

881217

UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE INGENIERIA
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA U. N. A. M.

6
dy



Vince In Bono Malum

GUIA DE ESTUDIOS PARA LA ESPECIALIZACION EN TECNICAS MODERNAS DE PLANEACION Y CONTROL DE LAS COMPRAS, LA PRODUCCION Y LOS INVENTARIOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
AREA INDUSTRIAL

PRESENTA EL ALUMNO

LAURA PATRICIA RUIZ DE CHAVEZ MARCH

Asesor: Ing. Maurice Paul Levy Matarasso

MAYO 1992

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I

MATEMATICAS AVANZADAS

	Pag	
I	INTRODUCCION	1
I.1.	SIMBOLOGIA	1
I.2.	MANEJO DE SUMATORIAS Y PRODUCTOS	1
I.3.	MANEJO DE SUBINDICES	2
I.4.	MANEJO DE EXPONENTES	3
I.5.	OPERACIONES ESPECIALES	3
I.6.	COMBINACIONES Y PERMUTACIONES	8
II	MATRICES	18
II.1.	DEFINICION	18
II.2.	TIPOS DE MATRICES	18
II.3.	OPERACIONES CON MATRICES	20
II.4.	APLICACIONES DE LAS MATRICES	21
III	ECUACIONES SIMULTANEAS	22
III.1.	VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES	22
III.2.	RANGO DE UN SISTEMA	22
III.3.	METODO DE SOLUCION POR SUSTITUCION	23
III.4.	REGLA DE CRAMER	25
III.5.	METODO DE GAUSS-JORDAN	25
IV	CALCULO INTEGRAL Y DIFERENCIAL	28
IV.1.	DERIVACION	28
IV.2.	APLICACIONES DE LAS DERIVADAS	30
IV.3.	INTEGRACION	35
IV.4.	INTEGRALES MULTIPLES	38
IV.5.	APLICACIONES DE LAS INTEGRALES	41
IV.6.	SERIES	41
IV.7.	ECUACIONES DIFERENCIALES	56
	BIBLIOGRAFIA	60

CAPITULO II

METODOS ESTOCASTICOS

I	INTRODUCCION	61
I.1.	LA ESTADISTICA	61
I.2.	POBLACION Y MUESTRA	61
I.3.	OBTENCION DE DATOS	61
I.4.	VARIABLES DISCRETAS Y CONTINUAS	62
I.5.	GRAFICAS	62
II	PROBABILIDAD	63
II.1.	MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL	63
II.2.	MEDIDAS DE DISPERSION	64

II.3.	FRECUENCIA	Pag 66
II.4.	EVENTOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES	66
II.5.	EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES	66
II.6.	RELACION ENTRE LA MEDIA Y LA VARIANZA	66
II.7.	ESPERANZA MATEMATICA	67
III	DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS	68
III.1.	DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS	68
III.2.	DISTRIBUCION BINOMIAL	68
III.3.	DISTRIBUCION NORMAL	69
III.4.	DISTRIBUCION DE POISSON	71
III.5.	DISTRIBUCION EXPONENCIAL	72
III.6.	DISTRIBUCION ERLANG O GAMA	74
III.7.	DISTRIBUCION t DE STUDENT	76
III.8.	TEORIA DE MUESTRO	78
IV	METODOS DE AJUSTE DE CURVAS	88
IV.1.	REGRESION LINEAL	88
IV.2.	REGRESION MULTIPLE	90
IV.3.	CORRELACION	91
V	SERIES DE TIEMPO	94
V.1.	GRAFICAS DE SERIES DE TIEMPO	94
V.2.	MOVIMIENTOS DE LAS SERIES DE TIEMPO	95
V.3.	CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS	95
V.4.	ANALISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO	96
V.5.	ESTIMACION DE LA TENDENCIA	97
V.6.	VARIACIONES CICLICAS E IRREGULARES	98
V.7.	ESTACIONALIDAD	100
V.8.	PRONOSTICOS	101
VI	CONCLUSIONES	102
VI.1.	APLICACIONES DE LA ESTADISTICA	102
	BIBLIOGRAFIA	102

CAPITULO III

MODELOS DE INVENTARIOS

I	INTRODUCCION	103
I.1.	INVENTARIOS	103
I.2.	COSTOS ASOCIADOS A LOS INVENTARIOS	103
I.3.	NIVEL DE SERVICIO	104
II	MODELOS DETERMINISTICOS	107
II.1.	COMPONENTES DE LOS MODELOS DE INVENTARIOS	107
II.2.	MODELOS DE REVISION CONTINUA	107
II.3.	DEMANDA UNIFORME, SIN DEMANDA INSATISFECHA	107
II.4.	DEMANDA UNIFORME, CON DEMANDA INSATISFECHA	110

II.5.	INVENTARIOS DE SEGURIDAD	Pag 113
II.6.	TAMAÑO ECONOMICO DEL LOTE SIN DEMANDA INSATISFECHA (MODELO DE MANUFACTURA)	114
II.7.	PROGRAMACION DINAMICA	115
II.8.	REVISION PERIODICA	122
II.9.	MODELO GENERAL PARA LA PLANEACION DE LA PRODUCCION	122
II.10.	ALGORITMO GENERAL PARA LA PLANEACION DE LA PRODUCCION	123
III	MODELOS ESTOCASTICOS	125
III.1.	MODELO DE UN PERIODO SIN COSTO FIJO	125
III.2.	MODELO DE UN PERIODO CON COSTO DE PREPARACION	128
III.3.	MODELO DE DOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION	129
III.4.	MODELO DE VARIOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION	131
III.5.	MODELO DE VARIOS PERIODOS CON COSTO DE PREPARACION	134
III.6.	MODELOS CON COSTOS DE PENALIZACION NO LINEALES	135
III.7.	MODELOS DE REVISION CONTINUA CON TIEMPOS DE ENTREGA FIJOS	136
	BIBLIOGRAFIA	141

CAPITULO IV

CONTROL DE CALIDAD

I	INTRODUCCION	143
I.1.	DEFINICION DE CALIDAD	143
I.2.	CONTROL DE CALIDAD ESTADISTICO	143
I.3.	APLICACIONES REPRESENTATIVAS	144
II	EL CONTROL DE CALIDAD	145
II.1.	ESTUDIO DEL PROCESO	145
II.2.	RECOLECCION DE DATOS	147
II.3.	CALCULO DE LOS PARAMETROS PROBABILISTICOS	147
II.4.	GRAFICACION DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS	148
III	GRAFICAS DE CONTROL	150
III.1.	GRAFICAS DE CONTROL	150
III.2.	RELACION ENTRE LAS TECNICAS ESTADISTICAS Y LAS GRAFICAS DE CONTROL	151
III.3.	GRAFICA DE CONTROL PARA EL PORCENTAJE DEFECTUOSO	152
III.4.	GRAFICA DE CONTROL POR DEFECTOS	157
IV	MUESTREO DE ACEPTACION	159
IV.1.	ESPECIFICACIONES Y TOLERANCIAS	159
IV.2.	MUESTREO	161
IV.3.	TAMAÑO DEL LOTE	162
IV.4.	ACEPTACION POR ATRIBUTOS	162
IV.5.	ACEPTACION POR VARIABLES	167

IV.6.	CONFIABILIDAD	Pag	172
IV.7.	SELECCION DEL PLAN DE MUESTREO Y CONSIDERACIONES ECONOMICAS		179
	BIBLIOGRAFIA		180

CAPITULO V

PROGRAMACION LINEAL Y DINAMICA

I	INTRODUCCION		181
I.1.	CAMPO DE APLICACION		181
I.2.	RAZONAMIENTO CIENTIFICO		182
I.3.	METODOLOGIA		183
II	PROGRAMACION LINEAL		186
II.1.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA		186
II.2.	CONDICIONES BASICAS PARA APLICAR PROGRAMACION LINEAL		188
II.3.	SOLUCION GRAFICA		190
II.4.	METODO SIMPLEX		191
II.5.	METODO DEL PIVOTE		197
II.6.	COMPLICACIONES DEL METODO SIMPLEX		200
II.7.	PROBLEMA DE TRANSPORTE		208
II.8.	APLICACION DE LA SOLUCION		219
III	PROGRAMACION DINAMICA		220
III.1.	INTRODUCCION		220
III.2.	PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA		221
III.3.	CONSTRUCCION DEL MODELO MATEMATICO		221
III.4.	METODO DE SOLUCION		224
III.5.	PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA		226
III.6.	METODO DE SOLUCION		228
IV	RUTA CRITICA		231
IV.1.	INTRODUCCION		231
IV.2.	TEORIA DE GRAFICAS		231
IV.3.	REDES DE ACTIVIDAD		232
IV.4.	RUTA CRITICA		233
IV.5.	EL CASO PROBABILISTICO: PERT		236
	BIBLIOGRAFIA		242

CAPITULO VI

ADMINISTRACION DE MATERIALES

I	INTRODUCCION		243
I.1.	GENERALIDADES		243

	Pag	
I.2.	PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES (MRP)	243
I.3.	IMPORTANCIA DE LA COMPUTADORA	245
II	PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	247
II.1.	PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	247
II.2.	LOGICA DE LA PLANEACION DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	248
II.3.	ENTRADAS DEL MRP	250
II.4.	NOTIFICACION Y CONTROL DE INVENTARIOS	266
II.5.	MECANICA DEL MRP	271
III	CONTROL DEL PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	287
III.1.	NECESIDAD DE CONTROL	287
III.2.	RUTA CRITICA Y PERT	288
III.3.	REVISION CONTINUA DEL PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	291
III.4.	CONTROL POR COMPUTADORA	293
IV	CODIGO DE BARRAS	295
IV.1.	INTRODUCCION	295
IV.2.	SIMBOLOGIA	296
IV.3.	EQUIPOS DE LECTURA	301
IV.4.	EQUIPOS DE IMPRESION	307
IV.5.	ETIQUETADO	310
IV.6.	MANEJO DE MATERIALES Y CONTROL DE INVENTARIOS	310
IV.7.	COSTOS	312
	BIBLIOGRAFIA	314

CAPITULO VII

TECNICAS MODERNAS APLICADAS A LA PRODUCCION

I	INTRODUCCION	317
I.1.	OBJETIVOS DEL SISTEMA JUSTO A TIEMPO	317
I.2.	ALCANCE DEL SISTEMA JUSTO A TIEMPO	319
II	SISTEMA JUSTO A TIEMPO	321
II.1.	PRINCIPIOS BASICOS DEL SISTEMA	321
II.2.	TAMAÑO DEL LOTE	321
II.3.	REDUCCION DEL TAMAÑO DEL LOTE Y DEL TIEMPO DE PREPARACION	322
II.4.	PROGRAMA DE TRABAJO FIJO Y NIVELADO	325
II.5.	ELIMINACION DE INVENTARIOS DE MATERIAL EN PROCESO (TECNOLOGIA DE GRUPOS)	327
II.6.	SISTEMA DE JALAR (KANBAN)	333
II.7.	ASOCIACION DE JUSTO A TIEMPO Y PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES	338

II.8.	CALIDAD EN LA FUENTE	Pag 340
II.9.	COMPRAS JUSTO A TIEMPO	342
II.10.	ESTRATEGIAS PARA LA COMERCIALIZACION	345
II.11.	VENTAS JUSTO A TIEMPO	346
II.12.	IMPLANTACION DE UN SISTEMA JUSTO A TIEMPO	346
II.13.	COSTOS INVOLUCRADOS EN LA IMPLANTACION DE UN SISTEMA JUSTO A TIEMPO	350
III	MANUFACTURA INTEGRADA POR COMPUTADORA	351
III.1.	OBJETIVO Y ALCANCE DEL SISTEMA	351
III.2.	ARQUITECTURA DE UN SISTEMA CIM	354
III.3.	CONTROL DE CALIDAD	356
III.4.	SISTEMAS DE INFORMACION GERENCIALES	357
III.5.	EQUIPO Y PROGRAMAS DE COMPUTO	358
	BIBLIOGRAFIA	359

CAPITULO I

MATEMATICAS AVANZADAS

I. INTRODUCCION:

I.1. SIMBOLOGIA:

Los símbolos usados para representar las cantidades son los números y las letras.

Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas.

Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto, y las cantidades desconocidas se representan por las últimas.

Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas, i.e. a' , a'' que se leen *a prima*, *a biprima*, o también por medio de subíndices, i.e. a_1 , a_2 que se leen *a uno*, *a dos*.

I.2. MANEJO DE SUMATORIAS Y PRODUCTOS:

Una notación para representar brevemente la suma de una sucesión de términos como $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ puede representarse con la notación

$$\sum_{i=1}^n u_i$$

en donde el símbolo Σ es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego que se llama *signo de suma*, mientras que la letra i se llama *índice de la suma*, que toma sucesivamente todos los valores enteros positivos de 1 a n inclusive. El símbolo

$$\sum_{i=1}^n u_i$$

se lee "*suma de u_i desde $i=1$ a n* ".

Análogamente, un polinomio de grado n puede representarse con esta notación en la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Asimismo, podemos representar doble y triple sumatorias como:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i y_j = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + \dots + x_n y_m$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l x_i y_j z_k = x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_1 z_3 + \dots + x_l y_m z_n$$

En sumatorias sucesivas, el orden de la suma es como sigue: El orden de los extremos que se escriben en los signos de suma, leyendo de derecha a izquierda, es el mismo que el orden de las variables correspondientes cuyas literales se leen de izquierda a derecha.

La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas factores hallar una tercera llamada producto.

Una notación para representar brevemente el producto de términos como $(x_1 y_1)(x_2 y_2) \dots (x_n y_n)$ puede representarse con la notación:

$$\prod_{i=1}^n x_i y_i$$

que se lee "multiplicatoria de $x_i y_i$ desde $i=1$ a n ".

I.3. MANEJO DE SUBINDICES:

Una misma literal puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de subíndices, i.e. a_1, a_2 que se leen a uno, a dos.

I.4. MANEJO DE EXPONENTES:

Quando un número a se multiplica por sí mismo n veces. el producto $a * a * a * a * \dots * a$ (n veces) se representa por el símbolo a^n que se lee "potencia enésima de a " o bien " a elevado a la potencia n " o todavía " a a la n ". La literal a recibe el nombre de base y el número entero positivo n es el exponente.

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES:

$$1) \quad a^p * a^q = a^{p+q}$$

$$2) \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}} \quad \text{siempre que } a \neq 0.$$

$$3) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$4) \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad (a/b)^p = a^p / b^p \quad \text{siempre que } b \neq 0.$$

$$5) \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$6) \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

I.5. OPERACIONES ESPECIALES:

FACTORIAL:

Por el símbolo $n!$, llamado factorial de n , se entiende el producto de todos los números enteros positivos consecutivos de 1 a n . Es decir

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n.$$

Para encontrar un valor para $0!$ que no está definido en esta relación tenemos que

$$n! = n(n-1)!$$

para $n = 1$

$$1! = 1(0)!$$

y para que esta relación sea válida, queda

$$0! = 1$$

LOGARITMOS:

El logaritmo de un número en una base dada es el exponente a que se debe elevar la base para obtener el número.

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA:

- Solamente tienen logaritmos reales los números positivos. Los logaritmos de los números negativos no existen en el sistema de los números reales. El logaritmo de cero no está definido.
- Cuando un número y aumenta, su logaritmo x también aumenta. Cuando y tiende a infinito, también x tiende a infinito, por lo que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \log_b y = \infty$$

- Para $y < 1$, $\log_b y < 0$; para $y = 1$, $\log_b y = 0$; para $y > 1$, $\log_b y > 0$
- Cuando y tiende a cero, su logaritmo tiende hacia $-\infty$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_b y = -\infty$$

Un logaritmo es un exponente. Por tanto, expresando las leyes de los exponentes en forma logarítmica, obtendremos leyes de los logaritmos

- $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
- $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
- $\log_b M^n = n \log_b M$

$$4) \log_b M^{1/n} = \frac{1}{n} \log_b M$$

SISTEMAS DE LOGARITMOS:

Es deseable, tanto por razones teóricas como prácticas, que la base de un sistema de logaritmos sea positiva y mayor que la unidad. Hay en uso dos bases con estas características; una de ellas es el número 10 y la otra un número irracional representado por la letra e y cuyo valor es, aproximadamente igual a 2.71828...

El sistema de logaritmos de base 10 se llama *sistema ordinario, común, decimal o de Briggs*, y es el usado corrientemente para efectuar cálculos aritméticos. El sistema de logaritmos de base e llamado *sistema natural o Neperiano*, se le usa casi exclusivamente en el cálculo diferencial e integral y en matemáticas superiores.

Para los logaritmos naturales la base e se define por el siguiente límite:

$$e = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z = 2.71828....$$

La *función logaritmo natural*, denotada por ln, se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

para todo $x > 0$.

ECUACIONES EXPONENCIALES:

Una ecuación en que la incógnita aparece como exponente se llama *ecuación exponencial* i.e. $2^{x+1} = 8$.

Para resolver una ecuación exponencial, se despeja la expresión exponencial. El siguiente paso consiste en tomar logaritmos en ambos miembros en una base apropiada, ya que la función exponencial es inversa a la función logarítmica. Es importante recordar que la función exponencial es siempre positiva y que solamente está definida en el campo de los números reales.

ECUACIONES LOGARITMICAS:

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas de una o más incógnitas, se llama *ecuación logarítmica* i.e. $2 \ln y = 3 \ln(x - 1) + x$.

Para resolver una ecuación logarítmica con una sola incógnita, se le transforma primeramente en una ecuación que no contenga logaritmos. En estos problemas es importante comprobar todas las soluciones que se obtengan ya que los valores de la variable que corresponden a logaritmos de números negativos no se encuentran en el campo de los números reales.

PROGRESIONES:

Una *sucesión* es un conjunto ordenado de números que se deducen unos de otros mediante una regla definida. Los números de la sucesión reciben el nombre de *términos*.

Una *progresión aritmética* es una sucesión en la cual todos los términos, posteriores al primero, se deducen del anterior añadiendo un número constante que se llama *razón de la progresión*.

De acuerdo con la definición, una progresión aritmética puede escribirse en la forma

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots,$$

donde a_1 se llama *primer término* y d es la *razón*.

En general el enésimo término es

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Para obtener una expresión para la suma S_n , de los n primeros términos de la sucesión, es decir, para la suma

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots \\ + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad (1)$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de (1) en orden inverso, tenemos

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots \\ + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2), tenemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots \\ + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

de donde

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Una *progresión geométrica* es una sucesión de números tal que cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado *razón de la progresión*. i.e. 1, 2, 4, 8, 16, ...

De acuerdo con la definición, una progresión geométrica puede escribirse en la forma

$$a_1, a_1r, a_1r^2, \dots$$

donde a_1 es el primer término y r es la razón.

Si a_n representa el n -ésimo término de la sucesión, entonces $a_2 = a_1 r$, $a_3 = a_2 r^2$, y en general el n -ésimo término será

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Para obtener una expresión para la suma S_n , de los n primeros términos de la sucesión, es decir, para la suma

$$S_n = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por r , se obtiene

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad (2)$$

Restando miembro a miembro (2) y (1), resulta

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n,$$

o sea

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n),$$

de donde

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad r \neq 1.$$

I.6. COMBINACIONES Y PERMUTACIONES:

Cada uno de los diferentes arreglos que pueden hacerse con una parte de los elementos, o con todos los elementos, de un conjunto se llama una *permutación*.

Conviene observar que el orden es una característica de especial importancia en una permutación. Cuando se varía el orden de los elementos de una permutación, se dice que los elementos se *permutan*.

Por ejemplo, los diferentes arreglos o permutaciones que pueden hacerse con las tres letras a, b, c , tomándolas de dos en dos, son seis, a saber: ab, ac, ba, bc, ca, cb .

TEOREMA FUNDAMENTAL:

Si una acción puede efectuarse de una de p maneras diferentes, y si después de que esta acción ha sido efectuada de una de esas maneras, una segunda acción puede efectuarse de una de q maneras diferentes, entonces el número total de maneras diferentes en que las dos acciones pueden efectuarse siguiendo el orden mencionado es pq .

COROLARIO:

Si una acción puede efectuarse de p maneras diferentes, y una segunda acción puede efectuarse de q maneras diferentes, y una tercera acción puede efectuarse de r maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden efectuarse todas estas acciones en el orden mencionado es $pqr.....$

COROLARIO:

Si x acciones pueden efectuarse sucesivamente de p maneras diferentes cada una, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden efectuarse las x acciones sucesivamente es p^x .

NUMERO DE PERMUTACIONES:

Para representar el número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r se utiliza el símbolo $P(n,r)$, el cual resulta muy apropiado ya que el número de permutaciones es una función de n y r .

El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1), \quad r \leq n.$$

El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de n en n está dado por la fórmula:

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

Ejemplo: ¿Cuántos equipos de basket ball se pueden formar si hay siete jugadores disponibles para jugar cualquier posición?

El resultado es igual al número de permutaciones de 7 objetos tomados de 5 en 5, es decir

$$P(7,5) = 7*6*5*4*3 = 2,520$$

Ahora se considerará el caso de la determinación del número de permutaciones de n objetos que no son todos diferentes. Por ejemplo, determinar el número de permutaciones P de las cinco letras a, a, a, b, c , tomadas de 5 en 5. Cada una de estas P permutaciones contiene tres letras idénticas. Si estas tres letras fueran diferentes entre sí y diferentes de las restantes, entonces podrían permutarse entre ellas mismas en $3!$ formas diferentes por cada una de las P permutaciones, y las cinco letras diferentes podrían permutarse en $5!$ formas. Por tanto $P * 3! = 5!$, de donde $P = 5!/3! = 20$.

El caso general está dado por el teorema siguiente:

Si P representa el número de permutaciones distintas de n elementos tomados de n en n , en donde hay un primer tipo de p objetos iguales entre sí, q objetos iguales entre sí de un segundo tipo, r objetos iguales entre sí de un tercer tipo, y así sucesivamente, entonces

$$P = \frac{n!}{p!q!r! \dots}$$

Ahora se considerará el número de arreglos de n objetos diferentes alrededor de un círculo. Cada uno de tales arreglos se llama una *permutación circular* o *cíclica*.

Si se considera a los n objetos distintos ordenados en línea recta y se designa a uno de ellos con A , se obtienen arreglos diferentes según que A esté al principio o al final de la línea, conservando en cada caso su posición los $n-1$ objetos restantes. Sin embargo, esto no es así en una permutación circular, pues entonces la posición de A puede considerarse fija y los $n-1$ objetos restantes pueden arreglarse en $(n-1)!$ formas diferentes con respecto a A . De aquí el teorema siguiente:

El número de permutaciones circulares de n objetos diferentes es igual a $(n-1)!$

COMBINACIONES:

Cada uno de los diferentes grupos que pueden formarse todos o parte de los elementos de un conjunto, sin considerar el orden de los elementos tomados, se llama una *combinación*.

A diferencia de las permutaciones, en una combinación no se tiene en cuenta el orden. Así, mientras que ab y ba son dos permutaciones distintas, representan una sola combinación el grupo formado por las dos letras a y b .

Para representar el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r se utiliza el símbolo $C(n,r)$ que representa una función de n y r .

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, \quad r \leq n.$$

Es conveniente notar que en esta última relación tanto el numerador como el denominador constan de r factores.

COROLARIO:

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados todos a la vez es la unidad, es decir, $C(n, n) = 1$.

A partir de este teorema se encontrará otra relación que a veces resulta más conveniente. Si se multiplican el numerador y el denominador del segundo miembro por $(n-r)!$, se obtiene

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

y este resultado se enuncia así:

COROLARIO:

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r puede también obtenerse por la fórmula:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n.$$

Si se sustituye r por $n-r$, se obtiene,

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

de donde, por este corolario, se obtiene

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

resultado que puede enunciarse así:

COROLARIO:

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r es igual al número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de $n-r$ en $n-r$.

Este resultado podría haberse previsto ya que por cada combinación de r objetos seleccionados entre n objetos diferentes existe un grupo o combinación correspondiente de $n-r$ objetos que no son seleccionados. Tales combinaciones se llaman *complementarias*.

DIVISION EN SUBCONJUNTOS:

Por este último corolario, el número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r es igual al número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de $n-r$ en $n-r$. Entonces se observa que para cada combinación de r objetos, existe una combinación complementaria de $n-r$ objetos. Es decir, el número de maneras en que n objetos diferentes pueden dividirse en dos subconjuntos, uno con r elementos y otro con $n-r$ elementos, está dado por la fórmula

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Si se extiende esta división a cualquier número de subconjuntos. Consideremos la división de $p+q$ elementos diferentes en dos subconjuntos, uno de p elementos y el otro de q elementos, en donde $p \neq q$. Por la relación anterior el número de maneras distintas, N_2 , en que esto puede hacerse es

$$N_2 = \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

Si se considera la división de $p+q+r$ elementos diferentes en tres subconjuntos de p , q y r elementos respectivamente, en donde p , q , y r son números enteros y positivos diferentes entre sí. Primero se dividen los $p+q+r$ elementos en dos grupos, uno con p y el otro con $q+r$ elementos, esto puede hacerse de $(p+q+r)!/(p!(q+r)!)$ maneras distintas. Análogamente, cada grupo de $q+r$ elementos puede dividirse en dos subconjuntos, uno de q elementos y el otro de r elementos, en $(q+r)!/(q!r!)$ maneras diferentes. Entonces por el teorema fundamental, el número total de maneras distintas para dividir en tres subconjuntos es:

$$N_3 = \frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!} \cdot \frac{(q+r)!}{q!r!} = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

Siguiendo la misma lógica estas fórmulas pueden extenderse a cualquier número de subconjuntos. Este resultado se resume en el teorema siguiente:

Si p, q, r, \dots, t son m números enteros y positivos diferentes entre sí, el número de maneras distintas en que se pueden dividir $p+q+r+\dots+t$ elementos diferentes en m subconjuntos de p, q, r, \dots, t elementos respectivamente, es

$$N_m = \frac{(p+q+r+\dots+t)!}{p!q!r!\dots t!}$$

Ejemplo: Calcular el número de maneras distintas en que 15 libros diferentes pueden dividirse en tres grupos de 9, 4 y 2 libros respectivamente

Por el teorema, este número es $15!/9!4!2! = 75,075$.

Este teorema es válido solamente cuando se divide en subconjuntos *desiguales*. Si la división se hace en grupos iguales, este teorema debe ser modificado. Por ejemplo, si se desea dividir cuatro elementos diferentes en dos grupos iguales, cada uno con dos elementos. Si se usa este teorema, el número de maneras es $4!/2!2! = 6$. Sin embargo, esto incluye los dos grupos permutados entre sí en $2!$ maneras. Consideremos, el caso de dividir cuatro cartas marcadas con 1, 2, 3, 4 en dos grupos de 2 cartas cada uno. Así se obtiene

Gpo. 1	Gpo. 2	
1,2	3,4	(1)
1,3	2,4	(2)
1,4	2,3	(3)
2,3	1,4	(3)
2,4	1,3	(2)
3,4	1,2	(1)

Las divisiones idénticas, con diferente orden, están marcadas con el mismo número a la derecha. Por tanto, si se considera el orden en que se forman los grupos, el teorema es válido, pero, si no se toma en cuenta el orden de los grupos debe dividirse el resultado del teorema entre $2!$, es decir, el número de maneras será $6/2! = 3$.

El razonamiento anterior puede usarse para el caso general de la división en cualquier número de grupos iguales. Si $p=q=r=\dots=t=n$, se obtiene el número de maneras para dividir mn objetos diferentes en m grupos de n objetos cada uno, tomando en cuenta el orden en que se forman los grupos. Si el orden en que se forman los grupos no se toma en cuenta, el resultado debe dividirse entre $m!$. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente:

El número de maneras en que mn objetos diferentes pueden dividirse en m grupos de n objetos cada uno, en donde el orden de los objetos en cada grupo no se toma en consideración es.

$\frac{(mn)!}{(n!)^m}$, considerando el orden en que se forman los grupos;

$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$, sin considerar el orden en que se forman los grupos.

Ejemplo: Se tiene una baraja de 52 cartas diferentes.
Encontrar:

- a) el número de maneras en que pueden repartirse las cuatro manos de 13 cartas a cuatro jugadores de bridge.
 - b) el número de maneras en que las 52 cartas pueden dividirse en cuatro grupos de 13 cartas cada uno.
-
- a) En un juego de bridge cada distribución diferente de las manos entre los jugadores constituye una división diferente. Por tanto, en este caso, los grupos aparecen permutados, y por la primera parte del teorema anterior el número de maneras es $52!/(13!)^4$.
 - b) En este caso, no importa el orden de los grupos, y por la segunda parte del teorema anterior el número de maneras es $52!/(13!)^4 4!$

II. MATRICES:

II.1. DEFINICION:

Una *matriz A* es un arreglo de $m \times n$ números, i.e.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Un *elemento general* a_{ij} de A es el elemento de la i -ésima fila y la j -ésima columna. La dimensión de una matriz de m renglones y n columnas es $m \times n$, que se lee " m por n ".

Una matriz A $m \times n$ se escribe también como $A = [a_{ij}]$ y la dimensión puede indicarse escribiendo $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Si $n = m$ la matriz se llama *cuadrada*.

II.2. TIPOS DE MATRICES:

MATRIZ RENGLON:

Es aquella matriz que solo tiene un renglón, también se le llama *vector renglón*.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA:

Es aquella matriz que solo tiene una columna, también se le llama vector columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

MATRIZ NULA:

La llamada *matriz nula* 0 es una matriz de cualquier tamaño cuyos elementos son todos cero.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD:

La *matriz identidad* I es una matriz cuadrada cuyos elementos son ceros, excepto por los elementos que se encuentran a lo largo de la diagonal principal, los cuales son la unidad. El número de renglones o columnas de I puede especificarse como se desee.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR:

Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ es una matriz triangular superior, del mismo modo si los elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ es una matriz triangular inferior.

MATRIZ SIMETRICA:

Es una matriz cuadrada A para la cual $a_{ij} = a_{ji}$ para toda a_{ij} .

MATRIZ TRANSPUESTA:

La matriz transpuesta es la que se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de la matriz. Así para cualquier matriz $A = [a_{ij}]$, su transpuesta A^T es

$$A^T = [a_{ji}]$$

MATRIZ INVERSA:

La matriz inversa A^{-1} de una matriz A es aquella que cumple con la condición:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

II.3. OPERACIONES CON MATRICES:

Como las matrices no poseen un valor numérico, no pueden sumarse, multiplicarse, etc. como si fueran números individuales. Por lo tanto, se han desarrollado reglas análogas a las operaciones aritméticas, para realizar operaciones con matrices.

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices que tienen el mismo número de renglones y el mismo número de columnas. Entonces se dice que A y B son iguales, esto es, si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y toda j .

La operación de multiplicar una matriz por un escalar k se realiza multiplicando cada elemento de la matriz por k , esto es,

$$k A = [ka_{ij}]$$

Si A y B son dos matrices $m \times n$, entonces la suma de las matrices A y B es la matriz $C = [c_{ij}]$ cuyos elementos son la suma de los elementos de A y B ; esto es, $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. La matriz suma C es también una matriz $m \times n$.

Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces el producto de las matrices A y B es la matriz $m \times p$:

$$C = [c_{ij}], \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B. Así, los productos matriciales AB y BA pueden definirse ambos solamente cuando A y B son matrices cuadradas y en general, $AB \neq BA$.

La división de matrices no está definida.

Aunque las operaciones con matrices no poseen ciertas propiedades de las operaciones aritméticas, sí satisfacen las siguientes leyes:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \\ A(B + C) &= AB + AC \\ A(B C) &= (A B)C \\ A + 0 &= A \\ A - A &= 0 \\ 0 A = 0 &= A 0 \\ I A = A &= A I \end{aligned}$$

cuando los tamaños relativos de estas matrices son tales que las operaciones indicadas están definidas.

II.4. APLICACIONES DE LAS MATRICES:

Las matrices son la base para el análisis vectorial, el análisis de sistemas por medio del ordenamiento de datos, y la investigación de operaciones. Asimismo, las matrices son útiles en la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas.

III. ECUACIONES SIMULTANEAS:

III.1. VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES:

Una razón por la que los vectores representan un papel importante en la teoría de matrices es que puede hacerse una partición de cualquier matriz $m \times n$ en m vectores renglón o bien en n vectores columna y pueden analizarse importantes propiedades de la matriz en términos de estos vectores.

Considerando un conjunto de n vectores x_1, x_2, \dots, x_m del mismo tipo (es decir o son todos vectores renglón o son todos vectores columna), se dice que dicho conjunto es *linealmente independiente* si existen m números (c_1, c_2, \dots, c_m) , no todos cero tales que:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \neq 0$$

dicho sea de otra manera, el determinante formado por el conjunto de dichos vectores es diferente de cero.

III.2. RANGO DE UN SISTEMA:

El rango de un conjunto de vectores es el mayor número de vectores linealmente independientes que pueden seleccionarse de ese conjunto.

El rango de una matriz se define como el orden del mayor determinante diferente de cero que se puede obtener de los elementos de una matriz. Para ilustrar lo anterior se considera el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$\det A = 5 + 2 + 0 - 2 - 5 - 0 = 0$$

dado que $\det A$ es igual a cero, se evalúan los determinantes de orden menor (en este caso 2), eliminando un renglón y una columna.

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto, el rango de la matriz A es dos.

Una matriz se llama *no singular* si su rango es igual tanto al número de renglones como al número de columnas. De lo contrario, se dice que es *singular*. Así sólo las matrices cuadradas pueden ser no singulares. Una matriz cuadrada es no singular si y sólo si su determinante es distinto de cero.

III.3. METODO DE SOLUCION POR SUSTITUCION:

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones también puede escribir en forma matricial como

$$Ax = b$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales simultáneas es *consistente* si posee una solución e *inconsistente* si no la posee.

Las ecuaciones son consistentes si el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada A^b .

La matriz aumentada A^b se obtiene al aumentar la matriz A con la matriz columna b.

$$A^b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Si el rango de A^b es mayor que el rango de A en uno, entonces b es linealmente independiente de los vectores columna de A , esto es, b no puede ser igual a combinación lineal alguna Ax de estos vectores.

Si los rangos son iguales, existen dos posibilidades. Si el rango de A es n , entonces el sistema tiene exactamente una solución. Si el rango de A es menor que n , entonces existirá un número infinito de soluciones.

Finalmente si A y A^b tienen un rango común r tal que $r < n$, entonces $(n - r)$ de las ecuaciones deben ser combinaciones lineales de otras, de manera que pueden eliminarse estas $(n - r)$ ecuaciones redundantes sin afectar la(s) solución(es).

El método de reducción consiste en los siguientes pasos:

1. Se despeja x_1 en la primera ecuación, en términos de las otras $(n-1)$ incógnitas.
2. Se sustituye a x_1 , que se obtuvo en el paso 1, en las $(n-1)$ ecuaciones restantes.
3. Se despeja a x_2 de la primera de las $(n-1)$ ecuaciones restantes.
4. Se sustituye a x_2 en las $(n-2)$ ecuaciones restantes.
5. Este proceso se repite hasta obtener una sola ecuación con una variable x_n .
6. Se resuelve para x_n .
7. Se sustituye x_n en la ecuación precedente que se obtuvo en términos de x_n y x_{n-1} .
8. Se resuelve para x_{n-1} .
9. El proceso se repite para las n incógnitas.

III.4. REGLA DE CRAMER:

La Regla de Cramer es un método para resolver ecuaciones simultáneas usando determinantes, con el que se puede obtener la solución de la ecuación matricial:

$$Ax = b$$

Siempre que $\det A \neq 0$.

Sea A_i (para $i = 1, 2, \dots, n$) la matriz que se obtiene de A al sustituir los elementos de su columna i -ésima con la columna b , entonces $Ax = b$ tiene solución única de la forma:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

III.5. METODO DE GAUSS-JORDAN:

El método de Gauss-Jordan también es empleado para resolver ecuaciones simultáneas, y se desarrolla como sigue:

1. Eliminar x_1 de todas las ecuaciones excepto la primera, sumando un múltiplo adecuado de esta ecuación a cada una de las otras. Por conveniencia, esta ecuación se dividirá entre el coeficiente de x_1 , de manera que el valor final de este coeficiente sea 1.
2. Eliminar x_2 de todas las ecuaciones, excepto la segunda.
3. Estos pasos se repiten para las n variables, hasta que queden las n variables en sólo una de las n ecuaciones y cada una de las n ecuaciones contenga exactamente una de estas variables. La solución puede leerse directamente de las ecuaciones.

Se ilustra este método con el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 & (1) \\3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 & (2) \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 & (3)\end{aligned}$$

El método comienza por eliminar x_1 de las ecuaciones excepto la ecuación (1). x_1 se elimina de (2) multiplicando (1) por -3 y sumándola a (2). Del mismo modo x_1 se elimina de (3) multiplicando (1) por -2 y sumándola a (3):

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 0 & (1') \\ -13x_2 + 4x_3 & = & 2 & (2') \\ -4x_2 + 3x_3 & = & 13 & (3') \end{array}$$

Para eliminar x_2 de (2') primero se divide (2') entre -13 (coeficiente de x_2) para que el coeficiente de ésta sea la unidad. Para eliminar x_2 de (1') se multiplica (2') por -3 y se le suma a (1'), del mismo modo x_2 se elimina de (3') multiplicando (2') por 4 y sumándola a (3'):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 1/13x_3 & = & 6/13 & (1'') \\ x_2 & - & 4/13x_3 & = & -2/13 & (2'') \\ & & 23/13x_3 & = & 161/13 & (3'') \end{array}$$

Para eliminar x_3 de (3'') se multiplica (3'') por 13/23 (recíproco del coeficiente de x_3) para que el coeficiente de ésta sea la unidad. Para eliminar x_3 de (1'') se multiplica (3'') por 1/13 y se le suma a (1''), del mismo modo x_3 se elimina de (2'') multiplicando (3'') por 4/13 y sumándola a (2''):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & & = & 1 & (1''') \\ & x_2 & & = & 2 & (2''') \\ & & x_3 & = & 7 & (3''') \end{array}$$

Así, la solución (única) es $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 7)$.

Si se aplica el método de Gauss-Jordan cuando $n \neq m$ y, o bien, A es singular, existen tres casos posibles a considerar:

1. Si el rango de A^b es mayor en 1 al rango de A , entonces no existe solución. En este caso, el método de Gauss-Jordan obtiene una ecuación cuyo primer miembro desaparece (es decir, todos los coeficientes de las variables son cero), mientras que el segundo miembro es distinto de cero. Esta es la señal que indica que no existe solución.

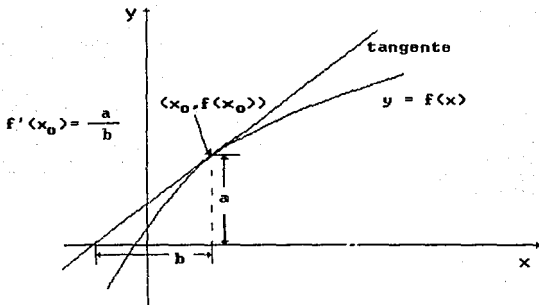
2. Cuando el rango de A^D y el de A son iguales a n , entonces existe una solución única. Esto implica que $m \geq n$. Si $m = n$ no existe dificultad alguna. Si $m > n$, existen $(m - n)$ ecuaciones redundantes. En este caso todas las ecuaciones se eliminarían durante el proceso de ejecución del método de Gauss-Jordan, por lo tanto se identificaría la solución única igual que antes.

3. Si los dos rangos son iguales a r y $r < n$, de modo que el sistema de ecuaciones posee un número infinito de soluciones. En este caso, en la compleción del método de Gauss-Jordan, cada una de las r variables permanecería en sólo una de las ecuaciones, y cada una de las r ecuaciones (se anulan todas las ecuaciones adicionales) contendría exactamente una de estas variables. Sin embargo, cada una de las otras $(n-r)$ variables habría desaparecido, o bien permanecería en algunas de las ecuaciones. Por lo tanto cualquier solución obtenida al asignar valores arbitrarios a las $(n-r)$ variables e identificar a continuación los valores respectivos de las r variables en la forma usual, sería una solución para el sistema de ecuaciones. La transferencia de las $(n-r)$ variables al segundo miembro de las ecuaciones, identificaría la solución para las r variables, como una función de estas variables "adicionales".

IV. CALCULO INTEGRAL Y DIFERENCIAL:

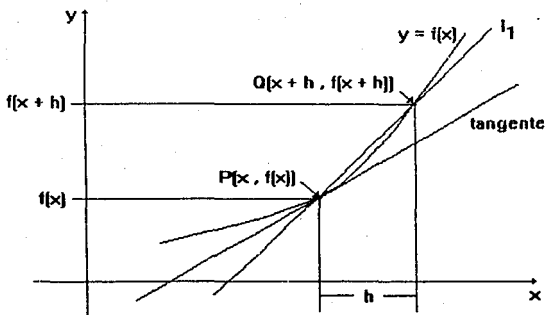
IV.1. DERIVACION:

Consideremos una función $x \rightarrow f(x)$. La derivada de f en x_0 es la pendiente de la línea tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Esta esencialmente, es la descripción dada por Leibnitz en su primer trabajo publicado sobre cálculo (1684).



En general podemos decir que la derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x en un punto x se define por el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x se puede representar por cualquiera de los símbolos:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad y', \quad f'(x)$$

Demostrar que:

a) $\frac{d}{dx} c = 0$, siendo c una constante

b) $\frac{d}{dx} x = 1$

c) $\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$

como $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Solución:

$$a) \frac{d}{dx} C = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0$$

$$b) \frac{d}{dx} x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} c) \frac{d}{dx} x^n &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \dots + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, en ocasiones resulta muy laborioso aplicar la definición de derivada para cualquier función por las complicaciones que existen al resolver el límite, por ello, cualquier libro de cálculo contiene tablas con las derivadas más comunes.

IV.2 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS:

MOVIMIENTOS RECTILÍNEO Y CIRCULAR:

El movimiento de una partícula P a lo largo de una línea recta queda definido por $s = f(t)$, siendo $t \geq 0$, el tiempo y s la distancia de P a un punto fijo O de la trayectoria.

La velocidad de P , en un instante t , es

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La aceleración de P , en un instante t , es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Análogamente el movimiento de una partícula P a lo largo de una circunferencia queda completamente definido por $\theta = f(t)$, siendo θ el ángulo medido en radianes barrido en el tiempo t por la recta que une P con el centro de la circunferencia.

La velocidad angular de P , en un instante t , es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La aceleración angular de P , en un instante t , es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

CANTIDADES MARGINALES EN ECONOMIA:

Desde sus comienzos, el cálculo surgió como instrumento de las ciencias naturales. La penetración de las matemáticas en las ciencias sociales es un fenómeno más reciente. A continuación se dan algunas muestras de los usos del cálculo en microeconomía, la rama de la economía que estudia las decisiones económicas de unidades económicas individuales. En particular, nos concentramos en la producción y distribución de un solo bien por una sola firma.

COSTO, COSTO MARGINAL, COSTO MEDIO:

Consideremos una empresa que produce cierto producto. El costo de producir x unidades del producto será designado por $C(x)$. Aquí x puede designar el número de piezas producidas, o el número de miles de piezas, o el número de libras, etc. El costo $C(x)$ se mide en unidades monetarias.

Los economistas describen el costo marginal como "el costo de producir una pieza más o una unidad más". Esta es una buena descripción si las unidades son suficientemente pequeñas. Entonces la pendiente de la tangente a $C(x)$ cambiará muy poco si x aumenta en 1, y la pendiente $C'(x)$ será casi el cociente diferencia.

Este mismo concepto se aplica para ingreso marginal, utilidad marginal, etc.

La función costo $C(x)$ puede tener diferentes formas. En general en el punto de inflexión mínimo x corresponde al costo marginal mínimo.

La cantidad

$$\frac{C(x)}{x}$$

se llama *costo medio* de producir x unidades. Puesto que cierto costo es inevitable aun antes de ser producida una sola unidad (Costos Fijos) $C(0) > 0$ Por consiguiente, $(1/x)C(x)$ tiene el límite $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. El costo medio marginal, es decir, la derivada de $(1/x)C(x)$, es:

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(C'(x) - \frac{C(x)}{x} \right)$$

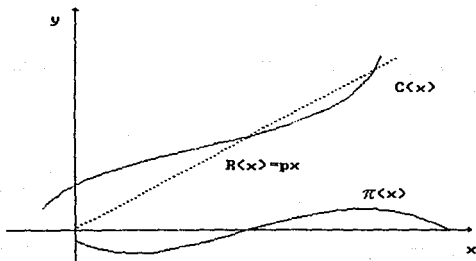
Esta derivada debe ser cero en el valor de x correspondiente al costo medio mínimo. Pero cuando $(C(x)/x)'$ es 0,

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Así, cuando el costo medio es mínimo, es igual al costo marginal.

MAXIMIZACION DE LA UTILIDAD BAJO COMPETENCIA PERFECTA:

Bajo competencia perfecta se supone que la producción se vende a un precio fijo de mercado p . Si la producción es x piezas, el ingreso total $R(x) = px$.



La utilidad $\pi(x)$ es

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

La utilidad marginal es la derivada

$$\pi'(x) = p - C'(x)$$

Esta derivada debe ser 0 en el valor de x para el cual la utilidad es máxima. Por consiguiente $p = C'(x)$.

En condiciones de competencia perfecta, un fabricante maximiza sus utilidades produciendo aquella cantidad del producto para la cual el costo marginal es igual al precio.

IV.3 INTEGRACION:

INTEGRAL INDEFINIDA:

Una función $F(x)$ cuya derivada, en cierto intervalo del eje x , $F'(x) = f(x)$, se dice que $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida de $f(x)$.

La primitiva o integral indefinida de la función $f(x)$ se representa por

$$\int f(x) dx$$

por ejemplo:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

donde C es una constante cualquiera, llamada *constante de integración*.

Como la integral indefinida de una función f es una antiderivada, las *fórmulas fundamentales de integración* se deducen de forma inmediata de las fórmulas de derivación, por ejemplo:

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

ya que

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

Es evidente que integrales más complejas como

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

requieren de otro(s) método(s) para su resolución.

Dichos métodos son:

1. INTEGRACION POR PARTES: Consiste en separar el integrando en dos partes, de la forma:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

una de ellas se iguala a u y la otra, junto con dx , a dv .

2. USAR IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS: Como,

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

para sustituirlas en el integrando, por ejemplo:

$$\int \text{sen}^2 x dx = \int \frac{1}{2} \{1 - \cos 2x\} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{sen } 2x + C$$

3. HACER DIVERSOS CAMBIOS DE VARIABLE: Un integrando, que sea de una de las formas

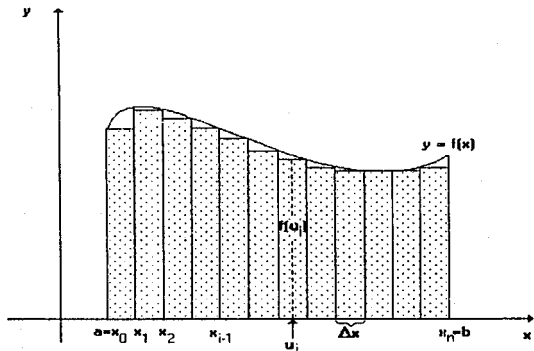
$$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}, \sqrt{a^2 - b^2 u^2} \text{ ó } \sqrt{b^2 u^2 - a^2}$$

se puede transformar, si no contiene otro factor irracional, en otro formado a base de funciones trigonométricas de una nueva variable, efectuando los cambios siguientes:

Para	Hacer el cambio	Para obtener
$\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \text{sen } z$	$a\sqrt{1 - \text{sen}^2 z} = a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \tan z$	$a\sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z$
$\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} \sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a \tan z$

INTEGRAL DEFINIDA:

Consideremos una función $x \rightarrow f(x)$. La integral definida es la sumatoria de un número infinito de rectángulos que genera el área bajo la curva $f(x)$ y las coordenadas $(a,0)$ y $(b,0)$.



En general podemos decir que la integral definida de una función $y=f(x)$ desde a hasta b está dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(u_i) \Delta x$$

siempre que el límite exista.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $x \in [a, b]$:

- $$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \text{ siendo } C \text{ una constante.}$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \text{ cuando } a < c < b.$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es la primitiva o integral definida de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

A este teorema también se le conoce como la *regla de Barrow*.

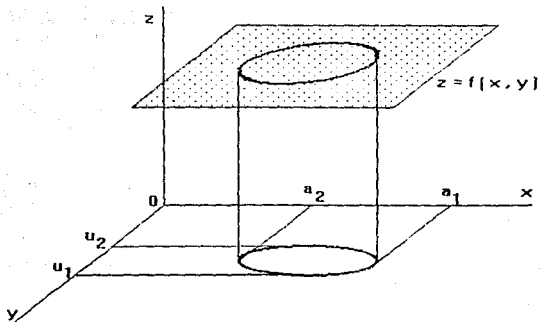
IV.4. INTEGRALES MULTIPLES:

Sea una función $f(x,y)$ una función continua y uniforme de x y y . La *integral doble definida*

$$\int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x,y) dy dx$$

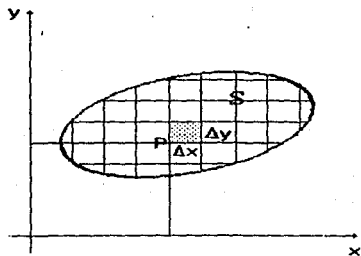
es la porción del volumen de un cilindro recto limitado por el plano XOY y la superficie $z = f(x,y)$ siendo la base del cilindro el recinto en el plano XOY limitado por las curvas:

$$y = u_1, \quad y = u_2, \quad x = a_1, \quad x = a_2$$



La integral doble definida no necesariamente es un volumen. La interpretación física del resultado depende de la naturaleza de las magnitudes representadas por x , y , z . Si x , y , z son las coordenadas de un punto en el espacio (en el primer octante), entonces el resultado es efectivamente un volumen.

Sin embargo, si $f(x,y) = 1$, la integral doble adquiere la forma



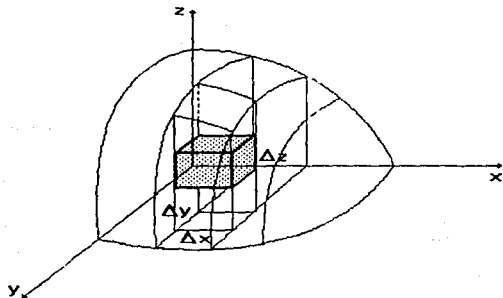
que en unidades de volumen, es correspondiente a un cilindro de altura la unidad, y que en unidades de superficie, representa el área de la región S .

$$A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_S f(x, y) dx dy$$

Dicho de otras palabras el área es igual, en valor absoluto, al volumen de un cilindro recto de altura igual a la unidad levantada sobre la base S .

En muchos caso, si se dan las ecuaciones de las superficies que limitan un sólido, el volumen de éste puede calcularse por medio de tres integraciones sucesivas. Este procedimiento es la extensión del método inmediato anterior.

Considerando la función $f(x, y, z) = 1$, la integral triple adquiere la forma



que corresponde al volumen encerrado en la región R .

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum \sum \sum \Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

En una integración sucesiva que implica n variables, el orden de integración es como sigue: El orden de los extremos que se escriben en los signos integrales, leyendo de derecha a izquierda, es el mismo que el orden de las variables correspondientes cuyas diferenciales se leen de izquierda a derecha.

IV.5. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES:

Como se ha visto hasta ahora, las integrales definidas sirven para calcular áreas y volúmenes.

En física las integrales múltiples sirven para calcular centroides, centros de gravedad, momentos de inercia, etc. En la mayoría de los casos es conveniente usar coordenadas polares, esféricas o cilíndricas.

En probabilidad son de gran utilidad para calcular áreas bajo curvas de distribuciones probabilísticas.

IV.6 SERIES:

Una *sucesión* es un conjunto de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación. Cada número de la sucesión se llama *término*. Si el número de términos es finito, la sucesión se denomina *sucesión finita* y en caso contrario, *sucesión infinita*. El número a_n se llama el *enésimo término* de la sucesión.

Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ es igual a una sucesión $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo entero positivo i . Las sucesiones infinitas frecuentemente se definen mediante una fórmula para el enésimo término, i.e.

$$a_n = (0.1)^n$$

A veces la sucesión se denota por $\{a_n\}$. Algunas sucesiones infinitas $\{a_n\}$ tienen la propiedad de que al crecer n , a_n se acerca a cierto número real L , esto es, que $|a_n - L|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Como ejemplo la sucesión $\{a_n\}$:

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Los términos de la sucesión se aproximan a 2 a medida que n crece, por lo que podemos escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2$$

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L , lo cual se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

si para cada $\varepsilon > 0$ \exists un número positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe en el sentido de la definición anterior, entonces la sucesión $\{a_n\}$ no tiene límite.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces una expresión de la forma:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

se llama una *serie infinita* o simplemente una *serie*. Por costumbre se usa esta notación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ó} \quad \sum a_n$$

entendiendo que la variable en la última suma es n . El número a_n se llama el *enésimo término*. Como solo se pueden sumar algebraicamente sumas finitas, hace falta definir lo que significa una suma infinita, para ello, consideremos para cada entero positivo n la *enésima suma parcial* S_n de la serie, donde

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

La sucesión infinita

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

se le llama la *sucesión de sumas parciales* asociada a la serie infinita $\sum a_n$.

Una serie infinita

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

cuya sucesión de sumas parciales es

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

es convergente si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ para algún número real S .

la serie es divergente si éste límite no existe.

Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ es una serie convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

entonces S se llama la suma de la serie y

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Si la serie diverge, no tiene suma.

Ciertos tipos de series infinitas surgen a menudo en las aplicaciones. Un ejemplo es la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

donde a y r son números reales y $a \neq 0$.

La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

con $a \neq 0$

converge y su suma es $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

diverge si $|r| \geq 1$

Si una serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. El inverso es falso, es decir, *no es necesariamente cierto* que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum a_n$ converge.

Si una serie infinita $\sum a_n$ es convergente,

entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|S_k - S_l| < \varepsilon \text{ siempre que } k, l > N$$

Demuestre que

la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ es divergente.

Aplicando el teorema anterior, tenemos que $n > 1$, entonces

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $k = 2n$ y $l = n$

tendríamos que $|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{2}$, siempre que n sea suficientemente grande. Como esto no se cumple, se concluye que la serie es divergente.

Esta serie es una serie armónica y es un ejemplo de que una serie divergente $\sum a_n$ para la cual $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. En consecuencia, *no es suficiente* probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ para demostrar la convergencia de una serie infinita.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series infinitas tales que $a_i = b_i$ para todo $i > k$ donde k es un entero positivo, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Este teorema implica que si cambiamos un número finito de términos de una serie infinita, esto no afecta su convergencia o divergencia (aunque sí cambia la suma de una serie convergente). En particular, si reemplazamos los primeros k términos de $\sum a_n$ con cero esto no afecta la convergencia. Se concluye que la serie

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n + \dots$$

converge o diverge dependiendo de si $\sum a_n$ converge o diverge. Se dice que la serie $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$ se obtiene a partir de $\sum a_n$ omitiendo los primeros k términos.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series convergentes y sus sumas son A y B respectivamente, entonces

$\sum (a_n + b_n)$ converge y su suma es $A + B$

Si c es un número real, entonces $\sum ca_n$ converge y su suma es cA

$\sum (a_n - b_n)$ converge y su suma es $A - B$

Si $\sum a_n$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum (a_n + b_n)$ es divergente.

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS:

Generalmente, es difícil aplicar la definición de convergencia o divergencia a una serie infinita $\sum a_n$, ya que en la mayoría de los casos no es posible hallar una fórmula simple para S_n . Sin embargo, existen criterios que ayudan a averiguar la convergencia o divergencia de una serie analizando su n ésimo término a_n . Estos criterios proporcionan información acerca de si la serie converge o diverge, pero no acerca de la suma.

Una serie infinita de números positivos es aquella serie infinita para la cual cada término es positivo. Si (S_n) es la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos, entonces

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots$$

y por lo tanto (S_n) es monótona.

Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n , entonces la serie converge y su suma S es tal que $S \leq M$

Si no existe M con esta propiedad entonces la serie diverge.

Podemos investigar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos mediante una integral impropia como sigue:

CRITERIO DE LA INTEGRAL

Si una función f es continua y decreciente y toma valores positivos para $x \geq 1$, entonces la serie infinita

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

converge si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge

diverge si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge

El criterio de la integral puede usarse asimismo si la función f satisface las condiciones de para todo $x \geq m$ donde m es un entero positivo.

En este caso se reemplaza la integral con $\int_m^{\infty} f(x)dx$. Esto corresponde a omitir los primeros $m - 1$ términos de la serie.

Si $f(x) = 1/x^p$ donde $p > 0$, entonces la serie $\sum f(n)$ es de la forma

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

y la llamamos p -serie. Esta serie es útil para establecer criterios de comparación. El siguiente teorema proporciona información sobre la convergencia o divergencia de esta serie.

La p -serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

converge si $p > 1$

diverge si $p \leq 1$

CRITERIO DE COMPARACION

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos.

Si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n ,
entonces $\sum a_n$ converge.

Si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n ,
entonces $\sum a_n$ diverge.

Se dice que la serie $\sum d_n$ domina a la serie $\sum c_n$ si $0 < c_n \leq d_n$ para todo entero positivo n . En estos términos una serie de términos positivos dominada por una serie convergente, es también convergente y si una serie que domina a una serie divergente es a su vez divergente.

CRITERIO DE COMPARACION MEDIANTE EL LIMITE DEL COCIENTE

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos y si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

entonces ambas series convergen o ambas divergen.

SERIES ALTERNANTES:

Una serie infinita cuyos términos son alternativamente positivos y negativos se llama una serie alternante. Se expresan de la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

o de la forma

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

donde cada $a_i > 0$. El teorema siguiente nos proporciona el resultado más importante sobre estas series

CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA SERIES ALTERNANTES

Si $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ para todo entero positivo k y si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

entonces la serie alternante $\sum (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.

Si una serie infinita converge, entonces se puede usar la n -ésima suma parcial S_n para estimar la suma S de la serie.

En la mayoría de los casos es difícil determinar la precisión de la aproximación. Sin embargo, el siguiente teorema proporciona una manera simple para estimar el error si la serie es alternante.

Si $\sum (-1)^{n-1} a_n$ es una serie alternante tal que $a_k > a_{k+1} > 0$

para todo entero positivo k y si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

el valor absoluto del error que resulta al estimar la suma S

mediante la n -ésima suma parcial S_n , es menor que a_{n+1} .

CONVERGENCIA ABSOLUTA:

Una serie infinita $\sum a_n$ es absolutamente convergente, si la serie que se obtiene al tomar el valor absoluto de cada término

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

es convergente.

El teorema siguiente nos dice que la convergencia absoluta implica convergencia.

Si una serie infinita $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

Las series que son convergentes pero no absolutamente convergentes reciben un nombre especial.

Una serie infinita $\sum a_n$ es condicionalmente convergente si $\sum a_n$ es convergente pero $\sum |a_n|$ es divergente.

Como resumen las series infinitas arbitrarias se pueden clasificar de una y solo una de las siguientes maneras:

- a) absolutamente convergente,
- b) condicionalmente convergente y
- c) divergente.

Para las series de términos positivos solamente se precisa investigar su convergencia o divergencia.

Uno de los criterios más importantes para analizar la convergencia absoluta es el siguiente.

CRITERIO DE LA RAZON

Sea $\sum a_n$ una serie infinita de términos diferentes de cero.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, la serie converge absolutamente.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, la serie diverge.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces la serie puede ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

El criterio de la razón no da información para el caso de que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$. Ya que este límite es 1 tanto para la serie absolutamente convergente $\sum (-1)^n/n^2$, como para la serie condicionalmente convergente $\sum (-1)^n/n$, como para la serie divergente $\sum 1/n$. En consecuencia, si el límite es 1, entonces es necesario emplear otro criterio.

El siguiente criterio es muy útil en el caso de que los términos a_n contengan potencias enésimas. Sin embargo no es aplicable cuando a_n contiene factoriales.

CRITERIO DE LA RAIZ

Sea $\sum a_n$ una serie infinita.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, la serie converge absolutamente.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, la serie diverge.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces la serie puede ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

La utilidad de los criterios de la razón y de la raíz depende de que tan fácil sea calcular los límites. Frecuentemente es necesario utilizar la regla de l'Hopital.

SERIES DE POTENCIAS:

Para las aplicaciones son más importantes las series cuyos términos contienen variables. En particular, si x es una variable, entonces una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

se le llama una *serie de potencias en x* . Si reemplazamos a x con un número obtenemos una serie de términos constantes cuya convergencia o divergencia puede ser analizada. Para simplificar el término general de la serie de potencias supondremos que $x^0 = 1$ aún en el caso en que $x = 0$. El objetivo principal de esta sección es hallar todos los valores de x para los cuales una serie de potencias converge. Evidentemente toda serie de potencias converge para $x = 0$. Para encontrar otros números que nos den una serie convergente frecuentemente se utiliza el criterio de la razón.

- a) Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para un número $c \neq 0$, entonces es absolutamente convergente siempre que $|x| < |c|$.
- b) Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ diverge para un número $d \neq 0$, entonces diverge siempre que $|x| > |d|$.

TEOREMA:

Si $\sum a_n x^n$ es una serie de potencias, entonces se cumple exactamente una de las tres proposiciones siguientes:

- a) La serie converge únicamente para $x = 0$.
- b) La serie es absolutamente convergente para todo x .
- c) Existe un número positivo r tal que la serie es absolutamente convergente si $|x| < r$ y divergente si $|x| > r$.

Si c es un número real entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots + a_n (x-c)^n + \dots$$

se llama una serie de potencias en $x - c$. Para simplificar el enésimo término se supondrá que $(x - c)^0 = 1$, aún en el caso $x=c$. De acuerdo con el teorema inmediato anterior y reemplazando x con $x - c$, se cumple exactamente una de las proposiciones siguientes:

- a) La serie converge únicamente si $x - c = 0$.
 b) La serie es absolutamente convergente para todo x .
 c) Existe un número positivo r tal que la serie converge absolutamente si $|x - c| < r$ y diverge si $|x - c| > r$.

Para c), la serie $\sum a_n(x - c)^n$ es absolutamente convergente si

$$-r < x - c < r \quad \text{ó} \quad c - r < x < c + r$$

es decir, si $x \in (c - r, c + r)$.

SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN:

Suponer que f se representa por una serie de potencias en $x - c$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \dots$$

donde el dominio de f es un intervalo abierto que contiene a c . Se pueden hallar representaciones en serie para $f'(x)$, $f''(x)$, ..., derivando los términos de la serie. Así,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} \\ &= 2a_2 + (3 \cdot 2)a_3(x-c) + (4 \cdot 3)a_4(x-c)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-c)^{n-3} \\ &= (3 \cdot 2)a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)a_4(x-c) + \dots \end{aligned}$$

y, para todo entero positivo k ,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}$$

Más aún, cada una de las series que se obtienen derivando tiene el mismo radio de convergencia que la serie original. Sustituyendo c en lugar de x en cada una de estas representaciones en serie obtenemos

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(c) = 2a_2, \quad f'''(c) = (3 * 2)a_3$$

y, para cada entero positivo n ,

$$f^{(n)}(c) = n! a_n, \quad \text{ó} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Lo que se resume en el siguiente teorema:

Si f es una función tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a c , entonces

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

La serie en la conclusión de este teorema se llama la *serie de Taylor para $f(x)$ en c* . El caso especial $c = 0$ es muy importante y se enuncia en el siguiente corolario:

Si f es una función tal que $f(x) = \sum a_n x^n$ para todo x en un

intervalo abierto $(-r, r)$ entonces

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

La serie que aparece en este corolario se llama la *serie de Maclaurin para $f(x)$* .

Este teorema nos dice que si una función f está representada por una serie de potencias en $x - c$, entonces esta serie tiene que ser la serie de Taylor.

IV.7 ECUACIONES DIFERENCIALES:

Una ecuación diferencial es una ecuación en la cual intervienen derivadas o diferenciables. Si solamente aparecen las derivadas de una función de una variable, entonces la ecuación diferencial se llama *ordinaria*. Una *ecuación diferencial parcial* contiene derivadas parciales.

Una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde F es una función de $n + 2$ variables, y es una función de x y $y^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de y con respecto a x , se llama una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* .

Si una función f tiene la propiedad de que al sustituir $f(x)$ en lugar de y en una ecuación diferencial, la expresión resultante es una identidad para todo x en cierto intervalo, entonces $f(x)$ se llama una *solución* de la ecuación diferencial.

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS:

Considerar la ecuación

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

donde P y Q son funciones de x y y . Esta ecuación frecuentemente se expresa en términos de diferenciales como sigue:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

A continuación la definición de las *ecuaciones diferenciales exactas*:

Si P y Q tienen primeras derivadas continuas, entonces

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ó} \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

El resultado siguiente es el teorema fundamental de existencia para las soluciones de las ecuaciones diferenciales exactas.

Una ecuación diferencial exacta $P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$ tiene una solución de la forma $F(x, y) = C$ donde C es una constante y F es una función de x y y tal que $F_x = P$ y $F_y = Q$. Más aún, para cualquier F con estas propiedades y cualquier constante C , $F(x, y) = C$ es una solución.

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS:

Se dice que una función f de dos variables es *homogénea de grado n* si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todo $t > 0$ tal que (tx, ty) está en el dominio de f , i.e.,

$$f(x, y) = 2x^4 - x^2y^2 + 5xy^3$$

entonces f es homogénea de grado 4, ya que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^4 - (tx)^2(ty)^2 + 5(tx)(ty)^3 \\ &= t^4(2x^4 - x^2y^2 + 5xy^3) = t^4 f(x, y) \end{aligned}$$

Análogamente, si

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{x/y}$$

entonces f es homogénea de grado -2, ya que

$$f(tx, ty) = \frac{1}{t^2x^2 + t^2y^2} e^{tx/ty} = t^{-2} f(x, y)$$

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación que se puede escribir en la forma

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado. Las ecuaciones de este tipo se pueden convertir en ecuaciones separables haciendo la sustitución

$$y = xv, \text{ donde } v = g(x)$$

para alguna función g . Derivando esta ecuación obtenemos

$$dy = v dx + x dv$$

Sustituyendo y por xv

$$P(x, xv) dx + Q(x, xv) (v dx + x dv) = 0$$

Si P y Q son funciones homogéneas de grado n , entonces

$$P(x, xv) = x^n P(1, v) \quad \text{y} \quad Q(x, xv) = x^n Q(1, v).$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial anterior y dividiendo ambos lados por x^n , obtenemos

$$P(1, u) dx + Q(1, u)[u dx + x du] = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma separable

$$\frac{1}{x} dx + \frac{Q(1, u)}{P(1, u) + uQ(1, u)} du = 0,$$

siempre y cuando los denominadores sean diferentes de cero.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN:

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas. Si $Q(x) = 0$ para todo x , entonces la ecuación es separable y

$$\frac{1}{y} y' = -P(x)$$

siempre que $y \neq 0$. Integrando obtenemos

$$\ln |y| = -\int P(x) dx + \ln |C|.$$

Expresando la constante de integración en la forma $\ln |C|$ para poder escribir la última ecuación

$$\ln |y| - \ln |C| = -\int P(x) dx$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = -\int P(x) dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x) dx}$$

$$y e^{\int P(x) dx} = C.$$

Además

$$\begin{aligned} D_x [y e^{\int P(x) dx}] &= y' e^{\int P(x) dx} + P(x) y e^{\int P(x) dx} \\ &= e^{\int P(x) dx} [y' + P(x) y] \end{aligned}$$

multiplicandola ecuación original por $e^{\int P(x) dx}$

$$D_x [y e^{\int P(x) dx}] = Q(x) e^{\int P(x) dx}$$

Esto da la solución (implícita) siguiente:

$$y e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + D.$$

Despejando y de esta ecuación se obtiene la solución explícita.

La expresión

$$e^{\int P(x) dx}$$

se llama un *factor de integración*.

BIBLIOGRAFIA

Ayres, Frank, *CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL*, Mc.Graw-Hill, México, 1988.

Bers, Lipman, *CALCULO*, Interamericana, México, 1983.

Granville, William A. *CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL*, Limusa, México, 1987.

Hsu, Hwei P. *ANALISIS VECTORIAL*, Fondo Educativo Interamericano, S.A. New York, 1973.

Lehmann, Charles H. *ALGEBRA*, Limusa, México, 1989.

Spiegel, Murray R. *ALGEBRA SUPERIOR*, Mc.Graw-Hill, México, 1981.

CAPITULO II

METODOS ESTOCASTICOS

I. INTRODUCCION:

I.1. LA ESTADISTICA:

La estadística es una rama de las matemáticas, que comprende la rama descriptiva, la teoría de la probabilidad y el muestreo.

La *estadística descriptiva* consiste en organizar, resumir y simplificar, en términos generales, información que a menudo es bastante compleja. El objeto es hacer que las cosas se comprendan más fácilmente, que sea más sencillo referirse a ellas, analizarlas y mantenerse informado acerca de las mismas.

La *probabilidad* analiza las situaciones en que interviene el azar.

La *inferencia* constituye una tercera rama de la estadística. Consiste en el análisis e interpretación de una muestra de datos. La idea básica en el muestreo es medir una proporción pequeña, pero típica de alguna "población", y posteriormente utilizar dicha información para inferir (conjeturar inteligentemente) qué características tiene la población total.

I.2. POBLACION Y MUESTRA:

La *población* es el conjunto total de valores posibles que toma una característica de un conjunto de elementos.

Una *muestra* está constituida por una parte de los elementos que componen el universo.

I.3. OBTENCION DE DATOS:

Los datos estadísticos se obtienen mediante un proceso que comprende la observación o medición de conceptos. Tales conceptos reciben el nombre de *variables*, ya que producen valores que tienden a mostrar cierto grado de variabilidad, al efectuarse mediciones sucesivas.

I.4. VARIABLES DISCRETAS Y CONTINUAS:

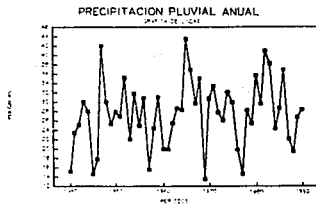
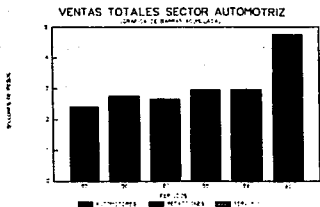
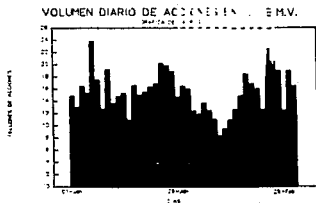
Las variables discretas adquieren valores enteros. Los datos discretos son resultado de contar un número de conceptos y objetos.

Las variables continuas pueden asumir cualquier valor en un intervalo continuo. Los datos que se obtienen acerca de estas variables reciben el nombre de datos continuos.

I.5. GRAFICAS:

Uno de los principales instrumentos empleados ampliamente en estadística es el uso de modelos, los cuales constituyen versiones simplificadas de algunos problemas o situaciones de la vida real.

La estadística descriptiva requiere del uso de modelos numéricos y gráficos para resumir y presentar datos. A continuación se presentan algunas gráficas a manera de ilustración:



II . PROBABILIDAD :

II.1. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL:

Las medidas de tendencia central se utilizan para indicar un valor que tiende a tipificar o a ser el más representativo de un conjunto de números. Las tres medidas que más comúnmente se emplean son la *media*, la *mediana* y la *moda*.

MEDIA:

La media aritmética, comúnmente llamada *promedio* se calcula al sumar los valores de un conjunto y dividir el producto de esta suma entre el número de valores del mismo.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

MEDIA PONDERADA:

La fórmula anterior para calcular la media aritmética supone que cada observación es de igual importancia. En términos generales, esto suele suceder así, no obstante, hay algunas excepciones, cuando se asignan ponderaciones diferentes a los elementos que conforman la muestra. Ejemplos de media ponderada son el índice de precios al consumidor, el índice de precios y cotizaciones de la B.M.V.

$$\text{media ponderada} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

MEDIANA:

La mediana es la medida de tendencia central que divide un *conjunto ordenado* en dos grupos iguales; la mitad de los números tendrá valores que son *menores* que la mediana, y la otra mitad alcanzará valores *mayores* que ésta.

El procedimiento para encontrar la mediana es como sigue:

1. Ordenar o clasificar los valores (generalmente) de menor a mayor.
2. Contar para saber si existe un número n de valores par o impar.
3. Si n es impar la mediana ocupa la posición $(n + 1) / 2$.
Si n es par la mediana es el promedio de los dos valores intermedios.

Una medida estrechamente relacionada con la mediana es el cuartil. Los cuartiles dividen los datos ordenados en cuatro partes iguales: 25 % de los valores serán menores que el primer cuartil (Q_1), 50 % serán menores que el segundo ($Q_2 =$ mediana), 75 % serán menores que el tercero (Q_3) y el 25 % serán mayores que éste último.

MODA:

La moda es el valor que con mayor frecuencia se presenta en un conjunto. La moda es indicativa del valor típico en términos del valor que se presenta con mayor frecuencia.

II.2. MEDIDAS DE DISPERSION:

Las medidas de dispersión indican si los valores están relativamente cercanos uno del otro o si se encuentran dispersos. Se consideran cuatro variables de dispersión: la amplitud de variación, la desviación media, la varianza y la desviación estándar. Todas estas medidas, excepto la amplitud de variación, toman a la media como punto de referencia. En cada caso, un valor cero indica que no hay dispersión, en tanto que la dispersión aumenta a medida que se incrementa el valor de la medida (amplitud de variación, varianza, etc.)

AMPLITUD DE VARIACION:

La amplitud de variación se puede expresar estableciendo la diferencia entre los números mayor y menor de un grupo, o bien identificando ambos números.

La principal limitación de la amplitud de variación es que considera solamente los valores extremos de un conjunto, y no proporciona mayor información respecto a los demás valores del mismo.

VARIANZA:

La *varianza* de una muestra (s_x^2) es la desviación promedio de valores obtenidos a partir de la media, elevada al cuadrado y calculada mediante $n-1$ en lugar de n .

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{o bien} \quad s_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2}{n-1}$$

Si se trata de una población se divide entre n para resumir el conjunto.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{o bien} \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2}{n}$$

DESVIACION ESTANDAR:

La *desviación estándar* es simplemente la raíz cuadrada positiva de la varianza. Las fórmulas para la desviación estándar de la muestra son:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{o bien} \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2}{n-1}}$$

Sustituir $(n - 1)$ por n las convierte en fórmulas para calcular la desviación estándar de la población.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{o bien} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2}{n}}$$

Las unidades de la desviación estándar son las mismas que las de la media.

II.3. FRECUENCIA:

Los métodos para organizar datos comprenden el ordenamiento de elementos en subconjuntos que presenten cualidades semejantes. El conteo de los resultados de dichos experimentos recibe el nombre de frecuencia.

II.4. EVENTOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES:

Los resultados posibles de un experimento reciben el nombre de *eventos*. Se dice que dos o más eventos son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del(os) otro(s). Si los eventos son *dependientes*, entonces saber que uno ha ocurrido puede ser útil para predecir la ocurrencia del otro.

II.5 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES:

Los eventos son *mutuamente excluyentes* si no tienen elementos en común, o si no pueden ocurrir al mismo tiempo. Es decir, el hecho de que ocurra uno es condición necesaria y suficiente para que el(os) otro(s) no ocurra(n).

II.6. RELACION ENTRE LA MEDIA Y LA VARIANZA:

La media de una variable aleatoria x mide, en cierto sentido, el valor "promedio" de x . La varianza de x , mide la "dispersión" de x .

II.7. ESPERANZA MATEMATICA:

Es el valor esperado de un cierto evento. Si p es la probabilidad de que un evento x ocurra, la esperanza matemática o simplemente la esperanza de x , se define como px .

$$\mu = E(x) = px$$

Generalizando, si una variable aleatoria x asume los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, con las probabilidades correspondientes $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, entonces la esperanza matemática de la variable aleatoria $E(x)$ es

$$E(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

La varianza de x , se define como:

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 p(x)$$

donde μ es la media de x . La *desviación estándar* de x , es la raíz cuadrada de la varianza de x .

$$\sigma = \sqrt{\sum (x - \mu)^2 p(x)}$$

III. DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS:

III.1. DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS:

Una *distribución probabilística* es una distribución de frecuencias relativa respecto a resultados del espacio muestral; señala la proporción de veces en que la variable aleatoria tiende a adoptar diversos valores.

Las *distribuciones probabilísticas discretas* comprenden variables aleatorias discretas para el conteo de datos, como la cantidad de ocurrencias por unidad con respecto a un intervalo de tiempo, área o distancia.

Las *distribuciones probabilísticas continuas* comprenden variables aleatorias continuas por lo que no es posible el conteo de datos, por lo que el análisis de dichas variables tiende a concentrarse en la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de algún intervalo.

III.2. DISTRIBUCION BINOMIAL:

El término *binomial* se utiliza para designar situaciones en las que los resultados de una variable aleatoria se pueden agrupar en dos clases o categorías. Las categorías deben ser mutuamente excluyentes y las clases deben ser colectivamente exhaustivas, por lo que no es posible obtener otro resultado. Verdadero-falso es una variable aleatoria binomial.

Es común referirse a las dos categorías de una distribución binomial como "éxito" y "fracaso". La probabilidad de éxito se simboliza con p y la probabilidad de fracaso con q .

$$P(x) = C(n, x) p^x q^{n-x}$$

La fórmula también se puede emplear para obtener probabilidades acumuladas, al calcular y posteriormente sumar las probabilidades individuales.

La *media* de una *distribución binomial* es el promedio a largo plazo, o la *esperanza* de una variable aleatoria binomial. La *desviación estándar* de una *distribución binomial* indica el grado en que los valores muestrales tenderán a variar a partir de la media de la distribución. En el caso del binomio, tanto la media como la desviación estándar se pueden representar en términos del número o el porcentaje de éxitos.

$$\mu = np$$

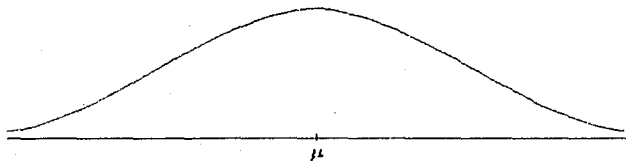
$$\sigma = \sqrt{npq}$$

III.3. DISTRIBUCION NORMAL:

La *distribución normal* es una distribución probabilística continua. A esta distribución también se le conoce como *distribución gaussiana*, en reconocimiento a las aportaciones de Karl Gauss (1777 - 1855) a la teoría matemática de la *distribución normal*. La *distribución normal* se define mediante la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

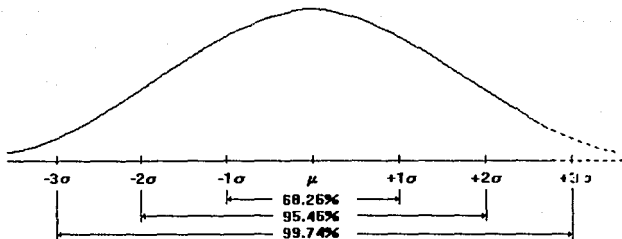
La gráfica de una *distribución normal*, se asemeja mucho a una campana: es suave, unimodal y simétrica con respecto a su media (μ). La curva se extiende asintóticamente hacia el infinito en ambas direcciones a partir de μ .



Otra característica importante es que es posible especificar ampliamente una *distribución normal* por medio de dos parámetros: la media y la desviación estándar.

El área total bajo cualquier curva normal representa el 100% de la probabilidad relacionada con dicha variable. La probabilidad de predecir con exactitud cualquier valor es cero, ya que la escala de medición es continua.

Si una variable está distribuida normalmente, entonces alrededor del 68.26% de sus valores quedarán dentro de una desviación estándar de la media, 95.46% caerán dentro de dos desviaciones estándares de la media; y el 99.74% quedarán dentro de tres desviaciones estándares de la media. Esto se cumple en el caso de todas las distribuciones normales.



La probabilidad de que una variable aleatoria x tenga un valor en un intervalo $a < x < b$ es igual al área bajo la curva normal entre esos dos puntos.



El problema de trabajar con una familia infinita de distribuciones normales se puede evitar manejando valores relativos en lugar de valores reales. Esto equivale a utilizar la media como punto de referencia, y la desviación estándar como una medida de la desviación de dicho punto de referencia. Esta escala comúnmente se conoce como *escala z*. Con este cambio de variable, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La nueva variable z se conoce con el nombre de *puntaje estándar*.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Los valores de z permiten, con ayuda de las tablas, determinar el área correspondiente entre dos valores cualesquiera de x . Sin embargo, las tablas de áreas por sí solas únicamente proporcionan el área entre μ y un valor dado de x .

III.4. DISTRIBUCION DE POISSON:

La *distribución de Poisson* describe las probabilidades del número de acaecimientos con respecto a un campo o intervalo continuo (generalmente de tiempo o espacio). Algunos ejemplos de variables aleatorias que se pueden representar o modelar por la *distribución de Poisson*, son los defectos por cm^2 , cabezas de ganado por Ha. La unidad de medición (tiempo o área) es continua, pero la variable aleatoria es *discreta*. Cabe notar que es imposible contar las fallas o fracasos.

El uso de la *distribución de Poisson* supone lo siguiente:

1. La probabilidad de un acaecimiento u ocurrencia es la misma a través de todo el campo de observación.
2. La probabilidad de más de un acaecimiento en cualquier punto único es aproximadamente cero.
3. El número de ocurrencias en cualquier intervalo es independiente del número de acaecimientos en otros intervalos.

Si una variable aleatoria se describe mediante una *distribución de Poisson*, entonces la probabilidad de considerar (observar) cualquier número dado de ocurrencias por unidad de medición (minuto, hora, centímetro, metro cuadrado, etc.) se puede obtener mediante la fórmula:

$$P(x) = \frac{e^{-\mu} (\mu)^x}{x!}$$

La *distribución de Poisson* se puede utilizar para aproximar probabilidades binomiales. La aproximación es más adecuada cuando el número de observaciones n es mayor, y la probabilidad de éxito p está cerca de 0 o 1. Las ventajas de la aproximación son que la exactitud se altera muy poco. Para utilizar la aproximación, es necesario determinar solamente la media o la esperanza de la distribución binomial. Este valor se utiliza como la media del proceso para la *distribución de Poisson*. Es decir, el promedio del proceso μ es igual al promedio binomial np .

III.5. DISTRIBUCION EXPONENCIAL:

Se dice que una variable aleatoria continua x que toma solamente valores positivos tiene una *distribución exponencial* si cumple con:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x > 0 \quad \alpha > 0$$

$$= 0, \quad \text{para cualquier otro valor}$$

donde α es el recíproco de μ .

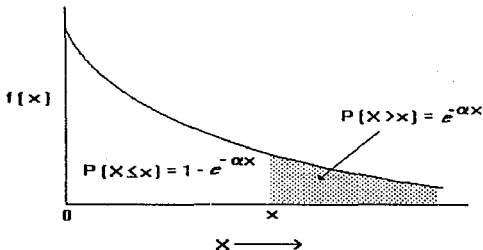
La *distribución exponencial* comprende probabilidades acerca de la longitud de tiempo o distancia entre ocurrencias con respecto a un intervalo continuo. Esta distribución se utiliza para representar el tiempo entre fallas de equipo eléctrico, el tiempo entre llegadas de clientes a un supermercado, etc.

Existe una estrecha relación entre las distribuciones exponencial y la de Poisson. De hecho, si un proceso de Poisson tiene una media (μ) de 7 ocurrencias respecto a un intervalo, el espacio (o tiempo) entre las ocurrencias en lo referente a ese intervalo será de $1/7$. (α)

Al integrar $f(x)$ desde 0 a ∞ se tiene:

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = 1$$

Es decir que el área bajo la curva es igual a la unidad.



Las probabilidades se expresan en términos de la probabilidad de una ocurrencia antes o después de algún punto específico x .

$$P\{X > x\} = e^{-\alpha x}$$

Mediante esta fórmula, se puede calcular la probabilidad de que el espacio (o tiempo) antes de que se presente la primera ocurrencia sea mayor que un espacio dado (o tiempo) x . La probabilidad de una ocurrencia en x o antes de dicho espacio se obtiene mediante la fórmula:

$$P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$$

III.6. DISTRIBUCION ERLANG O GAMA:

La función Gama denotada por Γ , se define como:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$

Integrando esta expresión

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (p-1)\Gamma(p-1)$$

Por lo que la función Gama sigue una relación recursiva. Si p es un entero positivo, y $p = n$, aplicando la relación anterior repetidamente queda:

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)\dots\Gamma(1)\end{aligned}$$

y además $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{si } n \text{ es un entero positivo.}$$

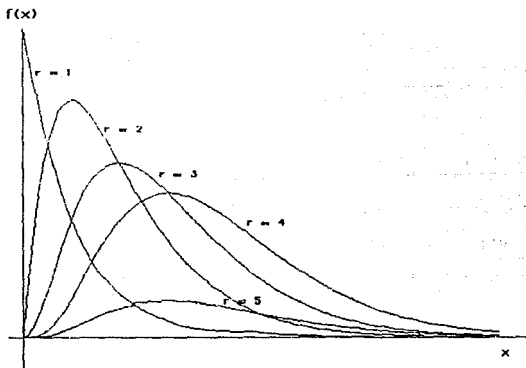
Por lo que la función Gama es una generalización de la función factorial.

La distribución Gama de probabilidades se define con la fórmula:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0, r > 0, \alpha > 0.$$

= 0, para cualquier otro valor.

La gráfica a continuación muestra la *distribución Gama* para diferentes valores de r y $\alpha = 1$.



La *distribución Gama* es una suma de r distribuciones exponenciales, si $r = 1$, la ecuación de la *distribución Gama* se transforma en $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. Luego la *distribución exponencial* es un caso especial de la *distribución Gama*.

Las fórmulas de la esperanza y la varianza para la *distribución Gama* son

$$E(X) = r/\alpha \qquad \sigma^2 = r/\alpha^2$$

respectivamente.

III.7. DISTRIBUCION t DE STUDENT:

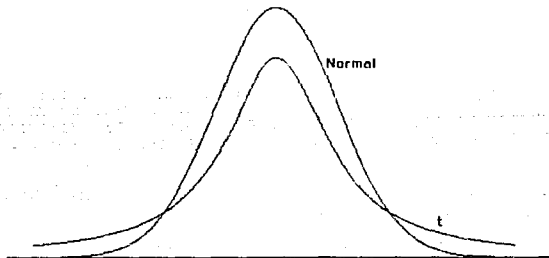
Si una variable aleatoria tiene la función

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \quad -\infty < t < \infty$$

se dice que tiene la *distribución t de Student*, o simplemente la *distribución t* , con k grados de libertad.

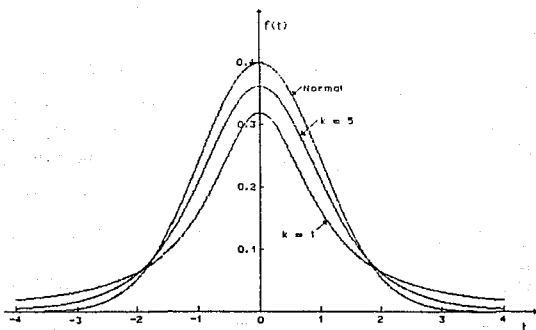
La curva de la *distribución t* es muy parecida a la de la *distribución normal*. La principal diferencia entre las dos consiste en que la *distribución t* presenta un área (probabilidad) mayor en sus extremos (colas). Esto significa que, para un nivel de confianza dado, el valor de t será un poco mayor que el correspondiente a z (puntaje estándar).

COMPARACION GENERAL ENTRE LAS DISTRIBUCIONES NORMAL Y t .



COMO SE APRECIA LA DISTRIBUCION t TIENE UNA MAYOR AREA EN LOS EXTREMOS O COLAS.

Es importante mencionar que la distribución t no es una de tipo estandarizado en el mismo sentido que lo es la distribución normal; en el caso de cada tamaño de muestra existe una distribución t ligeramente diferente.



Otra diferencia importante es que la distribución normal es independiente del tamaño de la muestra, así como de los grados de libertad, mientras que la distribución t no lo es.

Para muestras pequeñas ($n \leq 30$) la distribución t es bastante sensible, para muestras mayores esta sensibilidad disminuye, y la curva de $f(t)$ se aproxima estrechamente a la distribución normal.

La media y la varianza para la distribución t son

$$\mu = 0 \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{k}{k-2} \quad (k > 2)$$

III.8. TEORIA DE MUESTREO:

La teoría de muestreo es un estudio de las relaciones existentes entre una población y muestras extraídas de la misma. Permite estimar cantidades desconocidas de la población (frecuentemente llamadas *parámetros poblacionales*), a partir del conocimiento de las correspondientes cantidades muestrales (llamadas *estadísticos*).

Para que las conclusiones de la teoría del muestreo e inferencia estadística sean válidas, las muestras deben elegirse de forma que sean *representativas* de la población.

	Población { Parámetros }	Muestra { Estadísticos }
Tamaño	N	n
Promedio aritmético	$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
Varianza	$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
Desviación Estándar	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

MUESTREO CON Y SIN REEMPLAZAMIENTO:

El muestreo, en el que cada miembro de la población puede elegirse más de una vez se llama *muestreo con reemplazamiento*, mientras que si cada miembro no puede ser elegido más de una vez, entonces se llama *muestreo sin reemplazamiento*.

POBLACION FINITA E INFINITA:

Las poblaciones pueden ser *finitas* o *infinitas*. Por ejemplo, si se extraen sucesivamente 10 canicas sin reemplazamiento de una bolsa con 100, se está tomando una muestra de una población finita, mientras que si se lanza un moneda 50 veces, anotándose el número de caras, se está muestreando en una población infinita. En muchos casos prácticos, el muestreo de una población finita que es muy grande, puede considerarse como muestreo de una población infinita.

MUESTREO AL AZAR:

El proceso mediante el cual se extrae de una población una muestra representativa de la misma se conoce como *muestreo al azar* y de acuerdo a esto, cada miembro de la población tiene la misma posibilidad de ser incluido en la muestra. Para ello se emplea una tabla de números aleatorios y el siguiente procedimiento:

1. Se enumeran progresivamente los N elementos de la población, de tal manera que cada número contenga los m dígitos del valor total de N . El número asociado al elemento se llama *número muestral*.
2. Se selecciona al azar el punto de partida. El número aleatorio encontrado se relaciona con el número muestral y éste elemento formará parte de la muestra.
3. Se continua hacia abajo, encontrando otro número aleatorio y relacionándolo con el correspondiente número muestral y el elemento (también formará parte de la muestra). Si el número aleatorio no está incluido dentro de los N números muestrales, se descarta.
4. Este proceso continúa hasta completar los n elementos que formarán la muestra.

DISTRIBUCIONES MUESTRALES:

Si se consideran todas las posibles muestras de un mismo tamaño que pueden extraerse de una población dada (con o sin reemplazamiento). Para cada muestra se pueden calcular la media, la desviación estándar, etc. que variará de una muestra a otra. De esta forma se obtiene una distribución del estadístico que se conoce como *distribución muestral*.

Si por ejemplo, el estadístico es la media muestral, la distribución se conoce como *distribución muestral de medias*, y análogamente para las demás medidas de tendencia central y/o dispersión.

DISTRIBUCION MUESTRAL DE MEDIAS:

Sea $f(x)$ la distribución de probabilidad de alguna población dada de la cual se extrae una muestra de tamaño n .

La distribución de probabilidad del estadístico muestral \bar{x} , se llama la *distribución muestral de medias*. Las fórmulas son:

Distribución muestral de medias.		
Media	Desviación estándar	
	Población Finita	Población Infinita
$\mu_{\bar{x}} = \mu$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

donde μ es la media y σ la desviación estándar de la población.

La expresión

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

se llama *factor de corrección finito*.

DISTRIBUCION MUESTRAL DE PROPORCIONES:

Una *distribución muestral de proporciones* indica cuán probable es un conjunto particular de proporciones muestrales, dados el tamaño de la muestra y la proporción de la población.

Si una población es infinita y está distribuida binomialmente, si p y $q = 1 - p$ son las probabilidades respectivas de que un miembro dado exhiba o no exhiba una propiedad determinada, se consideran las posibles muestras de tamaño n extraídas de esta población y para cada muestra se determina el estadístico que es la población P de éxitos. Las fórmulas son:

Distribución muestral de proporciones.		
Media	Desviación estándar	
	Población Finita	Población Infinita
$\bar{p} = p$	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

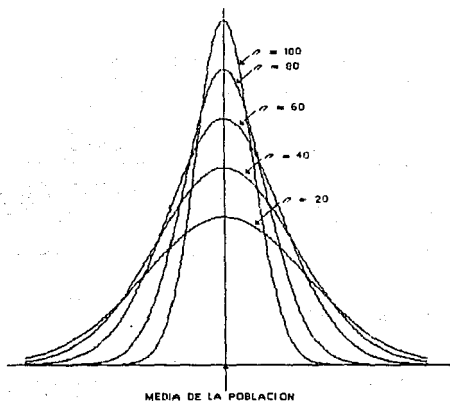
TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL:

Ya sabemos que el muestreo aleatorio tiende a producir valores estadísticos muestrales que son representativos de los parámetros de la población. Es decir, a pesar del hecho de que las muestras aleatorias tienden a presentar variabilidad de muestreo, es posible señalar que los valores estadísticos señalados deben aproximarse bastante satisfactoriamente a los parámetros poblacionales.

Esta característica de ser representativos da lugar a valores estadísticos muestrales que tienden a agruparse alrededor de los valores reales de la población.

A medida que aumenta el tamaño muestral, la distribución de los resultados muestrales se asemeja a la de tipo normal en lo que a forma se refiere. La tasa a la que una distribución de muestreo tiende a la normalidad dependerá de cuán simétrica es la población: cuanto más simétrica, más rápido se acercará a la normalidad (y, por tanto, más pequeña será la muestra necesaria para "suponer" normalidad).

Otro punto, es que a medida que aumenta el tamaño de la muestra, existirá cada vez menos variabilidad entre proporciones muestrales. Esto significa que las muestras grandes presentan una mayor tendencia a producir estadísticos relativamente próximos en valor al parámetro de la población.



En el caso de los valores medios muestrales es posible demostrar matemáticamente que si una población está distribuida de manera normal, la distribución de las medias muestrales que se obtienen de esa población también lo estarán respecto a cualquier tamaño de la muestra.

Además, aún si la población no es normal, la distribución de los valores medios de la muestra serán aproximadamente normales si el tamaño de la muestra es grande. Por tanto, no es necesario saber cuál es la distribución de la población para estar en condiciones de obtener inferencias con respecto a la población a partir de datos muestrales. La única restricción es que el tamaño de la muestra sea grande. Una regla que generalmente se utiliza establece que las muestras deben incluir 30 o más observaciones.

Estos resultados se conocen como el *Teorema del Límite Central*, y constituyen el concepto más importante de inferencia estadística.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias independientes con la misma distribución, con media μ y varianza σ^2 finitas.

Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

podemos enumerar dos conclusiones de este teorema:

1. Si la población mostrada está distribuida de manera normal, la distribución de los valores medios de la muestra estará normalmente distribuidos respecto a todos los tamaños muestrales.
2. Si la población no es normal, la distribución de los valores medios de la muestra será aproximadamente normal respecto a un tamaño muestral grande.

INTERVALOS DE CONFIANZA:

Un *intervalo de confianza* proporciona un intervalo de valores, centrado en el valor estadístico de la muestra, en el cual supuestamente se ubica el parámetro de la población, con un riesgo de error conocido.

En muchos de los casos, la distribución de valores de la muestra es normal o *aproximadamente* normal. Suponiendo normalidad, se sabe que alrededor del 68% de los valores estadísticos de la muestra están comprendidos dentro de una desviación estándar de la media de la distribución de muestreo (que es igual a la muestra de la población), y que casi el 95% de los valores medios de la muestra estarán comprendidos dentro de 1.96 desviaciones estándar de la media.

En consecuencia, si se establece la proposición de que la media de una muestra está dentro de 1.96 desviaciones estándar de la media verdadera, es posible esperar estar en lo cierto un 95% de las veces y estar equivocado el 5% restante. Como es imposible saberlo con exactitud, nos debemos conformar con esta *evaluación probabilística* del intervalo en el que puede estar comprendido el valor verdadero. Este recibe el nombre de *intervalo de confianza*, y la *confianza* es $1 - P(\text{error})$.

Gráficamente se puede representar así:



ERROR DE ESTIMACION:

El error en una estimación de intervalos se refiere a la desviación (diferencia) entre el valor medio de la muestra y la media real de la población. Como el intervalo de confianza está centrado con respecto al valor medio de la muestra, el *error máximo probable* equivale a la mitad de la amplitud del intervalo. Por tanto, el intervalo

$$\bar{x} \pm z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

se puede representar como

$$\bar{x} \pm \text{error}$$

siendo el error e

$$e = z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

La fórmula para el error indica que realmente hay tres factores determinantes del tamaño o grado del error:

1. La confianza deseada (es decir, el valor de z).
2. La dispersión en la población, σ_x y
3. El tamaño de la muestra.

TAMAÑO DE LA MUESTRA:

Antes de tomar una muestra es preciso determinar cuántas unidades deben ser incluidas para hacer las estimaciones con la precisión y nivel de confianza deseados. Una muestra muy pequeña puede tener una precisión muy baja y no resultar útil en la práctica, mientras que una muy grande representará trabajo innecesario.

Por norma, antes de efectuar un muestreo, hay que especificar el nivel de confianza que se requiere en la estimación, y tomando en cuenta la finalidad del estudio, hay que precisar de antemano el margen máximo de error.

De la fórmula de error es posible despejar n para hallar el tamaño de la muestra:

$$e = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = z \frac{\sigma}{e}$$

$$n = \left(z \frac{\sigma}{e} \right)^2$$

Cuando se desconoce el valor de la desviación estándar de la población, lo que generalmente ocurre, la desviación estándar de la muestra se utiliza como una estimación y sustituye a σ , en ecuaciones para intervalos de confianza y errores. Esto no presenta dificultades importantes, ya que la desviación estándar de la muestra proporciona una aproximación al valor verdadero, muy razonable en la mayoría de los casos. Además, por el Teorema del Limite Central se sabe que, cuando el tamaño de la muestra es mayor que 30, la distribución de muestreo de medias será casi normal. Sin embargo, para muestras de 30 o menos observaciones, la aproximación normal resulta inadecuada. En lugar de ello, los cálculos de los intervalos de confianza se deben basar en la distribución t .

Para muestras grandes ($n \leq 30$), es factible utilizar valores de z para aproximar los valores t , aun cuando la distribución t es teóricamente correcta en los casos en los que no se conoce la desviación estándar de la población, independientemente del tamaño de la muestra.

Para utilizar una tabla de valores de t , se deben conocer dos cosas: el nivel de confianza deseado y los grados de libertad. Estos últimos se relacionan con la forma como se calcula la desviación estándar de la muestra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

en la cual, el denominador del radical (en este caso $n - 1$) se denomina *grados de libertad*.

GRADOS DE LIBERTAD:

Para calcular un estadístico, es necesario basarse en observaciones sacadas de las muestras y en ciertos parámetros poblacionales. Si los parámetros se desconocen, deben estimarse a partir de la muestra.

El número de *grados de libertad* de un estadístico (k) se define como el número n de observaciones independientes en la muestra (es decir el tamaño muestral) menos el número de parámetros de la población que deben estimarse a partir de las observaciones de la muestra.

En el caso específico de la distribución t existe el requisito de que sea cero la suma de las desviaciones con respecto a la media de la muestra, lo que significa que el último valor debe obligadamente establecer la diferencia entre la suma hasta ese punto y la suma total, la cual es cero. Por tanto, los grados de libertad son $n-1$.

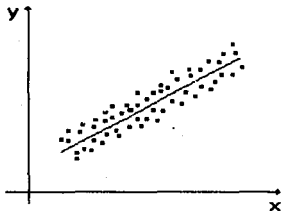
IV. METODOS DE AJUSTE DE CURVAS:

IV.1. REGRESION LINEAL:

La regresión lineal simple comprende el intento de desarrollar una línea recta o ecuación matemática lineal que describa la relación entre dos variables. La finalidad de una ecuación de regresión sería *estimar* los valores de una variable con base en los valores conocidos de la otra. Es decir, se puede intuir una relación de causa y efecto entre dos variables, aunque la lógica de la relación causal debe provenir de teorías externas al campo de la estadística. Otro uso de la ecuación de regresión es para predecir los valores futuros de una variable.

Es importante darse cuenta que no en todos los casos se puede obtener una aproximación mediante una ecuación lineal. Debido a ello, suele ser necesario realizar un trabajo preliminar a fin de determinar si un modelo lineal será el adecuado.

El procedimiento más simple es usar un *diagrama de dispersión* graficando los datos y determinar por examen si parece existir una relación lineal.



El procedimiento que más se utiliza para adaptar una recta a un conjunto de puntos se conoce como *método de los mínimos cuadrados*. La recta resultante presenta dos características importantes:

1. Es nula la suma de las desviaciones verticales de los puntos a partir de la recta.

2. Es mínima la suma de los cuadrados de dichas desviaciones (es decir, ninguna otra recta daría una suma menor de las desviaciones elevadas al cuadrado. Simbólicamente, el valor que se minimiza es

$$\sum (y_i - y_c)^2$$

donde y_i es el valor observado de y
 y_c es el valor calculado de y utilizando la ecuación de mínimos cuadrados con el valor correspondiente de x para y .

Los valores de a y b para la recta $y_c = a + bx$ que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones, son las soluciones a las llamadas "ecuaciones normales":

$$\sum y = na + b(\sum x)$$

$$\sum xy = a(\sum x) + b(\sum x^2)$$

en las que n es el número de pares de observaciones.

Así, evaluando las diversas cantidades, como $\sum x$, $\sum xy$, etc. se pueden resolver estas dos ecuaciones simultáneas para determinar a y b . Sin embargo, en las ecuaciones pueden despejarse a y b , y esto proporciona un modo más sencillo de cálculo. Se obtienen dos fórmulas

$$b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

Para determinar la ecuación lineal, primero se deben calcular los valores de $\sum x$, $\sum y$, $\sum xy$ y $\sum x^2$, los cuales se determinan a partir de los datos de la muestra.

La ecuación resultante de regresión es,

$$Y_C = a + bx$$

Cuando los datos no se pueden aproximar con un modelo lineal, las alternativas son buscar un modelo *no lineal* adecuado, o bien cambiar los datos a la forma lineal. Por ejemplo, si se convierten una o ambas escalas en logarítmicas puede llegarse a un modelo lineal.

IV.2. REGRESION MULTIPLE:

La regresión múltiple comprende tres o más variables. Existe una sola variable dependiente, pero hay dos o más de tipo independiente. La teoría es una extensión de un análisis de regresión lineal simple. Esta operación se refiere al desarrollo de una ecuación que se puede utilizar para predecir valores de y , respecto de valores dados de las diferentes variables independientes. El objeto de las variables independientes adicionales es incrementar la capacidad predictiva sobre la de la regresión lineal simple.

Las técnicas de los mínimos cuadrados se utilizan para obtener la *ecuación de regresión*. Esta tiene la forma:

$$Y_C = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k$$

donde

donde a es la ordenada en el origen

b_i es la pendiente asociada a la variable x_i , para $i=1$ hasta k .

k es el número de variables independientes.

En tanto que un análisis de regresión simple de dos variables da lugar a la ecuación de una recta, un problema de tres variables produce un *plano*, y un problema de k variables implica un *hiperplano* de k dimensiones.

Para un *plano de regresión*, la *ecuación de regresión* es de la forma:

$$z = a + bx + cy$$

Las ecuaciones normales correspondientes son:

$$\sum z = na + b(\sum x) + c(\sum y)$$

$$\sum xy = a(\sum x) + b(\sum x^2) + c(\sum xy)$$

$$\sum yz = a(\sum y) + b(\sum xy) + c(\sum y^2)$$

IV.3. CORRELACION:

Por el análisis de regresión, se puede encontrar una ecuación matemática que describa la relación entre variables. El análisis de correlación produce un número que resume el grado de relación entre dichas variables.

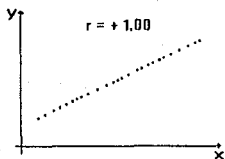
La forma más común del análisis de correlación comprende datos continuos. El grado de relación entre dos variables continuas se resume mediante un coeficiente de correlación que se conoce como " r de Pearson " en honor del matemático Karl Pearson, quien ideó este método.

CARACTERISTICAS DE r:

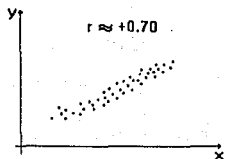
El coeficiente de correlación presenta dos propiedades que establecen la naturaleza de una relación entre dos variables. Una es su signo (+ o -) y la otra, es su magnitud. Las características de r son:

1. El valor de r se encuentra en el intervalo $-1 \leq r \leq 1$.
2. Una relación positiva (r es de signo +) entre dos variables significa que los valores altos de una variable forman pares con los valores altos de la otra y que los valores bajos de una, forman pares con valores bajos de la otra.
3. Una relación negativa (r es de signo -) significa que los valores altos de una variable forman pares con los valores bajos de la otra.
4. Una relación cero ($r \approx 0$) significa que prácticamente no existe relación.

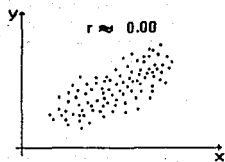
5. El signo de r siempre es igual al signo de b , que es la pendiente de una recta que ajusta los datos. Cabe observar que no es necesario calcular una línea.



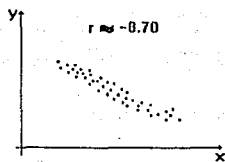
Relación positiva perfecta



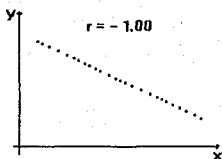
Relación positiva moderada



No existe relación



Relación negativa moderada



Relación negativa perfecta

La fórmula para calcular r es:

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}$$

Es importante dejar claro que el valor de r calculado mide en cualquier caso el grado de relación, relativa al tipo de ecuación que realmente se supone. Si la ecuación que se supone es lineal y $r \approx 0$, significa que casi no hay correlación lineal entre las variables. Sin embargo, esto no significa que no haya correlación alguna, puesto que puede haber una alta correlación no lineal entre ellas. En otras palabras, el coeficiente de correlación mide la bondad del ajuste de la ecuación supuesta a los datos.

COEFICIENTE DE DETERMINACION:

Un valor estadístico más significativo que r es r^2 , este último se llama *coeficiente de determinación*.

El valor de r^2 puede variar de 0 a 1. Cuando la variación no explicada de la variación total, es decir, la variación explicada es un pequeño porcentaje del total, r^2 será pequeña. Por el contrario, cuando la dispersión es pequeña respecto de la línea de regresión, significa que la variación explicada justifica un gran porcentaje de la variación total, y r^2 estará mucho más próxima a 1.

Por ejemplo, si $r = 0.9$, entonces $r^2 = 0.81$, lo que significa que el 81% de la variación de los puntos con respecto a las dos medias de grupo se puede explicar mediante la relación entre las dos variables. Por el contrario, $1 - r^2$, o sea, el 19% de la variación, no se puede explicar mediante la relación, por lo que se deberá considerar como el producto de otros factores que no hay sido incluidos en el estudio.

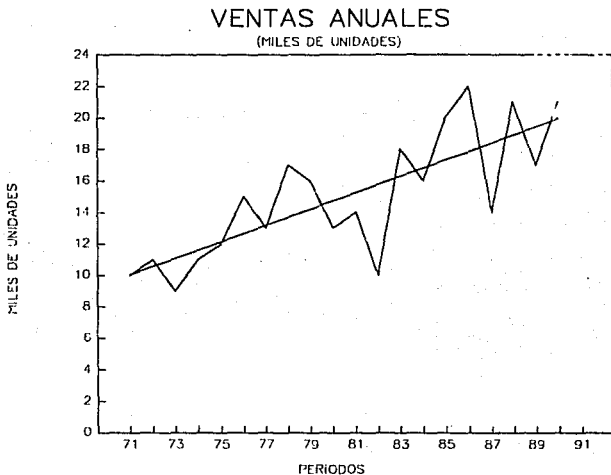
V. SERIES DE TIEMPO:

V.1. GRÁFICAS DE SERIES DE TIEMPO:

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones hechas en momentos determinados a intervalos regulares. Ejemplos de series de tiempo son: el precio diario de cierre de una acción en la Bolsa, la precipitación pluvial anual, etc.

Matemáticamente, una serie de tiempo se define por los valores Y_1, Y_2, Y_3, \dots , de una variable Y (temperatura, precio, etc.) en los momentos t_1, t_2, t_3, \dots . Así, Y es una función de t , simbolizada por $Y = f(t)$.

Las series de tiempo se representan de manera gráfica construyendo una gráfica de líneas, donde las abscisas representan a t , y las ordenadas a Y . Por ejemplo:



V.2. MOVIMIENTOS DE LAS SERIES DE TIEMPO:

El estudio de las series de tiempo revela la existencia de ciertos *movimientos* o *variaciones características*. Estos movimientos, algunos o todos, se presentan en diferentes grados. El análisis de tales movimientos es de gran importancia en muchos casos, siendo el más importante la *previsión* de movimientos futuros.

Los movimientos característicos de una serie de tiempo pueden clasificarse en cuatro tiempos principales, llamados *componentes* de una serie de tiempo.

V.3. CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS:

MOVIMIENTOS SECULARES O DE LARGA DURACION:

Se refieren a la dirección general a la que la gráfica de la serie de tiempo parece dirigirse en un intervalo grande de tiempo. Esta *tendencia secular* se indica a menudo por una *curva de tendencia*. En algunas series puede ser apropiada una *recta de tendencia*.

MOVIMIENTOS CICLICOS O VARIACIONES CICLICAS:

Se refieren a las oscilaciones de larga duración alrededor de la recta o curva de tendencia. Estos ciclos pueden ser o no *periódicos*, es decir, pueden seguir o no exactamente caminos análogos después de intervalos de tiempo iguales. En economía, los movimientos se consideran cíclicos solamente si su periodo tiene un intervalo de tiempo superior al año.

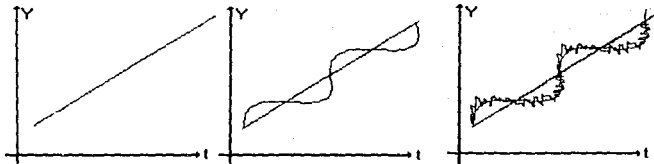
Un ejemplo de movimientos cíclicos son los llamados *asuntos cíclicos*, que representan intervalos de prosperidad, depresión y recuperación.

MOVIMIENTOS ESTACIONALES O VARIACIONES ESTACIONALES:

Se refieren a las idénticas, o casi idénticas, normas que una serie de tiempo parece seguir dentro de un periodo (generalmente anual), como por ejemplo, el aumento en ventas durante la temporada decembrina.

MOVIMIENTOS IRREGULARES O AZAROSOS:

Se refieren a movimientos esporádicos de las series de tiempo debido a sucesos ocasionales, tales como huelgas, elecciones, etc. Aunque normalmente se supone que tales sucesos producen variaciones que solamente duran un corto intervalo de tiempo, pueden ser tan intensos que originen un nuevo ciclo u otros movimientos.



Tendencia de larga duración.

Tendencia de larga duración
y movimiento cíclico.

Tendencia de larga duración,
y movimientos cíclico y
estacional.

V.4. ANALISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO:

El análisis de las series de tiempo consiste en una descripción (matemática generalmente) de los movimientos que la componen. Para ello existen dos métodos generales, llamados *modelos multiplicativo y aditivo*.

El *modelo multiplicativo* considera a la serie de tiempo como el *producto* de los componentes individuales, en tanto que el *modelo aditivo* considera a la serie como la *suma* de los componentes.

El *modelo multiplicativo* tiene la forma:

$$Y = T \times C \times E \times I,$$

donde:

- T = componente de la tendencia
- C = componente cíclico
- E = componente estacional
- I = componente irregular

y el modelo aditivo adquiere la forma:

$$Y = T + C + E + I,$$

En ambos modelos, la cifra de tendencia es una cantidad real. En el modelo aditivo, C , E , e I , son cantidades reales, pero en el modelo multiplicativo C , E , e I se expresan como porcentajes de la tendencia.

Aunque puede parecer más sencillo trabajar con el modelo aditivo, el modelo multiplicativo se utiliza más, debido principalmente a que representa de manera más adecuada la experiencia real. Sin embargo, el criterio fundamental que se debe seguir en el caso de una situación dada es utilizar el modelo que mejor se ajuste a los datos.

V.5. ESTIMACION DE LA TENDENCIA:

La *tendencia secular* se refiere a desplazamientos de los datos a largo plazo hacia arriba o hacia abajo.

Existen dos objetivos básicos para aislar el componente de la tendencia y utilizarla, por ejemplo, al hacer una *predicción* o *pronóstico*. El otro consiste en eliminar la tendencia, de manera que se puedan estudiar los otros componentes de la serie de tiempo.

En términos de predicciones, la investigación de la tendencia puede proporcionar cierta idea con respecto a la dirección a largo plazo de una serie de tiempo.

La estimación de la tendencia puede obtenerse con varios métodos:

1. El *método de mínimos cuadrados* puede utilizarse para hallar la ecuación o curva de tendencia adecuada. De esta ecuación se pueden calcular los valores de tendencia T .
2. El *método libre*, que consiste en ajustar una recta o curva de tendencia mediante la sola observación de la gráfica. Tiene el inconveniente de depender en gran medida del criterio personal.

3. El método de semimedianas consiste en agrupar los datos en dos partes (preferiblemente iguales) y mediar los datos de cada parte, así, se obtienen dos puntos en la gráfica de la serie de tiempo. Una recta de tendencia se puede trazar entre estos dos puntos. Aunque este método es sencillo, puede conducir a resultados pobres cuando se utiliza sin discernimiento. También es aplicable solamente cuando la tendencia es lineal o aproximadamente lineal, esto se soluciona dividiendo los datos en varias partes, teniendo cada una de ellas una tendencia lineal.

4. El método de los promedios móviles que consiste en utilizar un valor medio de los últimos k puntos de datos, es decir un conjunto de las últimas observaciones. A medida que se considera cada nueva observación se suprime la más antigua. Un promedio móvil es la media aritmética de las últimas k observaciones:

$$PM = \frac{\sum_{i=t-k}^t Y_i}{k}$$

El efecto de utilizar un promedio móvil es alisar las variaciones estacionales, cíclicas e irregulares, considerando lo restante como la tendencia, sin embargo, es casi imposible suprimir estas últimas por completo. Cuanto más datos se incluyan en el promedio, éste disminuirá su sensibilidad a observaciones más recientes.

V.6. VARIACIONES CICLICAS E IRREGULARES:

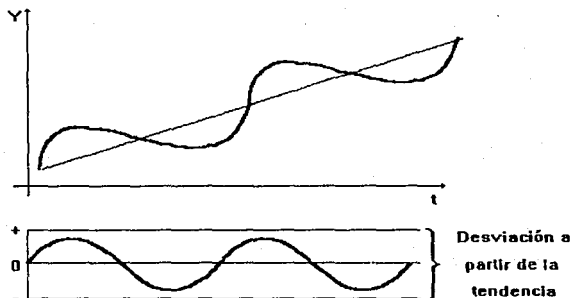
Las variaciones cíclicas son de tipo periódico y presentan más de un año de duración. Comúnmente, tales variaciones van aparejadas a las variaciones irregulares. Para aislar las variaciones cíclicas, las variaciones de tendencia y estacionales se deben separar de los datos de las series de tiempo.

Las variaciones estacionales se suprimen de forma efectiva utilizando cifras anuales (ya que las variaciones estacionales se definen como ciclos de un año o menos de duración, las cifras anuales no presentan fluctuaciones estacionales), o bien al analizar cifras mensuales utilizando un promedio móvil de doce meses.

A continuación se extrae la tendencia de los datos, y lo que queda se considera como el total de fluctuaciones cíclicas e irregulares.

Para eliminar la tendencia se requiere obtener una recta (o curva) de tendencia, utilizando una ecuación de regresión o un promedio móvil de largo plazo. La eliminación de la tendencia a partir de los datos depende si se utiliza el modelo aditivo o multiplicativo.

En el modelo aditivo, cada observación Y se resta del valor correspondiente de la tendencia (Y_t). El resultado es una serie de desviaciones con respecto a ésta.



En el modelo multiplicativo, cada observación Y se divide entre el valor correspondiente de la tendencia (Y_t) y se multiplica por 100.

Si para estimar la tendencia se usó una ecuación de regresión, es probable que las variaciones irregulares se presenten en los ciclos, entonces debe emplearse un promedio móvil para alisar estas últimas.

Por el contrario, si para estimar la tendencia se usó un promedio móvil es altamente probable que las variaciones aleatorias ya hayan sido eliminadas.

V.7. ESTACIONALIDAD:

Existen dos objetivos generales para aislar el componente estacional de una serie de tiempo, el primero es eliminarlo, para estudiar las variaciones cíclicas, y el otro es identificar factores estacionales, de manera que se puedan considerar en la toma de decisiones.

Para determinar el factor estacional (F), se deben estimar cómo varían los datos en la serie de tiempo de un mes a otro a lo largo de un año característico.

Un conjunto de números mostrando los valores relativos de una variable durante los meses del año se llama *índice estacional* de la variable, por ejemplo, si las ventas durante enero, febrero, marzo, etc. son 50, 120, 90, ... por ciento de la venta media mensual del año completo, los números 50, 120, 90 ... suministran el índice estacional del año y se conocen como *números del índice estacional* o *relativos estacionales*.

El promedio (media) del índice estacional para el año completo deberá ser de 100%, es decir, la suma de los números índice deberá ser 1,200%.

La técnica más difundida para el análisis estacional es el *método de la razón al promedio móvil*. Este método utiliza los *relativos estacionales*. A continuación los pasos de este método:

1. Obtener un promedio móvil anual. Si los datos se presentan en forma trimestral, se requiere un promedio móvil de cuatro periodos; si se consideran datos mensuales, se necesitará un promedio móvil de 12 periodos. Si los datos son anuales, es imposible determinar índices estacionales, puesto que estas se eliminarán.
2. Si se usa un número par de periodos, para obtener el promedio móvil anual, surge un problema en el centrado de datos, puesto que el centro no corresponderá a ninguno de los valores originales. Para resolver este problema se debe encontrar un promedio móvil de 2 periodos de los promedios móviles, lo cual dará lugar a un punto central que corresponda a un punto de los datos.

3. Dividir los datos originales entre los valores correspondientes del promedio móvil, para que así se eliminen las variaciones de tendencia y cíclicas de los datos, dejando sólo las variaciones estacionales e irregulares.

$$\frac{Y}{PM} = \frac{T X C X E X I}{T X C} = E X I$$

4. Se agrupan los relativos estacionales de periodos semejantes y se obtiene la razón estacional promedio para cada periodo. Por lo general se calcula un valor *medio modificado*, que comprende la eliminación de las cifras más alta y más baja de cada grupo antes de obtener el promedio.
5. Las cifras resultantes se estandarizan ajustando los índices relativos, de manera que se sumen al número de periodos. Por ejemplo, si existen cuatro periodos, la suma de los índices relativos deberá ser cuatro. Si la suma de los valores medios modificados resulta ser 5, el ajuste se hace multiplicando cada relativo estacional por 4/5.

V.8. PRONOSTICOS:

Una vez que se han analizado todos los componentes de las series de tiempo, pueden usarse cualquiera de los dos métodos, el *aditivo* o el *multiplicativo*, para efectuar pronósticos.

La ecuación de tendencia es *independiente* del modelo usado, sin embargo, los valores predichos de *Y* difieren considerablemente entre los dos modelos. Como es evidente que ambos no pueden ser correctos, es *muy importante* considerar con cuidado que *modelo* elegir en cada caso.

Finalmente diremos que además del tratamiento matemático de los datos de las series de tiempo, falta un componente indispensable: El *sentido común* y el *buen juicio* del investigador.

VI. CONCLUSIONES :

VI.1. APLICACIONES DE LA ESTADISTICA:

La teoría estadística y sus diferentes ramas son la base para el análisis de cualquier tipo de datos. Por ejemplo, las series de tiempo son indispensables para la medición de variables económicas, y su pronóstico. La teoría del muestreo es la base para el control de calidad. La mercadotecnia emplea la estadística para el pronóstico de ventas.

BIBLIOGRAFIA

- Boes, Gaybill, Mood, *INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS*, Mc Graw Hill, Nueva York, 1974.
- Graig, Hogg, *INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS*, Mc Millan Publishing Co., Nueva York, 1978.
- Lipschutz, Seymour *PROBABILIDAD*, Mc.Graw-Hill, México, 1971.
- Meyer, Paul L. *PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADISTICAS*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1973.
- Spiegel, Murray R. *ESTADISTICA*, Mc.Graw-Hill, México, 1989.
- Spiegel, Murray R. *TEORIA Y PROBLEMAS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA*, Mc.Graw-Hill, México, 1976.
- Stevenson, William J. *ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA*, Harla, México 1981.

CAPITULO III

MODELOS DE INVENTARIOS

I. INTRODUCCION:

I.1. INVENTARIOS:

El diccionario define *inventario* como el conjunto de bienes inactivos en espera de ser utilizados.

Es evidente que un inventario cuesta, por el simple hecho de existir. El objeto de la teoría de inventarios y el uso de modelos de inventarios es *minimizar* los costos de mantener el inventario.

I.2. COSTOS ASOCIADOS A LOS INVENTARIOS:

Un problema de inventario existe desde el momento que es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo especificado.

Un *sobrealmacenamiento* requeriría un capital invertido superior por unidad de tiempo pero menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Un *subalmacenamiento* disminuiría el capital invertido por unidad de tiempo pero aumentaría la frecuencia de los pedidos, así como el tiempo de estar sin mercancía. Los dos extremos son costosos. Los costos asociados a los inventarios son:

1. *Costo de preparación.* Es el costo fijo asociado a la colocación de un pedido o con la preparación inicial de una instalación de producción. El costo de preparación usualmente se supone independiente de la cantidad ordenada o producida.
2. *Precios de compra o costo de producción.* Es el costo asociado a la unidad comprada o producida. Generalmente es una función directamente proporcional a la cantidad producida, aunque pueden obtenerse *descuentos por mayoreo* o *rebajas en precio* o cuando grandes corridas de producción pueden dar como resultado una disminución en el costo de la misma.

3. *Costo de mantenimiento del inventario.* Esto representa el costo de tener el inventario en el almacén hasta que se vende o se usa. Incluye los costos de almacenamiento, costos de manejo, costos de depreciación, etc. Los costos de llevar el inventario se supone que varían directamente con el nivel de inventario, así como con el tiempo que el artículo se tiene en almacén.
4. *Costo financiero.* Considera el valor del dinero en el tiempo. Cuando se paraliza capital en inventario, no puede ser utilizado para otros fines, como sería la inversión del circulante en instrumentos de renta fija.
5. *Costo de escasez.* Estos son los costos de penalización originados por no tener el artículo cuando se necesita la mercancía. Generalmente incluyen costos debidos a pérdidas en la confianza de los clientes y pérdida potencial en los ingresos. A estos costos se les conoce también como *costos intangibles* ya que son difíciles de cuantificar. Normalmente se hace una estimación en cada caso dependiendo del tipo de empresa de que se trate y las variables microeconómicas pertinentes.

I.3. NIVEL DE SERVICIO:

Minimizar los costos asociados a un inventario representa un gran problema, ya que las diferentes áreas de una empresa tienen objetivos diferentes y en pugna entre sí, por ejemplo, el departamento de ventas desea inventarios grandes, mientras que la tesorería se niega a incrementarlos por los costos financieros que implica mantener recursos inactivos, etc.

A través de la *teoría de decisiones*, puede encontrarse una *decisión óptima* para este problema.

Sean:

- I el inventario inicial, unidades
- I^* inventario inicial óptimo, unidades
- g costo de mantener el inventario
- p costo por demanda insatisfecha
- d demanda, unidades
- $f(d)$ función de probabilidad de la demanda d .
- $F(d)$ función distribución acumulativa de la demanda d .

Se requiere encontrar I^* , el valor de I que minimizará los costos totales; más exactamente, I^* será establecida para minimizar las pérdidas esperadas por excedentes y faltantes.

Cuando $I \geq d$, una cantidad adicional $I - d$ será sobrante, resultando una pérdida de $g(I - d)$. La probabilidad de un valor específico que d ocurra es $f(d)$, por lo que la pérdida asociada con unos valores específicos de d y de $I \geq d$ es $g(I - d)f(d)$. La pérdida total esperada por excedentes, G , es el área bajo la curva $g(I - d)f(d)$ desde 0 hasta I .

$$G = g \int_0^I (I - d) f(d) dd$$

Razonando de la misma manera, cuando $I < d$ habrá un faltante de $d - I$, resultando una pérdida de $p(d - I)$. La pérdida total por faltante, P , es

$$P = p \int_I^{\infty} (d - I) f(d) dd$$

El costo total esperado, T es

$$T = G + P = g \int_0^I (I - d) f(d) dd + p \int_I^{\infty} (d - I) f(d) dd$$

Para encontrar I^* derivamos para encontrar un mínimo

$$\frac{dT}{dI} = g \int_0^I f(d) dd + p \int_I^{\infty} [-1] f(d) dd = g F(d) \Big|_0^I - p F(d) \Big|_I^{\infty} = 0$$

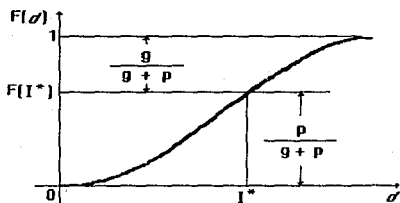
Resolviendo

$$gF(I^*) - p + pF(I^*) = 0$$

donde

$$F(I^*) = \frac{p}{g + p}$$

Lo óptimo es tener existencias adecuadas para poder servir a todos los clientes en una proporción de las transacciones dadas por $p/(g + p)$, llamada nivel de servicio, y no servirlos a todos, es decir, tener cuando menos algún faltante, en $g/(g + p)$ de las ocasiones. Almacenar más de I^* , es en promedio, incrementar los excedentes; y almacenar menos de I^* es incrementar el faltante.



II. MODELOS DETERMINISTICOS:

II.1. COMPONENTES DE LOS MODELOS DE INVENTARIOS:

1. Costo de preparación (K).
2. Precios de compra o costo de producción.

$$c(z) = cz + K,$$

donde c es el costo unitario por pieza producida o comprada.
 z es el número de unidades producidas o compradas.
 K es el costo de preparación.

3. Demanda (a).
4. Costo de conservación o mantenimiento, por unidad del producto por unidades de tiempo (h).
5. Cantidad de producción o de orden, unidades (Q).
6. Costo de déficit unitario (p).

II.2. MODELOS DE REVISION CONTINUA:

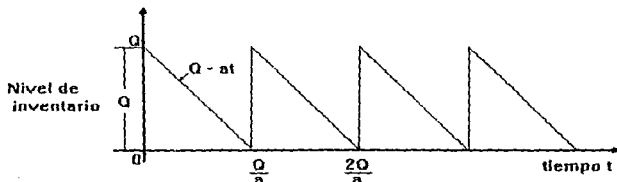
Se llama *modelo de revisión continua* al modelo de inventario en el cual los niveles de existencias se revisan continuamente.

II.3. DEMANDA UNIFORME, SIN DEMANDA INSATISFECHA:

Para este modelo de inventario, los únicos costos que se consideran son el costo de preparación K , cargado en el instante de la producción (o de hacer el pedido), un costo de producción unitario c (o costo de compra) y un costo unitario h de mantener el inventario por unidad de tiempo. En este modelo siempre hay existencias, por lo que no existe demanda insatisfecha. Asimismo se trabaja bajo el supuesto del reabastecimiento instantáneo, el cual normalmente sucede cuando se compra inventario de materia prima y el proveedor surte de inmediato.

En este modelo se supone que la demanda ocurre con la tasa a por unidad de tiempo. El nivel más alto del inventario ocurre cuando se entrega la cantidad ordenada Q .

La demora en la entrega se supone una constante conocida. El nivel de inventario alcanza el nivel cero Q/a unidades de tiempo después de que se recibe la cantidad pedida Q .



Cuanto más pequeña es la cantidad ordenada Q , más frecuente será la colocación de nuevos pedidos. Sin embargo, se reducirá el nivel promedio de inventario mantenido en almacén. Por otra parte, al aumento de Q , aumenta el inventario, pero se reduce la colocación de pedidos. La cantidad Q se selecciona para permitir un compromiso en los dos tipos de costo. Esta es la base para formular el modelo de inventario.

El costo por unidad de tiempo se obtiene como sigue: El costo de producción por ciclo está dado por

$$\begin{cases} 0, & \text{si } Q = 0 \\ K + cQ, & \text{si } Q > 0 \end{cases}$$

Sabiendo que el nivel promedio de inventario durante un ciclo es $Q/2$ artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es $hQ/2$ por unidad de tiempo. Como la longitud del ciclo es Q/a , el costo de almacenamiento por ciclo está dado por

$$\frac{hQ^2}{2a}$$

Por tanto, el costo total por ciclo es

$$K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}$$

el costo total por unidad de tiempo es

$$T = \frac{K + cQ + hQ^2/2a}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$$

Es evidente que el valor Q^* que minimiza T se encuentra por máximos y mínimos y el criterio de la segunda derivada.

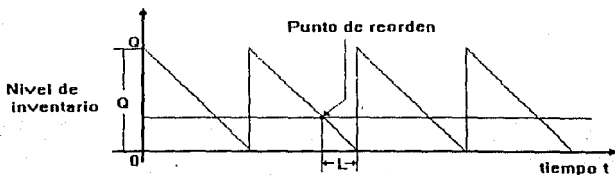
$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

Q^* se conoce como el tamaño del lote económico de Wilson. El tiempo t^* que se requiere para sacar este valor óptimo de Q^* es

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

La mayoría de las situaciones prácticas usualmente tienen tiempo de demora positivo L desde el punto en el cual se coloca la orden hasta que realmente se entrega. La política de pedidos de este modelo debe especificar el punto de reorden.

Esta información puede traducirse convenientemente para implantación práctica especificando sólo el nivel de inventario en el que se vuelve a pedir. Esto da el llamado punto de reorden. En la práctica esto equivale a observar continuamente el nivel de inventario hasta que se alcance el punto de reorden, por eso, este modelo se conoce como de revisión continua.

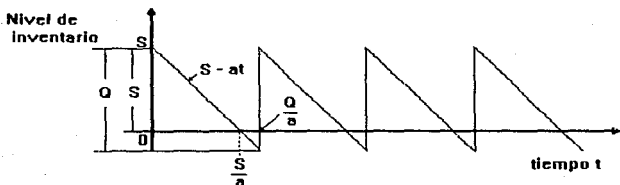


II.4. DEMANDA UNIFORME, CON DEMANDA INSATISFECHA:

Puede resultar *redituable* permitir que ocurra algún déficit porque puede incrementarse la longitud del ciclo con un ahorro resultante en los costos de preparación, pero este beneficio puede ser neutralizado por el costo en que se incurre cuando se presenta el déficit, por ello, requiere de un análisis detallado.

Para este modelo de inventario, los costos que se consideran son el costo de preparación K , el costo de producción unitario c , el costo unitario h de mantener el inventario por unidad de tiempo y el costo del déficit unitario p .

Al igual que en el modelo anterior, la demanda ocurre con la tasa a por unidad de tiempo. El nivel más alto del inventario al inicio de un ciclo se denota con S . Asimismo la demora en la entrega se supone una constante conocida.



El costo por unidad de tiempo se obtiene como sigue: El costo de producción por ciclo está dado por

$$\begin{cases} 0, & \text{si } Q = 0 \\ K + cQ, & \text{si } Q > 0 \end{cases}$$

El costo de almacenamiento se obtiene como sigue: El nivel de inventario es positivo para un tiempo S/a . El nivel promedio durante este tiempo es $S/2$ artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es $hS/2$ por unidad de tiempo.

El costo total de almacenamiento en el que se incurre durante el tiempo en el que el nivel de inventario es positivo es

$$\frac{hs^2}{2a}$$

Del mismo modo, los déficit se presentan para un tiempo $(Q - S)/a$. El monto promedio de los déficit durante este tiempo es $(Q - S)/2$ artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es $p(Q - S)/2$ por unidad de tiempo. El costo total del déficit en el que se incurre durante el tiempo en el que existen déficit es el costo del déficit por ciclo, el que está dado por

$$\frac{p(Q - S)^2}{2a}$$

Por tanto, el costo total por ciclo es

$$K + cQ + \frac{hs^2}{2a} + \frac{p(Q - S)^2}{2a}$$

y el costo total por unidad de tiempo es

$$T = \frac{K + cQ + hs^2/2a + p(Q - S)^2/2a}{Q/a}$$

$$= \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hs^2}{2Q} + \frac{p(Q - S)^2}{2Q}$$

En este modelo se tienen dos variables de decisión (S y Q), de modo que se encuentran los valores óptimos (S^* y Q^*) igualando a cero las derivadas parciales de T con respecto a S y de T con respecto a Q .

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -\frac{aK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente se llega a

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

La longitud óptima del periodo t^* , está dada por

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}} \sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

El déficit máximo se expresa como

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{p}} \sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

y la fracción de tiempo en la cual no existe déficit es

$$\frac{S^*/a}{Q^*/a} = \frac{p}{p+h}$$

Lo cual es independiente de K.

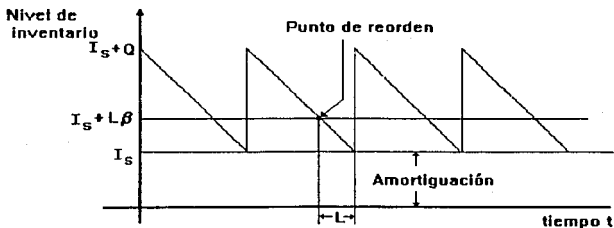
II.5 INVENTARIOS DE SEGURIDAD:

Las hipótesis de los modelos anteriores se verifican en raras ocasiones para situaciones reales, principalmente porque la demanda es probabilística. Un procedimiento *burdo* ha surgido en la práctica que, aún cuando retiene la simplicidad de aplicar el modelo del tamaño económico del lote, no ignora totalmente el efecto de la demanda probabilística. La idea es muy simple y requiere superponer un almacenamiento de amortiguación (constante), también llamado *inventario de seguridad*, sobre el nivel de inventario en todo el horizonte de planeación.

El tamaño del *inventario de seguridad* se determina de tal modo que la probabilidad de estar sin artículos en inventario durante el tiempo de demora L no exceda de un valor especificado. Si $f(d_L)$ es la función densidad de la demanda durante el tiempo de demora y además la probabilidad de no tener artículos en almacén durante el tiempo L no debe exceder de un parámetro α . Entonces el tamaño I_S del *inventario de seguridad* se determina a partir de

$$P(x \geq I_S + LB) \leq \alpha$$

donde LB representa el consumo durante L .



El *inventario de seguridad* también puede estimarse en base a la experiencia.

II.6. TAMAÑO ECONOMICO DEL LOTE, SIN DEMANDA INSATISFECHA
(MODELO DE MANUFACTURA):

En los modelos anteriores, se trabajó bajo el supuesto del reabastecimiento instantáneo. Cuando se trata de manufactura, se descarta la suposición del reabastecimiento instantáneo; se supone que se necesita un tiempo t_m para producir Q . La producción se realiza a una tasa de m unidades por unidad de tiempo.

Por esto, es necesario replantear el costo de mantenimiento h , para así reflejar el cambio en el nivel de existencias promedio. Para cualquier periodo t_m se producen m artículos y se consumen a unidades por unidad de tiempo ($m > a$); por lo que hay un incremento neto de $m - a$ por unidad de tiempo. Esta etapa alcanza un tope al final de t_m , cuando hay $t_m(m-a)$ artículos en existencia. Pero, durante t_m se han producido Q , por lo que $mt_m = Q$, y $t_m = Q/m$. Por tanto, el inventario máximo es

$$\frac{Q}{m} (m - a) = Q \left[1 - \frac{a}{m} \right]$$

El inventario promedio I_m en existencia es la mitad del máximo, es decir

$$\frac{Q}{2} \left[1 - \frac{a}{m} \right]$$

Sabiendo que el ciclo tiene una duración de Q/a , el costo de almacenamiento total por ciclo es,

$$\frac{hQ^2}{2a} \left[1 - \frac{a}{m} \right]$$

Por tanto, el costo total por ciclo es

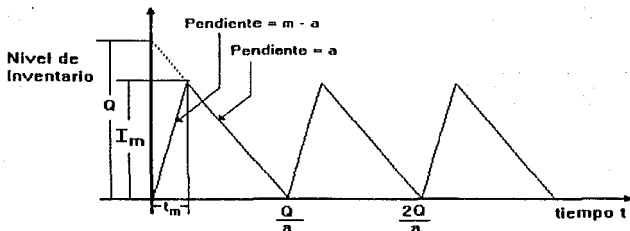
$$K + cQ + \frac{hQ^2}{2a} \left[1 - \frac{a}{m} \right]$$

el costo total por unidad de tiempo es

$$T = \frac{K + cQ + hQ^2/2a(1 - a/m)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2} \left[1 - \frac{a}{m} \right]$$

Para encontrar Q^* que minimiza T aplicamos máximos y mínimos.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h(1 - a/m)}}$$



II.7. PROGRAMACION DINAMICA:

La *programación dinámica* es una técnica matemática principalmente para mejorar la *eficiencia de cómputo* en ciertos problemas de optimización. La idea básica de la técnica es descomponer el problema en *subproblemas*, los cuales son más manejables. Los componentes de este algoritmo son los siguientes:

1. *Etapa (Subproblema)*. Una etapa es un periodo o fase perfectamente identificable dentro del problema donde es necesario tomar una decisión.
2. *Alternativas (Variables de decisión)*. La determinación de alternativas dentro de cada etapa es parte integral de la definición de la etapa, y por consiguiente, es fácilmente identificable. Por ejemplo, *minimizar costos* o *maximizar utilidad*, etc. Asociada a cada etapa está la *función objetivo* (rendimiento) de una variable de decisión, la cual evalúa el valor de cada alternativa.

3. *Estado del sistema en cada etapa.* Es el concepto más importante en un modelo de programación dinámica. Representa la liga entre etapas subsecuentes de tal manera que cuando cada etapa se optimiza por separado, la decisión resultante es factible para el problema completo. Además permite que se hagan decisiones óptimas para las etapas restantes sin tener que comprobar el efecto de decisiones futuras sobre decisiones que se han tomado anteriormente.

El uso de etapas y estados para descomponer un problema de programación dinámica se lleva a cabo por medio de una ecuación recursiva; ésta permite que se optimice cada etapa por separado. También mantiene información del rendimiento óptimo acumulado de todas las etapas anteriormente consideradas, de manera que cuando se llega a la última etapa se tiene disponible el rendimiento óptimo total para el problema completo. La representación es recursiva porque se calcula el rendimiento óptimo para las primeras i etapas a partir del rendimiento para las primeras $(i - 1)$ etapas y el rendimiento en la etapa i .

NOMENCLATURA:

n	Etapas ($n = 1, 2, 3, \dots, n$)
X_n	Decisión hecha en la etapa n
X_n^*	Decisión óptima hecha en la etapa n
S_n	Estados en la etapa n
$c(s, X_n)$	Contribución al objetivo hecha en la etapa n dada la decisión X_n y el estado s . Esta cantidad se refiere solamente con la contribución en la etapa n .
$f_n(s, X_n)$	Contribución al objetivo hecha en la etapa n y etapas siguientes, dada la decisión X_n y el estado s , considerando las decisiones óptimas para las etapas $n+1, n+2, \dots$.
$f_n^*(s)$	Contribución al objetivo hecha en la etapa n y etapas siguientes dada la decisión óptima X_n^* y el estado s , considerando las decisiones óptimas para las etapas $n+1, n+2, \dots$.

En términos generales, el algoritmo para la programación dinámica es como sigue:

1. Construir una ecuación recursiva que identifique la política óptima para cada estado en la etapa n , dada la solución óptima para cada estado en la etapa $(n-1)$, asimismo se deben determinar las restricciones asociadas a la ecuación. La ecuación recursiva generalmente es de la siguiente forma:

$$f_n(s, X_n) = c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)$$

y

$$f_n^*(s) = \text{Min}_{X_n} [c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)]$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n X_i = E$$

donde E es una cantidad que representa, por ejemplo, el espacio total disponible o cualquier otra restricción importante para resolver el problema.

2. Encontrar la decisión óptima en la última etapa, de acuerdo a la política de decisión establecida. Generalmente la resolución de esta última etapa es trivial, es decir, sin ningún método establecido, tomando en cuenta solo la contribución de la última etapa.

s	$f_n^*(s) = c(s, X_n)$	x_n^*
Conjunto de estados de la etapa $n-1$	Contribución al objetivo en la etapa n con la decisión X_n y el estado s	Decisión óptima para cada estado

3. Resolver para la etapa $n-1$, considerando la contribución de la etapa $n-1$ y el acumulado óptimo de la etapa n .

s \ X_{n-1}	$f_{n-1}(s, X_{n-1}) = c(s, X_{n-1}) + f_n^*(s)$					$f_{n-1}^*(s)$	X_{n-1}^*
	X_1	X_2	X_3	X_4		
Estados de la etapa n-2	Contribución al objetivo en la etapa n-1, dada la decisión X_{n-1} y el estado s más el acumulado óptimo de la etapa n					Óptimo de la etapa n-1	Decisión óptima de la etapa n-1

La idea básica detrás de la *relación recursiva* es trabajar *hacia atrás*, revisando en cada etapa el efecto total que tendría en el problema hacer una decisión particular en la etapa que está siendo analizada. Si se resolviera el problema *hacia adelante*, es decir, desde la etapa 1 hasta la n, sería necesario realizar una enumeración exhaustiva de todas las alternativas, mientras que *hacia atrás* se reduce el número de alternativas a analizar. Cuando se llega a la etapa inicial se encuentra la solución óptima.

- El paso 3 se repite para las n-2 etapas restantes, trabajando de la misma manera.
- Cuando se ha resuelto la primera etapa, la decisión total se conforma combinando *hacia adelante* la decisión óptima X_1^* , con la decisión óptima X_2^* y así sucesivamente hasta combinar la decisión óptima X_n^* .

Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar la aplicación de la programación dinámica para el control de inventarios y la planeación de la producción.

Consideremos una situación en la que se produce un artículo particular y se coloca en inventario en proceso hasta que se necesita en la siguiente etapa de producción.

El número de unidades requeridas en cada uno de los tres próximos meses, el costo de preparación, el costo unitario de producción en horario regular y el sobrecosto por producción en tiempo extra en los que se incurrirá en cada mes se muestran en la siguiente tabla:

	M E S		
	1	2	3
REQUERIMIENTOS	1	3	2
COSTO DE PREPARACION	5	10	5
COSTO UNITARIO DE PRODUCCION	8	10	9
SOBRECOSTO EN TIEMPO EXTRA	3	1	2

Actualmente se tiene una unidad en inventario y se desea tener 2 unidades al final de los tres meses. Se pueden fabricar un máximo de 3 unidades en la producción de horario regular en cada mes, y 1 unidad en tiempo extra por mes. El costo de mantener el inventario es de \$3 por unidad por mes de almacenamiento. Determinar cuantas unidades deben producirse en cada mes para minimizar el costo total de producción.

Este problema tiene la estructura de un problema determinístico de programación dinámica donde las etapas (n) son cada uno de los 3 meses del periodo en estudio, los estados (S_n) son los posibles niveles de inventario con los que se inicia un mes, y las decisiones (X_n) son la cantidad de unidades a fabricar. El objetivo es minimizar el costo total de producción. Este costo se compone del costo de preparación más el costo de producción en horario regular más el sobrecosto de producción en tiempo extra, más el costo de almacenamiento.

El inventario al final de cada etapa es:

$$I_f = I_n + X_n - D_n$$

donde I_f es el inventario final del mes
 I_n es el inventario inicial del mes n
 X_n es la producción del mes n
 D_n es la demanda o requerimientos del mes n

La ecuación recursiva es de la forma:

$$f(s, X_n) = c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)$$

y

$$f_n^*(s) = \min_{X_n} [c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)]$$

donde

$$c(s, X_n) = K_n + X_n C_n + (X_n - 3)E_n + (I_n + X_n - D_n)i + f_{n+1}^*(s)$$

y X_n es la producción del mes n

C_n es el costo unitario en tiempo regular en el mes n

K_n es el costo de preparación en el mes n , y

$$K_n = \begin{cases} 0, & \text{si } X_n = 0 \\ K_n, & \text{si } X_n > 0 \end{cases}$$

i es el costo de almacenamiento

I_n es el inventario al inicio del periodo (S_n)

D_n es la demanda o requerimiento en el mes n

E_n es el sobrecosto por producción en tiempo extra en el mes n ,

$$E_n = \begin{cases} 0, & \text{si } X_n \leq 3 \\ E_n, & \text{si } X_n > 3 \end{cases}$$

$$y f_4^*(s) = 0.$$

$$n = 3$$

Al final del periodo en estudio debe haber dos unidades por lo que para esta etapa $I_f=2$, los requerimientos para esta etapa son $D_3=2$; si $X_n=0$, entonces $I_3=4$ unidades. Por el contrario, si $X_n=4$ (producción máxima), entonces $I_3=0$. Por ello, los posibles estados, es decir, los posibles niveles de inventario al inicio del mes 3 son: 0,1,2,3 y 4.

$S_n \backslash X_n$	$f_n^*(s) = c(s, X_n)$					X_n^*	$f_n^*(s)$
	0	1	2	3	4		
0	-	-	-	-	49	4	49
1	-	-	-	38	-	3	38
2	-	-	29	-	-	2	29
3	-	20	-	-	-	1	20
4	6	-	-	-	-	0	6

$n = 2.$

Los posibles niveles de inventario que pueden existir al inicio de este mes son : 0,1,2,3 y 4. Sustituyendo los datos de producción X_n y los del nivel de inventario al inicio del periodo S_n , se obtiene:

$S_n \backslash X_n$	$f_n(s, X_n) = c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)$					X_n^*	$f_n^*(s)$
	0	1	2	3	4		
0	-	-	-	89	93	3	89
1	-	-	79	81	86	2	79
2	-	69	71	75	80	1	69
3	49	61	65	69	69	0	49
4	41	55	59	48	-	0	41

$n = 1.$

En el primer mes, el inventario inicial S_n es 1, entonces

$S_n \backslash X_n$	$f_n(s, X_n) = c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)$					X_n^*	$f_n^*(s)$
	0	1	2	3	4		
1	89	95	96	87	93	3	87

En esta ultima tabla se ve que lo óptimo es producir 3 unidades en el mes 1, entonces

$$I_f = 1 + 3 - 1 = 3$$

por lo que se llegará al mes 2 con tres unidades en almacén. Con este nivel de inventarios lo óptimo es no producir ningún artículo, y el inventario final es

$$I_f = 3 + 0 - 3 = 0$$

por lo que se llegará al mes tres sin inventario en el almacén. Con este nivel de inventario es necesario producir 4 unidades para satisfacer los requerimientos del mes y terminar con 2 unidades.

Resumiendo, en el primer mes se producen 3 unidades, no se produce en el segundo mes y en el tercer mes se producen 4 unidades, a un costo total mínimo de \$87.

II.8. REVISION PERIODICA:

Quando el inventario *no tiene una tasa constante* de demanda, el modelo del tamaño económico del lote no garantiza una solución de costo mínimo; en estos casos no opera la *revisión continua*, sino la *revisión periódica*.

II.9. MODELO GENERAL PARA LA PLANEACION DE LA PRODUCCION:

El desarrollo de modelos deterministas dinámicos está limitado al estudio de horizontes de tiempo finito. Esto es así ya que una solución numérica de estos modelos requiere el uso de la técnica de programación dinámica, la cual, en este caso es factible únicamente por un número finito de periodos (etapas).

En este modelo se supone que la demanda, aunque conocida con certeza, puede variar de un periodo al siguiente. También el nivel de inventario se revisa *periódicamente* en lugar de continuamente; el modelo supone que el almacén se reabastece instantáneamente al inicio del periodo y no se permite ninguna escasez.

Los costos a considerar son el costo de preparación K , cargado al principio del periodo, un costo unitario de producción (o de compra) c y un costo unitario de mantener el inventario h , que se carga arbitrariamente al final del periodo. La elección de cargar el inventario al final del periodo y , por tanto, como una función del exceso de suministro por encima del requerimiento, es un tanto diferente al cargo por almacenamiento en que se incurre en los modelos de tamaño económico del lote, donde se carga el costo promedio por unidad de tiempo. Además se conoce como r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a la variable que representa los requerimientos en el instante i y se supone que se deben satisfacer; por último se considera que no existe inventario inicial.

Para un horizonte de n periodos, el problema es determinar cuánto debe producirse al principio de cada periodo, con el objeto de *minimizar* el costo total en el que se incurre en los n periodos.

Para una solución de *programación dinámica*, la i -ésima etapa corresponde al i -ésimo periodo; el estado corresponde al inventario que entra al periodo i (x_i) y la variable de decisión corresponde a la cantidad producida (o comprada) al inicio del periodo i (z_i).

La función $B_i(x_i, z_i)$ representa los costos en que se incurren en el periodo i , dados el inventario de entrada y la cantidad producida, el requerimiento para el periodo i es r_i , entonces $B_i(x_i, z_i)$ está dado por

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + cz_i + h(x_i + z_i - r_i), & \text{si } z_i > 0 \\ h(x_i + z_i), & \text{si } z_i = 0 \end{cases}$$

$C_i(x_i, z_i)$ representa el costo total de la mejor política global desde el principio del periodo i hasta el final del horizonte de planeación, y $C_i^*(x_i)$ es el valor mínimo (óptimo) correspondiente de $C_i(x_i, z_i)$.

$$C_i^*(x_i) = \text{Min} [B_i(x_i, z_i) + f_{i+1}^*(x_i + z_i + r_i)]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} z_i &\geq 0 \\ z_i &\geq r_i - x_i \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Es evidente que $C_{n+1}^*(x_i + z_i - r_i) = 0$, ya que sólo existen n etapas.

II.10. ALGORITMO GENERAL PARA LA PLANEACION DE LA PRODUCCION:

Resolver el modelo general para la planeación de la producción por programación dinámica, puede resultar largo y complicado, básicamente porque hay que obtener C_n, C_{n-1}, \dots, C_2 antes de obtener C_1 .

Simplificando el enfoque de la programación dinámica a continuación se presenta un algoritmo para resolver este modelo, considerando que se mantienen iguales las características del mismo; es decir, requerimiento arbitrario de demanda, costo fijo de preparación y costos lineales de producción y almacenamiento.

C_i será el costo total de la mejor política global desde el principio del periodo i , cuando no se cuenta con existencia alguna, hasta el final del horizonte de planeación, $i=1, 2, \dots, n$. La relación recurrente para C_i está dada por:

$$C_i = \underset{j=i, i+1, \dots, n}{\text{Min}} [C_{j+i} + K + c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j) + h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j - i)r_j)]$$

donde j es un índice que denota el final del periodo en el que el inventario alcanza un nivel de cero por primera vez, después de la producción al principio del periodo i . El costo C_{n+1} es cero, $c(r_i + r_{i+1} + \dots + r_j)$ es el costo de la producción desde el periodo i hasta que el nivel de inventario alcanza nuevamente el cero y $h(r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \dots + (j - i)r_j)$ es el costo total de almacenamiento del inventario resultante de la producción a partir del periodo i , y que permanece hasta que el nivel del inventario llega nuevamente a cero. Este último costo se carga al final de cada periodo como una función del exceso, si existe, por encima del requerimiento.

III. MODELOS ESTOCASTICOS:

III.1. MODELO DE UN PERIODO SIN COSTO FIJO:

Para este modelo de inventario, las existencias se compran (o se producen) para un solo periodo a un costo de c por artículo. El costo unitario neto de almacenar artículos rezagados menos su valor de salvamento es h y se carga como una función de la existencia en exceso por encima de la cantidad requerida. El costo de la demanda no satisfecha es p por unidad. Se supone que no se tiene inventario inicial a la mano. Se denota por y a la cantidad comprada (o producida) al principio del periodo y D es la variable aleatoria de la demanda durante el periodo.

Este modelo de un solo periodo representa el inventario de un artículo que:

1. Se vuelve obsoleto rápidamente,
2. Es perecedero,
3. Se tiene en existencia una sola vez,
4. Tiene un futuro incierto más allá de un solo periodo.

Bajo estas condiciones, el nivel de inventario y adquiere máxima importancia. A priori, se puede pensar que y debe ser mayor que la demanda esperada, pero es obvio que se requiere menos que la demanda máxima, por lo que es necesario promediar entre el riesgo de incurrir en faltantes (costos por déficit) y el riesgo de tener excedentes (costos por desperdicio).

La cantidad vendida está dada por

$$\min(D, y) \begin{cases} D, & \text{si } D < y \\ y, & \text{si } D \geq y \end{cases}$$

De donde, el costo en que se incurre si la demanda es D y se tiene en existencia y , está dado por

$$C(D, y) = cy + p \text{Max}(0, D - y) + h \text{Max}(0, y - D)$$

Dado que la demanda es una variable aleatoria (con distribución de probabilidad $P_D(d)$), este costo también es una variable aleatoria. Entonces la esperanza del costo está dada por $C(y)$, en donde

$$\begin{aligned} C(y) = E\{C(D, y)\} &= \sum_{d=0}^{\infty} [cy + p \text{máx}(0, d - y) + h \text{máx}(0, y - d)] P_D(d) \\ &= cy + \sum_{d=y}^{\infty} p(d - y)P_D(d) + \sum_{d=0}^{y-1} h(y - d)P_D(d) \end{aligned}$$

Es evidente que $C(y)$ depende de la distribución de probabilidad $P_D(d)$. Con frecuencia, es difícil hallar una representación de esta distribución de probabilidad, particularmente cuando la demanda varía sobre un número grande de valores posibles. De donde, a menudo esta variable aleatoria discreta se aproxima por medio de una variable aleatoria continua. Además, cuando la demanda varía sobre un número grande de valores posibles, esta aproximación generalmente conducirá a pequeñas diferencias, en los valores numéricos, en las cantidades óptimas del inventario que debe tenerse en existencia. Asimismo, cuando se utiliza una demanda discreta, las expresiones resultantes pueden volverse ligeramente más difíciles de resolver analíticamente. De donde, a menos que se diga otra cosa, se supondrá una demanda continua. La función de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria continua será

$$\varphi_D(\xi)$$

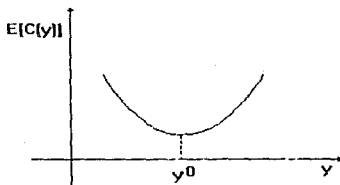
y el costo esperado $C(y)$ se expresa como

$$\begin{aligned} C(y) = E\{C(D, y)\} &= \int_0^{\infty} [cy + p \text{máx}(0, \xi - y) + h \text{máx}(0, y - \xi)] \varphi_D(\xi) d\xi \\ &= cy + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \\ &= cy + L(y). \end{aligned}$$

donde $L(y)$ recibe el nombre de déficit esperado más el costo de almacenamiento. El valor óptimo y^0 se obtiene igualando la primera derivada de $E[C(y)]$ a cero, es decir, aplicando máximos y mínimos, de donde y^0 es

$$\Phi y^0 = \frac{p - c}{p + h}$$

El valor de y^0 está definido únicamente si $p \geq c$, de lo contrario, se debe descartar por completo el sistema de inventario. Por otra parte, como la segunda derivada de $E[C(y)]$ es positiva, entonces y^0 corresponde a un punto mínimo.



La función $\Phi(a)$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria de demanda, es decir,

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi$$

Si D es una variable aleatoria discreta que tiene la función de distribución acumulada

$$F_D(b) = \sum_{d=0}^b P_D(d)$$

se obtiene un resultado semejante para y^0 , que debe ser el menor entero tal que

$$F_D y^0 \geq \frac{p - c}{p + h}$$

Este mismo modelo puede ser utilizado cuando existe un nivel inicial de existencias x . En este caso, la cantidad óptima y^0 se calcula de manera idéntica, y se debe tener en cuenta el siguiente criterio:

Si $x < y^0$, el pedido debe ser por $(y^0 - x)$ unidades
 Si $x \geq y^0$, no hacer el pedido

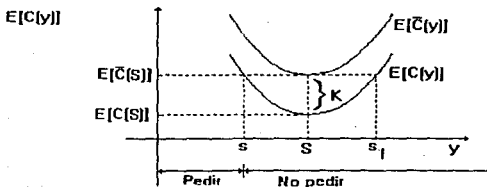
III.2. MODELO DE UN PERIODO CON COSTO DE PREPARACION:

Este modelo es muy similar al modelo anterior, excepto que se toma en cuenta el costo fijo K .

La ecuación de costo total $E[\bar{C}(y)]$ es:

$$E[\bar{C}(D,y)] = K + c(y-x) + \int_y^{\infty} p(\xi-y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y-\xi) \varphi_D(\xi) d\xi$$

Ya que K es constante, el valor mínimo de $E[\bar{C}(y)]$, también se alcanza en y^0 .



El valor de S es igual a y^0 y el valor de s se determina a partir de

$$E[C(s)] = E[\bar{C}(S)] = K + [E(S)]$$

tal que $s < S$. El valor s_1 debe ser descartado.

Esta política se conoce como política (s,S) y se resume como sigue:

Si $x < s$, el pedido debe ser por $(S - x)$ unidades
 Si $x \geq s$, no hacer el pedido

La optimidad de la política (s,S) depende principalmente del hecho de que la función de costo es convexa. En general, cuando esta propiedad no se satisface la política (s,S) dejará de ser óptima.

III.3. MODELO DE DOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION:

A priori, podría pensarse que para resolver este modelo bastaría con aplicar dos veces el modelo de un periodo sin costo de preparación y así se encontraría una solución óptima, sin embargo esto no es cierto. Pueden lograrse costos inferiores analizando el problema desde el punto de vista de la programación dinámica para los dos periodos.

Los costos asociados a este modelo son el costo unitario de compra (o producción) c , el costo por déficit unitario p y el costo unitario de almacenamiento h . Además, las demandas D_1 , D_2 para los dos periodos son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas que tienen la densidad

$$\phi_D(x)$$

El problema es hallar y_1^0 y y_2^0 que describen la política óptima para hacer los pedidos. y_1 y y_2 representan el nivel de inventario existente después de hacer el pedido, al principio del periodo respectivo. $C(x_1)$ es el costo mínimo esperado desde el principio del período 1 hasta el final del periodo 2, teniendo x_1 unidades en existencia. De la misma manera $C(x_2)$ es el costo mínimo esperado desde el principio del periodo 2 con x_2 unidades en existencia.

Como el algoritmo de programación dinámica requiere una política hacia atrás, entonces y_2^0 se encuentra de la misma manera que en el modelo de un solo periodo.

$$\Phi[y_2^0] = \frac{p-c}{p+h}$$

como x_2 es la cantidad disponible al principio del segundo periodo, entonces

Si $x_2 < y_2^0$, el pedido debe ser por $(y_2^0 - x_2)$ unidades
 Si $x_2 \geq y_2^0$, no hacer el pedido

El costo de la política óptima $C_2(x_2)$ es

$$C_2(x_2) = \begin{cases} L(x_2), & \text{si } x_2 \geq y_2^0 \\ c(y_2^0 - x_2) + L(y_2^0), & \text{si } x_2 < y_2^0, \end{cases}$$

$L(z)$ es el costo esperado por déficit, más almacenamiento para un solo periodo, cuando se tienen z unidades disponibles y $L(z)$ se expresa como

$$L(z) = \int_z^{\infty} p(\xi - z) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^z h(z - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi$$

Al principio del primer periodo, los costos en que se incurre constan del costo de compra $c(y_1 - x_1)$, el costo esperado por déficit más almacenamiento $L(y_1)$ y los costos asociados con seguir una política óptima durante el segundo periodo. Por tanto, el costo esperado de seguir la política óptima durante los dos periodos está dado por

$$C_1(x_1) = \min_{y_1 \geq x_1} (c(y_1 - x_1) + L(y_1) + E[C_2(x_2)])$$

en donde $E[C_2(x_2)]$ se obtiene de la manera siguiente: Como x_2 es una variable aleatoria que depende de la cantidad de existencias al principio del periodo 2; es decir, $x_2 = y_1 - D_1$. Entonces

$$C_2(x_2) = C_2(y_1 - D_1) = \begin{cases} L(y_1 - D_1), & \text{si } y_1 - D_1 \geq y_2^0 \\ c(y_2^0 - x_2 + D_1) + L(y_2^0), & \text{si } y_1 - D_1 < y_2^0 \end{cases}$$

El valor esperado de la variable aleatoria $C_2(x_2)$ está dado por

$$\begin{aligned} E[C_2(x_2)] &= \int_0^{\infty} C_2(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_{y_1 - y_2^0}^{\infty} [c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)] \varphi_D(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Como se admiten los déficit, la expresión

$$(y_1 - \xi)$$

puede ser negativa.

$E[C_2(x_2)]$ es simplemente una función de y_1 y y_2^0 , donde y_2^0 ya es conocida dada la relación obtenida para el modelo de un solo periodo. Entonces, $C_1(x_1)$ se expresa como

$$C_1(x_1) = \text{Min}_{y_1 \geq x_1} \left\{ c(y_1 - x_1) + L(y_1) + \int_0^{y_1 - y_2^0} L(y_1 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int_{y_1 - y_2^0}^{\infty} [c(y_2^0 - y_1 + \xi) + L(y_2^0)] \varphi_D(\xi) d\xi \right\}$$

El valor óptimo y_1^0 se obtiene igualando la primera derivada de $C_1(x_1)$ a cero, es decir, aplicando máximos y mínimos, de donde y_1^0 satisface la ecuación

$$-p + (p+h)\Phi(y_1^0) + (c-p)\Phi(y_1^0 - y_2^0) \\ + (p+h) \int_0^{y_1^0 - y_2^0} \Phi(y_1^0 - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi = 0$$

donde $\Phi(a)$ es la función de distribución acumulada

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi$$

III.4. MODELO DE VARIOS PERIODOS SIN COSTO DE PREPARACION:

Este modelo es una extensión del problema de dos periodos. Existe un horizonte de n periodos, para los cuales se requiere determinar la política óptima para inventario. Para este modelo se supone que hay reabastecimiento instantáneo, los déficit se acumulan, excepto en el periodo final, en el que se pierden; no se permite la enajenación del inventario.

Las demandas para los n periodos son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con una densidad $\varphi_D(\xi)$

El costo de compra es lineal, cz , donde z es la cantidad pedida y por último, el costo esperado de penalización por déficit más almacenamiento por un periodo $L(y)$ es estrictamente convexo. También se incluye un tasa de descuento por costo (α) para $0 < \alpha < 1$. Este factor α considera el valor del dinero en el tiempo.

Sea $C_i(x_i)$ la función de costo que es necesario minimizar

$$C_i(x_i) = \text{Min}_{y_i \geq x_i} \left\{ c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} h(y_i - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_{y_i}^{\infty} p(\xi - y_i) \varphi_D(\xi) d\xi + \alpha \int_0^{\infty} C_{i+1}(y_i - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \right\} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

con

$$C_{n+1}(y_n - \xi) = 0$$

La ecuación recursiva anterior se resuelve por programación dinámica. Sin embargo, este procedimiento es extremadamente difícil en este caso. El caso puede ser analizado, sin embargo, concediendo que n tienda a ∞ . Esto proporciona el modelo de periodos infinitos con su ecuación recursiva dada como

$$C(x) = \text{Min}_{y \geq x} \left\{ c(y - x) + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \alpha \int_0^{\infty} C(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi \right\}$$

donde x y y son los niveles de inventario para cada periodo antes y después de que se recibe un pedido.

Una función de costo es estrictamente convexa si cada uno de los costos es lineal y $\varphi_D(\xi) > 0$

La política óptima para el caso de periodos infinitos es del tipo de un solo número crítico y^0 . Aplicando máximos y mínimos, se tiene

$$\frac{\partial C(x)}{\partial y} = c + h \int_0^y \varphi_D(\xi) d\xi - p \int_y^\infty \varphi_D(\xi) d\xi + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial C(y - \xi)}{\partial y} \varphi_D(\xi) d\xi = 0$$

y el valor de

$$\frac{\partial C(y - \xi)}{\partial y}$$

se determina como sigue. Si existen $\delta (> 0)$ unidades al inicio del siguiente periodo, el costo aumentará en $c\delta$, esto significa que

$$\frac{\partial C(y - \xi)}{\partial y} = c$$

La ecuación anterior, será

$$c + h \int_0^y \varphi_D(\xi) d\xi - p \left(1 - \int_0^y \varphi_D(\xi) d\xi \right) + \alpha c \int_0^\infty \varphi_D(\xi) d\xi = 0$$

Esto se reduce a

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c(1 + \alpha)}{p + h}$$

donde $\Phi(a)$ es la función de distribución acumulada

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi$$

La política óptima para cada periodo, dado su inventario de entrada x , es

Si $x < y^0$, el pedido debe ser por $(y^0 - x)$ unidades
Si $x \geq y^0$, no hacer el pedido

Estos resultados son aplicables al modelo con un número finito de periodos, donde la política óptima es

Al principio del periodo i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Si $x_i < y_i^0$, el pedido debe ser por $(y_i^0 - x_i)$ unidades
Si $x_i \geq y_i^0$, no hacer el pedido

Y además

$$y_n^0 \leq y_{n-1}^0 \leq \dots \leq y_2^0 \leq y_1^0$$

III.5. MODELO DE VARIOS PERIODOS CON COSTO DE PREPARACION:

La introducción de un costo fijo de preparación K en el que se incurre al hacer un pedido, a menudo agrega mayor realismo al modelo, sin embargo, el cálculo exacto resulta ser extremadamente difícil por la complejidad del modelo.

Si se supone que el costo de hacer un pedido es

$$\begin{cases} 0, & \text{si } z = 0 \\ K + cz, & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

y si $L(y)$ es estrictamente convexa, entonces la política óptima tiene la forma

Al principio del periodo i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Si $x_i < s_i$, el pedido debe ser por $(s_i - x_i)$ unidades
Si $x_i \geq s_i$, no hacer el pedido

Esta es la política (s, S) que se mencionó en el análisis de los modelos con un periodo. Los cálculos de s_i y S_i , para el modelo de horizonte finito o infinito son extremadamente difíciles. Sin embargo, no se puede minimizar la importancia de este resultado. Incluso si se desconocen los s_i y S_i exactos, es importante saber que se debe considerar el uso de políticas de esta forma, en lugar de una política de cualquier otra clase.

III.6. MODELOS CON COSTOS DE PENALIZACION NO LINEALES:

Se pueden obtener resultados semejantes para estos modelos, con costos de almacenamiento y de penalización por déficit no lineales. Si el costo de almacenamiento se define como

$$\begin{cases} 0, & \text{si } y < D \\ h[y - D], & \text{si } y \geq D \end{cases}$$

en donde $h[y - D]$ es una función matemática no necesariamente lineal. Del mismo modo el costo de penalización por déficit puede expresarse como

$$\begin{cases} 0, & \text{si } D < y \\ p[D - y], & \text{si } D \geq y \end{cases}$$

en donde $p[D - y]$ también es una función no necesariamente lineal.

El costo total esperado se define como

$$c(y - x) + \int_y^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^y h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi$$

donde x es la cantidad en existencia.

Si se define $L(y)$ como el costo esperado por déficit más almacenamiento, es decir,

$$L(y) = \int_z^{\infty} p(\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^z h(y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi$$

entonces el costo total esperado es

$$c(y - x) + L(y).$$

La política óptima se obtiene minimizando esta expresión, sujeta a la restricción de que $y \geq x$

$$\begin{aligned} \text{Min } & \{c(y - x) + L(y)\} \\ & y \geq x \end{aligned}$$

Si los costos por déficit y almacenamiento son cada uno convexo y $\varphi_D(\xi) > 0$ entonces $L(y)$ es estrictamente convexa y la política óptima está dada por

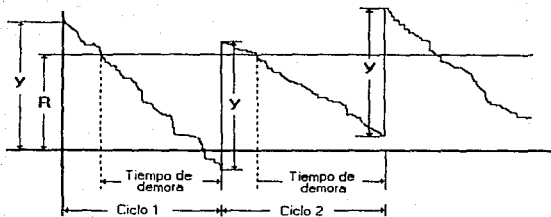
Si $x < y^0$, el pedido debe ser por $(y^0 - x)$ unidades
 Si $x \geq y^0$, no hacer el pedido

en donde y^0 es el valor de y que satisface la expresión

$$\frac{dL(y)}{dy} + c = 0$$

III.7. MODELOS DE REVISION CONTINUA CON TIEMPOS DE ENTREGA FIJOS:

Este es un modelo probabilístico en el cual el nivel de inventario se revisa continuamente, y un pedido de tamaño y se coloca cada vez que el nivel de existencias llega a un cierto punto de reorden R . El objetivo es determinar los valores óptimos de y y R que minimicen los costos esperados de inventarios por unidad de tiempo. En este modelo, un año representa una unidad de tiempo.



Un ciclo se define como el periodo entre dos llegadas sucesivas de pedidos. Las hipótesis del modelo son:

1. El tiempo de demora entre la colocación de un pedido y su recepción es estocástico.
2. La demanda que no se satisface durante el tiempo de demora se deja pendiente para ser satisfecha en periodos posteriores.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de demora es independiente del tiempo en la cual ésta ocurre.
4. No existen más de un pedido sobresaliente a la vez.

Sean

- $r(x|t)$ la función de distribución de probabilidad condicional de la demanda x durante el tiempo de demora t , $x > 0$
 $s(t)$ la función de distribución de probabilidad del tiempo de demora t , $t > 0$
 $f(x)$ la función de distribución de probabilidad absoluta de la demanda x durante el tiempo de

$$\text{demora} = \int_0^{\infty} r(x|t) s(t) dt$$

- y cantidad ordenada por ciclo
 D demanda total esperada por año
 h costo de mantener el inventario por unidad por año
 p costo de escasez por unidad por año

El costo anual total para este modelo incluye el costo fijo promedio, el costo esperado de mantenimiento de inventario y el costo esperado de escasez. El costo fijo promedio está dado por (DK/y) , donde (D/y) es el número aproximado de pedidos por año y K es el costo fijo por orden.

El costo esperado de mantener el inventario se calcula con base en el nivel de inventario neto esperado al inicio y al final del ciclo. El nivel esperado al final de un ciclo de inventario es igual a $E(R - x)$. Al comienzo del ciclo (justo después que se recibe un pedido de tamaño y), el nivel esperado de inventario es igual a $y + E(R - x)$. Esto significa que el inventario promedio por ciclo (y entonces por año) está dado por

$$\bar{H} = \frac{(y + E(R - x)) + E(R - x)}{2} = (y/2) + E(R - x)$$

y dada $f(x)$

$$E(R - x) = \int_0^{\infty} (R - x) f(x) dx = R - E(x)$$

Si $R - E(x)$ es negativo (cantidad de escasez), entonces \bar{H} se despreja. Esta es una de las aproximaciones simplificatorias del modelo.

Sea S la cantidad de escasez por ciclo, entonces

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq R \\ x - R, & \text{si } x > R \end{cases}$$

Consecuentemente, la cantidad esperada de escasez por ciclo es

$$\bar{S} = \int_0^{\infty} S(x) f(x) dx = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx$$

La escasez anual esperada es (\overline{DS}/y) ya que aproximadamente existen (D/y) órdenes por año.

El costo anual total del sistema, está dado por

$$TAC(y, R) = \frac{DK}{y} + h \left[\frac{y}{2} + R - E(x) \right] + \frac{pD\overline{S}}{y}$$

Para simplificar aún más el modelo, el costo de escasez (pDS/y) se supone proporcional a la cantidad de escasez únicamente sin tomar en cuenta el tiempo de escasez.

La solución para la y^0 y la R^0 , óptimas se obtiene de

$$\frac{\partial TAC}{\partial y} = -\frac{DK}{y^2} + \frac{h}{2} - \frac{pD\overline{S}}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial TAC}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y} \right) \int_R^{\infty} f(x) dx = 0$$

De la primera ecuación,

$$y^0 = \sqrt{\frac{2D(K + p\overline{S})}{h}} \quad (1)$$

y, de la segunda ecuación,

$$\int_{R^0}^{\infty} f(x) dx = \frac{hy^0}{pD} \quad (2)$$

Una solución general explícita para y^0 y R^0 , por ello para resolver las ecuaciones (1) y (2) se debe emplear un método de análisis numérico.

En la ecuación (1), \bar{S} es al menos igual a cero. Esto demuestra que el valor más pequeño de y^0 es igual a

$$\sqrt{\frac{2DK}{h}}$$

lo cual se logra cuando $\bar{S} = 0$ (o $R \rightarrow \infty$). Para $R = 0$, la ecuación (1) da

$$y^0 = \hat{y} = \sqrt{\frac{2D[K + pE(x)]}{h}}$$

mientras que la ecuación (2) proporciona

$$y^0 = \tilde{y} = \frac{pD}{h}$$

Si $\tilde{y} \geq \hat{y}$, los valores óptimos de y y R son únicos y se calculan como sigue:

1. Calcular el primer valor de ensayo de y^0 como

$$y_1 = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$$

2. Usar la ecuación (2) para calcular el valor de R_1 correspondiente a y_1 .
3. Usando R_1 se obtiene un nuevo valor de ensayo y_2 de la ecuación (1).
4. R_2 se calcula de la ecuación (2) utilizando y_2 . Se continua iterando hasta que $R_{j-1} \approx R_j$, en este punto el valor calculado para y_j y R_j proporcionarán y^0 y R^0 .

BIBLIOGRAFIA

- Buffa, E. W. Taubert *SISTEMAS DE PRODUCCION E INVENTARIO, PLANEACION Y CONTROL*, Limusa, México, 1981.
- Buffa, Elwood S. *ADMINISTRACION DE OPERACIONES, LA ADMINISTRACION DE SISTEMAS PRODUCTIVOS*, Limusa, México, 1981.
- Hillier, F., G. Lieberman. *INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES*, Mc. Graw-Hill, México, 1985.
- Magee, J. D. Boodman, *PLANEAMIENTO DE LA PRODUCCION Y CONTROL DE INVENTARIOS*, El Ateneo, Buenos Aires, 1979.
- Monroy, C. Luis Miguel, *MANUAL DE INVESTIGACION DE OPERACIONES*, Universidad Anáhuac, México, 1984.
- Plossl, George W. *CONTROL DE LA PRODUCCION Y DE INVENTARIOS, PRINCIPIOS Y TECNICAS*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, 1987.
- Shamblin J., G. T. Stevens *INVESTIGACION DE OPERACIONES, UN ENFOQUE FUNDAMENTAL*, Mc. Graw-Hill, México, 1986.
- Taha, Hamdy *INVESTIGACION DE OPERACIONES, UNA INTRODUCCION*, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México, 1976.
- Ullmann, John E. *TEORIA Y PROBLEMAS SOBRE METODOS CUANTITATIVOS EN ADMINSTRACION*, Mc. Graw-Hill, México, 1979.

CAPITULO IV

CONTROL DE CALIDAD

I. INTRODUCCION:

I.1. DEFINICION DE CALIDAD:

El diccionario define *calidad* como *propiedad o conjunto de propiedades inherentes a una cosa, que permiten apreciarla como igual, mejor o peor que las restantes de su especie.*

I.2. CONTROL DE CALIDAD ESTADISTICO:

Todos los procesos productivos tienen *variaciones* y la tarea de la dirección consiste en distinguir entre la *variación tolerable* que es representativa del sistema estable y los cambios mayores que dan lugar a un *producto inaceptable*. La dirección debe estar consciente de la capacidad inherente del sistema para poder saber cuándo es anormal su rendimiento. En consecuencia, como se está tratando con sistemas que tienen *variación*, el modelo de control de calidad deberá ser *probabilista*. La herramienta matemática para evaluar el control de calidad es la estadística, que comprende la rama descriptiva, la teoría de la probabilidad y el muestreo.

A causa de la naturaleza continua de los procesos y su variabilidad inherente, se hace necesario basar en *muestreos* las decisiones sobre control de calidad.

En primer lugar, por lo general no es posible examinar todos los datos, porque el proceso es continuo, y en el mejor de los casos sólo se dispone de muestras.

En segundo lugar, aunque se dispusiera de una gran cantidad de datos, podría ser antieconómico analizarlos.

En tercer lugar, la medición y la inspección requieren a veces que se rompa la unidad, y finalmente, para algunos productos, todo manejo adicional puede ocasionar defectos y debe de evitarse.

Por todo lo anterior, el *muestreo de la información* relativa al estado de las materias primas de entrada y al de control de los procesos, es el método común sobre el que se basan las decisiones y las acciones de control.

I.3. APLICACIONES REPRESENTATIVAS:

La intervención de los métodos estadísticos ha producido un gran efecto en todo el campo del control de calidad. Esta ayuda técnica está representada por cuatro instrumentos de trabajo, que pueden utilizarse separadamente o en combinación y que son los siguientes:

1. *Distribución de frecuencias.* Consiste en una tabulación ordenada del número de veces que una característica de calidad ocurre dentro de las muestras del producto que se examinan. Como una representación de la calidad de la muestra, hace resaltar a simple vista:
 - a) la calidad media,
 - b) la dispersión de los elementos de la muestra y
 - c) el contraste comparativo de la calidad con los requisitos especificados.

Este instrumento se usa en el análisis de la calidad de un proceso o plan.

2. *Gráficas de control.* Contienen una comparación gráfica de las características actuales del producto, en orden cronológico, con límites que indican cuál es el estado de la producción. Cuando la curva se aproxima o excede los límites; algo que requiere investigación se ha interpuesto en el proceso. Esta herramienta se puede usar para conservar el control después de que la distribución de frecuencias ha mostrado que el proceso está dentro de "control".
3. *Tablas de muestreo.* Están constituidas por una serie de resúmenes numéricos que representan la relación probabilística (generalmente expresada en porcentajes), entre el lote completo y las muestras que se tomen del lote que se trate. Estas tablas se usan cuando se desea conocer la calidad del material recibido o producido.
4. *Métodos especiales.* Incluyen técnicas tales como análisis de tolerancias, correlación y análisis de varianza. Estos métodos han sido confeccionados para el uso del control de calidad industrial con elementos de la estadística general. Esta herramienta se usa en análisis especiales de diseño o de dificultades en el proceso.

II. EL CONTROL DE CALIDAD:

II.1. ESTUDIO DEL PROCESO:

Los factores que afectan la calidad de un producto se pueden dividir en dos grupos:

1. *El tecnológico:* máquinas, materiales y procesos;
2. *El humano:* operadores, jefes de taller y otro personal de la compañía.

Como es obvio, es necesario estudiar el proceso productivo a fin de conocer sus operaciones y tomar las medidas de control pertinentes.

El *Diagrama de Flujo de Operaciones de un Proceso* muestra el orden cronológico de todas las operaciones, inspecciones y materiales a utilizar en un proceso de fabricación o administrativo, desde la llegada de la materia prima hasta el arrojado final del producto terminado.

El diagrama debe representar gráficamente los puntos en los cuales los materiales son introducidos en el proceso y de la secuencia de las inspecciones y de todas las operaciones excepto todas aquellas que involucren manejo de materiales.

Los símbolos usados son los siguientes:



Operación



Inspección



Combinado

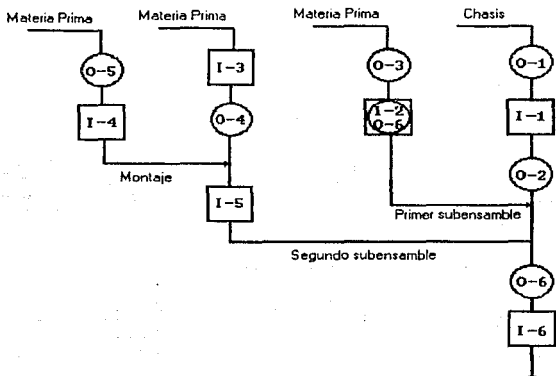
La *operación* es cuando un objeto es transformado intencionalmente en sus características físicas o químicas, ensamblado o desensamblado de otro objeto, o es preparado para una operación, transporte, inspección o almacenamiento.

Una *inspección* ocurre cuando un objeto es examinado para verificar si la cantidad y la calidad se cumple con la norma o el estándar previamente establecida para tal efecto.

Combinado es cuando se realiza una inspección simultáneamente con una operación.

Con *líneas verticales* se indica el flujo o curso general del proceso a medida que se realiza el trabajo, y con *líneas horizontales* entroncadas con las verticales se indica la introducción de un ensamble o material, ya sea previamente de una operación paralela, o bien, de compras o almacén de materia prima.

Junto a cada símbolo se debe anotar una descripción de cada operación y/o inspección y el tiempo que se tarda en llevarla a cabo.



Un *diagrama de flujo* es una *representación gráfica* de las *dependencias* en el proceso. Estas *dependencias* pueden determinar la capacidad efectiva del sistema ya que la capacidad máxima está determinada por las operaciones donde hay *cuellos de botella*.

Por *cuello de botella* se entiende una operación cuya capacidad es menor o igual a la demanda.

Los cuellos de botella son quienes determinan la capacidad de cada operación en el sistema. Si no existen cuellos de botella, la capacidad efectiva del sistema estará determinada por la demanda del producto.

II.2. RECOLECCION DE DATOS:

El propósito de obtener datos, es tener las bases para tomar las acciones adecuadas. Para ello, es necesario asegurarse que los datos son correctos, que éstos deben ser analizados de tal forma que los resultados se entiendan, e interpretarse en el contexto de los datos originales.

La recolección de datos puede ser una labor compleja ya que la mayoría de los problemas surgen de un conjunto complejo de factores que afectan el proceso, una vez analizado éste; el primer paso es escoger aquellas variables que es necesario monitorear, auxiliándose con los diagramas de flujo.

II.3. CALCULO DE LOS PARAMETROS PROBABILISTICOS:

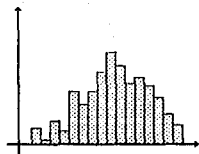
Ya que la herramienta principal del control de calidad es la estadística, a continuación se presenta un resumen de las fórmulas más empleadas, para población y muestra:

	Población (Parámetros)	Muestra (Estadísticos)
Tamaño	N	n
Promedio aritmético	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
Varianza	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$
Desviación Estándar	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$

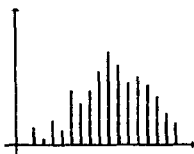
II.4. GRAFICACION DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS:

Existen tres formas comunes de representar gráficamente las distribuciones de frecuencias:

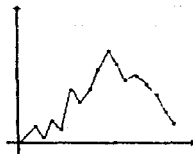
1. *Histograma de frecuencias.* En esta gráfica la base de la columna representa la amplitud de la clase y la altura de la columna es proporcional a la frecuencia.
2. *Gráfica de barras.* Las barras están centradas en los puntos medios de las clases y la altura de cada una de las barras es proporcional a la frecuencia de cada clase.
3. *Polígono de frecuencias.* En un polígono de frecuencias los puntos medios de cada clase se unen mediante líneas rectas.



Histograma de frecuencias



Gráfica de barras



Polígono de frecuencias

Para elaborar una distribución de frecuencias para datos muestrales se siguen los siguientes pasos:

1. *Determinar la amplitud de variación* de los datos.
2. *Establecer el número de clases.* Una regla empírica es calcular la raíz cuadrada de n (número de observaciones) y ajustarla para adaptarla a (si es necesario) los límites 5 a 15.
3. *Dividir la amplitud de variación entre k ,* que es el número de clases, para obtener la amplitud de clase, redondeando a un número conveniente.
4. *Enunciar los límites de clase* preliminares, revisándolos para que éstos se toquen, pero no se superpongan.

5. *Enumerar los intervalos y efectuar un conteo por marcas de datos según su clase.*
6. *Elaborar un histograma de frecuencias. Si es una gráfica de barras, será necesario calcular los puntos medios de los intervalos del histograma, si es un polígono de frecuencias, se unen con rectas los puntos medios de los intervalos del histograma.*

III. GRAFICAS DE CONTROL :

III.1. GRAFICAS DE CONTROL:

Es probable que la actividad más generalizada del control de calidad sea el control de la materia prima, de los volúmenes unitarios de producción y de las piezas de los conjuntos durante el proceso de su manufactura. La principal ayuda estadística para estos trabajos es la *gráfica de control* y sus modificaciones particulares.

Durante muchos años se han venido empleando las gráficas de control en la industria. Su más prominente iniciador fue el Dr. Walter A. Shewhart, de los Laboratorios de la Bell Telephone.

Unicamente se necesitan nociones rudimentarias para el conocimiento práctico de esta herramienta. Aún cuando, existen muchas adaptaciones del tipo original de las gráficas de control, estas sólo constituyen modificaciones en sus detalles, para satisfacer determinadas situaciones particulares.

De acuerdo con las dos clases de datos de que se dispone en la industria, existen dos modelos fundamentales para las gráficas de control:

1. *Gráficas para mediciones o por "variables"*. (\bar{X}, R). Estas gráficas tienen su empleo en el caso de que se efectúen mediciones en determinada escala.
2. *Gráficas para datos que provienen de calibradores de paso-no pasa o por "atributos"*. En este caso se emplean las gráficas de porcentaje de defectos, que se conocen como las *gráficas de p*.

Las etapas que se siguen para el proceso de las gráficas son las siguientes:

1. Selección de la característica de calidad más conveniente.
2. Recolección de los datos tomados de cierto número de muestras, cada una formada por un número conveniente de unidades.

3. Determinación de los límites de control, de acuerdo con los datos proporcionados por las muestras.
4. Decidir si esos límites de control, son económicamente satisfactorios para el trabajo.
5. Trazar estos límites de control sobre una hoja cuadrículada. Iniciar el registro de los resultados de las muestras de un tamaño adecuado, seleccionándolas a determinados intervalos periódicos y conforme se vayan tomando de la producción.
6. Cuando la característica de las muestras de la producción quede fuera de los límites de control, tomar la acción correctiva necesaria.

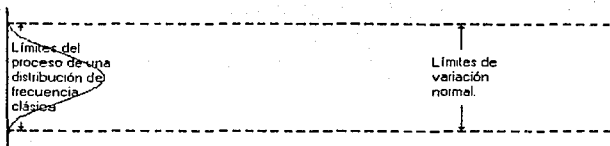
Quando en un proceso las características de las muestras se conservan persistentemente dentro de los límites de control, se dice que el *proceso está bajo control*.

En algunas ocasiones, cuando se inicia el cálculo de los límites de control, ya sea en piezas o en conjuntos, aparece el *proceso fuera de control*; las características de varias muestras se presentan fuera de los límites de control. En esos casos, el motivo de la excesiva variación en las muestras se debe localizar y eliminar. Los pasos 2 y 3 se deben repetir hasta que el proceso quede bajo control.

La mayor parte de los datos que se usan en la industria, provienen de una inspección con calibradores de *pasa-no pasa*. Pero actualmente, se está generalizando el sistema de inspección por mediciones en vista de la ventaja que presenta para la prevención de material defectuoso.

III.2. RELACION ENTRE LAS TECNICAS ESTADISTICAS Y LAS GRAFICAS DE CONTROL:

Existe una completa similitud entre los límites del proceso y los límites de variación normal, al tratarse de las gráficas de control. Los límites de variación normal son, para fines prácticos, los límites del proceso de las distribuciones de frecuencias, que sean *representativas* de la calidad del producto examinado.



Debido a esta similitud, la forma de una gráfica de control por variables es simplemente una aplicación de las distribuciones de frecuencias mencionadas.

II.3. GRAFICA DE CONTROL PARA EL PORCENTAJE DEFECTUOSO:

En la inspección por el sistema por atributos a cada unidad se le clasifica como dentro de límites o fuera de límites de especificaciones. Frecuentemente los datos de la inspección por atributos, se representan por el valor de su fracción de defectos o por el porcentaje de defectos. La fracción de defectos (expresada por una cifra decimal) es el valor que se obtiene al dividir el número de unidades que presentan defectos, entre el número total de unidades inspeccionadas. El porcentaje de defectos es la representación en porcentaje del anterior valor decimal.

Siendo universal el concepto de la variabilidad entre las piezas manufacturadas, se deberá de encontrar en la inspección por atributos y en su correspondiente valor del porcentaje de defectos, como en las lecturas por mediciones efectivas. En este caso la variable aleatoria es *binomial*, es decir, *no defectuoso-defectuoso*. Tanto tanto la media como la desviación estándar se pueden representar en términos del número o el porcentaje de defectos.

La *media* del porcentaje de defectos, se simboliza por \bar{p} . Para un tamaño constante de muestra, este valor se puede calcular dividiendo el porcentaje de defectos por muestra entre el tamaño de la muestra.

Si el tamaño de las muestras es variable, de una a otra, \bar{p} se encuentra dividiendo el número total de defectos encontrados en la serie de muestras, entre el número total de unidades en la serie de muestras

$$\bar{p} = \left(\frac{\sum c}{\sum n} \right) 100$$

donde c es el número de defectos.

La desviación estándar de \bar{p} se simboliza por $\sigma_{\bar{p}}$ y para un tamaño constante de muestra se calcula con

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(100 - \bar{p})}{n}}$$

donde \bar{p} es el valor medio del porcentaje defectuoso y n es el tamaño de la muestra.

Los límites de control se conocen como *límites de 3-sigma*, porque la experiencia ha demostrado que el valor *3-sigma* es el más útil y económico para las aplicaciones de las gráficas de control, puesto que para ese valor la mayor parte de las distribuciones de frecuencias encontradas en la industria, tienden a la "normalidad". La obtención de estos límites de control, es como sigue:

$$\text{Límites de control} = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(100 - \bar{p})}{n}}$$

Cuando los valores del porcentaje defectuoso de las muestras tomadas de la producción, resulten fuera de los límites de control del porcentaje defectuoso, indicarán que se ha efectuado un cambio en el proceso que reclama una acción correctiva.

Las gráficas de control basada en datos del porcentaje defectuoso, tienen dos variedades principales, que son:

1. *Tamaño constante de muestra.* Se basan estas gráficas en la comparación de los valores del porcentaje defectuoso o de la fracción defectuosa, con los límites de control deducidos de una serie de muestras de un tamaño constante. Estas muestras se seleccionan periódicamente del proceso de producción.

1 Por el Teorema del Límite Central se demuestra que cualquier tipo de distribución de probabilidad con tamaños grandes de muestras, se aproxima a la distribución normal. Este teorema se analiza en el Capítulo II.

2. *Tamaño variable de muestra.* Estas gráficas se emplean cuando se efectúa un inspección 100% de las piezas o conjuntos, como parte de la rutina. El tamaño de la muestra en este caso, es el de la producción total durante el periodo de que se trate, y por tal motivo tendrá que ser diferente de un periodo a otro.

La principal aplicación de las gráficas con tamaño constante de la muestra, es para los casos en que no pueden existir datos de mediciones, - como en acabado de superficies, o colores - o bien, por la dificultad en obtener dichas mediciones. También en el caso en que sea necesario tomar un tamaño constante de muestra, no por necesidad del control de calidad, sino por otros factores como pago del trabajo a destajo; o que el número de unidades que formen un lote para su revisión 100%, esté apegada a un número fijo de unidades.

Las gráficas con tamaño variable de muestra, probablemente son las más importantes de las gráficas en porcentaje defectuoso; además, como el procedimiento para el cálculo de los límites de control no es tan directo, estas se estudian con más detalle a continuación.

La mayor parte de la inspección de piezas en la industria, es por el procedimiento de pasa-no pasa. El examen de las unidades por este procedimiento, es una inspección 100%, en la que se examinan cada una de las piezas, separando las unidades malas de las buenas.

Ya que el tamaño de la muestra es variable, la fórmula

$$\text{Límites de control} = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(100 - \bar{p})}{n}}$$

no se puede aplicar de inmediato para establecer los límites de control, puesto que dicha fórmula está establecida para un tamaño constante de muestra.

Teóricamente, dicha fórmula se emplea para el cálculo de límites de control, de los datos del porcentaje defectuoso, en cada periodo individual de la inspección, tomando \bar{p} para ese periodo, el valor del porcentaje defectuoso en dicho periodo. Esto acarrea consigo una situación poco satisfactoria, al presentarse diferentes límites de control para cada uno de los periodos, siendo por tanto muy difícil la interpretación para los fines prácticos del taller.

Los límites de control para periodos de inspección en que la producción sea muy baja, resultarán mucho más amplios que para periodos en que la producción sea más elevada.

Como una regla práctica se puede establecer que si los tamaños de las muestras presentan una variación entre sí, no mayor del 20%, de acuerdo con criterio comprobado en la industria durante sus periodos de inspección, se puede lograr una exactitud satisfactoria para la mayoría de los fines industriales, determinando y empleando un tamaño medio de muestra para los periodos de inspección en cuestión. Este tamaño medio de muestra, así como otros valores medios pueden ser sustituidos en la fórmula

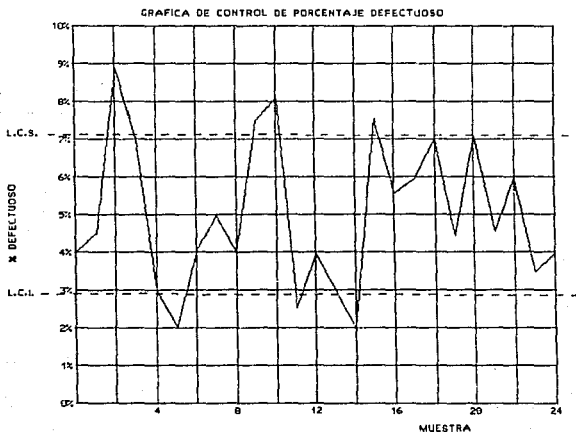
$$\text{Límites de control} = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(100 - \bar{p})}{n}}$$

y así, los cálculos pueden ser simplificados mediante el empleo de constantes que se determinan por medio de esta fórmula.

Para el establecimiento de una gráfica de control de porcentaje defectuoso, se pueden seguir las ocho etapas que se mencionan a continuación:

1. *Determinar cuál es la característica de calidad que se deba de controlar.* Puede ser una sola característica, como una longitud, un peso; con frecuencia se toman todas las que se encuentran en el producto que se examine y que hacen defectuosas a las unidades.
2. *Seleccionar un número conveniente de muestras.* Cada muestra estará formada por un número conveniente de unidades. El número de muestras variará de acuerdo con el proceso de que se trate; y el número de unidades en cada muestra es el número total de unidades examinadas durante un periodo estándar de inspección. Las muestras se deben tomar sucesivamente; y los datos de éstas se deben registrar en el mismo orden en que se vayan tomando.
3. *Calcular el tamaño medio de muestra.*
4. *Calcular el promedio de defectos por muestra.*
5. *Calcular los límites de control de acuerdo con los resultados obtenidos en las etapas 3 y 4.*

6. Examinar los valores del porcentaje defectuoso de cada muestra, con relación a los límites de control y determinar si existe algún factor que amerite una acción correctiva, antes de que estos límites se acepten.
7. Determinar si esos límites de control resultan económicamente satisfactorios para el proceso.
8. Emplear la gráfica de control para la producción activa, como una guía para controlar la característica de calidad de que se trate.



Cuando los resultados de las muestras quedan fuera de los límites de control, se debe proceder a la investigación de las causas de esta variación. Para los puntos que quedan arriba del límite superior, las causas se deben de eliminar si es posible. Las causas por las que los puntos quedaron fuera del límite inferior, se identificarán, si es posible, de tal manera que las razones por las que la calidad ha mejorado en esos periodos, se puedan aprovechar.

Cuando existen muestras fuera de los límites de control, el proceso se debe repetir tomando el mismo número de muestras que en la primera ocasión, toda vez que el proceso haya sido mejorado. Se calculan los nuevos límites de control, comparándose los resultados de las muestras con estos límites. Los procedimientos de la toma de muestras y del cálculo de los límites se repetirán hasta que los resultados de las muestras indiquen que el proceso está bajo control.

Los nuevos límites de control que se calculen, deberán reflejar la mejoría que se haya introducido a las condiciones del proceso, como resultado de la investigación de las muestras fuera de los límites de control. Esta secuencia de estar calculando límites para el porcentaje defectuoso, es una guía efectiva para ir mejorando el proceso que se estudie.

La decisión sobre si los límites de control del porcentaje defectuoso son económicamente satisfactorios para emplearse al controlar la calidad, queda a juicio de la dirección.

Teóricamente esta decisión se debe basar por completo en los factores económicos. Si el costo total de aceptar los rechazos de las unidades defectuosas es menor que el costo total de las reformas necesarias al proceso, para poder reducir esos rechazos se pueden considerar aceptables esos límites de control. Pero si los costos para mejorar el proceso son inferiores a los costos de los rechazos, entonces los límites pueden resultar inaceptables.

II.4. GRAFICA DE CONTROL POR DEFECTOS:

En la producción de determinados trabajos de taller sobre los cuales se debe de efectuar una inspección por atributos, existen por lo menos dos razones por las cuales las gráficas del porcentaje defectuoso, resultan de muy escaso valor:

1. La cantidad producida es muy baja. Pueden ser muy pocas las unidades producidas por periodo.
2. Con productos físicamente grandes y complicados, como aviones, máquinas o turbinas, se presentan siempre algunos defectos durante su inspección final. Bajo el sistema convencional del porcentaje defectuoso, las gráficas casi siempre acusarán 100% de rechazos, lo cual las hace de poca utilidad para el control de calidad.

En estas circunstancias, la inspección por atributos resulta más efectiva bajo la forma de gráficas de control de defectos por unidad, también llamadas *gráficas de c*.

Cuando los objetos son complejos (lo que sucede en este caso) o cuando el producto tiene una naturaleza continua más que discreta, el clasificarlos como defectuosos o no defectuosos puede resultar problemático. El comportamiento de esta variable aleatoria (defecto), por lo general está descrito por medio de la distribución de Poisson.

Esta distribución describe las probabilidades del número de acaecimientos con respecto a un campo o intervalo continuo (tiempo, espacio o artículo). La unidad de medición (tiempo, área o artículo) es continua, pero la variable aleatoria es discreta. Cabe notar que es imposible contar las fallas o defectos, que son independientes uno de otro.

Los límites de control para las gráficas de *c* se deben expresar en término del número de defectos por unidad y se obtienen mediante la fórmula:

$$\text{Límites de control} = \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}$$

donde \bar{c} es la media de defectos por unidad.

El procedimiento de cálculo para estas gráficas es semejante al de las gráficas de *p*.

IV. MUESTREO DE ACEPTACION:

IV.1. ESPECIFICACIONES Y TOLERANCIAS:

Una característica inherente a cualquier proceso de manufactura es que no es posible producir dos piezas exactamente iguales. Ya sean grandes o pequeñas, las variaciones existen en los elementos manufacturados en cualquier proceso de fabricación.

Algunas de estas variaciones serán de tal magnitud, que inmediatamente se ponen de manifiesto por medio de equipos de medición. Otras, serán tan pequeñas, que las sucesivas lecturas con el equipo de medición, primero pondrán de manifiesto la variación del equipo mismo, antes que la de las piezas.

De los diferentes tipos de variación entre las piezas, de utilidad para propósitos analíticos, existen tres clasificaciones:

1. *Variaciones dentro de una misma pieza*, como por ejemplo, en una flecha que en uno de sus extremos se encuentra ovalada y que en el otro extremo esté dentro de sus tolerancias.
2. *Variaciones entre piezas producidas durante un mismo periodo de tiempo*, como las variaciones en las longitudes de los pasadores producidos durante un periodo de cinco minutos en un torno automático.
3. *Variaciones entre las piezas producidas en diferentes periodos de tiempo*, como aquellas variaciones en las longitudes de los pasadores producidos al principio de un turno, comparadas con las producidas al final del turno.

Existen diversos factores que contribuyen a cada una o a todas estas clases de variación. Entre estos pueden citarse el desgaste de las herramientas, cojinetes que se aflojan, vibraciones en la maquinaria, materia prima defectuosa, operadores mal entrenados y cambios de temperatura.

La industria ha reconocido lo inevitable de estas variaciones. Por lo tanto, ha incluido en los dibujos y especificaciones, *tolerancias* que marcan la *desviación* permisible con respecto a un estándar, en su forma, en sus dimensiones, en su color, etc.

A medida que los límites de las tolerancias se especifican más y más estrechos, ha sido necesario exigir a los obreros una comprobación más minuciosa de las dimensiones. La inspección por medio de calibradores de *máxima* y *mínima* ha sido la más ampliamente empleada para el caso.

Estos datos pueden indicar al jefe del taller que se debe tomar una acción correctiva, a fin de reducir el número de piezas rechazadas; pero, prácticamente no existe una guía sobre la clase de acción que se debe tomar. ¿Los rechazos se deben a la falta de ajuste en la máquina? ¿A vibraciones de la herramienta? ¿A falta de cuidado del operador? ¿A material inapropiado?

Un procedimiento alterno al de *pasa-no pasa* se denomina *tarjeta con marcas*. En la parte inferior de la misma van inscritas las diferentes dimensiones de la parte a inspeccionar. Al hacer el examen de las piezas terminadas, se registra cada dimensión marcando con una *x* en la columna apropiada de la tarjeta, es decir, se elabora una *distribución de frecuencias*.

Esta tarjeta con marcas proporciona una guía más efectiva para una acción correctiva, pues da una idea exacta de cómo y dónde se presentan las variaciones en las piezas; por ejemplo, una distribución muy dispersa, indicará vibración en la herramienta, y una acumulación de observaciones por encima de un parámetro, puede indicar que la máquina requiere un ajuste.

Es importante recalcar que no existe relación alguna entre los *límites de control* del proceso y los *límites de especificación* en el mismo.

Los límites de control se obtienen por la variabilidad natural del proceso (medidos por la desviación estándar del mismo), es decir, los límites naturales de tolerancia.

Los límites de especificación son determinados fuera del proceso, y los señalan la dirección, los ingenieros de manufactura o los consumidores.

IV.2. MUESTREO:

Una parte importante del control de calidad es la inspección de materia prima, de productos semiterminados o terminados. Cuando la inspección se lleva a cabo para aceptar o rechazar un producto basado en su conformidad con los estándares, el tipo de inspección que se realiza se conoce generalmente como *muestreo de aceptación*.

El muestreo de aceptación no es un sustituto para controles adecuados del proceso, de hecho, el uso efectivo de técnicas de control durante el proceso, puede reducir significativamente, y en algunos casos, eliminar la necesidad del muestreo de aceptación.

En el muestreo de aceptación, el nivel de la calidad de salida puede controlarse mediante inspección, para poder asegurar que, en promedio, no pase más de cierto porcentaje de productos defectuosos. Este procedimiento supone que las partes o productos ya están terminados, y se desea establecer procedimientos y reglas de decisión que aseguren que la calidad del producto corresponderá a la especificada o será mejor.

En el caso más simple de muestreo de aceptación, se saca al azar una muestra de tamaño n , del lote total N y se decide si se acepta o no el lote entero con base a la muestra. Si la muestra indica que se debe rechazar el lote, dicho lote se puede sujetar al 100% de inspección, para separar los artículos defectuosos, o bien, se puede regresar al proveedor original, el cual puede ser otro departamento de la misma organización.

El propósito del muestreo de aceptación es aprobar o rechazar los lotes y no el de estimar la calidad del lote. La mayoría de los planes de muestreo de aceptación no están diseñados para realizar estimaciones.

Existen procedimientos paralelos de muestro de aceptación para el caso en que simplemente se clasifiquen las partes como buenas o malas (*muestreo por atributos*), o en el que se haga un cierto tipo de medición real que indique el grado de aceptabilidad del producto (*muestreo por variables*).

IV.3. TAMAÑO DEL LOTE:

La forma en que el lote está formado influye en la efectividad del plan de muestreo de aceptación. Existen varias consideraciones importantes al formar lotes para inspección:

1. *Los lotes deben ser homogéneos.* Las unidades en el lote deben ser producidas por las mismas máquinas, los mismos operadores y a partir de materia prima común en aproximadamente el mismo tiempo. Cuando los lotes no son homogéneos como en el caso en que se mezcla el resultado de dos líneas de producción diferentes, el plan de muestreo de aceptación no tendrá toda la efectividad que podría tener. Los lotes heterogéneos hacen más difícil el tomar acciones correctivas para eliminar la fuente de los productos defectuosos.
2. *Es preferible tener lotes grandes que pequeños.* Mientras mayor sea el tamaño del lote, menor es el porcentaje de los artículos sujetos a inspección, es decir, el tamaño de la muestra se reduce, además que resulta más económico.
3. *Los lotes deben ser adecuados a los sistemas de manejo de los artículos usados tanto por el proveedor como el consumidor.* Los artículos en los lotes deben ser empacados de tal forma que se reduzcan los riesgos de manejo y envío.

IV.4. ACEPTACION POR ATRIBUTOS:

Suponer que un lote de tamaño N tiene que ser inspeccionado. Un plan simple de muestreo se define por el tamaño de la muestra n , el número de aceptación c , y el número de artículos defectuosos d . Si $d \leq c$, se acepta el lote, por el contrario, si $d > c$, el lote se rechaza. Como es un muestreo por atributos, un artículo en la muestra se clasifica como adecuado o no adecuado aunque pueden inspeccionarse diferentes atributos en la misma muestra. Un artículo será no adecuado si no cumple con las especificaciones para uno o más de los atributos inspeccionados.

A este procedimiento se le llama "simple" ya que se basa en una sola muestra de tamaño n .

Una medida importante en el funcionamiento de un plan de aceptación es la curva de características operativas. Esta curva muestra la probabilidad de aceptar un lote contra un porcentaje contra el porcentaje de artículos defectuosos en el lote. Por lo tanto, la curva OC muestra el poder discriminativo del plan de muestreo, es decir, muestra la probabilidad de que un lote que tenga cierta proporción de defectuosos sea aceptado.

Para obtener la curva OC, se supone que el tamaño del lote N es grande, teóricamente infinito, y que el número de artículos defectuosos proviene de una distribución binomial con parámetros n y p , siendo p la proporción de artículos defectuosos en el lote.

La probabilidad de observar exactamente d artículos defectuosos es:

$$P\{d\} = f\{d\} = C\{n,d\} p^d \{1-p\}^{n-d}$$

La probabilidad de aceptar el lote es la probabilidad de que D , el número de defectuosos, sea menor o igual a c , es decir

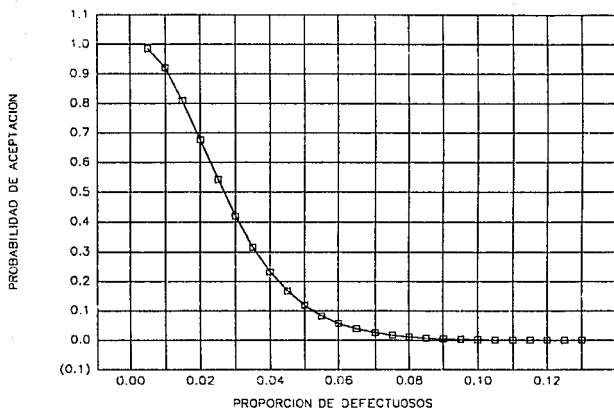
$$P_a = P\{D \leq c\} = \sum_{d=0}^c C\{n,d\} p^d \{1-p\}^{n-d}$$

Las curvas OC son el resultado de aplicar la fórmula anterior para diferentes valores de n , p y c .

Para consultas existen libros que contienen tablas para cada combinación de nivel aceptable de calidad y riesgo, como las "Sampling Inspection Tables" de Dogde-Romig.

Las tablas de Dogde-Romig fueron originalmente preparadas para el uso de la empresa Bell Telephone. Su objetivo básico es minimizar el tamaño de la muestra y la inspección 100% de los lotes rechazados.

CURVA OC PARA $n = 100$, $c = 2$



Las gráficas OC como la anterior se conocen como curvas OC de tipo B, y están construidas bajo el supuesto de que las muestras provienen de lotes grandes ($N \rightarrow \infty$), por lo que se usa la distribución binomial.

Por el contrario si N es finito, la función de distribución exacta será una *distribución hipergeométrica*. Al calcular la curva OC de tipo A utilizando la distribución hipergeométrica y comparándola con la de tipo B, se obtienen dos curvas que son muy similares.

Cuando el tamaño del lote aumenta, tiene un menor impacto en la curva OC. De hecho, si el tamaño del lote es por lo menos 10 veces el tamaño de la muestra ($n/N < 0.10$), entonces las curvas OC de tipo A y B son casi idénticas.

La curva OC de tipo A siempre estará bajo la curva OC de tipo B, es decir, la curva OC de tipo B se utiliza como aproximación para la curva OC de tipo A.

PUNTOS ESPECIFICOS DE LAS CURVAS OC:

Al utilizar una curva OC, dependiendo de los diferentes puntos de vista, hay que fijarse en varios puntos de la misma.

El proveedor generalmente está interesado en saber en que nivel de calidad del lote se tendrá una alta probabilidad de que el lote sea aceptado. Por ejemplo, se puede considerar la probabilidad de 0.95 de que sea aceptado, esto indicará que nivel de fallas se puede tener y aún tener un 95% de posibilidad de aceptación.

Por el contrario, el consumidor estará interesado en la otra parte de la curva, es decir, en qué nivel de calidad del lote se tendrá una probabilidad baja de aceptación.

El consumidor generalmente establece un plan de muestreo para los componentes o materia prima en referencia a un nivel de calidad aceptable (NCA) que representa el nivel de calidad más bajo del lote que el consumidor considera como un promedio aceptable. Este nivel no es una propiedad del plan de muestreo, sino del proceso del proveedor. El consumidor generalmente diseñará el procedimiento de muestreo de tal forma que la curva OC dé una probabilidad alta de aceptar el lote al NCA.

Este nivel de calidad aceptable no es una especificación del producto o una meta a la cual se necesite llegar, sino únicamente es un estándar en relación al cual se juzgan los lotes, se espera que el proceso del proveedor funcione a un nivel considerablemente mejor que el aceptable.

El consumidor también estará interesado en el otro extremo de la curva, es decir, en la protección que se obtiene para lotes de baja calidad. En esta situación el consumidor puede establecer un porcentaje de defectuosos tolerable en un lote, es decir, el nivel mínimo de calidad que el consumidor está dispuesto a aceptar en un lote individual. A este porcentaje se le llama también nivel de calidad de rechazo o porcentaje de defectos tolerables del lote (PDTL).

DISEÑO DE UN PLAN SIMPLE DE MUESTREO DE ACEPTACION CON UNA CURVA OC:

Un método común para el diseño de un plan de muestreo de aceptación es requerir que la curva OC pase a través de dos puntos específicos. Un punto no es suficiente para especificar completamente el plan de muestreo, sin embargo dos puntos lo son.

Se busca construir un plan de muestreo tal que la probabilidad de aceptar el lote es $1 - \alpha$ para lotes con proporción de defectuosos p_1 y la probabilidad de aceptar el lote es β para lotes con proporción de defectuosos p_2 , suponiendo una curva OC de tipo B, el tamaño de la muestra n y el número de aceptación c , son la solución para el conjunto de ecuaciones:

$$1 - \alpha = \sum_{d=0}^c C(n,d) p_1^d (1 - p_1)^{n-d}$$
$$\beta = \sum_{d=0}^c C(n,d) p_2^d (1 - p_2)^{n-d}$$

Estas dos ecuaciones son no lineales y no hay una solución directa simple.

Cuando p_1 es igual al nivel de calidad aceptable y p_2 es el nivel límite de calidad, los puntos correspondientes α y β se conocen como los riesgos del productor y del consumidor respectivamente.

El procedimiento para encontrar el programa de muestreo simple que satisfaga las especificaciones establecidas requiere el uso de las tablas de Poisson, de una definición y de una suposición adicional.

En primer lugar se define x como el número real de unidades defectuosas en una muestra dada. En consecuencia, el lote se aprobará para un valor $x \leq c$. La suposición adicional consiste en que el riesgo del productor y el del consumidor serán los límites superiores del riesgo aceptado.

Es decir, si el riesgo del productor es 0.05, la probabilidad de aceptación deseada será mayor o igual a 0.95. Una P_a de 0.951 es aceptable, pero no lo es una P_a de 0.949. De forma similar, para el riesgo del consumidor se puede aceptar una P_a de 0.098, pero no una de 0.101, ya que es demasiado grande.

Con base en estos conceptos, los pasos a seguir para el procedimiento en cuestión son:

1. Establecer un valor de $c = 0$. Después de cierta práctica con el procedimiento se verá que es conveniente empezar con un valor mayor que c . Cada vez que sea necesario repetir los pasos 2, 3 y 4, el valor de c se incrementará en una unidad.
2. Encontrar el valor de n más grande (n_L) de tal manera que la probabilidad ($x \leq c$ para que n veces el valor de NCA) sea $\geq 1 - \alpha$. Cualquier $n \leq n_L$ satisfará la desigualdad.
3. Encontrar el n más pequeño (n_S), de tal manera que la probabilidad ($x \leq c$ para que n veces el valor de $PDTL$) sea $\geq \beta$. Cualquier $n \geq n_S$ satisfará la desigualdad.
4. Si $n_S \leq n_L$, el programa de muestreo (n_S, c) cubrirá los requisitos con un tamaño de muestra mínimo; por el contrario si $n_S \geq n_L$, se incrementa en una unidad el valor de c y el procedimiento se repite a partir del segundo paso.

IV.5. ACEPTACION POR VARIABLES:

La mayor parte del muestreo de aceptación se efectúa a través del muestreo por atributos. Sin embargo, el desarrollo de las técnicas de control estadístico ha incrementado considerablemente el uso del muestreo de aceptación por variables en la industria.

El muestreo por variables es conveniente cuando el costo de inspección es elevado, o si es necesario destruir el producto para su aceptación o rechazo, ya que inspeccionando por variables se reduce considerablemente el tamaño de la muestra.

La eficiencia del muestreo de aceptación por variables es impresionante, pero para aprovecharla es necesario cumplir ciertos requisitos. En primer lugar, este muestreo va más allá de una simple inspección por atributos, ya que no basta con determinar si una unidad es buena o mala. Es necesario determinar qué tan buena o qué tan mala es la unidad. Un producto en el que se decide su aceptación o rechazo con base en su apariencia, sabor o hechura, no será buen candidato. Por ejemplo, se puede medir fácilmente la duración de un foco antes de que se funda, pero la belleza del color o la forma del foco es difícil de medir cuantitativamente.

No sólo es necesario que la característica del producto se pueda medir en forma cuantitativa, sino que además, las mediciones deben tender a distribuirse normalmente, es decir, una distribución bimodal o exponencial de las dimensiones no cumple con los requisitos. Sin embargo, por el Teorema del Límite Central; la mayor parte de las mediciones comunes se distribuyen de una manera suficientemente cercana a la normalidad.

El muestreo de aceptación por variables se elabora con base en el concepto del error estándar de una estimación y la teoría de muestreo vistas en el capítulo II.

En la aplicación del control de calidad estadístico, por lo general el factor de corrección a continuación, se ignora.

$$\sqrt{\frac{N-n}{N}}$$

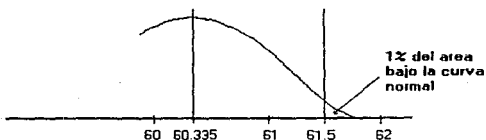
Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar el muestreo de aceptación por variables.

Un fusible de costo elevado, se compra o vende en grandes cantidades. Este fusible protege contra una carga aproximada de 60 amperes. El registro de uso del producto establece que la protección real ofrecida por los fusibles presenta una distribución normal con una desviación estándar de 0.5 amperes. Como un fusible defectuoso puede dañar equipo importante, se correrá un riesgo no mayor al 1% de que dicho fusible no interrumpa una corriente de 61.5 amperes o más.

En un muestreo de aceptación común, se tomaría un gran número de fusibles y se sometería cada uno a una carga de 61.5 amperes. Para asegurarse que la calidad del lote es casi perfecta (99%), sería necesario probar prácticamente el 100% de las unidades de la muestra; y dado que se trata de una prueba destructiva, el costo sería demasiado elevado.

Existen medios para resolver en parte el problema. Se puede incrementar en forma gradual la carga aplicada a cada fusible y observar el nivel de amperaje al que falla. Al hacer esto, quizá sea posible establecer un grado satisfactorio de seguridad a un nivel más económico.

Si no se desea correr un riesgo mayor al 1%, de que un fusible permita el paso de 61.5 amperes o más, se puede definir una *curva normal de aceptación mínima*. El valor de z correspondiente a un área del 1% por debajo de la curva normal es 2.33. Para que una probabilidad del 1% permanezca por debajo de la curva normal, la media debe localizarse a una distancia de 2.33s del punto correspondiente al 1%. En este ejemplo, este punto es igual a 61.5 amperes, la media de la distribución normal de amperajes deberá localizarse en $61.5 - 2.33s$, es decir, en 60.335.



En consecuencia, sólo resta asegurarse que la media de la distribución del lote de fusibles sea inferior a 60.335 amperes.

Para lograr una certeza razonable de que la media de un lote de entrada no sea superior a 60.335 amperes, se prueba un número necesario de fusibles para obtener esta certeza. Por ejemplo, probando un fusible del lote se encuentra que éste se funde a 60 amperes. Para una desviación estándar de 0.5 amperes, se corre un riesgo aproximado del 25% de que la media verdadera del lote sea mayor a 60.335 amperes [$z=(60.335-60)/0.5=0.67$]. Si se toman en forma aleatoria dos unidades del lote y se prueban, se encuentra que la media de los resultados obtenidos en la prueba es 60 amperes. Pero ahora se correrá un riesgo menor (aproximadamente 0.17).

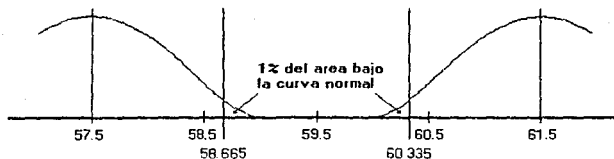
Para $n = 6$, con media igual a 60, el riesgo de que la media verdadera sea superior a 60.335 amperes es ligeramente mayor al 5%, es decir, se tiene un 95% de seguridad. Esto quiere decir que se permite variar el tamaño de la muestra, para obtener la seguridad deseada en la localización de la media verdadera.

Probablemente manejar una sola especificación no tenga mucho significado en la práctica. Si el productor está consciente de esta especificación puede fabricar fusibles que fallen mucho antes de los 61.5 amperes y mandará a su cliente lotes completos de fusibles, por ejemplo, de 50 amperes, para satisfacer el requisito.

En la mayor parte de los productos existen límites de especificación superior e inferior. Los compradores de dichos productos quieren tener la seguridad de que el artículo adquirido presente las características especificadas entre ambos límites. Los medios por los que el comprador obtiene esta seguridad son simplemente una ampliación del razonamiento anterior.

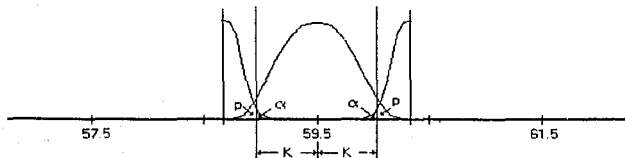
DOS LIMITES DE ESPECIFICACION:

Supongamos que el límite inferior de aceptación para el fusible de 60 amperes se fija en 57.7 amperes. Es deseable que exista un riesgo no mayor al 1% de que el fusible se funda al aplicarle una carga de 57.7 amperes o menos. Los límites de especificación resultantes aparecen en la gráfica a continuación.



Bajo estas circunstancias, la media inferior aceptable del lote sería 58.665 amperes y la media superior aceptable es de 60.335 amperes. Para determinar la aceptabilidad del lote es necesario desarrollar un dispositivo de prueba.

Existe el riesgo de que un lote no aceptable (con una media verdadera superior a 60.335 amperes o inferior a 58.665 amperes) pase la prueba. Suponemos que se corre un riesgo del 3% (α), como se ve en la siguiente gráfica:



Por otra parte, existe el riesgo de que el programa rechace un lote perfecto. Este riesgo se evaluará en un 10%, es decir, un 5% de probabilidad de rechazar el lote por tener una media demasiado alta y un 5% de rechazar el lote perfecto, ya que la media de la muestra es demasiado baja. Una vez que se establecen los riesgos de cometer errores con el programa, se elabora un proyecto que se ajuste a estos riesgos.

En esta gráfica se aprecian los límites de especificación, situados a una distancia K del punto 59.5 amperes. Si el promedio de la muestra queda fuera de dichos límites, habrá que rechazar el lote. El valor de K es una de las dos incógnitas a determinar en el programa de muestreo; la otra, es el tamaño de la muestra n .

El valor de z para la distancia a la cual queda un 5% de área bajo la curva normal es 1.645 y $s = 0.5$:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s/\sqrt{n}}$$

$$1.645 = \frac{[59.5 + K] - 59.5}{0.5/\sqrt{n}}$$

$$0.8225 = K\sqrt{n}$$

El riesgo de aceptar un lote con una media demasiado alta es del 3% y el valor de z correspondiente al 3% es 1.88. Por lo tanto, la segunda ecuación será:

$$1.88 = \frac{60.335 - (59.5 + K)}{0.5/\sqrt{n}}$$

$$0.94 = (0.835 - K)\sqrt{n}$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneas, se obtiene un valor de 0.39 para K y 2.11 para \sqrt{n} ; en consecuencia, n está entre 4 y 5. Si se escoge un valor de $n = 4$, se obtiene una protección inferior a la deseada, con $n = 5$ se logra una protección superior a la especificada.

En estas circunstancias, el programa de muestreo de aceptación por variables más razonable para probar los fusibles sería: extraer del lote una muestra aleatoria de 5 fusibles, registrar el amperaje al que se funde cada unidad y calcular la media de los valores del amperaje. Si ésta se encuentra entre 59.11 amperes y 59.89 amperes, se aceptará el lote; de no ser así, se rechazará.

Si se observan las complicaciones prácticas del programa de muestreo, salta a la vista la principal objeción al muestreo de aceptación por variables: un lote perfecto con una media de 60 amperes tiene un 60% de probabilidad de ser rechazado. Esto, sin duda, provocará fricciones con el proveedor del lote y la persona que elaboró el programa de control de calidad se enfrentará a un problema grave. Sin embargo, el sistema de muestreo de aceptación elaborado, está basado en los grados de protección deseados. El ampliar los límites de especificación significa un incremento en el riesgo de aceptar unidades indeseables. Es aquí donde la gerencia debe tomar una decisión. Un cambio en el programa significa una modificación de los riesgos supuestos y el grado de riesgo a correr es indudablemente una decisión administrativa.

IV.6. CONFIABILIDAD:

Al comprar cualquier bien, el consumidor espera obtener el servicio que le proporcione dicha compra, y en ocasiones, que el costo del servicio incluya las reparaciones necesarias. Asimismo, esperará que con el tiempo el artículo se desgaste a tal grado que el costo de las reparaciones sea excesivo y termine su vida útil.

El análisis de confiabilidad se limita al estudio de las fallas del producto durante su vida útil. El control de calidad y sus modelos estadísticos tienen por objeto la producción de artículos tan perfectos como sea posible desde un punto de vista económico. Pero un buen servicio hace que el cliente regrese y recomiende el producto. Si el artículo brinda el servicio deseado durante un periodo considerable y con un mínimo de reparaciones, esto contribuye a la prosperidad de la empresa. Un producto que se descompone con frecuencia crea una mala imagen y en ocasiones puede ser la causa de demandas judiciales muy costosas.

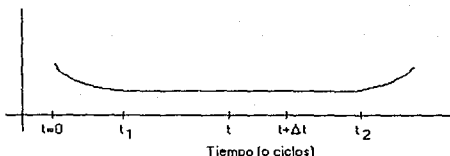
En consecuencia, la confiabilidad del producto es un aspecto importante y una de las principales preocupaciones de los diseñadores y los encargados de revisar dichos diseños. Al diseñar un producto con un mínimo razonable de confiabilidad, el diseñador debe confiar que gracias al control de calidad, el proceso de producción produzca artículos dentro de las tolerancias establecidas. Si el control de calidad no es adecuado y no se respetan las características de diseño, la esperanza de confiabilidad puede ser nula.

La confiabilidad es la probabilidad de que un artículo funcione y para que dicha probabilidad tenga sentido, se deben establecer los parámetros relacionados con ella. El grado de funcionamiento puede ser lo suficientemente bueno para un propósito y no serlo para otro. A menudo es muy importante el medio en el que se desarrollan las funciones del producto y también el periodo requerido de funcionamiento. Por lo tanto, la confiabilidad se puede definir como la probabilidad de funcionamiento dentro de ciertos límites específicos para un periodo necesario en un determinado medio.

OCURENCIAS DE FALLA:

La compra de un artículo nuevo, especialmente si se trata de un producto complejo, generalmente trae como consecuencia muchas reparaciones. Después de este periodo, el artículo proporciona un servicio continuo, relativamente sin necesidad de reparación alguna, durante un lapso considerable. Posteriormente, al pasar los años, la frecuencia de reparaciones se incrementa gradualmente al punto que se hace intolerable.

Proporción de falla
(o frecuencia de
reparación)



Dada la forma de esta curva se le conoce como curva de "bañera". Esta curva es similar a una curva representativa de la mortalidad humana, con un alto índice de mortalidad infantil y muerte por edad avanzada más allá de t_2 . Sin embargo, dado que existen toda clase de productos, la curva de proporción de falla no representa necesariamente todos ellos. Pero casi todos los productos muestran un comportamiento similar al de esta gráfica, con un período de descomposturas en la etapa inicial y un desgaste gradual al final.

Existe también un periodo considerable de relativamente poco servicio comprendido entre las etapas inicial y final de frecuencia de reparaciones. Si se supone que la proporción de falla en esta porción de la vida del artículo es constante y se consideran las fallas como eventos aleatorios, se puede pronosticar hasta cierto punto su confiabilidad.

Si la proporción de falla entre dos puntos cualesquiera, como por ejemplo, entre t y $(t + \Delta t)$ es constante con respecto al tiempo, se puede designar con la letra λ .

En consecuencia, la probabilidad de ocurrencia de la falla durante el período Δt , será:

$$P(\text{falla desde } t \text{ hasta } [t + \Delta t]) = \lambda \Delta t$$

La longitud de la porción plana de la curva, se designa simplemente con la letra t . Esta longitud se puede dividir en muchas porciones, por ejemplo, una cantidad N , y se obtendrán porciones igualmente espaciadas a lo largo de toda la longitud t/N . La probabilidad de falla en cualquier período t/N será en consecuencia, $\lambda t/N$. Como la probabilidad de no-falla es igual a $1 - P$ (falla), es posible determinar la probabilidad de no-falla para la longitud total t_1 a t_2 por medio de la expresión:

$$P\{\text{no-falla desde } t_1 \text{ hasta } t_2\} = \{1 - \lambda t / N\}^N$$

esta ecuación se puede expandir a la forma de series binomiales

$$\{1 - t/N\}^N = 1 - \frac{\lambda t}{N} + \frac{N(N-1)(\lambda t/N)^2}{2!} - \frac{N(N-1)(N-2)(\lambda t/N)^3}{3!} + \dots$$

En consecuencia, a medida que N aumenta, de tal manera que t/N tiende a cero, la expresión binomial tiende a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{1 - \lambda t / N\}^N = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots$$

Esto, a su vez, se identifica con la serie equivalente a $e^{-\lambda t}$. se puede establecer que $P(\text{no-falla desde } t_1 \text{ hasta } t_2) = e^{-\lambda t}$.

Dado que la confiabilidad es la probabilidad de no-falla su ecuación representativa desde t_1 hasta t_2 será

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Este estimador de la confiabilidad es práctico y útil, sin embargo su aplicación presenta un problema, por las suposiciones sobre las que se basa.

Se supuso que la proporción de falla después de la etapa inicial y antes de la final es constante. Desde el punto de vista práctico, dicha suposición puede ser cercana a la realidad. En consecuencia, la probabilidad de falla tendería a disminuir o aumentar con el paso del tiempo, dependiendo de la naturaleza del artículo, su uso y el medio en que se encuentra. Como una primera aproximación, cuando se desconoce el modelo real de la ocurrencia de la falla, se puede utilizar una proporción constante de falla. Sin embargo, cuando se dispone de una mejor información respecto a las ocurrencias, es conveniente representar la función falla (o confiabilidad) por medio de una expresión más general, en la cual $R(t) = e^{-\lambda t}$ sería simplemente un caso particular.

ESPERANZA DE VIDA:

Antes de desarrollar una expresión más general de la función de confiabilidad, hay que considerar las premisas sobre las cuales se basan las esperanzas de vida. (La vida útil de algunos productos es en cierto modo similar a la duración estimada de la vida humana). Cuando una persona quiere comprar un seguro de vida, lo primero que le pregunta la compañía de seguros es su edad. Con base en ella, la aseguradora determina el monto de la prima a pagar. Es decir, esta política refleja que las esperanzas de vida disminuyen con la edad. La probabilidad de muerte (la proporción de falla humana) tiende a aumentar a medida que la edad avanza. En consecuencia, la proporción de fallas tiende a aumentar con el paso del tiempo en lugar de permanecer constante.

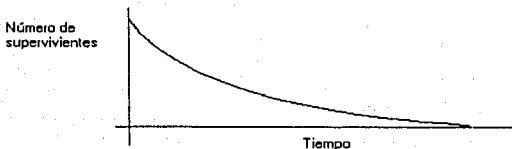
En la expresión

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

se supuso que λ era constante en cualquier periodo. La ecuación se puede utilizar para calcular el número de supervivientes en el momento anterior t_n , siempre y cuando exista igual número de supervivientes en el momento anterior t_{n-1} . En otras palabras, la razón por la cual el número de supervivientes disminuye más lentamente a medida que el tiempo pasa, se debe a que la proporción constante de falla λ opera sobre las pocas unidades restantes y por lo tanto,

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

es una probabilidad condicional, basada en el número de sobrevivientes al iniciarse el periodo considerado.



LA FUNCION GENERAL DE CONFIABILIDAD:

La probabilidad de que ocurra una falla en cualquier intervalo de tiempo es una función de tiempo positiva, $f(t)$. En consecuencia, el total de probabilidades de falla de las unidades desde un punto inicial, $t = 0$ (que se supone posterior a la etapa de fallas iniciales) hasta un periodo t es

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

Si $F(t)$ es el total de probabilidades de falla hasta el punto t , $R(t)$ representa la suma de probabilidades de funcionamiento continuo de los supervivientes:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt$$

La densidad condicional de falla o proporción de falla se define como:

$$Z(t) = dF(t)/dtR(t) = f(t)/R(t),$$

Esto es equivalente a las fallas esperadas durante el periodo considerado dividido por el número de supervivientes al iniciarse el periodo.

Continuando con la deducción de la ecuación de proporción de falla:

$$Z(t) = dF(t)/R(t)$$

dado que $F(t)=1-R(t)$, $dF(t)=-dR(t)$; entonces

$$Z(t)=-dR(t)/R(t)$$

la expresión general de la función confiabilidad se obtiene calculando logaritmos y despejando $R(t)$:

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(t) dt}$$

Para el caso especial en que la proporción de falla, $Z(t)$ sea la constante λ , se llega a la expresión obtenida con anterioridad, o sea

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

TIEMPO MEDIO ENTRE FALLAS:

Sabiendo que $Z(t) = f(t)/R(t)$, entonces, $f(t) = Z(t) y$

$$R(t) = Z(t) e^{-\int_0^t f(u) du}$$

Si se tiene la fortuna de poder sustituir λ por $Z(t)$, se obtendrá la expresión:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

que es la ecuación de la distribución exponencial.

La media de esta distribución exponencial es $1/\lambda$.

A esta media a menudo se designa con la letra m , y se puede interpretar como el tiempo medio entre fallas (*TMEF*).

Fácilmente se podría igualar el *TMEF* con el promedio de vida del producto o componente, pero un poco de reflexión indica que la realidad es otra. El valor del *TMEF* es considerablemente más largo que la vida media, debido a que el análisis se ha limitado al fondo de la curva de "bañera". En este análisis se parte de la base de que el uso efectivo del producto comienza después de la etapa inicial de descomposturas y el reemplazo se supuso anterior a la etapa de desgaste final. Es decir, se eliminaron estos dos periodos de vida que por lo general dan como resultado la inutilización del producto, y las fallas se limitaron hasta donde es posible a eventos casuales.

Si fuera posible limitar las fallas exclusivamente a ocurrencias casuales o aleatorias, se llegaría a un proceso de Poisson.

La proporción esperada de fallas durante un periodo determinado sería la misma que se presenta en un periodo anterior. Si esto se establece como un hecho, se justifica el uso de la proporción constante de fallas. Desafortunadamente, la naturaleza raras veces es tan bondadosa como para hacer que la proporción de fallas sea constante. Sin embargo, a menudo se ignora la diferencia y se utiliza la constante como una aproximación conveniente.

IV.7. SELECCION DEL PLAN DE MUESTREO Y CONSIDERACIONES ECONOMICAS:

A veces es económico no hacer ningún tipo de inspección y a veces, una inspección 100% es la más económica. Puede suceder que el muestreo de aceptación de un tipo u otro sea mejor. El objetivo debe ser seleccionar la cantidad y tipo de inspección que minimizará la suma de los costos de producción, los costos de aceptación y los costos debidos a desecho o reproceso de un producto insatisfactorio.

Cuando la producción de un artículo es consistentemente satisfactoria para el propósito, lo más económico es no hacer cualquier tipo de inspección. En este caso, no existen costos por desecho de artículos insatisfactorios. No obstante, aparecen costos extras por desecho o reproceso, éstos pueden ser reducidos a través del diagnóstico hecho a través de cartas de control.

Cuando el producto es consistente en calidad pero siempre contiene un porcentaje considerable de artículos insatisfactorios, la inspección 100% puede considerarse como la mejor alternativa. Hay que elegir entre no hacer inspección o hacerla al 100%, ya que algún programa de muestreo no puede separar los lotes relativamente "buenos" de los relativamente "malos".

Los planes de muestreo de aceptación pueden reducir los costos de reproceso o de desecho; ya que este tipo de inspección puede diagnosticar las causas de los problemas de calidad y ejerciendo presión efectiva en el control del proceso.

El muestreo de aceptación por variables normalmente es el más económico, cuando los límites de aceptación del producto son muy estrechos, o bien cuando las pruebas son destructivas.

En resumen, con base a un solo factor de costo no es posible determinar si un programa de muestreo simple, múltiple o de otro tipo es el que redundará en un costo mínimo. Para obtener el programa óptimo, se deben considerar todos los costos incluidos en la selección.

BIBLIOGRAFIA

- Deming Edwards, *CALIDAD, PRODUCTIVIDAD Y COMPETITIVIDAD, LA SALIDA DE LA CRISIS*, Díaz Santos, S.A., México, 1989.
- Feigenbaum, A. V. *CONTROL TOTAL DE LA CALIDAD, INGENIERIA Y ADMINISTRACION*, Compañía Editorial Continental, S. A. México, 1974.
- Grant, L. E., R. S. Leavenworth, *STATISTICAL QUALITY CONTROL*, Mc. Graw-Hill, New York, 1980.
- Montgomery, Douglas C. *INTRODUCTION TO STATISTICAL QUALITY CONTROL*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- Stevenson, William J. *ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA*, Harla, México, 1981.
- Vaughn, Richard C. *CONTROL DE CALIDAD*, Limusa, México, 1982.

CAPITULO V

**PROGRAMACION LINEAL
Y DINAMICA**

I. INTRODUCCION:

I.1. CAMPO DE APLICACION:

Durante la Segunda Guerra Mundial, la administración militar en Gran Bretaña llamó a un equipo de científicos para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa área y terrestre del país. Su objetivo era determinar la utilización más efectiva de los recursos militares limitados. El establecimiento de este equipo científico marcó la primera actividad normal de investigación de operaciones.

El nombre de *investigación de operaciones* fue dado aparentemente porque el equipo estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones (militares). Desde su nacimiento, este conjunto de técnicas para la toma de decisiones se ha caracterizado por el uso del conocimiento científico a través del esfuerzo de equipos interdisciplinarios, con el propósito de determinar la mejor utilización de los recursos limitados.

Los resultados alentadores logrados por los equipos de investigación de operaciones británicos, motivaron a la administración militar de los Estados Unidos a comenzar actividades similares. Las aplicaciones exitosas de los equipos de los Estados Unidos incluyeron el estudio de problemas logísticos complejos, la invención de nuevos modelos de vuelo, la planeación de minas en el mar y la utilización efectiva del equipo electrónico.

Después de la guerra, el éxito de los equipos militares atrajo la atención de los administradores industriales, quienes estaban buscando soluciones a sus problemas, los cuales estaban llegando a ser más agudos debido a la introducción de la especialización funcional en las organizaciones empresariales. Independientemente del hecho de que las funciones especializadas se establecieron principalmente para servir al objetivo global de la organización, los objetivos individuales de estas funciones pueden no siempre ser consistentes con las metas de la organización. Esto ha resultado en problemas complejos de decisión que últimamente han forzado a las organizaciones empresariales a buscar la utilización de las herramientas efectivas de la investigación de operaciones.

Aunque se ha acreditado a Gran Bretaña la iniciación de la investigación de operaciones como una nueva disciplina, los Estados Unidos tomaron pronto el liderazgo en este campo rápidamente creciente. La primera técnica matemática ampliamente aceptada en el campo, conocida como el *método simplex de programación lineal*, fue desarrollada en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig.

El progreso impresionante en el campo de investigación de operaciones se debe en gran parte al desarrollo paralelo de la computadora digital moderna.

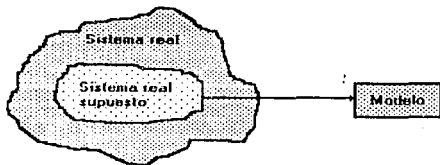
Hoy el impacto de la investigación de operaciones puede sentirse en muchas áreas. Muchas organizaciones consultoras en administración, están actualmente comprometidas en actividades de investigación de operaciones. Estas actividades han ido más allá de las aplicaciones empresariales y militares, para incluir hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planeación urbana, sistemas de transporte y aun estudios de investigación criminológica.

I.2. RAZONAMIENTO CIENTIFICO:

Un estudio de investigación de operaciones consiste en construir un *modelo* de la situación física. Un modelo de investigación de operaciones se define como una representación idealizada (simplificada) de un sistema de la vida real. Este sistema puede ya estar en existencia o puede todavía ser una idea en espera de ejecución. En el primer caso el objetivo del modelo es analizar el comportamiento del sistema a fin de mejorar su funcionamiento. En el segundo, el objetivo es diversificar la mejor estructura del sistema futuro.

La complejidad de un sistema real resulta del gran número de elementos (*variables*) que controlan el comportamiento del sistema. Esto a su vez dicta una dificultad tácita al recomendar cursos específicos de acción para cada una de estas variables. Afortunadamente, aunque una situación real puede involucrar un número sustancial de variables, generalmente una pequeña fracción de estas variables realmente domina el comportamiento del sistema. Por consiguiente, la simplificación del sistema real en términos de un modelo se concentra principalmente en la identificación de las variables y relaciones dominantes que lo gobiernan.

La figura a continuación muestra los niveles de abstracción que llevan a la construcción de un modelo de una situación de la vida real. El "sistema real supuesto" se abstrae de la situación real concentrando las variables dominantes que controlan el comportamiento del sistema real. El modelo que es una abstracción del mundo real supuesto identifica y simplifica las relaciones entre estas variables en una forma accesible al análisis.



I.3. METODOLOGIA:

El tipo más importante de modelo de investigación de operaciones es el *modelo simbólico o matemático*. Al formular este tipo uno supone que todas las variables relevantes son cuantificables. Por consiguiente, los símbolos matemáticos se utilizan para representar variables, las cuales están relacionadas con las funciones matemáticas apropiadas para describir el comportamiento del sistema. Luego la solución del modelo se logra por manipulación matemática apropiada.

Además de los modelos matemáticos, se emplean los *modelos heurísticos* y de *simulación*. Los modelos de simulación "imitan" el comportamiento del sistema sobre un periodo. Esto se logra especificando ciertos eventos, los cuales son puntos en el tiempo, cuya ocurrencia significa que puede recolectarse la información importante perteneciente al comportamiento del sistema. Una vez que se definen tales eventos es necesario prestar atención al sistema únicamente cuando ocurre un evento. La información que mide el funcionamiento del sistema se acumula en observaciones estadísticas, las cuales se actualizan en cuanto cada evento tiene lugar.

Dado que los modelos de simulación no necesitan funciones matemáticas explícitas para relacionar las variables, usualmente es posible simular sistemas complejos que no pueden modelarse o resolverse matemáticamente. Además, tal flexibilidad permite una representación más aproximada del sistema. La principal falla de la simulación consiste en que el análisis es equivalente a realizar experimentos y por consiguiente está sujeto al error experimental. Esto lleva a las dificultades usuales de diseñar (estadísticamente) el experimento, recolectar observaciones y entonces ejecutar las pruebas estadísticas necesarias de inferencia. Naturalmente el modelo de simulación no es tan conveniente como los modelos matemáticos (exitosos), los cuales proporcionan una solución general al problema.

Mientras que los modelos matemáticos buscan la determinación de la mejor solución (óptima) algunas veces la formulación matemática puede ser demasiado compleja para permitir una solución exacta. Aun si la solución óptima puede obtenerse eventualmente, el cómputo requerido puede ser imprácticamente grande. En este caso, la heurística puede utilizarse para desarrollar buenas soluciones (aproximadas). El método heurístico de solución descansa en las reglas empíricas o intuitivas que, dada una solución actual al modelo, permiten al determinación de una solución mejorada. Actualmente los métodos heurísticos son procedimientos de búsqueda que pasan inteligentemente de un punto de solución a otro, con el objetivo de mejorar el valor del criterio del modelo. Cuando ninguna mejora puede lograrse la mejor solución que se haya tenido es la solución aproximada al modelo.

A diferencia de los modelos de simulación o heurísticos donde no pueden sugerirse estructuras físicas fijas, un modelo matemático incluye:

1. *Variables de decisión y parámetros.* Las variables de decisión representan las incógnitas que deben determinarse con la solución del modelo. Los parámetros representan las variables controlables del sistema. En general los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos.
2. *Función objetivo.* Define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de sus variables de decisión. Por ejemplo, si el objetivo del sistema es maximizar el beneficio total, la función objetivo debe especificar el beneficio en función de las variables de decisión.

En general, la solución *óptima* al modelo se obtiene cuando los valores correspondientes de las variables de decisión proporcionan el mejor valor de la función objetivo satisfaciendo todas las restricciones. Esto significa que la función objetivo actúa como un indicador para el logro de la solución *óptima*.

II . PROGRAMACION LINEAL :

II.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

La función de la programación lineal es la distribución de recursos o riquezas (de cualquier clase) escasos entre diferentes actividades en competencia, y el realizar ésto de una manera óptima.

La programación lineal emplea un modelo matemático para describir el problema en cuestión, el adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas en el modelo deben ser de primer grado, es decir, lineales.

Generalmente un problema de programación lineal implica la maximización o minimización de una función lineal de un conjunto de variables no negativas sujetas a un conjunto de desigualdades también lineales que relacionan a las variables.

La generalización del modelo matemático en programación lineal es el siguiente: Encontrar $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ tales que maximicen (o minimicen) la siguiente función lineal que es la función objetivo.

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots + C_nX_n$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{r} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \dots + A_{1n}X_n \leq b_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + \dots + A_{2n}X_n \leq b_2 \\ \vdots \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + A_{m3}X_3 + \dots + A_{mn}X_n \leq b_m \end{array}$$

y tales que:

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

A_{ij}, C_j y b_i son constantes conocidas.

Dadas n actividades en pugna, las variables de decisión $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ representan los niveles o intensidades de dichas actividades. Por ejemplo, si cada actividad representa la venta de diferentes artículos, entonces X_j será el número de unidades del artículo j que deberán ser vendidas durante el periodo.

Z representa la medida total de efectividad, la cual debe ser escogida según el caso. Por ejemplo, la ganancia obtenida.

C_j es el incremento que se obtendrá en la medida total de efectividad Z por cada unidad que X_j se incremente. Por ejemplo, C_j es la ganancia obtenida al vender una unidad del artículo j .

El número de recursos es m y se dedica una desigualdad a cada uno de estos recursos, con objeto de mostrar en que forma están restringidos, de tal forma, que cada una de las primeras m desigualdades corresponde a una restricción con respecto a la disponibilidad de uno de los recursos.

Debe tenerse cuidado de no incurrir en ecuaciones redundantes, para evitar el realizar más trabajo que el necesario. Cuando se incurre en ecuaciones redundantes, el método de solución las elimina, pero existe el riesgo de que en lugar de ecuaciones redundantes se formen ecuaciones contrarias disfrazadas.

b_i es la cantidad del recurso i del que se dispone para abastecer las n actividades.

A_{ij} es la cantidad del recurso i consumida por cada unidad de actividad j .

De aquí, puede apreciarse que las desigualdades no tienen otro significado que el de indicar que la suma de todas las cantidades del recurso escaso i empleado en todas las n actividades, debe ser menor o igual que la cantidad del mismo que está disponible.

Las restricciones $X_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ tienen como propósito eliminar la posibilidad de niveles negativos para las actividades.

II. 2. CONDICIONES BASICAS PARA APLICAR PROGRAMACION LINEAL:

Todo problema de programación lineal hace una serie de suposiciones, con respecto al problema real, las cuales deben ser satisfechas para que la solución sea representativa de la solución real.

Las condiciones que siempre deben buscarse para poder aplicar programación lineal son las siguientes:

1. *Proporcionalidad.* En programación lineal es indispensable que tanto la función objetivo como las restricciones sean estrictamente lineales. Esta linealidad trae consigo el concepto de proporcionalidad entre el nivel de cada actividad y el empleo de los recursos, así como la proporcionalidad entre el nivel de cada actividad y la medida de efectividad.

Cabe advertir que existen ocasiones en que el problema parece tener todas las características de proporcionalidad, pero sin embargo no lo es; por ejemplo, el caso de un terreno que se desea cultivar, si es sólo un campesino el que lo cultiva, se obtendrá una cosecha de x toneladas, si el número de campesinos aumenta a 100, lo más probable es que no se obtengan $100x$ toneladas. (Economía: Ley de los Rendimientos Decrecientes).

Existen ocasiones en que a propósito se hace la aproximación de linealidad, pero cuando éste es el caso, es preciso estar conscientes de la situación.

Existen otros casos en los que no existe linealidad a causa de un cargo fijo, supongamos la producción de un artículo en la cual intervienen costos fijos de preparación, con lo cual se obtiene una función similar a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } X = 0 \\ K + cX, & \text{si } X > 0 \end{array} \right.$$

2. *Aditividad.* Existen ocasiones en que una función aún siendo proporcional no es lineal, la causa de esta situación es la existencia de interacciones entre diferentes actividades, con lo cual al variar el nivel de una actividad, indirectamente se modifica el efecto que otra actividad tiene sobre la medida de efectividad.

Por ejemplo, una empresa desea producir dos artículos. El producir el primero tiene un costo de C_1X_1 (sin producir el otro), mientras que si se produce el segundo tiene un costo de C_2X_2 (con $X_1 = 0$). Si ambos artículos se producen, el producto 2 usará cierto material de desperdicio del producto 1 (que de otra forma sería desechado) por lo cual el costo de producir 1 y 2 es diferente de $C_1X_1 + C_2X_2$.

La aditividad presupone que la medida total de efectividad y la utilización total de recursos resultantes de la operación conjunta de las actividades, debe igualar las sumas respectivas de las cantidades resultantes de la operación individual de las actividades.

3. *Divisibilidad*. El método de solución no conduce, salvo raras excepciones a valores enteros para las variables de decisión, siendo lo más común el obtener valores fraccionarios. Es por esto que al aplicar programación lineal debe permitirse una solución fraccionaria.

Existen ocasiones en que es absolutamente necesario el obtener una respuesta en valores enteros, i.e. aviones a fabricar, y cuando este es el caso existen dos procedimientos para resolver el problema:

- a) Empleando *programación lineal de enteros*. Este método utiliza la obtención del valor entero óptimo buscado, pero cuenta con el inconveniente de ser muy complicado.
- b) Empleando programación lineal normal y redondeando los valores obtenidos a sus valores menores más próximos. Las ventajas de este método son obvias, las desventajas son que la solución de enteros obtenida no sea posible, o bien que ésta diste mucho de ser óptima.

4. *Determinismo*. Si analizamos la forma en que generalmente se desarrolla un modelo matemático de programación lineal, veremos que generalmente un modelo se formula con objeto de seleccionar un curso de acción futuro; razón por la cual, los coeficientes que se utilizan suelen ser una predicción de condiciones futuras. Es por esto que en muchos casos estos coeficientes no son constantes ni conocidos sino que son variables aleatorias, sin embargo existen ocasiones en que es posible determinar con razonable confiabilidad los valores de dichas constantes.

II.3. SOLUCION GRAFICA:

Sea el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 24 \end{aligned}$$

y

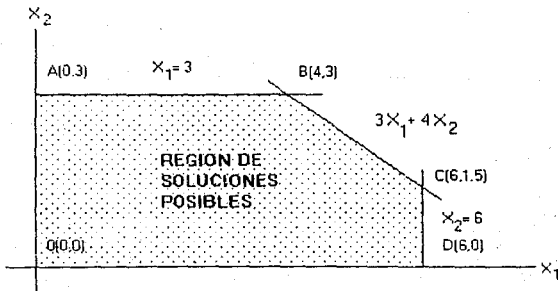
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Ya que X_1 y X_2 son positivas, la solución se restringe al primer cuadrante.

Representando gráficamente las rectas cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} X_1 &= 6 \\ X_2 &= 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &= 24 \end{aligned}$$

Como X_1 debe ser menor o igual a 6, la zona donde se cumple esta condición es la comprendida entre el eje $0-X_2$ y la recta $X_1 = 6$. Razonando de la misma manera obtenemos la siguiente gráfica:



Los puntos extremos de la región de soluciones posibles son:

$$O(0,0); A(0,3); B(4,3); C(6,1.5); D(6,0)$$

Maximizar Z equivale a encontrar aquel miembro de la familia de rectas paralelas más alejado del origen y que tiene cuando menos un punto dentro o en la frontera del polígono $OABCD$. Podemos observar en la gráfica que $X_1^* = 4$ y $X_2^* = 3$ y por tanto $Z^* = 10$.

II.4. METODO SIMPLEX:

TERMINOLOGIA DE LA PROGRAMACION LINEAL:

Daremos varias definiciones:

1. Una *solución factible* es cualquier solución que satisfice todas las restricciones.
2. Una *solución básica factible* es aquella que corresponde a un punto extremo de la región de solución.
3. Una *solución óptima* es la mejor de las soluciones factibles, esto es, aquella que maximiza la función objetivo.

Para la presentación del *Método Simplex* usaremos el Método de solución de ecuaciones de Gauss-Jordan, visto en el capítulo I y además b_j debe ser estrictamente positiva.

Suponiendo que existen un conjunto finito de soluciones factibles, entonces el problema de programación lineal debe tener las siguientes propiedades:

1. El conjunto de soluciones factibles debe ser un conjunto convexo.
2. Si existe cuando menos una solución factible, entonces también existe cuando menos una solución básica factible.

Una figura convexa es aquella que al unir dos puntos cualesquiera de ella por medio de una recta, todos los puntos de la recta quedan dentro de la figura.

3. El número de soluciones básicas factibles es finito.
4. Cuando menos una de las soluciones básicas factibles es óptima.

Debe quedar claro que una solución óptima no necesita ser una solución básica factible, esto sucede cuando son varias las soluciones factibles que maximizan la función objetivo.

Vemos pues que a pesar de existir un número infinito de soluciones, debemos prestar atención solamente a un número finito de ellas, de aquí que una solución óptima pueda ser siempre encontrada examinando cada una de las soluciones básicas factibles y eligiendo aquella que dé un valor mayor de Z , este es el Método Simplex.

A pesar de que las soluciones básicas factibles existen en número finito, en la mayoría de los casos su número es demasiado grande, razón por la cual resulta poco eficiente buscar entre todas ellas hasta encontrar la solución óptima, es aquí donde entra en acción el Método Simplex, el cual además de sólo examinar los puntos extremos, realiza la búsqueda de una manera eficiente debido a que no examina todas las soluciones básicas factibles, sino que parte de una solución inicial a partir de la cual busca otra que sea mejor.

Gráficamente lo que hace el Método Simplex es lo siguiente:

1. Localizar un vértice cualquiera como punto de partida.
2. Examinar las aristas del vértice para ver si al moverse sobre una de ellas hasta el siguiente vértice adyacente, aumenta el valor de Z . Si al recorrer al menos una arista aumenta Z , se pasa al punto 3. Si no, el vértice en el cual estamos situados maximiza Z .
3. Escoger una de las aristas a lo largo de la cual se aumenta el valor de Z y se sigue sobre ella hasta alcanzar el siguiente vértice adyacente.
4. Se itera sobre los pasos 1, 2 y 3 hasta que Z ya no pueda aumentarse.

El valor máximo de Z se ha alcanzado cuando los vértices adyacentes no aumentan el valor de Z , según se expresa en el punto 2. Esto se debe a que existe un conjunto convexo de soluciones.

Con el objeto de poder manejar algebraicamente el problema y poder aplicar los pasos anteriores, el Método Simplex convierte en igualdades las restricciones introduciendo variables de holgura y así se obtiene un sistema de ecuaciones en vez de un sistema de desigualdades.

Para ilustrar lo anterior, usaremos el mismo problema que se resolvió gráficamente.

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 24 \end{aligned}$$

y

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Convertimos la primera restricción en igualdad manejando la variable de holgura X_3 , siendo ésta no negativa:

$$X_1 + X_3 = 6$$

De manera análoga

$$X_2 \leq 3$$

se puede sustituir por:

$$X_2 + X_4 = 3$$

Siendo X_4 no negativa.

La tercera restricción

$$3X_1 + 4X_2 \leq 24$$

se reemplaza por:

$$3X_1 + 4X_2 + X_5 = 24$$

Y entonces el modelo de programación lineal de este ejemplo queda como sigue:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= 6 \\ X_2 + X_4 &= 3 \\ 3X_1 + 4X_2 + X_5 &= 24 \end{aligned}$$

Y

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Este sistema es completamente equivalente al original, pero es más apropiado para su manipulación algebraica.

Las variables de holgura son únicamente un artificio para llegar a la solución óptima y pueden o no tener significado físico en problemas individuales.

Supóngase que se tienen n variables y m ecuaciones y $n > m$. Se seleccionan m de estas n variables y se hacen las $(n-m)$ variables restantes iguales a cero. Si se resuelven las m ecuaciones para las m variables restantes, la solución resultante es una solución básica. Si las m variables son mayores o iguales a cero, se tiene una solución básica factible; y si todas las m variables son mayores a cero se dice que es una solución básica factible no degenerada. Las m variables escogidas se denominan como básicas y las $(n-m)$ variables restantes se conocen como variables no básicas.

En este mismo ejemplo, si se escogen como variables básicas a X_1, X_2, X_4 , se obtiene:

Variables no básicas

$$\begin{aligned} X_3 &= 0 \\ X_5 &= 0 \end{aligned}$$

Variables básicas

$$\begin{aligned} X_1 &= 6 \\ X_2 &= 1.5 \\ X_4 &= 1.5 \end{aligned}$$

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (6, 1.5, 0, 1.5, 0)$ es una solución básica factible no degenerada

El primer paso en el Método Simplex es hacer cero las variables originales y tomar las variables de holgura como variables básicas. El objeto de esta selección es el de proporcionar una solución básica factible inicial (ya que se obtienen sus valores de las constantes de la ecuación), mientras que si se escogiera otro grupo de variables, es probable obtener valores negativos para alguna(s) de ellas, lo que constituye una solución no factible; y además también es posible tener que hacer varios intentos antes de llegar a una solución inicial factible.

Para este ejemplo queda:

Variables no básicas

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Variables básicas

$$\begin{aligned} X_3 &= 6 \\ X_4 &= 3 \\ X_5 &= 24 \end{aligned}$$

En general la solución básica factible inicial será siempre:

$$\begin{aligned} X_j &= 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-m) \\ X_{n-m+i} &= b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \end{aligned}$$

Como $X_1 = X_2 = 0$, gráficamente representa el origen.

El siguiente paso es encontrar la siguiente mejor solución, esto se efectúa convirtiendo una de las variables no básicas en variable básica y viceversa. Esto es, se obtiene una solución básica factible con todas menos una de las variables en la base anterior. Geométricamente se interpreta como el paso al vértice adyacente que aumenta el valor de Z .

La variable de entrada se escoge observando la ecuación de la función objetivo para localizar aquella variable que produce un incremento positivo en el valor de Z al incrementar su valor.

Como en función objetivo

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

tanto X_1 como X_2 incrementan el valor de Z , que en este momento es cero, lo que indica que la solución actual no es óptima y debe continuar la búsqueda.

Existen varios métodos para seleccionar aquella variable que deberá entrar en la base cuando son varias las que pueden incrementar el valor de Z .

1. *Selección arbitraria.* Esta tiene el inconveniente de no conducir al menor número de iteraciones para llegar a una solución óptima.
2. *Probar el efecto que produce en Z cada una de las variables no básicas* al entrar en la base y escoger aquella que aumente más el valor de Z . En este método se selecciona aquella variable no básica que parezca incrementar más el valor de Z , esto es, aquella que cuente con el mayor coeficiente C en la función objetivo. Esta variable no necesariamente es la que más incrementa el valor de Z debido a que las restricciones pueden impedir que su valor aumente tanto como otras variables con menores coeficientes.

Para este ejemplo se escoge X_2 para entrar en la base puesto que tiene coeficiente 2 mientras que el de X_1 es 1.

Ahora lo que debe hacerse es escoger cuál de las variables básicas debe convertirse en no básica. La variable candidata a salir es aquella cuyo valor se haga negativo primero cuando el valor de la variable básica entrante X_2 se incremente a:

	Límite	
$X_3 = 6 + X_2$	∞	(1)
$X_4 = 3 - X_2$	3	(2)
$X_5 = 24 - 3X_1 - 4X_2$	6	(3)

De aquí, se observa en la ecuación (1) que el valor positivo de X_3 no cambia al incrementarse X_2 , por lo cual en lo que respecta a esta variable se puede incrementar X_2 al infinito sin que X_3 se vuelva negativa.

En la ecuación (2) se aprecia que lo máximo que se puede incrementar X_2 , antes de que X_4 se vuelva negativa será 3.

De la ecuación (3) se observa que el límite para X_2 es 6.

Como X_4 es la primera variable básica que se vuelve negativa al incrementarse X_2 , entonces X_2 debe ser la primera variable en dejar la base.

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones empleando el método de Gauss-Jordan tenemos:

Variables no básicas

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ X_4 &= 0 \end{aligned}$$

Variables básicas

$$\begin{aligned} X_2 &= 3 \\ X_3 &= 6 \\ X_5 &= 12 \end{aligned}$$

Geoméricamente, lo que se ha hecho es moverse a lo largo de la arista OA hasta el vértice A(0,3).

Al emplear el método de Gauss-Jordan, la función objetivo queda como sigue:

$$\text{Max } Z = 6 + X_1 + 2X_4$$

En donde vemos que X_1 puede entrar a la base y hacer que aumente Z , por lo que la solución aún no es óptima y debe continuar el procedimiento.

El haber transformado la función objetivo de forma que esté solo en función de variables no básicas es debido a que la función objetivo original contiene una variable no básica (X_1) y la otra básica (X_2) y que sin embargo no incluye la otra variable no básica X_4 , siendo ésta la situación, no se puede emplear la ecuación objetivo para determinar si al aumentar el valor de X_1 aumentará el valor de Z debido a que al modificar el valor de X_1 podemos cambiar el valor de X_2 por ser una variable básica diferente de cero. La segunda razón para la transformación de Z es que sin X_4 en la función objetivo no se puede juzgar su efecto en Z .

II.5. METODO DEL PIVOTE:

Con el objeto de ahorrar trabajo se suele representar el método del pivote el cual utiliza la representación matricial del problema.

1. Arreglar las ecuaciones de forma que las X_j correspondientes en cada ecuación aparezcan en la misma columna (tratando las ausencias de X_j como ceros); siendo el vector P_j el vector columna correspondiente a X_j y P_0 al vector columna correspondiente a las constantes B_j .

$$x_j P_j = x_j \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ A_{3j} \\ \dots \\ \dots \\ A_{mj} \end{bmatrix}$$

podemos pues, escribir el modelo matemático general como sigue:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j P_j = P_0$$

2. Colocar los vectores columna P_j de una manera sistemática en una tabla iterativa como la siguiente:

Ecuación número	Variable básica	Z	P_1	P_2	P_j	P_n	P_0	Límite
0	Z	1	C_1	C_2	C_j	C_n	0	
1		0	A_{11}	A_{12}	A_{1j}	A_{1n}	b_1	
2		0	A_{12}	A_{22}	A_{2j}	A_{2n}	b_2	
.		0	
.		0	
.		0	
m		0	A_{m1}	A_{m2}	A_{mj}	A_{mn}	b_m	

Con el ejemplo que hemos estado manejando:

Ecuación número	Variable básica	Z	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	Límite
0	Z	1	-1	-2	0	0	0	0	-
1	X_3	0	1	0	1	0	0	6	∞
2	X_4	0	0	1	0	1	0	3	3
3	X_5	0	3	4	0	0	1	24	6

En este paso la variable de entrada $X_e = X_2$.

- Se consideran sólo las ecuaciones donde $A_{ie} = 0$ y se obtienen los cocientes b_i/A_{ie} correspondientes anotando los resultados en la columna del límite. Márquese con un círculo la variable de salida (X_s) donde el criterio para encontrarla es aquella ecuación cuyo límite superior sea el menor de todos.
- En una nueva tabla se cambia X_s por X_e en la columna de la variable básica y se pone en el renglón correspondiente la ecuación dividida entre el coeficiente de X_e . Esto es con el objeto de que X_e tenga como coeficiente 1. Elimínese X_e de todas las ecuaciones en las cuales aparece utilizando el método de GaussJordan.

Ecuación número	Variable básica	Z	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	Límite
0	Z	1	-1	0	0	2	0	0	-
1	X_3	0	1	0	1	0	0	6	6
2	X_2	0	0	1	0	1	0	3	
3	X_5	0	3	0	0	-4	1	12	4

- Revisar la ecuación 0 para ver si existe algún coeficiente negativo, de ser así la solución no es óptima y debe continuarse con el proceso regresando al paso 2.

Ecuación número	Variable básica	Z	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	Límite
0	Z	1	0	0	0	2/3	1/3	10	-
1	X_3	0	0	0	1	4/3	-1/3	2	
2	X_2	0	0	1	0	1	0	3	
3	X_1	0	1	0	0	-4/3	1/3	4	

Como ya no existe variable de entrada X_e , entonces se ha llegado a la solución óptima que es:

$$z^* = 10 \quad X_1^* = 4 \quad X_2^* = 3$$

II.6. COMPLICACIONES DEL METODO SIMPLEX:

En muchas ocasiones nos encontraremos que al construir un modelo matemático, éste aparece con algunas variaciones con respecto al modelo general que hemos analizado hasta el momento.

A continuación veremos cuáles son las variantes más comúnmente encontradas y las trataremos individualmente sin que ello implique que no puedan presentarse varias de ellas de manera simultánea, en cuyo caso se aplicarán en forma sucesiva los métodos que se describirán para solucionar estas variaciones.

Las variaciones son:

1. Minimización.
2. Desigualdad con sentido invertido.
3. Constantes no positivas ($b_i < 0$).
4. Igualdades.
5. Variables no restringidas en signo ($-\infty \leq X_i \leq +\infty$).
6. Empate para entrar como variable básica.
7. Empate para dejar la base (degeneración).
8. Soluciones múltiples.
9. Ausencia de soluciones posibles.
10. Solución óptima sin límites.

MINIMIZACION:

Esta complicación se puede tratar como sigue:

Si se desea minimizar una función, éste problema puede ser transformado en uno de maximización empleando el siguiente truco.

$$F = -(-F)$$

entonces si F disminuye, $-F$ aumenta, por tanto:

$$\text{Min } F = \text{Max } (-F)$$

esto es, el minimizar una función sujeta a una serie de restricciones es completamente equivalente a maximizar el negativo de la función, sujeta a las mismas restricciones.

DESIGUALDADES CON SENTIDO INVERTIDO:

Cuando una desigualdad se encuentra en la forma \geq , se multiplica la desigualdad por -1 , con lo que se invierte el sentido de la misma.

De esta manera se soluciona una complicación, pero al mismo tiempo se crea otra, que es la de las constantes no positivas ($b_i < 0$).

VALORES NEGATIVOS PARA b_i :

Retomemos el ejemplo analizado en esta sección, modificando una de las restricciones y nos queda:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &\geq 24 \end{aligned}$$

y

$$X_1, X_2 \geq 0$$

corrigiendo la desigualdad \geq tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ -3X_1 - 4X_2 &\leq -24 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

introduciendo las variables de holgura tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= 6 \\ X_2 + X_4 &= 3 \\ -3X_1 - 4X_2 + X_5 &= -24 \\ X_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

Vemos que ya no existe una solución básica factible inicial que sea obvia, pues $X_5 = -24$ y por condición $X_5 \geq 0$. Se pueden aplicar cualquiera de los siguientes procedimientos:

- Seleccionar otra base y resolver las ecuaciones para ella, la desventaja de este procedimiento estriba en la posibilidad de que la nueva solución básica escogida no sea factible, con lo que este método se convierte en uno de tanteos, hasta encontrar una solución inicial que sea factible.
- Se introduce una variable artificial, la cual entra restandose en aquellas ecuaciones en donde existe una constante negativa:

$$-3X_1 - 4X_2 + X_5 - \bar{X}_6 = -24$$

por tanto

$$3X_1 + 4X_2 - X_5 + \bar{X}_6 = 24$$

\bar{X}_6 se le denomina la variable artificial.

Cuando se introducen variables artificiales es necesario restringirlas a que sean *no negativas*, por lo que se agrega

$$\bar{X}_6 \geq 0$$

Con esto la solución básica factible inicial es:

Variables no básicas

Variables básicas

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ X_2 &= 0 \\ X_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_6 &= 24 \\ X_4 &= 3 \\ X_3 &= 6 \end{aligned}$$

Vemos que, aunque ya podemos aplicar el Método Simplex, hemos caído en una nueva complicación, al introducir la variable artificial, hemos cambiado nuestro problema original, puesto que $(X_5 - \bar{X}_6)$ puede tomar cualquier valor desde $-\infty$ hasta $+\infty$, ya que, tanto X_5 como \bar{X}_6 son iguales o mayores a cero. Por lo tanto $3X_1 + 4X_2$ también puede tomar cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$.

Lo que se ha hecho es eliminar la restricción correspondiente de forma tal, que se ha agrandado el conjunto de soluciones posibles.

Si se aplica el Método Simplex y se obtiene una solución óptima para el problema revisado y ésta es factible para el problema original, podemos concluir que también será una solución óptima para éste, ya que está contenido en el problema revisado.

Sin embargo, no existe la certeza de que el óptimo del problema _revisado sea factible para el problema original. Si forzamos X_6 a ser cero en la solución óptima estaremos nuevamente en el problema original. Para lograr esto, se le asigna una penalidad muy grande a las soluciones factibles del problema revisado que coincidan con las del problema original.

El truco consiste _ en introducir $M\bar{X}_6$ en la función objetivo, de manera que si $\bar{X}_6 \neq 0$, el valor de Z se disminuirá enormemente; en el ejemplo que hemos estado manejando:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 - M\bar{X}_6$$

IGUALDADES EN LAS RESTRICCIONES:

Supongamos que en el ejemplo que hemos estado manejando, modificamos una de las restricciones para convertirla en igualdad:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &= 24 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Introduciendo variables de holgura:

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= 6 \\ X_2 + X_4 &= 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &= 24 \end{aligned}$$

Como la última ecuación no requiere variable de holgura, existe un problema para encontrar la solución básica factible inicial.

Esto se puede solucionar:

- Por tanteos, hasta encontrar una solución básica factible inicial.
- Reemplazando las igualdades por dos desigualdades de sentidos opuestos, i.e.:

$$3X_1 + 4X_2 = 24 \quad \left[\begin{array}{l} 3X_1 + 4X_2 \leq 24 \\ 3X_1 + 4X_2 \geq 24 \end{array} \right.$$

- Introduciendo una variable artificial en cada igualdad y empleando el método de la gran "M", de la siguiente forma:

$$3X_1 + 4X_2 = 24 \quad \longrightarrow \quad 3X_1 + 4X_2 + \bar{X}_5 = 24$$

donde \bar{X}_5 es la variable artificial.

En caso de no existir ninguna solución básica factible para el problema original, es imposible hacer que la variable artificial sea igual a cero.

VARIABLES NO RESTRINGIDAS EN SIGNO:

Existen casos en que las variables de decisión pueden tomar cualquier valor positivo o negativo, (caso no muy frecuente). Cuando esto sucede no se puede aplicar el Método Simplex; pues éste supone que todas las variables son mayores o iguales a cero.

Una variable no restringida en signo puede ser siempre expresada como la diferencia de dos variables no negativas. Así, pues si $-\infty \leq X \leq +\infty$, podemos hacer $X = U - V$ donde tanto U como V son mayores o iguales a cero.

EMPATE PARA ENTRAR A LA BASE:

Existen ocasiones en que dos o más variables no básicas tienen el mismo coeficiente positivo máximo en la función objetivo. Cuando este es el caso, surge la duda de cuál de ellas será la indicada para entrar en la base. Para solucionar esta complicación se hace una selección arbitraria.

EMPATE PARA DEJAR LA BASE:

Cuando varias variables se hacen cero simultáneamente cuando X_e se incrementa, entonces se obtiene un empate para dejar la base (*degeneración*).

En este caso, se escoge *arbitrariamente* cualquier variable, pero se corre el riesgo de caer en círculos viciosos que nos hacen repetir las mismas soluciones periódicamente. Cuando éste es el caso, se debe echar marcha atrás y escoger otra variable para dejar la base y continuar con el Método Simplex.

SOLUCIONES MULTIPLES:

Cambiando la función objetivo del ejemplo que hemos estado manejando:

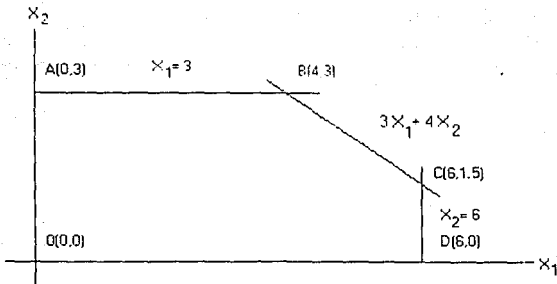
$$\text{Max } Z = 3X_1 + 4X_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &= 24 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resolviendo gráficamente este ejemplo tenemos:



En esta gráfica podemos apreciar que cualquier punto sobre la línea BC será una solución óptima.

Algebraicamente esto se observa cuando al llegar a la solución óptima una de las variables no básicas tiene un coeficiente cero en la función objetivo. Es decir, que al tener en la función objetivo de la solución óptima una variable no básica con coeficiente cero, podemos afirmar que tiene soluciones múltiples.

Si se toma esa variable con coeficiente cero para entrar en la base, y se efectúa otra iteración, el valor de Z no cambiará, pero aparecerá en la función objetivo otra variable no básica con coeficiente cero.

AUSENCIA DE SOLUCIONES FACTIBLES:

Cuando se introducen variables artificiales y su valor no es reducido a cero al obtener la solución óptima, es una indicación de que no existen soluciones factibles.

SOLUCION OPTIMA SIN LIMITE:

Cuando al obtener los límites todos éstos son infinitos para todas las variables, indica que la variable de entrada X_e puede aumentar su valor cuanto se quiera sin hacer negativas las variables básicas, por lo que el valor de Z puede aumentar sin límite.

EJEMPLO GENERAL:

Sea el siguiente modelo matemático de programación lineal:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -2X_1 + X_2 + X_3 &\leq 10 \\ X_2 + 2X_3 &\geq 15 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Para poder aplicar el Método Simplex debemos cambiar el sentido de la segunda desigualdad y convertir en ecuaciones las restricciones, quedando así:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 - M\bar{X}_6$$

sujeito a:

$$-2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$$

$$X_2 + 2X_3 - X_5 + \bar{X}_6 = 15$$

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Todas las variables básicas deben tener coeficiente cero en la función objetivo al iniciar las iteraciones por tanto queda:

(-2	-3	-4	0	0	M	9)
-M(0	1	2	0	-1	1	15)
-2	-M-3	-2M-4	0	M	0	-15M

Podemos ahora aplicar el Método Simplex:

Ecuación número	Variable básica	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	\bar{X}_6	P_0	Límite
0	Z	1	-2	-M-3	-2M-4	0	M	0	-15M	-
1	X_4	0	-2	1	1	1	0	0	10	10
2	\bar{X}_6	0	0	1	2	0	-1	1	15	15/2

$$X_E = X_3$$

$$X_S = \bar{X}_6$$

Ecuación número	Variable básica	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	\bar{X}_6	P_0	Límite
0	Z	1	-2	-1	0	0	-2	2M+4	30	
1	X_4	0	-2	1/2	0	1	1	-1	5/2	∞
2	X_3	0	0	1/2	1	0	-1/2	-1	15/2	∞

$$X_E = X_1$$

El límite de la ecuación uno es $-5/4$; al ser negativo, se considera como ∞ ya que $X_2 \geq 0$, por lo que nunca tomará un valor negativo. El límite de la ecuación dos claramente es infinito y X_1 puede crecer hasta el infinito y la función objetivo seguirá creciendo también, por lo que concluimos que este problema tiene una *solución óptima sin límite*.

II.7. PROBLEMA DE TRANSPORTE:

El problema de transporte surge cuando se debe determinar un plan óptimo de embarque que:

- Se origine en fuentes de suministro (almacenes) donde existe una determinada cantidad "fija" de un artículo.
- Envíe directamente los artículos a su destino final, donde existe la necesidad de una cantidad "fija" de ellos.

- c) Agote los inventarios y satisfaga la demanda.
- d) El costo de embarque debe ser una función lineal, esto es, que el costo de cada embarque debe ser proporcional a la cantidad embarcada y el costo total es la suma de los costos individuales.

NOTACION:

Supóngase que m orígenes (almacenes) contienen varias cantidades de varios artículos que deben ser distribuidos a n destinos (clientes). Específicamente el origen i debe enviar b_j unidades al destino j .

C_{ij} es un número no restringido en signo que representa el costo (si es positivo) o la ganancia (si es negativo) de embarcar una unidad desde el origen i hasta el destino j .

A_i es la existencia del artículo en el almacén i .

b_j es la demanda del cliente j .

X_{ij} es la cantidad del artículo enviada del almacén i al cliente j .

En un problema de transporte se deben agotar los inventarios y satisfacer la demanda del artículo, por tanto

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n b_j : A_i, b_j \geq 0$$

El problema consiste en determinar el número de unidades X_{ij} que deben ser embarcadas de i a j de forma tal, que se agoten los inventarios y la demanda sea cubierta, todo esto, a un costo mínimo.

El planteamiento del problema se realiza como un problema de programación lineal:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C_{ij} X_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = A_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Cabe notar que en este modelo matemático todos los coeficientes de las ecuaciones son cero o uno.

Los datos suelen ser dados en forma de una tabla como la siguiente:

Destino Origen	1	2	n	Disponible	O f e r t a
1	C_{11}	C_{12}	C_{1n}	A_1	
2	C_{21}	C_{22}	C_{2n}	A_2	
.		
.		
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{mn}	A_m	
Demanda	b_1	b_2	b_n		

Generalmente se incluyen en una sola tabla los datos y las incógnitas:

Origen \ Destino	1	2	n	Disponible
1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	X_{1n} C_{1n}	A_1
2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	X_{2n} C_{2n}	A_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	X_{mn} C_{mn}	A_m
Demanda	b_1	b_2	b_n	

O
b
j
e
t
i
v
o

En cualquier etapa del algoritmo el cuadro contiene C_{ij} y X_{ij} , es decir, el valor actual de X_{ij} . La ausencia de tal número implica que X_{ij} es variable no básica y por lo tanto tiene valor de cero. Las variables básicas de valor cero se muestran como tal.

En el problema de transporte se tienen $m+n$ ecuaciones. Si se emplea el criterio desarrollado con anterioridad, debemos tener en cuenta que las soluciones básicas factibles no degeneradas deben contar con $m+n$ variables mayores que cero. Esta consideración resulta falsa a causa de la omisión de una nueva restricción con la que se cuenta en este tipo de problemas:

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = A_i \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

De donde vemos que las $m+n$ ecuaciones son dependientes, pues existe una relación lineal entre ellas.

Un conjunto de entradas en un arreglo rectangular, se dice que ocupan posiciones independientes si es imposible formar círculos cerrados recorriendo dichas entradas.

EXISTENCIA DE SOLUCIONES BASICAS FACTIBLES:

Las condiciones para que una solución básica factible no degenerada exista son las siguientes:

- a) Que satisfaga las restricciones,
- b) Que se tengan exactamente $m+n-1$ entradas y que este número de entradas sea mayor que cero.
- c) Que las entradas estén en posiciones independientes.

SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL:

Para encontrar la solución básica factible inicial se utiliza comúnmente la regla de la esquina noroeste; que tiene la gran ventaja de ser rápida y sencilla, pero cuenta con el inconveniente de que la solución básica factible inicial puede estar bastante alejada de la solución óptima, pues no toma en cuenta los costos C_{ij} al determinar ésta solución inicial.

1. Como candidato para la primer variable básica se escoge cualquier variable X_{ij} (generalmente se escoge X_{11}) y se hace su valor tan grande como las restricciones lo permitan, es decir:

$$X_{ij} = \text{Min} (A_i, b_j)$$

Se pueden tener tres casos:

- a) $A_i < b_j$. A todas las demás variables en el renglón i , se les asigna el valor cero y serán no básicas. Elimínese el renglón i y redúzcase el valor de $b_j - A_i$ y procédase en forma similar para evaluar una variable en el arreglo rectangular reducido compuesto por $m-1$ renglones y n columnas.

- b) $A_i > b_j$, entonces la columna j se elimina y se reemplaza A_i por $A_i - b_j$. Continuar con el paso 1.
- c) $A_i = b_j$, entonces elimínese ya sea el renglón o la columna, pero *no ambas*. Sin embargo, si varias columnas pero sólo un renglón queda en el arreglo reducido, entonces elimínese la columna j .

2. La optimalidad se puede verificar examinando la función objetivo en función de variables básicas:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C_{ij} X_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = A_i \quad \{ i = 1, 2, 3, \dots, m \}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad \{ j = 1, 2, 3, \dots, n \}$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

que se puede escribir:

$$A_i - \sum_{j=1}^n X_{ij} = 0 \quad (1)$$

$$b_j - \sum_{i=1}^m X_{ij} = 0 \quad (2)$$

A los múltiplos de (1) los llamaremos U_i y a los de (2) V_j . Sustituyendo en la función objetivo:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^n U_i \left[A_i - \sum_{j=1}^m X_{ij} \right] + \sum_{j=1}^m V_j \left[b_j - \sum_{i=1}^n X_{ij} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (C_{ij} - U_i - V_j) X_{ij} + \sum_{i=1}^n U_i A_i + \sum_{j=1}^m V_j b_j$$

Entonces se debe cumplir que para toda X básica:

$$C_{rs} - (U_r + V_s) = 0, \text{ ó } C_{rs} = U_r + V_s$$

Como el número de U_i 's más el número de V_j 's es de $m+n$ y sólo existen $m+n-1$ variables básicas, una de las U_i 's ó V_j 's debe tomar un valor arbitrario (en general cero). Al asignar este valor arbitrario, se escoge aquel renglón o columna que contenga más variables básicas.

- Una vez que todas las U_i y V_j se han calculado, se efectúa para todas las variables no básicas:

$$C_{ij} - U_i - V_j$$

y se anota este valor en la esquina superior derecha de cada cuadro.

- Para saber cuál es la variable que entra a la base X_θ , se escoge aquella cuyo número $C_{ij} - U_i - V_j$ sea el número negativo más pequeño.
- A la variable X_θ se le suma un valor θ , que será restado y sumado a otras variables básicas para conservar las condiciones originales de oferta y demanda. En cada columna o renglón la cantidad θ debe restarse el mismo número de veces que se ha sumado.

El valor de θ será el más chico de los valores a los cuales se está restando, y la variable cuyo valor sea igual a θ dejará de ser básica.

5. Se construye una nueva tabla con los cambios indicados al sumar y restar a las variables básicas y se repite la prueba de optimalidad (pasos 2 y 3), si todavía aparecen los números $C_{ij} - U_i - V_j$ negativos se continúa con los pasos 4 y 5, en caso contrario se ha llegado a la solución óptima.

CASOS PARTICULARES:

1. En el caso de que la oferta sea mayor que la demanda, es decir:

$$\sum_{i=1}^n A_i > \sum_{j=1}^m b_j$$

se crea un cliente ficticio cuya demanda será igual a:

$$\sum_{i=1}^n A_i - \sum_{j=1}^m b_j$$

y el costo de transporte será cero desde cualquier origen.

2. En el caso de que la oferta sea menor que la demanda, es decir:

$$\sum_{i=1}^n A_i < \sum_{j=1}^m b_j$$

entonces se crea un origen ficticio cuya oferta será exactamente igual a:

$$\sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n A_i$$

y el costo de transporte será de M hasta cualquier destino (Método de la Gran M). Si la solución se intenta a mano, la gran M puede omitirse, pero es indispensable su empleo cuando la solución se obtiene con otros métodos.

3. En caso de empate tanto para entrar a la base como para dejarla se hace una selección arbitraria.

EJEMPLO:

En la tabla a continuación se muestran los datos de oferta y demanda del producto x , así como los costos de distribución a los centros de consumo. Encontrar la solución que minimice el costo total de distribución satisfaciendo totalmente la demanda.

Destino Origen	A	B	C	Disponible
J	1	2	11	15
K	2	6	18	12
L	7	2	10	10
Demanda	9	18	6	37

Como la oferta es superior a la demanda, se debe crear un cliente que pida $37 - 33 = 4$ unidades a un costo de transporte de cero desde cualquier almacén.

Se efectúa la primera asignación (paso 1) para hallar la solución básica factible inicial. La línea diagonal punteada indica que la variable en cuestión es básica.

Destino Origen	A	B	C	D	Disponible	U_i
J	9 1	6 2	1 11	0 0	15 8 0	0
K	-3 2	12- θ 6	4 18	-4+ θ 0	12 0	4
L	6 7	0+ θ 2	6 10	4- θ 0	10 0	0
Demanda	9 0	18 12 0	6 0	4 0	37	
V_j	1	2	10	0		

Realizada esta asignación inicial, se valúa Z (paso 2) obteniendo:

$$Z = 9(1) + 6(2) + 12(6) + 0(2) + 6(10) + 4(0) = 153$$

Se calculan U_i y V_j (paso 3) asignando como valor arbitrario $U_1 = 0$. Por ejemplo, tenemos:

$$C_{iB} = U_i + V_B \text{ (únicamente para las variables básicas)}$$

Sustituyendo

$$2 = 0 + V_B \quad V_B = 2$$

Para las variables no básicas (paso 4):

$$C_{ij} - (U_i + V_j)$$

por ejemplo:

$$C_{KA} - (U_K + V_A)$$

sustituyendo:

$$2 - (4 + 1) = -3$$

Vemos que $X_e = X_{KF}$ (paso 5) por lo tanto le sumamos la cantidad θ (paso 6), misma que debemos restar a X_{LF} y X_{KB} y sumar a X_{LB} para conservar las condiciones de oferta y demanda. Nótese que θ se suma y resta siempre formando una figura geométrica cerrada y siempre sobre las variables básicas.

Como el menor número al que se le resta θ es 4, entonces $X_s = X_{LF}$ y $\theta = 4$.

Se vuelve a iterar, ya que existen números negativos resultado de aplicar las operaciones $C_{ij} - (U_i + V_j)$, obteniendo la tabla:

Destino Origen	A	B	C	D	Disponible	U_i
J	$9 - \theta$ 1	$6 + \theta$ 2	1 11	4 0	18 8 0	0
K	$-3 + \theta$ 2	$8 - \theta$ 6	4 18	4 0	12 8 0	4
L	6 7	4 2	6 10	4 0	18 8 0	0
Demanda	8 0	18 10 8 0	8 0	4 0	37 37	
V_j	1	2	10	-4		

Donde:

$$Z = 9(1) + 6(2) + 8(6) + 4(0) + 4(2) + 6(10) = 137$$

$$\theta = 8 \quad X_e = X_{KA}; \quad X_s = X_{KB}$$

Como todavía se tienen números negativos, se repite desde el paso 1 hasta el 4, obteniéndose la siguiente tabla:

Destino Origen	A	B	C	D	Disponible	U_i
J	1 1	14 2	1 11	1 0	18 8 0	0
K	8 2	3 6	7 18	4 0	12 8 0	1
L	6 7	4 2	6 10	1 0	18 8 0	0
Demanda	8 0	18 14 8 0	8 0	4 0	37 37	
V_j	1	2	10	-1		

$$Z^* = 1(1) + 14(2) + 8(2) + 4(0) + 4(2) + 6(10) = 113$$

Como ya no existen números negativos, se ha llegado a la solución óptima, que es:

Embarcar de *J* una unidad a *A*.
Embarcar de *J* 14 unidades a *B*.
Embarcar de *K* 8 unidades a *A*.
Embarcar de *L* 4 unidades a *B*.
Embarcar de *L* 6 unidades a *C*.

Con un costo de \$113.

II.8. APLICACION DE LA SOLUCION:

Las aplicaciones del problema de transporte son muchas y muy variadas. Se pueden resolver problemas de distribución, producción, horario, asignación de recursos, etc. El único requisito es que tengan la misma estructura del problema de transporte.

III. PROGRAMACION DINAMICA :

III.1. INTRODUCCION:

La programación dinámica es una técnica matemática que a menudo resulta útil para tomar una sucesión de decisiones interrelacionadas. Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación de decisiones que maximice la efectividad global. Los componentes de este algoritmo son los siguientes:

1. *Etapa.* Una etapa es un periodo o fase perfectamente identificable dentro del problema donde es necesario tomar una decisión.
2. *Alternativas* (Variables de decisión). La determinación de alternativas dentro de cada etapa es parte integral de la definición de la etapa, y por consiguiente, es fácilmente identificable. Por ejemplo, *minimizar costos* o *maximizar utilidad*, etc. Asociada a cada etapa está la *función objetivo* (rendimiento) de una variable de decisión, la cual evalúa el valor de cada alternativa.
3. *Estado.* Los estados son las diversas condiciones posibles en las que el sistema podría estar en esa etapa del problema. El número de estados puede ser *finito* o *infinito*. Solamente se puede elegir un estado dentro de cada etapa.

El uso de etapas y estados para descomponer un problema de programación dinámica se lleva a cabo por medio de una *ecuación recursiva*; ésta permite que se optimice cada etapa por separado. También mantiene información del rendimiento óptimo *acumulado* de todas las etapas anteriormente consideradas, de manera que cuando se llega a la última etapa se tiene disponible el rendimiento óptimo total para el problema completo.

La representación es recursiva porque se calcula el rendimiento óptimo para las primeras i etapas a partir del rendimiento para las primeras $(i - 1)$ etapas y el rendimiento en la etapa i .

III.2. PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA:

La programación dinámica puede resolver problemas determinísticos, en los cuales el estado en la etapa siguiente queda completamente determinado por el estado y la decisión de la política en la etapa actual. Por el contrario, en el caso probabilista existe una distribución de probabilidad para lo que será el estado siguiente.

Una manera de catalogar los problemas de programación dinámica determinística es por la forma de la función objetivo. Por ejemplo, el objetivo podría ser minimizar la suma de las contribuciones de las etapas individuales, o bien, maximizar tal suma, o bien, minimizar el producto de tales términos y así sucesivamente. Otra categorización es en términos de la naturaleza del conjunto de estados para las etapas respectivas. En particular, los estados podrían ser representables por una variable de estado discreta, o bien, por una variable de estado continua o, tal vez, se requiera un vector de estado (más de una variable).

III.3. CONSTRUCCION DEL MODELO MATEMATICO:

Contrastando con la programación lineal, no existe un planteamiento matemático estándar del problema de programación dinámica. Más bien, la programación dinámica es un tipo general de enfoque para resolver problemas y las ecuaciones particulares usadas deben desarrollarse para que se ajusten a cada situación individual. Sin embargo, los pasos utilizados son prácticamente idénticos para cualquier tipo de problema.

NOMENCLATURA:

n	Etapas ($n = 1, 2, 3, \dots, n$)
X_n	Decisión hecha en la etapa n
X_n^*	Decisión óptima hecha en la etapa n
S_n	Estados en la etapa n
$c(s, X_n)$	Contribución al objetivo hecha en la etapa n dada la decisión X_n y el estado s . Esta cantidad se refiere solamente con la contribución en la etapa n .

$f_n(s, X_n)$ Contribución al objetivo hecha en la etapa n y etapas siguientes, dada la decisión X_n y el estado s , considerando las decisiones óptimas para las etapas $n+1, n+2, \dots$.

$f_n^*(s)$ Contribución al objetivo hecha en la etapa n y etapas siguientes dada la decisión óptima X_n^* y el estado s , considerando las decisiones óptimas para las etapas $n+1, n+2 \dots$.

En términos generales, el algoritmo para la programación dinámica es como sigue:

1. Construir una ecuación recursiva que identifique la política óptima para cada estado en la etapa n , dada la solución óptima para cada estado en la etapa $(n-1)$, asimismo se deben determinar las restricciones asociadas a la ecuación. La ecuación recursiva generalmente es de la siguiente forma:

$$f_n(s, X_n) = c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)$$

y

$$f_n^*(s) = \text{Min}_{X_n} [c(s, X_n) + f_{n+1}^*(s)]$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n X_i = E$$

donde E es una cantidad que representa, por ejemplo, el espacio total disponible o cualquier otra restricción importante para resolver el problema.

2. Encontrar la decisión óptima en la última etapa, de acuerdo a la política de decisión establecida. Generalmente la resolución de esta última etapa es trivial, es decir, sin ningún método establecido, tomando en cuenta solo la contribución de la última etapa.

s	$f_n^*(s) = c(s, X_n)$	X_n^*
Conjunto de estados de la etapa $n-1$	Contribución al objetivo en la etapa n con la decisión X_n y el estado s	Decisión óptima para cada estado

3. Resolver para la etapa $n-1$, considerando la *contribución* de la etapa $n-1$ y el *acumulado óptimo* de la etapa n .

s	$f_{n-1}(s, X_{n-1}) = c(s, X_{n-1}) + f_n^*(s)$	$f_{n-1}^*(s)$	X_{n-1}^*
Estados de la etapa $n-2$	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \dots$ Contribución al objetivo en la etapa $n-1$, dada la decisión X_{n-1} y el estado s más el acumulado óptimo de la etapa n	Óptimo de la etapa $n-1$	Decisión óptima de la etapa $n-1$

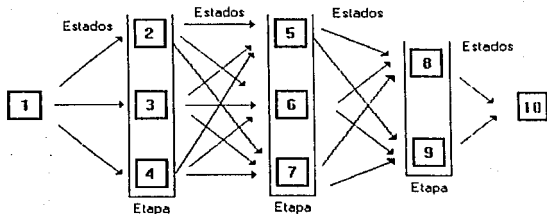
La idea básica detrás de la *relación recursiva* es trabajar *hacia atrás*, revisando en cada etapa el efecto total que tendría en el problema hacer una decisión particular en la etapa que está siendo analizada. Si se resolviera el problema *hacia adelante*, es decir, desde la etapa 1 hasta la n , sería necesario realizar una enumeración exhaustiva de todas las alternativas, mientras que *hacia atrás* se reduce el número de alternativas a analizar. Cuando se llega a la etapa inicial se encuentra la solución óptima.

4. El paso 3 se repite para las $n-2$ etapas restantes, trabajando de la misma manera.
5. Cuando se ha resuelto la primera etapa, la decisión total se conforma combinando *hacia adelante* la decisión óptima X_1^* , con la decisión óptima X_2^* y así sucesivamente hasta combinar la decisión óptima X_n .

III.4. METODO DE SOLUCION:

Ya que resulta difícil abstraer estos conceptos, veamos un ejemplo para entender el método de solución.

Un problema construido especialmente para ilustrar las características de la programación dinámica es el problema de la diligencia; este problema se refiere a un vendedor mítico que tuvo que viajar hacia el oeste por diligencia, a través de tierras indias hostiles, aproximadamente hace 125 años. Aún cuando su punto de partida y destino eran fijos, tenía un número considerable de opciones para elegir por cuales territorios recorrer su ruta. En la figura a continuación se muestran las rutas posibles, en donde cada estado se representa por un bloque numerado. Por tanto, se requerían cuatro etapas para viajar desde su punto de embarque en el estado 1 hasta su destino en el estado 10.



Este vendedor era un hombre prudente, que se preocupaba bastante respecto a la seguridad de su viaje. Después de reflexionar un poco se le ocurrió una forma un tanto ingeniosa de determinar la ruta más segura. Se ofrecían seguros de vida a los pasajeros de las diligencias. Como el costo de cada póliza se basaba en una evaluación cuidadosa de la seguridad de ese recorrido, la ruta más segura debía ser aquella con la póliza de seguro de vida más barata.

El costo de la póliza estándar para el viaje en diligencia del estado i al j , el cual se denotará por c_{ij} , es

• Este problema fue desarrollado por el Profesor Harvey H. Wagner cuando pertenecía a la Universidad de Stanford.

					5	6	7		8	9		
	2	3	4		2	4	6	4	5	4	1	
1	4	3	2		3	3	7	2	6	3	3	
					4	7	4	3	7	3	6	
												10
											8	3
											9	4

Las variables de decisión X_n ($n = 1, 2, 3, 4$) son el destino inmediato en la etapa n . Así, la ruta seleccionada sería

$$1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4$$

en donde $X_4 = 10$. Sea $f_n(s, X_n)$, el costo total de la mejor política global para las etapas restantes, dado que el vendedor se encuentra en el estado s listo para iniciar la etapa n y selecciona a X_n como el destino inmediato.

Dados s y n , se denota por X_n^* , al valor de X_n que minimiza a $f_n(s, X_n)$ y sea $f_n^*(s)$ el valor mínimo correspondiente de $f_n(s, X_n)$. Por tanto, $f_n^*(s) = f_n(s, X_n^*)$. El objetivo es hallar $f_1^*(1)$ y la política correspondiente. La programación dinámica hace esto, hallando sucesivamente $f_4^*(s)$, $f_3^*(s)$, $f_2^*(s)$ y, a continuación $f_1^*(s)$ (trabajando hacia atrás).

La solución trivial (paso 2), en la etapa 4 es:

S	$f_4^*(s)$	X_4^*
8	3	10
9	4	10

Para $n = 3$ (paso 3):

$s \backslash X_3$	$f_3(s, X_3) = c(s, X_3) + f_4^*(X_3)$		$f_3^*(s)$	X_3^*
	8	9		
5	7	5	5	9
6	6	7	6	8
7	6	10	6	8

Para $n = 2$ (pasos 3 y 4):

s \ X ₂	$f_2(s, X_2) = c(s, X_2) + f_3^*(X_2)$			$f_2^*(s)$	X ₂ *
	5	6	7		
2	9	12	10	9	5
3	8	13	8	8	5, 7
4	12	10	9	9	7

Para $n = 1$ (pasos 3 y 4):

s \ X ₁	$f_1(s, X_1) = c(s, X_1) + f_2^*(X_1)$			$f_1^*(s)$	X ₁ *
	2	3	4		
1	13	11	11	11	3, 4

Ahora pueden identificarse tres soluciones óptimas. Los resultados para el problema indican que el vendedor debe ir al estado 3, o bien, al 4. Si elige $X_1^* = 3$, los resultados del problema de tres etapas para $s = 3$ son $X_2^* = 5$ y $X_3^* = 7$, si escoge $X_2^* = 5$, entonces $X_3^* = 9$ y $X_4^* = 10$, con lo que una de las soluciones óptimas es:

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10$$

Las otras dos son:

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10$$

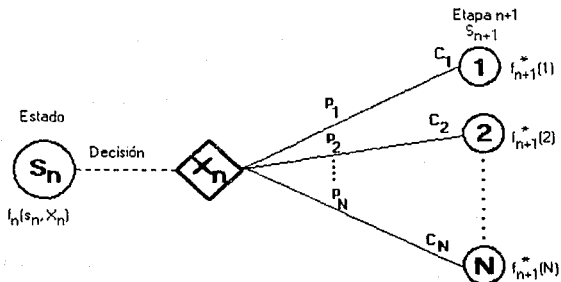
Cualquiera de ellas a un costo mínimo de \$11.

Refiérase al capítulo II, para otro ejemplo de programación dinámica aplicada a inventarios.

III.5. PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA:

La programación dinámica probabilística difiere de la programación dinámica determinística en que el estado en la etapa siguiente no queda completamente determinado por el estado y la decisión en la etapa actual. En lugar de ello, existe una distribución de probabilidad asociada al estado siguiente.

En la figura a continuación se muestra la estructura básica que resulta para la programación dinámica probabilística.



En esta figura N denota el número de estados posibles en la etapa $n+1$; (P_1, P_2, \dots, P_N) es la distribución de probabilidad de lo que será el estado, dados el estado S_n y la decisión X_n en la etapa n ; C_i es la contribución resultante a la función objetivo de la etapa n , si el estado resulta ser el estado i .

Cuando se desarrolla una figura como ésta, para incluir todos los estados y decisiones posibles en todas las etapas, a veces recibe el nombre de árbol de decisión. Si el árbol de decisión no es demasiado grande, proporciona una manera útil de resumir las diversas posibilidades que pueden ocurrir.

En virtud de la estructura probabilística, la relación entre $f_n(S_n, X_n)$ y $f_{n+1}^*(S_{n+1})$ necesariamente es más complicada que para la programación dinámica determinística. La forma precisa de esta relación dependerá de la forma de la función objetivo global.

Como ejemplo, supongamos que el objetivo es minimizar la suma esperada de las contribuciones de las etapas individuales. En este caso, $f_n(S_n, X_n)$, representaría la suma mínima esperada de la etapa n en adelante, dado que el estado y la decisión en la etapa n son S_n y X_n respectivamente. En consecuencia,

$$f_N(S_N, X_N) = \sum_{i=1}^N P_i(C_i + f_{N+1}^*(i))$$

con

$$f_{N+1}^*(S_{N+1}) = \min_{X_{N+1}} f_{N+1}(S_{N+1}, X_{N+1})$$

donde esta minimización se toma sobre los valores factibles de X_{N+1} .

III.6. METODO DE SOLUCION:

Para comprender este algoritmo, veamos un ejemplo:

La compañía Boeing ha ganado un concurso para fabricar aviones B-12 para la Secretaría de Marina. Dicha Secretaría ha especificado requerimientos de calidad tan rigurosos que es posible que la Boeing tenga que producir más de un avión para obtener uno aceptable. El fabricante estima que cada avión será aceptable con probabilidad del 60% y será defectuoso (sin probabilidad de reparación) con probabilidad del 40%. Así entonces, el número de aviones aceptables producidos en un lote de tamaño L tendrá una distribución binomial. La probabilidad de producir cero B-12 aceptables en un lote de este tipo es de $(0.40)^L$.

Se estima que los costos marginales de producción son de \$2'000,000 de dólares por avión (incluso si es defectuoso) y los aviones en exceso no tienen posible comprador. Además debe incurrirse en un costo de preparación de \$3'000,000 de dólares, siempre que se monte la línea de producción. Si la inspección efectuada revela que un lote completo no ha dado resultado aceptable, debe volver a montarse todo el proceso de producción con un costo adicional de 3 millones de dólares. La Boeing sólo tiene tiempo para hacer no más de tres series de producción. Si no se ha obtenido un B-12 aceptable al final de la tercera serie de producción, el costo para la Boeing por ventas perdidas y en costos de penalización sería de \$16'000,000 de dólares.

Determinar la política referente al tamaño del lote para la serie, o series, de producción requeridas que minimice el costo total esperado para la Boeing.

Las etapas de programación dinámica son las series de producción. Las variables de decisión X_n ($n = 1, 2, 3$) son el tamaño del lote de producción en la etapa n . El número de aviones aceptables todavía por obtenerse (uno o cero) servirá para describir el estado del sistema en cualquier etapa. Por tanto, el estado $s = 1$ en la etapa 1. Si posteriormente se obtiene al menos un B-12 aceptable, el estado cambia a $s = 0$, después de lo cual no es necesario que se incurra en costos adicionales.

Aunque puede darse una expresión complicada para la función objetivo global, es más sencillo definir $f_n(s, X_n)$ directamente. En este caso, $f_n(s, X_n)$ es el costo total esperado mínimo para la etapa n en adelante, dado que el estado y la decisión de la política en la etapa n son s, X_n , respectivamente. Además,

$$f_n^*(s) = \text{Min}_{X_n = 0, 1, \dots} f_n(s, X_n),$$

donde $f_n^*(0) = 0$. La contribución al costo por la etapa n es $(K, +X_n)$, sin importar el estado siguiente, en donde

$$K = \begin{cases} 0, & \text{si } X_n = 0 \\ 3, & \text{si } X_n > 0 \end{cases}$$

(Usaremos múltiplos de un millón para facilitar los cálculos.)

Por lo tanto, para $s = 1$,

$$\begin{aligned} f_n(1, X_n) &= K + 2 X_n + (0.40)^{X_n} f_{n+1}^*(1) + [1 - (0.40)^{X_n}] f_{n+1}^*(0) \\ &= K + 2 X_n + (0.40)^{X_n} f_{n+1}^*(1) \end{aligned}$$

donde $f_4^*(1)$ se define como 16 (millones), el costo terminal si no se han obtenido artículos aceptables y el coeficiente de X_n es 2 (millones), es decir, el costo marginal de producción.

Como consecuencia, la relación recursiva para los cálculos de programación dinámica es

$$f_n^*(1) = \text{Min}_{x_n=0, 1, \dots} \left[K + 2 X_n + (0.40)^{x_n} f_{n+1}^*(1) \right]$$

para $n = 1, 2, 3$. A continuación se resumen estos cálculos:

$n = 3$

s \ x_3	$f_3(1, x_3) = K + 2 X_3 + 16(0.40)^{x_3}$						$f_3^*(s)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0	--	--	--	--	--	0	0
1	16	11.40	9.56	10.02	11.41	23.16	9.56	2

$n = 2$

s \ x_2	$f_2(1, x_2) = K + 2 X_2 + (0.40)^{x_2} f_3^*(1)$						$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0	--	--	--	--	--	0	0
1	9.56	8.82	8.53	9.61	11.24	13.10	8.53	2

$n = 1$

s \ x_1	$f_1(1, x_1) = K + 2 X_1 + (0.40)^{x_1} f_2^*(1)$						$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
1	8.53	8.41	8.36	9.55	11.22	13.09	8.41	2

Así entonces, la política óptima es producir dos artículos en la primera serie de producción; si ninguno es aceptable, entonces producir otros dos en la segunda serie; si ninguno es aceptable, entonces producir otros dos en la tercera. El costo total esperado para esta política es de \$8.41 millones de dólares.

IV. RUTA CRITICA:

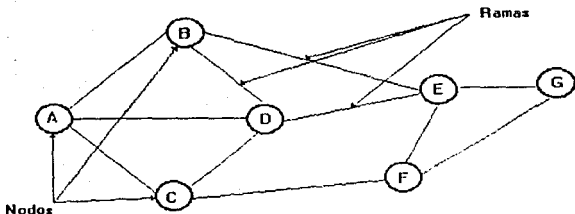
IV.1. INTRODUCCION:

El análisis de redes ha desempeñado desde hace tiempo un importante papel en ingeniería eléctrica. Sin embargo, ha ido creciendo la seguridad de que ciertos conceptos y herramientas de la teoría de redes también son útiles en otros campos, por ejemplo la teoría de la información, la cibernética, sistemas de transporte, etc.

Un problema básico de la teoría de redes que comúnmente surge en el estudio de los problemas de transporte es encontrar la ruta más corta a través de una red. Un problema similar es elegir un conjunto de conexiones que proporcionen una ruta entre dos puntos cualesquiera de una red, de tal manera que se *minimice la longitud total de estas conexiones*. Otro problema fundamental comprende la asignación de flujos para *maximizar el flujo* a través de una red que conecta una fuente y un destino. La *planificación y control de proyectos* es una cuarta área de problemas que se han atacado mediante técnicas de redes, en especial *PERT* (Program Evaluation and Review Technique - Técnica de Revisión y Evaluación del Programa) y *CPM* (Critical Path Method - Método de la Ruta Crítica).

IV.2. TEORIA DE GRAFICAS:

De acuerdo con la terminología de la teoría de las gráficas, una gráfica consta de puntos de unión llamados *nodos*, siendo unidos ciertos pares de los nodos por medio de líneas llamados *arcos*.



Se considera una red como una gráfica con un flujo de algún tipo en sus arcos. Una cadena entre los nodos i y j es una sucesión de arcos que conectan a estos nodos. Por ejemplo, una de las cadenas que unen a los nodos A y G de la figura anterior es la sucesión de arcos AD , DE , EG . Cuando también se especifica la dirección en que se recorre la cadena, se le da el nombre de trayectoria. Un ciclo es una cadena que une a un nodo consigo mismo sin retroceder sobre sus pasos. Así entonces, BD , DE , EB forman un ciclo en la figura anterior.

Se dice que una gráfica es una gráfica conexa si existe una cadena que conecte a todo par de nodos. Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ciclos. Uno de los teoremas de la teoría de gráficas afirma que una gráfica que tiene n nodos es conexa si tiene $(n - 1)$ arcos y ningún ciclo (de modo que tal gráfica es un árbol).

Se dice que un nodo en una red es una fuente si cada uno de sus arcos tiene una orientación tal que el flujo se mueve hacia afuera del nodo. Análogamente, se conoce como nodo destino si cada uno de sus arcos está orientado hacia ese nodo. Así entonces, las fuentes pueden imaginarse como los generadores del flujo y los destinos como los absorbentes de ese flujo.

IV.3. REDES DE ACTIVIDAD:

En las redes de actividad, los nodos representan los eventos, que son hechos bien definidos en el tiempo, por ejemplo, la recepción de un cargamento; y los arcos representan una actividad, por ejemplo la distribución de la mercancía.

El nodo inicial tiene la propiedad de que de él emanan una o varias actividades pero ninguna precede al evento asociado con este nodo inicial. En cambio, el nodo terminal tiene la propiedad de que es precedido por uno o varios eventos, pero el evento asociado a este nodo terminal no precede a ningún otro evento del proyecto. En las redes de actividad no se permite que exista más de una actividad entre dos eventos.

Una red de actividad asociada, en forma simplificada, se refiere a una serie de eventos que ocurren desde que se concibe un nuevo producto en una corporación industrial, hasta que se lanza el producto al mercado.

Muchas actividades pueden realizarse en paralelo, es decir simultáneamente, mientras que otras requieren de una precedencia, es decir son actividades en serie. Obviamente, si por algún motivo se retrasa una actividad, se retrasarán todas las actividades que dependen de ésta. El grupo de toma de decisiones, se interesa por lo tanto, en identificar todos los cuellos de botella.

IV.4. RUTA CRITICA:

Para poder darle una estructura matemática a este problema, definiremos que N_i es el nodo que representa al evento i , (para $i = 1, 2, \dots, m$) de un proyecto que contiene m eventos. Dados dos eventos N_i y N_j , donde N_i precede a N_j , entonces A_{ij} representa la actividad que se origina en el evento N_i y termina en el evento N_j .

Se definen, asimismo, que t_{ij} y c_{ij} son respectivamente la duración y el costo de la actividad A_{ij} . La duración puede ser un valor determinístico o aleatorio. Para efectos de la Ruta Crítica, t_{ij} es un valor determinístico. Sea A el conjunto de todas las actividades y N el conjunto de todos los m eventos, es decir, $N = \{1, 2, \dots, m\}$. Sea π_k la cadena que conduce del evento inicial N_1 al evento N_j . Sea $t(\pi_k)$ la duración total de la cadena π_k , es decir,

$$t(\pi_k) = \sum_{A_{ij} \in \pi_k} t_{ij}$$

Se denota al menor tiempo (tiempo de inicio más rápido) de un evento N_j , como IR_j y se le define como

$$IR_j = \max_k t(\pi_k),$$

donde π_k son todas las posibles cadenas que conectan al nodo inicial N_1 con N_j .

El menor tiempo del evento inicial N_1 es

$$IR_1 = 0$$

• Cuando la duración es aleatoria, se resuelve mediante PERT.

La ecuación

$$IR_j = \text{Max}_k t(\pi_k),$$

indica que se requiere del cálculo de la ruta más larga del nodo N_1 al nodo N_j , en una red acíclica direccional. Si se denota a $B(j)$ como el conjunto de nodos que conectan con N_j , esta ecuación puede escribirse en forma recursiva de la siguiente manera:

$$IR_j = \text{Max}_{i \in B(j)} [IR_i + t_{ij}], \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

$$IR_1 = 0.$$

El cálculo de todos los *menores tiempos* de todos los eventos debe llevarse a cabo primero con todos los eventos que conectan directamente con estos eventos, etc., hasta alcanzar el evento final del proyecto.

De una manera análoga, se pueden realizar otra serie de cálculos empezando en el evento final N_m y concluyendo en el evento inicial N_1 . Se denota al *mayor tiempo* (terminación más tardía) de un evento N_j como TT_j y se define como

$$TT_j = \text{Min}_k [TT_m - t(\overline{\pi}_k)]$$

$$TT_m = IR_m,$$

donde $(\overline{\pi}_k)$ es la k -ésima cadena que va del evento N_j al evento final N_m .

Y $t(\overline{\pi}_k)$ es la duración total de esta cadena.

En la ecuación

$$TT_m = IR_m,$$

se nota que la duración asociada al *menor tiempo* del evento final N_m (IR_m), coincide con la duración asociada al *mayor tiempo* del mismo evento (TT_m). En forma recursiva se puede escribir esta ecuación como

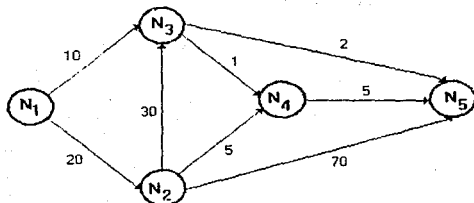
$$TT_i = \min_{i \in B(j)} [TT_j - t_{ij}], \quad i = m, m-1, m-2, \dots, 1,$$

$$TT_m = IR_m$$

donde $B(j)$ denota al conjunto de eventos N_i que preceden al evento N_j .

Veamos un ejemplo:

Dada la siguiente red:



donde la duración de los eventos se expresa en días se tiene:

a) Cálculo de los menores tiempos de cada evento.

$$\begin{aligned} IR_1 &= 0 \text{ días,} \\ IR_2 &= [0 + 20] = 20 \text{ días,} \\ IR_3 &= \text{Max } [0 + 10, 20 + 30] = \text{Max } [10, 50] = 50 \text{ días,} \\ IR_4 &= \text{Max } [20 + 5, 50 + 1] = \text{Max } [25, 51] = 51 \text{ días,} \\ IR_5 &= \text{Max } [20+70, 50+2, 51+5] = \text{Max } [90, 52, 56] = 90 \\ &\quad \text{días,} \end{aligned}$$

b) Cálculo de los mayores tiempos de cada evento.

$$\begin{aligned} TT_5 &= IR_5 = 90 \text{ días,} \\ TT_4 &= 90 - 5 = 85 \text{ días,} \\ TT_3 &= \text{Min } [90-2, 85-1] = \text{Min } [88, 84] = 84 \text{ días,} \\ TT_2 &= \text{Min } [90-70, 85-5, 84-30] = \text{Min } [20, 80, 54] = 20 \\ &\quad \text{días,} \\ TT_1 &= \text{Min } [20-20, 84-10] = \text{Min } [0, 74] = 0. \end{aligned}$$

Se define como *holgura de un evento* N_i al posible retraso que ese evento podría experimentar, sin causar retraso alguno a la duración total del proyecto. La holgura del evento N_i , se escribe H_i y se define como

$$H_i = TT_i - IR_i, \text{ para toda } i \in N$$

Así en el ejemplo que se está considerando:

$$\begin{aligned} H_1 &= 0 - 0 = 0 \text{ días,} \\ H_2 &= 20 - 20 = 0 \text{ días,} \\ H_3 &= 84 - 50 = 34 \text{ días,} \\ H_4 &= 85 - 51 = 34 \text{ días,} \\ H_5 &= 90 - 90 = 0 \text{ días} \end{aligned}$$

Los eventos N_3 y N_4 tienen una holgura de 34 días, mientras que los eventos restantes no tienen holgura. Esto quiere decir que si el evento N_1 empieza el día 1, el N_2 debe empezar exactamente 20 días después si no se quiere retrasar la terminación del proyecto. Si el evento N_2 comienza 25 días después de N_1 , entonces el proyecto terminaría por lo menos 5 días después de lo programado. En cambio, el evento N_3 , que tiene 34 días de holgura, podría empezarse no antes del décimo día de empezado el proyecto, pero no después del día 44, si no se quiere retrasar la obra. Al grupo de toma de decisiones le interesa saber que para no retrasar el proyecto, las actividades A_{12} y A_{25} deben empezar una inmediatamente después de la otra (ya que la holgura es cero), mientras que las demás actividades tienen cierta holgura o rango de retraso, que no afectan la duración de todo el proyecto (mientras se respeten esas holguras).

En resumen, las actividades A_{12} y A_{25} son críticas para el proyecto, pues el retraso de una unidad de tiempo en su inicio, ejecución o terminación retrasarían la duración total del proyecto.

Se define como *ruta crítica* aquella que se forma del evento inicial al final con eventos cuya holgura es nula.

IV.5. EL CASO PROBABILISTICO: PERT:

Como ya se mencionó, *PERT* es una técnica utilizada para la medición y control del desarrollo de un proyecto.

Esta técnica fue originalmente desarrollada en la ejecución del proyecto Polaris en 1958 por la oficina de proyectos especiales de la Marina de los Estados Unidos, junto con la Lockheed Aircraft Corporation y en colaboración con la firma consultora en administración Booz, Alden and Hamilton.

La industria ha adoptado *PERT* para ayudar en la administración de proyectos que incluyen muchas actividades interrelacionadas. *PERT* se utiliza para medir y controlar el progreso de proyectos tales como programas de construcción, preparación de cotizaciones, control de compras, distribución de recursos, etc.

Uno de los principales objetivos de *PERT* es el determinar la probabilidad de cumplir con las fechas límite especificadas. *PERT* identifica además, aquellas actividades que pueden ser cuellos de botella y en las que, por lo tanto, se debe vigilar más estrictamente el estar dentro del itinerario. Otro objetivo es la evaluación del efecto de un cambio de recursos de aquellas actividades menos críticas hacia los probables cuellos de botella, y el evaluar el efecto de las desviaciones respecto del programa. *PERT* construye una red con las actividades del proyecto para retratar gráficamente las interrelaciones que existen entre los elementos del proyecto. Esta representación como red, muestra todas las relaciones de precedencia referentes al orden en el que se deben efectuar las tareas.

PERT supone que el tiempo t_{ij} , asociado a la actividad A_{ij} que une al evento N_j y al evento que lo precede N_i , no es un valor determinístico, sino que puede tomar diferentes valores con diferentes probabilidades.

Se considera que una actividad puede tener tres clases de duración:

- a) *Optimista*, que se denota por a_{ij} ; es una estimación que se asocia a una actividad, si todo marcha a las mil maravillas (recursos humanos, materiales, financieros, etc.);
- b) *Media*, que se denota por m_{ij} ; es una estimación que se asocia a una actividad en condiciones normales;
- c) *Pesimista*, que se denota por b_{ij} ; es una estimación que se asocia a una actividad en condiciones completamente desventajosas, donde todo demora más de lo planeado.

Dadas las tres estimaciones de duración asociadas a una actividad A_{ij} , la optimista a_{ij} , la media m_{ij} y la pesimista b_{ij} , se procede a calcular el valor esperado de la duración t_{ij} de esa actividad. Este valor t_{ij} se calcula con la fórmula:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{1}{6} [a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}], \text{ para toda } A_{ij}.$$

Con ese valor esperado se aplica la metodología de ruta crítica. La ruta crítica que se encuentre tendrá una duración esperada de

$$\bar{T}(\pi_c) = \sum_{A_{ij} \in \pi_c} \bar{t}_{ij}$$

y una varianza

$$\sigma_{\pi_c}^2 = \sum_{A_{ij} \in \pi_c} \sigma_{ij}^2$$

donde la varianza σ_{ij}^2 de la actividad A_{ij} en la ruta crítica se calcula con la fórmula:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{36} [b_{ij} - a_{ij}]^2$$

La razón lógica de los denominadores (1/6 y 1/36) es que se considera que las colas de muchas distribuciones de probabilidad se encuentran aproximadamente a 3 desviaciones estándar de la media, de modo que existe una extensión aproximada de 6 desviaciones estándar entre las colas. La distribución de probabilidad del tiempo requerido por la actividad es aproximadamente la distribución beta*, en la que la moda es m , la cota inferior es a y la cota superior es b .

* Una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por

$$f_x(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}, & \text{para } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

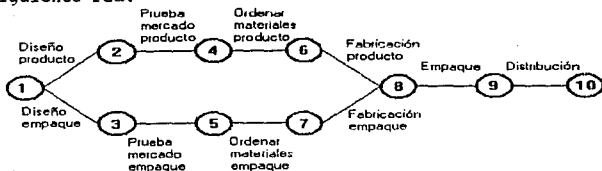
se conoce como variable aleatoria con distribución beta. Esta densidad es una función de los dos parámetros α y β , ambos de los cuales son constantes positivas.

Para calcular la probabilidad de completar el proyecto dentro del programa es necesario hacer tres suposiciones adicionales:

1. Los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes.
2. La ruta crítica (en términos de tiempos esperados) siempre requiere de un tiempo total transcurrido más largo que el de cualquier otra trayectoria. La implicación resultante es que el valor esperado y la varianza del tiempo son simplemente la suma de los valores esperados y las varianzas, respectivamente, de los tiempos para las actividades sobre la ruta crítica.
3. El tiempo del proyecto tiene una distribución normal. La razón de esta suposición es que este tiempo es la suma de muchas variables aleatorias independientes, y por el teorema del Límite Central, esto implica que la distribución de probabilidades de tal suma es aproximadamente normal bajo una amplia variedad de condiciones. El problema de trabajar con una familia infinita de distribuciones normales se puede evitar normalizando valores.

Veamos un ejemplo:

Para el lanzamiento de un nuevo producto se ha construido la siguiente red.



- * Refiérase al capítulo II para mayores detalles sobre el Teorema del Límite Central.
- * Para normalizar valores se aplica la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

donde μ y σ son la media y la desviación estándar de la muestra, respectivamente. Los valores de z permiten, con ayuda de las tablas, determinar el área bajo la curva normal entre dos valores cualesquiera de x .

con los siguientes datos:

Actividad	Tiempo medio (Semanas)	Tiempo optimista (Semanas)	Tiempo pesimista (Semanas)
1 → 2	8.0	5.0	12.0
1 → 3	3.0	2.0	5.0
2 → 4	2.0	1.0	3.0
3 → 5	1.0	0.5	2.0
4 → 6	4.0	3.0	7.0
5 → 7	3.0	2.0	4.0
6 → 7	2.0	1.0	3.0
7 → 8	1.0	0.5	2.0
8 → 9	1.0	0.5	2.0
9 → 10	3.0	1.0	5.0

Evento	Tiempo programado (Semanas)
10	20
9	18
8	17
7	10
6	15
5	8
4	12
3	7
2	7
1	0

1. Determinar la ruta crítica del proyecto.
2. Calcular la probabilidad de concluir el proyecto en el tiempo programado.

Calculemos el tiempo esperado \bar{t}_{ij} para cada actividad, su varianza σ'_{ij} y su desviación estándar σ_{ij} :

Actividad	\bar{t}_{ij}	σ^2_{ij}	σ_{ij}
1 → 2	8.17	1.36	1.17
1 → 3	3.17	0.25	0.50
2 → 4	2.00	0.11	0.33
3 → 5	1.08	0.06	0.25
4 → 6	4.33	0.44	0.67
5 → 7	3.00	0.11	0.33
6 → 7	2.00	0.11	0.33
7 → 8	1.08	0.06	0.25
8 → 9	1.08	0.06	0.25
9 → 10	3.00	0.44	0.67

Evento	Menor tiempo IR_i	Mayor tiempo TT_i	Valor esperado de la holgura H_i	Ruta crítica esperada
1	0.00	0.00	0.00	*
2	8.17	8.17	0.00	*
3	3.17	11.33	8.17	
4	10.17	10.17	0.00	*
5	4.25	12.42	8.17	
6	14.50	14.50	0.00	*
7	7.25	15.42	8.17	
8	16.50	16.50	0.00	*
9	17.58	17.58	0.00	*
10	20.58	20.58	0.00	*

De esta tabla deducimos que la ruta crítica son las siguientes actividades:

1 → 2 → 4 → 6 → 8 → 9 → 10

Para calcular la probabilidad de completar el proyecto en el tiempo programado, construimos la siguiente tabla, donde la primera columna es el tiempo t_{ij} y la segunda es la suma de las desviaciones estándar σ_{ij} para los eventos considerados. Con estos dos datos y el tiempo programado, determinamos z y ésta se busca en tablas para hallar el área bajo la curva normal.

Evento	Menor tiempo IR_i		Mayor tiempo TT_i		Tiempo programado	Puntaje z	Probabilidad de cumplir
10	20.58	3.42	20.58	0.00	20	(0.17)	43%
9	17.58	2.75	17.58	0.67	18	0.15	55%
8	16.50	2.50	16.50	0.92	17	0.20	58%
7	7.25	1.08	15.42	1.25	10	2.55	99%
6	14.50	2.17	14.50	1.25	15	0.23	59%
5	4.25	0.75	12.42	1.58	8	5.00	99%
4	10.17	1.50	10.17	1.92	12	1.22	88%
3	3.17	0.50	11.33	1.83	7	7.66	99%
2	8.17	1.17	8.17	2.25	7	(1.00)	15%
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0.00	-

Con lo que ha quedado completamente resuelto.

BIBLIOGRAFIA

- Buffa, Elwood S. *ADMINISTRACION DE OPERACIONES, LA ADMINISTRACION DE SISTEMAS PRODUCTIVOS*, Limusa, México, 1981.
- Hillier, F., G. Lieberman, *INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES*, Mc. Graw-Hill, México, 1985.
- Monroy, C. Luis Miguel, *MANUAL DE INVESTIGACION DE OPERACIONES*, Universidad Anáhuac, México, 1984.
- Prawda, Juan, *METODOS Y MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES, VOL. 1 MODELOS DETERMINISTICOS*, Limusa, México, 1988.
- Prawda, Juan, *METODOS Y MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES, VOL. 2 MODELOS ESTOCASTICOS*, Limusa, México, 1988.
- Taha, Hamdy *INVESTIGACION DE OPERACIONES, UNA INTRODUCCION*, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México, 1976.
- Ullmann, John E. *TEORIA Y PROBLEMAS SOBRE METODOS CUANTITATIVOS EN ADMINISTRACION*, Mc. Graw-Hill, México, 1979.

CAPITULO VI

ADMINISTRACION DE

MATERIALES

I. INTRODUCCION:

I.1. GENERALIDADES:

Tres de los principales objetivos de la mayoría de las empresas orientadas a la obtención de utilidades son:

1. Máximo servicio al cliente.
2. Mínima inversión en inventarios.
3. Operación eficiente (bajo costo) de la planta.

El problema más importante para alcanzar estos objetivos es que están básicamente en conflicto. El máximo servicio al cliente se puede proporcionar si los inventarios se elevan a niveles muy altos y se mantiene flexible la planta alterando los niveles de producción y variando los programas de ésta para cubrir las demandas cambiantes de los clientes. De este modo, el segundo y tercer objetivos experimentan dificultad para cumplir el primero. Se puede mantener eficiente la operación de la planta si rara vez se cambian los niveles de producción, no se incurre en tiempos extras y las máquinas funcionan por largos periodos una vez que se han preparado para un producto en particular; sin embargo, esto produce grandes inventarios y mal servicio al alcanzar el objetivo de máxima eficiencia en planta. Los inventarios se pueden mantener en bajo nivel si se hace esperar a los clientes y si se fuerza la planta para reaccionar rápidamente a los cambios en los requisitos del cliente y a las interrupciones en producción. Pocas compañías pueden soportar trabajar por uno de estos objetivos con la exclusión de los otros, puesto que todos son casi igual de importantes para un éxito prolongado.

El control de la producción y de los inventarios se ocupa básicamente de proporcionar la información necesaria para las decisiones diarias requeridas para reconciliar estos objetivos en las operaciones de la planta.

I.2. PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES (MRP):

En la actualidad, en una gran compañía manufacturera la responsabilidad del servicio al cliente descansa en un grupo organizacional, el departamento de ventas, que rara vez reconoce gran responsabilidad por la eficiencia de la planta o por los niveles de inventario.

Por otro lado, la gente de producción por lo general, siente poca responsabilidad por los inventarios y quizá poco más por el servicio al cliente. De hecho, muchos gerentes y supervisores de planta con probabilidad nunca han concebido sus actividades desde el punto de vista del cliente. Con frecuencia el desempeño de esta gente se mide no por su contribución a los objetivos globales de la compañía sino por sus habilidades para controlar los tiempos guía y mantener los artículos en existencia: sin embargo, ellos saben que sus carreras dependen sobremanera de lo bien que saquen la producción, de que manejen bien al sindicato y de que cumplan sus metas de gastos presupuestados. Bajo la misma consigna, a muy poca gente de ventas se le juzga por su contribución a las utilidades; se les valora en cambio, por sus habilidades para vender más productos. Uno de los estereotipos más trillados en la actualidad en los negocios es: es saludable tener a gerentes dentro de una compañía compitiendo entre sí. Esta afirmación tiene algo de verdad cuando los gerentes compiten por las mismas metas (tales competencias pueden producir excelentes resultados), pero cuando comienzan a competir por metas diferentes, el resultado será desperdicio y conflicto.

La reconciliación de estos objetivos en conflicto en una compañía moderna, en la que las responsabilidades se han dividido en forma severa y en la que se ha estimulado a los gerentes a suboptimizar las medidas de su desempeño, viene a ser un problema desafiante; intentar resolver este problema es la primera función de la planeación y el control de la producción y de los inventarios. Actuando a través de un sistema de información, de una planeación, de una medición del desempeño real frente al plan y de la presentación de la información a los gerentes de línea que deben tomar las acciones correctivas, la función del control de la producción y de los inventarios es reconciliar estos objetivos para alcanzar las metas globales de utilidades de la compañía. No hay otro grupo que haga este trabajo.

En 1957, un grupo de 27 personas que trabajaban en control de la producción y de los inventarios se juntaron en Cleveland y formaron la American Production and Inventory Control Society (APICS). Sus objetivos eran el desarrollo de un cuerpo de conocimiento, la difusión de la información en lenguaje, principios y técnicas y la educación de sus miembros y otras personas en el campo. A través de su periódico, de apoyos de entrenamiento, de informes especiales, reuniones y seminarios, conferencias regionales y una conferencia anual internacional, la APICS ha sido una fuerza poderosa en la evolución del control de la producción y de los inventarios.

A lo largo del camino, se definió en un diccionario el lenguaje del campo, se catalogó la literatura en una serie de bibliografías, se llevó a cabo una cruzada para introducir la técnica MRP (Planeación de Requerimientos de Materiales).

LA RELACION ENTRE EL CONTROL DE LOS INVENTARIOS Y EL CONTROL DE LA PRODUCCION:

Un concepto equivocado común en la industria es que el control de la producción y el de los inventarios son funciones separadas. El control de los inventarios lanza los pedidos; el control de la producción manda elaborarlos en la planta. Sin embargo, la verdad básica es que los inventarios en una planta de fabricación se mantienen para dar apoyo a la producción o son ellos mismos el resultado de la producción. Sólo en donde los inventarios se compran y luego se revenden sin requerir mayor elaboración puede el control de los inventarios tener un significado diferente al control de la producción.

Mucha de la literatura escrita sobre cantidades de un pedido, puntos de reorden y MRP supone que el control de los inventarios en una planta de fabricación es una función independiente. Sin embargo el MRP, los puntos de reorden y el tamaño del lote económico de pedido no se pueden utilizar con éxito para controlar los inventarios de artículos terminados sin considerar la forma como afectan las tasas de producción y los programas de componentes de la planta. Por la misma razón, las técnicas de programación de la producción no pueden desarrollarse por separado del sistema de control de los inventarios que genera los pedidos los cuales dan forma a los programas. Los pedidos que se acumulan antes de las operaciones en la planta son inventarios muy reales y tienen un verdadero efecto en la técnica de pedido a través de su influencia sobre los tiempos guía. El sistema de programación debe controlar estos inventarios si ha de controlar adecuadamente la producción.

I.3. IMPORTANCIA DE LA COMPUTADORA:

Antes de la introducción de las computadoras a los negocios, a principios de la década de los 60, había pocas aplicaciones útiles de la lógica del MRP. Las limitaciones del manejo manual de datos imposibilitaba la aplicación de la verdadera parte esencial del MRP programado en etapas.

La primera aplicación de la computadora en el área de control de producción y de inventarios se llevó a cabo a principios de los 60. Al poder manejar grandes volúmenes de información, en menor tiempo, los métodos y técnicas antiguas de cálculo quedaron obsoletas. De ahí en adelante, se investigaron nuevos métodos y procedimientos acordes con las herramientas de trabajo disponibles. En un principio algunos de los métodos creados tuvieron problemas y se desecharon, en otros casos los existentes pudieron ser mejorados y aprovechando la computadora se volvieron más eficientes.

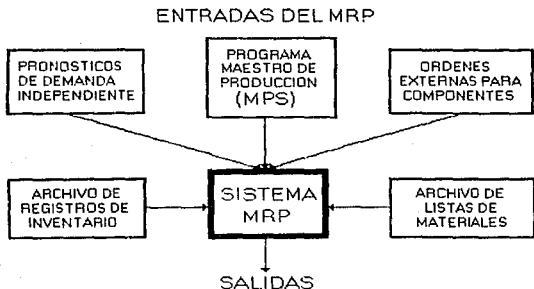
II. PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES :

II.1. PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES:

PRERREQUISITOS PARA EL MRP:

La planeación de los requerimientos de materiales netos en etapas programadas requiere datos muy específicos. Estos son:

1. Un programa maestro de producción (MPS) en etapas programadas en el cual cada artículo es descrito por una lista secuencial de materiales.
2. Un número único que identifica cada componente y el pariente en cada lista secuencial de materiales.
3. Listas de materiales apropiadamente estructuradas y controles estrictos de los cambios en diseño.
4. Balances precisos de los inventarios actuales en relación con los artículos en existencia.
5. Cantidades precisas y fechas de entrega confiables sobre los pedidos abiertos de adquisición y de fabricación.
6. Tiempos guía confiables en relación con los artículos comprados y fabricados.



Estos son esenciales para cualquier programa MRP. Además, hay requerimientos para la aplicación práctica de la técnica:

1. Software y hardware de computadora para manejar los grandes volúmenes de datos requeridos.
2. Reporte constante de entradas y salidas de materiales, ajustes de inventario y envíos y cierres de pedidos.
3. Disciplina en el manejo de las tandas discontinuas identificadas en el plan.
4. Gente capaz de elaborar planes válidos y de ejecutarlos después.

SUBSISTEMAS MPS:

El subsistema MPS mínimo debe contener datos sobre cantidad y fecha para cada producto al que se aplicará el MRP. Para la lógica del MRP que se usan en todos los componentes, el horizonte del MPS debe extenderse por lo menos lo suficiente para igualar la suma de todos los tiempos guía que forman la secuencia más larga de consecución de materia prima y su procesamiento en todas las operaciones requeridas para producir el artículo descrito en el MPS; a éste se le denomina *tiempo guía acumulativo*, *tiempo guía de la ruta crítica* o *tiempo guía apilado*. El horizonte del MPS se extiende y los excedentes de tiempo del horizonte se utilizan en menores niveles para proporcionar una cantidad razonable de datos sobre los futuros requerimientos de materia prima.

II.2. LÓGICA DE LA PLANEACIÓN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES:

Las demandas del gran volumen de materiales utilizados en las operaciones de fabricación surgen de decisiones de producir algún artículo que los contiene. Los componentes de autos compactos, textiles y cerámica y los ingredientes de alimentos, sustancias químicas y farmacéuticas no se utilizan a tasas constantes y uniformes ni se necesitan hasta que el artículo en el que intervienen se va a producir.

El mantenimiento de los niveles de inventario de materia prima, se manejan muy bien por lo general haciendo las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo y cuánto queremos fabricar de este producto específico?
2. ¿Qué componentes se requieren?
3. ¿Con cuántos de éstos ya se cuenta?
4. ¿Cuántos se han pedido además y cuándo llegarán?
5. ¿Cuándo se necesitan más y cuántos?
6. ¿Cuándo deben éstos pedirse?

Esta es la lógica fundamental del MRP. Es aplicable de igual manera a productos elaborados de acuerdo a un pedido y fabricados según diseño del comprador como barcos, edificios y maquinaria especial, a productos de fabricación periódica en tandas de pequeños y grandes volúmenes, a industrias de proceso y a una producción repetitiva en gran cantidad.

Existen diferencias significativas en los modos según los cuales se aplica la lógica a estos diferentes métodos de procesamiento y en los formatos de datos utilizados con ellos. Los requerimientos para una planeación correcta de materiales y un control estricto son idénticos para todos éstos, sin embargo:

1. Debe desarrollarse un *plan maestro* válido que establezca lo que se va a elaborar, qué cantidad se necesita y cuándo se requieren los artículos para cada producto. Denominados programa maestro de producción (MPS), estas cantidades conducen el MRP y otros programas relacionados. Todos los planes resultantes son inválidos e irreales si el MPS requiere un producto que excede las capacidades de las instalaciones (planta y vendedores) que lo producen.
2. Las *listas secuenciales exactas* de materiales que detallan la composición de la estructura de los productos forman la estructura o marco de la planeación moderna, que muestra las relaciones de los productos de un artículo constituido por componentes de una familia *en la forma en que van a ser fabricados u obtenidos*.
3. Es esencial una *información exacta sobre los inventarios* con que se cuenta, incluyendo un número de parte único, la cantidad en existencia y los datos necesarios para describir el artículo en una forma completa para fines de planeación.

4. La información precisa sobre los pedidos ya enviados para conseguir cantidades adicionales de cada artículo, ya sean comprados o fabricados debe incluir la cantidad pedida y la fecha de vencimiento. El MRP no necesita los datos de procesamiento sobre operaciones sucesivas para fabricar los artículos ni los tiempos requeridos.
5. Se necesitan tiempos guía confiables para conseguir o fabricar los lotes específicos de los materiales.
6. Se debe lograr un flujo adecuado de materiales para satisfacer todos los requerimientos al pasar por cada instalación comprendida en el proceso total.

II.3. ENTRADAS DEL MRP:

PROGRAMA MAESTRO DE PRODUCCION (Master Production Schedule (MPS)):

El MPS expresa todo el plan de producción. Siendo el estado de los productos el de:

- Productos terminados, los cuales pueden ser:
 - Productos listos para embarque y
 - Productos que son ensamblados en niveles más altos dentro de otras configuraciones, de acuerdo a un programa de ensamble final.

El MPS sirve como la entrada principal al MRP, ya que aquel define el programa de manufactura completo de una planta y además no sólo contiene los productos que la planta debe producir, sino que también para los componentes que son originados de fuentes externas a la planta como, por ejemplo, los artículos que están sujetos a pronósticos de demanda independiente. En la práctica ciertos pronósticos no son incorporados normalmente al MPS, sino que son entradas separadas al sistema MRP.

PLAN DE CAPACIDAD:

En la distribución, en la que los inventarios son comprados, almacenados y vueltos a vender, el control del inventario puede ser una función bastante independiente que equilibra las economías de compra con los objetivos de servicio al cliente y mínimo inventario.

En una organización de fabricación, los inventarios existen como resultado de la producción o para dar apoyo a ésta. Un negocio de fabricación puede cambiar la periodicidad y tamaños del lote de los pedidos según sea dictado por consideraciones de prioridad, pero no se logrará cambio alguno resultante en los niveles totales de inventario hasta que se cambien las tasas de producción para aumentar o disminuir el producto total de la fábrica. Aún más, una función de control de inventario que ignora la eficiencia de operación de la planta (específicamente, la necesidad de mantener un flujo constante y rápido y una tasa de producción bastante estable por razones de calidad y costo) se caracteriza por tiempos guía largos, servicio deficiente y altos inventarios.

La Planeación de los Requerimientos de Capacidad (CRP) necesita del conocimiento exhaustivo de los procesos de fabricación de la planta. El grupo que planea el CRP rara vez es el mismo que el departamento de control de inventario.

Un buen plan de la capacidad es una proyección del nivel de producción requerido para una instalación específica pero no es un compromiso fijo para los artículos individuales que se van a fabricar. El plan de producción establece el marco dentro del cual las técnicas de control del inventario van a operar. Este establece las tasas de generación de los pedidos para alimentar la planta, así como la tasa del producto de la planta requerido para dar apoyo al MPS.

La experiencia ha mostrado que de todos los perfeccionamientos que se pueden realizar en el control de fabricación, el CRP es por lo general la parte del sistema más significativa. Los beneficios son superiores y más inmediatos. Las compañías con producción estacional son en especial vulnerables a los altos costos y a la operación ineficiente cuando carecen de la planeación eficaz de la capacidad. El plan bosqueja el programa de formación de inventario con anticipación a la estación pico de ventas y traza un curso contra el cual puede medirse el desempeño.

Sin un plan de la capacidad, es común en este tipo de operación que la administración se alarme por la formación de inventario antes de la estación pico pero que carezca de la información específica sobre el nivel de inventario necesario.

Con un plan de capacidad, la formación de inventario puede compararse en una forma regular con los niveles planeados y la cuestión del inventario en exceso o en poca cantidad puede decidirse a tiempo para que la acción correctiva sea eficaz.

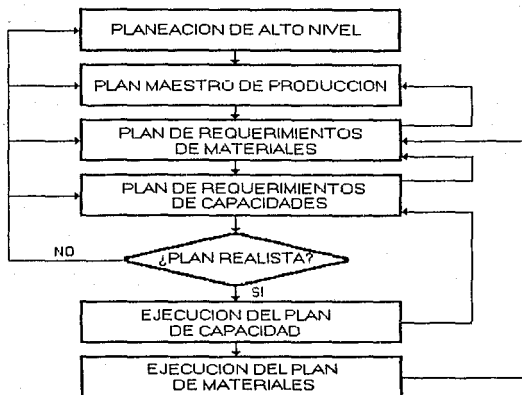
El plan de producción es el nombre común dado a los planes de capacidad para las plantas o grupos principales de instalaciones de fabricación. Aplica en igual forma a los agrupamientos de mercancías de materiales comprados. Al elaborar un plan de producción deben observarse dos requerimientos:

1. El plan de producción debe cubrir familias o grupos de productos que son procesados por instalaciones comunes de fabricación. Esto, por supuesto, significa que el pronóstico utilizado para la planeación de la producción debe ser para estos grupos de productos y no para los grupos de productos que sólo tienen significado para el departamento de ventas. En casos ideales éstos serán grupos de productos para los cuales se desarrollarán programas maestros individuales de producción.
2. El plan de producción debe expresarse en los términos más simples que tengan significado para el personal de operación de la planta; esto es, las medidas de producción deben ser en unidades tales como piezas, horas, etc.

Los pasos que comprende la elaboración de un plan de producción son:

1. Determinar el periodo que va a cubrir el plan de producción. Muchas compañías elaboran un plan general global de producción mensual con un año de anticipación que se utiliza para establecer una política global de inventario/producción y como base para checar los requerimientos para la capacidad del equipo. Luego, elaboran un plan detallado de producción con objeto de planificar y estabilizar los requerimientos para los trabajadores.

El MPS debe ser considerado en relación a la carga disponible o de la planeada. Los recursos incluyen capacidad, espacio y capital de trabajo.



En la figura anterior se expone la secuencia de trabajo del Plan Maestro de Producción y su relación con la Planeación de Requerimientos de Capacidades, donde inicia con una planeación a alto nivel, que determina los requerimientos de ventas, que cargan el MPS. Una vez balanceado el Plan Maestro de Producción se definen los requerimientos de materiales a niveles inferiores y se verifica si puede cumplirse el MPS con la capacidad instalada, de no ser así, se retoma el flujo desde alguna etapa anterior.

CRP tiene una larga serie de conceptos para mantener un balance de disponibilidad para cubrir la demanda y mantener un nivel razonable de carga de los recursos.

La técnica de CRP está basada en:

1. *Definición de los recursos que van a ser considerados.* Es la definición de los centros de trabajo y de cada máquina por sí misma, la cual puede ser identificada como un recurso.

CRP es proyectada para varias máquinas, porque su propósito no es el de identificar la carga exacta de un recurso individual, sino para evaluar el impacto de un MPS determinado.

2. **Cálculo del perfil de carga.** Consiste en el número de horas estándares necesarias para producir una unidad de producto por periodo, medidas en relación con cualquier recurso seleccionado.
3. **Extendiendo los perfiles de carga.** Para un determinada cantidad en el MPS y sumariada para cada periodo. El resultado es un reporte que muestra los efectos del MPS, dentro del horizonte de planeación, de los diferentes recursos para los cuales se mantiene el perfil de carga. La carga podrá ser segregada para cada lote de producto, para mostrar cual de éstos puede causar problemas potenciales de capacidad.
4. **Simular el efecto de MPS alternativos.** Si la carga generada para un MPS propuesto es insuficiente, el programa se corrige mediante prueba y error, repitiéndolo cuantas veces sea necesario.
5. **Selección de un MPS flexible.** Es el paso final de este proceso. El objetivo del CRP se divide en dos partes:
 - A corto plazo: Mantener la carga sobre una base de capacidad flexible.
 - A largo plazo: Es utilizado como herramienta para la toma de decisiones sobre incrementos de capacidad instalada. ¿Cuáles son y cuándo serán requeridos?

ORDENES PARA COMPONENTES ORIGINADOS DE FUENTES EXTERNAS DE LA PLANTA QUE USAN EL SISTEMA:

Incluyen las partes para servicio, órdenes para equipo de producción original (que son las órdenes de otros productores, quienes usan estos componentes en sus productos terminados), y cualquier otro propósito de orden no relacionado al plan de producción.

Los componentes que pueden ser ordenados para propósitos de experimentación, pruebas destructivas, promoción, equipo de mantenimiento, etc. El MRP trata las órdenes de esta categoría como adiciones a los requerimientos brutos para cada artículo componente respectivo.

PRONOSTICOS PARA ARTICULOS SUJETOS A DEMANDA INDEPENDIENTE:

En 1965 J. A. Orlicky presentó una muy útil distinción entre dos tipos de demanda de artículos en un medio de fabricación. Utilizó la palabra *independiente* para describir toda demanda de productos terminados o componentes no relacionados con la demanda de otros artículos en el inventario de una compañía. Característicos de éste son los pedidos de los clientes por artículos terminados, intermedios o partes de servicio. Utilizó la palabra *dependiente* para describir toda demanda de artículos determinados en forma directa por programas para producir artículos relacionados (en una lista secuencial de materiales) u otros asociados. Típicos de éstos son las materias primas, partes o ingredientes fabricados o comprados y subensambles, aditamentos y accesorios fabricados.

Orlicky propuso esto como regla para determinar la selección de la técnica de pedido que se ha de aplicar. La *demanda independiente* debe ser pronosticada y la técnica del punto de reorden es la única adecuada y aplicable. La *demanda dependiente* puede ser calculada y la planeación de los requerimientos de materiales es la técnica correcta. Esta regla general es una guía útil y no una dura ley a seguir a cualquier precio. Los métodos convencionales menos costosos y más sencillos del punto de reorden pueden ser utilizados con mucha eficacia en los artículos de demanda dependiente en los casos en que sus supuestos básicos son válidos y en los que se mantienen las disciplinas necesarias.

Los artículos componentes sujetos a *demanda independiente*, pueden ser calculados fuera de MRP, o bien, el éste puede ser programado para aplicar ciertas técnicas de pronóstico estadístico. Las cantidades pronosticadas son tratadas como requerimientos brutos por MRP.

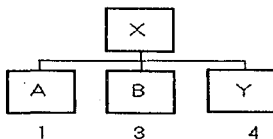
LISTA DE MATERIALES Y PARTES:

El documento que define al producto es la lista de materiales, la cual como su nombre la indica lista todos los componentes de cada ensamble y subensamble.

ARTICULO
PADRE

IDENTIFICACION
DE ARTICULOS
COMPONENTES

CANTIDAD
REQUERIDA



En la figura anterior se ilustra la convención gráfica de la lista de materiales, donde el ensamble en cuestión es llamado el artículo padre y es listado con un código de identificación (número de parte), y relacionado con el artículo padre todos los subensambles o partes hijos del que se compone el producto, especificando la cantidad de cada componente para producir un artículo padre.

La forma más común de estructurar una lista secuencial de materiales es la que lleva sangría:

Código de fabricación:

314 Lámpara fija de pared # 9

Número de componente 1º nivel	Número de componente 2º nivel	Descripción	Cantidad requerida	Fuente
X18		Interruptor	1	Comprado
Y2L		Armadura del enchufe	1	Fabricado
	1314	Interruptor	1	Comprado
	219	Armazón	1	Fabricado
	326	Base	1	Fabricado
	220	Aislador del armazón	1	Comprado
	222	Aislador de la base	1	Comprado
	405	Vástago de tornillo	1	Fabricado
9P		Pantalla	1	Fabricado
414		Soporte	2	Fabricado
4107		Juego de cables	1	Comprado

En este caso todos los componentes que entran en el enchufe Y2L, las partes del *segundo nivel*, llevan sangría a la derecha para indicar que son componentes utilizados en el subconjunto que los precede inmediatamente.

Las listas de materiales constituyen la estructura de los sistemas modernos; deben ser muy exactas y estructuradas en forma apropiada.

CONTROLES INTERNOS DE PARTES Y MATERIALES:

Para aplicaciones en los sistemas modernos, todos los artículos deben tener uno y solo un número de parte. El sistema de numeración de partes utilizado en el ejemplo anterior de la lámpara #9 es sencillo, típico del sistema de numeración de partes en las pequeñas compañías que combinan números y letras sin significado o razón. A medida que crece una compañía y su línea de productos se expande, el sistema de numeración empieza a volverse increíblemente complicado, de modo que aun los sistemas sencillos comienzan a frenarse. Por lo general, entonces un programa comienza a desarrollar un sistema de numeración de partes más razonable con una gran cantidad de dígitos, cada uno con un significado (que describe el material del que está hecho, el método según el cual se fabricó, si es un producto manufacturado o comprado, etc.) y se introduce el sistema de numeración de partes.

Para algunos componentes, pronto se vuelve muy complicado mantener cada dígito con un significado y finalmente la numeración de partes sin un significado da resultado. No es raro encontrar en un ambiente deficiente en el control de la producción y de los inventarios tres diferentes sistemas de numeración de partes en uso simultáneo. Pocos gerentes parecen reconocer el vínculo entre la falta de un buen sistema de numeración de partes y la falta de resultados de las actividades de control de la producción y de los inventarios.

El sistema de numeración de partes ideal tiene el menor número posible de dígitos y utiliza solo datos numéricos. Hasta 10,000 diferentes artículos pueden identificarse únicamente con solo cuatro dígitos. Aun cuando muy pocas compañías manejan alrededor de 100,000 artículos, la mayor parte tiene más de 6 dígitos y muchos caracteres alfabéticos, guiones y espacios distribuidos en los números de partes. Los problemas que ellos provocan incluyen:

1. Más errores de la gente que maneja los datos.
2. Necesidad de mayor espacio en el archivo.
3. Mayor lentitud en el tiempo de procesamiento de los programas.

Deben utilizarse códigos cortos y solamente numéricos para todos los nuevos productos, materiales y otros artículos que se estén planeando y controlando.

Rara vez se justifica un programa masivo para sustituir los números largos y complejos por cortos; el tiempo, el diseño y otros cambios a la larga los eliminarán.

CONTROL DE CAMBIOS EN DISEÑO:

Debido al importante papel de la lista de materiales, un aditamento necesario al procesamiento de programas para las listas de materiales es un conjunto de programas para manejar los cambios de diseño de ingeniería. El propósito básico de estos programas es seleccionar el formato correcto de las listas de materiales en su planeación futura. Los cambios de ingeniería surgen a partir de una variedad de causas: mejoramiento del producto, problemas de fabricación, reducción de costos, mejoramiento de la calidad, vida del producto y normatividad gubernamental, son las principales.

La periodicidad de la introducción del cambio puede basarse en cualquiera de las siguientes:

1. Necesidad temporal de superar alguna dificultad transitoria.
2. Necesidad inmediata (incluyendo quizá el retiro o reajuste de productos en uso) por razones funcionales, de salud o legales.
3. Disponibilidad de nuevos artículos para aprovechar el cambio en la mayor oportunidad posible.
4. Mínimo costo, incluyendo inventario obsoleto, herramienta, aprobación del cuerpo regulador, alteraciones del equipo, etc.

5. Momento específico o unidad de producto (número de serie) que coincida con otros cambios (cambios en bloque) o con objeto de proveer a los clientes de una configuración específica.

La segunda categoría se denomina con frecuencia *obligatoria*, mientras que las otras se conocen como *opcionales*. Entre las consideraciones importantes en la periodicidad están:

1. Reducción de los inventarios existentes de componentes y productos.
2. Necesidad de partes de servicio (de repuesto).
3. Disponibilidad de nuevos artículos: materia prima, herramientas, equipo, etc.
4. Impacto en la capacidad de la planta o del vendedor.
5. Posición competitiva.
6. Contribución a las utilidades.
7. Aprobación del cuerpo regulador.
8. Cambios manuales descriptivos del producto.

Existen varias técnicas para introducir los cambios de ingeniería en una forma apropiada. El más conocido utiliza una *fecha de eficacia* determinada por una consideración cuidadosa de los factores relevantes como los enlistados antes. Esta fecha se introduce luego en el archivo de la estructura del producto tanto para el componente nuevo como para el reemplazado. Se programa el computador para usar el nuevo número de parte. La fecha se establece de manera que coincida con la disponibilidad de los nuevos interruptores que vienen del proveedor.

Bajo ciertas circunstancias, se puede utilizar una lista de materiales muy sencilla, para vincular los componentes existentes y los nuevos. Esto requiere que el nuevo artículo reemplace al viejo en cada aplicación en las listas de materiales (excepto en el uso de reservas, por supuesto). Esto es útil en los casos en que el cambio se va a efectuar cuando todos (o hasta una cantidad específica) los artículos viejos se van a consumir; el MRP consume el artículo existente y requiere cantidades del nuevo cuando se necesita.

Son necesarios varios cambios en los datos maestros de artículos en los artículos existentes:

1. La regla del tamaño del lote debe establecerse para pedir cantidades distintas necesitadas en cada periodo de tiempo (lote por lote).
2. El tiempo guía debe ajustarse a cero de modo que el nuevo artículo se necesita al mismo tiempo que el viejo.
3. El inventario de seguridad debe también ser cero si se desea consumir todo el artículo existente. Si se va a retener alguna cantidad para servicio u otro uso, esta cantidad debe ser puesta en el registro del inventario de seguridad.

Cuando se emplean estas listas de materiales para el costeo, un artículo debe tener costo cero en su archivo. Si se desean los costos de los productos que utilizan los artículos en existencia se establece el costo del nuevo artículo igual a cero y viceversa. Se pueden elaborar listas de los más escogido pidiendo un nuevo artículo como alterno al ya existente. El uso de esta técnica puede también generar señales sobre los artículos comprados que se supone no tienen listas de materiales. Obviamente, en el ajuste de los archivos se considera una gran cantidad de trabajo y si esta sencilla técnica se ha de utilizar de una manera eficaz, es esencial un completo entendimiento por parte de los usuarios. Puede ser útil en los casos en que es difícil establecer una fecha válida de eficacia, porque la demanda cambiante genera problemas y cosas similares. Sustituye el trabajo de modificación de archivos por el constante monitoreo de las fechas de eficacia. En todos los casos los archivos de estructura del producto deben ser purificados en forma periódica de las listas obsoletas.

La eficacia de los números sucesivos es un problema más complejo. El número de serie utilizado para el control de la periodicidad del cambio se asigna, por lo común, al producto del nivel superior. Es un error intentar llevar éste hacia abajo a lo largo de todos los niveles cuando se lleva a cabo la planeación de los materiales. Para hacerlo así, se requiere una cantidad de almacenamiento de datos muy grande y tiempos de corridas mucho mayores; esto se justifica sólo en el caso de que intervengan algunos productos costosos.

La mejor solución es intentar consumir la mayor parte del artículo existente y conseguir el nuevo más o menos en el mismo tiempo. A menos que se incluyan materiales muy costosos, se puede planear un colchón de los artículos existentes.

Cuando es tiempo de ejecutar el plan, se puede seleccionar la lista de materiales apropiada para cada producto numerado en serie.

Cuando se consideran materiales costosos o cuando se requiere un control estricto de los cambios con números seriados, el programa maestro debe contener ambos números de identificación del producto (de modelo y de serie) y es necesaria la actualización neta del programa del MRP. Después se correrán tandas del producto bajo el número seriado de corte en el MPS con las listas existentes y otras usarán la lista en o arriba de este número de serie.

Cuando el cambio se da en los niveles medio e inferior de las listas de materiales, se necesita una disciplina estricta en las operaciones de fabricación para asegurar la utilización de la combinación apropiada de los componentes en los productos terminados. Puesto que esta disciplina es difícil de conseguir y puede ser costosa es mejor evitar la asignación de números de serie hasta que comience el montaje final o todavía mejor, después de que se ha terminado la producción.

Los cambios de diseño complican en gran manera el problema de suministrar las partes correctas de servicio mediante los productos. Cuando se trata de maquinaria de gran magnitud y compleja como las máquinas herramientas, equipo de generación de energía y barcos, debe prepararse para cada unidad un expediente que contenga planos, especificaciones y una lista de materiales completa para la unidad en la forma en que se encuentra construida.

Para productos de mayor volumen como automóviles, aparatos caseros e instrumentos de potencia, aun una cantidad razonable de cambios de diseño pueden hacer que el problema de los repuestos sea difícil de manejar. La mejor solución es el cambio en bloque, cuando muchos cambios opcionales se realizan simultáneamente. Esto tiene varias ventajas además de poder controlar mejor los repuestos:

1. Listas de materiales más precisas.
2. Planeación de materiales más sencilla y estable.
3. Información de costos más exacta.
4. Menor perturbación de las operaciones.
5. Documentación mas clara y exacta.

REGISTROS HISTORICOS DEL CAMBIO DE INGENIERIA:

El control de la configuración de los artículos es obligatorio para las compañías que están en la industria de la defensa, del espacio aéreo, de drogas, energía atómica y de procesamiento de alimentos; para todas las demás, es un requisito para llevar a cabo una buena planeación y control de fabricación. Además de la numeración de partes, de la estructuración de las listas y del control del cambio ya cubiertos, se necesita un archivo histórico de gran extensión. Este tiene multitud de usos incluyendo la determinación de los repuestos apropiados, la identificación de las fuentes de problemas y causas, la localización de productos defectuosos reales o potenciales y el suministro de datos en acciones legales.

Un típico registro histórico de cambios de diseño de ingeniería incluye lo siguiente:

1. Número de parte del componente o producto.
2. Nuevo número de parte que lo reemplaza, fecha en que se hará efectivo y número de cambio de ingeniería, (ECN).
3. Número anterior de parte que se reemplaza, fecha en que se hará efectivo y ECN.
4. Códigos de cambios de ingeniería indicando las razones primordiales de cada cambio.
5. Otros productos o componentes que se incluyen en el mismo cambio.

La responsabilidad de mantener estos datos de ingeniería históricos por lo general cae en el departamento de ingeniería de diseño. Sin embargo, los grandes fabricantes de la industria de la defensa, aeroespacial y electrónica establecen grupos de organización separados denominados especificaciones de fabricación o algo similar; sus responsabilidades incluyen el archivo histórico junto con todos los otros archivos y registros básicos.

Los datos históricos para cambios de ingeniería pueden almacenarse en una variedad de formas:

1. Los archivos de computadora son costosos debido al gran volumen de datos. El almacenamiento de listas completas no es necesario por ser demasiado costoso. El almacenamiento en cinta es preferible al almacenamiento en disco.
2. Los *microfilms* y las *microfichas* son baratos, flexibles y permiten una fácil recuperación de la información.

Estos archivos tienen muchas aplicaciones además de la primordial de registrar los cambios de ingeniería. Son útiles a los clientes, al personal de comercialización, ventas, patentes, departamento legal, departamento de calidad, planeación, contabilidad y producción así como a los ingenieros. Al igual que todos los archivos necesarios para planeación y control de fabricación, vale la pena mantenerlos cuando son precisos.

El control de cambios de diseño de ingeniería para las listas de materiales es tan vital para el éxito de una compañía como los nuevos diseños.

EL ARCHIVO DE REGISTROS DE INVENTARIO:

Llamado también archivo maestro de artículos, calcula cada registro del inventario en particular que contiene la información requerida por la determinación de requerimientos netos. Este archivo es mantenido diariamente, de acuerdo al posicionamiento de transacciones en el inventario, las cuales reflejan los movimientos del inventario que hubieran tenido lugar.

Este archivo también contiene los llamados factores de planeación utilizados principalmente para la determinación del tamaño y tiempo de las órdenes planeadas. Los factores de planeación incluyen:

- tiempo de corrida por artículo
- inventario de seguridad
- desperdicio permitido
- política del punto de reorden, etc.

Los factores de planeación están sujetos a los cambios hechos por el usuario del sistema a discreción. Un cambio en uno o más factores de planeación cambian el estado del inventario.

OTRAS ENTRADAS DE MRP:

Los ingredientes más relevantes en la mecánica del MRP son:

- tiempo de entrega
- lotificación.

Por *tiempo de entrega* se entiende el intervalo requerido para desarrollar una actividad. En el contexto de control de producción e inventarios, la actividad normalmente se refiere al abastecimiento de materia prima o productos, ya sea por un proveedor o por la propia capacidad de manufactura.

El tiempo de entrega total está conformado - dependiendo de las necesidades de cada empresa - de los siguientes tiempos de entrega:

- *Tiempo de preparación de la orden.* Es el tiempo que requiere el analista para crear el papeleo de su trabajo necesario para lanzar una orden, acompañarla de su correspondiente vale de salida de almacén y su hoja de procesos. Normalmente se considera que corre a partir de cuando el sistema le anuncia la liberación de la orden y termina cuando, tanto la orden como el material son entregados a producción.
- *Tiempo de entrega del proveedor.* Es el tiempo que toma al proveedor la entrega de material solicitado por la empresa por medio de una orden de compra. Se considera que corre a partir desde que el proveedor recibe la orden de compra y termina cuando entrega los artículos amparados bajo dicha orden de compra.

- *Tiempo de entrega de manufactura.* Es el tiempo que toma al departamento de producción la manufactura de un determinado componente. Se considera que corre a partir del momento en que recibe la orden de trabajo con su correspondiente material y termina cuando entrega al almacén los artículos soportados por la orden de trabajo.

- *Tiempo de entrega de recepción.* Es el tiempo que toma al departamento de recepción para recibir y contar el material que está entrando, ya sea éste proveniente de compra o manufactura. Se considera que corre a partir de cuando se recibe el material, y termina cuando éste es ingresado al almacén.

- *Tiempo de entrega de inspección.* Es el tiempo que toma al departamento de control de calidad efectuar las diferentes pruebas de calidad para el material que se encuentra en recepción. Se considera que inicia cuando el material es entregado al departamento de calidad, y termina cuando éste envía el material a recepción, debidamente aceptado.

- *Tiempo de entrega de seguridad.* Es el tiempo de reserva para contingencias tales como retrasos de alguno de los tiempos de entrega anteriormente mencionados.

- *Tiempo de entrega administrativo.* Es el tiempo que se llevan tanto el departamento de materiales como el de compras, en conseguir que una recomendación de orden se convierta en una orden de compra confirmada. Las actividades realizadas durante este tiempo son:
 - Elaboración de la requisición de materiales.
 - Obtención de especificaciones.
 - Recopilación de firmas en la requisición.
 - Obtención de cotizaciones.
 - Recopilación de firmas para la aprobación de cotizaciones.
 - Elaboración de la orden de compra.
 - Recopilación de firmas para la aprobación de la orden de compra.
 - Confirmación y entrega de la orden de compra.

II.4. LOTIFICACION Y CONTROL DE INVENTARIOS:

MRP cubre todas las posibles pérdidas de control de inventarios comunes, expandiendo el número de variables a la ecuación principal de inventarios, haciendo uso de una técnica llamada fases de tiempo.

Dicha ecuación es:

$$A + B + C - D = X$$

donde

A = cantidad a la mano
B = cantidad en orden
C = cantidad planeada para futuras órdenes
D = cantidad requerida
X = cantidad disponible.

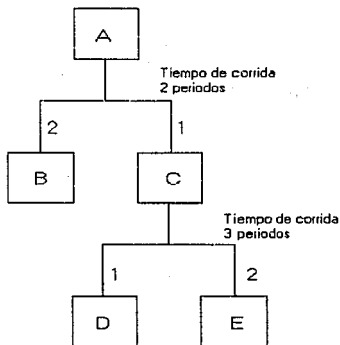
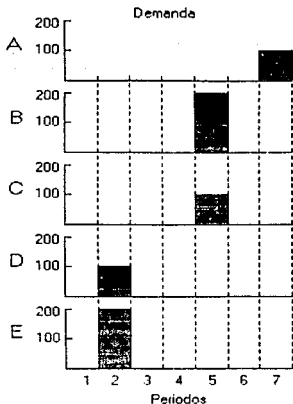
MRP evalúa el estado de cada artículo en el inventario, estableciendo automáticamente la cobertura para las órdenes planeadas.

Dentro de MRP, los elementos de control de inventarios son:

- cantidad a la mano
- cantidad ordenada
- requerimientos brutos
- requerimientos netos
- órdenes planeadas.

La técnica de fases de tiempo, al conocer la estructura del producto, los requerimientos brutos y el tiempo de fabricación, calcula la fecha de inicio de la producción, que es la misma fecha en la que se requieren los subensambles o materias primas y así sucesivamente. Programando hacia atrás puede conocerse la fecha de inicio de producción y los requerimientos de subensambles o materias primas, sabiendo la fecha de entrega al comprador.

TECNICA DE FASES DE TIEMPO



Partiendo de la estructura del producto terminado A y teniendo una demanda de 100 artículos para el periodo 7, calculamos un requerimiento de 200 partes B (se requieren de dos partes B para formar un artículo A), las cuales deben estar disponibles al principio del periodo 6. Ya que se requieren dos periodos para el artículo A, el subensamble C también debe estar listo para el inicio del 6 periodo y así sucesivamente.

LOTIFICACION:

Se conoce como lotificación a las técnicas utilizadas para determinar el tamaño del lote a pedir. Son seis las más importantes:

1. **Cantidad fija a ordenar.** Es una técnica que siempre causará que una orden planeada sea generada por una cantidad fija predeterminada o sus múltiplos en el caso de que el requerimiento exceda la cantidad fija a ordenar.

Esta política es aplicable para artículos cuyo costo de pedido es alto. La cantidad fija a ordenar especificada para un determinado artículo de inventario puede estar basada en consideraciones empíricas. Esta cantidad puede reflejar ciertas consideraciones que no están tomadas en cuenta por el algoritmo de tamaño económico del lote, como por ejemplo, la capacidad del transporte, la vida del producto, el espacio en almacén, etc.

CANTIDAD FIJA A ORDENAR

PERIODOS	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
REQUERIMIENTOS NETOS	35	10		40		20	5	110
CUBRIMIENTO ORDENES PLANEADAS	60			60				120

En esta hoja de control, tenemos que para el primer periodo existe un requerimiento neto de 35 piezas, por lo que se emite una orden planeada por la cantidad de 60 piezas, que será suficiente para cubrir ese periodo, los 10 del segundo periodo y 15 piezas del cuarto periodo.

En el cuarto periodo se tiene un requerimiento neto de 25 piezas ($40 - 15 = 25$), por lo que se emite una orden planeada por 60 piezas, y así sucesivamente. Si el primer requerimiento neto fuera de 75, la cantidad de la orden se incrementaría hasta 75, lo que tiene más sentido que ordenar dos veces 60 artículos para el mismo periodo. Las cantidades para órdenes planeadas, se anotan debajo del periodo que intentan cubrir.

2. **Lote por lote.** Esta técnica, se refiere algunas veces a una forma discreta de ordenar, es la más simple. Provee un cubrimiento periodo a periodo de los requerimientos netos, y la cantidad de orden planeada, siempre igual a la cantidad del requerimiento neto a cubrir. El uso de esta técnica minimiza el costo de almacenaje, usualmente se utiliza para artículos con demanda discontinua.

LOTE POR LOTE

PERIODOS	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
REQUERIMIENTOS NETOS	35	10		40		20	5	110
CUBRIMIENTO ORDENES PLANEADAS	35	10		40		20	5	120

En esta hoja de control, vemos que para cada uno de los requerimientos netos de 35, 10, 40, etc. se ordena la misma cantidad.

3. *Tamaño económico del lote*. Es una cantidad fija a ordenar que determina la cantidad del producto a ser comprado o manufacturado para minimizar el costo total en que se incurre. La hoja de control se llena de manera idéntica a la de cantidad fija a ordenar, la única diferencia estriba en que las órdenes se surten por el tamaño del lote económico. Esta política se aplica cuando el insumo tiene tasa de demanda continua. Para demanda discontinua, no es recomendable.

4. *Cantidad a ordenar por periodo*. Esta técnica está basada en la lógica del tamaño económico del lote, modificada para usarse en un ambiente de demanda periódica discreta.

Usando una demanda futura conocida, representada por los requerimientos netos de una determinada parte, la cantidad económica a ordenar es calculada por la fórmula estándar, para determinar el número de órdenes anuales que deberán ser colocadas. El número de periodos de planeación que constituyen un año es dividida por la demanda, para obtener el intervalo en que se deberá de ordenar (el número de periodos que se cubrirán, cada vez que se ordena).

Es una técnica de lotificación que hace que una orden planeada sea generada por una cantidad tal que satisfaga la suma de los requerimientos de n periodos, previamente determinados.

- La técnica de tamaño económico del lote se analiza con mayor profundidad en el capítulo III.

CANTIDAD A ORDENAR POR PERIODO

PERIODOS -	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
REQUERIMIENTOS NETOS	35	10		40	10	20	5	120
CUBRIMIENTO ORDENES PLANEADAS	85				35			120

En este ejemplo el número de periodos a cubrir es de cuatro, por lo que los requerimientos netos de 35, 10, 40 de los periodos 1, 2 y 4 se cubren con una orden planeada por 85 piezas en el primer periodo.

5. *Punto de reorden.* Esta política lanza las órdenes de acuerdo al punto de reorden preestablecido para cada parte, es decir cuando se llega a un determinado nivel de inventario, llamado punto de reorden.
6. *Días de suministro.* Esta política sugiere órdenes en base a la clasificación ABC de cada parte, siendo la cantidad de la orden lo suficientemente grande para cubrir los siguientes n días de demanda, dependiendo de la clasificación ABC de la parte, por ejemplo:

Para las partes A es de 20 días.
 Para las partes B es de 45 días.
 Para las partes C es de 65 días.

- * Para información más detallada acerca del punto de reorden refiérase al capítulo III.
- * La distribución ABC considera como fundamento la ley de Pareto, llamada así por el economista italiano Vilfredo Pareto (1848-1923), la cual dice que para un grupo dado cualquiera, una pequeña cantidad de artículos responderá por la mayor parte del valor total. Esta ley económica puede aplicarse al control de los inventarios, al control de la producción, al control de calidad y a muchos otros problemas administrativos. En el control de inventarios, este concepto se llama clasificación ABC. Cualquier inventario puede clasificarse en tres partes distintas:
1. Artículos A: Aquellos artículos relativamente pocos cuyo valor representa el 70 a 80% del valor total del inventario. Estos constituirán por lo general el 15 a 20% de los artículos.
 2. Artículos B: Una gran cantidad en la parte media de la lista, usualmente, alrededor del 30 a 40% de los artículos cuyo valor total representa del 15 al 20% del total.
 3. Artículos C: La mayoría de los artículos, normalmente de 60 a 70% cuyo valor de inventario representa sólo del 5 al 10% del valor.

Si se trata de una parte A, MRP calcula los requerimientos netos y la demanda proyectada para los siguientes días después de que la disponibilidad proyectada se vuelve cero.

Para una parte A, teniendo una demanda insatisfecha	= 10
Cantidad a la mano	= 5
Requerimientos netos	= 5
Siguientes 20 días de demanda	= 10
Siguientes 20 días de demanda + requerimientos netos	= 15
Cantidad sugerida para la orden	= 15

II.5. MECANICA DEL MRP:

El MRP en etapas programadas, completo, en su esencia, intenta establecer un modelo muy riguroso que represente la forma en que los materiales se moverán a través de una planta de fabricación (o plantas) o a través de un sistema de distribución. Las listas de materiales determinan los artículos que deben ser programados o almacenados así como la secuencia o periodicidad con la que son adquiridos de fuentes externas o fabricados dentro de una planta. El tamaño del periodo de tiempo establece la precisión del plan.

Planes más precisos no son necesariamente más exactos. Datos inexactos, disciplina deficiente y planes ambiciosos en exceso provocan que el modelo desarrollado en el MRP sea una representación muy pobre del ambiente. El uso más frecuente de la capacidad de replaneación del MRP no es la solución.

Los datos incluidos en el despliegue del MRP comprenden algunos o todos los siguientes:

1. Un encabezador contiene una variedad de información sobre cada artículo que se planea, incluyendo el número de parte, la descripción, la cantidad en existencia, unidad de medida, si es comprado o fabricado (en ocasiones ambos), la clasificación ABC, la cantidad de tamaño del lote o el código para calcularla, el tiempo guía estándar, inventario de seguridad planeado, código del planeador responsable, el costo estándar y la cantidad asignada. En ocasiones se incluyen también otros datos como la fecha de la última transacción, el centro de trabajo que inicia, la fecha del conteo del último ciclo e información similar de uso especial.

Entre más datos se incluyan, mayor será el tiempo en imprimirlos, más amontonados los despliegues y mayor la cantidad de papel producido. Se puede tener acceso a los datos que se requieren solo ocasionalmente averiguándolos mediante la base de datos de la computadora.

2. Las designaciones del periodo de tiempo se arreglan con mayor frecuencia en una forma horizontal pero algunas veces se hace esto de manera vertical. Siempre se incluye un periodo vencido, que algunas veces se subdivide en una serie de periodos pasados.
3. Los requerimientos en cada periodo de tiempo son generados por planes para fabricar artículos relacionados o para llenar las necesidades de los almacenes secundarios.
4. Los pedidos abiertos en periodos de tiempo apropiados (mejor descritos como *por obtener* y con mayor frecuencia denominados *recepciones programadas*) muestran las cantidades programadas para ser recibidas en el periodo indicado al firmarse, se llenan los pedidos fijos.
5. Cantidades disponibles proyectadas (mejor denominadas *por tener*) se muestran en cada periodo de tiempo. La mayoría de los programas MRP restan los inventarios de seguridad planeados y las cantidades asignadas de los inventarios actuales para obtener las cifras disponibles para planear, con el fin de dar comienzo a la configuración del MRP.

Pocos no lo hacen, pero unen al inventario de seguridad planeado los pedidos planeados, de modo que entren cuando el balance disponible proyectado desciende abajo del inventario de seguridad. Algunas compañías programan en etapas las asignaciones y las restan de los balances disponibles en el periodo adecuado.

La mayoría de los usuarios añaden pedidos abiertos liberados a los datos disponibles, pero no pedidos planeados, permitiendo que los datos disponibles proyectados se vuelvan negativos y cada vez más grandes. Esto indica el periodo en que el artículo caerá por debajo del nivel del inventario de seguridad, si es que lo hay o, se incurrirá en faltantes; a menos que se tome acción antes de liberar un pedido de reposición.

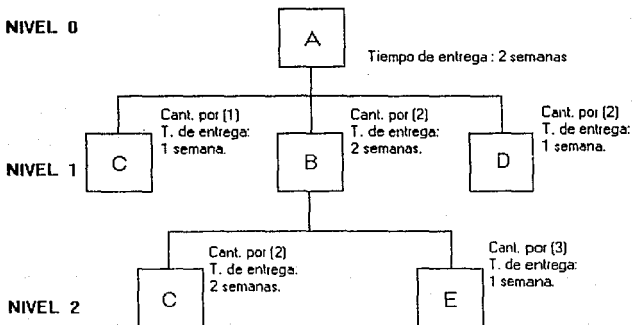
6. Un pedido planeado vencido en los periodos de tiempo apropiados (mejor llamado *necesidad*, y algunas veces *plan vencido*) muestra la cantidad y los periodos de tiempo en los que se planea que los pedidos sean completados para cubrir los requerimientos netos. Esto se omite con frecuencia en las impresiones.
7. El envío de un pedido planeado, (mejor denominado *inicio* o, a veces, *liberación del plan*) en los periodos de tiempo apropiados muestra la cantidad y los periodos de tiempo en los cuales se planea que los pedidos sean enviados para lograr que los pedidos planeados sean completados.

EJEMPLO DE PLANEACION DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES:

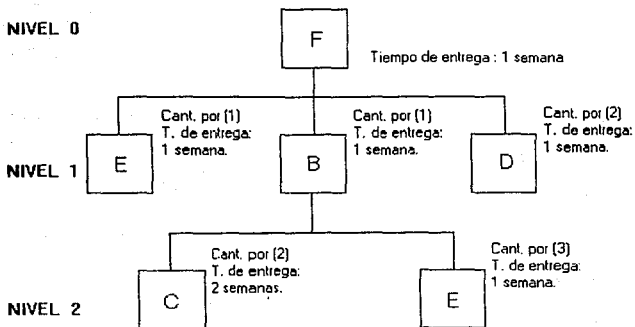
En este ejemplo se utilizarán dos estructuras de productos terminados A y F, los cuales comparten materias primas, realizando todo el cálculo del MRP para siete semanas.

DEFINICION DE LOS PRODUCTOS:

DEFINICION DEL PRODUCTO A



DEFINICION DEL PRODUCTO F



REQUERIMIENTOS DE DEMANDA INDEPENDIENTE O INFORMACION PROVENIENTE DEL MPS:

Artículo A: La información proviene del MPS, ya que es un producto terminado.

Periodo 4: 10 unidades.
 Periodo 6: 100 unidades.
 Periodo 7: 10 unidades.

Artículo F: La información proviene del MPS, ya que es un producto terminado.

Periodo 5: 20 unidades.
 Periodo 6: 20 unidades.
 Periodo 7: 10 unidades.

Artículo C: La información proviene del pronóstico de requerimientos de refacciones.

Periodos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7: 10 unidades.

ESTADO DEL INVENTARIO Y POLITICA DE ORDENAR:

Artículo A:	Código de nivel	0
	Tiempo de entrega	2 semanas
	Regla de lotificación	Lote por lote
	Existencia	0
	Inventario de seguridad	0
	Comprometido	0
	Entrega programada	0

Artículo F:	Código de nivel	0
	Tiempo de entrega	1 semana
	Regla de lotificación	Lote por lote
	Existencia	0
	Inventario de seguridad	0
	Comprometido	0
	Entrega programada	0

Artículo B:	Código de nivel	1
	Tiempo de entrega	1 semana
	Regla de lotificación	Lote por lote
	Existencia	100
	Inventario de seguridad	0
	Comprometido	0
	Entrega programada	0

Artículo D:	Código de nivel	1
	Tiempo de entrega	2 semanas
	Regla de lotificación	Cantidad fija
		Lote = 160
	Existencia	170
	Inventario de seguridad	0
	Comprometido	120
	Entrega programada	100

Artículo C:	Código de nivel	2
	Tiempo de entrega	1 semana
	Regla de lotificación	Cantidad fija
		Lote = 150
	Existencia	120
	Inventario de seguridad	15
	Comprometido	0
	Entrega programada	0

Artículo E: Código de nivel	2
Tiempo de entrega	1 semana
Regla de lotificación	Cantidad fija
	Lote = 140
Existencia	120
Inventario de seguridad	0
Comprometido	0
Entrega programada	0

METODO:

1. *Asignar parámetros generales a los componentes.* Se utiliza una hoja de planeación, comenzando por identificar en la columna número de parte (o artículo) la parte correspondiente. Se indica en la columna código de nivel más bajo el correspondiente para cada parte; dicho nivel de codificación se observa en la estructura del material o definición del producto, asignándosele 0 a la parte A y a la parte F por ser productos terminados. Los principales usos del código de nivel son:

- a) Evitar que un artículo se reestructure en sí mismo.
- b) Procesar el MRP nivel por nivel. El procedimiento identifica el nivel más bajo y se detiene hasta que se ha bajado a este nivel.

Por ejemplo, el artículo C aparece en los niveles 1 y 2, y por lo tanto su nivel será 2, indicando que los requerimientos brutos que existan a nivel 1, eventualmente deberán ser sumados a los del nivel 2, antes de calcular los requerimientos netos, defasar en el tiempo las órdenes y crear una orden planeada.

2. *Obtención de requerimientos brutos* (Tabla 1). Indicar los requerimientos brutos derivados de las demandas independientes en las semanas que correspondan. Estos pueden venir del MPS (en este caso a nivel 0) como en el caso de A y F o de registros complementarios de demanda como son pronósticos de refacciones, como en el caso de C.

Estas últimas demandas entran al MRP, sin pasar por el MPS a través del sistema de inventarios. Eventualmente estas demandas independientes complementarias se añadirán a las demandas dependientes que resulten de las explosiones de los niveles superiores.

HOJA DE PLANEACION DEL MRP

277

POLITICA DE ORDENAR	TIEMPO DE CORRIDA	INVENT. A LA MANO	STOCK DE SEGURIDAD	COMPROMETIDO	CODIGO DE NIVEL MAS BAJO	NUMERO DE PARTE	PERIODOS									
							1	2	3	4	5	6	7			
					0	A										
														10	100	10
					0	F										
														20	20	10
					1	B										
					2	C										
								10	10	10	10	10	10	10	10	10
					1	D										
					2	E										

Tabla 1

Al finalizar este punto, la hoja de planeación muestra cada artículo con su nivel de código más bajo, y para A, F y C las demandas independientes. En A y F solo en las semanas que se indican y en C en todas las semanas a razón de 10 unidades por semana.

3. Calcular las órdenes que satisfagan los requerimientos, tomando en cuenta la lotificación (Tabla 2). Antes de procesar la información, (considerar demandas, calcular los requerimientos netos, defasar en el tiempo las órdenes, crear órdenes planeadas) se debe acceder la información de inventarios y desplegarla en la hoja de planeación.

En un sistema de operación, los datos del inventario están en un archivo maestro de partes del cual se han tomado exclusivamente los correspondientes a los artículos involucrados en este ejercicio. Deberán aparecer en la izquierda de la hoja de planeación.

En la columna *TAMAÑO DEL LOTE* se indicará la cantidad del lote si es por cantidad fija (160, para D) o se escribirá lote por lote, como en el caso del artículo A.

El resto de la información se anota en la columna correspondiente y no requiere explicación a excepción de *ENTREGA PROGRAMADA*. Solamente existe una entrega programada para D, que se explicará en el momento de utilizarse.

4. Desplazar las órdenes en el tiempo (Tabla 3). Se procesa el nivel 0 en el cual solo se encuentran A y F que deben ser respectivamente los dos primeros renglones de la hoja de planeación. Los requerimientos brutos ya están consolidados, puesto que provienen del MPS, y calculamos ahora los requerimientos netos:

Tomando como ejemplo A en la semana 4:

	Requerimientos brutos	10
MAS	Comprometido	0
MENOS	Entregas programadas	0
MENOS	Existencia anticipada	0
IGUAL	Requerimientos netos	10

HOJA DE PLANEACION DEL MRP

POLITICA DE ORDENAR	TIEMPO DE CORRIDA	INVENT. A LA MANO	STOCK DE SEGURIDAD	COMPRO-METIDO	CODIGO DE NIVEL MAS BAJO	NUMERO DE PARTE	PERIODOS										
							1	2	3	4	5	6	7				
L X L	2 SEM.	0	0	0	0	A	REQUERIMIENTOS BRUTOS					10		100	10		
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO		0	0	0	0	0	0	0	0	0
							REQUERIMIENTOS NETOS					10		100	10		
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS					10		100	10		
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS		10		100	10					
L X L	1 SEM.	0	0	0	0	F	REQUERIMIENTOS BRUTOS						20	20	10		
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO		0	0	0	0	0	0	0	0	0
							REQUERIMIENTOS NETOS							20	20	10	
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS							20	20	10	
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS						20	20	10		
L X L	1 SEM.	100	0	0	1	B	REQUERIMIENTOS BRUTOS										
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO										
							REQUERIMIENTOS NETOS										
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS										
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS										
F 150	2 SEM.	120	15	0	2	C	REQUERIMIENTOS BRUTOS	10	10	10	10	10	10	10	10		
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO										
							REQUERIMIENTOS NETOS										
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS										
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS										
F 160	1 SEM.	170	0	120	1	D	REQUERIMIENTOS BRUTOS										
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO										
							REQUERIMIENTOS NETOS										
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS										
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS										
F 140	1 SEM.	120	0	0	2	E	REQUERIMIENTOS BRUTOS										
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO										
							REQUERIMIENTOS NETOS										
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS										
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS										

HOJA DE PLANEACION DEL MRP

POLITICA DE ORDENAR	TIEMPO DE COPRIDA	INVENT A LA MANO	STOCK DE SEGURIDAD	COMPRO-METIDO	CODIGO DE NIVEL MAS BAJO	NUMERO DE PARTE	PERIODOS								
							1	2	3	4	5	6	7		
L X L	2 SEM.	0	0	0	0	A					10		100	10	
								0	0	0	0	0	0	0	
												10	100	10	
												10	100	10	
								10			100	10			
L X L	1 SEM.	0	0	0	0	F						20	20	10	
								0	0	0	0	0	0	0	
												20	20	10	
												20	20	10	
												20	20	10	
L X L	1 SEM.	100	0	0	1	B				10		120	30	10	
								100	100	90	90	0	0	0	
												30	30	10	
												30	30	10	
												30	30	10	
F 150	2 SEM.	120	15	0	2	C				10	30	10	210	30	10
F 160	1 SEM.	170	0	120	1	D				20		220	30	10	
F 140	1 SEM.	120	0	0	2	E						20	20	10	

280

Tabla 3

Un requerimiento neto indica que las existencias no serán suficientes, por tanto será necesario recibir 10 piezas en la semana 4, es decir, un recibo de orden planeada por 10 unidades.

A continuación defasaremos en el tiempo la orden, para lo cual, se resta el número de periodos del tiempo de entrega al número del periodo en que debe recibirse. $4 - 2 = 2$, por tanto la liberación de la orden planeada es anticipada para el periodo 2.

Como se trata de lote por lote, el requerimiento neto es igual a la cantidad de la orden planeada (10 unidades); por lo tanto en el renglón *LIBERACION DE ORDENES PLANEADAS* aparece en el periodo 2, 10 unidades.

La explosión al siguiente nivel se detiene hasta que todas las órdenes planeadas del nivel que se está procesando hayan aparecido en la semana de liberación correspondiente (tres órdenes planeadas para A y F).

Al explotar el nivel 0, las liberaciones de las órdenes planeadas son la clave para determinar los requerimientos brutos a los siguientes niveles, (Tabla 3) para lo cual es necesario multiplicar por las *CANTIDADES POR* de los niveles bajo el nivel 0. Por ejemplo, la cantidad por de B es 1 para A y F.

En el periodo 2 existe un requerimiento bruto de 10 para cubrir la liberación de una orden planeada de 10 en A, mientras que hay un requerimiento bruto de 120 unidades en el periodo 4 para cubrir las liberaciones de las órdenes planeadas por 100 y 20 para A y F respectivamente.

No siempre la correspondencia de orden planeada a requerimiento bruto es biunívoca. Por ejemplo, para C, la *CANTIDAD POR* es de 2 para cada A y no hay artículos C en F. Por lo tanto, la demanda dependiente en el periodo 2 es 20 unidades para cubrir la liberación de una orden planeada de A de 10 unidades. Esta demanda se consolida con la demanda independiente de 10, dando como resultado un requerimiento bruto de 30 unidades en el periodo 2 para C.

Se procede de esta manera, hasta que todas las liberaciones de las órdenes planeadas al nivel 0 se hayan convertido en requerimientos brutos al siguiente nivel.

Después de haber terminado la explosión al nivel 0, se procesa el nivel 1. Como B es un subensamble que contiene a C y E, conviene procesar B por completo para después consolidar las demandas de C y E. A pesar de usar una regla de lotificación de lote por lote, hay una existencia de 100 piezas. En situaciones reales, esto puede ocurrir debido a una sobre-corrida de producción.

El cálculo de requerimientos netos es como sigue:

Ejemplo: Periodo 4

Requerimientos brutos	120
Existencias (después de satisfacer un requerimiento de 10 en la semana 2)	90
Requerimiento neto	30

Esto indica la necesidad de crear una orden planeada (siendo la regla lote por lote) de 30 unidades y como el tiempo de entrega es de una semana deberá liberarse en la tercera semana.

Cada unidad de B requiere dos unidades de C y tres de E. En la semana 4 hay una orden planeada por liberarse de 30. Para poder efectuar la liberación, se requiere una disponibilidad inmediata en este periodo de 60 C y 90 E.

En el caso de C ya había en la cuarta semana requerimientos brutos por 210 unidades a los que sumamos 60 unidades más para un total de requerimientos brutos de 270 (Tabla 4). En el caso de E existían requerimientos brutos por 20 unidades arrojando un nuevo total de 110 unidades.

Para terminar de procesar el nivel 1, pasamos a D. C y E no entran en este paso, pues el nivel más bajo en que aparecen es el nivel 2, y por lo tanto tienen un nivel de código 2, en el que se les debe procesar.

HOJA DE PLANEACION DEL MRP

283

POLITICA DE ORDENAR	TIEMPO DE CORRIDA	INVENT A LA MANO	STOCK DE SEGURIDAD	COMPRO METODO	CODIGO DE NIVEL MAS BAJO	NUMERO DE PARTE	PERIODO:																	
							1	2	3	4	5	6	7											
L X L	2 SEM.	0	0	0	0	A							10		100	10								
							REQUERIMIENTOS BRUTOS																	
							ENTRADAS PROGRAMADAS																	
							PROYECTADO A LA MANO																	
							REQUERIMIENTOS NETOS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS									100	10							
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS	10				100	10											
L X L	1 SEM.	0	0	0	0	F								20	20	10								
							REQUERIMIENTOS BRUTOS																	
							ENTRADAS PROGRAMADAS																	
							PROYECTADO A LA MANO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
							REQUERIMIENTOS NETOS									20	20	10						
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS									20	20	10						
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS									20	20	10						
L X L	1 SEM.	100	0	0	1	B							10		120	20	10							
							REQUERIMIENTOS BRUTOS							10		120	20	10						
							ENTRADAS PROGRAMADAS																	
							PROYECTADO A LA MANO	100	100	50	90	0	0	0	0	0	0	0						
							REQUERIMIENTOS NETOS									30	30	15						
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS									30	30	15						
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS									30	30	15						
F 150	2 SEM.	120	15	0	2	C								10	30	70	20	50	10	10				
							REQUERIMIENTOS BRUTOS																	
							ENTRADAS PROGRAMADAS																	
							PROYECTADO A LA MANO																	
							REQUERIMIENTOS NETOS																	
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS																	
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS																	
F 160	1 SEM.	170	0	120	1	D								20		250	40	10						
							REQUERIMIENTOS BRUTOS								20		250	40	10					
							ENTRADAS PROGRAMADAS								100									
							PROYECTADO A LA MANO	170	150	120	130	70	30	30	20									
							REQUERIMIENTOS NETOS																	
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS																	
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS									160								
F 140	1 SEM.	120	0	0	2	E									90	110	50	10						
							REQUERIMIENTOS BRUTOS																	
							ENTRADAS PROGRAMADAS																	
							PROYECTADO A LA MANO																	
							REQUERIMIENTOS NETOS																	
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS																	
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS																	

D tiene ya 120 unidades comprometidas para dar apoyo a la liberación de un artículo no incluido en este ejemplo. El resultado de esto es que en la semana cero, la existencia disponible es de 50 piezas (170 -120).

En la primera semana la existencia proyectada asignable a futuros requerimientos se verá aumentada por una entrega programada de 100 unidades para dar un total en la existencia proyectada de 150 unidades.

	Existencia en la semana 0	170
MENOS	Comprometido en la semana 0	120
MAS	Entregas programadas en la semana 1	100
IGUAL	Existencia proyectada en la semana 1	150

El procesamiento continúa como en los casos anteriores. Por ejemplo en la semana 4:

	Existencia proyectada en la semana 3 (después de cubrir un requerimiento bruto de 20 en la semana 2)	130
MENOS	Requerimiento bruto en la semana 4	220
IGUAL	Requerimiento neto en la semana 4	90

La diferencia ahora es que en lugar de cubrir este requerimiento neto con una orden planeada de 90 como sería en el caso de la regla lote por lote, se usa la regla de lotificación por una cantidad fija de 160, lo que causará una existencia proyectada para la cuarta semana de 70 unidades.

Defasando la orden fija de 160 piezas, con el tiempo de entrega de una semana deberá planearse una liberación de 160 en la tercera semana, la cual será suficiente para cubrir todos los requerimientos brutos posteriores, como demuestra el cálculo de las existencias proyectadas en las siguientes semanas.

Continuamos con el procesamiento del nivel 2 (Tabla 5). Nótese que C tiene un inventario de seguridad de 15 unidades para cubrir variaciones del pronóstico de refacciones de 10 unidades semanales. Esto significa que en ningún periodo la existencia proyectada deberá ser menor a 15. Por ejemplo, consideremos la tercera semana.

HOJA DE PLANEACION DEL MRP

285

POLITICA DE ORDENAR	TIEMPO DE CORRIDA	INVENT. A LA MANO	STOCK DE SEGURIDAD	COMPRO-METIDO	CODIGO DE NIVEL MAS BAJO	NUMERO DE PARTE	PERIODOS										
							1	2	3	4	5	6	7				
L X L	2 SEM.	0	0	0	0	A	REQUERIMIENTOS BRUTOS				10		100	10			
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
							REQUERIMIENTOS NETOS						100	10			
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS						100	10			
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS		10			100	10				
L X L	1 SEM.	0	0	0	0	F	REQUERIMIENTOS BRUTOS						20	20	10		
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
							REQUERIMIENTOS NETOS						20	20	10		
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS						20	20	10		
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS						20	20	10		
L X L	1 SEM.	100	0	0	1	B	REQUERIMIENTOS BRUTOS			10		120	30	10			
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO	100	100	90	90	0	0	0	0	0	0
							REQUERIMIENTOS NETOS					30	30	10			
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS					30	30	10			
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS				30	30	10				
F 150	2 SEM.	120	15	0	2	C	REQUERIMIENTOS BRUTOS	10	30	70	270	50	110	10			
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO	120	110	80	160	40	140	130	120		
							REQUERIMIENTOS NETOS				5	125	25				
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS				150	150	150				
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS	150	150	150							
F 160	1 SEM.	170	0	120	1	D	REQUERIMIENTOS BRUTOS			20		220	40	10			
							ENTRADAS PROGRAMADAS		100								
							PROYECTADO A LA MANO	170	150	130	130	70	30	20	20		
							REQUERIMIENTOS NETOS					50					
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS					160					
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS				160						
F 140	1 SEM.	120	0	0	2	E	REQUERIMIENTOS BRUTOS				90	110	50	10			
							ENTRADAS PROGRAMADAS										
							PROYECTADO A LA MANO	120	120	120	30	60	10	0	0		
							REQUERIMIENTOS NETOS					80					
							RECEPCION ORDENES PLANEADAS					140					
							LIBERACION ORDENES PLANEADAS				140						

Tabla 5

	Existencia anticipada en la semana 2 (después de cubrir los requerimientos brutos de 10 en la semana 1 y 30 en la semana 2)	80
MENOS	Requerimiento bruto en la semana 3	70
IGUAL	Existencia proyectada	10

Si no existiera la regla de mantener el inventario de seguridad mayor a 10 unidades, no habría la necesidad de considerar el arribo de un lote planeado, pero como el inventario de seguridad es de 15, y no deben considerarse existencias proyectadas inferiores a este número, se debe registrar el recibo de una orden planeada de 150 unidades en la semana 2, y anotar 5 unidades en requerimientos netos (15 - 10).

La consecuencia será una orden planeada de 150 unidades para liberarse en la semana 1 y una existencia proyectada de 160 unidades para la semana 3.

E no presenta ninguna nueva consideración, pudiéndose procesar según los ejemplos anteriores y dar por terminados los cálculos de este ejemplo. Los resultados completos se muestran en la tabla 5.

III. CONTROL DEL PLAN DE RE- QUERIMIENTOS DE MATERIA- LES:

III.1. NECESIDAD DE CONTROL:

La programación es la actividad de asignar fechas a pasos importantes en el proceso de fabricación de los productos. Es ésta parte de la planeación y el control, no de la ejecución. Su propósito es señalar parámetros contra los cuales comparar la ejecución con el fin de obtener señales de advertencia oportunas que requieren acción correctiva. Hay tres niveles de programación:

1. *Programas maestros de producción*, que muestran cantidades y fechas para los productos.
2. *Programas de orden*, que dan las fechas de arranque y terminación para tandas de materias primas y componentes comprados y fabricados en la elaboración de los productos.
3. *Programas de operación*, que proporcionan fechas de arranque y terminación (o tiempos) para cada operación significativa necesaria para procesar un pedido de componentes en la planta.

Los programas maestros de producción y de pedido están vinculados por las listas de materiales de los productos planeados. Los programas de orden de partes y componentes están igualmente vinculados. Todos éstos son revisados y actualizados de acuerdo con una replaneación de MRP.

Los programas de operación deben estar acoplados a las fechas vencidas de orden y manteniendo su validez reprogramando en el momento en que tales fechas vencidas cambien en forma significativa. Por desgracia, esto se descuida con frecuencia; en consecuencia, las prioridades de la planta son dirigidas por datos inexactos.

La planeación de la capacidad no puede ser eficaz hasta que haya un sistema de control de inventario que genere requerimientos realistas.

Por otro lado, el sistema de control de inventario que sólo genera órdenes y las envía a la planta sin consideración de la capacidad, por lo general genera sus propios tiempos guía excesivos y los inventarios y déficits más elevados que resultan.

Si el sistema de planeación no se ha provisto de controles, es inevitable que la producción se saldrá con el tiempo de control y que los cambios en el nivel de producción se presentarán demasiado tarde para evitar las crisis.

Es esencial que el sistema de control de la producción incluya algunos límites de decisión y es importante que éstas sean deletreadas de modo que cualquiera pudiera reconocerlas en el momento que se requiera un cambio en el nivel de producción. Tal herramienta puede utilizarse para mostrar el impacto potencial sobre el servicio al cliente si no se cambian los niveles de producción.

La necesidad de algunas normas o fronteras de decisión es tan esencial para el control que éstas deben ser realizadas en todo sistema de control de la producción, inclusive si deben primero ser desarrolladas conforme a tolerancias establecidas por discernimiento. Aun si estos límites de control son menos que científicos para arrancar con ellos, son mejor que nada.

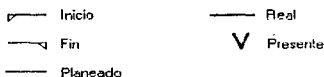
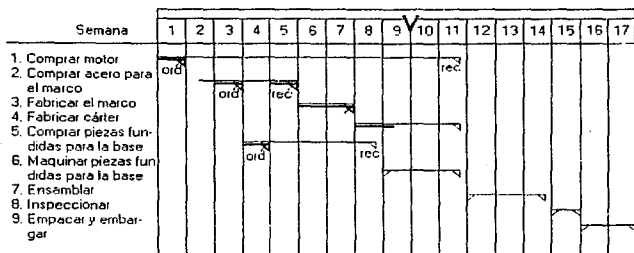
El control sobre el nivel de producción es necesario con el fin de asegurarse que los artículos correctos pasen a producción. Si no existe suficiente capacidad, técnicas como la de expedir pasará sólo algunos de los artículos.

Para el control, la oportunidad es más importante que la exactitud, aun cuando ambas son necesarias.

III.2. RUTA CRITICA Y PERT:

INSTRUMENTOS DE CARGADO Y PROGRAMACION:

El diagrama de barras o de Gantt, desarrollado por Henry L. Gantt en Frankford Arsenal en 1917, es una de las herramientas de planeación más antiguas conocidas para el control de la producción.



La tabla anterior muestra un diagrama de Gantt utilizado para planear un proyecto en el cual se van a ensamblar, inspeccionar, empaquetar y embarcar un gran motor comprado, un cárter fabricado sobre un marco (piezas sueltas) y piezas fundidas maquinadas. Las fechas programadas para cada actividad, para el inicio y la terminación son mostradas por las líneas verticales cortas en los extremos de las líneas horizontales delgadas. Cada actividad de proyecto tiene su propio conjunto de líneas y la gráfica muestra el periodo completo del principio al final del proyecto. La marca en V que está sobre los encabezados de las fechas muestra el tiempo presente (fin de la semana 9).

Al final de la semana 9, las líneas horizontales gruesas (que representan el avance real) muestran que el motor se ordenó a tiempo, que el acero para el marco se ordenó, se recibió y se armó y que el cárter se está ahora fabricando alrededor del marco. La gráfica muestra también que las piezas fundidas para la base se han ordenado pero que no se ha recibido y que de hecho está atrasada respecto al programa, amenazando así la fecha de entrega descada en la semana 17 si no se toma de inmediato una acción correctiva.

En este ejemplo, el diagrama de Gantt se usa para mostrar el programa de un proyecto exclusivamente. Puede usarse también en una forma ligeramente diferente para mostrar las cargas de las máquinas anotando en las hileras los centros de máquinas y trazando líneas dentro de las columnas que representen la cantidad de la capacidad que se carga.

Los diagramas de Gantt se han sofisticado enormemente con la ayuda de la computadora; así no representan limitaciones en la reproducción y transmisión de las mismas y pueden manejar grandes cantidades de elementos de proyectos.

PLANEACION Y CONTROL DE PROYECTOS:

Desde la introducción del diagrama de Gantt, han habido algunas innovaciones dramáticas en la planeación de proyectos, ocasionadas por la necesidad de planear y controlar proyectos complejos que comprenden muchos elementos y grupos de trabajo. El método de la ruta crítica (CPM) es una forma de planeación de proyectos denominada planeación de redes.

La planeación de redes comprende la elaboración de una gráfica de los elementos y actividades que constituyen un proyecto complejo, mostrando las secuencias e interrelaciones necesarias y determinando la ruta crítica o secuencia de eventos más larga que realmente determina cuando puede completarse el proyecto. Los recursos adicionales aplicados a estas actividades serían eficaces en la reducción del lapso de tiempo del proyecto.

Quizá la técnica de planeación de redes más publicada sea el PERT* (Técnica de Evaluación y Revisión de Proyectos). Este es un refinamiento de la ruta crítica en el cual se elaboran los estimados de los tiempos optimista, más probable y pesimista para la terminación de cada elemento en el proyecto. Estos datos se introducen en una computadora en la que se calculan las probabilidades de completar las rutas y se determina la ruta crítica. La computadora imprime también información sobre esas actividades que tienen tiempo holgado y pueden tolerar retrasos, de modo que el esfuerzo, la mano de obra, las máquinas y el dinero pueden ser desviados de actividades con holgura a actividades más críticas, si es posible reduciendo el tiempo total del proyecto sin costo extra.

* Ruta crítica y PERT se tratan con mayor profundidad en el capítulo 11.

Este análisis también muestra las fechas primera y última de inicio y de terminación para cada elemento en su propia secuencia con otros elementos.

Estas técnicas de planeación de proyectos pueden también usarse en el control de proyectos pero el sólo hacer el plan original puede ayudar mucho a asegurar que no se pasen por alto los elementos importantes y a lograr que el proyecto se inicie apropiadamente. Una vez establecido *PERT*, se puede revisar en forma periódica el avance del proyecto y la gráfica puede ser actualizada. Con frecuencia, se observarán cambios sustanciales en la ruta crítica conforme se terminan con anticipación algunos eventos y se retrasan otros. El mantenimiento de la información actualizada necesaria para utilizar la planeación de proyectos como técnica de control requiere un esfuerzo considerable al pasar el tiempo y presentarse los cambios en el proyecto. No obstante, muchas compañías involucradas en la fabricación del tipo de proyecto altamente complejo, consideran que el esfuerzo vale la pena. Ejemplos típicos son la construcción y el desarrollo e introducción de una nueva línea de producto.

III.3. REVISION CONTINUA DEL PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES:

LA RETROALIMENTACION: BASE PARA EL CONTROL:

Por definición, control significa medir el desempeño real y compararlo con el plan, descubrir las desviaciones significativas y tomar medidas correctivas. Un sistema de control de producción tiene dos circuitos de retroalimentación: uno de los materiales y el otro de la capacidad.

En una empresa de producción, se aplican las técnicas como pronóstico, MRP y puntos de reorden en etapas programadas, CRP, control de insumos/producción, carga de los centros de trabajo, informes diarios de despacho y retroalimentación sobre el progreso del trabajo.

El problema más difícil de superar se presenta cuando toda la planeación se funda en pronósticos traducidos al MPS. Por mucho esfuerzo que se haya dedicado a mejorarlo, muchos cambios de operación se necesitan para satisfacer el cambio de demanda.

La mayor parte del personal de operación de línea y del control de producción siente aversión natural a trabajar con incertidumbre; por ello procuran idear sistemas bastante rígidos para los planes de la empresa, preparados con mucha anticipación para superar la incertidumbre.

Se logra un notable mejoramiento en el servicio a clientes si se introduce flexibilidad en las actividades de planeación y ejecución si se reconoce que las fechas programadas están sujetas a cambio, cuando la demanda de clientes se convierte en verdaderas órdenes. Ello requiere algún tipo de sistema dinámico de prioridades; como lo es la replaneación periódica del MRP.

Los usuarios experimentados del MRP desarrollan un deseo de datos de planeación más específicos y periódicos. Esto se puede lograr por medio de programas que procesen solo las partes cambiadas de los datos: Un primer enfoque denominado regeneración - con el auxilio de una computadora, por supuesto - descarta un plan y desarrolla uno del todo nuevo.

Un segundo enfoque denominado alteración de los requerimientos, introduce y procesa sólo los cambios en el MPS; utiliza la última información encontrada en los archivos (listas de materiales, balances de materiales en existencia y en los pedidos, inventario de seguridad, tiempos guía, etc.) que se han actualizado recientemente. Los productos cuyo MPS no ha sido alterado no serán procesados en el diagrama de explosión del MRP. La técnica es en particular útil para añadir datos del MPS en periodos de tiempo en el extremo del horizonte de planeación conforme éstos se acercan a este extremo. Es útil para enfocar la atención en las acciones que se necesitan puesto que los avisos que se relacionan con la disponibilidad del componente. Por lo general se procesa la alteración de los requerimientos cuando un nuevo periodo de planeación se presenta en el horizonte y cuando se hacen cambios significativos en el MPS.

Se puede introducir aún más flexibilidad en la planeación haciendo que el sistema replanee los datos de acuerdo a las transacciones individuales reportando el desperdicio, los errores de registro y otras desviaciones significativas extraídas de los datos previamente planeados. Cuando se lleva a cabo periódicamente, se le denomina cambio neto de tanda. Cuando los cambios y desviaciones del MPS son frecuentes se realizan corridas diarias.

En ambientes más estables y disciplinados, pueden ser replaneaciones adecuadas semisemanales o más frecuentes. Las corridas de regeneración son realizadas por lo común en forma periódica para purgar los errores acumulados; el periodo casi siempre se prolonga al irse instituyendo mejores disciplinas en la alteración de los requerimientos y en el manejo de la transacción del cambio neto. El cuadro a continuación compara las tres formas en que los programas del MRP pueden actualizarse.

	Regeneración	Alteración de requerimientos	Cambio neto
Archivos de inventario, pedido abierto actualizado	SI	SI	SI
Todo el MPS explotado	SI	NO	NO
Frecuencia de las corridas del MRP	SEMANAL BISEMANAL MENSUAL (rara)	DIARIO SEMISEMANAL	DIARIO
Efectos de toda transacción analizada	NO	NO	SI

III.4. CONTROL POR COMPUTADORA:

Los planes manuales de materiales, además de estar mal integrados, literalmente nunca estaban actualizados. Los cambios en los pronósticos de ventas, las emisiones de nuevos diseños y muchos otros factores simplemente no podían ser manejados de un modo diligente.

Los programas de computadora generan la capacidad de lograr una integración completa y de mantener más actualizado el plan reprocesando con frecuencia todos los datos.

Los grandes productores de software como IBM y HEWLETT-PACKARD han desarrollado paquetes preprogramados de manufactura. Sin ahondar en diferencias técnicas o requerimientos de hardware, podemos decir que estos paquetes están orientados a la administración de la producción de productos estándares y por tanto están dirigidos a ambientes industriales en los cuales se programan las órdenes de producción - de acuerdo a MRP - poco tiempo antes de liberarlas al piso. En estas condiciones es normal considerar que las cantidades de material asignadas a órdenes programadas están a punto de ser entregadas a la planta y el módulo de MRP calcula los requerimientos de materiales asumiendo que todas las cantidades de materiales asignadas a órdenes de producción programadas, están por entregarse en la primera semana de planeación del MRP.

Estos paquetes permiten cambiar los materiales o las operaciones necesarias en una orden de producción. Esto reviste gran importancia, pues muchas órdenes de producción para productos especializados requieren flexibilidad para los cambios en las especificaciones. Asimismo tienen la ventaja de poder ajustar las holguras y retrasos en producción actualizando el MRP. De no existir esta facilidad, los inventarios de materias primas se ven inflados, pues las órdenes se liberan de acuerdo a fechas de inicio, y no a su fecha real de consumo.

Por estas razones, en la industria moderna el control de la producción y de los inventarios recae en gran medida sobre la computadora, que es una herramienta muy poderosa para manejar con rapidez y exactitud el gran volumen de datos involucrados.

IV. CODIGO DE BARRAS:

IV.1. INTRODUCCION:

La tecnología del código de barras ha recibido mucha publicidad en los últimos años, está ampliamente difundida en el mercado de artículos al menudeo, y rápidamente se le han encontrado aplicaciones muy diversas.



El código de barras puede ser pensado como la versión impresa del código Morse, donde las barras estrechas representan puntos y las anchas representan rayas. Para leer la información contenida en un símbolo de código de barras, se utiliza una pluma de luz dotada de un ojo electrónico (conocida como "scanner"). Conforme la pluma es movida a través del símbolo de un lado a otro, el patrón de anchuras de las barras y los espacios es analizado por el equipo lector y los datos originales son recobrados.



Algunos scanners no requieren movimiento a través del símbolo, pues son examinados secuencialmente de manera automática.

Código de barras es una tecnología de identificación automática. Permite que los datos sean recolectados rápida y eficientemente; pero no resuelve problemas por sí misma. La combinación de código de barras con el hardware y software apropiado crea el potencial para incrementar el desempeño, la productividad y la rentabilidad de los sistemas de inventario.

Los símbolos de código de barras poseen una amplia gama de técnicas de impresión, variando uniformemente el tamaño del mismo según los requerimientos existentes, todo esto a bajo costo.

La técnica del código de barras es unidimensional. Solo los anchos de barras y espacios contienen información. La altura es irrelevante.

Los sistemas de código de barras ofrecen alta seguridad en el manejo de datos. La tasa de error de sustitución es menor a un error en un millón de caracteres. La tasa de primera lectura sin error usualmente es superior al 80%, y muchos scanners automáticos la incrementan hasta el 100%. La aplicación más conocida del código de barras, se encuentra en el negocio de los supermercados, donde se aplica desde 1970 (en los Estados Unidos).

IV.2. SIMBOLOGIA:

Es importante distinguir entre "código" y "símbolo". *Código* se refiere a los datos actuales contenidos: Número de parte, número de serie, precio, o cualquier otro tipo de datos. *Símbolo* se refiere al arreglo actual de las barras paralelas y los espacios entre ellas que codifican los datos.

CARACTERISTICAS DE UNA SIMBOLOGIA:

- *Juego de caracteres.* Describe el rango de los caracteres de datos que pueden ser codificados en una determinada simbología. Algunas pueden codificar solamente números (llamadas numéricas), otras son alfanuméricas, y otras manejan solamente 128 caracteres del código ASCII⁵.
- *Tipos de simbologías.* Las simbologías de código de barras caen en dos categorías: discretas y continuas. En un *código discreto*, cada caracter puede ser decodificado independientemente de los caracteres adyacentes; ya que están separados por espacios del mismo grosor que no contienen información, y cada caracter tiene barras en ambos bordes.



⁵ American Standard Code for Information Interchange.

En un código continuo no existen espacios sin información. Cada caracter comienza con una barra y termina con un espacio. El fin de un caracter está indicado por el comienzo del siguiente.



Debido a que los espacios entre caracteres tienen una determinada tolerancia, un código discreto puede ser impreso por una variedad de técnicas diferentes; por ejemplo puede ser producido por una impresora de cabeza móvil, que imprima un caracter entero al mismo tiempo.

Un código continuo, al no existir espacios sin información, requiere menor longitud para codificar una determinada cantidad de datos. En contraposición, resultan más restringidas las técnicas de impresión disponibles.

La precisión de estos tipos de simbologías es independiente del hecho de ser continuas o discretas.

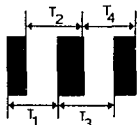
- **Ancho de los elementos.** Existen dos tipos básicos de códigos de barras; aquellos que emplean solamente dos medidas (ancho y angosto), y otros que usan múltiples medidas.

En la simbología de dos medidas, se conoce como N a la razón entre los elementos anchos y angostos. N usualmente varía alrededor de un rango (normalmente entre 2.0 y 3.0), pero debe ser constante para un símbolo dado. Conforme N aumenta, la tolerancia de impresión también se incrementa. Si un símbolo se imprime sin considerar las especificaciones, la precisión del mismo no está garantizada para valores pequeños de N .

En la simbología de múltiples medidas, los espacios y las barras pueden tener diferentes valores de anchura. Muchas de estas simbologías son modulares, lo que quiere decir que la longitud del caracter es subdividida en un número predeterminado de módulos, y la longitud de una barra o un espacio siempre es un número entero de módulos.

Las simbologías de múltiples longitudes suelen ser continuas y son decodificadas usando algoritmos llamados *de borde a borde* (edge - to similar - edge). Esta técnica mide las distancias entre bordes similares de elementos adyacentes, en vez de la longitud de los elementos.

En la figura a continuación se muestra que T_1 , T_2 , T_3 y T_4 se mantendrán constantes si todos los elementos crecen o se reducen uniformemente. Dado que varias técnicas de impresión emplean entintado uniforme, esta técnica decodificadora ofrece ventajas para las simbologías donde las distancias borde a borde similares son únicas para cada carácter. Y, si son impresas dentro de especificaciones, las simbologías de longitudes múltiples son tan precisas como las de dos longitudes.



Algunos códigos continuos con longitudes múltiples son denominados códigos (n,k) , donde n es el número de módulos en el carácter y k es el número de barras y espacios. El número de patrones posibles en un código (n,k) está determinado por la expresión:

$$\frac{(n-1)!}{(2k-1)! (n-2k)!}$$

Los seis códigos (n,k) más importantes son: *UPC/EAN* (7,2); *código 93* (9,3); *código 128* (11,3); *código 49* (16,4); *código 16K* (11,3) y *PDF417* (17,4).

- *Longitud fija o variable.* Existen simbologías que por su estructura sólo pueden codificar datos en longitudes fijas. Por razones de seguridad en la información, otras deben ser usadas en longitudes fijas únicamente. Por último otras codifican datos de longitud variable.

- *X y Z.* X es el término usado para describir la longitud nominal (o pretendida) de los elementos angostos de un símbolo de código de barras (barras y espacios). Cuando se examina un símbolo desconocido, es común medir y calcular el ancho promedio de los elementos angostos: esto, se conoce como Z. Por convención X y Z se expresan en mils (milésimas de pulgada).
- *Densidad.* Las simbologías difieren en la cantidad de datos que pueden ser codificados en una determinada unidad de longitud. Para hacer comparaciones congruentes, el valor de X, debe ser considerado cuando se comparan densidades relativas. La densidad normalmente es especificada solamente para los caracteres de datos. La longitud completa del símbolo necesita incluir caracteres de inicio y fin, zonas sin información y cualquier caracter de control.
- *Códigos de inicio y terminación.* Un código de inicio es un patrón particular de barras y espacios que es estampado al inicio del símbolo para indicar al scanner donde comienza y algunas veces también indica la dirección de lectura. Un código de terminación, es asimismo un patrón particular de barras y espacios que indica el final de los caracteres de datos, y puede también indicar la dirección de la lectura.
- *Caracter de control.* Es un caracter (o caracteres) puestos en determinada posición del símbolo, y cuyo valor está basado en determinada relación matemática con respecto a los otros caracteres en el símbolo. Es usado para validar los datos que han sido decodificados. Si el caracter de control solo puede asumir valores numéricos (del 0 al 9), se llama *digito verificador*.
- *Bidireccional.* La simbología bidireccional es aquella que puede ser leída de izquierda a derecha o viceversa, sin afectar la interpretación de los datos. Prácticamente todas las simbologías en uso hoy en día son bidireccionales.

SIMBOLOGIAS MAS USADAS:

1. *UPC* (Universal Product Code) se emplea en el negocio de los supermercados desde 1973. *UPC* además de ser una simbología es un sistema de codificación que está diseñado para identificar únicamente el producto y su fabricante.

El código *UPC* actual consta de diez dígitos, los primeros cinco representan el código del fabricante, y los siguientes cinco son el código de identificación del producto. Se añade además un dígito verificador. *UPC* es una simbología continua, numérica, de longitud fija que emplea cuatro anchuras de elementos.

2. *EAN* (European Article Numbering System) es la versión modificada del código *UPC*. Un scanner *EAN* puede decodificar *UPC*, aunque no a la inversa.

Un símbolo *EAN-13* codifica trece dígitos dentro de un seis parejas de números leídas de izquierda a derecha; el decimotercer dígito en combinación con el decimosegundo define dos banderas que representan el código del país.

UPC/EAN son los sistemas más exitosos en el mercado menudeo. Normalmente, cada mensaje decodificado en un supermercado es verificado contra la base de datos de la tienda antes de actuar en consecuencia. Bajo este método la confiabilidad ha sido ampliamente demostrada.

3. *Codabar* se desarrolló originalmente en 1972. Ahora se usa principalmente en bibliotecas y bancos de sangre. *Codabar* es una simbología discreta con autoverificación que tiene 16 caracteres: del 0 al 9 y los operadores \$: / . + -. El aspecto más peculiar del *Codabar* tradicional es que la longitud de barras y espacios a ser impresos puede generar 18 valores diferentes, dependiendo de un carácter particular. Existen varias explicaciones de cómo sucedió esto, pero la más probable es que esas longitudes múltiples fueron generadas para proporcionar un ancho constante del carácter y fueron empíricamente ajustadas para el óptimo funcionamiento de los equipos lectores que estaban disponibles en 1972.
4. El *Código 39* es una simbología discreta con autoverificación, de longitud variable y la primera alfanumérica en ser desarrollada, y puede ser impresa bajo diferentes tecnologías. A veces es llamada *código 3 de 9*. Todos los códigos de esta simbología tienen cinco barras y cuatro espacios, haciendo un total de nueve elementos. De éstos, tres son anchos y seis angostos, por lo que es una simbología de dos medidas. Un símbolo en código 39 empieza y termina con un asterisco (*) que es el carácter de inicio/terminación.

5. El **Código 128** es una simbología continua, alfanumérica de alta densidad que fue introducida en 1981. Es de longitud variable, de múltiples medidas. Cada carácter tiene 11 módulos, que pueden ser, indistintamente negros o blancos. Cada carácter tiene tres barras y tres espacios; por lo que es un código (11,3).

El **Código 128** tiene 106 caracteres impresos diferentes. Cada carácter puede tener tres significados distintos, dependiendo de cuál juego de caracteres es utilizado. Los tres diferentes caracteres de inicio indican al scanner cuál de estos juegos está siendo utilizado, y tres códigos especiales permiten cambiar dicho juego dentro del símbolo.

6. El **Código 93** fue diseñado específicamente para complementar el código 39 e introducido en 1982. Es una simbología continua de longitud variable que emplea cuatro anchos de elementos. Cada carácter tiene nueve módulos que pueden ser indistintamente blancos o negros. Cada carácter contiene tres barras y tres espacios.

ELIGIENDO UNA SIMBOLOGIA:

La elección de la simbología generalmente es sencilla. Si el producto se embarca a los supermercados debe ser marcado con **EAN** o **UPC**. Cuando los estándares externos no son importantes, el usuario tiene varias opciones para elegir. Las consideraciones a tomar en cuenta son:

1. El área disponible para el símbolo.
2. El tipo de datos a codificar.
3. El equipo de impresión utilizado.
4. La disponibilidad del equipo de lectura e impresión.

IV.3. EQUIPOS DE LECTURA:

Un lector de código de barras es un instrumento utilizado para extraer la información que está codificada ópticamente en un símbolo y convertirla en datos digitalizados compatibles con una computadora.

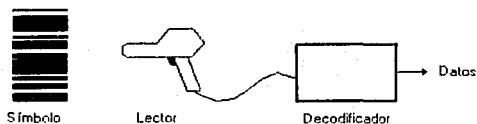
Los datos decodificados pueden ser transmitidos a una computadora, almacenados para procesamiento posterior, o para interactuar con un programa residente en el lector.

Para decodificar la información residente en un símbolo de código de barras, el lector debe realizar siete funciones básicas:

1. *Encontrar los elementos correctos.*
2. *Determinar los anchos de cada barra y espacio.*
3. *Cuantificar los anchos de cada elemento en un número apropiado para la simbología usada.*
4. *Asegurar que los anchos de los elementos cuantificados son consistentes con todas las reglas de codificación de la simbología. Comparar el patrón de los anchos de estos elementos contra la tabla de valores almacenada para la simbología de los datos codificados.*
5. *Si es necesario, revertir el orden de los datos. La dirección de lectura está determinada por los caracteres de inicio/terminación.*
6. *Confirmar que las zonas sin información estén presentes a ambos bordes del símbolo.*
7. *Confirmar que cualquier caracter de control sea consistente con los datos decodificados.*

El segundo paso - medir el ancho de cada elemento - se efectúa por un sistema de lectura electrónico en combinación con el software instalado en el microprocesador. Los siguientes cinco pasos son manejados por rutinas de software que implementan un algoritmo particular de decodificación.

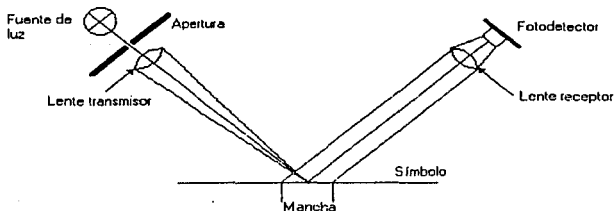
Un lector de código de barras puede ser considerado como dos elementos separados: el instrumento que lee y el decodificador. Estos dos elementos pueden estar separados físicamente y estar conectados por un cable, o pueden ser una sola unidad.



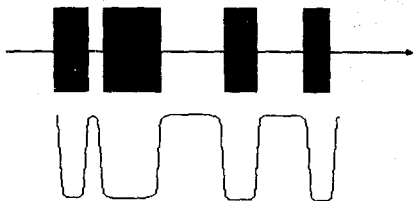
INSTRUMENTOS DE LECTURA:

El instrumento de lectura es una unidad que emplea técnicas ópticas y electrónicas para leer el símbolo. El movimiento de lectura puede ser proporcionado por la mano del operador, un sistema interno o por el movimiento del símbolo a través del lector. La respuesta electrónica instantánea es representativa de la reflexión óptica del punto leído. (Obviamente los espacios reflejan mayor cantidad de luz que las barras).

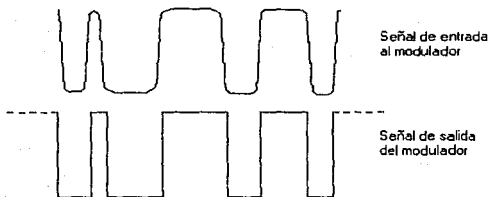
Un lector usualmente es un sistema activo; ilumina el símbolo y examina la cantidad de luz reflejada por el área enfocada, conocida comúnmente como *mancha*. La mancha no necesariamente es redonda. La dimensión vertical de la mancha comparada contra la dimensión horizontal de la misma debe ser consistente con la longitud del elemento más angosto a ser leído.



La luz reflejada por la mancha es transmitida a un fotodiodo, el cual genera una pequeña corriente que es proporcional a la cantidad de luz devuelta. Un amplificador incrementa esta señal hasta un nivel eficiente para la lectura. Conforme se mueve el lector sucesivas manchas aparecen en él, y el voltaje del amplificador varía.



En el diagrama a continuación se aprecia que el voltaje analógico proveniente del amplificador es directamente proporcional a la cantidad de luz reflejada por la mancha. Para diferenciar entre barras y espacios este voltaje es convertido en una onda digitalizada mediante un circuito llamado *modulador de onda*.



CLASIFICACION DE LOS INSTRUMENTOS DE LECTURA:

Los lectores, caen en cinco diferentes categorías, dependiendo de su mecanismo lector y su forma física:

- a) *Lectores de mano, luz fija, de contacto*: El haz luminoso toca el símbolo y se halla en posición fija respecto de éste. El operador debe efectuar el movimiento a través del símbolo a velocidad constante. La punta que hace contacto con el símbolo está diseñada para minimizar la fricción y puede ser una esfera de plástico, acero o zafiro.

Generalmente están ensamblados en forma de *pistola*, incorporando alarma y gatillo por lo que se les conoce como *pistolas de contacto*. Estas unidades son las más comunes para lectura de códigos. Son baratas, de construcción fuerte y compactas.

- b) *Lectores de mano, luz fija, sin contacto*. Estos lectores se emplean para leer símbolos que estén situados en superficies blandas o irregulares y pueden leer a través de láminas de metal o vidrio. El operador proporciona el movimiento manteniendo el scanner a una distancia apropiada del símbolo. Algunos de ellos incluyen una mira para su correcta alineación.
- c) *Lectores de mano y luz móvil*. El movimiento de lectura se realiza a través de un sistema electromecánico interno. El haz de luz parpadea aproximadamente 40 veces por segundo, por lo que el ojo humano distingue una línea continua de luz, en vez de una mancha luminosa que se mueve.
- d) *Lectores fijos de luz fija*. Como están montados en una estructura, la lectura se realiza moviendo el símbolo a través del haz luminoso. Como estos instrumentos solo obtienen la lectura conforme el símbolo pasa a través de él, una impresión de buena calidad es esencial para obtener una lectura correcta.
- e) *Lectores fijos de haz móvil*. El haz luminoso parpadea a alta velocidad, (usualmente en el rango de 40 a 1,000 ciclos por segundo) lo que permite la lectura de datos de los símbolos que pasan delante de él. Dada su velocidad, es posible efectuar más de una lectura, por lo que son idóneos cuando la impresión sea deficiente o el símbolo esté localizado en áreas de difícil acceso.

DECODIFICADORES:

Como ya se enunció con anterioridad, el decodificador analiza la señal producida por el scanner y descifra la información codificada en el símbolo. Los datos resultantes pueden transmitirse a una computadora, ser archivados localmente para transferencia posterior, o usados en un programa de aplicación residente en el mismo decodificador.

Todos los sistemas de lectura contienen un módulo que decodifica la información del símbolo. En un sistema típico, esta función usualmente está implementada con software residente o un microprocesador. Cualquiera que sea la implementación, los siguientes pasos son incluidos:

1. *Determinar si la mancha actual es una barra o un espacio.* Esto generalmente se determina por la comparación de la señal recibida contra un banco de datos, función que generalmente efectúa el modulador de onda.
2. *Medir la longitud de cada elemento al tiempo que la mancha está siendo leída.* En el caso de simbologías como *UPC*, que se decodifican mediante técnicas de borde a borde, esta longitud se conoce como *distancia-T*. En los casos en que no es posible medir longitud, el decodificador toma el tiempo transcurrido hasta que la señal cambia de dirección.
3. *Cuantificar los anchos de los elementos (distancias-T).* Para una simbología de dos medidas, esto significa separar los elementos como anchos o angostos. Para simbologías de múltiples medidas, esta cuantificación puede ser hecha en cuatro o más niveles discretos, usualmente expresados en términos de *X*. Una variedad de algoritmos deben ser empleados para esta medición, cuando la velocidad de lectura no es uniforme.
4. *Decodificar los caracteres comparando las distancias-T contra una tabla de valores válidos para cada juego de caracteres.* Para simbologías bidireccionales, esta tabla de caracteres tiene que incluir entradas en ambas direcciones.
5. *Si es necesario, revertir el orden de los datos decodificados para acomodarlos.* La dirección de lectura generalmente está determinada por los símbolos de inicio/terminación. El algoritmo decodificador usualmente confirma que todos los caracteres hayan sido leídos en la misma dirección; si existe cambio en ésta, el proceso decodificador es abortado.
6. *Realizar confirmaciones adicionales para validar la lectura.* Estas pueden incluir:

- Confirmación de zonas sin información válidas.
- Verificación de caracteres de control.
- Confirmación de que la velocidad de lectura se encuentra dentro de límites preestablecidos.

7. Transmitir los datos decodificados a la siguiente estación de proceso.

TIPOS DE DECODIFICADORES:

Dependiendo de su fuente de energía y la comunicación de datos, los decodificadores se dividen en:

- a) *Decodificadores en línea.* Estos decodificadores están conectados directamente a una toma de corriente AC; y una conexión alámbrica transfiere los datos *en-línea* entre el decodificador y una computadora o un equipo de transmisión de datos. Generalmente están montados en una estructura fija.
- b) *Decodificadores portátiles.* Funcionan con baterías. Los datos son almacenados temporalmente y vaciados en una computadora posteriormente. Un lector de este tipo es el adecuado para levantamiento de inventarios físicos.
- c) *Decodificadores portátiles en línea.* Estos decodificadores transmiten la información *en-línea* a la computadora, empleando transmisión con ondas de radio, en vez de archivar los datos en la memoria limitada del decodificador.

IV.4. EQUIPOS DE IMPRESION:

La impresión de código de barras cae dentro de dos clasificaciones principales: impresión en el lugar (*on-site*) e impresión fuera del lugar (*off-site*).

La impresión fuera de lugar se refiere a tecnologías que son empleadas para reproducir los símbolos para uso subsecuente. Esta producción es efectuada en lugares diferentes de donde los símbolos serán usados (etiquetado).

La impresión fuera de lugar se utiliza para producir grandes volúmenes de símbolos iguales o secuenciales. En la mayoría de los casos este tipo de impresión se contrata con una empresa especializada.

Las técnicas de impresión en el lugar son empleadas para crear símbolos en el lugar y al tiempo donde serán usados. Los datos codificados en cada símbolo pueden ser diferentes y accedidos por un teclado local o controlados por una computadora. A la impresión en el lugar también se le conoce como *impresión de demanda*, debido a su habilidad para producir símbolos únicos dependiendo de la demanda.

Los símbolos de código de barras pueden ser impresos mediante una gran variedad de formas: Etiquetas, hojas, calcomanías, cartón, cajas y artículos terminados.

TECNICAS DE IMPRESION FUERA DE LUGAR:

Existen variedad de técnicas para la impresión fuera de lugar. Las técnicas a tinta incluyen offset, estampado, impresoras rotativas, etc. Otras técnicas son fotocomposición, estampado en caliente e impresión láser.

Las técnicas a tinta difieren principalmente en la forma de transferir la tinta al material. En la mayoría de los casos un positivo o negativo fotográfico es usado para generar la *matriz maestra de impresión*. Debe utilizarse una tinta especial (formulada a base de carbón o grafito) para asegurar una reflexión adecuada.

En la técnica de fotocomposición, una computadora genera una imagen de alta resolución que es proyectada a material fotosensible (papel o film). Después del revelado e impresión, la imagen es precisa y exacta. Esta técnica produce símbolos de alta calidad para valores de X por debajo de 3 mils, pero su costo es considerablemente mayor que otros métodos.

La técnica de estampado en caliente, considera el calentamiento de una plancha de impresión de metal que presiona una cinta termosensible para imprimir el material. La calidad de impresión es buena, pero su costo es alto.

La técnica de impresión láser es muy similar al fotocopiado. El proceso comienza cuando la cinta pasa a través de la corona que prepara la superficie de la cinta para la imagen láser. El rayo láser se prende y apaga alternativamente para generar iones cargados positivamente en la cinta que corresponden a la imagen. Posteriormente el toner, que está cargado negativamente, se esparce sobre la misma cinta y se adhiere a las cargas positivas que son transferidas al material. Dado que el rayo láser está controlado por un microprocesador, los símbolos pueden imprimirse a diferentes escalas.

TECNICAS DE IMPRESION EN EL LUGAR:

Imprimir símbolos en el lugar de uso es la forma más rápida y sencilla de generar códigos de barras. Una amplia variedad de técnicas de impresión pueden ser usadas para imprimir símbolos en demanda, entre las que se incluyen matriz de puntos, impresión de impacto, impresión térmica, impresión magnética, chorro de tinta, etc.

Las impresoras de matriz de puntos funcionan presionando un conjunto de agujas en una cinta entintada, que hace contacto con el material.

Las impresoras de impacto tienen un rodillo giratorio. Cuando un carácter gira hacia la zona de impresión, un martillo golpea el material a través de una cinta para producir la impresión. Como la cinta no se reutiliza, la cantidad de tinta no varía y este tipo de impresión genera símbolos de excelente resolución, por lo que esta técnica es recomendable para etiquetar artículos pequeños.

En la impresión térmica, un material termosensible es expuesto a calor durante un tiempo determinado. La imagen es creada por la reacción química del material al calor.

En la impresión magnética el rodillo giratorio está hecho de un material fácilmente imantable. La cabeza de impresión consiste en un arreglo lineal de cabezas de grabación magnéticas, que escriben una imagen magnética en la superficie del rodillo, este último recolecta el toner también magnético y lo estampa en el papel.

La impresión por chorro de tinta funciona proyectando tinta a distancia contra un blanco determinado. Esta proyección es controlada electrónicamente ya sea por impulsos intermitentes o continuos. El chorro de tinta no transfiere altas temperaturas, impactos o presión al material; permitiendo imprimir en superficies irregulares, como cartón corrugado, vidrio, metal y plástico.

IV.5. ETIQUETADO:

El etiquetado se efectúa mediante técnicas de impresión fuera de lugar. Una consideración técnica muy importante es en el caso de etiquetas autoadheribles, ya que éstas no pueden usar impresión láser o estampado en caliente, puesto que el calor generado por ésta modifica las características del adhesivo; por tanto solamente quedan como adecuadas las técnicas de impresión a tinta, chorro de tinta o fotocomposición. También son utilizadas técnicas como impresión de impacto o matriz de puntos.

IV.6. MANEJO DE MATERIALES Y CONTROL DE INVENTARIOS:

CONTROL DEL INVENTARIO DE MATERIA PRIMA:

En un ambiente industrial típico, el área de recibo del almacén sufre cuellos de botella constantemente. Si el material recibido fue previamente marcado por el proveedor, el tiempo de espera de recepción se reduce sustancialmente (entre el 30 y 60%), ya que la lectura, además de contar los artículos actualiza los niveles de inventario en la computadora.

Del mismo modo, el uso de código de barras puede significar una reducción en el esfuerzo requerido para levantar un inventario físico: un programa de aplicación en un lector portátil cuenta los artículos y confirma que no existan números de parte duplicados.

CONTROL DEL INVENTARIO EN PROCESO:

El inventario en proceso es el más difícil de controlar. Una forma de rastrear el inventario en proceso es usando código de barras.

En su configuración más simple, una computadora es conectada a una serie de lectores en las líneas de producción y por lo menos una impresora. Cada estación de trabajo tiene un lector que un operador usa para recolectar la información conforme se elaboran los subensambles o productos semiterminados.

Una orden de trabajo contiene un código de barras para el número de la orden y la lista de todas las operaciones a realizar. Cada descripción de operación tiene un símbolo de código de barras que identifica el número de la misma.

Conforme un operador completa una orden, el lector es usado para leer el número de serie o de orden, el código de operación, la identificación del operador y la cantidad de la orden. La red de lectores actualiza la base de datos, retroalimenta al MRP y genera reportes del estatus de las órdenes de trabajo, los niveles de eficiencia y la detección de cuellos de botella.

PRODUCTOS TERMINADOS:

El código de barras puede ser usado efectivamente en muchas maneras en el departamento de embarque:

1. *Requerimientos de etiquetado.* Para satisfacer los requerimientos de etiquetado de los consumidores finales, una etiqueta con código de barras probablemente tendrá que ser incluida en el paquete a embarcar.

Si el símbolo empleado es el mismo, este puede ser preimpreso en cada caja, o con técnicas de impresión fuera de lugar se pueden imprimir etiquetas adheribles. Si los datos son variables, una impresora en el lugar puede ser usada para producir etiquetas únicas. El formato de la etiqueta puede ser archivado en el controlador de la impresora o en una computadora. Los datos variables pueden ser automáticamente enviados a la impresora, dependiendo del número de orden o un número de serie preasignado.

2. *Establecer un sistema preciso de los pedidos.* Si un distribuidor embarca artículos con números de serie individuales a una amplia variedad de consumidores, el código de barras puede ser usado para crear un sistema de envíos en el punto de embarque.

Por ejemplo, una fábrica tiene artículos terminados de cuatro productos: A, B, C y D. Cada uno de estos productos está marcado con un código de barras que describe el artículo y su número de serie.

Conforme se reciben los pedidos, un operador lee para verificar la transacción y capturar datos adicionales. El pedido tiene un símbolo de código de barras, que contiene el nombre del consumidor, dirección y artículos ordenados. Cuando este símbolo es leído, el programa de aplicación verifica la base de datos para asegurarse que no existan créditos vencidos y luego genera la orden de embarque de los productos.

Cuando un operador mueve estos paquetes al área de embarque, ambos códigos de barras son leídos. El programa residente en la computadora, confirma que los productos y cantidades sean correctos, y actualiza automáticamente el archivo de números de serie. Este archivo (que asocia número de serie, producto y cliente) sirve para múltiples aplicaciones, como por ejemplo, aplicación de garantías, datos de consumidores, etc.

La computadora ordena a una impresora generar las etiquetas de embarque y la lista de artículos indicando los números de serie.

3. *Control y distribución de mercancías.* Si un almacén central distribuye a diferentes puntos, con transporte ajeno a la empresa, con leer un símbolo en el momento de embarcar, se obtiene la lista exacta de los productos fletados. En el punto de destino se vuelven a leer estos datos para verificar que el flete se desembarque por completo.

IV.7. COSTOS:

Implementar un sistema de código de barras es decisión de la dirección de una empresa. Existen dos alternativas: contratar a una empresa que maquile las etiquetas o bien, imprimirlas dentro de la planta.

Para elegir la mejor alternativa es necesario evaluar seis elementos que determinan el costo:

1. *Costo de material.* Aquí es donde todos los análisis comienzan. Hay que determinar los requerimientos de etiquetas y evaluar el costo de las mismas, analizando propuestas de diferentes proveedores. El costo de la impresión en el lugar está determinado en gran medida por el precio de etiquetas en blanco, tintas y matrices maestras de impresión.
2. *Costo de mantener el inventario.* El costo de mantener una provisión de etiquetas compradas para cada uno de los productos o partes es aproximadamente del 30% del precio de compra. Si cambian los números de serie, números de partes o alguna otra información codificada, los inventarios existentes de etiquetas preimpresas generarán desperdicio. Esto puede representar un factor de costo importante en operaciones que mantengan niveles de inventario altos. Si las etiquetas son producidas en la planta hay que mantener existencias de etiquetas en blanco y tintas.
3. *Costos de operación adicionales.* Comprar etiquetas de un proveedor o producirlas puede involucrar el costo de las matrices maestras de impresión para cada producto. Sin embargo, si la información codificada no varía, se trata de una sola inversión.

Cada cambio requerirá una nueva matriz maestra de impresión. Aquí es donde los costos de impresión se involucran. Los sistemas de impresión de información variable no requerirán nuevas matrices de impresión dado que mantienen el formato en la memoria de la computadora, pero no hay que olvidar que alguien debe programar dichos cambios y ésto no es gratis. Las cintas de impresión, el toner y las cintas térmicas deben ser reemplazadas regularmente para producir códigos de calidad, aquí es donde se involucra la nómina de los empleados de mantenimiento y operación.

4. *Costos de mantenimiento de equipo.* Los equipos en el lugar varían de precio desde las relativamente baratas impresoras de matriz de puntos, hasta las más caras como las impresoras láser. El mantenimiento del equipo es aproximadamente el 1.5% mensual del costo original del equipo.

5. *Costos del aseguramiento de calidad.* La impresión en la planta puede requerir el mantenimiento de un programa de control de calidad para validar que los símbolos tengan una buena impresión. El uso de métodos manuales o automáticos de control de calidad debe ser considerado como una parte de la decisión de imprimir en la planta. Asimismo se debe tener en mente que el aseguramiento de calidad se requiere aún en el caso de etiquetas compradas.
6. *Tiempo de entrega y variabilidad:* Si los datos varían constantemente y requiere impresión en demanda, una fuente fuera de lugar no es candidato. Si los datos varían constantemente, pero el cambio es conocido, entonces puede considerarse una opción fuera de lugar. El costo de producir etiquetas en la planta siempre debe comparada contra los tiempos de entrega del proveedor.

La decisión final de imprimir los códigos en el lugar o fuera del lugar no debe ser resuelta solamente basados en costos. Los costos de impresión de la etiqueta son relevantes con relación al propósito para el cual sirven. Un sistema barato que no cumpla los requerimientos puede costar aún más que el que requiere mayor inversión pero sirve mejor a las necesidades del usuario en tiempo, precisión y levantamiento de información. Un departamento de ingeniería industrial es responsable de la productividad del sistema completo. Si las etiquetas son baratas pero de mala calidad solamente se ahorrará un ínfimo porcentaje del costo de su producción. Sin embargo, una lectura pobre costará mucho dinero invertido en trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- Bushnell, R. D., R. B. Meyers, *GETTING STARTED WITH BAR CODES: A SYSTEMATIC GUIDE*, Bushnell Consulting Group, Inc., New York, 1990.
- Orlicky, Joseph, *MATERIAL REQUIREMENT PLANNING, THE NEW WAY OF LIFE IN PRODUCTION AND INVENTORY MANAGEMENT*, Mc. Graw-Hill, New York, 1975.
- Ortega, S. Alejandro, *APOYO AUTOMATIZADO PARA EL DESARROLLO DEL PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES EN LAS INDUSTRIAS*, Universidad Anáhuac, México, 1986.
- Palmer, Roger C. *THE BAR CODE BOOK*, Helmers Publishing, Inc., Peterborough, New Hampshire, 1991.

Plossl, George W. *CONTROL DE LA PRODUCCION Y DE INVENTARIOS,*
PRINCIPIOS Y TECNICAS, Prentice-Hall
Hispanoamericana, S. A. México, 1987.

CAPITULO VII

**TECNICAS MODERNAS
APLICADAS A LA PRODUCCION**

I. INTRODUCCION:

I.1. OBJETIVOS DEL SISTEMA JUSTO A TIEMPO:

Justo a Tiempo es una filosofía industrial, de eliminación continua de desperdicios y mejoramiento de la productividad. Con una filosofía *Justo a Tiempo* bien ejecutada, la empresa puede hacer de su fabricación un arma estratégica.

La eliminación del desperdicio tiene como resultado a largo plazo un proceso fabril tan ágil, tan eficiente, tan orientado a la calidad y tan capaz de responder a los deseos del consumidor, que llega a convertirse en un arma estratégica. Con un sistema de fabricación más eficiente y menos derrochador, las empresas ya no tienen que depender del mercadeo y de la publicidad como únicos medios para hacer distinguir sus productos y captar una parte del mercado.

Justo a Tiempo no sólo ofrece a las empresas la oportunidad de mejorar notablemente la calidad de sus productos, sino que les permite reducir su tiempo de respuesta al mercado hasta en un 90%. El tiempo necesario para lanzar al mercado productos nuevos o modificados de acuerdo con los pedidos de los clientes, se reduce a la mitad. Al mismo tiempo, se requiere menor inversión en bienes de capital y los inventarios se pueden reducir en forma drástica, o inclusive eliminar del todo.

Con una buena aplicación de los principios de *Justo a Tiempo*, empresas que antes tenían que presentarse en el mercado como empresas orientadas al servicio o a la calidad porque no podían competir en precios, pueden empezar a considerarse como productoras de bajo costo. Esto puede abrirles mercados totalmente nuevos y distinguir las de todas las demás compañías orientadas hacia el servicio o hacia la calidad.

En la filosofía *Justo a Tiempo* hay tres componentes básicos para eliminar el desperdicio.

El primer componente básico de la eliminación del desperdicio es imponer *equilibrio, sincronización y flujo* en el proceso de manufactura, ya sea donde éstos no existan o donde se les pueda mejorar.

¹ Se conoce como desperdicio a aquellas actividades o procesos que no agregan valor al producto.

El segundo componente es la actitud de la empresa hacia la calidad: la idea de "*hacerlo bien la primera vez*".

El tercer componente es la participación de los empleados. Este es un requisito previo para la eliminación del desperdicio. Cada miembro de la organización, desde el personal de la fábrica hasta los más altos ejecutivos, tiene una función por cumplir en la eliminación del desperdicio y en la solución de los problemas fabriles que ocasionan desperdicios. La única manera de resolver los centenares o miles de problemas que surgen en un sistema de manufactura - desde los más pequeños hasta los más grandes - es *asegurando la participación cabal de todos los empleados*.

El concepto *Justo a Tiempo* comenzó poco después de la Segunda Guerra Mundial. Se considera como padre del sistema *Justo a Tiempo* al japonés Taiichi Ohno quien trabajó para la Toyota Motor Corporation. Durante la gestión de Ohno se creó el Toyota Production System que fue el primer sistema *Justo a Tiempo*. Hasta finales de los años 70, el sistema estuvo restringido a la Toyota y a su familia de proveedores clave.

A raíz de la crisis petrolera de 1976, los japoneses vieron que su curva de crecimiento económico e industrial, que venía ascendiendo desde 25 años atrás, comenzaba a resquebrajarse: además que en el futuro se iban a presentar altibajos en la industria manufacturera, tal como sucedía en las naciones occidentales. Los dirigentes del mundo de los negocios comenzaron a buscar maneras de mejorar la *flexibilidad* de los procesos industriales y así descubrieron el Toyota Production System.

El Toyota Production System cambió la mentalidad: Balancean las tasas de producción y demanda; atacan tamaños de lote grandes, pero no aceptan altos tiempos de preparación como constantes; alcanzan estándares de calidad altos, haciendo socios a sus proveedores, con lo que reducen sus inventarios de materia prima y productos en proceso e involucran a sus empleados en toda la operación. Ellos han atacado todos los aspectos de un proceso de manufactura, derribando mitos. Ellos producen *Justo a Tiempo*.

I.2. ALCANCE DEL SISTEMA JUSTO A TIEMPO:

Quienes implantan la filosofía *Justo a Tiempo*, tanto en Japón como en Occidente, suelen hablar de "rocas y agua". Las rocas son el símbolo de todos los problemas; el agua representa las existencias empleadas tradicionalmente para protegerse y amortiguar estos problemas: los inventarios (especialmente los de seguridad), ocultan los problemas.

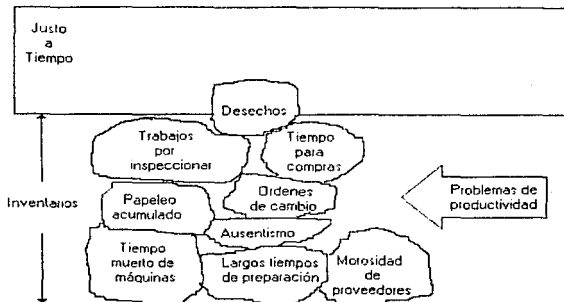
Como ejemplo, pensemos en una máquina que se descompone dos o tres veces al día, quedando fuera de servicio durante 10 a 15 minutos cada vez; este problema ocurre desde hace mucho tiempo. Años atrás, era un verdadero *obstáculo* para las operaciones. Como política se estableció *proteger* aquella máquina y otras similares, con existencias reguladoras para que los obstáculos no perjudicaran ni interrumpieran el resto del proceso.

Hoy, varios años después, la máquina se sigue descomponiendo tres o cuatro veces al día durante 10 o 15 minutos cada vez; pero nadie lo nota, salvo el operador que pretende trabajar con la máquina, y el personal de mantenimiento que debe acudir repetidas veces a arreglarla. Las existencias reguladoras se han *institucionalizado*; ya son una manera de actuar que protege u oculta el problema ante los ojos de todos salvo el operador y el encargado de mantenimiento.

Nadie más se percata del problema porque éste no tiene repercusiones visibles en el resto del proceso. En tales condiciones el problema no se resolverá jamás. El proceso se mantendrá a su nivel actual de costo y eficiencia, sin aprovechar al máximo los equipos ni el personal, y precisará atención constante para las reparaciones y existencias a fin de proteger el resto del proceso contra demoras y paralizaciones.

Ahora multipliquemos lo anterior por el número de operaciones que hay en toda la planta, y tendremos una idea de la magnitud de las existencias necesarias para fines de regulación, el tiempo que duran ociosas estas existencias a la espera de reingresar en el proceso, y las oportunidades que habría disponibles si se resolviera el problema y se eliminaran las causas de un inventario tan grande.

Dados estos antecedentes de existencias artificialmente elevadas para regular y protegerse contra los problemas, la empresa deberá estudiar cuidadosamente la manera de comenzar a reestructurar sus operaciones de modo que se reduzcan estas existencias.



Quienes visitan Japón y observan las operaciones fabriles allá, regresan diciendo que lo indicado es reducir el nivel de agua - o sea, arbitrariamente las existencias - para que los problemas queden expuestos y se pueda proceder a resolverlos.

Quienes así opinan están pasando por alto un punto importante: que los japoneses les llevan mucha ventaja al resto del mundo en materia de resolver problemas. Occidente tiende a olvidar que los japoneses han estado resolviendo problemas de calidad y otros desde hace más de 25 años. Los japoneses pueden darse el lujo de reducir las existencias para ver que sucede, pues sus problemas son relativamente pequeños y por lo tanto esa medida no perjudica ni las operaciones ni las relaciones con los clientes.

Si las empresas occidentales, con su administración tradicional, disminuyeran súbitamente el nivel de existencias para revelar los problemas, la mayoría encontraría problemas arrolladores hasta el punto de ocasionar suspensiones masivas de la producción.

II. SISTEMA JUSTO A TIEMPO:

II.1. PRINCIPIOS BASICOS DEL SISTEMA:

Los siete elementos de la filosofía *Justo a Tiempo* se dividen en seis internos y uno externo.

El primero de los elementos interno es la filosofía *Justo a Tiempo en si misma*. El segundo es *calidad en la fuente*. Hay tres elementos relacionados con ingeniería de producción: *carga de trabajo nivelada*, *las operaciones coincidentes* (celdas de maquinaria o tecnología de grupo) y *tiempo minimo de preparación de máquinas*. El sexto elemento interno es un sistema de control conocido como sistema de jalar, *Kanban u operaciones encadenadas*. El elemento externo son las *compras Justo a Tiempo*.

II.2. TAMAÑO DEL LOTE:

Parte de la definición de la producción *Justo a Tiempo* tiene que ver con la eliminación de existencias. Esta parte de la definición ha contribuido tanto como cualquier otro factor a generar la idea errónea de que *Justo a Tiempo* es un programa de reducción de inventarios.

Muchos piensan que la razón de eliminar existencias es que estas cuestan. Ciertamente es costoso mantener existencias y a la empresa le conviene reducir tales costos. Muchos datos indican que los costos de mantener existencias generalmente equivalen del 25 al 30% del valor total de inventario.

Sin embargo, aunque la reducción de costos reales es una meta importante de *Justo a Tiempo*, no es ésta la razón por la cual se busca reducir o eliminar el inventario. La razón es que las existencias son *malas en si mismas*. Son malas para el proceso de fabricación.

Las existencias esconden problemas. Los fabricantes tradicionales siempre han pensado que los inventarios de seguridad los protegen a ellos y a sus consumidores contra problemas; pero *Justo a Tiempo* demuestra que sucede todo lo contrario.

En realidad, las existencias protegen los problemas, impidiendo que alguien los resuelva. Al proveer inventarios de seguridad en la operación y existencias reguladoras en todo el proceso - y en los productos terminados - los fabricantes impiden que se resuelvan los problemas. El inventario sirve para ocultar los problemas y ofrecen otras formas de adaptación a los mismos, sin la necesidad de resolverlos.

II.3. REDUCCION DEL TAMAÑO DEL LOTE Y DEL TIEMPO DE PREPARACION:

Justo a Tiempo no se lleva con los métodos tradicionales de preparación, porque con ellos se pierde demasiado tiempo haciendo los ajustes a las máquinas cuando se desean correr partes diferentes, lo que provoca que las corridas cortas no sean rentables.

Cuando se examinan los costos reales de una secuencia tradicional de preparación, los resultados espantan: preparación, corrida de prueba, inspección, ajuste y así una y otra vez hasta que se produce una parte aceptable. Entretanto se genera desperdicio, se provoca reprocesado y se crean muchas oportunidades de tiempo improductivo. Por ejemplo, se desperdicia muchísimo tiempo mientras se busca y se encuentra el herramental y la máquina se detiene para poder prepararla. El tiempo total de preparación se mide desde el momento en que se produce la última parte de la corrida anterior y el momento en que se produce la primera parte aceptable de la corrida siguiente. Esto en ocasiones puede tomar varios días, y por ello una vez que la máquina ha sido preparada, no queda más remedio que emprender corridas de lotes muy grandes.

El problema tradicional de los fabricantes consistía en que siempre se había considerado como una constante ese largo tiempo de preparación y, en vez de buscar la forma de reducirlo, todo el mundo discutía la fórmula del tamaño económico del lote que debía emplearse para decidir de cuantas partes debía ser la corrida.

Para que el sistema *Justo a Tiempo* funcione, el objetivo debe ser el de reducir y simplificar la preparación para que la primera parte que se produzca al término de ésta sea perfecta 100% de las veces.

* En el capítulo III se analiza la fórmula de tamaño económico del lote.

Los beneficios serán una disminución del tiempo de preparación, del desperdicio, del reprocesado y del tiempo de inspección, además de la reducción de los inventarios y del capital invertido.

Para lograr reducciones importantes en el tiempo de preparación se recomiendan cinco reglas básicas:

- Realizar por fuera de la línea principal todos los pasos posibles con vistas a la preparación de las máquinas. La búsqueda de los accesorios, la espera de los equipos y la preparación del herramental, son elementos de la preparación que no deben afectar el tiempo de la línea principal. Para ello, deben realizarse por fuera, mientras la máquina sigue trabajando en la corrida anterior.
- Eliminar los movimientos innecesarios. La eliminación de pasos, la reducción del esfuerzo manual, la entrega de procedimientos escritos para la preparación y la integración de equipos de preparación son formas de reducir los movimientos innecesarios. Por ejemplo, Harley Davison tuvo éxito aplicando este concepto a una prensa troqueladora. Antes, los dados se guardaban en otro edificio y tenían que ir a buscarse cada vez que se cambiaba el trabajo. Ahora los dados se guardan junto a la prensa, sobre una mesa con cojinetes de bolas que facilitan el movimiento de dados más pesados. Con esto logró reducir el tiempo de preparación de una hora a diez minutos y se eliminó un montacargas.
- Eliminar los ajustes a las máquinas en sí. Esto puede lograrse por medio de herramental preajustado, espaciadores, o bloques de guía, por mencionar algunos ejemplos. La idea consiste en diseñar y fabricar dispositivos de sujeción que puedan cambiarse sin tener que ajustar la posición de la mesa.
- Estandarizar los dados, el herramental, los dispositivos de sujeción, los diseños y las especificaciones de partes. En estas actividades deben intervenir los ingenieros de diseño. Antes de que las partes, el herramental o los dispositivos de sujeción nuevas salgan de las mesas de dibujo, los diseñadores deben analizar lo que se encuentra en uso y tratar de diseñar nuevos componentes que reduzcan el tiempo de preparación.

- Utilizar plantillas para los ajustes. Una fresadora es un buen ejemplo, porque de un trabajo a otro deben modificarse sus topes. Es posible acelerar la preparación de una fresadora para su siguiente trabajo utilizando una plantilla con muescas que señalen la ubicación exacta de los topes.

La reducción del tiempo de preparación es una tarea de suma importancia que debe llevarse a cabo en tres etapas.

- Primera etapa. En esta etapa no se buscan las "mejores" soluciones. En vez de ello, los operadores y sus supervisores deben preguntarse: "¿Qué pequeños cambios podríamos hacer para empezar a reducir el tiempo de preparación?" Aquí el costo debe ser mínimo. Las soluciones pueden implantarse en corto plazo y se puede reducir entre el 20 y 30% el tiempo de preparación.
- Segunda etapa. Esta etapa implica algunos gastos ocasionados por modificaciones menores a las herramientas, los dados, los dispositivos de sujeción, las máquinas y los procedimientos. Esta etapa también es a corto plazo y produce beneficios de entre el 30 y el 50% de reducción en el tiempo de preparación. La primera y segunda etapas se deben realizar simultáneamente.
- Tercera etapa. En esta etapa es posible lograr reducciones de entre el 10 y el 40% en el tiempo de preparación. Esta etapa puede tomar años y es probable que requiera de fuertes inversiones de capital en el cambio de los diseños y en la estandarización de los dados, las matrices, el herramental y las partes.

Una regla básica absolutamente vital en este proceso es comprender quiénes están participando y quién ejerce el máximo control. Reducir el tiempo de preparación es un proyecto en el cual participan los empleados trabajando en equipo.

La primera razón es que se aprovecha mejor a los verdaderos expertos: los operadores de máquinas, que son los que conocen el proceso y sus máquinas. No es que estén haciéndolo todo correctamente, pero sí son los que tienen más experiencia y los más conocedores de los problemas actuales.

La segunda razón es que entre los operadores se genera la sensación de que sus opiniones cuentan para reducir el tiempo de preparación.

La tercera razón es que al participar más personas se cuenta con más recursos que cuando la reducción del tiempo queda sólo en manos de los ingenieros.

Sin duda estos expertos de la planta tienen ya en la mente la mitad de las ideas necesarias para reducir el tiempo de preparación. Algunas son ideas que ellos podrían explicar inmediatamente, otras no las pueden expresar claramente todavía. Pero las ideas están allí, esperando que alguien las ponga en práctica.

Si se necesitan ideas adicionales, la gerencia debe ayudarles a estos expertos a generarlas, haciéndoles sentir que el proceso es algo suyo. Al fin y al cabo, son ellos quienes decidirán si una idea es buena o no y si da resultados o no. Cuando estos expertos conceptúan que una idea funcionará; vencerán los factores que obstaculicen su ejecución.

Si alguien de afuera, un ingeniero por ejemplo, les da ideas, incluso buenas ideas, la reacción de los operadores será: ¿Y éste quién es? ¿Qué sabe él de mi máquina y de cómo prepararla?

Por tanto, hay que apoyar a los operadores para que propongan sus ideas, y la dirección deberá comunicarles el mensaje de que sus ideas no solamente son válidas, sino que se pondrán en práctica para bien de todos.

II.4. PROGRAMA DE TRABAJO FIJO Y NIVELADO:

Uno de los tres componentes básicos para eliminar el desperdicio es exclusivo de *Justo a Tiempo*: el concepto de *equilibrio, sincronización y flujo*. La filosofía *Justo a Tiempo* dice que se necesita equilibrio para que haya flujo y que, por tanto, el equilibrio es de importancia primordial, incluso más que la rapidez. Entonces surge la siguiente pregunta ¿qué se debe equilibrar con qué? La respuesta se encuentra en el concepto de *carga de trabajo uniforme*.

Este concepto introduce dos ideas: una es el *tiempo de ciclo*, que se refiere al ritmo de producción. La otra es la *carga nivelada*, que se refiere a la frecuencia de la producción.

En *Justo a Tiempo*, el *tiempo de ciclo* no significa lo mismo que significaría para un ingeniero industrial: el tiempo necesario para que una máquina cumpla su trabajo.

El *tiempo de ciclo* en *Justo a Tiempo* es una medida del índice de la demanda, que muchas veces se mide por el índice de ventas. El principio del *tiempo del ciclo* dice que el ritmo de producción debe ser igual al índice de la demanda.

Cuando se hace esta afirmación, la mayoría de los supervisores de producción responden: "¿Y qué tiene de nuevo? Eso lo estamos haciendo ya. A veces nos adelantamos, producimos más de lo que vamos a necesitar, más de lo que podemos vender. Nos estamos preparando para la temporada. Tenemos un problema de capacidad. Pero la mayor parte del tiempo, nuestro ritmo de producción se ajusta al índice de la demanda".

Pero en realidad, estas empresas no están produciendo de acuerdo con la demanda. Están produciendo de acuerdo con la rapidez de la máquina. Luego efectúan un ajuste único de acuerdo con el índice de la demanda, apagando la máquina cuando han producido lo suficiente.

El concepto de *tiempo de ciclo* dice que la producción no debe ser equivalente a la capacidad para producir, sino que debe adaptarse a lo que se necesita.

El concepto de *carga nivelada* se centra en el producto mismo. Teniendo en cuenta el *tiempo de ciclo*, las máquinas se hacen funcionar con la rapidez adecuada, de acuerdo con la demanda. La nivelación de la carga tiene que ver con la producción de artículos a la frecuencia correcta.

El principio de *carga nivelada* dice que los artículos han de producirse a la frecuencia que el consumidor los requiera. Yendo al extremo, si el artículo se vende todos los días debe fabricarse *todos los días*.

Obviamente es un cambio radical; algo completamente alejado de los conceptos tradicionales de la producción, pero es factible. La pregunta es cómo. La meta es producir lotes cada vez más pequeños, por lo cual se hace necesario cambiar las máquinas con mayor frecuencia sin incurrir en costos adicionales de preparación o pérdida de capacidad en los equipos. Es aquí donde interviene la reducción del tiempo de preparación.

La principal ventaja de reducir el tamaño de los lotes es que con ello se sientan las bases para el flujo y el equilibrio nivel por nivel, pues cada artículo se produce en la forma más fácil y predecible. Además, se derivan otros cinco beneficios importantes:

- Mejoras en la curva de aprendizaje
- Mayor flexibilidad para combinar productos
- Reducción del inventario
- Tiempos de corrida más cortos
- Mejoramiento de la calidad

II.5. ELIMINACION DE INVENTARIOS DE MATERIAL EN PROCESO (TECNOLOGIA DE GRUPOS):

Uno de los principios centrales de la filosofía *Justo a Tiempo* - el flujo - confirma que Henry Ford tenía razón. No en su modelo T negro, sino el concepto de la línea de ensamble. Henry Ford y sus colaboradores idearon la línea de ensamble a principios del siglo XX. El nombre línea de ensamble se le dio más tarde, y se originó en el hecho de que las piezas y componentes se unían en secuencia; es decir, se ensamblaban al armazón mientras éste se desplazaba por una línea en que había equilibrio, sincronización y un flujo ininterrumpido. El concepto de Henry Ford sobre equilibrio, sincronización y flujo se puede aplicar a toda una línea de ensamble a una celda de maquinaria o incluso al flujo de trabajo administrativo en una oficina.

La línea de ensamble creada por Henry Ford se aproxima mucho a la producción *Justo a Tiempo* perfeccionada por la Toyota. El manual para empleados de Toyota incluye un capítulo entero dedicado a Ford y al concepto de línea de ensamble que él formuló para la Ford Motor Company.

Hacia los años 60, Toyota se propuso integrar este concepto de Henry Ford en una definición: "La cantidad mínima posible en el último momento posible y la eliminación de los inventarios en proceso".

La línea de ensamble emplea una cantidad mínima posible de partes o subensambles. Aunque un pedido sea de un millón de unidades y aunque la línea de ensamble esté en proceso de fabricar ese millón de unidades, las va trasladando *unidad por unidad* de una operación a otra, y cada operación tiene una sola unidad.

La línea de ensamble trabaja en el último momento posible. La segunda operación está completa y lista para pasar a la operación tres exactamente cuando la tercera operación la necesita. Si la tercera operación ya no requiere esa unidad, entonces la segunda operación dejará de producirla.

El principal obstáculo para el flujo ágil es el inventario en proceso. Ninguna empresa ha alcanzado tal nivel de perfección - ni siquiera Toyota - en todo su proceso de fabricación. Sin embargo, cualquier empresa puede alcanzar la perfección en algunas partes de su proceso si aplica la filosofía, los conceptos y las técnicas *Justo a Tiempo*.

Aunque parezca utópico hablar de la perfección, es necesario comprender en que consiste ésta para saber hacia dónde debe dirigirse una empresa. Entonces se pueden tomar, paso a paso, las medidas prácticas que conduzcan a ese objetivo, para acercarse así cada vez más a la perfección.

Una línea de ensamble - o una secuencia cualquiera de hechos o de operaciones - que tenga equilibrio, sincronización y flujo incluirá poca o ninguna actividad de desperdicio. No se hacen recuentos de los productos entre operaciones. Tampoco se trasladan los productos al almacén. En la línea de ensamble no se realizan tareas que suelen asociarse a la producción por lotes, excepción hecha de las operaciones en sí mismas.

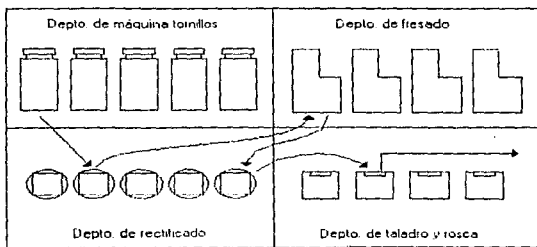
Una de las maneras más singulares de eliminar el desperdicio, y que se asocia con la línea de ensamble, tiene que ver con la escasa necesidad de programar. En la producción por lotes es necesario programar cada operación.

En cambio, la línea de ensamble se programa como un todo, generalmente por medio de MPS¹ conforme a las necesidades del consumidor. Cada operación dentro de la línea de ensamble se programa a sí misma, o mejor dicho, se controla a sí misma si la línea permanece equilibrada y sincronizada.

Todo lo anterior no es nuevo; lo que adiciona *Justo a Tiempo* al concepto de Ford es la llamada *tecnología de grupos*, la que se emplea en relación con el ordenamiento físico, la disposición y la localización de las máquinas (lay-out) en una planta. Una definición más apropiada de *tecnología de grupos* para el ordenamiento y disposición de la maquinaria que se plantea en la producción *Justo a Tiempo*, incluye las palabras *operaciones coincidentes* y *celdas de trabajo o celdas de maquinaria*.

La manera tradicional de organizar una planta es por departamentos especializados, cada uno de ellos con un solo tipo de equipo o tecnología. Todas las máquinas de tornillo están en un departamento, todas las rectificadoras en otro, el fresado se hace en otra zona y el trabajo de taladro y rosca en otra zona diferente. Este ejemplo es de la industria metalmeccánica, pero la misma situación existe en la industria electrónica, en la farmacéutica, en la textil, en la alimenticia; prácticamente en todas. Cuando una fábrica está organizada por departamentos funcionales, la empresa siempre termina produciendo artículos por lotes. La primera operación suele completarse para todo el lote antes de que éste pase a la segunda operación.

DEPARTAMENTOS ESPECIALIZADOS



¹ Siglas de Master Production Schedule, Plan Maestro de Producción, mismo que se describe en el capítulo VI.

Ante todo, en la producción *Justo a Tiempo* es necesario que la planta se organice físicamente no por funciones sino por productos. La maquinaria se debe dedicar total o parcialmente a una familia de productos y se debe disponer en el orden en que van a cumplirse las operaciones para esa familia de productos.

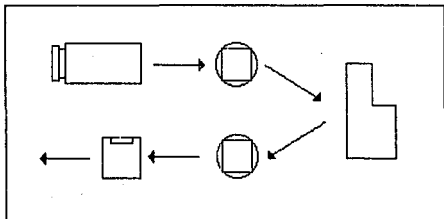
Los términos *tecnología de grupos* y *celdas de maquinaria* anteceden a *Justo a Tiempo*. La filosofía *Justo a Tiempo* fija límites muy estrictos para una *celda de maquinaria* correctamente formada. En la mayoría de los casos, lo que en el pasado se ha organizado como *celda de maquinaria* no cumple los requisitos de *Justo a Tiempo*.

Para saber si existe una verdadera *celda Justo a Tiempo*, se pueden efectuar dos pruebas.

La primera prueba es si el producto va fluyendo uno cada vez de una máquina a otra. Muchas *celdas de maquinaria* en sus versiones más antiguas no pasaban esta prueba. Es cierto que el equipo estaba dedicado a una familia de productos y que físicamente se hallaba reunido; pero el artículo a menudo pasaba de una operación a la siguiente en lotes.

La insistencia absoluta con la producción de un artículo cada vez, concuerda con la *línea de ensamble* de Henry Ford, aplicando en este caso los principios de la *línea de ensamble* a operaciones de maquinaria o fabricación.

PRODUCCION JUSTO A TIEMPO



Este flujo de un artículo cada vez, es lo que da lugar a las operaciones coincidentes. Se genera un flujo en que la segunda operación comienza tan pronto como sale la primera pieza de la primera operación. En realidad, el lote se reduce a una pieza.

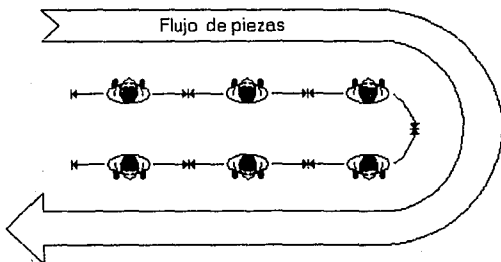
La segunda prueba para saber si una celda de maquinaria es realmente una celda *Justo a Tiempo*, es si tiene la flexibilidad para operar a distintos ritmos de producción y con equipos de trabajo de diferentes tamaños (tiempo de ciclo).

Las celdas de maquinaria tradicionales rara vez ha tenido en cuenta la flexibilidad. Se han ordenado y operado a un mismo nivel de producción: el máximo por hora que el equipo es capaz de producir.

Es necesario que las celdas de trabajo *Justo a Tiempo* sean ajustables para que puedan producir al ritmo exigido por la operación o por el cliente que ellas alimentan, reconociendo que la demanda es variable.

ORDENAMIENTO FLEXIBLE:

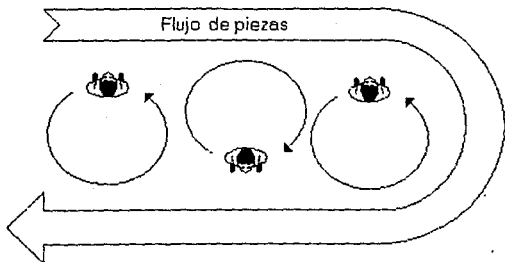
El principio del ordenamiento flexible se aplica al rediseño de líneas de ensamble y a la formación de celdas de trabajo con operaciones que nunca antes se habían reunido. El ejemplo más conocido de este tipo de ordenamiento es la línea en U.



La magia del ordenamiento de línea en U no radica en la forma de U, sino en el hecho de que los operadores se sitúan físicamente juntos: lado a lado, espalda contra espalda. La cercanía entre unos y otros no es tanta como para que se irriten o se obstaculicen, pero sí están físicamente cerca, sin barreras entre ellos. Todo el trabajo que ha de cumplirse en esta línea o celda se encuentra disponible en un área central delimitada. De esta manera, el número de operadores que se necesitan para cumplir ese trabajo es flexible.

En cada periodo de producción se puede formular de nuevo la pregunta ¿cuántos operadores hay que asignar a esta área central delimitada a fin de obtener la producción necesaria? En esta línea, si en determinado mes se necesita la producción equivalente de seis operadores y el mes siguiente sólo se necesita el volumen de tres operadores debido al cambio en la demanda, entonces se pueden asignar tres personas a la misma línea para que hagan el trabajo, porque todo está disponible en un área central. La idea es que cada persona en la celda tenga la oportunidad de alcanzar el máximo de trabajo posible.

En una línea recta, es difícil repartir entre tres operadores el trabajo de seis. Al trabajar éstos apenas lado a lado, la única opción es que el operador 1 cumpla el trabajo de los operadores 1 y 2, en cuyo caso regresaría con las manos vacías a comenzar el siguiente ciclo, y esto es ineficiente. Si el ordenamiento es tal que los operadores también puedan colocarse espalda contra espalda, se abre una opción mejor. El operador puede cumplir la operación 1 y luego dar media vuelta y cumplir la operación 6.



Muy pocas personas buscan alternativas fuera de los textos tradicionales de ingeniería, y no se dan cuenta de las ventajas del trabajo espalda contra espalda. Si una operación no ocupa toda la carga de trabajo de un individuo, lo primero que se piensa es que pase a la operación anterior o a la siguiente.

En una línea en U, el operador no está limitado a la operación anterior o a la siguiente. Su movilidad de 360 grados le permite asumir la totalidad o una parte de cualquier tarea que esté a su alcance dentro del círculo completo.

Las líneas pueden fabricar piezas similares o pueden ser totalmente disociadas. A menudo se juntan labores o líneas disímiles con el fin de agrupar a los operadores de una manera flexible. Si hay una sola persona encargada de operar una celda de trabajo, esto no da mayor flexibilidad para aumentar o disminuir la producción en incrementos pequeños, digamos del 20%. Las únicas opciones son agregar otro operador - lo que aumenta el volumen de producción al 100% - o apagar la máquina - lo que disminuye el volumen en igual porcentaje -. Para tener flexibilidad es necesario que el equipo de trabajo cuente con cinco o seis personas, aunque esto signifique agrupar los trabajos artificialmente a fin de formar cuadrillas más grandes.

II.6. SISTEMA DE JALAR (KANBAN):

En el mundo de *Justo a Tiempo* perfecto, las familias de productos se fabricarían en celdas de maquinaria y pasarían de una operación a otra. En la práctica esto todavía no es posible en muchos casos, y se tiene que seguir fabricando por lotes. En tales casos, las operaciones coincidentes no funcionan y se tiene que optar por la siguiente alternativa: operaciones encadenadas dentro de un sistema de jalar.

Un sistema de jalar es una manera de conducir el proceso de fabricación en tal forma que cada operación, comenzando desde el área de recibo y remontándose hasta el comienzo del proceso, va jalando el producto necesario de la operación solamente a medida que lo necesite. Esto contrasta con el ciclo industrial tradicional que fabrica un producto y lo empuja hacia la siguiente operación aunque ésta no esté lista para recibirlo.

Toyota le puso a esta técnica el nombre de *Kanban*, y durante algún tiempo *Kanban* fue sinónimo de *Justo a Tiempo*. *Kanban* es una palabra japonesa, uno de cuyos significados es *tarjeta*.

Un sistema de *empujar* comienza con un programa de ensamble o un calendario de órdenes que se introduce en la computadora. Entonces, el sistema *fraccciona* el programa *hacia atrás* al siguiente nivel en el proceso de fabricación, y lo ajusta según el tiempo de producción a fin de informarles a quienes fabrican los subensambles qué partes se necesitan y en qué momento.

A lo largo de todo este proceso se genera papeleo para decirle al personal qué debe fabricar y para qué fechas. Los programas o los pedidos al taller se envían a la planta, y las órdenes de compra van a los proveedores.

Ahora se empieza a *empujar*. Cada operación en la cadena hace su propia parte y pasa el trabajo (*empuja*) a la siguiente operación dentro de determinado plazo. Esta operación sabe que le llegará el trabajo, hace su parte y lo pasa a la siguiente dentro del respectivo plazo. Se espera que todas estas cosas que se van empujando lleguen al mismo tiempo en determinada fecha, para que el ensamble o producto se efectúen de acuerdo con el programa.

Una semana después se vuelve al computador para ver hasta qué punto todo esto se cumplió de acuerdo con las fechas programadas, qué cambios hubo y qué cosas habrá que reprogramar o planear de nuevo como resultado de lo que no sucedió a tiempo. Luego se genera papeleo para instaurar dichos cambios y el proceso comienza de nuevo. Esto, sencillamente, es un sistema de *empujar*.

En su viaje a los Estados Unidos para estudiar los sistemas fabriles norteamericanos, los japoneses visitaron algunos supermercados. Se dieron cuenta de que el supermercado funciona de manera muy distinta de la fábrica, y de estas observaciones del supermercado y su operación, los japoneses aprendieron algo que luego adaptaron a sus operaciones fabriles.

* La denominación sistema de *empujar* es la manera como los japoneses conocen a la Planeación de Requerimientos de Materiales (MRP) y al Plan Maestro de Producción (MPS), mismos que se describen en el capítulo VI.

En un supermercado, quien determina lo que va a suceder es el consumidor. Los clientes llegan al supermercado sabiendo que en todo momento encontrarán en los estantes pequeñas cantidades de los artículos que necesiten. Como confían en que siempre habrá lo que necesiten, les basta tomar una pequeña cantidad y se van con su compra.

Los clientes saben que al regresar dos o tres días más tarde, el supermercado habrá repuesto los artículos comprados y que nuevamente encontrarán en los estantes pequeñas cantidades de cada cosa que necesiten. No sienten, pues, la necesidad de acumular, de llevarse la cantidad suficiente para un año.

Un empleado del supermercado pasa con regularidad a ver qué se han llevado los clientes. Se repone exactamente la misma cantidad que se ha quitado de cada estante. En el supermercado no hay papeleo; no hay órdenes de compra o de entrega que le indiquen al empleado qué artículos debe colocar sobre los estantes. En realidad, al retirar los artículos, los clientes mismos le han dicho al empleado lo que éste debe colocar allí.

Este es un sistema de jalar, pues el cliente es quien ha determinado lo que va a suceder enseguida. El cliente es quien va jalando el sistema al comunicarle al negocio una demanda específica.

Los japoneses tomaron el concepto y lo convirtieron en algo que pudieran utilizar para controlar las operaciones en la planta. Crearon dos tipos de señales, o *Kanban*. Suponiendo que el cliente en este caso es el departamento de ensamble, la primera señal constituiría una autorización - dinero, por así decirlo - para que el departamento de ensamble acuda a su supermercado de materiales - subensambles, componentes, materias primas - y tome un recipiente de cada cosa que necesite. Estos recipientes son muy pequeños, con la capacidad para una cantidad medida (generalmente la cantidad necesaria para una hora o menos). En Toyota, todo recipiente que contenga más de la décima parte de la cantidad necesaria para un día requiere aprobación de la gerencia.

Dentro de cada recipiente se encuentra el segundo tipo de *Kanban*: una autorización de producción. Al retirarse un recipiente del "supermercado" - y no antes - esta autorización de producción retrocede a la operación proveedora, trátese de otro departamento o de un proveedor, y le dice: esta señal es su autorización para producir otro recipiente de piezas. Ni más, ni menos. Tiene determinado plazo para hacerlo.

Teóricamente, la única hoja de papel que se utiliza en el proceso - fuera de las tarjetas Kanban en sí mismas - es el programa maestro de ensamble para el departamento de producción.

Considerando que todo el proceso funciona con una sola hoja de papel, es necesario que dicho programa sea muy, muy coordinado.

Debe ser claro que se precisa nivelación de la carga como base apropiada para el buen funcionamiento del sistema Kanban. Cada cliente le dice a cada proveedor lo que debe hacer cada hora. El proceso funciona como los eslabones de una cadena. Para que la cadena no se rompa, la producción tiene que ser siempre continua y regular. Si un cliente llegara y se llevara algún artículo en cantidad suficiente para un año, el sistema entero quedaría desincronizado.

Este sistema ofrece muchísima flexibilidad. Supongamos que un cliente, o que el mercado en general, necesita una combinación diferente: más piezas A y menos B. (Puede tratarse de un cambio en el mercado actual o proyectado).

Para efectuar este cambio en un sistema de jalar, el único papel que requiere modificación es el programa maestro de ensamble. Cuando el ensamble final ha terminado con las piezas A para la primera hora, la línea regresa al supermercado, no a tomar la cantidad necesaria de B para una hora sino a tomar lo que necesita de A para una hora. La línea envía más señales A por la cadena con destino a subensamble. Subensamble fabrica más piezas A y envía por la cadena más señales para recibir componentes de A.

No se necesita buscar todas las órdenes de entrega, porque no las hay. No se necesita alterar las prioridades porque nunca las hubo. Por tratarse de un sistema de jalar, cada operación alimentadora espera hasta saber, hora por hora, qué necesita su cliente.

¿CUANDO SE NECESITA UN SISTEMA KANBAN?:

En el mundo real hay muchas áreas en las cuales es imposible resolver todos los problemas y llegar a la producción absoluta de un artículo cada vez.

En tales casos la planta se ve obligada a seguir produciendo o moviendo lotes y la señal Kanban se emplea como concesión útil, mientras se encuentran soluciones definitivas. Algunas circunstancias que hacen necesarias las señales Kanban son las siguientes:

1. Cuando el ensamble final se efectúa en una edificación y el subensamble en otra. Desde el punto de vista físico, no resulta práctico transportar productos uno a uno cada vez a esas distancias.
2. Cuando una operación alimentadora tiene tiempos de preparación más largos para efectuar un cambio que el departamento usuario. No es posible lograr el flujo de un artículo cada vez, cuando hay grandes discrepancias en el tiempo necesario para modificar las máquinas. La operación que alimenta debe ser más veloz que el departamento usuario a fin de adelantarse y acumular el tiempo necesario para sus cambios.
3. Cuando una empresa quisiera montar varias celdas de trabajo pero tiene una sola máquina disponible para cierta operación incluida en cada celda de trabajo. Dicha máquina deberá situarse a un lado y enlazarse con las celdas de trabajo por medio de señales Kanban para que las distintas celdas de trabajo puedan indicarle qué debe fabricar y cuándo. Con este método, la máquina parece ser parte integral de cada celda de trabajo, pues envía con frecuencia pequeños lotes a cada una de ellas.
4. Cuando una empresa no se atreva a poner una máquina con dificultades en una celda de trabajo debido a problemas de mantenimiento crónicos que paralizarían toda la celda. Mientras no se haya resuelto el problema de mantenimiento, la máquina deberá andar sola a su propio ritmo y enlazarse con las demás operaciones por medio de señales Kanban.
5. Cuando existen problemas de calidad, cuellos de botella o problemas de capacidad que obstaculizan el flujo ágil de las operaciones.

Quando se necesita un sistema de señales Kanban, hay dos claves importantes para hacer que el sistema funcione. La clave principal es proveer al supermercado en forma rápida y frecuente. Para ello, es necesario reducir el tamaño de los lotes y esto exige reducir el tiempo de preparación.

II.7. ASOCIACION DE JUSTO A TIEMPO Y PLAN DE REQUERIMIENTOS DE MATERIALES:

El Plan de Requerimientos de Materiales (MRP) y la Planeación de Requerimientos de Capacidad (CRP) venían evolucionando en los Estados Unidos desde 1960. Mientras tanto, las empresas en el Japón impusieron un concepto más integrado de *Justo a Tiempo*. Lamentablemente, muchas personas han pensado que MRP y *Justo a Tiempo* son dos cosas que compiten y chocan entre sí. Lo que interesa es entender qué hay detrás de estas dos ideas y reconocer que una y otra son aportes valiosos a una estrategia de producción coherente, y que son conceptos y técnicas *enteramente compatibles* que bien pueden unificarse para lograr resultados todavía mayores que cuando se aplican aisladamente.

Mientras los japoneses reunían los conceptos de *Justo a Tiempo* en una estrategia de producción coherente, la sociedad APICS^{*} en los Estados Unidos reunió las herramientas desintegradas de su disciplina - punto de reorden, tamaño económico del lote, MRP, CRP y otras - dentro de una estrategia coherente de planeación, programación y control (MPS).

Pero antes del advenimiento de *Justo a Tiempo* en el escenario occidental, no había una estrategia de producción paralela para implementar los rápidos avances en las estrategias de mercadotecnia y comercialización. Como consecuencia, no había un marco de producción en el cual se pudiera colgar el MPS. El personal de recursos técnicos que se ha puesto a disposición del departamento de producción ha sido, con demasiada frecuencia, personal constituido por mecánicos y técnicos que ven las partes del todo pero que no comprenden el tema globalmente ni logran ajustar todas las técnicas y toda la mecánica dentro de un marco conceptual que conduzca a la operación más rentable. El conflicto entre el MRP y el *Kanban* es un ejemplo: los planeadores discuten sobre técnicas, dejando de lado el proceso de manufactura, y no captan cuándo está indicado lo uno o lo otro.

Hay quienes sostienen que *Justo a Tiempo* debe suplantar al MPS. Sin embargo, el MPS no debe desecharse sino aprovecharse más inteligentemente en relación con *Justo a Tiempo*. Gran parte del MPS se puede *simplificar* desde su concepción original en los talleres de fabricación por pedidos, a fin de amoldarla al ambiente *Justo a Tiempo*.

* Para mayor información sobre la sociedad APICS, refiérase al capítulo VI.

El MPS representa la estrategia de planeación y programación más completa que se haya desarrollado hasta la fecha, y es un complemento necesario para la implantación de una estrategia de producción. Además, muchas funciones de MPS se necesitan como puentes hacia el ambiente *Justo a Tiempo*.

En los conceptos de MPS tradicionales hay tres niveles de programación:

- *MPS*. Cantidad y fecha para terminar los productos finales.
- *MRP*. Programación de fechas de inicio y terminación de componentes y materias primas que dependen del MPS.
- *Control en la planta*. Programación de las operaciones que se le hacen a un componente entre las fechas de inicio y terminación del MRP; también se le denomina secuencia por prioridades.

Ahora bien, *Justo a Tiempo* hace innecesario ejercer control en la planta, ya que las piezas van del inicio al final en menos de un día. La programación maestra no sólo sigue siendo necesaria en *Justo a Tiempo* sino que se hace más refinada. MRP no desaparece pero sí se hace cada vez más sencillo.

En la producción *Justo a Tiempo* se tiene un programa dedicado a:

- *Eliminar el saldo disponible*, pasando los componentes terminados directamente al siguiente usuario sin que entren ni salgan del almacén.
- *Eliminar la determinación de tamaños de lotes*, reduciendo el tiempo de preparación hasta el punto en que un lote formado por una unidad no genere cargas por concepto de tiempo de preparación.
- *Eliminar los inventarios de seguridad*, al quitar todas las causas que los hacían necesarios.
- *Reducir el tiempo de producción*, acelerando el paso del producto por la planta y eliminando las causas que generan tiempo de traslado y de espera.
- *Emparejar los requerimientos brutos*, produciendo solamente lo que se necesita.

- Eliminar cualquier diferencia entre los requerimientos y los pedidos, al eliminar los tamaños de lotes y sincronizar la producción con el MPS.

Al reducirse sustancialmente el tiempo de producción, MRP es demasiado lento para programar, y entran en juego las operaciones encadenadas. Sin embargo, MRP sigue siendo necesario porque se necesitarán años para alcanzar una eficiencia total - Toyota demoró quince años - y en ese tiempo se necesitará una buena metodología de MPS.

En donde *Justo a Tiempo* puede aplicarse completamente, el MRP se simplifica más y sirve de instrumento de transición hasta que su función de programación desaparezca al hacerse factible el *eslabonamiento de operaciones*. Pero incluso con una producción *Justo a Tiempo* completa siempre será necesario generar requerimientos brutos, fraccionando el MPS mediante una lista de materiales, con el fin de planear las compras de éstos y como aporte al CRP.

Además, MRP se diseñó para los talleres de fabricación por pedidos, mientras que *Justo a Tiempo* se generó en un ambiente de fabricación continua. Algunas instalaciones o productos que tienen características de los talleres de fabricación por pedidos quizá nunca resulten adecuados para la aplicación plena de *Justo a Tiempo*.

Todos los paquetes de manufactura de MRP precisarán modificaciones. El sistema tendrá que considerar días en su análisis, y tendrá que calcular los tiempos de producción en otra forma. Tendrá que trabajar sin órdenes de producción y sin depósitos como puntos de control. También tendrá que distinguir entre los productos *Justo a Tiempo* y los que todavía no lo son.

Cuando MPS y *Justo a Tiempo* se pongan en práctica conjuntamente, la programación maestra será más refinada. El MRP se simplificará. Además el control en la planta será innecesario. Ni siquiera un sistema *Justo a Tiempo* perfecto hará nula la utilidad del MRP.

II.8. CALIDAD EN LA FUENTE:

Una de las áreas de desperdicio en el ambiente de manufactura proviene de mala calidad. *Justo a Tiempo* tiene como uno de sus objetivos alcanzar *Cero Defectos*.

Esto involucra un sistema conocido como *Control Total de la Calidad*, que reside en técnicas como control estadístico de procesos, mantenimiento preventivo, buen manejo interno, diseños accesibles y relaciones constructivas con los departamentos de ventas y programas.

En un ambiente *Justo a Tiempo* se necesita *calidad en la fuente*, haciendo hincapié en la necesidad de *hacer las cosas bien la primera vez*. Hacerlo bien la primera vez no es la manera tradicional de buscar calidad.

La manera tradicional - conocida como *evaluación a posteriori* - consiste en producir un artículo, luego inspeccionarlo, separar los buenos de los malos con la esperanza de que haya suficientes buenos para satisfacer al cliente, y esperar que los malos se puedan salvar. En esta modalidad tradicional, la fuente de calidad estaría en la mesa de inspección.

En la producción *Justo a Tiempo*, la calidad que se exige es *calidad en la fuente*, o *prevención a priori*. Esta hace hincapié en la calidad allí donde está el operario - que es responsable por ella - ante la máquina y en el proceso; calidad donde está el operario del proveedor, la máquina del proveedor o el proceso del proveedor.

Para atacar los problemas de calidad, es importante estar en condiciones de *identificar sus orígenes*. Los japoneses creen que los problemas de calidad tienen una proporción de 30/30/40. Esto es, 30% son causados por la manufactura, 30% por los proveedores, y el 40% restante por errores de diseño.

En el *Control Total de la Calidad* el operador participa en muy alto grado. El debe ser el primero que advierta los problemas. Debe hacerse responsable de porciones cada vez mayores del mantenimiento preventivo de rutina, como limpieza y lubricación. Debe participar en el proceso de toma de decisiones al seleccionar equipos nuevos o de reemplazo.

El concepto de *Cero Defectos* es el corazón del proceso japonés. El objetivo consiste en fabricar todas las piezas idénticas, a diferencia del objetivo tradicional de hacer cada pieza de acuerdo con las especificaciones.

* El control de calidad estadístico se describe en el capítulo IV.

Si se trata de fabricar ejes de 1.000 pulgadas de diámetro con una tolerancia de más o menos 0.010 pulgadas, un fabricante tradicional se sentirá satisfecho si todos sus ejes salen entre 0.990 y 1.010 pulgadas, es decir dentro de las especificaciones. Se califica como bien hecho un trabajo si el 100% de sus productos caen dentro de esos límites.

Por su parte, el objetivo japonés consiste en fabricar cada eje precisamente de 1.000 pulgadas, y después tratar de alcanzar el objetivo de 1.0000 pulgadas.

El *mejoramiento continuo de la calidad* es una de las estrategias de producción más difíciles de implantar. El mejoramiento continuo de los procesos de trabajo implica que cualquier persona siempre esté en busca de la perfección aunque nunca la alcance. La meta del mejoramiento continuo va más allá del simple cumplimiento de las tolerancias de producción y busca *eliminar totalmente la variabilidad*. Esto, a su vez, permite generar diseños más cercanos al ideal.

El *control de calidad estadístico* del operador contribuye de manera importante al objetivo de *Cero Defectos*. Básicamente, el operador de piso se hace responsable de graficar, establecer los límites de control, analizar y reaccionar ante cualquier problema que surja. La *delegación de esta responsabilidad ha representado un reto que muchos operadores han aceptado con entusiasmo*. Ahora, en vez de pelearse con sus supervisores o sus compañeros, se pelean contra el proceso y hacen todo lo posible por mejorarlo. Además la responsabilidad del operario permite determinar más fácilmente dónde hay problemas de producción y necesidades de capacitación.

II.9. COMPRAS JUSTO A TIEMPO:

Las *compras Justo a Tiempo* difieren de las compras tradicionales tanto como la fabricación *Justo a Tiempo* difiere de la fabricación tradicional. Y la meta buscada es exactamente la misma: *eliminar desperdicios*.

Una vez que la empresa cuenta con una fuente de suministro y un precio acordado, suceden varias cosas en el proceso de compra que no agregan valor al producto.

Una orden de compra no agrega valor al producto. Una enmienda a la orden de compra no agrega valor. Las remisiones y los informes de recibo y las facturas no agregan valor. Sacar algo de un camión y colocarlo en un muelle central de recepción no agrega valor, como tampoco el traslado a una zona de espera. La inspección no agrega valor, como tampoco su colocación en un depósito. Los recuentos no agregan valor. Sacar el artículo de un recipiente grande y colocarlo en un pequeño no agrega valor. Los costos de transporte no agregan valor.

Ninguna de estas cosas agrega valor y, sin embargo, forman parte de los mecanismos de control entre comprador y vendedor. El objeto de las *compras Justo a Tiempo* es eliminar estos desperdicios.

La gran pregunta es ¿cómo ponerlo en práctica? Hay un sólo punto de partida: la calidad.

La relación tradicional entre comprador y proveedor ha sido antagónica. La empresa pide tres cotizaciones y, excepto si puede justificar muy bien otra forma de proceder, tiene que elegir la más baja. Quiere asegurarse de que los proveedores se cuiden, porque dentro de seis meses la empresa va a salir nuevamente en busca de cotizaciones, y si el proveedor actual no hace el ofrecimiento más bajo, muy posiblemente perderá el negocio durante los seis próximos meses.

Y la empresa quiere conocer los costos del proveedor, pues salta a la vista que éste está recibiendo utilidades desmesuradas. La empresa quisiera, mediante negociación, hacer desaparecer una parte de aquellas utilidades desmesuradas convirtiéndolas en reducción o eliminación de costos.

La relación, empero, es bilateral. Los proveedores están pensando más o menos lo mismo: es posible que en los próximos seis meses ese cliente elija a otro proveedor. No vale la pena entonces invertir mucho en ese negocio ni correr riesgos. Los proveedores quieren asegurar una buena utilidad ahora porque dentro de seis meses quizá no haya nada.

En 1957, Ernest Anderson ideó el concepto de contratación de sistemas, modalidad que era, y es, muy semejante a las *compras Justo a Tiempo*.

Para implementar las compras *Justo a Tiempo* es preciso eliminar la necesidad de hacer inspecciones de llegada. Ahora bien, la inspección de llegada no se elimina por el hecho de redactar un memorándum que diga "a partir de mañana no habrá más inspecciones". Lograr que la inspección resulte innecesaria es una tarea laboriosa. Hay que solucionar problemas. Hay que dedicar gente a trabajar con el personal del proveedor, para asegurar que entiendan el proceso y que resuelvan los problemas de producción. El resultado mínimo de todo aquello es que la empresa quede satisfecha con los procedimientos de inspección del proveedor, de manera que no tenga que repetirlos.

Un resultado mucho mejor es que los proveedores comprendan su propio proceso y que lo controlen de tal manera que hagan las cosas bien la primera vez y replacen la inspección con vigilancia.

La relación que se busca debe ser *duradera y mutuamente benéfica* con proveedores mejores pero en menor número. Esta relación lleva consigo cuatro elementos:

- Largo plazo
- Mutuo beneficio
- Menos proveedores
- Mejores proveedores

Para eliminar el desperdicio de una inspección de llegada, la empresa deberá invertir mucho esfuerzo, recursos y dinero en la solución de problemas y formar unas bases de *confianza mutua* con los proveedores. Esto sencillamente no se puede hacer con miles de proveedores, ni se puede hacer si los proveedores varían cada seis meses cuando la empresa vuelve a pedir cotizaciones. Solamente es posible si la compañía tiene uno o dos proveedores de cada artículo. Es *preciso forjar relaciones que sean de largo plazo, de mutuo beneficio, y con menos pero mejores proveedores.*

De *largo plazo*, porque se necesita mucho tiempo para resolver los problemas. De *mutuo beneficio*, porque es la única manera de que sean duraderas. *Menos proveedores*, porque ninguna empresa dispone de recursos para hacer tal cosa con muchos proveedores. *Mejores proveedores*, porque todo el proceso se basa en la calidad.

II.10. ESTRATEGIAS PARA LA COMERCIALIZACION:

Como ya hemos visto, la filosofía *Justo a Tiempo* logra excelentes mejoras en calidad, productividad y relaciones con sus empleados. Pero esto no es suficiente. Hay que ser competitivas. La empresa debe convertirse en un comercializador experimentado que debe mantenerse a la altura de las condiciones cambiantes del mercado.

En el mundo competitivo de hoy, la máxima de Henry Ford "puede pedir su auto en el color que guste siempre y cuando sea negro", está muerta. Hoy en día hace falta una increíble variedad de opciones para los clientes, quienes son los que jalan el negocio.

Este es un desafío en comercialización. Es la única forma de ser competitiva. Hay que escuchar a los clientes y darles lo que pidan. Además de hablar personalmente con los clientes, se deben realizar extensas investigaciones formales de mercado y actuar en base a éstos resultados.

Para vencer a la competencia hace falta desarrollar productos y servicios con individualidad y algo único, se trate de calidad, entrega, patentes, integridad o cualquier otra característica comercializable.

Solo las empresas con gran cantidad de recursos pueden competir en precio (las guerras de precios son muy costosas). Las compañías deben esforzarse por conseguir una ventaja competitiva basada en el valor y no en el precio.

La empresa debe tratar a sus distribuidores como auténticos socios; desarrollando programas, financiándolos y ayudándolos a poner estos programas en marcha.

Implementar *Justo a Tiempo*, depende de la gente deseosa de un cambio. La comercialización no es diferente. El departamento de mercadotecnia tiene que creer realmente de que *Justo a Tiempo* beneficia a la empresa y al cliente. Aún cuando muchas compañías implantan *Justo a Tiempo* como una manera de reducir costos, el único que realmente se beneficia es el consumidor.

Para que las empresas sean competitivas, el departamento de mercadotecnia debe entender como la filosofía *Justo a Tiempo* es un punto de ventas.

Primero, porque la calidad tiene que ser cada vez mejor para producir cantidades de orden pequeñas entonces el consumidor recibirá un producto de buena calidad. Segundo, porque tiempos de manufactura pequeños, ofrecen entregas más flexibles y rápidas. Cuando un consumidor quiere algo, a menudo lo quiere tan rápido como sea posible. Produciendo artículos más seguidos y en pequeñas cantidades una empresa puede adecuarse a la demanda cambiante. Tercero, eliminando desperdicios y teniendo inventarios pequeños, a largo plazo los costos son más bajos.

II.11. VENTAS JUSTO A TIEMPO:

Vender la filosofía *Justo a Tiempo* al distribuidor es trabajar duro con él para establecer sus necesidades así como empezar a educarlo en el proceso *Justo a Tiempo*.

Un departamento de comercialización requiere asegurarse que el distribuidor (o cliente final) entiende por qué las cantidades de orden pequeñas benefician a todos; necesitan explicarle los programas pilotos que tienen en la planta; esto es, compartiendo entusiastamente la información y vendiéndole las ventajas derivadas de producir *Justo a Tiempo*.

Si el distribuidor (o consumidor) estaba ordenando una vez al mes, la empresa les hace un favor haciéndoles saber las ventajas de entregas semanales o diarias, especialmente la disminución de costos de mantenimiento de inventarios e inspección. Implementar ventas *Justo a Tiempo* puede hacerse mediante el sistema *Kanban*.

II.12. IMPLANTACION DE UN SISTEMA JUSTO A TIEMPO:

Las empresas con mejores resultados son las que procuran imponer *Justo a Tiempo* para responder a los desafíos externos: ganar o conservar una participación en el mercado, mejorar la calidad y reducir el precio. Estas compañías buscan que su fabricación sea un arma estratégica en el mercado. Otras empresas piensan en *Justo a Tiempo* como una herramienta para reducir costos, agilizar el proceso fabril y, por consiguiente, aumentar sus márgenes de utilidad. Estas logran algún éxito en la implantación del sistema *Justo a Tiempo*, pero notoriamente menor que las firmas que buscan un arma de fabricación verdadera.

La empresa que considera *Justo a Tiempo* como un medio de hacer la fabricación un arma estratégica tiene más éxito que las otras porque de este modo genera un ambiente más positivo para todos los que participan en el proceso.

Si el objetivo es lograr una ventaja en el mercado - en realidad, aumentar el mercado al convertir la fabricación en un arma estratégica - los beneficios del sistema *Justo a Tiempo* son más obvios y el clima más propicio para hacerlos realidad. Si las motivaciones son reducir el inventario y disminuir los costos, el personal suele ver en *Justo a Tiempo* una amenaza para su cargo y para su posición en la empresa.

La implantación de un sistema *Justo a Tiempo* debe hacerse en forma específica y estructurada, en tres fases y seis pasos; este proceso comienza al llegar a una decisión sobre por qué se adopta el sistema. Esta fase, que tiene que ver con la importantísima pregunta del por qué, se denomina *fase de preparación*.

De allí, el proceso pasa a definir cómo se va a estructurar y a administrar su implementación. Esta fase se denomina *fase de organización*.

Por último, el proceso sirve de guía para la implantación paso por paso mediante la realización de proyectos piloto; más tarde por la implantación proyecto por proyecto, para la educación, y por último, para la modificación de sistemas y normas de la empresa - llevar a la compañía al punto en que la filosofía *Justo a Tiempo* sea un modo de vida permanente - esta fase se conoce como *fase de implantación e institucionalización*.

FASE DE PREPARACION:

En esta primera fase de implantación del sistema *Justo a Tiempo*, la empresa tiene que señalar la razón específica por la cual se embarca en este proceso. Esto se logra formulando una serie de imágenes de lo que podría ser la empresa si impusiera el ambiente *Justo a Tiempo*, para luego ver cómo esas imágenes se pueden incorporar dentro de una estrategia empresarial encaminada a aventajar a la competencia en el mercado, y cómo la visión y la estrategia pueden extenderse por toda la organización.

En esta fase hay dos pasos. El primero es de *concientización*; el segundo es de *estrategia*. En el paso de *concientización*, la dirección tiene que formarse una idea detallada y clara de *Justo a Tiempo* a fin de generar tres visiones del futuro relacionadas entre sí:

- Una visión del proceso físico
- Una visión del clima organizacional
- Una visión del mercado

FASE DE ORGANIZACION:

Una vez formuladas la visión y la estrategia, la segunda fase - *organizacional* - puede comenzar a tomar forma. En la organización entran en juego cuatro protagonistas clave: el comité directivo, un facilitador, los grupos encargados de proyectos y los jefes de grupos de proyectos.

Es importante establecer un *comité directivo*, encabezado por un alto ejecutivo. Si éste no es el máximo ejecutivo de la empresa, deberá dejar muy en claro que cuenta con el *apoyo del máximo ejecutivo*. A menudo el comité está constituido por el gerente de planta y por quienes depende directamente de él.

Como su nombre lo indica, el *comité directivo* debe *dirigir*. Debe convertir los temas de la visión en prioridades de más corto plazo; debe garantizar que se formulen y se ejecuten todos. El grupo debe fijar un plan para los 12 a 18 meses siguientes, que guíe a la organización hacia las oportunidades indicadas en la evaluación *Justo a Tiempo*.

El *facilitador* debe ser una persona accesible y de confianza, cuya función principal sea garantizar que el esfuerzo para implantar *Justo a Tiempo* siga su marcha y que se alcancen tanto los objetivos a corto como a largo plazo. El *facilitador* debe ser facultado por la dirección para garantizar que el plan despegue sobre bases sólidas y positivas.

Es preciso formar *grupos de proyecto* que se encarguen de cada *proyecto piloto*, así como de su *implementación*. Cada grupo tendrá una carta constitutiva específica que defina su tarea dentro de la implantación del sistema *Justo a Tiempo*.

Los grupos deben estar compuestos por miembros de la administración superior e intermedia, así como por empleados de la planta, quienes pondrán en práctica los cambios. Cada grupo debe tener una meta específica y de límites definidos: cambiar una técnica o resolver un problema.

Los *jefes de grupos* de proyectos tendrán que servir tanto de *administradores* del grupo como de *enlaces* con el comité directivo. Aunque los grupos generalmente se reunirán sólo una vez a la semana durante un par de horas, el jefe deberá tener disponibles unas seis horas adicionales para trabajar por el grupo, de tal manera que su próxima reunión sea productiva y que el proceso siga su marcha.

FASE DE IMPLANTACION E INSTITUCIONALIZACION:

Las dos primeras fases del proceso *Justo a Tiempo* han de ser impulsadas por el más alto de los funcionarios ejecutivos. La responsabilidad no se puede delegar. Pero en esta tercera fase, las cosas son diferentes. A medida que el comité directivo se afirma y cumple su misión, la fase restante de la implantación del sistema tomará forma. En esta fase final, el papel de la dirección se modifica. Aquí les corresponde *guiar* y *no dirigir*, *facilitar* y *no impulsar*, a medida que el personal de toda la organización va haciendo suyo el esfuerzo.

La tercera fase comprende tres pasos:

- *Proyectos piloto* e implantación proyecto por proyecto.
- *Educación*: ampliación de los conocimientos acerca del sistema *Justo a Tiempo* y aprovechamiento de los resultados obtenidos mediante proyectos piloto.
- *Institucionalización*.

La implantación proyecto por proyecto suele comenzar con los esfuerzos por establecer ciertas técnicas *Justo a Tiempo*. La reducción del tiempo de preparación, las celdas de maquinaria y los sistemas de jalar son oportunidades típicas para proyectos piloto porque, según la situación, permiten alcanzar resultados notorios en un lapso relativamente corto acudiendo al uso de técnicas nuevas.

Mientras se desarrollan los proyectos piloto, debe cumplirse una tarea de capacitación con el propósito de que los empleados adquieran las habilidades necesarias para llevar a cabo la implantación del sistema.

II.13. COSTOS INVOLUCRADOS EN LA IMPLANTACION DE UN SISTEMA JUSTO A TIEMPO:

Un sistema *Justo a Tiempo* no es complicado, ni costoso. Pero exige mucha paciencia y un compromiso total por parte de la dirección de la compañía, porque por muy bien que se implante, todos los problemas ocultos bajo la alfombra de los inventarios deberán identificarse y resolverse, cosa que puede resultar desesperante. Y como en un principio *Justo a Tiempo* parece producir problemas y no resolverlos, sus beneficios pueden no surgir a la luz de inmediato.

Imaginemos el reacomodo del departamento de maquinado para mejorar el proceso de flujo. Puede no parecer muy costo-eficiente gastar fuertes sumas de dinero para mover algunas máquinas unos cuantos metros, a sabiendas que su recuperación puede tomar 10 años. Pero aumenta la calidad, la productividad y promueve el ambiente para un mejoramiento continuo.

Justo a Tiempo no requiere grandes y sofisticados equipos de cómputo. La automatización de un proceso que de por sí es ineficiente sólo dará paso a un proceso automatizado ineficiente. Por ejemplo, un proceso eficiente como el de la planta de motocicletas Honda en Marysville, Ohio monta 50,000 motocicletas de diferentes modelos al año *sin una sola computadora*.

El principal beneficio de un sistema *Justo a Tiempo* es el aumento en las vueltas de inventario. Por *vueltas de inventario* se entiende el número de veces que, en un año, una compañía consume todas sus materias primas y sus artículos en proceso. Entre más vueltas se le dé al inventario, mejor, porque en cualquier momento una compañía tendrá la menor cantidad posible de inventario disponible y liberará recursos para inversión (recordemos que el inventario es un activo). Esto además de bajar el costo tiene un efecto positivo sobre la calidad.

III. MANUFACTURA INTEGRADA POR COMPUTADORA:

III.1. OBJETIVO Y ALCANCE DEL SISTEMA:

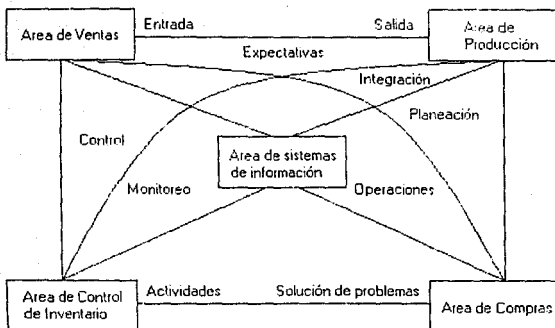
Uno de los tópicos más populares en el mundo de los negocios es la visión de una planta totalmente automatizada. No existe ninguna duda de que eventualmente todas las fábricas estarán más automatizadas que ahora. Los pasos que ya se han dado en esa dirección incluyen instrumentos de control numérico y robótica. Sin embargo, estos son sólo pequeñas partes de un sistema total el cual necesita ser un plan altamente integrado.

El concepto de *Manufactura Integrada por Computadora (CIM -Computer Integrated Manufacturing-)* surge en los años ochenta pero tiene tras de sí diversas experiencias en cuanto a metodologías orientadas a la productividad de las empresas, que van desde el Control de Calidad, la Planeación de Requerimientos de Materiales, la Planeación Maestra de la Producción o Justo a Tiempo.

Manufactura Integrada por Computadora es el nombre que recibe la automatización de una fábrica que hace uso de computadoras para la realización de las tareas asociadas con la producción.

CIM es una estructura de sistemas de informática que permite a las empresas industriales integrar sus procesos de manufactura a través de información.

Desde una visión de informática, las empresas son un sistema que a su vez se subdivide en subsistemas conocidos como departamentos, áreas funcionales y estaciones de trabajo. La figura a continuación muestra algunos de los subsistemas o áreas en una empresa de manufactura: Ventas, Producción, Compras y Control del Inventario contribuyen a los sistemas de información, y viceversa, coordinando los aspectos de la organización indicados dentro del cuadro mayor. Estas áreas funcionales operan independientemente. Los gerentes en los departamentos tienen la libertad de contratar personal y programar el trabajo. Pero al mismo tiempo, todos los subsistemas deben ajustarse entre sí de tal manera que cada una de las áreas se desempeñe según lo esperado.



Manufactura Integrada por Computadora es un subsistema del Sistema de Información Gerencial, (MIS -Management Information System-) y merece especial atención porque trata con materiales y su flujo, el gasto de energía y el proceso productivo, así como de la manipulación de números que representan intangibles.

El objetivo de un sistema de **Manufactura Integrada por Computadora** es proveer un acceso rápido a la información para la toma de decisiones. El software y el sistema CIM debe ser interactivo y *en-linea*. Esto quiere decir que la computadora debe comunicarse con la máquina y recibir respuestas en tiempo real. Obviamente el proceso por lotes no es la solución para una planta automatizada. El manejo de los datos y la retroalimentación deben ser equivalentes y sencillos para facilitar el rápido ensamble de los elementos que implementan un plan de proceso.

Existen algunas preguntas que deben ser examinadas en relación a la automatización total de la manufactura, la primera de ellas es ¿por qué automatizar?, la segunda ¿cuáles son los obstáculos para la automatización? y tercera ¿cuáles son los pasos que necesita la dirección de una empresa para implementar una operación que es esencialmente controlada por computadora?

La competencia es la razón más grande para modificar el sistema de manufactura tradicional. Las compañías japonesas han seguido un camino que resultó favorable al tener plantas totalmente automatizadas.

La segunda razón para automatizar es la productividad. No existe ninguna duda que las máquinas son más eficientes que el hombre.

Uno de los requerimientos para implementar *CIM* dentro de una empresa es que todo su personal tenga acceso a la información, no importando el lugar en que se encuentre dentro de la compañía (es decir, desde cualquier equipo o departamento). Evidentemente la misma información tendrá diversos usos. Por ejemplo, el dibujo de un producto será utilizado simultáneamente por un diseñador o un ingeniero (que deberá verlo como un dibujo esquemático), por un cliente (como parte de un catálogo), por una máquina herramienta (que lo leerá como un programa de control numérico), por un profesional de aseguramiento de calidad (como un conjunto de especificaciones), etc.

Lo que hace un sistema *CIM* es proveer un plan de proceso más rápido con menores recursos humanos. Por ser más consistente, los cambios pueden ser efectuados más rápidamente y el control completo de la producción es más eficiente; pues genera la velocidad necesaria para acelerar el proceso de manufactura y tiene el beneficio de reducir inventarios de partes y herramientas.

CIM permite a las empresas reestructurar rápidamente sus recursos de producción. Máquinas y herramientas se reajustarán automáticamente para realizar diferentes tareas o para producir otro producto. La orden de trabajo también será modificada. Todo esto puede ocurrir aún avisando con poca anticipación. El resultado final será una mayor eficiencia operativa, así como economías de escala hasta para corridas cortas de producción.

Cada sistema *CIM* está diseñado específicamente para la empresa a la cual sirve; su hardware, software así como su implementación puede tomar varios años e involucra fuertes inversiones en bienes de capital.

A diferencia de otras metodologías, *CIM* es una arquitectura flexible, que es capaz de adaptarse a los cambios que en el futuro vaya requiriendo la empresa que la adopte.

III.2. ARQUITECTURA DE UN SISTEMA CIM:

Un prototipo de *CIM* implementado para la industria de armamento de la Marina de los Estados Unidos tiene cuatro niveles de control:

- El control del proyecto o nivel de sistemas.
- El control de las celdas de maquinaria.
- El control de las estaciones de trabajo en la planta.
- El control de los instrumentos y equipo del piso de producción.

El control del sistema administra el flujo de datos a través del mismo. Cuando el controlador de celda indica que todos los materiales y herramientas están disponibles para una orden, ésta es liberada al piso, enviando la señal digitalizada al controlador de producción e inventarios. Estos datos se transmiten a la celda controladora de manufactura e ingeniería y ésta a su vez genera las listas de partes, herramientas y especificaciones.

El controlador de celda envía las órdenes de trabajo liberadas a través de las estaciones de trabajo por medio de una red de PC's instaladas en el piso. En el nivel de control de piso estas estaciones de trabajo monitorean y controlan el sistema flexible de manufactura, guiando tanto a las máquinas como a los operadores.

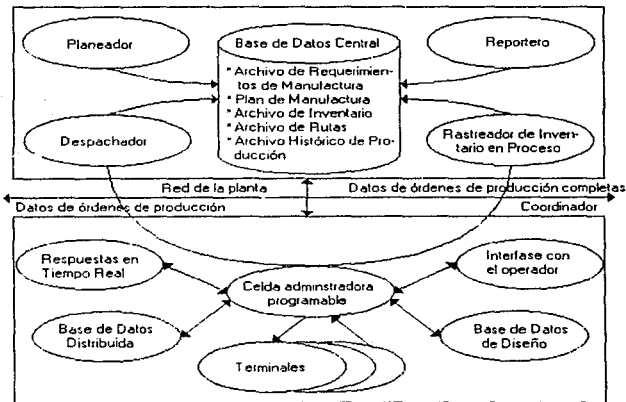
El equipo de cómputo en las celdas coordina a las máquinas herramientas. Estas estaciones de trabajo reportan regularmente el estatus de las órdenes al controlador. Este controlador proporciona el ambiente para integrar y controlar los instrumentos, el software y las comunicaciones.

El ambiente de programación gráfica en las celdas permite a los ingenieros que no son programadores contribuir al desarrollo de las estaciones de trabajo.

Debido a la naturaleza del software, existen menores necesidades para el detalle de procedimientos requeridos en diversos lenguajes de cómputo. Las librerías del software reducen significativamente la necesidad de programación. Muchas de las funciones de manufactura e ingeniería son realizadas en lo que puede ser descrito como el ambiente del próximo siglo. El sistema es capaz de manejarse virtualmente sin papeleo a través de prácticamente todas las funciones de manufactura.

Un ingeniero trabaja con el software para generar las rutas y los planes de proceso. Esto se hace en dos pasos: un plan de proceso macro y un plan de proceso micro. El macro plan consiste en las rutas y la preparación de máquinas. Un macro plan típico, es concluido en 45 minutos, comparado con casi un día completo de trabajo de planeación de un ingeniero. Por su parte el micro plan incluye la generación de rutas e instrucciones a nivel de control numérico, verificación de la disponibilidad de herramientas, diseños detallados, tiempos estándar para operaciones e instrucciones de preparación de piso para los técnicos, éstas incluyen instrucciones de inspección. Para varias partes, el plan completo, macro y micro, puede ser efectuado en ocho horas o menos.

CONTROL DE CELDAS DE TRABAJO Y SUBSISTEMAS DE CONTROL DE PISO



Un sistema experto de planeación de procesos ayuda a decidir cuál material se debe ordenar, cuál es la lista de partes, qué herramientas se requieren para equipar a las máquinas, y cómo cada parte es manufacturada en cada máquina. Los pasos manuales que un ingeniero efectúa para un plan de proceso, incluyen tanto la velocidad y la alimentación a la máquina y son por último generadas parcialmente en secuencia por el sistema experto, o por el planeador de procesos. Esta información se convierte a su vez en parte de una orden electrónica de trabajo al piso.

El sistema experto también genera un archivo de partes con una definición geométrica de la misma llamada archivo CAD*. Este archivo es enviado a un sistema de programación, donde un programador de control numérico desarrolla los datos y del programa de control numérico para las máquinas.

El programador de control numérico es una parte integral de este ciclo. Entonces, la mayoría del tiempo es usada en la generación del código de control numérico en vez de la planeación de procesos.

III.3. CONTROL DE CALIDAD:

En un ambiente CIM, el aseguramiento de calidad es aplicado al producto a través de software y hardware. La medición se realiza automáticamente dentro o fuera de la máquina, en la herramienta o en la pieza. Las correcciones son ingresadas inmediatamente al controlador del proceso. Aun los efectos de la temperatura en las piezas o componentes de la máquina pueden ser determinados rápidamente y corregidos.

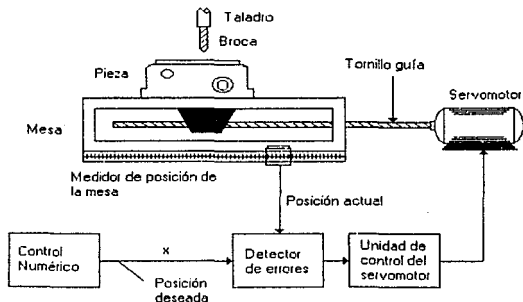
Consideremos el ejemplo de un taladro controlado por computadora. Un sistema de control involucra no solamente el motor hidráulico o de corriente directa conectado al tornillo guía, sino que además tiene un mecanismo sensor que mide la posición de la mesa y transmite dicha información a la computadora (o microprocesador) en forma analógica o digital.

* Una clase de sistema de información orientado a imitar las decisiones de un experto humano, se basa en el manejo de datos y el uso de la heurística (procedimientos de búsqueda que pasan inteligentemente de un punto de solución a otro, con el objetivo de mejorar el valor del criterio del modelo). Está compuesto por la base de conocimiento, máquina de inferencia, subsistema de adquisición de conocimiento y medio de explicación del proceso.

• Siglas de Computer Aided Design, Diseño Ayudado por Computadora.

Cuando la mesa recibe la orden de moverse 8.25 pulgadas a la derecha, el servomotor recibe esta instrucción y la compara con los datos de posición actual que obtiene del mecanismo sensor.

Si el mecanismo sensor reporta que la mesa está a 8.00 pulgadas, lo que obviamente es incorrecto, se enciende un motor que mueve la mesa en la dirección correcta. Cuando ésta alcanza tal posición y el error se reduce a cero, el motor se apaga y la mesa queda estable.



III.4. SISTEMAS DE INFORMACION GERENCIALES:

MIS es un sistema integrado que proporciona información con el objeto de apoyar la planeación, el control y las operaciones de una organización. Suministra información uniforme de manera oportuna.

MIS está organizado para que condense datos seleccionados del procesamiento de transacciones y del ambiente de la organización (competencia, leyes y economía) con el fin de desarrollar información útil en la administración. Implica personal, procedimientos, equipos, modelo y datos. Las consideraciones básicas generales de un **MIS** se amplían en la medida que examinamos las siguientes características básicas de un **MIS**: relación con los sistemas de transacción, apoyo a las decisiones estructuradas y los diferentes métodos para presentar la información.



La designación de un *administrador de la base de datos* es esencial para asegurarse que se satisfagan las necesidades de todos los usuarios, incluyendo a los programadores de sistemas y de aplicaciones así como a los usuarios no especializados en programación. Además, con el desarrollo y el mantenimiento de definiciones de datos así como esquemas y subesquemas lógicos, se logra un *control conveniente* para facilitar el empleo eficaz, a la vez que brinda protección contra cambios y modificaciones de cualquiera de las fuentes.

III.5. EQUIPO Y PROGRAMAS DE COMPUTO:

La implantación de sistemas *MIS* o *CIM*, no son fáciles. Requieren de planeación cuidadosa y coordinación precisa. Para tener éxito en esto, es indispensable tener una cabal comprensión de los procesos administrativos, e igualmente de los desafíos técnicos implícitos. Tanto *CIM*, como *MIS* son sistemas que se diseñan a la medida de la empresa que desea implementarlos. Hablar de hardware y software necesarios para su implementación es un tópico ocioso. Aunque algunas empresas especializadas en computación se dedican a comercializar aplicaciones para estos sistemas, la visión global del mismo es un proyecto único. Una empresa no puede implantar *CIM* por sí misma, requiere forzosamente del apoyo de consultores tanto de sistemas como de producción.

BIBLIOGRAFIA

- Del Río, B. Urbano Carlos, *DISEÑO Y APLICACION DE UN MODELO JUSTO A TIEMPO EN MEXICO*, Universidad Anáhuac, México, 1989.
- Goddard, Walter E., *JUST IN TIME, SURVIVING BY BREAKING TRADITION*, Oliver Wight Ltd. Publications Inc. Essex Junction, 1986.
- Harrington, Joseph, *COMPUTER INTEGRATED MANUFACTURING*, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 1985.
- Hay, Edward J., *JUSTO A TIEMPO, LA TECNICA JAPONESA QUE GENERA MAYOR VENTAJA COMPETITIVA*, Editorial Norma, Colombia, 1990.
- Hutzler, Heinrich, *VERSATILE CONTROL FOR HIGHLY COMPLEX MACHINE TOOLS*, Engineering & Automation, Siemens Magazine, Noviembre/Diciembre 1991.
- Institute of Industrial Engineers, *COMPUTERIZED WORK MEASUREMENT*, Industrial Engineering and Management Press, Atlanta, 1984.
- Ishikawa, Kaoru, *¿QUE ES EL CONTROL TOTAL DE CALIDAD? LA MODALIDAD JAPONESA*, Editorial Norma, Colombia, 1991.
- Mason, Frederick, *HOW THE NAVY ENVISIONS CIM*, American Machinist, The Magazine of Manufacturing Technology, A Penton Publication, Octubre 1991.
- Ohno, Taiichi, *TOYOTA PRODUCTION SYSTEM, BEYOND LARGE-SCALE PRODUCTION*, Productivity Press, Cambridge Massachusetts, 1988.
- Reid, Peter C. *BIEN HECHO EN AMERICA, LECCIONES DE HARLEY-DAVISON PARA SOBREVIVIR ANTE LA COMPETENCIA INTERNACIONAL*, Mc. Graw-Hill, México, 1990.
- Senn, James A. *SISTEMAS DE INFORMACION PARA LA ADMINISTRACION*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.