a+7b-3c+2d+e.$

Para la base $\beta_x = \{x, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el polinomio $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, debemos tomar los coeficientes de la siguiente manera:

$a_1 = \frac{1}{2}(3a+5b-3c+e),\ a_2 = -a+c,\ a_3 = -b,\ a_4 = a,\ a_5 = \frac{1}{2}(3a+7b-3c+d+e).$

Para la base $\beta_{x^2} = \{x^2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el polinomio $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, debemos tomar los coeficientes de la siguiente manera:

$a_1 = -b-d,\quad a_2 = \frac{1}{3}(7b+2d+e),\quad a_3 = -b,\quad a_4 = d,\quad a_5 = -a+c-\frac{1}{3}(7b+2d+e).$

Para la base $\beta_x^3 = \{x^3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el polinomio $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, debemos tomar los coeficientes de la siguiente manera:

$a_1 = \frac{1}{7}(3a-3c-5d+e),\quad a_2 = -a+c,\quad a_3 = \frac{1}{7}(3a-3c+2d+e),\quad a_4 = a,$
$a_5 = b+\frac{1}{7}(3a-3c+2d+e).$

Para la base $\beta_x^4 = \{x^4, v_1 v_2 v_3 v_4\}$ y el polinomio $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ en $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, debemos tomar los coeficientes de la siguiente manera:

$a_1 = -b-d,\quad a_2 = \frac{1}{3}(7b+2d+e),\quad a_3 = -b,\quad a_4 = c-\frac{1}{3}(7b+2d+e),$
$a_5 = a-c+\frac{1}{3}(7b+2d+e).$

§ 22 TRANSFORMACIONES LINEALES

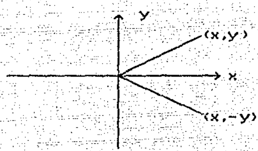
DEFINICION 22.1 : Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K. Una función $T:V \longrightarrow W$ se llama transformación lineal si para cualesquiera elementos x, $y \in V$ y $c \in K$ se tiene

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$,

ii) $T(cx) = cT(x)$.

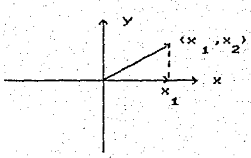
EJEMPLOS:

1.- La función $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x,-y)$ es llamada reflexión sobre el eje x



Esta función es una transformación lineal, pues para vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ $\overline{x} = (x_1,x_2)$, $\overline{y} = (y_1,y_2)$ se tiene $T(\overline{x}+\overline{y}) = T(x_1+y_1,x_2+y_2) = (x_1+y_1,-x_2-y_2) = (x_1,-x_2) + (y_1,-y_2) = T(\overline{x}) + T(\overline{y})$. Para $\alpha \in K$, $T(\alpha\overline{x}) = T(\alpha x_1,\alpha x_2) = (\alpha x_1,-\alpha x_2) = \alpha(x_1,-x_2) = \alpha T(\overline{x})$.

2.- La función $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x_1,x_2) = x_1$ es llamada proyección ortogonal sobre el eje x.



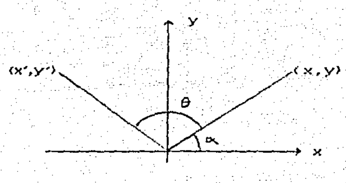
T es una transformación lineal, pues para $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ se tiene $T(\overline{x}+\overline{y}) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = x_1+y_1 = T(\overline{x}) + T(\overline{y})$. Para $\alpha \in K$ tenemos que $T(\alpha\overline{x}) = T(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha x_1 = \alpha T(\overline{x})$.

3.- La transpuesta de una matriz A_{nxm}, la cual se representa como A^t, se obtiene a partir de A intercambiando los renglones por columnas; esto es $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, donde el índice ij representa al elemento matricial que se encuentra en la intersección del i-ésimo renglón y j-ésima columna. Así, para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ su transpuesta es } A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que la función $T: \mathbb{M}_{nxm}(K) \longrightarrow \mathbb{M}_{mxn}(K)$ que a cada matriz A_{nxm} le asigna su matriz transpuesta A^t_{mxn} es una transformación lineal.

4.- Supongamos que el vector $\overline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gira un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido contrario a las manecillas del reloj.



Si representamos como (x', y') al vector girado y $r = \sqrt{x^2+y^2}$ el módulo de $\overline{x}$, el cual no cambia con la rotación, tendremos

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\operatorname{sen}\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta), \qquad y' = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta).$$

Recordando las identidades trigonométricas

$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta$

podemos reescribir a x', y' como

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Consideremos la matriz $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Vemos que $A_\theta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. La transformación lineal (verifiquelo) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(\overline{x}) = A_\theta\overline{x}$ es llamada la rotación en θ.

5.- La función $T:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 5x+2$ no es una transformación lineal pues para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $T(x+y) = 5(x+y)+2 = 5x+5y+\underline{2}$; mientras que $T(x) + T(y) = (5x+2)+(5y+2) = 5x+5y+\underline{4}$, por lo que $T(x+y) \neq T(x)+T(y)$.

6.- Para una matriz A de $n \times n$ definimos la traza de A, la cual la representamos con el símbolo $tr(A)$, como la suma de todos los elementos de la diagonal principal de A. En símbolos tenemos que

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Así, para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, su traza es

$$tr(A) = 1 + 5 + 4 = 10.$$

La función traza, $tr(\ ):M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal pues para matrices A y B de $n \times n$ y para un escalar $c \in \mathbb{R}$ cualquiera se tiene lo siguiente:

i) $tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}+)\ldots + (a_{nn}+b_{nn}) = (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn}) = tr(A) + tr(B)$.

ii) $tr(cA) = c\cdot a_{11}+c\cdot a_{22}+\ldots+c\cdot a_{nn} = c(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) = c\cdot tr(A)$.

Demostremos a continuación que toda transformación lineal $T:V \longrightarrow W$ lleva necesariamente el vector $\overline{0}$ de V, que denotaremos como $\overline{0}_v$, en el vector $\overline{0}$ de W, $\overline{0}_w$. Esto es $T(\overline{0}_v) = \overline{0}_w$ para toda transformación lineal.

En efecto, puesto que $\overline{0}_v+\overline{0}_v = \overline{0}_v$ (Axioma V_3) tenemos que $T(\overline{0}_v) = T(\overline{0}_v+\overline{0}_v) = T(\overline{0}_v)+T(\overline{0}_v)$, pues T es lineal. De nuevo por el axioma V_3 tenemos que $T(\overline{0}_v) = T(\overline{0}_v) + \overline{0}_w$, pues $T(\overline{0}_v) \in W$; esto es $T(\overline{0}_v)+ \overline{0}_w = T(\overline{0}_v)+T(\overline{0}_v)$. Sumando el inverso aditivo de $T(\overline{0}_v)$ (Axioma V_4) tenemos que $\overline{0}_w = T(\overline{0}_v)$, que es lo que queríamos demostrar.

Una transformación lineal está completamente determinada por lo le hace a los vectores base; esto es, dos transformaciones lineales que tomen los mismos valores en los vectores base son iguales.

TEOREMA 22.2 : Sea V un espacio vecorial con base $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Supongamos que $T_1, T_2: V \longrightarrow W$ son dos transformaciones lineales que actuan de igual manera sobre los elementos de la base β; esto es, si $T_1(x_i) = T_2(x_i)$ para toda $x_i \in \beta$ entonces $T_1 = T_2$.

DEMOSTRACION:

Dado un vector $v \in V$ existen escalares únicos $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, pues β es base de V. La linealidad de T_1 y T_2 implican

$$T_1(v) = T_1\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i T_1(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T_2(x_i) = T_2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) = T_2(v).$$

De esta manera, $T_1 = T_2$. ■

7.- Dada $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$ y la base canónica $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ tenemos para el vector $(5,8) \in \mathbb{R}^2$ que $T\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+8 \\ 5-8 \\ 3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 24 \end{bmatrix}$. Por otra parte, $5T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 8T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 24 \end{bmatrix}$.

Entonces, para conocer $T(v)$ para cualquier vector $v \in V$, sabiendo que v se expresa como combinación lineal de los vectores de la base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, como $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, basta calcular $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n)$, que por linealidad de T esto es igual a $T(v)$.

DEFINICION 22.9 : Para una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ definimos el núcleo de T, que lo denotamos como $N(T)$, como el conjunto de vectores $v \in V$ tales que $T(v) = \overline{0}$. Y la imagen de T, denotada como $\text{imag}(T)$, como el conjunto de vectores $w \in W$ que provengan bajo T de algún elemento de V; esto es, $\text{imag}(T) = \{w \in W \,/\, w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$.

EJEMPLOS:

8.- La transformación lineal identidad $I_V: V \longrightarrow V$, definida como $I_V(v) = v$ tiene como núcleo sólamente al vector $\overline{0}$ y como imagen a todo V. Así $N(T) = \{\overline{0}\}$ e $\text{imag}(T) = V$.

9.- La transformación lineal cero, $T\mathbf{o}: V \longrightarrow W$, definida como $T\mathbf{o}(v) = \overline{0}$ para todo $v \in V$ tiene como núcleo a todo el espacio vectorial V y como imagen solo al vector $\overline{0}$ de W. Esto es, $N(T\mathbf{o}) = V$ y $\text{imag}(T\mathbf{o}) = \{\overline{0}\}$.

10.- El núcleo de la transformación rotación en θ es el vector $\overline{0}$ y la imagen es todo $\mathbb{R}^2$. Es decir, $N(A_\theta) = \{\overline{0}\}$ e $\text{imag}(A_\theta) = \mathbb{R}^2$.

11.- La transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $T(x,y,z) = (x-y, 2z)$ tiene como núcleo a todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma $(x,x,0)$. Luego, $N(T) = \{(x,y,z) \,/\, x = y,\ z = 0\}$. La imagen de T es $\text{imag}(T) = \mathbb{R}^2$, pues $T(x,0,\frac{1}{2}y) = (x,y)$.

Lo siguiente es ver que N(T) e imag(T) son subespacios vectoriales de V y W respectivamente.

TEOREMA 22.4 : Si $T:V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W entonces

i) N(T) es un subespacio de V.

ii) imag(T) es un subespacio de W.

DEMOSTRACION:

i) Sean $x,y \in N(T)$ y $\alpha \in K$. Entonces $T(x+y) = T(x)+T(y) = \overline{0}+\overline{0} = \overline{0}$, y $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha\overline{0} = \overline{0}$, por lo que $x+y$ y αx están en N(T). Además sabemos que $T(\overline{0}) = \overline{0}$. Por lo que N(T) es un subespacio de V.

ii) Sean $x,y \in$ imag(T). Entonces existen vectores $x',y' \in V$ tales que $T(x') = x$ y $T(y') = y$. Luego, $x+y = T(x')+T(y') = T(x'+y')$, por lo que $x+y \in$ imag(T). De igual modo para $\alpha \in K$ y $x \in V$ se tiene que $\alpha x = \alpha T(x') = T(\alpha x')$, por lo αx también pertenece a imag(T). Finalmente, $\overline{0}_V$ proviene al menos de $\overline{0}_V$. De todo lo anterior concluimos que imag(T) es un subespacio vectorial de W. ∎

DEFINICION 22.5 : Para una transformación lineal $T:V \longrightarrow W$ definimos lo siguiente:

i) Nulidad de $T = \nu(T) = \dim N(T)$. ($\nu(T)$ léase nulidad de T)

ii) Rango de $T = \rho(T) = \dim \text{imag}(T)$. ($\rho(T)$ léase rango de T)

EJEMPLOS:

12.- El núcleo de la transformación lineal del ejemplo 1 es $N(T) = \{\overline{0}\}$, cuya dimensión es cero; de esta manera, $\nu(T) = \dim N(T) = 0$. Luego, imag(T) $= \mathbb{R}^2$ tiene dimensión dos; así, $\rho(T) = \dim \text{imag}(T) = 2$.

13.- El núcleo de la transformación lineal del ejemplo 2 es $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = 0,\ y \in \mathbb{R}\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \in \mathbb{R}\}$. La dimensión de este subespacio vectorial es uno, por lo que $\nu(T) = \dim N(T) = 1$.

La imagen de T es el eje x, que tiene dimensión uno, por lo que $\rho(T) = \dim \operatorname{imag}(T) = 1$.

14.- La transformación lineal $T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_0+a_1x+a_2x^2$ tiene como núcleo al conjunto de polinomios de la forma $p(x) = 0+0\cdot x+0\cdot x^2+a_3x^3$; es decir,

$$N(T) = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;/\; p(x) = a_3x^3\}$$

y es claro que tiene dimensión 1. Así $\nu(T) = \dim N(T) = 1$.

La imagen de T son todos los polinomios de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2$; por lo tanto $\operatorname{imag}(T) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, que tiene dimensión 3; así $\rho(T) = \dim \operatorname{imag}(T) = 3$.

TEOREMA 22.6 : Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si $\dim V = n$ es finita, entonces $\dim V = \rho(T)+\nu(T)$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es base para $N(T)$, donde $k < n$. El corolario 21.9 asegura que existen vectores $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \in V$ tales que $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ forman una base de V.

Partiendo de esto demostraremos que $\{T(x_{k+1}), T(x_{k+2}), \dots, T(x_n)\}$ es base de $\operatorname{imag}(T)$.

Para cualquier vector $v \in V$, por ser β base de V, existen escalares únicos $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

Por la linealidad T tenemos que $T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i T(x_i)$, pues $T(x_i) = 0$ para $1 \le i \le k$ ya que pertenecen al núcleo de T. De esta manera $T(v) \in L\{T(x_{k+1}), \dots, T(x_n)\}$, y por lo tanto

$\{T(x_{k+1}),T(x_{k+2}), \ldots, T(x_n)\}$ generan a imag(T).

Mostremos que los vectores $T(x_{k+1}),\ldots,T(x_n)$ son linealmente inde- independientes en W.

Tomando una combinación lineal de ellos igual al vector $\overline{0}$ con escalares $b_{k+1},\ldots,b_n \in K$ tenemos que $\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(x_i) = \overline{0}$; de la linealidad de T obtenemos $T\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i\right) = \overline{0}$.

Lo anterior implica que el vector $\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i$ pertenece al núcleo de T; por lo que podemos expresarlo como combinación lineal de los vectores $x_1,x_2,\ldots,x_k$; esto es $\sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ para escalares únicos $c_1,c_2,\ldots,c_k \in K$. Pasando el término de lado izquierdo hacia el lado derecho en la igualdad anterior obtenemos que $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i = \overline{0}$.

Como lo anterior es una combinación lineal igualada a $\overline{0}$ de los vectores $x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n$ que pertenecen a la base β, se sigue que todos los coeficientes $c_1,\ldots,c_k,b_{k+1},\ldots,b_k$ son cero. De esta menera se demuestra que los vectores $T(x_{k+1}),\ldots,T(x_n)$ son linealmente independientes en W, por lo que constituyen una base de imag(T).

Ya que la base de N(T) posee k elementos y la base de imag(T) posee n-k elementos se concluye que $\nu(T)+\rho(T) = k+(n-k) = n = \dim V$. ∎

EJERCICIO 1:

Compruébese que en los ejemplos 11, 12 y 13 se cumple el resultado del teorema 6.

<u>**COROLARIO 22.7**</u> : Sea $T:V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales. Para cualquier base $\beta = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ de V, los vectores $T(x_1)$, $T(x_2)$, ..., $T(x_n)$ generan al rango de T; esto es, $L(T(\beta)) = L(\{T(x_1),T(x_2),\ldots,T(x_n)\}) = R(T)$. ∎

Este corolario indica que conociendo una base del espacio vectorial V podemos encontrar un conjunto generador del rango de la transformación lineal T, aplicando simplemente la transformación T a la base de V.

EJEMPLOS:

15.- Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x-y,2z)$ del ejemplo 11 y la base $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, un conjunto generador del rango de T es $T(\beta)$, el cual es

$$\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\} = \{(1,0),(-1,0),(0,2)\}.$$

Notémos que este conjunto generador es linealmente dependiente, pero el subconjunto $\{(1,0),(0,2)\}$ es linealmente independiente y es base de $\mathbb{R}^2$. Así el rango de T, R(T), es $\mathbb{R}^2$.

16.- Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x+y,x-y,3y)$ y la base $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, un conjunto generador de R(T) es $\{T(1,0),T(0,1)\} = \{(1,1,0),(1,-1,3)\}$.

Puesto que los vectores $(1,1,0)$ y $(1,-1,3)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base de R(T). Así, el rango de T es el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,-1,3)$.

Nuestro siguiente paso es representar a una transformación lineal T mediante una matriz, de tal manera que esta última tenga el mismo efecto que T.

Entenderemos como base ordenada de V, una base de V en la cual hemos escrito en cierto orden los vectores. Así por ejemplo, los conjuntos de vectores $\beta = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ y $\gamma = \{x_n,x_1,\ldots,x_2\}$ como bases ordenadas de V se consideran distintas, aunque como conjuntos sean iguales.

Dada la transformación lineal $T:V \longrightarrow W$ y las bases ordenadas $\beta = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ y $\gamma = \{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ de V y W respectivamente, encontramos de la siguiente manera la matriz asociada a T con respecto a las bases β y γ, y la representaremos como $[T]_\beta^\gamma$.

i) Calculamos $T(v_i)$ para cada vector $v_i \in \beta$, respetando el orden.

ii) $T(v_i)$ lo expresamos como combinación lineal de los vectores de la base γ; esto es, buscaremos escalares $c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{im} \in K$ tales que $T(v_i) = c_{i1}w_1+c_{i2}w_2+\ldots+c_{im}w_m = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}w_j$, para $1 \le i \le n$.

iii) Formamos la matriz $[T]_\beta^\gamma$ poniendo en la columna i todos los escalares $c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{im}$, y esto para cada $i = 1,2,\ldots,n$.

Así tenemos que $[T]_\beta^\gamma =$

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{i1} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{i2} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1m} & c_{2m} & \ldots & c_{im} & \ldots & c_{nm} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO:

17.- Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. La transformación lineal T se conoce como proyección ortogonal sobre el plano xy.

Tomemos las bases canónicas para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$; estas son

$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\gamma = \{(1,0),(0,1)\}$.

Ahora bien:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{0}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{0}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

18.- Para la transformación lineal $T: \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida como $T(f) = f'$ calculamos $[T]_{\beta}^{\gamma}$ de la siguiente manera:

Consideramos los conjuntos $\beta = \{x^4, 2-x, 3+x^2, 5+x-x^3, x^2+x^4\}$ y $\gamma = \{1, x, x^2, x^3\}$ como bases ordenadas de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ respectivamente.

Calculamos $T(v_i)$ para cada $v_i \in \beta$, y lo expresamos como combinación lineal de los elementos de la base γ.

$T(x^4) = 4x^3 = \underline{0}\cdot 1 + \underline{0}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2 + \underline{4}\cdot x^3.$

$T(2-x) = -1 = \underline{-1}\cdot 1 + \underline{0}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2 + \underline{0}\cdot x^3.$

$T(3+x^2) = 2x = \underline{0}\cdot 1 + \underline{2}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2 + \underline{0}\cdot x^3.$

$T(5+x-x^3) = 1-3x^2 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{0}\cdot x - \underline{3}\cdot x^2 + \underline{0}\cdot x^3.$

$T(x^2+x^4) = 2x+4x^3 = \underline{0}\cdot 1 + \underline{2}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2 + \underline{4}\cdot x^3.$

Así,
$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ahora veamos como $[T]_{\beta}^{\gamma}$ actúa de igual manera que T.

Comenzemos definiendo para $\overline{x} \in V$, el vector de coordenadas de $\overline{x}$ con respecto a la base ordenada β; que denotaremos como $[\,\overline{x}\,]_{\beta}$.

Para $\overline{x} \in V$, como β es base de V, existen escalares únicos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ tales que $\overline{x} = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$. Definamos al vector de coordenadas de $\overline{x}$ como el vector columna de los escalares a_i, $i = 1,2,\ldots,n$, de la combinación lineal anterior. Esto es

$$[\,\overline{x}\,]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ donde } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Como los escalares a_i, $i=1,2,\ldots,n$, son únicos el vector de coordenadas de $\overline{x}$ queda bien definido. Es decir, dicho vector de coordenadas de $\overline{x}$ es único.

EJERCICIO 2:

Para un espacio vectorial V de dimensión n, demuestre que la función $T:V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T(\overline{x}) = [\,\overline{x}\,]_\beta$ es una transformación lineal.

EJERCICIO 3:

Sea V un espacio vectorial y $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base ordenada de V. Demuestra que para cada vector $x_i \in \beta$ se tiene que $[x_i]_\beta = e_i$; donde e_i es el vector con 1 en el i-ésimo lugar y 0 en caso contrario.

EJERCICIO 4:

Dada una matriz A de mxn y el vector columna e_i de nx1, demuestra que la i-ésima columna de A, la cual la representaremos como A^i, es igual al producto de A por e_j; esto es, $A^i = A \cdot e_i$.

PROPOSICION 22.8 : Sea $T:V \longrightarrow W$ una transformación lineal y $[T]_\beta^\gamma$ su matriz asociada a T con respecto a las bases ordenadas β y γ de V y W respectivamente. Entonces para cada vector $\overline{x} \in V$ se cumple que

$[T(\overline{x})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma\,[\,\overline{x}\,]_\beta$.

DEMOSTRACION:

Como β es base de V, existen escalares únicos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Por lo tanto, $[T(\overline{x})]_\gamma = [T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)]_\gamma = [\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)]_\gamma$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i [T(x_i)]_\gamma$.

Representemos con la letra A a la matriz asociada a T, $[T]_{\beta}^{\gamma}$, y con A^j al j-ésimo renglón de A.

De la definición de matriz asociada a T, podemos observar que el vector de coordenadas de $T(x_j)$ con respecto a γ y $x_j \in \beta$, es la j-ésima columna de A; esto es, $[T(x_j)]_{\gamma} = A^j$. Además, por el ejercicio 4 tenemos que $A^j = A \cdot e_j$. Pero también $[T(x_j)]_{\gamma} = A \cdot e_j = A \cdot [x_j]_{\beta}$, pues $e_j = [x_j]_{\beta}$ (ver ejercico 3).

Ocupando la linealidad de la función "vector de coordenadas" (ejercicio 2) y lo anterior tenemos que $\sum_{i=1}^{n} a_i [T(x_i)]_{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i = \sum_{i=1}^{n} a_i (A \cdot e_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i A \cdot [x_i]_{\beta} = \sum_{i=1}^{n} A \cdot [a_i x_i]_{\beta} = A \cdot [\sum_{i=1}^{n} a_i x_i]_{\beta} = A\overline{x} = [T]_{\beta}^{\gamma} [\ \overline{x}\ ]_{\beta}$. ■

EJEMPLO:

19.- Sea $T: \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_1+a_2x^2$.

Para las bases canónicas $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\gamma = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ respectivamente se tiene lo siguiente:

$T(1) = T(1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3) = 0 + 0 \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$.

$T(x) = T(0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3) = 1 + 0 \cdot x^2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$.

$T(x^2) = T(0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3) = 0 + 1 \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$.

$T(x^3) = T(0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3) = 0 + 0 \cdot x^2\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$.

La matriz asociada a T con respecto a las bases β y γ es en este caso

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, para el polinomio $5+3x+4x^3$ su vector de coordenadas con respecto a la base β es $[5+3x+4x^3]_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, mientras que el vector de coordenadas de $T(5+3x+4x^3) = 3$ con respecto a la base γ es $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego, $[T]_{\beta}^{\gamma} \cdot [5+3x+4x^3]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [T(5+3x+4x^3)]_{\gamma}$.

§ 23. MATRICES

DEFINICION 23.1 : Una matriz con entradas en un campo K es un arreglo de números en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento a_{ij} recibe el nombre de i,j-ésimo coeficiente, y pertenece al campo K.

Reconocemos en cualquier matriz renglones y columnas como

$$\left[\ \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{m1} \end{matrix}}\ \ \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{m2} \end{matrix}}\ \ \cdots\cdots\ \ \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{in} \\ \dots \\ a_{mn} \end{matrix}}\ \right]$$

COLUMNAS DE UNA MATRIZ

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}} \end{bmatrix}$$

RENGLONES DE UNA MATRIZ

y decimos que el elemento a_{ij} -"a subíndices i,j"- se encuentra en la intersección del i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

También se representa una matriz A por renglones o columnas como $A = (A_1\ A_2 \ldots A_n)$ y $A = (A^1\ A^2 \ldots A^n)$, donde A_i representa al i-ésimo renglón de la matriz A y A^j representa la j-ésima columna.

Cuando la matriz A tiene m renglones y n columnas, decimos que A tiene tamaño mxn y lo representamos como A_{mxn}.

EJEMPLO:

1.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de 2 renglones y 3 columnas, por lo que tiene Lamaño 2x3 y la representamos como A_{2x3}.

2.- La matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ es una matriz de 4 renglones y 1 columna. Decimos que B es un vector columna.

3.- Un número real x lo podemos considerar como una matriz de un renglón y una columna.

DEFINICION 23.2 : Decimos que la matriz A es cuadrada cuando el número de renglones es igual al número de columnas. En este caso representamos a la matriz A como A_{nxn}.

DEFINICION 23.3 : La diagonal principal de una matriz A de nxn está formada por todos los elementos a_{ii}, $i = 1,2,\ldots,n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal de A

DEFINICION 23.4 : La matriz identidad de nxn es la matriz que tiene unos en la diagonal principal y ceros fuera de ella; se representa con el símbolo I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 23.5 : Una matriz en la que todos sus coeficientes son ceros se llama matriz nula o matriz cero; se represneta con el símbolo O_{mxn}, en caso que tenga tamaño mxn.

Decimos que una matriz es distinta de cero (distinta de la matriz cero) si al menos uno de sus coeficientes es no cero.

DEFINICION 23.6 : Una matriz cuadrada es triangular superior si todos los elementos que se encuentren por debajo de la diagonal principal son cero. De igual manera definimos una matriz triangular inferior como la matriz con ceros por encima de la diagonal principal.

EJEMPLO:

4.- Las matrices A y B siguientes son triangular superior y triangular inferior, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 23.7 : Una matriz cuadrada se llama matriz diagonal si es matriz triangular superior y triangular inferior al mismo tiempo. Esto es, una matriz cuadrada es diagonal si todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

EJEMPLO:

5.- Las siguientes matrices cuadradas son matrices diagonales:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ALGEBRA DE MATRICES

Por conveniencia representemos a la matriz A como $A = (a_{ij})$, y con esta notación definamos la suma y producto de matrices.

<u>**DEFINICION 23.8**</u> : Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo tamaño y elemento a elemento son iguales.

EJEMPLO:

6.- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ son distintas pues $a_{22} \neq b_{22}$.

<u>**DEFINICION 23.9**</u> : Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de m x n. La suma de A y B es la matriz $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$ de $m \times n$ dada por

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Esto es, A+B es la matriz de m x n obtenida al sumar las componentes correspondientes de A y B.

EJEMPLO:

7.- La suma de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ es la matriz

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+0 & 2+2 \\ 4+8 & 6-1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observemos de la definición de suma de matrices que no es posible sumar matrices de diferente tamaño.

EJEMPLO:

8.- Dadas las matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, no podemos efectuar su suma pues la primera matriz es de 3x2 y la segunda de 2x3.

La suma de matrices satisface las siguientes propiedades.

PROPIEDADES 23.9 : Para matrices A, B y C del mismo tamaño se cumple lo siguiente:

i) A+B = B+A (conmutatividad).

ii) (A+B)+C = A+(B+C) (asociatividad).

iii) 0+A = A+0 = A (existencia del neutro aditivo).

DEFINICION 23.10 : Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de m x n y c es un escalar, entonces la matriz $c\cdot A = (c\cdot a_{ij})$ de m x n está dada por

$$c\cdot A = (c\cdot a_{ij}) = \begin{bmatrix} c\cdot a_{11} & c\cdot a_{12} & \dots & c\cdot a_{1n} \\ c\cdot a_{21} & c\cdot a_{22} & \dots & c\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c\cdot a_{n1} & c\cdot a_{n2} & \dots & c\cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

EJEMPLOS:

9.- Multiplicar la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ por el escalar $c = -2$.

Solución : En este caso tenemos que $-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 & 0 \\ 2 & -8 & -6 \\ -10 & -18 & -2 \end{bmatrix}$.

10.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Calcular $-A+3B$.

Solución: $-A+2B = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 7 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 14 & -10 \\ -4 & 6 & 12 \\ 10 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 17 & -14 \\ -7 & 5 & 8 \\ 12 & -5 & 5 \end{bmatrix}$.

La multiplicación de un escalar por una matriz satisface la ley distributiva sobre la suma; esto es, $c \cdot (A+B) = c \cdot A + c \cdot B$, para matrices cualesquiera A y B del mismo tamaño.

DEFINICION 23.11 : Definimos el producto escalar de los vectores

$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, y lo representaremos por $a \cdot b$, como

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n .$$

Por la notación del producto escalar de a y b se conoce frecuentemente como producto punto de a y b.

EJEMPLO:

11.- El producto escalar o producto punto de los vectores $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ es $a \cdot b = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 26.$

Nótese que el producto escalar de dos vectores a y b es un número real, $a \cdot b \in \mathbb{R}$, y que a y b deben tener el mismo número de elementos.

El producto escalar de vectores tiene las siguientes propiedades:

i) $a \cdot b = b \cdot a$ (conmutatividad).

ii) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (el producto escalar distribuye a la suma de vectores).

El producto escalar de vectores no es asociativo en la multiplicación, pues $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ no tiene sentido, pues $a \cdot b$ y $b \cdot c$ son números reales y el producto escalar está definido sólo para vectores.

DEFINICION 23.12 : El producto de las matrices A_{mxn} y B_{nxr} es la matriz $C_{mxr} = AB_{mxr}$ cuyo ij-ésimo componente es el producto escalar del i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B; esto es, $c_{ij} = A_i \cdot B^j$. Representaremos el producto de A y B como AB.

En forma de vectores tendremos que

$$c_{ij} = (a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{in}) \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

y en forma de sumatoria es $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

EJEMPLOS:

12.- Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ calcular el producto AB.

Solución: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 14 & 16 \\ 21 & 10 & 11 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

pues $c_{11} = A_1 \cdot B^1 = (1\ 4\ 2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 25$,

$c_{12} = A_1 \cdot B^2 = (1\ 4\ 2) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 14$,

$\vdots$

${}_{33} = A_3 \cdot B^3 = (1\ 1\ 0) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5.$

13.- Con las mismas matrices del ejemplo anterior calculemos ahora BA.

Solución: $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 6 \\ 4 & 23 & 10 \\ 10 & 28 & 16 \end{bmatrix}$,

pues $c_{11} = B_1 \cdot A^1 = (1\ 2\ 4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5$,

$c_{12} = B_1 \cdot A^2 = (1\ 2\ 4) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 14$,

$\vdots$

$c_{33} = B_3 \cdot A^3 = (6\ 2\ 4) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 16.$

Nótese que el producto de matrices no es comutativo; los ejemplos anteriores muestran que $AB \neq BA$. También es importante tener en cuenta que para multiplicar dos matrices, es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones de la segunda.

PROPOSICION 23.13 : Para matrices A, B y C, de manera que estén definidas la suma y multiplicación correspondientes tenemos:

i) $(AB)C = A(BC)$ (conmutatividad).

ii) $A(B+C) = AB + AC$ (distributividad de la suma sobre el producto).

iii) $AI = IA = A$.

El conjunto de matrices no tiene la propiedad de ser un conjunto sin divisores de cero; esto es, dado el producto de matrices $A \cdot B = 0$ no podemos asegurar que alguna de las matrices sea idénticamente cero. Observemos las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ son tales que } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

esto es, son dos matrices diferentes de cero cuyo producto es la matriz cero.

Otro ejemplo de matrices diferentes de cero y cuyo producto es igual a cero es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \overline{0}_{2x3}$$

OPERACONES ELEMENTALES EN RENGLONES DE UNA MATRIZ

DEFINICION 23.14 : Las siguientes operaciones sobre los renglones de una matriz son llamadas "operaciones elementales en renglones":

i) Multiplicar o dividir un renglón por un número distinto de cero.

ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro.

iii) Intercambiar dos renglones de lugar.

Las operaciones elementales en renglones representémosla con la siguiente notación:

i) $M_i(c)$, representa "Multiplicar el i-ésimo renglón de una matriz por un número $c \neq 0$".

ii) A_{ij}, representa "Multiplicar el i-ésimo renglón por c y sumárselo al j-ésimo renglón de la matriz dada".

iii) P_{ij}, representa "Intercambiar, permutar de lugar los renglones i, j".

<u>**DEFINICION 23.15**</u> : Decimos que las matrices A y B son equivalentes, y lo representamos como $A \sim B$, si B se obtiene a partir de A por un número finito de operaciones elementales en renglones.

EJEMPLO:

14.- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ son equivalentes, pues B se obtiene efectuando las siguientes operaciones elementales en los renglones de A:

$A_{13}(1)$, "multiplicar el primer renglón de A por 1 y sumar el resultado al segundo renglón" para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix};$$

P_{23}, "permutar los renglones 2 y 3" para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Lo anterior lo podemos expresar como una sucesión de operaciones elementales de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Obsérvese que no utilizamos el símbolo de igualdad "=" pues las matrices son distintas. Arriba del símbolo de equivalencia "~" se indica la operación elemental que se utilizó.

MATRICES ESCALONADAS

DEFINICION 23.16 : Se dice que una matriz está en forma escalonada si cumple lo siguiente:

i) Todos los renglones que consten de puros ceros se ecuentran en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer elemento distinto de cero de cualquier renglón, empezando de izquierda a derecha, debe ser 1.

iii) Si dos renglones consecutivos son no cero, el primer 1 del renglón inmediato inferior está más a la dercha que el primer 1 del renglón inmediato superior.

EJEMPLOS:

15.- Las siguientes matrices están en forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

16.- Las siguientes matrices no están en forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>**DEFINICION 23.17**</u> : Una matriz está en forma escalonada reducida si está en su forma escalonada y además satisface el inciso extra

iv) Cualquier columna que contenga el primer 1 de un renglón tendrá ceros en los demás lugares.

EJEMPLO:

17.- Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La diferencia entre las formas escalonada y escalonada reducida es que, abajo y arriba del primer 1 de cada renglón debe haber puros ceros en la forma escalonada reducida, mientras que en la forma escalonada no sucede así.

Cualquier matriz puede hacerse equivalente a otra matriz en forma escalonada o escalonada reducida mediante operaciones elementales en renglones.

EJEMPLO:

18.- Llevar a su forma escalonada o escalonada reducida, según sea posible, la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Solución: Efectuando operaciones elementales en renglones sobre A obtendremos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{13}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -14 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{M_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -14 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{21}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -54 \end{bmatrix} \underset{\sim}{M_3(\frac{-1}{54})}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{A_{31}(3)}{\overset{A_{31}(-14)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Como hemos visto, una matriz $A_{m \times n}$ la podemos expresar por medio de sus renglones y sus columnas como $A = (A_1\ A_2 \ldots A_m)$ y $A = (A^1\ A^2 \ldots A^n)$.

Cada uno de estos renglones o columnas las podemos considerar a su vez como elementos de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

EJEMPLO:

19.- Dada la matriz $A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 4 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, podemos considerar a sus renglones $A_1 = (1\ 2\ 4\ 0)$, $A_2 = (0\ 5\ -1\ -3)$ y $A_3 = (4\ 8\ 5\ 7)$ como elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, y sus columnas

$A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $A^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ las podemos considerar como elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

DEFINICION 23.18 : Definimos el rango de una matriz como la dimensión del espacio vectorial generado por los renglones de A; denotamos el rango de A como "ran(A)".

EJEMPLOS:

20.- La matriz identidad de 3x3, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene rango 3, pues sus renglones forman un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes.

21.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene rango 2, porque los renglones 1 y 3 de A forman un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

22.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango 1, pues tiene solamente un vector distinto de cero, el cual es linealmente independiente.

Para encontrar el rango de una matriz procedemos a escalonarla mediante operaciones elementales en renglones. La matriz así obtenida es equivalente a la original, y sus rangos son iguales como lo veremos en el siguiente teorema.

TEOREMA 23.19 : Las operaciones elementales en renglones no alteran el rango de una matriz. Esto es, si las matrices A y B son equivalentes, sus rangos son iguales.

"Si $A \sim B$ entonces ran(A) = ran(B)".

DEMOSTRACION:

Basta con observar que las operaciones elementales en renglones no alteran el subespacio vectorial generado por los renglones de una matriz.

De esta manera, el rango de una matriz es el número de renglones distintos de cero en la forma escalonada de dicha matriz.

EJEMPLOS:

23.- Encontrar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Llevemos la matriz A a su forma escalonada mediante operaciones elementales en renglones

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \overset{A_{13}(-4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & -11 & -6 \end{bmatrix} \overset{M_2(1/6)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ 0 & -11 & -6 \end{bmatrix} \overset{A_{23}(11)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ 0 & 0 & 41/6 \end{bmatrix} \quad M_3($$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

La última matriz obtenida tiene rango 3, pues en su forma escalonada tiene tres renglones distintos de cero. Como $A \sim A'$, $ran(A) = ran(A') = 3$.

24.- Cacular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución: Llevando la matriz A a su forma escalonada tendramos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 18 & 4 \end{bmatrix} \underset{A_{13}(-8)}{\overset{A_{12}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -14 & -12 \end{bmatrix} \overset{A_{23}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A' tiene rango 2, pues tiene dos renglones distintos de cero. Como $A \sim A'$, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 2$.

INVERSA DE UNA MATRIZ

DEFINICON 23.20 : Sean A y B dos matrices de n x n, tales que AB = BA = I Entonces B se conoce como la inversa de A y se escribe A^{-1}. Si A tiene inversa decimos que A es invertible.

PROPOSICION 23.21 : Si la matriz A de n x n tiene inversa, entonces su inversa es única.

DEMOSTRACION:

Supongamos que B y C son dos matrices inversas de A; esto es AB = BA = I y AC = CA = I. Como B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C, concluimos que la inversa de A es única.∎

DEFINICION 23.22 : Para una matriz A de m x n definimos la matriz aumentada con la matriz identidad de m x m, como la matriz $(A|I)$ de m x (n+m) que se obtiene al agregar la matriz Im al lado derecho de A.

Para calcular la inversa de una matriz procedemos según los siguientes incisos:

i) Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.

ii) Reducir mediante operaciones elementales en renglones hasta su forma escalonada la matriz aumentada.

iii) Si A puede ser reducida a la matriz identidad, entonces A^{-1} es la matriz que queda a la dercha de la barra vertical de la matriz aumentada.

iv) Si la reducción por renglones conduce a algún renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces la matriz A no es invertible.

EJEMPLOS:

25.- Encontrar, si existe, la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Solución: Tomamos la matriz aumentada $(A|I)$ y la reducimos mediante operaciones elementales en renglones hasta su forma escalonada. Representemos las operaciones elementales efectuadas en secuencia:

$$(A|I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{13}(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{M_2(\frac{1}{3})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{21}(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/3 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{23}(14)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/3 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -20/3 & -4 & 14/3 & 1 \end{array}\right] \overset{M_3(\frac{-3}{20})}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/3 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{array}\right] \overset{A_{32}(\frac{1}{3})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10/3 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{array}\right] \overset{A_{31}(\frac{-10}{3})}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{array}\right].$$

La matriz a la izquierda de la barra vertical es la inversa de A;

es decir $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 & -1/20 \\ 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{bmatrix}$.

26.- Calcular la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución: Efectuando operaciones elementales en la matriz aumentada $(A|I)$ tenemos

$$(A|I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{12}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{M_2(\frac{-1}{8})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right] \overset{A_{21}(-4)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right].$$

En este caso la inversa de A es la matriz a la derecha de la barra vertical, es decir $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}$.

27.- Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución: Aplicamos operaciones elementales en renglones a la matriz aumentada $(A|I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{12}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{A_{13}(-5)}{\sim}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -6 & 1 \end{array}\right].$$

En este momento hemos obtenido un renglón de puros ceros al lado izquierdo de la barra vertical, por lo que en este caso A no tiene inversa.

PROPIEDADES 29.23 : Para matrices A y B de n x n invertibles se tiene que:

i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; es decir, el producto de matrices invertibles es invertible. En general, $(A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1$.

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

EJEMPLOS:

28.- Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Cada una de las matrices anteriores es invertible, y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/10 & -1/20 \\ 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{bmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \text{ respectivamente.}$$

Efectuando el producto de A por B tendremos

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 26 & 10 \end{bmatrix}.$$

Mediante operaciones elementales en los renglones de AB calculemos su inversa:

$$(AB|I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 26 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{A_{12}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 26 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{P_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{A_{12}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 41 & 15 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 26 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{M_2(1/41)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15/41 & 4/41 & -3/41 & 0 \\ 0 & 26 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{A_{23}(-26)}{\overset{A_{21}(11)}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -40/41 & 3/41 & 8/41 & 0 \\ 0 & 1 & 15/41 & 4/41 & -3/41 & 0 \\ 0 & 0 & 20/41 & -104/41 & 78/41 & 1 \end{array}\right] \overset{M_3(41/20)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -40/41 & 3/41 & 8/41 & 0 \\ 0 & 1 & 15/41 & 4/41 & -3/41 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26/5 & 39/10 & 41/20 \end{array}\right] \underset{A_{32}(-15/41)}{\overset{A_{31}(40/41)}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -26/5 & 39/19 & 41/20 \end{array}\right] = (I|A^{-1}).$$

Ahora bien, efectuando el producto de B^{-1} por A^{-1} obtenemos

$$B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/10 & -1/20 \\ 3/5 & -7/10 & -3/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 2 & -3/2 & -3/4 \\ -26/5 & 39/10 & 41/20 \end{bmatrix}$$

por lo que podemos observar que se cumple la igualdad $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

DEFINICION 23.24 : Una matriz cuadrada E de n x n se denomina matriz elemental si puede ser obtenida a partir de la matriz identidad I_n, por medio de una sola operación elemental de renglones.

EJEMPLOS:

30.- La matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz elemental, pues se obtiene a partir de la matriz identidad I_3 con tan sólo sumar tres veces el primer renglón al segundo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{A_{12}(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

31.- la matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz elemental, pues con sólo permutar los renglones uno y tres de la matriz identidad I_3, obtenemos E.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{P_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

32.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ no es elemental, pues necesitamos aplicar más de una operación elemental a la matriz identidad para poder llegar a ella.

33.- La matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz elemental , pues basta con multiplicar por 5 el segundo renglón de I_3, esto es:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{M_2(5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Representemos de ahora en adelante a las matrices elementales con los símbolos $E_{ij}(c)$; $E_i(c)$; E_{ij} según sea el caso de la operación elemental usada en la matriz identidad I_n para obtener E.

De esta manera tendremos que $E_{ij}(c)$ representa a la matriz elemental que se obtiene a partir de la matriz identidad de I_n, sumándo c veces el i-ésimo renglón al j-ésimo

$$I_n \overset{A_{ij}(c)}{\sim} E_{ij}(c).$$

$E_i(c)$ representa a la matriz elemental que se obtiene a partir de la matriz identidad I_n, multiplicando el i-ésimo renglón por un número c distinto de cero

$$I_n \overset{M_i(c)}{\sim} E_i(c).$$

E_{ij} representa a la matriz elemental que se obtiene a partir de la matriz identidad I_n, permutando los renglones i y j

$$I_n \overset{P_{ij}}{\sim} E_{ij}.$$

Así, las matrices elementales de los ejmplos 30, 31 y 33 se represen-tan como $E_{12}(3)$, E_{13} y $E_2(5)$ respectivamente.

Para efectuar operaciones elementales en renglones sobre la matriz A basta multiplicar por la izquierda a la matriz A por la correspondiente matriz elemental.

EJEMPLO:

34.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Efectuar las siguientes operaciones elementales en renglones de A, multiplicando por la izquierda de A por la matriz elemental apropiada:

i) Multiplicar el segundo renglón de A por 5.

ii) Multiplicar el primer renglón de A por -3 y sumárselo al tercero.

iii) Permutar los renglones 2 y 3 de A.

Solución: Puesto que A tiene tamaño 3x4 la matriz elemental debe tener tamaño 3x3 para poder efectuar la multiplicación por la izquierda.

$$\text{i) } E_2(5)\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 10 & 15 & -25 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{ii) } E_{13}(-3)\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{iii) } E_{23}\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

La siguiente pregunta que nos interesa es saber si la inversa de una matriz elemental es a su vez otra matriz elemental.

La respuesta es afirmativa, y los siguentes productos matriciales fáciles de verificar nos muestran la matriz inversa de cada una de las matrices elementales.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) } E_i(m)\cdot E_i(1/m) = I_n \\ \text{ii) } E_{ij}(a)\cdot E_{ij}(-a) = I_n \\ \text{iii) } E_{ij}\cdot E_{ij} = I_n \end{array}}$$

En cada uno de los tres casos obtenemos la matriz identidad y, más aún, podemos observar que la inversa de una matriz elemental es de nuevo otra matriz elemental.

Para la matriz elemental	Su inversa es
$E_i(c)$	$E_i(1/c)$
$E_{ij}(c)$	$E_{ij}(-c)$
E_{ij}	E_{ij}

La idea de encontrar la inversa de una matriz elemental es que podemos retroceder en las operaciones elementales efectuadas en los renglones de una matriz.

EJEMPLOS:

35.- La matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ se obtiene al permutar los renglones 2 y 3 de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Esto es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{P_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A',$$

o multiplicando A por la izquierda por la matriz elemental E_{23} tenemos

$$E_{23} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

Puesto que la inversa de la matriz elemental E_{23} es ella misma, $E_{23}^{-1} = E_{23}$, multiplicando a la izquierda ambos lados de la igualdad anterior por E_{23} tenemos

$$E_{23}(E_{23}\cdot A) = E_{23}\cdot A'$$
$$(E_{23}\cdot E_{23})A = E_{23}\cdot A'$$
$$I\cdot A = E_{23}\cdot A'$$
$$A = E_{23}\cdot A';$$

esto es, podemos regresar a la matriz original A.

36.- Mediante operaciones elementales en renglones llevar a su forma escalonada reducida, si esto es posible, a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución: Las operaciones elementales a efectuarse en A para llevarla a su forma escalonada reducida son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{A_{12}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{M_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{A_{21}(-3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

en este caso la forma escalonada reducida de la matriz A es la matriz I_2.

La secuencia anterior de operaciones elementales se puede también representar como un producto de matrices elemenetales de la siguiente forma:

$$E_{21}(-3)\cdot E_{2}(-1)\cdot E_{12}(-2)\cdot A = I_2. \,^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior implica que $A^{-1} = E_{21}(-3)\cdot E_{2}(-1)\cdot E_{12}(-2)$; pues A^{-1} es la única matriz que satisface $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$.

En este caso $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Para regresar a la matriz original A basta con multiplicar a la izquierda en la ecuación señalada con "*" por la inversa del producto de las matrices elementales; esto es,

$$A = (E_{21}(-3)\cdot E_{2}(-1)\cdot E_{12}(-2))^{-1}$$

recordando quien es la inversa de un producto de matrices tenemos

$$A = E_{12}^{-1}(-2)\cdot E_{2}^{-1}(-1)\cdot E_{21}^{-1}(-3)$$

tomando la inversa de cada matriz elemental tenemos que

$$A = E_{12}(2)\cdot E_{2}(-1/2)\cdot E_{21}(3).$$

Hemos expresado a la matriz A como un producto de matrices elementales.

37.- Mediante operaciones elementales en renglones llevar a su forma escalonada reducida, si esto es posible, a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \overset{M_1(1/2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \overset{A_{12}(-3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \overset{A_{13}(-6)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & -21 & -11 \end{bmatrix} \overset{M_2(-1/8)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & -21 & -11 \end{bmatrix} \overset{A_{21}(-4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & -21 & -11 \end{bmatrix} \overset{A_{23}(21)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & 0 & 59/8 \end{bmatrix} \overset{M_3(8/59)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{A_{32}(-7/8)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{A_{31}(1/2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La forma escalonada reducida de la matriz A es la matriz I_3. Por lo tanto, podemos escribir un producto de matrices elementales:

$$E_{31}(\tfrac{1}{8})\cdot E_{32}(\tfrac{-7}{8})\cdot E_{3}(\tfrac{8}{59})\cdot E_{23}(21)\cdot E_{21}(-4)\cdot E_{2}(\tfrac{-1}{8})\cdot E_{13}(-6)\cdot E_{12}(-3)\cdot E_{1}(\tfrac{1}{2})\cdot A = I_3.$$

Así que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = E_{31}(\tfrac{1}{8})\cdot E_{32}(\tfrac{-7}{8})\cdot E_{3}(\tfrac{8}{59})\cdot E_{23}(21)\cdot E_{21}(-4)\cdot E_{2}(\tfrac{-1}{8})\cdot E_{13}(-6)\cdot E_{12}(-3)\cdot E_{1}(\tfrac{1}{2}) =$$

$$\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{-7}{8}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{8}{59}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&21&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1}{8}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-6&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{118}\cdot\begin{bmatrix}22&-38&-8\\-9&-22&14\\-15&42&-16\end{bmatrix}.$$

Aquí de nuevo para regresar a la matriz original A debemos multiplicar a la izquierda por la inversa del producto de matrices elementales; es decir: Si $E_m\cdot E_{m-1}\cdot\ \ldots\ \cdot E_2\cdot E_1\cdot A = I$, entonces $A = E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot\ \ldots\ \cdot E_m^{-1}\cdot I$.

38.- Expresar a la matriz $A = \begin{bmatrix}1&13&-2\\-1&4&3\\3&5&-8\end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales por una matriz triangular superior.

Solución: Mediante operaciones elementales en renglones reducimos a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix}1&13&-2\\-1&4&3\\3&5&-8\end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{12}(1)} \begin{bmatrix}1&13&-2\\0&17&1\\3&5&-8\end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{13}(-3)} \begin{bmatrix}1&13&-2\\0&17&1\\0&-34&-2\end{bmatrix} \underset{\sim}{A_{23}(2)} \begin{bmatrix}1&13&-2\\0&17&1\\0&0&0\end{bmatrix} = R.$$

En este caso la matriz triangular superior es $R = \begin{bmatrix}1&13&-2\\0&17&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. Entonces la matriz A la podemos expresar por medio del siguiente producto:

$$E_{23}(2)\cdot E_{13}(-3)\cdot E_{12}(1)\cdot A = R = \begin{bmatrix}1&13&-2\\0&17&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Multiplicando a la izquierda por la inversa de cada matriz elemental tenemos

$$A = E_{12}^{-1}(1)\cdot E_{13}^{-1}(-3)\cdot E_{23}^{-1}(2)\cdot R$$

es decir,

$$A = E_{12}(-1)\cdot E_{13}(3)\cdot E_{23}(-2)\cdot R$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 13 & -2 \\ 0 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De los ejemplos anteriores podemos ver que cualquier matriz A de $n \times n$ la podemos expresar como un producto de matrices elementales y una matriz triangular superior. Más aún, es posible expresarla como producto de una una matriz triangular inferior, que será producto de matrices elementales, por una matriz triangular superior.

EJEMPLOS:

39.- Expresar a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ como producto de matrices triangular superior e inferior.

Solución: Mediante operaciones elementales llevamos a la matriz A a la forma triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \underset{A_{13}(-5)}{\overset{A_{12}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & -18 & -27 \end{bmatrix} \overset{A_{23}(-18/13)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & \frac{-135}{13} \end{bmatrix} = U.$$

Lo anterior lo pedemos expresar como producto de matrices elementales

$$E_{23}\left(\frac{-18}{13}\right)\cdot E_{13}(-5)\cdot E_{12}(-3)\cdot A = U.$$

Si multiplicamos a la izquierda de la igualdad anterior por la inversa de cada matriz elemental tenemos que

$$A = E_{12}(3)\cdot E_{13}(5)\cdot E_{23}\left(\frac{-18}{13}\right)\cdot U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-18}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & \frac{-135}{13} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & \frac{18}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & \frac{-135}{13} \end{bmatrix},$$

Esto es, A se expresa como el producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

§ 24. DETERMINANTES

Para dar una definición formal de la función determinante comenzemos con la definición de permutación de n elementos.

DEFINICION 24.1 : Una permutación de los objetos a_1, a_2, ..., a_n es una función biyectiva del conjunto de índices $\{1,2,...,n\}$ en sí mismo.

Denotaremos al conjunto de los índices con el símbolo I_n, de esta manera $I_n = \{1,2,...,n\}$.

Por ejemplo, para el conjunto $A = \{a_1,a_2,a_3\}$ hay seis biyecciones del conjunto de índices $I_3 = \{1,2,3\}$ en sí mismo y representan seis permutaciones de los elementos de A:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

DEFINICION 24.2 : Se dice que ocurre una inversión en una permutación de los elementos a_1, a_2, ..., a_n siempre que un índice mayor preceda a uno menor.

Encontremos el número de inversiones en cada una de las seis permutaciones de S_3:

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ Hay 0 inversiones pues $1 < 2 < 3$.

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$ Hay 1 inversión pues $3 > 2$.

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$ Hay 1 inversión pues $2 > 1$.

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$ Hay 2 inversiones pues $2 > 1$ y $3 > 1$.

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ Hay 2 inversiones pues $3 > 1$ y $3 > 2$.

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ Hay 3 inversiones pues $3 > 2$, $3 > 1$ y $2 > 1$.

DEFINICON 24.3 : Se dice que una permutación es par, si el número total de inversiones que posee es un entero par; y se dice que la permutación es impar, si el número total de inversiones que posee es un entro impar.

Citando en orden las permutaciones anteriores tenemos:

i) Permutación par,

ii) Permutación impar,

iii) Permutación impar,

iv) Permutación par,

v) Permutación par,

vi) Permutación impar.

DEFINICION 24.4 : Para una matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ de 2x2 con coeficientes en los reales o complejos definimos el determinante de A como

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

El símbolo det A se lee " determinante de A" y con frecuencia se denota también como $|A|$; esto es

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Observemos que "det" asigna un número en el campo K a una matriz cuadrada.

EJEMPLOS:

1.- Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, su determinante es $1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -7$.

2.- La matriz identidad de 2x2, I_2, tiene determinante 1. En efecto,

$$\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

3.- La matriz cero de 2x2 tiene determinante 0.

DEFINICION 24.5 : Para el caso de una matriz A de 3x3 calculamos su determinante de la siguiente manera:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

EJEMPLO:

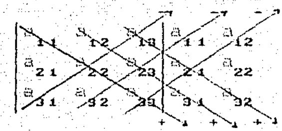
4.- Calcular el determinante de $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$.

Solución: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$

$$2 \cdot 0 \cdot 9 - 2 \cdot 4(-3) - (-3) \cdot 1 \cdot 9 + (-3) \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1(-3) - 5 \cdot 0 \cdot 3 = 0.$$

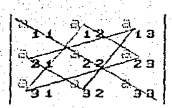
Otros métodos para calcular el determinante de una matriz A de 3x3 son los siguientes:

i) Escribir A y junto a ella sus primeras dos columnas



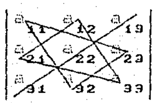
Luego se multiplican los elementos según la flecha y se les antepone al producto signo "+" cuando la flecha apunte hacia abajo, y signo "−" cuando apunte hacia arriba. Esto es $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$.

ii) Escribir A y multiplicar los elementos correspondientes según la figura de estrella:



signo "+"

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$$



signo "−"

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$$

EJEMPLO:

5.- Calcula el determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$ por los dos métodos descritos anteriormente.

Solución: Primer método

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 3 & -3 \end{array}\right| = (2\cdot 0\cdot 9) + (-3\cdot 4\cdot 3) + (5\cdot 1\cdot(-3)) - (3\cdot 0\cdot 5) -$$

$$(-3\cdot 4\cdot 2) - (9\cdot 1\cdot(-3)) = 0 - 36 - 15 - 0 + 24 + 27 = 0.$$

Segundo método:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$: $2\cdot 0\cdot 9 + (-3\cdot 4\cdot 3) + (-3\cdot 1\cdot 5) = -51;$

signo "+

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$: $-3\cdot 0\cdot 5 - (-3\cdot 1\cdot 9) - (-3\cdot 4\cdot 2) = 51;$

signo "-"

de esta manera $\det A = -51 + 51 = 0.$

Nota: El método expuesto anteriormente sólo funciona para determinantes de 3x3.

Consideremos los seis elementos que forman el determinante de A y asociemos a cada uno de ellos la permutación que asocia al primer índice el segundo.

Escribamos ahora los seis términos de determinante de A y sus permutaciones asociadas indicando la paridad de la permutación:

TERMINO	PERMUTACION ASOCIADA	PARIDAD
$+ a_{12}a_{22}a_{33}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	Par (0 inv.)
$+ a_{12}a_{23}a_{31}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	Par (2 inv.)
$+ a_{13}a_{21}a_{32}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	Par (2 inv.)
$- a_{13}a_{22}a_{31}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	Impar (3 inv.)
$- a_{12}a_{21}a_{33}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	Impar (1 inv.)
$- a_{11}a_{23}a_{32}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	Impar (1 inv.)

Observemos que cada término de det A corresponde a las seis permutaciones del conjunto {1,2,3}, y además, los términos con signo "+" corresponden a permutaciones pares, y los que tienen signo "-" corresponden a permutaciones impares.

Para el caso de una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ los términos de det A corresponden también a las permutaciones del conjunto {1,2}, esto es,

TERMINO	PERMUTACION ASOCIADA	PARIDAD
$+ a_{11}a_{22}$	$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$	Par (0 inv.)
$- a_{12}a_{21}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$	Impar (1 inv.)

Podemos escribir entonces el determinante de una matriz A de 2x2 como sigue:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_2} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)},$$

donde $\sum_{\sigma\in S_2}$ significa la suma de todas las permutaciones de los elementos del conjunto {1,2} que asocian al primer índice el segundo, $i, \sigma(i)$; $\varepsilon(\sigma) = 1$ si σ es par y $\varepsilon(\sigma) = -1$ si σ es impar.

Para el caso de una matriz A de 3x3 su determinante se escribe como sigue:

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}.$$

De lo observado anteriormente podemos dar la definición para el caso de una matriz A de n x n.

DEFINICION 24.6 : El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es el número real $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)},$

donde $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ según sea el caso si σ es permutación par o impar, S_n es el conjunto de las permutaciones de los elementos del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ en sí mismo que asocian al primer índice el segundo, $a_{i\sigma(i)}$, de acuerdo a la permutación σ correspondiente.

DEFINICION 24.7 : Sea A una matriz de n x n y sea M_{ij} la matriz de (n-1) x (n-1) que se obtiene a partir de A, eliminando el i-ésimo renglón y j-ésima columna de A. M_{ij} se denomina ij-ésimo menor de A.

EJEMPLOS:

6.- Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ calcular los menores M_{13}, M_{21} y M_{33}.

Solución: Para la matriz A, el menor M_{13} se obtiene eliminando el primer renglón y tercera columna de A

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De manera análoga

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.- Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ los menores M_{22} y M_{41} son respectivamente:

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$M_{41} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

DEFINICION 24.8 : Para una matriz A de $n \times n$, el ij-ésimo cofactor de A, denotado por A_{ij}, se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$.

EJEMPLO:

8.- Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ calcular los cofactores A_{11}, A_{12} y A_{13}.

Solución:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| = (-1)^{2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = +(42 - 18) = 24;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -(24 - 0) = -24;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\left|M_{13}\right| = (-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = +(36 - 0) = 36.$$

Otra manera de definir el determinante de una matriz A de n x n es la siguiente:

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}|M_{1n}| =$$

$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}|M_{1k}|$, donde a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} son los elementos del primer renglón de A, y A_{11}, A_{12}, ..., A_{1n} los cofactores correspondientes.

La expresión anterior se conoce como desarrollo por menores con respecto al primer renglón de A.

EJEMPLOS:

9.- Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Desarrollando el determinante de A por cofactores con respecto al primer renglón obtenemos:

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 7\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -13 - 6 + 35 - 15 = -4.$$ Por lo tanto $\det A = -4$.

10.- Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Solución: Desarrollando por menores con respecto al primer renglón obtendrémos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$11 + 20 - 60 = -29$; por lo tanto $\det A = -29$.

Observemos que al calcular el determinante de una matriz de 4×4 tuvimos que calcular 4 determinantes de 3×3; y al resolver el determinante de 3×3 tuvimos que resolver 3 determinantes de 2×2.

Imaginemos resolver un determinante de 5×5; necesitaríamos resolver 5 determinantes de 4×4, y a la vez 20 determinantes de 3×3 que generan 60 determinantes de 2×2. Sería muy aburrido y tedioso hacerlo.

Veremos más adelante como podemos reducir considerablemente el trabajo al calcular un determinante de cualquier orden.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

<u>Propiedad 1</u> Si cualquier renglón o columna de A es cero, entonces $\det A = 0$.

EJEMPLOS:

11.- El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es, multiplicando de acuerdo a la figura de estrella:

$$\det A = 1\cdot 0\cdot 3 + 4\cdot 0\cdot 5 + 0\cdot 1\cdot 2 - 5\cdot 0\cdot 2 - 4\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

12.- El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ es

$$\det A = 0\cdot4\cdot1 + 2\cdot7\cdot0 + 0\cdot5\cdot3 - 0\cdot4\cdot3 - 5\cdot7\cdot0 - 0\cdot2\cdot1 = 0.$$

<u>**Propiedad 2**</u> Si el i-ésimo renglón o la j-ésima columna de A se multiplican por una constante c, el determinante también se multiplica por c.

EJEMPLOS:

13.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ tiene determinante $\det A = 54$. Si multiplicamos la segunda columna de A por $c = 2$ obtenemos la matriz

$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 12 & 8 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ cuyo determinante es $\det B = 108 = 2\cdot54 = 2\cdot\det A$.

14.- Si la misma matriz A la multiplicamos toda por $c = 2$; es decir, las tres columnas (o los tres renglones) de A los multiplicamos cada uno de ellos por 2, el determinante de la nueva matriz $B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 4 & 12 & 16 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$ es

$\det(B) = 2\cdot12\cdot2 + 8\cdot16\cdot6 + 4\cdot10\cdot0 - 6\cdot12\cdot0 - 4\cdot8\cdot2 - 2\cdot10\cdot16 = 48 + 768 + 0 - 0 - 64 - 320 = 432 = 8\cdot54 = 2^3\cdot\det A$.

En general, de acuerdo a la propiedad 3 tenemos que para cualquier matriz de $n \times n$ y una constante c no cero, $\det(c\cdot A) = c^n\cdot\det A$.

<u>**Propiedad 3**</u> Si las matrices A y B son idénticas excepto por la j-ésima columna, y la j-ésima columa de la matriz C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B, entonces $\det C = \det A + \det B$.

Esto mismo resultado vale también para renglones.

EJEMPLOS:

15.- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ difieren sólamente en la segunda columna. Sea $C = \begin{bmatrix} 0 & 1+2 & 3 \\ 4 & -1+3 & 3 \\ 0 & 2-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz con los mismos coeficientes que A, excepto en la segunda columna, que es la suma de la segunda columna de A y la segunda columna de B.

Tenemos entonces que det A = 12, det B = -16 y det C = -4, que es lo mismo que 12 + (-16) = det A + det B.

16.- Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ idénticas, excepto por el segundo renglón y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1+0 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Entonces det A = 5, det B = 1 y det C = 6 = 1 + 5 = det A + detB.

<u>Propiedad 4</u> Si intercambiamos dos renglones o columnas cualesquiera de la matriz A, entonces el determinante cambia de signo.

EJEMPLOS:

17.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ tiene determinante igual a -15; esto es, det A = -15. Ahora intercambiemos de lugar los renglones 1 y 2 de la matriz A para obtener la matriz $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calculando el determinante de A' encontramos que det A' = 15 = -(-15) = -det A.

<u>Propiedad 5</u> Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det A = 0.

EJEMPLOS:

18.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ tiene los renglones 1 y 3 iguales. Su determinante es $\det A = 1\cdot 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 4\cdot 2 = 0$.

19.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene las columnas 2 y 3 iguales. Por cálculo directo encontramos que $\det A = 0$.

<u>**Propiedad 6**</u> Si un renglón (columna) de A es multiplo constante de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.

EJEMPLOS:

20.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 12 & 7 \end{bmatrix}$ es tal que su segunda columna es tres veces la primera columna; esto es, $A^2 = 3\cdot A^1$. Por cálculo directo verificamos que $\det A = 0$.

21.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ es tal que su tercer renglón es cuatro veces el primero; esto es, $A_3 = 4\cdot A_1$. El determinante de A es también en este caso, $\det A = 0$.

En cuestión de vectores de un espacio vectorial, recordemos que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores es combinación lineal del resto. Para el caso de renglones o columnas de una matriz, que un renglón (columna) sea múltiplo de otro renglón (columna) significa que como vectores de un espacio vectorial son linealmente dependientes. Por lo tanto, la propiedad 6 podemos anuncairla también como:

Propiedad 6 Una matriz cuadrada A de n x n tiene determinante distinto de cero si y sólo si sus renglones o columnas son linealmente independientes. Lo cual equivale a det $A \neq 0$ si y sólo si rango de A es n.

Propiedad 7 Si un múltiplo de un renglón (columna) de A se suma a otro renglón (columna) de A, el determinante no cambia.

Esta propiedad nos facilitará el cálculo de determinantes de cualquier tamaño.

Propiedad 8 El determinante de una matriz cuadrada A de n x n lo podemos calcular desarrollando por menores con respecto a cualquier renglón o columna de A.

EJEMPLO:

22.- Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, desarrollándolo por menores en el segundo renglón y tercera columna, respectivamente.

Soluución: Desarrollando con respecto al segundo renglón de A tenemos que

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$a_{21}(-1)^{2+1}|M_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|M_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}| =$$

$$2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 6 = 16.$$

Desarrollando ahora con respecto a la tercera columna de A obtenemos

$$\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}| + a_{33}(-1)^{3+3}|M_{33}| =$$

$$-1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + -2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 2 = 16.$$

Podemos observar que obtuvimos el mismo resultado.

<u>**Propoedad 9**</u> Para una matriz diagonal, triangular inferior o triangular superior su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, y le corresponde signo "+".

EJEMPLO:

23.- Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Calculando los determinantes correspondientes tenemos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot1 + (-1\cdot4\cdot0) + 0\cdot0\cdot2 - 0\cdot3\cdot2 - 0\cdot4\cdot1 - (-1\cdot0\cdot1) =$$

$1\cdot3\cdot1 = 3.$

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (-1\cdot7\cdot3) + 2\cdot9\cdot0 + 0\cdot0\cdot5 - 5\cdot7\cdot0 - (-1\cdot0\cdot9) - 2\cdot0\cdot3 =$$

$-1\cdot7\cdot3 = -21.$

$$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot0\cdot0 + 0\cdot0\cdot0 - 0\cdot1\cdot0 - 0\cdot0\cdot1 - 0\cdot0\cdot1 =$$

$1\cdot1\cdot1 = 1.$

El determinante en cada caso es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Ahora bien, veamos como podemos aplicar la propiedad 7 en la resolución de determinantes de cualquier tamaño.

EJEMPLOS:

24.- Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ de tamaño 4x4.

Solución: Efectuando la única operación elemental permitida para la propiedad 7, sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{A_{12}(-2)}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{A_{13}(-1)}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{*}{\sim} -7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -6/7 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{A_{23}(4)}{\sim} -7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 8/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{A_{24}(-1)}{\sim} -7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 8/7 & 11/7 \\ 0 & 0 & 40/7 & 20/7 \end{vmatrix} \overset{A_{34}(-5)}{\sim}$$

$$-7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 8/7 & 11/7 \\ 0 & 0 & 0 & -35/7 \end{vmatrix}$$

. * **Factorizar −7 en el segundo renglón, propiedad 2.**

Hemos obtenido una matriz triangular superior equivalente a la matriz original A, por lo que su determinante no se ha alterado y es el producto de los elementos de la diagonal principal. Así

$$\det A = -7\cdot\left(1\cdot 1\cdot \frac{8}{7}\cdot\frac{-35}{7}\right) = 40.$$

25.- Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix} \overset{A25(1)}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{A45(1)}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Como obtuvimos un renglón con puros ceros el determinante de A es cero, propiedad 1.

26.- Calcular el detrminante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{bmatrix}.$$

Solución: Usando la propiedad 7 podemos calcular con facilidad el determinante de A.

i) Sumemos -1 veces el renglón uno a los renglones dos, tres,..., hasta n, para obtener

$$\begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Sumemos a la columna uno las columnas dos, tres,..., hasta n para obtener

$$\begin{bmatrix} 1+x_1+x_2+\dots+x_n & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \dots\dots\dots & 0 & 1 & & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Hemos obtenido una matriz triangular superior cuyo determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. Entonces

$$\det A = (1+x_1+x_2+ \ldots +x_n)$$

27.- Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Solución: Aplicando la operación elemental sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón podemos reducir considerablemente el trabajo de calcular el determinante de A al llevar a ésta a la forma triangular superior.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \overset{A_{13}^{(-2)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \overset{A_{14}^{(-3)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \overset{A_{23}^{(-5)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{A_{24}^{(-7)}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} \overset{*}{=} -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix} \overset{A_{34}^{(32)}}{\sim} -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

* **Factorizando -16 en el tercer renglón, propiedad 2.**

Hemos reducido la matriz A a la forma triangular superior; por lo que su determinante es el producto de los elementos que se encuentran sobre la diagonal principal. Esto es, $\det A = -16(1)(-1)(1)(10) = 160$.

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

DEFINICION 24.10 : Definimos la transpuesta de una matriz A de n x m, como una matriz de tamaño m x n que se obtiene a partir de A intercambiando los renglones por columnas.

La representamos con el símbolo "A^t", se lee "A transpuesta" o "transpuesta de A"

EJEMPLOS:

28.- Transponer la matriz A de 2x3, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: A transpuesta tendrá tamaño de 3x2 y es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

29.- Transponer el vector columna A de 4x1, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso A^t es un vector renglón de tamaño 1x4,

$$A^t = [0\ 3\ 5\ 2]$$

30.- Transponer la matriz identidad de 3x3, I_3.

Solución: En esta caso $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3^t$.

PROPOSICION 24.11 : La transpuesta de una matriz satisface lo siguiente:

i) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

ii) $(A^t)^t = A$.

iii) $\det A^t = \det A$.

DEMOSTRACION:

Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ de m x n y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$ de n x m.

i) El ij-ésimo elemento de AB, $(AB)_{ij}$, es

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj};$$

y el ij-ésimo elemento de la transpuesta de AB, $(AB)^t_{ij}$, es

$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \; \ldots \; (1)$$

Haciendo el producto escalar del i-ésimo renglón de B^t y la j-ésima columna de A^t obtendremos el ij-ésimo elemento de B^tA^t, esto es

$$[b_{1i} \;\; b_{2i} \;\; \ldots \;\; b_{ni}] \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \ldots + b_{ni}a_{jn} =$$

$$= a_{j1}b_{1j} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jn}b_{ni}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \; \ldots \; (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$(AB)^t_{ij} = (B^tA^t)_{ij}$$

concluyendo así que $(AB)^t = B^tA^t$.

ii) Es obvio el resultado, pues $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ y $(A^t)^t = (A_{ij})^t = A_{ij}$.

iii) La demostración se hará utilizando inducción matemática sobre el tamaño de la matriz A.

Comenzaremos con el caso n = 2. Para una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tenemos lo siguiente:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det A.$$

Supongamos ahora que el teorema es válido para matrices de $(n-1) \times (n-1)$, y demostraremos para matrices de $n \times n$.

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Calculamos $|A|$ desarrollando por cofactores en el primer renglón y $|B|$ desarrollando por cofactores en la primera columna.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n}|M_{1n}|$$

$$|B| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{21} + \dots + a_{1n}B_{n1}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}|N_{11}| + a_{12}(-1)^{2+1}|N_{21}| + \dots + a_{1n}(-1)^{n+1}|N_{n1}|.$$

Hay que mostrar que $A_{1k} = B_{k1}$ para $k = 1,2,\dots,n$. Pero $A_{1k} = (-1)^{1+k}|M_{1k}|$ y $B_{k1} = (-1)^{k+1}|N_{k1}|$, donde M_{1k} es el 1k-ésimo menor de A y N_{k1} es el k1-ésimo menor de B. Tenemos que:

$$|M_{1k}| = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|N_{k1}| = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,k-1} & a_{3,k-1} & \dots & a_{n,k-1} \\ a_{2,k+1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{n,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Claramente $M_{1k} = N_{k1}^t$, y son matrices de $(n - 1)\times(n - 1)$; la hipótesis de inducción asegura que $|M_{1k}| = |N_{k1}^t| = |N_{k1}|$. Así, $A_{1k} = B_{k1}$ completando la inducción y la demostración.■

EJEMPLO:

31.- Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ comprobar las propiedades anteriores.

i) $A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 23 & 39 \\ 37 & 23 & 39 \\ 24 & 32 & 46 \end{bmatrix}$; $(AB)^t = \begin{bmatrix} 25 & 37 & 24 \\ 23 & 23 & 32 \\ 39 & 39 & 46 \end{bmatrix}$.

Por otra parte, $B^t\cdot A^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 37 & 24 \\ 23 & 23 & 32 \\ 39 & 39 & 46 \end{bmatrix} = (AB)^t$.

ii) $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$.

iii) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 26 - 121 = -95$.

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 26 - 121 = -95.$$

PROPOSICION 24.12 : Para matrices A y B de n x n, det AB = det A·det B. ■

EJEMPLO:

32.- Para las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ se tiene que det A = 16 y det B = -8.

Calculamos $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{bmatrix}$

y det AB = -128 = (16)(-8) = det A·det B.

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN 24.13 : Sea A una matriz de n x n y B la matriz de sus cofactores;

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nxn} \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} es ij-ésimo cofactor de A, entonces la adjunta de A, escrita como "adj A", se define como la transpuesta de B.

Así tenemos:

$$\text{Adj } A = B^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO:

33.- Calcular la adjunta de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución: Calculando los cofactores de A tenemos:

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 18.$ $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(3) = -3.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$ $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(6) = -6.$

$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$ $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(8) = -8.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$ $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(9) = -9.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 18.$

Por lo que B, la matriz de cofactores de A es

$B = \begin{bmatrix} 18 & -3 & 6 \\ -6 & 13 & -8 \\ 0 & -9 & 18 \end{bmatrix}$ y su matriz adjunta es $\text{adj } A = B^t = \begin{bmatrix} 18 & -6 & 0 \\ -3 & 13 & -9 \\ 6 & -8 & 18 \end{bmatrix}$.

34.- Para una matriz A de 2x2, $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ su matriz adjunta es $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, la cual se comprueba por calculos directos.

LEMA 24.14 : Para una matriz cualquiera A de n x n se tiene que la suma de los cofactores de un renglón multiplicados por los coeficientes de cualquier otro renglón siempre es cero. Esto es

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Notemos que la suma anterior es det A si $i = j$.

DEMOSTRACION:

Escribamos la matriz B igual a la matriz A pero con el j-ésimo renglón igual al i-ésimo renglón de A. Esto es:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{i-ésimo renglón de B} \\ \\ \longleftarrow \text{j-ésimo renglón de B} \\ \\ \end{array}$$

Puesto que B tiene dos renglones iguales su determinante es cero, por lo tanto, si desarrollamos det B con respecto al j-ésimo renglón tenemos:

$$\det B = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0,$$

lo cual prueba el lema. ∎

EJEMPLO:

34.- Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

Los cofactores de A del primer renglón son:

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$

$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(3) = -3$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2.$

Sabemos que $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= 1(-8) + 3(-3) + 5(2) = -7.$

Si los cofactores del primer renglón de A los multiplicamos por los escalares del segundo renglón tenemos:

$a_{21}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{12} + a_{23}\cdot A_{13} = 0(-8) + 2(-3) + 3(2) = -6 + 6 = 0.$

Si multiplicamos por los coeficientes del tercer renglón tendremos:

$a_{31}\cdot A_{11} + a_{32}\cdot A_{12} + a_{33}\cdot A_{13} = -1(-8) + 4(-3) + 2(2) = 8 - 12 + 4 = 0.$

Si desea puede verificar para los cofactores del segundo y tercer renglones.

El lema anterior nos permite calcular la inversa de una matriz utilizando para ello su matriz adjunta.

TEOREMA 24.15 : Si A es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \text{Adj } A.$$

DEMOSTRACION:

Realizando el producto de A por Adj A tenemos

$$A\cdot\text{Adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

El i,j-ésimo elemento de A·Adj A es el producto escalar del i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de Adj A; esto es

$$(A\cdot\text{Adj } A)_{ij} = [a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in}]\cdot \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

y sabemos por el lema anterior que esta suma es 0 si $i \neq j$ y es det A si $i = j$.

Esto implica que todos los elementos de la diagonal principal de la matriz $A \cdot \mathrm{Adj}\, A$ son det A, mientras que fuera de esta diagonal todos los elementos son cero.

$$\text{Así, } A \cdot \mathrm{Adj}\, A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I_n .$$

Esto a su vez implica que

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj}\, A = I_n$$

y así $\frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj}\, A = A^{-1}$. ■

EJEMPLOS:

35.- Utilizando la adjunta de A calcular su inversa si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso det A = 32 - 15 = 17.

Ahora bien, los cofactores de A son

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = +|8| = +8;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|5| = -5;$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|3| = -3;$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = +|4| = +4.$$

Luego la matriz adjunta de A es

$$\mathrm{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix},$$

y así tenemos que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj}\, A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & \frac{-3}{17} \\ \frac{-5}{17} & \frac{4}{17} \end{bmatrix}$.

36.- Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ utilizando para ello su matriz adjunta.

Solución: El determinante de A es $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 64$, y los cofactores de A son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = +12;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-6);$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = +(-16) = -16;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-16) = 16;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = +12;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +16.$$

La matriz adjunta de A es

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

y la inversa de A es por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \text{Adj } A = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}.$$

El siguiente teorema es de mucha importancia, ya que hasta ahora hemos calculado la inversa de una matriz sin saber si es o no invertible.

TEOREMA 24.16 : Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

DEMOSTRACION:

Supongamos primero que A es invertible. Entonces existe A^{-1} tal que $A\cdot A^{-1} = 1$, y $1 = \det(I) = \det(A)\cdot\det(A^{-1})$ lo cual implica que det $(A) \neq 0$. Supongamos ahora que $\det(A) \neq 0$. Sea R la forma escalonada de A por medio de operaciones elementales en renglones; entonces existen matrices elementales tales que

$$E_m \cdot E_{m-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = R,$$

o bien,

$$A = E_2^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{m-1}^{-1} \cdot E_m^{-1} \cdot R.$$

Nuestra hipótesis es que det $(A) \neq 0$, y como toda matriz elemental tiene a su vez determinante no cero se concluye que $\det(R) \neq 0$. Esto equivale a que R no tenga renglones de puros ceros, y como está en forma escalonada reducida se concluye que $R = I$.

De esta manera hemos expresado a A como producto de matrices invertibles y por lo tanto A es también invertible. ∎

El teorema anterior junto con la teoría de espacios vectoriales nos dan otra alternativa, equivalente a la primera, para saber cuando una matriz cuadrada es invertible.

COROLARIO 24.17 : Una matriz cuadrada A de n x n es invertible si y sólo si rango de A, $\rho(A) = n$.

DEMOSTRACION: Si $\rho(A) \neq n$ implica que alguno de los renglones de A es combinación lineal de los restantes, y esto a su vez implica que $\det(A) = 0$ por lo que no sería invertible. ∎

EJEMPLO :

37.- Determinar cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 13 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: Calculando el determinante de cada matriz tenemos lo siguiente: $\det(A) = -1 \neq 0$; $\det(B) = -13 \neq 0$; $\det(C) = 0$ y $\det(D) = 0$. Por lo tanto las matrices C y D no son invertibles.

§ 25. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

DEFINICION 25.1: Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto integrado por una o más ecuaciones de grado uno en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales:

i) $x + 3y = 5$ ii) $x = 1$ iii) $\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 6 \\ x + 5y - z &= 0 \end{aligned}$ iv) $\begin{aligned} 8x &= 4 \\ -3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$

Los siguientes sistemas de ecuaciones no son lineales:

i) $\begin{aligned} 3x^2 + 5y^2 &= 9 \\ -x + 2y^3 &= 1 \end{aligned}$ ii) $\frac{3}{x} + 5y - \frac{1}{z} = 9$ iii) $\begin{aligned} 4xz + 3xz + 5zy &= 2 \\ 3xy - xz + 7zy &= -1 \end{aligned}$

Reconocemos a un sistema de ecuaciones lineales por su tamaño, diciendo que es de "m x n" si tiene m ecuaciones y n incógnitas.

EJEMPLOS:

1.- El siguiente sistema tiene tamaño 3x2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

pues consta de tres ecuaciones en las dos incógnitas x_1 y x_2.

2.- El siguiente sistema se denomina sistema cuadrado de 3x3 por tener tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

3.- Un sistema de tamaño m x n dado en forma general es el siguiente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Al resolver los sistemas de ecuaciones lineales, se busca encontrar los valores de las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones del sistema.

DEFINICION 25.2 : Llamamos conjunto solución del sistema de m x n al conjunto de todas las n-adas de números que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Ahora bien, dado un sistema de ecuaciones lineales podemos formar la matriz de coeficientes del sistema de la siguiente manera:

Para el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

la matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

De esta manera la matriz de coeficientes para los sistemas de ecuaciones de los ejemplos 1 y 2 son, respectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la notación matricial podemos representar a un sistema de ecuaciones lineales en la forma $A\overline{x} = \overline{b}$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema, $\overline{x}$ y $\overline{b}$ son los vectores columna

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

EJEMPLOS:

4.- Represente en forma matricial el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ 6x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución: En este caso la representación matricial $A\overline{x} = \overline{b}$ del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -8 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

5.- Representa en forma matricial el sistema de una ecuación lineal en tres incógnitas

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5.$$

Solución: La representación matricial es $[1 \ 4 \ -3]\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = [5]$.

ELIMINACION GAUSSIANA

Este método de resolución de sistema de ecuaciones lineales consiste en simplificar las ecuaciones del sistema de manera que se pueda encontrar fácilmente los valores de las incógnitas. Para hacerlo se vale de las operaciones elementales en renglones de matrices.

EJEMPLO:

6.- Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

comenzamos por dividir entre 2 la primera ecuación:

$$\frac{1}{2}(2x_1 - 4x_2 + 6x_3) = \frac{1}{2}(10)$$

quedando el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \ ; \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

en seguida le restamos a la ecuación 2 la ecuación 1:

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -(x_1 - 2x_2 + 3x_3) = -(5) \\ \hline 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}$$

quedando

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 4x_2 - 4x_3 &= 0 \; ; \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

ahora restamos 4 veces la ecuación 1 de la 3:

$$\begin{array}{r} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ -4(x_1 - 2x_2 + 3x_3) = -4(5) \\ \hline 5x_2 - 7x_3 = -13 \end{array}$$

quedando

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 4x_2 - 4x_3 &= 0 \; ; \\ 5x_2 - 7x_3 &= -13 \end{aligned}$$

multiplicando la segunda ecuación por $\frac{1}{4}$ tenemos

$$\frac{1}{4}(4x_2 - 4x_3) = \frac{1}{4}(0)$$

y el sistema queda como

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_2 - 7x_3 &= -13 \end{aligned}$$

El siguiente paso es utilizar el coeficiente del término x_2 de la segunda ecuación para eliminar a los respectivos términos en los que aparezca x_2 en las ecuaciones 1 y 3. Para ello hay que sumar 2 veces la segunda ecuación a la primera y restar 5 veces la segunda ecuación a la tercera, quedando el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= -13 \end{aligned}$$

Finalmente, multipliquemos por $\frac{-1}{2}$ la ecuación 3 para obtener

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 0 \; , \\ x_3 &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

y elimine los términos en que aparece x_3 en las ecuaciones 1 y 2; para ello sume a la ecuación 2 la ecuación 3 y a la primera réstele la tercera para obtener

$$x_1 = \frac{-3}{2}$$
$$x_2 = \frac{13}{2}$$
$$x_3 = \frac{13}{2}$$

Hemos encontrado así para las incógnitas x_1, x_2, x_3 valores que al sustituirlos en el sistema satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones

$$2\left(\frac{-3}{2}\right) - 4\left(\frac{13}{2}\right) + 6\left(\frac{13}{2}\right) = 10$$
$$\left(\frac{-3}{2}\right) + 2\left(\frac{13}{2}\right) - \left(\frac{13}{2}\right) = 5$$
$$4\left(\frac{-3}{2}\right) - 3\left(\frac{13}{2}\right) + 5\left(\frac{13}{2}\right) = 7$$

por lo tanto, el vector columna $\overline{x}$ $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 13/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}$ es la solución del sistema.

Todas las operaciones anteriores las podemos representar en la matriz aumentada del sistema $(A|\overline{B})$ mediante operaciones elementales:

$$(A|\overline{B}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right] \underset{\sim}{M_1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} A_{12}(-1) \\ \sim \\ A_{13}(-4) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -13 \end{array}\right] \underset{\sim}{M_2(1/4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -13 \end{array}\right] \begin{matrix} A_{21}(2) \\ \sim \\ A_{23}(-5) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right] \underset{\sim}{M_3(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13/2 \end{array}\right] \begin{matrix} A_{32}(1) \\ \sim \\ A_{31}(-1) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 13/2 \end{array}\right].$$

Esto equivale a $x_1 = \frac{-3}{2}$, $x_2 = \frac{13}{2}$, $x_3 = \frac{13}{2}$.

7.- Resolver el sistema $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 6x_2 \quad &= 0 \end{aligned}$

Solución: Aplicando operaciones elementales a los renglones de la matriz aumentada del sistema tenemos:

$$(A|\overline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{A_{13}(-1)}{\overset{A_{12}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & 7 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \end{array}\right] \overset{M_2(1/7)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 11/7 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \end{array}\right] \underset{A_{23}(-3)}{\overset{A_{21}(-3)}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 9/7 \\ 0 & 1 & -1 & 11/7 \\ 0 & 0 & 4 & -75/7 \end{array}\right] \overset{M_3(1/4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 9/7 \\ 0 & 1 & -1 & 11/7 \\ 0 & 1 & 1 & -75/28 \end{array}\right] \underset{A_{32}(1)}{\overset{A_{31}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 186/28 \\ 0 & 1 & 0 & -31/28 \\ 0 & 0 & 1 & -75/28 \end{array}\right].$$

La solucón al sistema es la terna de vectores $x_1 = \frac{186}{28}$, $x_2 = \frac{-31}{28}$, $x_3 = \frac{-75}{28}$.

DEFINICION 25.3 : Dos sistemas de ecuaciones lineales del mismo tamaño se llaman equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

TEOREMA 25.4 : Sea S: $A\overline{x} = \overline{b}$ un sistema de ecuaciones lineales de $m \times n$ y C cualquier matriz invertible de $m \times m$. Entonces el sistema S': $(CA)\overline{x} = C\overline{b}$ es equivalente al sistema S.

DEMOSTRACION: Denotemos con K al conjunto solución del sistema S y con K' el conjunto solución del sistema S'. Si un elemento $\overline{w}$ esta en K, tenemos entonces que $A\overline{w} = \overline{b}$. Multiplicando la igualdad anterior por C tenemos $(CA)\overline{w} = C\overline{b}$; esto es, $\overline{w}$ es solución de S', por lo tanto $K \subset K'$.

Reciprocamente si $\overline{w} \in K'$, entonces $(CA)\overline{w} = C\overline{b}$. Puesto que C es invertible podemos multiplicar a la izquierda por C^{-1} para obtener $C^{-1}(CA)\overline{w} = C^{-1}\cdot C\overline{b}$ y esto es igual a $A\overline{w} = \overline{b}$, por lo tanto $\overline{w} \in K$. Luego, por mutua contención concluimos que $K = K'$. ∎

COROLARIO 25.5 : Supongamos que el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ se lleva a la forma escalonada mediante operaciones elementales en renglones, digamos $A'\overline{x} = \overline{b}'$. Entonces los sistemas $A\overline{x} = \overline{b}$ y $A'\overline{x} = \overline{b}'$ son equivalentes.

DEMOSTRACION: Denotemos con la letra C al producto de matrices elementales que llevan a la matriz A a su forma escalonada A'; esto es CA = A'. Como el producto de matrices elementales es invertible tenemos por el teorema anterior que los sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ y $A'\overline{x} = \overline{b}'$ son equivalentes.∎

Este teorema junto con su corolario nos dicen que las operaciones elementales en los renglones de un sistema de ecuaciones lineales no alteran su conjunto solución.

Nuestro siguiente paso es resolver sistemas cuadrados cuyo determinante de la matriz asociada al sistema sea distinto de cero. Para ello daremos dos métodos de solución que los llamaremos método de la matriz inversa y regla de Cramer, en honor de su autor el matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752).

TEOREMA 25.6 : Un sistema de ecuaciones lineales de n x n cuya matriz asociada al sistema A sea invertible -tenga determinante distinto de cero- tiene como solución única al vector $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.

DEMOSTRACION:

Puesto que la matriz A es invertible, multipliquemos a la izquierda del sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ por su inversa,

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}\overline{b}$$

$$I\cdot\overline{x} = A^{-1}b$$

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}.$$

Al sustituir el valor encontrado de $\overline{x}$ en el sistema obtenemos la igualdad; por lo que $\overline{x}$ es solución.

La unicidad de la solución se demuestra de la siguiente manera: Suponemos que el vector $\overline{x'}$ es otra solución al sistema; esto es, $A\overline{x} = A\overline{x'} = \overline{b}$. Multiplicando a la izquierda por la inversa de A tenemos $\overline{x} = \overline{x'} = A^{-1}b$. ■

EJEMPLOS:

8.- Resuelva el sistema de 3x3

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\
4x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 13
\end{aligned}
$$

Solución: Calculamos primero el determinante de la matriz A de coeficientes asociados del sistema, que de ahora en adelante llamaremos el determinante del sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 41.$$

Como $\det A = 41 \neq 0$, la matriz A es invertible. En este caso la inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 15 & 4 \\ 32 & -14 & -1 \\ 14 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

luego, la solución es única $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$

$$\overline{x} = \frac{1}{41} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 15 & 4 \\ 32 & -14 & -1 \\ 14 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para comprobar que el vector $\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución a nuestro sitema debemos sustituir los valores obtenidos en nuestro sistema y comprobar que se dá la igualdad:

$$
\begin{aligned}
(2) + (3) + (1) &= 6 \\
2(2) - (3) + 3(1) &= 4 \\
4(2) + 5(3) - 10(1) &= 13
\end{aligned}
$$

9.- Resolver al sistema de 4x4

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 3x_1 \qquad + 4x_3 \qquad &= 6 \\ x_2 + 5x_3 \qquad &= 8 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

y su determinante es det $A = 313 \neq 0$. Por lo tanto A es invertible, y la única solución al sistema es $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.

En este caso $A^{-1} = \frac{1}{313}\begin{bmatrix} -20 & 4 & 103 & -63 \\ -75 & 15 & -5 & 73 \\ 15 & -3 & 1 & 48 \\ 48 & 53 & -122 & 91 \end{bmatrix}$ y $\overline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} -20 & 4 & 103 & -63 \\ -75 & 15 & -5 & 73 \\ 15 & -3 & 1 & 48 \\ 48 & 53 & -122 & 91 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{313}\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ 194 \\ 462 \\ 289 \end{bmatrix}.$$

10.- Resuelva el sistema de 2x2

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ tiene determinante det $A = -14 \neq 0$. Por lo tanto el sistema posee sulución única.

En este caso $A^{-1} = \frac{-1}{14}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, y la solución es el vector $\overline{x} = A^{-1}\overline{b} =$

$$\overline{x} = \frac{-1}{14}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{-1}{14}\cdot\begin{bmatrix} -21 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

TERORMA 25.7 : (Regla de Cramer) Para un sistema cuadrado de ecuaciones lineales $A\overline{x} = \overline{b}$ tal que $\det A \neq 0$, su solución es única y en este caso es

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

en donde A_i es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos del vector columna $\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

DEMOSTRACION:

Si $\det A \neq 0$ entonces la matriz es invertible y el sistema posee solución única. Dicha solución es $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, y recordando que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \mathrm{Adj}(A)$ tenemos

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b} = \frac{1}{\det A}\cdot \mathrm{Adj}(A)\cdot \overline{b} = \frac{1}{\det A}\cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

donde C_{ij} es el ij-ésimo cofactor de A. Efectuando el producto tenemos

$$\overline{x} = \frac{1}{\det A}\cdot \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \ldots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \ldots + b_nC_{n2} \\ \ldots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \ldots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Luego, el j-ésimo renglón de $\overline{x}$ es

$$\overline{x}_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \ldots + b_nC_{nj}}{\det A}.$$

Formemos ahora la matriz A_j reemplazando la j-ésima columna de A por el vector columna $\overline{b}$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dado que A_j difiere de A unicamenete en la j-ésima columna, los cofactores de los elementos $b_1, b_2, \dots b_n$ de A_j son iguales a los cofactores de los elementos correspondientes que están en la j-ésima columna de A. Por lo tanto, el desarrollo por cofactores de $\det(A_j)$ con respecto a la j-ésima columna es

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_{nj}.$$

Al sustituir este resultado en $\overline{x}_j$ obtenemos

$$\overline{x}_j = \frac{\det(A_j)}{\det A}$$

completando la demostración. ∎

EJEMPLOS:

11.- Resolver por el método de Cramer el siguiente sistema cuadrado de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 79.$$

Para encontrar el valor de x_1 sustituimos el vector columna $\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ por la primera columna de A, que es la posición que ocupan las x_1; inmediatamente después calculamos el determinante de la nueva matriz dividido entre el determinante de la matriz original A.

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{9}{79}.$$

Para encontrar el valor de x_2 sustituimos ahora el vector columna $\overline{b}$ por la segunda columna de A, que es la posición que ocupan las x_2. De nuevo calculamos el determinante de la nueva matriz dividido entre el determinante de A

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{33}{79}.$$

De igual manera calculamos x_3 como

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{80}{79}.$$

Así, el vector solución a nuestro sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ es

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/79 \\ 33/79 \\ 80/79 \end{bmatrix}.$$

12.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \phantom{{}+5x_3} &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 4x_1 \phantom{{}+x_2} + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Primero calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2.$$

Como determinante de A es distinto a cero podemos utilizar el método de Cramer y calcular la solución de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{30}{-2} = -15$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{38}{-2} = -19.$$

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

De esta manera el vector solución al sistema es $\overline{x} = \begin{bmatrix} -15 \\ -19 \\ 10 \end{bmatrix}$.

13.- Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y $\det A = 16 \neq 0$, por lo que podemos aplicar la regla de Cramer.

En este caso

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

De esta manera el vector $\overline{x} = \begin{bmatrix} 9/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}$ es la solción al sistema $A\overline{x} = \overline{b}$.

Decimos que un sistema de ecuaciones lineales es un sistema homogéneo si todas sus ecuaciones están igualadas a cero; esto es, cuando se tiene que $\overline{b} = \overline{0}$. En caso contrario decimos que el sistema es no homogéneo.

14.- Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tiene determinante det A = 64 distinto de cero.

Al sustituir el vector columna $\overline{b} = \overline{0}$ por la columna correspondiente de la matriz A para cada x_i, $i = 1,2,3$, obtendremos una matriz con determinante cero por tener una columna de ceros; esto es

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det A} = 0,$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}{\det A} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\det A} = 0;$$

la solución es entonces el vector $\overline{0}$.

De igual modo podemos observar que la única solución es el vector $\overline{0}$, pues al tener A determinante distinto de cero, es invertible, y por lo tanto $\overline{x} = A^{-1}\overline{b} = A^{-1}\overline{0} = \overline{0}$.

Es obvio pensar en el $\overline{0}$ como solución de un sistema homogéneo, tal como lo vimos en ejemplo anterior. Pero no es el caso que $\overline{0}$ sea la única solución de un sistema homogéneo, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLOS:

15.- El siguiente sistema homogéneo cuadrado

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tiene como solución obvia al vector cero, pero no es la única pues por ejemplo el vector columna $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es también solución del sistema, y podemos formar un subespacio vectorial generado por el vector $\overline{x}$ que conste de todas las soluciones del sistema. En conclusión, dicho sistema homogéneo tiene infinad de soluciones de la forma $\lambda\overline{x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

DEFINICION 25.0 : Para una matriz A de m × n con coeficientes en un campo K definimos la función $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$L_A(\overline{x}) = A\cdot\overline{x}.$$

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, L_A es la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida como $L_A(\overline{x}) = A\cdot\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\overline{x}$.

Así, para los vectores $\overline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\overline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ la función L_A actúa de la siguiente manera:

$$L_A(\overline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 20 \end{bmatrix},$$

$$L_A(\overline{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

EJERCICIO: Verifíquese que la función L_A es una transformación entre espacios vectoriales.

Ya que L_A es una transformación lineal, podemos hablar del núcleo de dicha transformación lineal. En el caso de un sistema homogéneo cuadrado, $A\overline{x} = \overline{0}$, el núcleo de L_A es el conjunto solución de dicho sistema; esto es, para todo $\overline{x} \in N(L_A)$ tenemos que $L_A(\overline{x}) = A\overline{x} = \overline{0}$.

Luego, si recordamos también que para la transformación lineal $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\dim \mathbb{R}^n = \text{nulidad}(L_A) + \text{rango}(L_A)$$

entonces tendremos que

$$\text{nulidad}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n - \text{rango}(L_A).$$

Para matrices invertibles, esto es, matrices cuyo rango es n se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{nulidad}(L_A) &= \dim \mathbb{R}^n - \text{rango}(L_A) \\ &= n - n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, nulidad$(L_A) = 0$ implica que el vector cero es el único elemento que pertenece al núcleo de L_A, esto es $N(L_A) = \{\overline{0}\}$. De aquí que para un sistema cuadrado homogéneo con matriz de coeficientes invertible, su única solución es $\overline{0}$.

Para el caso de un sistema de ecuaciones homogéneo con matriz de coeficientes con rango menor a n, tendremos que nulidad$(L_A) = \dim \mathbb{R}^n - \text{rango}(L_A) > 0$, por lo que $N(L_A)$ tiene al menos un vector distinto de cero.

16.- En el caso del sistema cuadrado homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ tiene rango 2, por lo tanto nulidad$(L_A) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rango}(L_A) = 3-2 = 1$. Así que necesitamos un vector linealmente independiente que genere a $N(L_A)$.

Mediante operaciones elementales en renglones de la matriz aumentada del sistema $(A|\overline{0})$ podemos encontrar un vector linealmente independiente que genere a $N(L_A)$. Esto es

$$(A|\overline{0}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{13}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{23}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esta última matriz en forma escalonada nos da el sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando x_1 y x_2 en términos de x_3 tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -2x_3 . \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Así la solución al sistema es el vector columna $\overline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x3 \\ -2x3 \\ x3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De aquí que el vector columna $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ constituye una base para $N(L_A)$, y al hacer variar a x_3 en el campo K obtenemos todas las soluciones al sistema.

17.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales de tamaño 2x3:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ tiene rango 2, de aquí que necesitamos $\dim \mathbb{R}^3 - \text{rango}(A) = 3-2 = 1$ vector linealmente independiente para generar $N(L_A)$.

Aplicando operaciones elementales en los renglones de la matriz aumentada del sistema tenemos

$$(A|\overline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{12}^{(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -7 \end{array}\right] \underset{\sim}{M_{2}^{(-1/5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -8/5 & 7/5 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{21}^{(-3)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 19/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -8/5 & 7/5 \end{array}\right].$$

Esta matriz escalonada reducida nos dá el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 19/5x_3 &= -1/5 \\ x_2 - \ 8/5x_3 &= \ 7/5 \end{aligned}$$

Despejando de nuevo x_1 y x_2 en términos de x_3 obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{5} - \frac{19}{5}\cdot x_3 \\ x_2 &= \frac{7}{5} + \frac{8}{5}\cdot x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

La solución es el vector $\overline{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} - \frac{19}{5}x_3 \\ \frac{7}{5} + \frac{8}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, el cual lo podemos reescribir como la suma de los vectores

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{5} - \frac{19}{5}x_3 \\ \frac{7}{5} + \frac{8}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{-19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que al sustituir el vector $\begin{bmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$ en el sistema, éste resulta ser solución, pues

$$\left(\frac{-1}{5}\right) + 3\left(\frac{7}{5}\right) - (0) = \frac{20}{5} = 4$$
$$2\left(\frac{-1}{5}\right) + \left(\frac{7}{5}\right) + 6(0) = \frac{5}{5} = 1$$

y el vector $\begin{bmatrix} \frac{-19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución al sistema homogéneo asociado

$$\left(\frac{-19}{5}\right) + 3\left(\frac{8}{5}\right) - (1) = 0$$
$$2\left(\frac{-19}{5}\right) + \left(\frac{8}{5}\right) + 6(1) = 0$$

Esto no es una coincidencia pues en general el conjunto solución a un sistema de m x n de ecuaciones lineales se expresa como una solución al sistema no homogéneo mas el conjunto de soluciones al sistema homogéneo asociado.

TEOREMA 25.9: Sea K el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales $A\overline{x} = \overline{b}$, y sea K_H el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $A\overline{x} = \overline{0}$. Entonces para cualquier solución particular $\overline{s}$ del sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tenemos que

$$K = \{\overline{s}\} + K_H = \{\overline{s} + \overline{k} \,/\, \overline{k} \in K_H\}.$$

DEMOSTRACION:

Supongamos que el vector $\overline{s}$ es solución de sistema $A\overline{x} = \overline{b}$. Si $\overline{y} \in K$ es otra solución del sistema, entonces $A\overline{y} = \overline{b}$, y por lo tanto $A(\overline{y} - \overline{s}) = A\overline{y} - A\overline{s} = \overline{b} - \overline{b} = 0$. Entonces $\overline{y} - \overline{s} \in K_H$. Luego, existe un vector $\overline{k} \in K_H$ tal que $\overline{y} - \overline{s} = \overline{k}$, de manera que $\overline{y} = \overline{s} + \overline{k} \in \{\overline{s}\} + K_H$, y por lo tanto

$$K \subseteq \{\overline{s}\} + K_H.$$

Supongamos ahora que $\overline{y} \in \{\overline{s}\} + K_H$. Entonces $\overline{y} = \overline{s} + \overline{k}$ para algún vector $\overline{k} \in K_H$. Pero entonces $A(\overline{s} + \overline{k}) = A\overline{s} + A\overline{k} = \overline{b} + \overline{0} = \overline{b}$; de manera que $\overline{y} \in K$.

Hemos probado que $\{\overline{a}\} + K_H \subseteq K$, y por mutua contención concluimos que

$$K = \{\overline{a}\} + K_H. \blacksquare$$

EJEMPLO:

18.- Resolver el siguiente sistema de una ecuación lineal en tres incógnitas: $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

Solución: En este caso la matriz de coeficientes asociada al sistema tiene tamaño 1x3: $A = [1\ 1\ 1].$

La transformación lineal $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que satisface

$$\dim \mathbb{R}^3 = \text{nulidad}(L_A) + \text{rango}(L_A).$$

En este caso $\text{rango}(L_A) = \text{rango}(A) = 1$, y por lo tanto $\text{nulidad}(L_A) = 2$. Esto significa que necesitamos dos vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes para generar el conjunto solución del sistema homogéneo asociado.

Dichos vectores pueden ser, por inspección,

$$\overline{x} = (0,1,-1),$$

$$\overline{y} = (1,-1,0).$$

Una solución particular al sistema puede ser

$$\overline{z} = (1,0,0).$$

Luego, la solución al sistema $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ es

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

TEOREMA 25.10 : Un sistema homogéneo S: $A\overline{x} = \overline{0}$ con menos ecuaciones que incógnitas posee al menos una solución distinta de cero.

DEMOSTRACION:

Puesto que la matriz A de coeficientes del sistema tiene únicamente m rengiones, el rango(A) que es igual al rango(L_A) es menor o igual a m; esto es rango(A) = rango(L_A) $\leq$ m. De aquí que

$$\dim \mathbb{R}^n = \text{rango}(L_A) + \text{nulidad}(L_A)$$
$$\text{nulidad}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n - \text{rango}(L_A)$$
$$\text{nulidad}(L_A) = n - m > 0.$$

Como nulidad(L_A) > 0 se concluye que posee al menos un vector no cero. ■

EJEMPLO:

19.- Resuelva el siguiente sistema homogéneo de dos ecuaciones en tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución: El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema tiene al menos una solución no cero.

Mediante operaciones elementales en la matriz A de coeficientes del sistema tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{A_{12}^{(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \overset{M_2^{(1/10)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} \overset{A_{21}^{(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix}.$$

Esta forma escalonada reducida nos dá el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \frac{1}{5}\cdot x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{5}\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando x_1 y x_2 en términos de x_3 tenemos que

$$x_1 = -\frac{1}{5}\cdot x_3 \text{ y } x_2 = \frac{2}{5}\cdot x_3.$$

El vector solución al sistema es $\overline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$, el cual es distinto de cero.

Otra definición alternativa para el rango de una matriz es la siguiente: -la primera definición de rango de una matriz se dió en el capítulo 23-

Definimos el rango de una matriz A de m x n como el rango de la transformación lineal $L_A : K^n \longrightarrow K^m$. Esto es, el rango de la matriz A es igual a la dimensión de la imagen de la transformación lineal L_A.

AFIRMACION 25. 11 : El rango de una matriz A de m x n es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de dicha matriz.

DEMOSTRACION:

Consideremos la base canónica ordenanda $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de K^n. Como β genera a K^n tenemos que la imagen de L_A, $R(L_A)$, es generada por $L(\beta) = L(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}) = L[L_A(e_1), L_A(e_2), \ldots, L_A(e_n)]$.

Al hacer el producto de A por cualquier vector básico e_i obtenemos $A \cdot e_i = A^i$, la i-ésima columna de A.

Entonces el rango de L_A está generado por las columnas de A; esto es,

$$R(L_A) = L(A^1, A^2, \ldots, A^n)$$

y $\text{rango}(A) = \dim(R(L_A)) = \dim(L(A^1, A^2, \ldots, A^n))$. ■

EJEMPLOS:

20.- De la afirmación anterior sabemos que la imagen de la transformación lineal L_A está generada por las columnas de A.

Para la matriz $A = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sus columnas $A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ generan a $\mathbb{R}^3$; por lo tanto, la imagen de L_A es $R(L_A) = \mathbb{R}^3$.

Más aún, $\text{rango}(A) = \dim(R(L_A)) = 3$.

21.- Determine si el vector $\overline{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ está en la imagen de la transformación lineal L_A, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Para que $\overline{y} \in R(L_A)$ debe existir un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $L_A(\overline{x}) = \overline{y}$.

Para el vector $\overline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$, $L_A(\overline{x}) = \overline{y}$ ó $A\overline{x} = \overline{y}$ equivale al sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

De esta manera, para saber si el vector $\overline{y} \in R(L_A)$ debemos resolver el sistema anterior para encontrar las componentes del vector $\overline{x}$.

Resolviendo el sistema anterior encontramos que existe solución única,

$\overline{x} = \frac{-1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 131 \\ 94 \end{bmatrix}$, por lo tanto el vector $\overline{y} \in R(L_A)$.

22.- Determine si el vector $\overline{y} \in \mathbb{R}^3$, $\overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ está en la imagen de la transformación lineal L_A para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$.

Solución: Para que $\overline{y} \in R(L_A)$ debe existir $\overline{x} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $L_A(\overline{x}) = \overline{y}$, esto es, $A\overline{x} = \overline{y}$ equivale al sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 9x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema procedemos mediante operaciones elementales en renglones de $(A|\overline{b})$.

$$(A|\overline{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{A_{32}(-1)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -9 & 1 \end{array}\right] \underset{A_{13}(-2)}{\overset{A_{12}(1)}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & -31 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{M_3(1/3)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & 1 & -1/31 \end{array}\right]$$

$$\underset{A_{31}(-11)}{\overset{A_{32}(-15)}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 11/31 \\ 0 & 0 & 139/31 \\ 0 & 1 & -1/31 \end{array}\right].$$

Observemos que éste sistema no tiene solución pues aparecen dos renglones de ceros -el primero y segundo- de lado izquierdo de la barra vertical, mientras que a la derecha hay números distintos de cero.

Podemos decir entonces que el vector $\overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ no está en la imagen de la transformación lineal L_A, para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$.

Todo esto nos lleva a un teorema importante para indagar sobre la existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones lineales.

TEOREMA 25.12 : Un sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si rango(A) = rango$(A|\overline{b})$.

DEMOSTRACION:

Si el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución implica que $\overline{b} \in R(L_A)$. Pero $R(L_A)$ es el subespacio generado por las columnas de A, es decir, $R(L_A) = L(A^1, A^2, \ldots, A^n)$.

Pero $\overline{b} \in L(\{A^1, A^2, \ldots, A^n\})$ si y sólo si $\overline{b} \in L(\{A^1, A^2, \ldots, A^n, \overline{b}\})$. Esto último equivale a decir que $\dim(L\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}) = \dim(L\{A^1, A^2, \ldots, A^n, \overline{b}\})$ ó

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\overline{b}).\ \blacksquare$$

Este teorema ahorra mucho tiempo en los cálculos, pues antes de empezar a resolver un sistema de ecuaciones lineales de cualquier tamaño hay que comparar los rangos de A y de $(A|\overline{b})$. Si estos rangos son distintos es inútil intentar resolver el sistema pues no hay solución. En caso contrario, se puede utilizar cualquier método expuesto en esta sección para resolver el sistema.

B I B L I O G R A F I A

1.- ALGEBRA LINEAL
STEPHEN H. FIREDBERG
PUBLICACIONES CULTURAL, S.A.

2.- EL MUNDO DE LA MATEMATICA
TOMO I
EDITORIAL CLASA.

3.- ALGEBRA LINEAL
STANLEY I. GROSSMAN
GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA.

4.- PROBLEMARIO DE MATEMATICAS I
VARIOS AUTORES
PUBLICACION DE LA UAM-I.

5.- ALGEBRA LINEAL
SERGE LANG
FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO, S.A.

6.- ALGEBRA LINEAL
KENNETH HOFFMAN
PRENTICE HALL INTERNACIONAL.

7.- ALGEBRA MODERNA
I. N. HERSTEIN
EDITORIAL TRILLAS.

8.- ENCICLOPEDIA SALVAT DICCIONARIO DE 12 TOMOS.

9.- ALGEBRA SUPERIOR
CARDENAS, LLUIS, RAGGI, TOMAS
EDITORIAL TRILLAS.

10.- TEORIA DE ECUACIONES
J. V. USPENSKY
EDITORIAL LIMUSA.

11.- VARIABLES COMPLEJAS Y SUS APLICACIONES
R. V. CHURCHILL
Mc-GRAW HILL.

12.- EL METODO DE LA INDUCCION MATEMATICA
SOMINSKII
EDITORIAL LIMUSA.

13.- ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES
GILBERT STRANG
ADDISON WESLEY INTERAMERICANA.

14. FUNCIONES Y RELACIONES
LUZ MARIA RANGEL
PUBLICACION DE ANUIES.

15.- ENCICLOPEDIA CIENTIFICA LAROUSSE
TOMO I, MATEMATICAS.