UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MATADORES DE GRUPOS DE NUDOS E INDICE DE INDETERMINACION DE NUDOS DISCOIDALES

TESIS

que para obtener el grado de

Doctora en Ciencias (Matemáticas)

presenta

María de la Paz Alvarez Scherer

Director de tesis

Dr. Francisco Javier González Acuña

1992

INTRODUCCION

Sea S^n la n-esfera. Un n-nudo esférico (o, simplemente, un n-nudo) es una pareja (S^{n+2}, gS^n) con g un encaje. Su exterior es la cerradura del complemento en S^{n+2} de una vecindad tubular de gS^n. Dos n-nudos son equivalentes si existe un homeomorfismo del medio ambiente que manda uno en el otro.

Un espacio topológico que se asocia a todo nudo esférico (S^{n+2}, gS^n) es su exterior E. Un problema sobre el que se ha trabajado es el de establecer si un espacio Y es el exterior de un nudo o, más ambiciosamente, determinar el número de nudos que tienen a Y como su exterior.

Gluck [Gl], Lashof y Shaneson [La-S] y Browder [B] demostraron que existen a lo más dos n-nudos esféricos no equivalentes con el mismo exterior; posteriormente, Capell y Shaneson [Ca-S] y Gordon [G-3] construyeron ejemplos de ello. En 1989 Gordon y Luecke [G-L] demostraron que si dos 1-nudos tienen el mismo exterior son equivalentes.

Los n-nudos discoidales suaves son parejas $(\mathbb{D}^{n+2}, g\mathbb{D}^n)$ con g un encaje propio tal que la subvariedad $g\mathbb{D}^n$ corta transversalmente a $\partial\mathbb{D}^{n+2}$ en $\partial g\mathbb{D}^n$. Dos n-nudos discoidales son equivalentes si existe un difeomorfismo del medio ambiente que manda uno en el otro. Trabajaremos en la categoría DIFF.

El índice de indeterminación de una (n+2)-variedad Y es el número de n-nudos discoidales no equivalentes que tienen exterior difeomorfo a Y. Sumners y Hitt [H-S-1] encontraron primero condiciones sobre nudos discoidales que aseguran que su índice de indeterminación es menor o igual que 2, posteriormente [H-S-2] encontraron ejemplos de nudos discoidales tales que su índice de indeterminación de su exterior es mayor o igual que 6; después [H-S-3] demostraron que dado $k \in \mathbb{N}$ y $n \geq 5$ existe Y $(n+2)$-variedad con índice de indeterminación mayor o igual que k. En sus trabajos plantearon, entre otras, la pregunta: ¿Existe Y tal que su índice de indeterminación sea infinito?

González Acuña [GA-2] y Plotnick contestaron afirmativamente a esta conjetura en trabajos independientes. González Acuña probó que si $Y=E \times I^n$, con $n \geq 2$, y E es el exterior de un nudo toroidal, entonces el índice de indeterminación de Y es infinito. Cabe mencionar que este problema geométrico tiene una "traducción" algebraica, a saber, el de encontrar elementos del grupo fundamental de Y que no sean equivalentes (en el sentido que se define más abajo).

En ese trabajo, González Acuña planteó las siguientes conjeturas:

Conjetura I. El grupo de un nudo no trivial en S^3 tiene una infinidad de matadores algebraicamente no equivalentes.

Un matador de un grupo G es un elemento cuya cerradura normal es todo G. Dos matadores son algebraicamente no equivalentes si no hay un automorfismo de G que mande a uno de ellos en el otro (o en su inverso). Tsau [T] mostró la existencia de un nudo satélite con la propiedad de que existe un matador de su grupo que no es meridiano o, equivalentemente que no es imagen del meridiano bajo ningun automorfismo. Relacionada con la existencia de tales elementos está la así llamada propiedad P: un nudo K en S^3 tiene la propiedad P si, de toda cirugía no trivial a lo largo de K, se obtiene una 3-variedad que no es simplemente conexa. Si l y m son elementos de $\pi_1(S^3-K)$ que corresponden a una longitud y un meridiano en una vecindad tubular de K, la propiedad P se traduce como: K tiene la propiedad P si y sólo sí su grupo nunca se trivializa al agregar la relación $m=l^a$, $a \neq 0$. Es decir, ml^{-a} nunca es matador de G si $a \neq 0$.

La importancia crucial de la propiedad P es que si algun nudo no trivial no tiene la propiedad P entonces la conjetura de Poincaré es falsa, ya que, por [G-L], S^3 nunca se obtiene por cirugía no trivial en un nudo no trivial.

La propiedad P también implica que los nudos están determinados por sus complementos (esto último demostrado, como ya dijimos, por Gordon y Luecke). Se conjetura (Bing-Martin, González Acuña, Simon) que todo nudo no trivial tiene la propiedad P; hasta el momento se sabe que el nudo trivial no tiene la propiedad P y se sabe que todos los nudos con menos de once cruces tiene la propiedad P, salvo quizá 10_{82} y 10_{87} [GA-1].

Casson [A-M] probó que si $\Delta_k''(1)\neq 0$ (la segunda derivada evaluada en 1 del polinomio de Alexander simetrizado) entonces k tiene la propiedad P. Culler, Gordon, Shalen, Luecke [CGLS] probaron que si existe un homeomorfismo periódico de S^3 que deje invariante a k entonces k tiene la propiedad P.

Conjetura II. Si E es el exterior de un nudo no trivial en S^3 y $n\geq 2$ entonces $E \times I^n$ tiene índice de indeterminación infinito.

En este trabajo demostraremos los siguientes teoremas:
A. La conjetura I es cierta para nudos toroidales e hiperbólicos de rango 2.
B. Si $n>2$ la conjetura II es cierta para los mismos tipos de nudos y si $n=2$ la conjetura es cierta para nudos simples de género de Heegaard 2.
C. Si $n>2$, la conjetura I para K implica la conjetura II para su exterior. Si $n=2$ este teorema es cierto pero en categoría TOP.

I

En esta sección veremos bajo qué condiciones un grupo de rango 2 tiene una infinidad de matadores no equivalentes.

DEFINICION. Sea G un grupo. Decimos que $g \in G$ es *matador* de G si $G/\langle g \rangle \approx 1$. La definición anterior equivale a decir que al agregar la relación $g=1$ en una presentación de G, éste resulta el grupo trivial.

DEFINICION. Sea X un espacio arco-conectable.

Sea $c: [0,1] \longrightarrow X$ con $c(0) = c(1) = *$.

Entonces c es *matador* de X si $[c]$ es matador de $\Pi_1(X,*)$.

DEFINICION. Sean G un grupo y $\alpha_1, \alpha_2 \in G$. Decimos que α_1 y α_2 son *algebraicamente equivalentes* ($\alpha_1 \sim \alpha_2$) si existe $\phi: G \longrightarrow G$ automorfismo tal que

$$\phi(\alpha_1) = \alpha_2^{\pm 1}$$

Obsérvese que si $a \sim b$ y a es matador entonces b lo es.

PROPOSICION 1.1 Sea G un grupo de rango 2 con $G/G' \approx \mathbb{Z}$, con G' el subgrupo conmutador de G. Sean a y c generadores de G tales que aG' genera a G/G' y $c \in G'$. Entonces $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ ac^n es matador de G.

DEMOSTRACION. Sea $G = \langle a,c: r_1, r_2, \ldots \rangle$.

Sea $H = \langle a,c: r_1, r_2, \ldots, ac^n=1 \rangle$

Probaremos que H es trivial.

Si abelianizamos H resulta el grupo trivial; es decir, H es perfecto.

Como $ac^n=1$ entonces $a=c^{-n} \in H$; es decir, H está generado por un sólo elemento. Entonces H es cíclico.

Pero el que H sea perfecto y cíclico implica que H es trivial. □

Necesitamos ahora establecer si esta infinidad de matadores de G de la forma ac^n son algebraicamente no equivalentes. Para ello, en lugar de trabajar en G, lo haremos en $SL(2,\mathbb{C})$ donde existen criterios para mostrar si efectivamente los matadores son no equivalentes.

DEFINICION[1] . Una *representacion* es un homomorfismo

$$\rho: G \longrightarrow SL(2,\mathbb{C}).$$

Decimos que ρ es *reducible* si $\exists$ W subespacio vectorial propio no trivial de $\mathbb{C}^2$ tal que

$$\rho(g)(W) \leq W \qquad \forall g \in G$$

Si ρ no es reducible decimos que es *irreducible;* es decir, los únicos espacios invariantes de ρ son 0 y $\mathbb{C}^2$.
Además, si el homomorfismo es inyectivo decimos que la representación es *fiel*.

$\rho, \rho': G \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ son *equivalentes* si existe $X \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que

$$\rho(g) = X^{-1} \rho'(g) X \qquad \forall g \in G.$$

TEOREMA 1.2 (Culler-Shalen [C-S]) Sea $\rho: G \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ una representación con imagen no abeliana. Entonces son equivalentes:
a) ρ es reducible;
b) ρ es equivalente a una representación de matrices triangulares superiores;
c) $tr(\rho(g)) = 2 \qquad \forall g \in G'$

DEFINICION. Un grupo G es *metabeliano* si su subgrupo conmutador G′ es abeliano.

Observación: i) Si G es grupo de un 1-nudo no trivial, G no es

[1] Las siguientes definiciones se dan usualmente en GL(n,C). Sólo veremos el caso que nos atañe.

metabeliano.

ii) El grupo de matrices triangulares superiores es metabeliano; es decir, T es metabeliano, con

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \right\}$$

LEMA 1.3 Sea G el grupo de un 1-nudo no trivial y $\rho: G \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ representación fiel. Entonces ρ es irreducible.

DEMOSTRACION. Supongamos que ρ es reducible. Por el teorema 1.2ρG es equivalente a una representación de matrices triangulares superiores, entonces ρG es metabeliano. Pero ρ es fiel y G no es metabeliano. ∇ □

PROPOSICION 1.5 Sea G un grupo de rango 2 que satisface las condiciones de la proposición 1. Sea ρ una representación irreducible $\rho: G \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ tal que $\rho(a)=A$ y $\rho(c)=C$, C de orden infinito. Entonces $\{tr(AC^n)\}_{n\geq 0}$ es una colección infinita de números complejos.

DEMOSTRACION. Sea ρ' una representación equivalente a ρ tal que

$$\rho'(c) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = C' \qquad \varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda \neq \pm 1 \\ \lambda \text{ si } \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Sea } \rho'(a) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A'$$

Como ρ y ρ'son equivalentes, $tr(AC^n) = tr(A'C'^n)$

Caso *i*) $\lambda \neq \pm 1$

Nótese que λ no es raiz de la unidad ya que C, y por lo tanto C', es de orden infinito.

$$A'C'^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda^n & b\lambda^{-n} \\ c\lambda^n & d\lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

y $tr(A'C'^n) = a\lambda^n + d\lambda^{-n}$. Como λ no es raiz de la unidad la proposición es cierta si $a\neq 0$ y $d=0$; o bien $a=0$ y $d\neq 0$.

Supongamos $a\neq 0$ y $d\neq 0$ y que la colección $\{a\lambda^n + d\lambda^{-n}\}_{n\geq 0}$ es finita e igual a $\{k_1,\ldots,k_r\}$, $k_i \in \mathbb{C}$. Entonces λ^n es raiz de $ax+dx^{-1}=k_i$ para alguna i. Como tenemos r ecuaciones de segundo grado existen

a lo sumo 2r raíces. Así, $\{\lambda^m\}_{m\geq 0}$ es finito lo cual es imposible porque λ no es raiz de la unidad.
Por otro lado, si suponemos $a=d=0$ y ρ'' es una representación

equivalente a ρ' obtenida de conjugar con

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{donde } x^2=b^{-1}\text{; entonces}$$

$$\rho''(a)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=A'' \quad \text{y} \quad \rho''(c)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}=C''$$

El grupo H generado por A'' y C'' es tal que $H/H' \approx \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$ y por lo tanto no es imagen homomorfa de G ya que $G/G' \approx \mathbb{Z}$. Luego, el caso $a=d=0$ no se presenta.
Demostraremos a la vez los casos b) y c).
Caso b) $\lambda = \varepsilon = 1$

$$A'C'^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & an+b \\ c & cn+d \end{pmatrix}$$

y $tr(A'C'^n) = a + d + cn$.
Caso c) $\lambda = \varepsilon = -1$

$$A'C'^n=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(-1)^n\begin{pmatrix} a & * \\ * & cn+d \end{pmatrix}$$

$tr(A'C'^n) = (-1)^n\ [a + d + cn]$.
Supongamos en ambos casos $c=0$. Entonces A' y C' resultan matrices triangulares superiores y ρ es reducible (ver teorema 1.2) lo cual contradice la hipótesis. Luego, $c\neq 0$ y $\{tr(A'C'^n)\}_{n\geq 0}$ es un conjunto infinito.

En conclusión, bajo las hipótesis de la proposición, $\{tr(AC^n)\}_{n\geq 0}$ es una colección infinita de números complejos. □

Vamos ahora a demostrar que si K es un nudo toroidal o hiperbólico cuyo grupo G es de rango 2, G tiene un número infinito de matadores algebraicamente no equivalentes.

Conviene aquí detenernos a hacer un breve resumen de lo que está establecido en términos de clasificación de nudos.

Thurston con su teorema de uniformización demostró que hay 3 familias ajenas de nudos:

a) Nudos toroidales: son aquéllos no triviales contenidos en un toro no anudado en S^3.

b) Nudos hiperbólicos: son aquellos cuyo complemento acepta una estructura hiperbólica completa de volumen finito.

c) Nudos satélites: son aquellos cuyo exterior tiene un toro incompresible y no fronterizo.

Todo 1-nudo no trivial pertenece a exactamente una de estas tres clases.

Un nudo que no es satélite se llama también un nudo *simple*.

DEFINICION Un nudo no trivial K tiene un *tunel* si existe un arco α con $\alpha\cap K=\partial\alpha$ tal que $\overline{S^3-N(K\cup\alpha)}$ es un cubo con dos asas.

DEFINICION. Sea $p:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección definida por $p(x_1,x_2,x_3)=x_3$. Si $K\subset \mathbb{R}^3$ es un nudo, $x\in K$ es un *maximo local* si existe V, vecindad de x en K, tal que $p(y)\leq p(x)$ $\forall y\in V$.

DEFINICION Un nudo no trivial K de S^3 $(=\mathbb{R}^3\cup\{\infty\})$ tiene 2 *puentes* si es equivalente a un nudo en $\mathbb{R}^3$ con exactamente dos máximos locales.

Estamos trabajando con nudos cuyos grupos tienen rango 2. Norwood [N] y González Acuña-Short[GA-S] demostraron que estos nudos son primos. Se sabe que la familia de nudos de rango 2 contiene a la familia de nudos de una sola relación, que a su vez contiene a la familia de nudos de 1 túnel, que a su vez contiene a la familia de nudos de 2 puentes. Es decir; si llamamos

2P a los de 2 puentes
1T a los de un túnel
1REL a los de una relación
R_2 a los de rango 2
P a los primos

tenemos

$$2P \subsetneq 1T \subset 1REL \subset R_2 \subset P$$

Se conjetura que 1T = 1REL = R_2.

Schubert demostró que los nudos de 2 puentes son simples y que existe una correspondencia biunívoca entre los nudos de dos puentes y los espacios lentes vía la construcción de la doble cubierta ramificada sobre el nudo. Además, los nudos de 1T que no son de 2P contiene a ciertos satélites de nudos toroidales (p,q). Los satélites de 1T están clasificados por Eudave [E] y Morimoto y Sakuma [Mo-S].

PROPOSICION 2.1. Sea G el grupo de un nudo simple K, G de rango 2. Entonces existen en G una infinidad de matadores algebraicamente inequivalente.

DEMOSTRACION. Por el teorema de uniformización de Thurston lo haremos para cada uno de los posibles casos.
a) K nudo toroidal. (Este resultado fue obtenido de forma diferente por González Acuña [GA-2]).
Si G es grupo de un nudo toroidal (p,q), G tiene una presentación de la forma $G = \langle x,y: x^p=y^q\rangle$.
Sea $\langle x,y: x^p=y^q, x^p=1\rangle \approx \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$. Este es un grupo fuchsiano; es decir, isomorfo a un subgrupo discreto de $PSL(2,\mathbb{R})$, así que

existe un monomorfismo de $\mathbb{Z}_p*\mathbb{Z}_q$ en $PSL(2,\mathbb{C})$ que, como $H^2(\mathbb{Z}_p*\mathbb{Z}_q,\mathbb{Z})=0$, se levanta a un monomorfismo $\rho:\mathbb{Z}_p*\mathbb{Z}_q \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ (González Acuña-Montesinos [GA-M]) se tienen los homomorfismos

$$G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\rho} SL(2,\mathbb{C}).$$

Como $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ no es metabeliano (es decir, su subgrupo conmutador no es abeliano), por el teorema 1.2, ρ es irreducible.

Para poder usar las proposiciones anteriores necesitamos $c\in G'$ con c de orden infinito. Por Lyndon y Schupp [L-S] los únicos elementos de orden finito en $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ son los que están en $\mathbb{Z}_p$ o $\mathbb{Z}_q$ (y sus conjugados). Pero $w\in\mathbb{Z}_p-\{1\}$ o $w\in\mathbb{Z}_q-\{1\} \Rightarrow w\notin(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q)'$. De aquí que ningún elemento de orden finito, salvo el trivial, está en el conmutador; es decir, existen $a\in G$ y $c\in G'$ que satisfacen las hipótesis de las proposiciones del capítulo 1. Por la proposición 1.2, $\{trAC^n\}_{n\geq 0}$ es una colección infinita de números complejos.

Por Schreier [Schr] si G es grupo de nudo toroidal (p,q), $Out(G) \approx \mathbb{Z}_2$; es decir, cada elemento de la colección $\{trAC^n\}_{n\geq 0}$ tiene a lo más un equivalente algebraico. Por lo tanto, una infinidad de elementos de la colección $A, AC, AC^2,\ldots$ son algebraicamente no equivalentes.

b) K nudo hiperbólico.

Por la proposición 1.1, si G es el grupo de K, G de rango 2, a y c generadores de G con aG' generador de $G/G' \approx \mathbb{Z}$ y $c\in G'$ entonces ac^n es matador de G $\forall\ n\in\mathbb{Z}$.

Además, por la proposición 1.2, si ρ es una representación irreducible y $A=\rho(a)$ y $C=\rho(c)$ entonces $\{tr(AC^n)\}_{n\geq 0}$ es una colección infinita de números complejos. Por ser K hiperbólico siempre existe una representación fiel y discreta (Thurston) y fiel implica irreducible.

Por otro lado, si G es grupo de K hiperbólico $|Out\ G|<\infty$ (Mostow) y como ρ es fiel $|Out\ \rho G|<\infty$. Entonces para cada $n\in\mathbb{Z}$ sólo un número finito de la colección $A, AC, AC^2,\ldots$ son algebraicamente equivalentes a AC^n en ρG. Luego, una infinidad de términos de la colección son algebraicamente no equivalentes en G. □

La demostración para nudos simples del teorema anterior no puede hacerse para nudos satélites, ya que, para casi todo nudo satélite si G es su grupo, $|\mathrm{Out}\ G| = \infty$ (Sakuma [S]). Sin embargo, para ciertos satélites se puede extender el resultado de la manera siguiente:

Sea $k \subset T \subset \mathbb{S}^3$, donde T es un toro sólido desanudado en $\mathbb{S}^3$ y k es un nudo contenido en IntT (a esta pareja $J=(\mathbb{S}^1\times \mathbb{D}^2,k)$ se le llama *patrón*). (Ver Gordon [G-2]).

Sea c un nudo no trivial en $\mathbb{S}^3$. Sea $f:\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2 \longrightarrow N(c)$ un homeomorfismo fiel (es decir, $f(\mathbb{S}^1\times\{1\})$ es una curva en $\partial N(c)$ nulhomóloga).

Entonces $J(c) = f(k)$ es un *satelite* de c; se dice también que c es *compañero* de $J(c)$.

Trabajaremos con un caso especial de satélites. Llamaremos *patrón bueno* a un patrón $J=(\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2,k)$ que satisfaga además que

$$\frac{\Pi_1\ (\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2-k)}{\langle i_*\Pi_1(\mathbb{S}\ \times\partial\mathbb{D}^2)\rangle} = 1$$

con $i:\mathbb{S}^1\times\partial\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2$ inclusión; es decir,

$$\frac{\Pi_1(\mathbb{S}^3-k)}{\langle j_*(\{1\}\times\partial\mathbb{D}^2)\rangle} = 1$$

con $j:\{1\}\times\partial\mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3-k$ inclusión.

Nótese que si J es un patrón bueno k es homotópico al ánima de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2$.

TEOREMA 2.2. Sea $J = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, k)$ un patrón bueno. Si el grupo del nudo $(\mathbb{S}^3, c)$ tiene una infinidad de matadores entonces $J(c)$ tiene una infinidad de matadores

DEMOSTRACION. Por el teorema de Van Kampen

$$\Pi_1(\mathbb{S}^3 - J(c)) = A \underset{\mathbb{Z}^2}{*} B$$

con

$$A = \Pi_1(\ \mathbb{S}^3 - f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)),\ \text{el grupo de c;}$$
$$B = \Pi_1(\ f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 - k)) \simeq \Pi_1(\ \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 - k);$$
$$\text{y}\quad \mathbb{Z}^2 = \Pi_1(f(\partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)))$$

Todo matador de A es matador de $\Pi_1(\mathbb{S}^3 - J(c))$. En efecto, si α es matador de A, entonces

$$\frac{\Pi_1(S^3 - J(c))}{<\alpha>} \simeq \frac{B}{<\mathbb{Z}>}.$$

Como k es homotópica en $S^1\times \mathbb{D}^2$ al ánima de $S^1\times \mathbb{D}^2$, este último grupo es trivial.

Queremos demostrar que en si en E(c) hay una infinidad de matadores algebraicamente no equivalente, en E(J(c)) también los hay.

Antes de proseguir, haremos unos comentarios:

a) Por los resultados de K. Johansson [J], Jaco-Shalen y P. Scott, como E(k) , el exterior de un nudo, es una variedad de Haken admite una familia máxima de toros incompresibles no paralelos que parten a E(k) en "3-pedazos" de dos posibles tipos: hiperbólicos o de Seifert. (Ver [GA-W])

b) Todo automorfismo de un espacio $K(\Pi,1)$ (o asférico; es decir, $\Pi_2(E)=0$, como es el caso del exterior de un nudo) se realiza por una equivalencia homotópica.

Lema 2.3. Sean m y m′ curvas simples cerradas en E(c). Supongamos que m′ no es periférico; es decir, no es homotópica a ninguna curva simple cerrada en $\partial E(c)$. Si $m \sim m'$ en E(J(c)), entonces $m \sim m'$ en E(c).

DEMOSTRACION. Como $m \sim m'$ en $\Pi_1 E(J(c))$, existe

$$f\colon E(J(c)) \longrightarrow E(J(c))$$

equivalencia homotópica tal que $f(m)=m'^{\pm 1}$. Por Johansson, sabemosque existe una familia máxima de toros incompresibles no paralelos, que incluye a $\partial E(c)$, que es invariante bajo f y tal que $f|_{E(c)}$ es homeomorfismo sobre su imagen.

Hay dos posibles casos:

i) $f(E(c))= E(c)$; o

ii) $f(E(c)) \cap E(c) = \emptyset$

Supongamos que $f(E(c)) \cap E(c)) = \emptyset$, esto implica que $fm \sim m'^{\pm 1}$ en E(J(c)); así que existe una homotopía $H\colon S^1 \times I \longrightarrow E(J(c))$ tal que $H|_{S^1\times\{0\}}$ es fm y $H|_{S^1\times\{1\}}$ es $m'^{\pm 1}$. Podemos suponer que

$H^{-1}(\partial E(c) \cup f(\partial E(c)))$ es una 1-subvariedad cerrada Σ de $S^1 \times I$; más aún, usando la incompresibilidad de $\partial E(c) \cup f(\partial E(c))$ podemos suponer que ninguna de las componentes de Σ es frontera de un disco.

Sea s la componente de Σ tal que la componente de $(S^1 \times I) - s$ que contiene a $S^1 \times \{1\}$ no intersecta a Σ. Entonces $H(s) \subset \partial E(c)$ y $H|_s$ en $\partial E(c)$ es homotópica a $m'^{\pm 1}$ en $E(c)$, lo cual contradice que m' no es periférico. Luego $f(E(c)) \cap E(c)) = \emptyset$ y debe tenerse que $f(E(c)) = E(c)$. Luego $m \sim m'$ en $E(c)$.

COROLARIO 2.4. Sea J un patrón bueno. Supongamos que m_1, m_2, ... son matadores no equivalentes en $E(c)$ y que m_i no es periférico para $i>1$, entonces m_1, m_2, ... son matadores no equivalentes en $E(J(c))$.

COROLARIO 2.5. Si $E(c)$ tiene una infinidad de matadores no equivalentes y J es patrón bueno, entonces $E(J(c))$ tiene una infinidad de matadores no equivalentes.

Sea k un nudo compuesto; es decir, $k = k_1 \# k_2 \ldots \# k_r$. Entonces por Fox [F], $k = J(k_i)$ para toda i, donde

$$J = (S^1 \times \mathbb{D}^2,\ k_1\#\ldots\#k_{i-1}\#k_{i+1}\#\ldots\#k_r)$$

Nótese que J es tal que su orden es 1 (es decir, $k_1\#\ldots\#k_{i-1}\#k_{i+1}\#\ldots\#k_r$ es una curva en $S^1 \times \mathbb{D}^2$ que corta a un disco meridiano una sola vez); por lo tanto es homotópica al ánima de $S^1 \times \mathbb{D}^2$ y el patrón es bueno. Así tenemos el siguiente

COROLARIO 2.6. Sea $k = k_1\#\ldots\#k_r$ un nudo compuesto. Si uno de los factores de k tiene una infinidad de matadores no equivalentes, entonces k tiene una infinidad de matadores no equivalentes.

Nótese que, por la construcción de giro de Artin, la familia de grupos de 1-nudos está contenida propiamente en la familia de grupos de 2-nudos, que a su vez está contenida propiamente en la familia de 3-nudos. Esta última familia es igual a la familia de n-nudos con $n \geq 4$.

Sabemos (Fox [F]) que en la familia de grupos de 2-nudos hay nudos no triviales cuyo grupo G es tal que G′ es finito. Por lo tanto, si $n>1$, la conjetura I no es válida para grupos de n-nudos.

Hay también ejemplos de grupos de 2-nudos (por ejemplo, $G=\{t,a:at=a^2\}$ con G′ infinito y tales que todo matador es algebraicamente equivalente a un meridiano o, lo que igual, tal que dos matadores cualesquiera de G son algebraicamente equivalentes.

III

Hasta ahora hemos trabajado con nudos esféricos; es momento de pasar a los nudos discoidales. Vamos a trabajar con parejas suaves $(\mathbb{D}^{n+2}, g\mathbb{D}^n)$ con $g:\mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^{n+2}$ encaje propio (es decir, $\partial(g\mathbb{D}^n)=\partial\mathbb{D}^{n+2} \cap \partial(g\mathbb{D}^n)$). El exterior de un nudo discoidal es

$$\mathcal{E}(K) = \mathbb{D}^{n+2} - \operatorname{int}(N(g\mathbb{D}^n)).$$

DEFINICION. Si Y es una (n+2)-variedad definimos $\mathcal{E}(Y)$ el *indice de indeterminacion de* Y como el número de nudos discoidales no equivalentes cuyo exterior es difeomorfo a Y.

En este capítulo estableceremos $\mathcal{E}(Y)$ para $Y = E(K) \times I^n$ con $n \geq 2$ y K un nudo toroidal o hiperbólico con grupo de rango 2.

Empezaremos por ver cómo se construye una 5-variedad diferenciable compacta que tenga como grupo fundamental un grupo con una presentación dada de n generadores y n relacionadores. Desarrollaremos el caso que nos interesa; es decir, 2 generadores y 2 relacionadores.

Sea $G = \langle x_1, x_2 : r_1, r_2 \rangle$. Pegamos a $\mathbb{D}^5$ dos 1-asas (en general, el número de asas es el número de generadores) de manera tal que

$$W^5 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^4 \natural\ \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^4$$

(donde $\natural$ significa suma conexa a lo largo de la frontera).

$$\Pi_1(W^5) = \langle x_1, x_2 : \quad \rangle$$
$$\partial W^5 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \# \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$$

Además $i_\#:\Pi_1(\partial W^5) \longrightarrow \Pi_1(W)$ es isomorfismo; es decir,

$$\Pi_1(\partial W^5) = \langle x_1, x_2 : \quad \rangle$$

Pegamos ahora dos 2-discos $\mathbb{D}^2_i$ y para $i = 1,2$ tenemos $\phi_i : \partial\mathbb{D}^2_i \longrightarrow \partial W^5$ encajes con imágenes ajenas y tal que $\phi_i|_{\partial\mathbb{D}^2_i}$ representa la clase de conjugación de r_i. (Nótese que estos encajes de $\mathbb{S}^1$ en una 4-variedad no pueden anudarse).

Extendemos ahora ϕ_i a un encaje

$$\phi_1 : (\partial \mathbb{D}_1^2) \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \partial W^5.$$

Pegamos ahora a W^5 dos 2-asas por ϕ_1 y ϕ_2. En la unión ajena

$$\mathbb{D}_1^2 \times \mathbb{D}^3 + \mathbb{D}_2^2 \times \mathbb{D}^3 + \mathbb{D}^5$$

identificamos

$$x \in \partial(\mathbb{D}_1^2) \times \mathbb{D}^3 \subset \mathbb{D}_1^2 \times \mathbb{D}^3 \text{ con } \phi_1(x) \in \partial W^5 \subset W^5$$

obteniendo así una 5-variedad diferenciable N^5.

Debido a que cada extensión ϕ_i puede escogerse de dos maneras distintas, hay cuatro 5-variedades que resultan de esta construcción, todas con grupo fundamental presentado por $\langle x_1, x_2 : r_1, r_2 \rangle$. Frecuentemente, como veremos, estas cuatro variedades son difeomorfas.

Como $i_*: \partial N^5 \longrightarrow N^5$ es isomorfismo y $\Pi_1(\partial N^5) = \langle x_1, x_2 : r_1, r_2 \rangle$ hemos obtenido la variedad buscada.

La construcción que consideramos primero es en el caso particular en que $G = \langle x_1, x_2 : x_1, x_2 \rangle$ y entonces N^5 es difeomorfa a $\mathbb{D}^5$.

TEOREMA 3.1 Sean N_i^5 las cuatro 5-variedades asociadas a $\langle x_1, x_2 : x_1, x_2 \rangle$. Entonces N_i^5 es difeomorfa a $\mathbb{D}^5$ y ∂N_i^5 es difeomorfa a $\mathbb{S}^4$ para i=1,2,3,4.

DEMOSTRACION. Sea M una rosa de dos pétalos (uno por cada generador); $M \subset \mathbb{R}^5$. Tomemos una vecindad regular de M en $\mathbb{R}^3$.
Sea $X_0 = M \times I^2 \times I^{5-3} \subset \mathbb{R}^3 \times I^{5-3} \subset \mathbb{R}^5$, con $\mathbb{R}^3 \times I^2$ incluido canónicamente en $\mathbb{R}^5$.
Para cada uno de los pétalos hay sólo dos posibilidades de marco, ya que $\Pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ si n>1.
Haremos la construcción asa por asa; es decir, pensaremos que el grupo es $\langle x_i : x_i \rangle$ para el asa A_i. Entonces para A_i hay dos elecciones de marco. Veremos que con ambas elecciones obtenemos $\mathbb{D}^5$.
Sea $\acute{A}_i$ el asa A_i con uno de los posibles marcos y sea $\acute{A}_i'$ la misma asa con el otro marco.

Sea θ:Á₁ $\longrightarrow$ Á₁′ tal que si $z\in \mathbb{D}^2=\{z \mid |z|\leq 1\}$ y $t\in [0,1]$

$$\theta(z,t)=(e^{2\pi i t},t)$$

entonces $\theta(z,0)=(z,0)$ y $\theta(z,1)=(z,1)$.
Extendemos θ al 3-cubo con asas contenido en $\mathbb{R}^3$ y luego lo incluimos en X_0.
Hemos construido así un difeomorfismo de X_0 en X_0 que hace equivalentes a los dos marcos.
Continuando la construcción del teorema anterior, obtenemos cuatro 5-variedades difeomorfas a $\mathbb{D}^5$. Además, ∂N_i^5 es difeomorfa a S^4 (Milnor [M].). □

Nótese que la construcción nos garantiza esto, sin tener que hacer uso de la conjetura de Poincaré. Gracias a ello, el teorema queda demostrado en categoría DIFF y no sólo en TOP (la conjetura de Poincaré en dimensión cuatro fue demostrada por Freedman en categoría TOP).

Afirmamos que si E^3 es el exterior de un nudo hiperbólico o toroidal de género de Heegaard 2 (y, por tanto, de una relación), $E^3 \times I^2$ es el exterior de una infinidad de nudos discoidales suaves $(\mathbb{D}^5, \mathbb{D}^3)$ si su presentación geométrica es AC-equivalente a $\langle x_1,x_2:x_1,x_2\rangle \approx 1$.

DEFINICION. Sea $\langle x_1,x_2:r_1,r_2\rangle$ una presentación de un grupo G. Considerense las siguientes transformaciones

a) $\langle x_1,x_2:r_1,r_2\rangle \sim \langle x_1,x_2:r_1',r_2'\rangle$ con r_i' conjugado de $r_i^{\pm 1}$.

b) $\langle x_1,x_2:r_1,r_2\rangle \sim \langle x_1,x_2:r_2,r_1\rangle$

c) $\langle x_1,x_2:r_1,r_2\rangle \sim \langle x_1,x_2:r_2 r_1,r_2\rangle_2 \sim \langle x_1,x_2:r_1,r_1 r_2\rangle$

d) a la presentación original añádase un generador *y* y una relación yw^{-1} con w una palabra en x_1,x_2.

e) la transformación inversa de d)

Decimos que dos presentaciones de G son *AC-equivalentes* si una sucesión finita de transformaciones del tipo a) a e) lleva una presentación en la otra. A las transformaciones se les llama *jugadas de Andrews-Curtis.*

Se conjetura que cualquier presentación del grupo trivial es AC-equivalente a $\langle x_1, x_2 : x_1, x_2 \rangle$.

Nótese que si G es el grupo de un nudo hiperbólico o toroidal de género de Heegaard 2 y le agregamos la relación $\alpha=1$, con α matador del grupo, tenemos una presentación del grupo trivial. Si la conjetura anterior fuera cierta, estaría terminada la demostración.

Sea K un nudo simple de género de Heegaard 2 y sea $E^3 = E(K)$. Entonces $E^3 = H^3 \cup \mathbb{D}^2 \times I$, donde H^3 es un 3-cubo con dos asas; y

$$H^3 \cap \mathbb{D}^2 \times I = (\partial H^3) \cap (\partial \mathbb{D}^2) \times I.$$

Sea G el grupo de K; G tiene una presentación geométrica de la forma $\langle x_1, x_2 : r_1 \rangle$.
Afirmamos que $E^3 \times I^2$ es el exterior de una infinidad de nudos discoidales suaves $(\mathbb{D}^5, \mathbb{D}^3)$ siempre que ciertas presentaciones (que veremos más adelante) sean AC-equivalentes a $\langle x_1, x_2 : x_1, x_2 \rangle$.
$\Pi_1(E^3) = \langle x_1, x_2 : r_1 \rangle$; con cada x_i representada por un lazo que le da una vuelta a la i-ésima asa.
r_1 está representada por la curva central de $H^3 \cap \mathbb{D}^2 \times I$.
Entonces $\Pi_1(E^3 \times I^2) = \langle x_1, x_2 : r_1 \rangle$.

Existe $f: H^3 \longrightarrow H^3$ difeomorfismo tal que $f(x_2)$ es un lazo que representa a un elemento de $\Pi_1(E^3)'$. (Las curvas que necesitamos son $f(x_1)$ y $f(x_2)$.
La existencia de f está garantizada por los siguientes hechos:
a) Existe un automorfismo $\psi: \Pi_1(H^3,*) \longrightarrow \Pi_1(H^3,*)$ tal que $i_*(\psi([x_2])) \in \Pi_1(E^3)'$, donde $i: H^3 \longrightarrow E^3$ es la inclusión.
b) Cualquier automorfismo de $\Pi_1(H^3,*)$ es representable por un difeomorfismo de H^3 en H^3 [Gr].

De aquí que podamos tomar lazos a y c en H^3, basados en $*$, tales que:
i) a y c representan generadores de $\Pi_1(H^3)$;
ii) $c \in \Pi_1(E^3)'$ (o, equivalentemente, [c] representa a $[0] \in H_1(E^3)$)

$\Pi_1(E^3 \times I^2)$ tiene entonces una presentación geométrica $\langle a,c:w \rangle$.

Regresando a la construcción, tomamos $r_2 = ac^n$ y pegamos a $E^3 \times I^2$ una 2-asa a lo largo de $\phi: S^1 \longrightarrow \partial(E^3 \times I^2)$ que representa a ac^n, obteniendo una variedad diferenciable N^5 con grupo fundamental G:

$$\langle a,c:w,ac^n \rangle$$

Usando los resultados de Rapaport [R], como ac^n es elemento primitivo del grupo libre en a y c, $\langle a,c:w,ac^n \rangle$ es AC-equivalente a $\langle a,c:a,c \rangle$. Con esto queda demostrado el siguiente:

TEOREMA 3.2 Sea E^3 el exterior de un nudo simple de género de Heegard 2. Entonces $E^3 \times I^n$, $n \geq 2$ es exterior de una infinidad de nudos discoidales suaves $(\mathbb{D}^{3+n}, \mathbb{D}^n)$.

Observación: Si tomamos $n>2$, podemos debilitar la hipótesis y pedir que los nudos sean de rango 2, ya que para $n \geq 5$, la conjetura de Poincaré es cierta en categoría DIFF.

Dicho de otra manera, si $n>2$, entonces la conjetura I de González Acuña para K implica la conjetura II de González Acuña para E(K).

Observación: Nótese que si consideramos las fronteras de los nudos discoidales $(\mathbb{D}^5, \mathbb{D}^3)$ tenemos 2-nudos esféricos (S^4, S^2). Lo que hemos demostrado implica que si G es el grupo de un 1-nudo simple de género de Heegaard 2, existen una infinidad de (S^4, S^2) no equivalentes cuyo grupo es G. (Podemos garantizar la no equivalencia de estos 2-nudos por haber pegado los nudos discoidales a lo largo de matadores no equivalentes.)

IV

Veremos ahora para cuáles nudos de menos de diez cruces es válido el teorema 3.2. Hay 84 de estos nudos. De ellos, 50 son nudos racionales; es decir, son aquéllos cuya descripción en la notación de Conway [Co] no tiene comas ni puntos. Estos nudos tienen 2 puentes, género de Heegaard 2 y rango 2 (tabla I).

Por González Acuña-Short [GA-S] y Boileau sabemos que los nudos de Montesinos cuya descripción en la notación de Conway es de la forma $2,r_1,r_2$ con r_1 y r_2 racionales, tienen 3 puentes, género de Heegaard 2 y rango 2. Hay 17 de estos nudos (tabla II).

Quedan fuera de estas tablas 17 nudos. Sabemos que todos ellos tienen 3 puentes. De quince de ellos sabemos que tienen género de Heegaard 3, y del resto no sabemos cuál es su género de Heegaard. Cabe aclarar que esta "indecisión" se debe a que los criterios conocidos para determinar el género de Heegaard no son concluyentes para estos nudos. Por razones análogas, tampoco está resuelto el problema del rango de estos nudos.

Así, como género de Heegard 2 implica que el nudo es fuertemente invertible (Osborne [O]) y 8_{17}, 9_{32} y 9_{33} no son invertibles, no tienen género de Heegard 2; no conocemos el rango de su grupo.

Por otro lado, tenemos que si E es el exterior del nudo K y Ê la cubierta universal abeliana de E entonces

$$H_1(\hat{E}) \xrightarrow[\approx]{t-1} H_1(\hat{E})$$

Además, si B_2 es la doble cubierta ramificada

$$\begin{tikzcd}
H_1(\hat{E}) \arrow[rr, dashed, "t^2-1"] \arrow[dr, "t-1"', "\approx"] & & H_1(\hat{E}) \arrow[r] & H_1(B_2) \arrow[r] & 0 \\
& H_1(\hat{E}) \arrow[ur, "t+1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

y $H_1(B_2)$ es el conúcleo de t^2-1.
Entonces,

$$H_1(B_2) \approx \frac{H_1(\hat{E})}{(t=-1)}.$$

Ahora bien, $H_1(B_2)$ no cíclico implica que $E_2 \quad \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, lo cual implica que el rango del grupo es mayor que 2 (y como estamos en nudos de menos de diez cruces el rango no puede ser mayor que 3). Así, 8_{18}, 9_{35}, 9_{37}, 9_{40}, 9_{41}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48} y 9_{49} tienen rango 3.

De 8_{16}, 8_{17}, 9_{29}, 9_{32}, 9_{33} y 9_{38} sabemos además que son no doblemente primos (NDP); es decir, que poseen una esfera de Conway. Son aquéllos que empiezan con un punto en la notación de Conway. Scharlemann [Sch] demostró que un nudo es NDP sí y sólo sí su número de túnel es 2: y, para nudos de menos de 11 cruces, el número de túnel es igual a género de Heegaard menos 1.

BIBLIOGRAFIA.

[A-M] Akbulut S., Mc Carthy J. *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres.* Mathematical Notes No.36, Princeton University Press. 1990.

[B] Browder W. "Diffeomorphisms of 1-connected manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967) 155-163.

[Ca-S] Capell S., Shaneson J. L. "There exist inequivalent knots with the same exterior" Ann of Math. 103 (1976) 349-353.

[Co] Conway J.H. "An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties". Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, 1969.

[C G L S] Culler M., Gordon C., Luecke J., Shalen P. "Dehn surgery on knots", Ann. of Math. 124 (1987) 237-300.

[C-S] Culler M., Shalen P. "Varieties of group representations andsplittings of 3-manifolds", Ann. of Math. 117 (1983) 109-146.

[E] Eudave-Muñoz M. "On non simple 3-manifolds and 2-handle addition"., Por aparecer.

[F] Fox R. "A quick trip through knot theory" *Topology of 3-manifolds*, M.K. Fort (ed.) Prentice Hall, 1962.

[GA-1] González- Acuña F.J. "Cirugía en sumas encintadas de nudos". Prepreint.

[GA-2] González-Acuña F.J. "Infinitely many smooth disk-knots with the same exterior". Preprint.

[GA-MA] González-Acuña F.J., Montesinos-Amilibia J.M. "On the trace variety of group representations in SL(2,ℂ) and PSL(2,ℂ)". Por aparecer.

[GA-S] González-Acuña F.J., Short H. "Knor surgery and primeness", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99 (1986) 89-102.

[GA-W] González-Acuña F.J., Whitten W. *Imbeddings of*

Three-Manifold Groups, Memoirs AMS Vol. 99, No. 474, 1992.

[G-1] Gordon C. Mc. A. "Some aspects of classical knot theory", LMS 685, Springer-Verlag, 1-60.

[G-2] Gordon C. Mc. A. "Dehn surgery and satellite knots" Trans. Amer. Math. Soc 275 (1983) 687-708.

[G-3} Gordon C. Mc. A. "Knots in the 4-sphere" Comm. Math. Helv. 51 (1976) 585-596.

[G-L] Gordon C. Mc. A., Luecke J. "Knots are determined by their complements". Journal of the AMS, Vol.2 No.2 (1989) 371-415.

[Gr] Griffiths H. B. "Automorphisms of a 3-dimensional handlebody" Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26 (1963/64) 191-210.

[H-S-1] Hitt L. R., Sumners D. W. "Knots which are uniquely determined by their exteriors". Preprint.

[H-S-2] Hitt L.R., Sumners D.W. "Many different disk knots with the same exterior". Comm. Math. Helv. 56 (1981) 142-147.

[H-S-3] Hitt L.R., Sumners D.W. "There exist arbitrarily many disk knots with the same exterior". Preprint.

[J] Johansson K. *Homotopy Equivalence of 3- Manifolds with boundary.* LNM 761, Springer- Verlag, 1978.

[L] Levine J. "Some results in higher dimensional knot theory", LMS 685, Springer- Verlag, 243-273.

[La-S] Lashof R. K., Shaneson J. S. "Classification of knots in codimension two". Bull. Amer. Math. Soc.75 (1969) 171-175.

[L-S] Lyndon R. C., Schupp P. E. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag. 1977.

[M] Milnor J. W. *Lectures on h-Cobordism.* Princeton University Press, 1965.

[Mo] Morimoto K., Sakuma M. "On un-knotting tunnels for non-simple groups". Math. Ann. 289 (1991) 143-167. [N]

[N] Norwood F. H. "Every two generator group knot is prime" Proc. AMS Vol. 86 No. 1 (1982) 143-147.

[O] Osborne R.P. "Knots with Heegaard genus 2 complements are invertible" Proc AMS Vol. 81 No. 3 (1981).

[R] Rapaport E. S. "Remarks on groups of order 1". Am. Math. Monthly 75 (1968) 714-720.

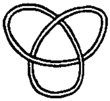
[S] Sakuma M. "Realization of the symmetry of groups links". Preprint.

[Sch] Scharlemann M. "Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture". Topology and it's Applications 18 (1984) 235-258.

[Schr] Schreier O. "Über die Gruppen $A^aB^b=1$" Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1934) 167-169. 167-169.

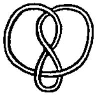
[T] Tsau C. M. "Nonalgebraic killers of knot groups", Proc. AMS Vol. 95 No. 1 (1985) 139-146.

TABLA I



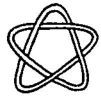
3_1 3

[1-1



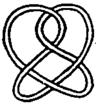
4_1 22

[3-1



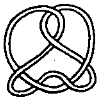
5_1 5

[1-1+1



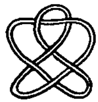
5_2 32

[3-2



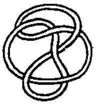
6_1 42

[5-2



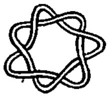
6_2 312

[3-3+1



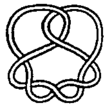
6_3 2112

[5-3+1



7_1 7

[1-1+1-1

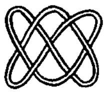


7_2 52

[5-3

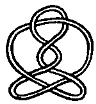
7_3 43

[3-3+2



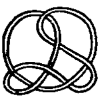
7_4 313

[7-4



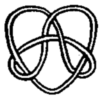
7_5 322

[5-4+2



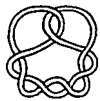
7_6 2212

[7-5+1



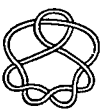
7_7 21112

[9-5+1



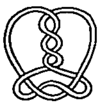
8_1 62

[7-3



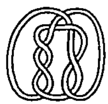
8_2 512

[3-3+3-1



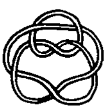
8_3 44

[9-4



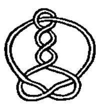
8_4 413

[5-5+2



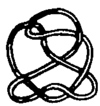
8_5 3,3,2

[5-4+3-1



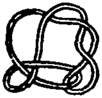
8_6 332

[7-6+2



8_7 4112

[5-5+3-1

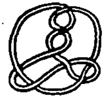


8_8 2312

[9-6+2

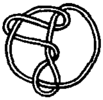
8_9 3113

[7-5+3-1



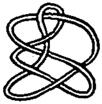
8_{11} 3212

[9-7+2



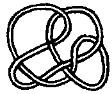
8_{12} 2222

[13-7+1



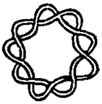
8_{13} 31112

[11-7+2



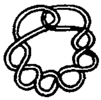
8_{14} 22112

[11-8+2



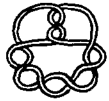
9_1 9

[1-1+1-1+1



9_2 72

[7-4

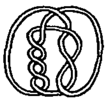


9_3 63

[3-3+3-2

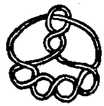
9_4 54

[5-5+3



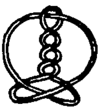
9_5 513

[11-6



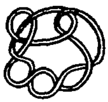
9_6 522

[5-5+4-2



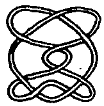
9_7 342

[9-7+3



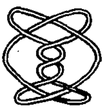
9_8 2412

[11-8+2



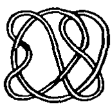
9_9 423

[7-6+4-2



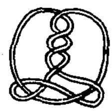
9_{10} 333

[9-8+4



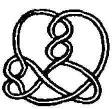
9_{11} 4122

[7-7+5-1



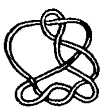
9_{12} 4212

[13-9+2



9_{13} 3213

[11-9+4

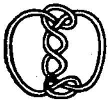


9_{14} 41112

[15-9+2

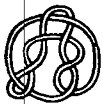
9_{15} 2322

[15-10+2



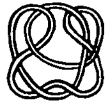
9_{17} 21312

[9-9+5-1



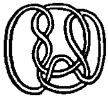
9_{18} 3222

[13-10+4



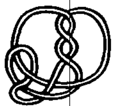
9_{19}

[17-10+



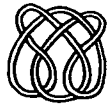
9_{20} 31212

[11-9+5-1



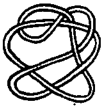
9_{21} 31122

[17-11+2



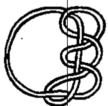
9_{22} 221

[15-11+4



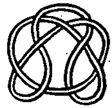
9_{26} 311112

[13-11+5-1



9_{27} 212112

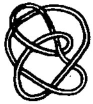
[15-11+5-1



9_{31} 21111

[17-13+5-1

TABLA II

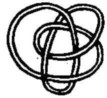


8_{10} 3,21,2

[7-6+3-1

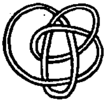
8_{15} 21,21,2

[11-8+3



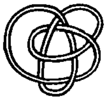
8_{19} 3,3,2-

[1+0-1+1



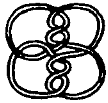
8_{20} 3,21,2-

[3-2+1



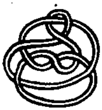
8_{21} 21,21,2-

[5-4+1



9_{16} 3,3,2+

[9-8+5-2

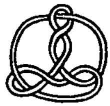


9_{22} 211,3,2

[11-10+5-1

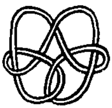
9_{24} 3,21,2+

[13-10+5-1



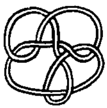
9_{25} 22,21,2

[17-12+3



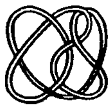
9_{28} 21,21,2+

[15-12+5-1



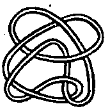
9_{30} 211,21,2

[17-12+5-1



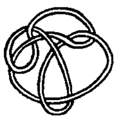
9_{36} 22,3,2

[9-8+5-1



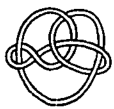
9_{42} 22,3,2-

[1-2+1



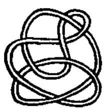
9_{43} 211,3,2-

[1-2+3-1



9_{44} 22,21,2-

[7-4+1

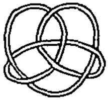


9_{45} 211,21,2-

[9-6+1

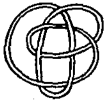
TABLA III

NUDO	CONWAY	INFORMACION ADICIONAL	PUENTES	G.HEEGARD	RANGO
8_{16}	.2.20	$E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ NDP	3	3	?
8_{17}	.2.2	no-inv. NDP	3	3	?
8_{18}	8^*	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{29}	.2.20.2	$E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ NDP	3	3	?
9_{32}	.21.20	no-inv. NDP	3	3	?
9_{33}	.21.2	no-inv. NDP $E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$	3	3	?
9_{34}	8^*20	$E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$	3	?	?
9_{35}	3,3,3	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{37}	3,21,21	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{38}	.2.2.2	$E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ NDP	3	3	?
9_{39}	2:2:20	$E_2=\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$	3	?	?
9_{40}	9^*	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_5$	3	3	3
9_{41}	20:20:20	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$	3	3	3
9_{46}	3,3,21	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{47}	8^*-20	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{48}	21,21,21-	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3$	3	3	3
9_{49}	-20:-20:-20	$H_1B_2 \approx \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$	3	3	3



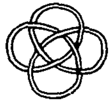
8_{16} .2.20

[9-8+4-1



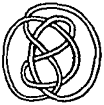
8_{17} .2.2

[11-8+4-1



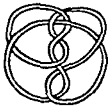
8_{18} 8^*.

[13-10+5-1



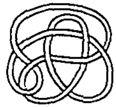
9_{32} .2.20.2

[15-22+5-1



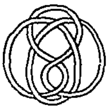
9_{33} .21.20

[17-14+6-1



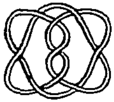
9_{36} .21.2

[19-14+6-1



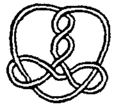
9_{34} 8^*20

[23-16+6-1



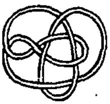
9_{35} 3,3,3

[13-7



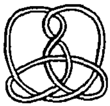
9_{37} 3,21,21

[19-11+2



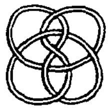
9_{38} .2.2.2

[19-14+5



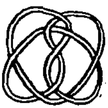
9_{39} 2:2:20

[21-14+3



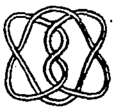
9_{40} 9^*

[23-18+7-1



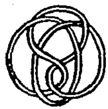
9_{41} 20:20:20

[19-12+3



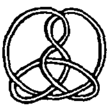
9_{46} 3,3,21-

[5-2



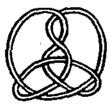
9_{47} 8^*-20

[5-6+4-1



9_{48} 21,21,21-

[11-7+1



9_{49} -20:-20:-20

[7-6+3