8
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

UN MODELO DINAMICO DE PRECIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADA EN ECONOMIA

P R E S E N T A :

OLGA LYDIA ARRIAGA BENHUMEA

MEXICO, D. F. 1992

I N D I C E

Pag.

CAPITULO III

El suministro de energía eléctrica en México como ejemplo de empresa proveedora de un bien público.

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Muchos economistas están a favor de que el Estado interfiera menos en las operaciones de empresas privadas. Si existiera competencia perfecta, la interferencia del Estado en las actividades de las empresas no sería deseable. Sin embargo la existencia de "externalidades" nos hace reflexionar sobre esta postura.

Existe una externalidad cuando la producción o el consumo imponen costos o beneficios a otros que no son pagados por los que los imponen. Más concretamente, una externalidad es un efecto que produce la conducta de un agente económico en el binestar de otro y no se refleja en las transacciones monetarias o de mercado.

Las externalidades son de muchos tipos. Unas son positivas (económías externas) y otras negativas (deseconómías externas). Así, por ejemplo, cuando vaciamos un barril de ácido en un río, éste mata a los peces y las plantas. Dado que no pagamos a nadie por este daño, hay una deseconomía externa. Cuando descubrimos una forma mejor de limpiar las manchas de petróleo, el beneficio se difundirá a muchas personas que no pagarán un centavo. Se trata de una economía externa. Además, algunas externalidades tienen grandes efectos-difusión, mientras que en otras éstos sólo son pequeños.

Por otra parte, las externalidades son una de las causas de imperfecciones en el mercado, ya que estas existen cuando no se incluyen en los mercados todos los efectos secundarios de la producción o el consumo. Así, por ejemplo, cuando una empresa arroja humos sulfurosos al aire, las viviendas vecinas sufren los daños a la propiedad y las personas padecen enfermedades respiratorias. Pero la empresa no paga estos efectos.

En todos estos casos, los poderes públicos pueden tomar medidas para aliviar las soluciones ineficientes del laissez-faire.

El remedio general para resolver las externalidades es que se internalicen de alguna forma, lo que significa que las personas que contaminan o generan la externalidad debe hacer frente a los incentivos correctos.

Así, los beneficios derivados de un bien público a diferencia de los que se derivan de un bien privado, producen efectos externos de consumo indivisible en más de un individuo. Por el contrario, si un bien se puede subdividir de manera que vender cada parte es posible competitivamente por separado a diferentes individuos sin producir ningún efecto externo en el resto, se trata de un bien privado. Los bienes públicos requieren frecuentemente la acción colectiva, mientras que los privados pueden ser proporcionados eficientemente por los mercados.

Bajo estas consideraciones, es posible impedir a las empresas que arrojen productos imponiendo regulaciones, pero es mucho más difícil para los gobiernos fomentar la producción de bienes públicos. Estas son las actividades económicas -que proporcionan grandes o pequeños beneficios a la comunidad- que no conviene dejar a la iniciativa privada. Importantes ejemplos de producción de bienes públicos son la construcción de autopistas, el apoyo a la ciencia pura y a la sanidad pública y el mantenimiento de la defensa nacional y el orden público interno. Las empresas privadas no proporcionarán estos bienes públicos porque sus beneficios se dispersan tanto entre la población que ninguna empresa o consumidor tienen incentivos para proporcionarlos.

Dado que generalmente serán insuficientes los bienes públicos suministrados por las empresas privadas, el Estado debe intervenir para suministrarlos. En concreto, cuando existen fuertes externalidades, el sistema de mercado y las empresas privadas pueden no ser capaces de hacer frente a la situación.

Regularmente las empresas privadas y el mecanismo de mercado son capaces de abordar la distribución de mercancías y los servicios cuando se aplica el principio de exclusión; es decir, los propietarios pueden impedir a cualquiera beneficiarse de una mercancía o servicio si lo desean. Así pues, la externalidad se puede considerar como la imposibilidad parcial de aplicar el principio de exclusión y, por lo tanto, cuando hay una fuerte externalidad, las empresas privadas y el sistema de mercado no pueden abordar la situación adecuadamente. Esta es la base en la que se funda el argumento en favor de los bienes públicos. La defensa es un caso extremo. Si un país está bien defendido, todos los residentes de la nación están protegidos. Es difícil, cuando no imposible, elegir a los residentes que se quieran excluir de la protección. Así pues, como vimos, la defensa tiene que ser dirigida por el Estado y todos los residentes tienen que participar en el coste de alguna forma.

Este trabajo se centra en el estudio de los bienes públicos y las características que los distingue, ya que a partir de estas se define una manera particular de construir, por ejemplo, la curva de demanda o fijar su precio.

Concretamente podemos decir que un bien público se define como aquel que pude ser consumido simultáneamente por más de un individuo sin disminuir el consumo de ese bien por parte de otros; por lo tanto para este tipo de bienes no se aplica el principio de exclusividad. Una vez producido un bién público, el costo adicional que un consumidor adicional del bien impone a la sociedad es efectivamente cero.

Los bienes públicos son bienes que generan externalidades por las cuales los individuos no deberían de pagar porque el costo marginal de proporcionar esas externalidades es cero después de que el bien haya sido producido. Debemos tener cuidado en distinguir entre el costo positivo de producir el bien público y el costo cero *de utilizar el bien público.*

La externalidad entra en juego si el costo social marginal de compartir una unidad más de consumo de bien público es cero y se está cobrando un precio por encima de cero; entonces hemos violado el criterio de maximización de bienestar de igualar los beneficios sociales marginales y los costos sociales marginales. Otra manera de enfocar esto es que en un sistema de competencia perfecta hay una igualdad entre la tasa marginal de transformación del bien x al bien y y las tasas marginales de sustitución del bien x por el bien y de digamos el consumidor I y el consumidor II. En la situación pública,sin embargo, el consumo del bien x por parte del consumidor I no restringe el consumo por parte del consumidor II. Así la tasa marginal de transformación debe se igual a la suma de las dos tasas marginales de sustitución.

Del mismo modo, para derivar una curva de demanda de mercado para un bien público, es necesario sumar las curvas de demanda individuales verticalmente y no horizontalmente. En el caso de la Defensa Nacional, por ejemplo, la curva de demanda de todo el mercado, debe representar las valuaciones marginales de todos los individuos. Veamos esto con más detalle.

Anteriormente hablamos de la diferencia entre bienes privados y bienes públicos, concretamente podemos considerar a la defensa nacional como servicio (o bien) público y diez barras de pan, como bien privado, muchos individuos aprecian la defensa nacional igual que aprecian el pan; pero incluso ellos, unos estarán más dispuestos que otros a sacrificar, si es necesario, una mayor cantidad de pan a cambio de un determinado nivel de defensa. Algunos, los pacifistas, dirán que los gastos militares no les interesan especialmente, mientras que otros quizá sufran, de hecho, con este bien público, y haría falta mucho pan para sobornarlos a fin de que votaran voluntariamente a favor de la defensa nacional.

Este sencillo ejemplo muestra que la valuación marginal de los individuos es diferente, y en muchos casos, éstos no las revelan. Es importante considerar estos aspectos ya que el precio prevaleciente de un producto constituye un indicador de la valoración marginal otorgada al o el valor de uso marginal recibido del bien en cuestión. La valoración marginal es la tasa de susutitución entre x y y expresada en términos monetarios, donde y representa todos los bienes. La valoración marginal también puede denominarse valor de uso marginal; es la TMgS de x por y expresada en términos monetarios.

Bajo estas condiciones una empresa productora o proveedora de bienes públicos debe fijar un precio a éstos, el cual es, generalmente función de sus costos. Decimos generalmente porque para algunos tipos o casos de bienes públicos se cuestiona el fijar o no un precio, por ejemplo, al uso de un puente peatonal, una carretera o un faro que advierte la presencia de rocas. Su luz ayuda a todos los que pasan cerca, pero una empresa no lo construiría como negocio para obtener un beneficio, ya que le resultaría extraordinariamente difícil cobrar un precio a cada usuario. Además la empresa se enfrenta no sólo al problema de determinar el precio, sino cómo cobrarlo, por ejemplo, en el caso de las tarifas telefónicas, existen diferentes criterios para asignar un "buen precio" a este tipo de servicios, surgiendo los precios diferenciales o por partes.

Así pues, una solución completa de la política de precios de los servicios públicos debe considerar la ventaja de su funcionamiento en condiciones que generen pérdidas, y, al mismo tiempo, los impuestos que deberán establecerse para pagar ésta pérdida, ya que, en realidad, la mayor parte del gasto que hace el Estado se financia mediante los impuestos recaudados.

El primer capítulo de este trabajo estudia los mécanismo de fijación de precios de bienes y servicios público, primero, en relación a los bienes privados, y, segundo, considerando diversos crieterios de política para fijar el precio de un servicio público. Posteriormente observamos que, para este tipo de bienes, en la mayoría de los casos, los precios y tarifas, por lo problemático que puede resultar cambiarlos (o variarlos), permanecen rezagados o estancados generando así pérdidas importantes a los productores, ya sean estos privados o el Estado. Dado que en este análisis no se cuestiona quién produce los bienes sociales, es decir, puede ser el sector privado quien brinde un servico público, como por ejemplo, el servicio de transporte que ofrecen los taxistas, o la educación en escuelas privadas, etc. es igualmente importante que se generen recursos que motiven la producción de estos bienes.

Por lo anterior planteamos la necesidad de dinamizar o actualizar los precios de estos bienes, ya que la riqueza de una empresa productora depende de su ingreso y éste, para este caso, de la venta de los servicios.

Así en el capítulo segundo, proponemos un moderno método de optimización de los precios de bienes y servicios públicos, en un contexto dinámico, es decir, en donde las decisiones que se toman en el presente pueden influir o determinar las condiciones o decisiones futuras, la teoría de control.

En la teoría de control se considera que un sistema económico queda determinado en cada instante por un conjunto de variables de estado, condicionadas a restricciones dinámicas, que describen el "funcionamiento del sistema" . Hay además, otras variables, las variables de control, que son instrumentos cuyos valores se pueden fijar arbitrariamente dentro de unos ciertos límites. Estos instrumentos influyen sobre las variables de estado; ambas, las variables de estado y las de control son funciones de tiempo; la tasa de cambio de las variables de estado depende del control de estas variables del valor de los controles aplicados, donde la variable de control se selecciona del conjunto de sus valores admisibles.

Dados ciertos valores a las variables de estado, una duración para el programa (de $t=0$ a $t=T$) y trayectorias a lo largo del tiempo para los controles, tendremos un proceso de control que traslada el sistema desde su posición inicial a su posición final. A cada proceso de control se le asigna un número, bajo la forma de una integral, que es un funcional aplicable a cualquier proceso de control. El problema consiste en determinar entre todos el que hace la solución de la integral máximo, al que se llama proceso de control óptimo.

El tercer capítulo consiste de un análisis general del Sector Eléctrico Mexicano, como ejemplo de empresa proveedora de servicios públicos; en este se resaltan aspectos que tienen que ver con su carácter de empresa pública, como el papel que cumplen como instrumento de política económica en el sector paraestatal controlado.

Por otro lado se hace un estudio de los aspectos financieros del Sector Eléctrico, como la relación de precios, la inversión y su financiamiento, en la que se observa que la industria cuenta con muy pocos recursos propios para financiar y desarrollar la inversión, vemos además que esta insuficiencia obedece a que sus ingresos por concepto de la venta del servicio es muy pobre dado que los precios y tarifas de la electricidad han estado por debajo del INPC y observan además una tendencia descendente.

Bajo estas condiciones la producción en el Sector Eléctrico ha sido financiada con transferencia del Gobierno Federal y endeudamiento externo, rubros que además han tenido un peso importante en las cuentas deficitarias del sector público. Esto es así porque el costo de operación y ampliación de la infraestructura *eléctrica es muy costosa e implica fuertes inversiones que el propio sector eléctrico no puede llevar a cabo de manera autónoma.*

Vemos así, que, el suministro de energía eléctrica, en su carácter de bien público, genera externalidades que conlleva a un problema de fijación, o en este caso, de actualización de los precios y tarifas.

Creemos que para que una empresa productora o proveedora de bienes públicos, pueda crecer y desarrollarse de manera sana, es decir, manteniendo el equilibrio de sus finanzas, debe contar con un stock de capital con el que pueda responder, en cada momento, al crecimiento de la demanda, y un nivel del ingreso que le permita mantener y acrecentar dicho stock. Este ingreso debe derivarse de la venta de sus productos, o servicios (principalmente) (en el caso de bienes públicos), para lo cual debe manejar un nivel de precios que cubra sus necesidades de inversión; por eso consideramos importante que los precios evolucionen acorde a sus necesidades y de la satisfacción de la demanda.

Por tal motivo proponemos un método alternativo de optimización de precios, en un período de tiempo determinado, es decir, en un contexto dinámico, que garantice ingresos de acuerdo a sus necesidades de producción.

CAPITULO I

UN MODELO DINAMICO DE PRECIOS

CAPITULO I Aspectos teóricos

I.I. Bienes públicos

El nombre "bien" (en economía) tiene normalmente un carácter abstracto que significa utilidad, beneficio, pero en plural (bienes) denota la cristalización concreta de ésta utilidad.

En éste trabajo distinguimos dos tipos de bienes: bienes privados y bienes públicos (o sociales), ambos satisfacen las necesidades de quienes los consumen y son producidos mediante el empleo de recursos escasos.

Los bienes privados pueden ser adquiridos individualmente, éstos pueden dividirse en unidades pequeñas cuya posesión exclusiva puede conferirse a personas particulares, por ejemplo, el pan, las manzanas, el servicio de peluquería, máquinas de coser, etc.. Tales bienes son suceptibles de una demanda individual y de la libre elección de los consumidores. La cantidad consumida por cada individuo puede ajustarse a sus gustos particulares dado su nivel de ingreso.

De este modo, se dice que los bienes privados compiten en consumo, es decir, un bien X que es consumido por un individuo A es imposible que lo consuma otro individuo B, así B es excluido del consumo de dicho bien y en consecuencia de su beneficio.

La venta de estos bienes se lleva a cabo a través del mercado, principalmente, donde el precio de éstos está determinado por la "intersección de la demanda de mercado y de la oferta de mercado" siguiendo la regla básica de la igualdad del precio con el costo marginal, es decir, todo bien privado será producido hasta el punto en que el costo marginal de producción sea exactamante igual al precio, en condiciones de competencia.

Los bienes públicos no se pueden dividir en unidades que se conviertan en posesión única o se vendan fácilmente a consumidores individuales en cantidades diferentes, sino que pueden ser consumidos simultáneamente por más de un individuo sin disminuir el consumo de ese bien por parte de otros.

Así, los bienes sociales (o bienes públicos) no compiten en consumo, es decir, son bienes en los cuales la participación de los beneficios de consumo de un bien X de un individuo A no reduce los beneficios para todos los demás. Todos participan del mismo beneficio sin interferencia mutua.

Por otro lado, los beneficios derivados de un bien público, a diferencia de los que se derivan de un bien puramente privado, producen efectos externos de consumo indivisibles en más de un individuo.

Estos beneficios externos o externalidades son una característica exclusiva de los bienes públicos. Este fenómeno se produce cuando los costos o los beneficios de una actividad "se difunden" automáticamante a otras personas o empresas. Por lo tanto existe una externalidad o un efecto difusión cuando las empresas o los individuos imponen costos o beneficios a otros que no son pagados por los que los imponen. Más concretamente, una externalidad es un efecto que produce la conducta de un agente económico en el bienestar de otro y no se refleja en las transacciones monetarias o de mercado.

Las externalidades son de dos tipos. Unas son positivas (economías externas) y otras son negativas (deseconomías externas). Así, por ejemplo, cuando se vierte un barril de ácido en un río, éste mata a los peces y a las plantas. Dado que no pagamos a nadie por este daño, hay una externalidad negativa. Cuando descubrimos una forma mejor de limpiar las manchas de petróleo, el beneficio se *difundirá a muchas personas que no pagarán un centavo. Se trata de una externalidad positiva.*

Además, algunas externalidades tienen grandes efectos-difusión, mientras que en otras éstos sólo son pequeños. Cuando un transmisor de la peste negra entraba en un país en la Edad Media, una cuarta parte de la población podía morirpor su causa. En cambio, cuando una persona mastica un trozo de ajo en un estadio de fútbol en un día de viento, los efectos externos son apenas perceptibles.

Por otra parte, es importante destacar que el consumo no competitivo genera imperfecciones en el mercado. Consideremos por ejemplo, el caso de un puente peatonal el cual "no está" congestionado, entonces cuando un individuo A cruza todo el puente no interfiere el paso del individuo B , cargar un impuesto puede ser completamente factible, pero el puente puede no ser usado tan intensivamente a todo lo largo, el impuesto entonces podría ser ineficiente si limitara su uso, el costo marginal (CMg) de uso, en este caso, es cero. O consideremos el uso de una radiodifusora, la cual está
disponible para aquellos radioescuchas que cubren sus impuestos. Nuevamente, la recaudación podría ser ineficiente, puesto que la recepción (de la señal) de A no interfiere con la de B. Esta es una situación en la cual la exclusión "puede" ser aplicada pero no sería óptima porque el consumo no es competitivo.

Si el CMg de admitir un usuario adicional es cero, el costo de suministrar el bien no lo es. Este costo puede ser cubierto de alguna forma, y puede determinarse en función del beneficio que "produce". En ausencia de exclusión (ya sea porque la exclusión no es factible o porque es indeseable) esta tarea no puede llevarse a cabo a través del modo usual de venta a los consumidores en el mercado. La provisión a través del mercado no funciona y se convierte en un proceso de política de determinación de presupuesto.

Otras causas de imperfección en el mercado se deben a la no exclusión, es decir, cuando el consumo es competitivo pero la exclusión no es factible. Generalmente la mayoría de los bienes son competitivos en consumo y se prestan a exclusión, sin embargo algunos bienes competitivos pueden no comportarse así. Consideremos, por ejemplo, un congestionamiento al cruzar la avenida Insurgentes durante algunas horas, el uso del espacio disponible es distintamente competitivo y la exclusión (la venta o remate del espacio disponible) puede ser eficiente y podría ser aplicada. La razón es que, el uso de un espacio congestionado es hecho por aquellos quienes lo "valoran" más y quienes ofrecerían pagar un precio más alto. Pero semejante exclusión puede ser, en algunos casos, imposible y al mismo tiempo costosa. Estamos diferenciando una situación en donde la exclusión puede o no ser aplicada, aunque la dificultad de la aplicación es la causa de imperfecciones en el mercado. La provisión pública requiere técnicas útiles que puedan detectar cuándo aplicar la exclusión.

Pensemos una vez más por qué la no exclusión causa imperfecciones en el mercado. Como la participación en el consumo no es un hecho contingente al pago, la gente no está forzada a revelar sus preferencias en favor de los bienes sociales. Este es el caso cuando el número de participantes es grande. Sin embargo el nivel total de provisión no se afectaría por una persona más. También puede ocurrir que el consumidor se encuentre participando como "polizón" en la provisión que se hace a otros. Si todos los consumidores actuaran de esta manera, no habría una demanda efectiva de bienes, la acción del mercado se desplomaría, y una vez más, sería necesario un método diferente de provisión.

Los bienes públicos requieren frecuentemente la acción colectiva, y su provisión comunmente relaciona situaciones donde la venta particular a los consumidores es, de una u otra forma, imposible, porque no puede aplicarse la exclusión o es indeseable porque el consumo no es competitivo. Tales bienes tienen que ser, por lo tanto, provistos, generalmente, a través del proceso presupuestario el cual considera una distribución inicial del ingreso así como la evaluación a los consumidores con base en su ingreso y preferencias.

Por el contrario, si un bien se puede subdividir de manera que es posible competitivamante vender cada parte por separado a diferentes individuos sin producir ningún efecto externo en el resto, se trata de bienes privados, los cuales pueden ser proporcionados eficientemente por los mercados.

En consecuencia, el mercado puede funcionar solamente en condiciones en las cuales el principio de exclusión es aplicado, es decir, el consumo de *A* es un hecho contingente al pago del precio, mientras *B*, que no hace su pago, es excluido. El intercambio no puede ocurrir sin la propiedad y ésta requiere exclusión. Así el mercado puede funcionar como un sistema de "subasta". El consumidor debe demandar el producto revelando de este modo sus preferencias al productor, quien bajo condiciones de competencia es "guiado por semejantes señales" a producir lo que el consumidor quiere. Al menos esto se espera, como consecuencia del buen funcionamiento del mercado.

Este proceso puede funcionar en un mercado de bienes privados, para ropa, vivienda, automóviles y millones de bienes privados, porque los beneficios derivados de este fluyen hacia el consumidor particular quien paga por ellos. De este modo los beneficios son internalizados y el consumo es competitivo. Una hamburguesa que es consumida por *A* no puede ser consumida por *B*. Los bienes son dados cuando el precio es pagado y no antes. Pero la provisión *presupuestaria es necesaria si el consumo no es competitivo o si la exclusión no puede ser aplicada. Es decir, bajo ciertas circunstancias, el mercado es capáz de generar una efeciente provisión de bienes sociales, considerando un proceso presupuestario, suponiendo, al mismo tiempo, que la exclusión es posible. Por ejemplo, un monopolio puede proveer bienes para varios consumidores con diferencia de precios por unidades sucesivas de la máxima cantidad que cada consumidor este dispuesto a pagar, en el caso de mercados segmentados.*

Por otro lado, sin embargo, ya que los bienes públicos deben suministrarse en la misma cantidad a todos los consumidores y además constituyen un ejemplo de un determinado tipo de externalidad en el consumo, estos bienes plantean problemas especiales (entre otros, imperfecciones en el mercado debidas al consumo no competitivo y a la no exclusión) como: ¿cuál debe ser la cantidad ideal de suministro?, ¿qué mecanismos pueden utilizarse para tomar decisiones sobre ese tipo de bienes?, ¿cuándo suministrar un bien público? y ¿cómo se fija el precio de los bienes públicos?.

Existe un cuerpo teórico-económico relacionado con la producción de bienes privados, se han formulado un conjunto de principios para la determinación de la producción óptima de estos bienes considerando el uso eficiente de los recursos.

Es el objetivo del primer capítulo de este trabajo retomar el cuerpo teórico de la "teoría de la empresa" y mostrar en qué forma pueden adaptarse ciertas proposiciones de ésta a la producción y distribución de bienes públicos.

De acuerdo con la teoría, se producirá un máximo de satisfacciones humanas (en el caso de bienes privados) cuando: (1) el precio sea igual al CMg, (2) la tasa marginal de sustitución en consumo sea la misma para todos los consumidores, e igual la tasa marginal de transformación en producción. (3) el resultado anterior se obtiene en un mercado competitivo donde los consumidores revelan sus preferencias al demandar los bienes, y (4) en el mercado (de bienes privados) todos los consumidores pueden pagar el mismo precio pero consumir diferentes cantidades dependiendo de su ingreso y preferencias. Aquí la curva de demanda del mercado es obtenida por la adición horizontal de las curvas de demanda individuales.

Veamos cada uno de estos aspectos con más detalle y comparemos con los bienes públicos.

Primero definiremos lo que en economía se conoce como eficiencia en el sentido de Pareto. Existe eficiencia en la asignación cuando no hay ninguna reorganización posible de la producción que mejore el bienestar de todas las personas. Por tanto,en condiciones de eficiencia, sólo se puede elevar la utilidad de una persona reduciendo la de alguna otra.

La naturaleza no competitiva de los bienes sociales tiene un comportamiento importante al (1) establecer una eficiente distribución de recursos, es decir, producir al menor costo, y (2) al mostrar el procedimiento por el cual su provisión es obtenida. Examinemos estas implicaciones.

(1) Aquí es de gran utilidad comparar la demanda familiar y presentar un gráfico para bienes privados y otro para bienes públicos. Como veremos más adelante, la demanda de los bienes públicos es inelástica.

El lado izquierdo de la figura 1 muestra el mercado de bienes privados. D_A y D_B son las curvas de demanda de los consumidores A y B con base en una distribución dada del ingreso, y precios para otros bienes. La curva de demanda del mercado es obtenida mediante la adición horizontal de D_A y D_B, sumando las cantidades de A y B que son compradas a un precio dado. SS es la curva de oferta y el

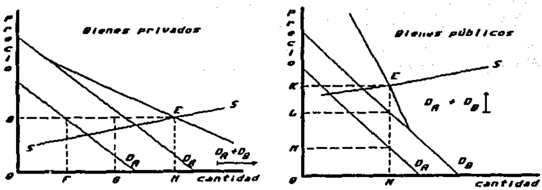


Fig. 1.1. Demanda de bienes privados y sociales.

equilibrio está determinado en E. La intersección de la curva de mercado en el precio OC muestra una cantidad "total" de producto OH, donde OF es comprado por A y OG es comprado por B, por lo cual OH = OF + OG.

El lado derecho corresponde al modelo de bienes sociales. Aquí asumimos que los consumidores están dispuestos a revelar su valuación marginal sobre los bienes sociales. Como antes D_A y D_B son las curvas de demanda respectivas de A y B sujetas a condiciones dadas de ingreso y precios de otros bienes. Puesto que las demandas son inelásticas a las preferencias de los consumidores, tales curvas son consideradas como curvas de pseudo-demanda. Suponemos que las preferencias de los consumidores son reveladas. La diferencia crucial con respecto a los bienes privados es que puede aumentar la cantidad consumida, mientras que para los bienes sociales la curva de demanda D_{A+B} es obtenida por la adición vertical de D_A y D_B, con D_{A+B} mostrando la suma de los precios que A y B están dispuestos a pagar por alguna cantidad dada. Esto se sigue porque ambos consumen la misma cantidad, asumen pagar un precio igual o la correcta valuación de la unidad marginal. El precio necesario para cubrir el costo de los servicios iguala la suma de precios pagada por cada uno. SS es, nuevamente, la curva de oferta, la cual muestra el CMg para varios niveles de producción de bienes sociales . El nivel de producto correspondiente al equilibrio OH, en el caso de bienes privados, ahora es igual a ON, cantidad consumida por ambos, A y B. El precio combinado es igual a OK, pero el precio pagado por A es OM mientras que el pagado por B es OL, donde OM + OL = OK.

Regresando al caso de los bienes privados, vimos que la distancia vertical entre cada una de las curvas de demanda individual refleja el beneficio marginal (BMg) derivado del consumo. En el punto de equilibrio E, en ambos, el BMg resultante cuando A consume OF y B consume OG, es igual al CMg, HE. Esta es una solución eficiente porque los beneficios marginales son iguales al CMg de cada consumidor. Si el producto es menor que OH, el BMg exede el CMg lo que significa que los individuos están pagando más de lo necesario para cubrir el costo. Los beneficios netos (BN) ganados expandirán el producto tanto como el BMg exeda el CMg y los BN son maximizados produciendo OH unidades, punto en el que el BMg = CMg. La pérdida de bienestar puede ocurrir si la producción se expande más allá de OH, entonces el CMg exede el BMg.

Ahora comparemos esta solución con los bienes sociales. La distancia vertical entre cada curva de demanda individual nuevamente refleja los beneficios marginales obtenidos. Puesto que ambos comparten la misma oferta, el BMg generado por alguna oferta dada es obtenido por la adición vertical. Así el equilibrio obtenido en el punto E ahora refleja la igualdad entre la suma de los beneficios marginales y el CMg de los bienes sociales. Si el producto baja un poco de ON, éste será nuevamente empujado a *expandirse porque la suma de los beneficios marginales exede el costo, mientras que un producto que exeda ON puede implicar pérdida de bienestar puesto que el CMg sobrepasará la suma de los beneficios marginales.*

Estos dos casos son análogos pero con la diferencia importante de que por el bien privado, la eficiencia requerida iguala el BMg derivado por cada individuo con el CMg, y en el caso de los bienes sociales, el BMg derivado por los dos consumidores difiere y éste es la suma de los beneficios marginales (o tasas marginales de sustitución) que igualarían el CMg.

La figura I también muestra cómo la aplicación de la misma regla de precios -donde el precio pagado por cada consumidor es igual al BMg del individuo- produce diferentes resultados para bienes sociales y privados. En el caso de bienes privados A y B pagan el mismo precio pero compran diferentes cantidades, mientras que en caso de bienes sociales, A y B compran la misma cantidad pero pagan diferente precio. Sin embargo, en ambos casos la misma regla de valuación es aplicada. Cada consumidor paga un sólo precio por unidades sucesivas del bien comprado, donde el precio es igual al BMg derivado de las compras.

El modelo general para bienes privados, considerando el uso eficiente de los recursos, permite mostrar resultados diferentes para bienes sociales. En dicho modelo asumimos que la información es revelada, es decir, las preferencias de los consumidores son conocidas, se sabe cuál es la reserva probable de recursos y el estado de la tecnología. El objeto es saber cómo serán usados eficientemente los recursos en diferentes condiciones de distribución. Existen reglas de eficiencia, aplicables bajo ciertas condiciones, que, para simplificar el modelo, consideraremos una economía con dos consumidores A y B y dos productos X e Y. Estas condiciones tienen que cumplir lo siguiente:

1. La eficiencia requerida para producir cualquier cantidad de X debe ser producida de cualquier forma que permita la producción al mismo tiempo de la mayor cantidad de Y.

2. La tasa marginal de sustitución en consumo (TMgSC) entre el bien X e Y debe ser la misma para los consumidores A y B.

3. La TMgSC de X por Y puede ser la misma así como su tasa marginal de transformación en producción (TMgTP). Esta se define como las unidades adicionales de X que pueden ser producidas si se reduce la producción de Y en una unidad.

Si se logran estas condiciones (así como algunas otras no especificadas aquí), el resultado de un ajuste será una solución eficiente.

El paso siguiente es señalar de manera simplificada la solución eficiente, para facilitarlo, consideremos una economía con dos bienes privados X e Y y dos consumidores A y B. Lo primero es construir la frontera de producción factible CD, en la figura No.2.

El eje vertical mide la producción del bien privado X y el eje horizontal mide la del bien Y, CD muestra la combinación óptima de ambos que puede ser producida. Si todos los recursos se destinan a la producción de X, la cantidad posible será igual a OC; y si todos los recursos se emplean en Y, la producción total posible será igual a OD. Si OE de X es producida, la producción posible de Y será igual a OF.

Como establecimos en la condición 1, si se desea producir una cantidad dada del bien X el resto será la mayor cantidad posible del bien Y, y vice-versa. En esta parte, el problema es el mismo para ambos tipos de bienes, públicos y privados.

El segundo paso es determinar la producción en algún punto de CD, dividida entre A y B. Suponemos que la combinación de producción ideal está en el punto Z la cual encierra la producción OE de X y OF de Y. Para mostrar cómo puede ser dividida esta

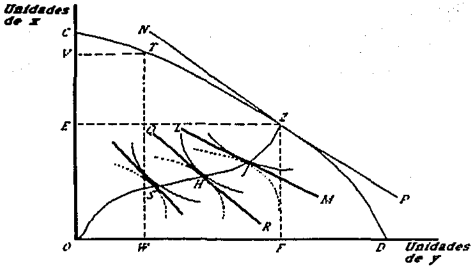


Fig. I.2. Producción de bienes privados y su asignación.

producción entre A y B consideramos la "caja punteada" OEZF. Donde O es el origen, i_{a1}, i_{a2}, i_{a3} son las curvas de indiferencia del consumo de A que muestran su preferencia por X e Y. Las curvas se construyen de tal forma que mientras se mueven hacia abajo a lo largo de alguna curva (OZ) muestran un aumento en el consumo de Y por una disminución en el consumo de X. Al mismo tiempo, A estará mejor cuando se mueve a una curva de indiferencia más alta, como de i_{a1} a i_{a2}.

Después obtenemos un diseño similar de curvas de indiferencia para B, pero ahora elegimos al punto Z como el origen. Esto quiere decir, que las unidades de Y elegidas por B se miden por el movimiento hacia la izquierda, a lo largo de ZE, y las unidades de X se miden por el movimiento hacia abajo a lo largo de ZF, al mismo tiempo se muestran varias curvas de indiferencia de B sucesivamente más elevadas, i_{b1},i_{b2},i_{b3}.

Se puede mostrar ahora que todas las soluciones óptimas están a lo largo de la curva contraída OZ, cuyas trazas son los puntos de tangencia de las curvas de indiferencia, si la posicion inicial es G, un movimiento hacia J mejorará la posición de A sin perjudicar a B, con un movimiento hacia H se mejora la posición de B sin perjudicar a A. Por lo tanto sobre algún punto entre H y J el beneficio se divide entre los dos. Pero siguiendo la regla de que un beneficio para A, dejando fuera a B de algún beneficio (y vice-versa), es una mejoría, la solución eficiente tendría que bajar a lo largo de OZ. Sin embargo, estos son los puntos en los cuales los dos encuentran rectas tangentes a sus curvas de indiferencia, y por otro lado las pendientes de las curvas de indiferencia igualan la (TMgSC), de aqui se sigue que en cada punto sobre OZ la TMgSC es igual para A y B, esto refleja la condición 2.

Por otra parte, no todos los puntos sobre OZ pueden calificarse como soluciones eficientes (u óptimas) ya que deben satisfacer una tercera condición, es decir, aquella donde la TMgSC es igual a la tasa marginal de transformación en producción (TMgTP). En la figura 2, ésta tercera condición se encuentra en el punto J donde la tangente LM es paralela a la tangente NP, obtenida para la posible producción en Z. Esto no ocurre en H ya que QR no es paralela a NP, pero si ocurre en S. Supongamos entonces que son dos los puntos eficientes J y S. El punto J será mejor para A y el punto S para B, pero ambos reflejan soluciones eficientes.

Hay que tener presente que la solución eficiente se buscará en todas las combinaciones de producción o en los puntos sobre CD. Para cada uno de estos puntos (sea T) podemos obtener una nueva "caja" (en este caso OVTW) derivando una nueva curva contraída y encontrando la nueva solución eficiente. Esto se muestra en la figura No.3.

El eje vertical mide la utilidad de A y el horizontal la utilidad de B. Nos aproximamos con una frontera de utilidad como UU', donde cada punto corresponde a una combinación eficiente de

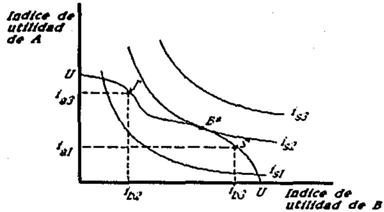


Fig. I. 3. Distribución de la elección.

producción y la distribución entre A y B. Así el punto S' en la frontera puede corresponder al punto S en la figura 2., con un nivel de utilidad para A dado por i_{a1} y para B en i_{b3}. El punto J' puede reflejar al punto J,con un nivel para A en i_{a3} y para B en i_{b1}. Moviendonos hacia abajo de la curva UU', el nivel de utilidad de A disminuye mientras que el de B aumenta. Los posibles puntos óptimos están en la frontera ya que los puntos que están fuera son inalcanzables y los puntos que están dentro son ineficientes.

Mientras que las reglas de eficiencia de Pareto guian nuestra frontera, la elección de los puntos óptimos trazados por ésta representan un tráfico de "mejoras" para A y "pérdidas" para B o vice-versa. La elección del óptimo implica una distribución y tiene que hacerse en base a una función de bienestar social que expresen el orden de valuación de la sociedad para igualar el beneficio experimentado por A y B. Asumiendo que esta asignación es conocida, ésta puede ser expresada por las curvas sociales de indiferencia i_{s1} e i_{s2}, de este modo cada curva muestra una combinación de beneficio derivado para A y B, que a la vista de la sociedad son igualmente buenas. El punto de tangencia de la frontera de utilidad con la curva de indiferencia la2 representa el más alto posible. Este es el mejor punto, el óptimo de todas las soluciones posibles. Como un punto en la frontera de utilidad contiene ambos requerimientos de eficiencia de Pareto, es decir, que la TMgSC es la misma para A y B, y que ésta es igual a TMgTP. Un punto en la curva social de indiferencia más alta contiene las condiciones de maximización del beneficio social a través de la distribución óptima.

La solución eficiente de la figura 2, puede obtenerse a través de un sistema de mercado competitivo. Los productores, guiados por el deseo de maximizar su beneficio, adoptan el método de costo de producción, dado en la condición 1. Por otra parte, producirán todo aquello que los consumidores necesitan, indicando el precio que los productores toman del mercado. Los consumidores distribuirán su ingreso entre los productos que iguales su TMgS con la tasa de precios, encontrando así la condición 2. Los vendedores al querer maximizar su ganancia, igualan el CMg con el BMg, al tiempo que, en condiciones de competencia, igualan el CMg con el precio u obtengan ganancias excesivas. Así tenemos la condición 3. De este modo podemos ver que los mecanismos de mercado representados en un sistema de "subasta" y funcionando a través de la competencia de precios asegura un eficiente uso de recursos.

Ahora reconsideraremos el procedimiento el problema en condiciones donde se producen ambos bienes, sociales y privados, son producidos. Para simplificar incluiremos un sólo bien social S y un bien privado X. Elaboramos un modelo en el que suponemos tenemos toda la información y contiene las soluciones eficientes.

Retomando las reglas de eficiencia, en relación con los bienes privados, no notamos cambios al observar la condición 1 la construcción de la frontera de posibilidades propuso el mismo problema . Pero las condiciones 2 y 3 serán cambiadas puesto que los consumidores, con diferentes gustos e ingresos, no consumen la misma cantidad de bienes sociales, su TMgSC de bienes sociales por privados puede diferir. Sin embargo la TMgT es la misma para todos, no es posible extender el hecho de que las dos tasas marginales de sustitución deba ser la misma para todos los consumidores. Por tanto, ahora definimos eficiencia como la igualdad entra la TMgTP y la suma de las TMgSC de los consumidores.

El resultado de obtener soluciones eficientes se muestra en la figura 4.

La curva de producción posible CD en la parte superior de la figura representa la combinación de X y S que puede ser producida con recursos disponibles, los ejes de la figura central muestran el consumo que hace A de X y S, finalmente, el cuadrante inferior muestra el correspondiente consumo de B. Como ambos consumen la misma cantidad de S, ambos están en el mismo punto en el eje horizontal, pero pueden consumir diferentes cantidades de X y estar en diferentes puntos del eje vertical. Estos puntos están relacionados por la condición de que la cantidad de X consumida por A y B tiene que ser igual a la producción total de X.

Para ilustrarlo suponemos que A está en G, consumiendo OF de S y FG de X . Sabemos, por el primer cuadrante de la figura 4 , que la combinación eficiente de producción incluye Of de S y FG de X. Sin embargo, como A consume FG, la cantidad restante para B es igual a FE - FG = FH, colocando a B en el punto H en la parte inferior de la fig. 4. Luego nos movemos a lo largo de I_{A2} pasando por los puntos P, T y V. Siguiendo el mismo razonamiento, B se colocó en L, Z y K. Como A se movió sobre I_{A2} para alejarse de W, B se mueve a lo largo de ULK. No obstante todos los puntos a lo largo de I_{A2} son igualmente buenos para A, el bienestar es maximizado eligiendo el punto en el que se obtiene un óptimo para B. Este es T, donde ULK es tangente a la curva de indiferencia I_{B1} de B. Esta

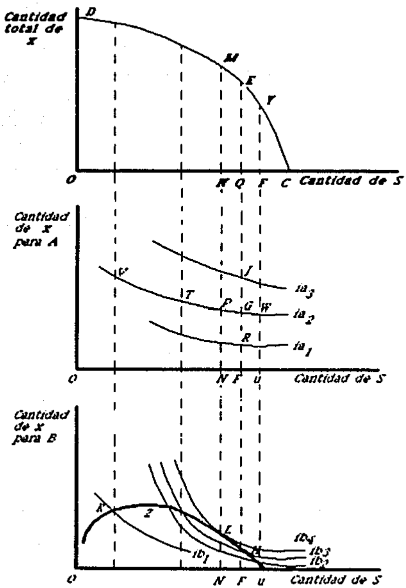


Fig. I.4. Equilibrio general de bienes sociales y privados.

es la curva más alta en la que B puede moverse sobre LZL. Si A está en la curva de nivel de indiferencia i_{a2}, la mejor solución es, de este modo, tal que el nivel de A y B está en P y L respectivamente, donde la producción total incluye ON de S y NM de Y que distribuida entre A y B asigna NP y NL respectivamente.

En otro nivel de utilidad de A, por ejemplo en i_{a1} e i_{a3}, se obtiene otra posición respectiva para B. Todos estos son eficientes en el sentido de Pareto e incluyen la condición de igualdad entre la suma de las tasas marginales de sustitución en consumo y la TMgTP.

Por otro lado notamos que los pasos seguidos al explicar la distribución eficiente es similar en ambos casos (es decir, para bienes sociales y bienes privados), sin embargo las condiciones de eficiencia difieren dada la no competitividad en consumo natural de los bienes sociales.

Para resumir y formalizar lo dicho hasta aquí, consideremos una economía con dos consumidores 1 y 2, un bien público y otros bienes privados.

Supongamos que: s_1 y s_2 representan la riqueza inicial de cada persona.

g_1 y g_2 son la aportación de cada persona al consumo del bien público

x_1 y x_2 es el dinero que le queda a cada persona para gastar en consumo de bienes privados.

Las restricciones presupuestarias son:

$$x_1 + g_1 = s_1$$
$$x_2 + g_2 = s_2$$

Sea C el costo del bien público, por tanto, para comprarlo la suma de las aportaciones debe ser como mínimo C:

$$g_1 + g_2 \geq C$$

Esta ecuación resume la tecnología disponible para suministrar el bien público.

La función de utilidad de la persona 1 dependerá de su consumo privado x_1, y de la existencia del bien público. Sea ésta $U_1(x_1,G)$, donde G es 0 si no existe el bien, ó 1 si sí existe el bien.

La función de utilidad de la persona 2 es $U_2(x_2,G)$.

El consumo privado de cada persona tiene un subíndice que indica que el bien es consumido por la persona 1 o por la 2, pero el bien público no tiene ningún subíndice. Es consumido por los dos. En realidad lo que se consume no es el bien en sí, en el sentido de que "se gasta", sino su servicio.

Midamos el valor que le concede cada persona preguntándonos cuánto estaría dispuesta a pagar por tener el bien. Para ello utilizamos el concepto de precio de reserva.

El precio de reserva de la persona 1 es la cantidad máxima que estaría dispuesta a pagar por tener el bien. Es decir, es el precio r_1 al que le daría igual pagar r_1 y tener el bien que no tenerlo. Si la persona 1 paga el precio de reserva y recibe el bien le queda $s_1 - r_1$ para su consumo privado. Si no recibe el bien le quedará s_1. Si es indiferente a esta dos posibilidades, debe cumplirse la igualdad siguiente:

$$U_1(s_1 - r_1, 1) = U_1(s_1, 0)$$

Esta ecuación define el precio de reserva de la persona 1, es decir, la cantidad máxima que está dispuesta a pagar por tener el bien. La ecuación que define el precio de reserva de la persona 2 es similar. Observese que, en general,el precio de reserva de cada *una depende de su ingreso o riqueza.*

Por otro lado, recordemos que una asignación es eficiente en el sentido de Pareto si no es posible mejorar el bienestar de las otras personas. Es ineficiente si es posible mejorar el bienestar de las dos; en este caso, decimos que es posible lograr una mejora en el sentido de Pareto.

En el problema particular, de este tipo de bien, sólo hay dos tipos de asignaciones interesantes. Una es aquella en la que no se suministra el bien, y que adopta la sencilla forma $(\omega_1, \omega_2, 0)$, *es decir, cada una de las personas gasta su ingreso únicamente en consumo privado.*

El otro tipo de asignación es aquella en la que se suministra el bien público. Tiene la forma $(x_1, x_2, 1)$, *donde*

$$x_1 = \omega_1 - g_1$$
$$x_2 = \omega_2 - g_2$$

Estas dos ecuaciones se obtienen reformulando las restricciones presupuestarias. Nos dicen que el consumo privado de cada individuo depende de la riqueza que le quede una vez que ha contribuido a financiar el bien público.

¿En qué condiciones debe suministrarse el bien? Es decir, ¿cuándo hay un sistema de pago (g_1, g_2) *con el que ambas personas disfruten de un mayor bienestar teniendo el bien y pagando su parte que no teniéndolo? En otras palabras, ¿cuándo es la adquisición del bien una mejora en el sentido de Pareto?*

Suministrar la asignación (x_1, x_2, G) *es una mejora en el sentido de Pareto cuando las personas disfrutan de un mayor bienestar si se les suministra el bien que si no se les suministra, lo que significa que:*

$$U_i(\omega_i, 0) < U_i(x_i, 1)$$

$$U_2(s_2, 0) < U_2(x_2, 1)$$

Utilizando la definición de los precios de reserva r_1 y r_2 y la restricción presupuestaria, tenemos que:

$$U_1(s_1 - r_1, 1) = U_1(s_1, 0) < U_1(x_1, 1) = U_1(s_1 - g_1, 1)$$

$$U_2(s_2 - r_2, 1) = U_2(s_2, 0) < U_2(x_2, 1) = U_2(s_2 - g_2, 1)$$

Examinando los dos miembros de esta desigualdad y recordando que el aumento del consumo privado debe elevar la utilidad, podemos concluir que:

$$s_1 - r_1 < s_1 - g_1$$
$$s_2 - r_2 < s_2 - g_2$$

lo que implica, a su vez, que:

$$r_1 > g_1$$
$$r_2 > g_2$$

La condición de que el precio de reserva sea superior a la participación en el costo de adquisición simplemente nos dice que ocurrirá una mejora en el sentido de Pareto cuando cada persona adquiera los servicios del bien por una cantidad inferior a la máxima que estaría dispuesta a pagar por él. Esta condición es claramente necesaria para que la compra del bien sea una mejora en el sentido de Pareto.

Si lo que cada persona está dispuesta a pagar es superior a lo que le toca pagar, la suma de las cantidades que están dispuestas a pagar debe ser mayor que el costo del bien:

$$r_1 + r_2 > g_1 + g_2 = C$$

Esta condición es suficiente para que la adquisición del bien constituya una mejora en el sentido de Pareto.

Es importante señalar que la condición anterior sólo depende de lo que se está dispuesto a pagar y del costo total. Por otra parte, el hecho de que la provisión de un bien público sea o no eficiente en el sentido de Pareto depende de la distribución inicial del ingreso (s_1, s_2), *ya que en general, los precios de reserva* r_1 *y* r_2 *dependen de ella.*

Del análisis anterior se desprende que si un bien público debe suministrarse en una cantidad fija o no suministrarse en absoluto, debe cumplirse una condición necesaria y suficiente de la eficiencia en el sentido de Pareto: la suma de lo que cada persona esté dispuesta a pagar (la suma de los precios de reserva) debe ser superior al costo del bien público.

Ahora consideraremos diferentes niveles del bien público, es decir, "elegir la cantidad" del bien público que debe suministrarse. Supongamos que los dos consumidores (1 y 2) tienen que decidir la cantidad de dinero que van a gastarse en la compra o adquisición del bien público. Cuanto más dinero decidan gastar mejor será el "servicio" que puedan comprar.

Supongamos como antes que:

x_1 *y* x_2 *miden el consumo privado de cada persona, y*
g_1 *y* g_2 *lo que aporta cada uno para la compra del bien.*

Sea G una variable que mide la "calidad" del bien adquirido, y sea c(G) la función de costos de la calidad en función del gasto. Esto significa que si los dos consumidores desean pagar por *un bien de una calidad G, tienen que gastar c(G) unidades monetarias.*

Ahora bien, se enfrentan a la restricción de que la cantidad total que gastan en su consumo público y privado tiene que ser exactamente igual al dinero que tienen:

$$x_1 + x_2 + c(G) = s_1 + s_2$$

Una asignación eficiente en el sentido de Pareto es aquella en la que el consumidor 1 disfruta del mayor bienestar posible dado el nivel de utilidad del consumidor 2. Si mantenemos fija la utilidad del consumidor 2 en $\overline{U}_2$, podemos formular este problema de la siguiente manera:

$$\max_{x_1, x_2, G} \; U_1(x_1, G)$$

Sujeta a $U_2(x_2, G) = \overline{U}_2$

$$x_1 + x_2 + c(G) = s_1 + s_2$$

La condición de optimalidad apropiada de éste problema es la siguiente: la suma de las tasas marginales de sustitución entre el bién privado y el público de los dos consumidores debe ser igual al costo marginal de suministrar una unidad adicional del bien público:

$$TMgS_1 + TMgS_2 = CMg(G)$$

En términos matemáticos esto significa resolver el problema de *maximización que determina las asignaciones del bién público que son eficientes en el sentido de Pareto.*

$$\max_{x_1, x_2, G} \quad U_1(x_1, G)$$

$$\textit{Sujeta a} \quad U_2(x_2, G) = \overline{U}_2$$

$$x_1 + x_2 + c(G) = \delta_1 + \delta_2$$

Formulamos el lagrangiano:

$$L = U_1(x_1, G) - \lambda[U_2(x_2, G) - \overline{U}_2] - \mu[x_1 + x_2 + c(G) - \delta_1 - \delta_2]$$

derivamos respecto a x_1, x_2 *y* G

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1(x_1, G)}{\partial x_1} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda \frac{\partial U_2(x_2, G)}{\partial x_2} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial U_1(x_1, G)}{\partial G} - \lambda \frac{\partial U_2(x_2, G)}{\partial G} - \mu \frac{\partial c(G)}{\partial G} = 0$$

Si dividimos la tercera ecuación por μ *y reordenamos los términos, tenemos que:*

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial U_1(x_1, G)}{\partial G} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial U_2(x_2, G)}{\partial G} = \frac{\partial c(G)}{\partial G} \qquad \ldots(1)$$

Despejando μ en la primera ecuación, tenemos que

$$\frac{\partial U_1(x_1,G)}{\partial x_1} - \mu = 0$$

$$\mu = \frac{\partial U_1(x_1,G)}{\partial x_1}$$

y despejando $\frac{\mu}{\lambda}$, obtenemos

$$-\lambda \frac{\partial U_2(x_2,G)}{\partial x_2} - \mu = 0$$

$$-\lambda \frac{\partial U_2(x_2,G)}{\partial x_2} = \mu$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\partial U_2(x_2,G)}{\partial x_2}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en (1), tenemos que

$$\frac{\partial U_1(x_1,G)/\partial G}{\partial U_1(x_1,G)/\partial x_1} + \frac{\partial U_2(x_2,G)/\partial x_2}{\partial U_2(x_2,G)/\partial G} = \frac{\partial c(G)}{\partial G}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial G} + \frac{\partial x_2}{\partial G} = \frac{\partial c(G)}{G}$$

que no es más que la condición anterior:

$$TMgS_1 + TMgS_1 = CMg(G)$$

o según las definiciones de las tasas marginales de sustitución.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta G} + \frac{\Delta x_2}{\Delta G} = \frac{UMg}{UMgx_1} + \frac{UMg}{UMgx_2} = CMg(G)$$

Si la suma de las tasas marginales de sustitución fuera menor que el costo marginal, es posible manejar el bienestar de las dos personas.

¿Qué significa la condición de eficiencia en el sentido de Pareto ? puede interpretarse considerando que la TMgS mide la disposición "marginal" a pagar una unidad adicional del bien público. En ese caso, la condición de eficiencia indica simplemente que la suma de las disposiciones marginales a pagar debe ser igual al costo marginal de suministrar una unidad adicional del bien público. En el caso que estamos análisando aquí, el bién público puede suministrarse en diferentes unidades, la condición de eficiencia establese que la suma de las disposiciones marginales a pagar debe ser igual al costo marginal de la cantidad óptima del bien público.

Como antes, merece la pena comparar esta condición de eficiencia del bien público con la del bien privado. En el caso del, bien privado, la TMgS de cada persona o su disposición marginal a pagar debe ser igual al CMg; en el caso del bien público, es la suma de las tasas marginales sustitución, lo que debe ser igual al costo marginal. En el caso de los bienes privados, cada persona debe consumir una cantidad diferente, pero todos deben valorarla igual en el margen, ya que de lo contrario querrían intercambiarlas. En el caso de los bienes públicos, cada persona debe consumir la misma cantidad, pero todas pueden valorarla de forma distinta en el margen. Para hallar la provisión *eficiente del bien público solo es relevante la suma de sus valores.*

La figura 5, representa la condición de eficiencia. para hallarla basta trazar las curvas TMgS. de cada persona y sumarlas verticalmente. La asignación eficiente del bien público se encontrará en el punto en el que la suma de las TMgS. sea igual al CMg. (como se muestra en la figura No.5).

Sin embargo, tenemos, por otra parte, un modelo de distribución de bienes sociales a través del presupuesto, el cual integra las propiedades de los bienes sociales en la teoría del bienestar económico. En este modelo se considera necesario un mécanismo para que las preferencias sean relevantes y la correspondiente distribución de bienes sea hecha.

Para vincular la provisión con una eficiente distribución, la provisión de bienes sociales se llevará a cabo en términos de un modelo de presupuesto, un sistema en el cual una distribución inicial del ingreso es considerada, y donde la provisión de bienes sociales se decide sobre el resultado de una línea de evaluación a los consumidores con base en su ingreso y preferencias.

El costo de los bienes sociales es cubierto por los impuestos tabulados con base en una evaluación en el consumo, es decir, como un sistema generalizado de asignación de contribuciones. Esto funciona bajo la hipótesis de que las preferencias son conocidas o reveladas.

Más especificamente, asumimos que se fija un impuesto igual al precio que pagan los consumidores individuales como una carga a su consumo de bienes sociales en concordancia con una regla similar de valuación en una operación en el mercado competitivo de bienes privados. Es decir, para cada consumidor todas las unidades de un bien son vendidas a un mismo precio, y la tasa de precios unitarios de X y S es igual a la TMgSC. de los consumidores. A y B pagarán el mismo precio por X mientras consumen diferentes cantidades, y pagarán diferente unidad de precios por S mientras consumen la misma cantidad.

Esta solución se ilustra en la figura No.6. La línea de posibilidades de producción CD, en la parte superior de la figura, muestra diferentes combinaciones de S (bien social) y X (bien privado) que puede ser producida y estan disponibles en la economía como un todo. La gráfica en el centro de la figura muestra la posición del consumidor A y la gráfica de abajo la posición de B. Suponemos que el ingreso es dividido entre A y B, así A recibe una parte igual a OM/OC del total de la producción del bien privado, mientras B recibe ON/OC, donde OM + ON = OC. La línea punteada MV representa la distribución óptima del ingreso de A entre X y S, variando la tasa de precios. Esta señala los puntos de tangencia de las curvas de indiferencia con las líneas que parten de M. Dada la tasa de precios OM/OP, la posición óptima de A, estara en Q, donde MP es tangente a la más alta curva de indiferencia ia_2. La línea punteada NW señala una trayectoria de precios similar para B.

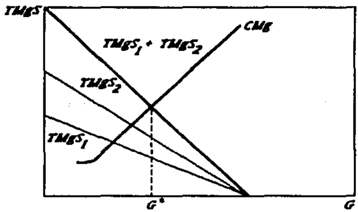


Fig. 1.5. Determinación de la cantidad de un bien público. La suma de las relaciones marginales debe ser igual al costo marginal.

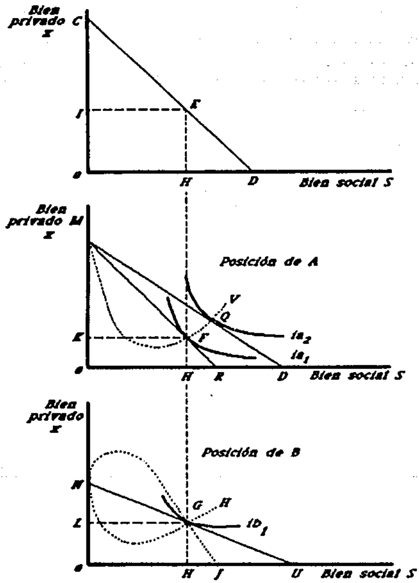


Fig. 1.6. Bienes sociales y privados con una distribución dada.

Siguiendo la posición de A a lo largo de MV, podemos trazar la correspondiente posición posible para B, como muestra la curva punteada NJ. Cada par de puntos muestra la misma cantidad de consumo de S, mientras que el consumo de X por B se deduce del consumo de ese bien por A (mostrado por MV), así agotada la cantidad total de X (indicada por CD). La curva NW señala las posiciones preferidas por el consumidor B las cuales resultarían de considerar dieferentes tasas de precios cuando B compra bienes sociales y privados. Las curvas NJ y NW se intersectan en G, y la correcta valuación y el nivel de producción se obtiene cuando B se encuentra en G mientras A se posiciona en F, así la producción total es dividida entre bienes sociales y privados, esto es, en el punto E sobre la línea (de posibilidades de producción) CD. Ambos consumen OH de S, mientras la producción OI del bien privado se divide en OK bienes para A y OL para B, donde OK + OL = OI. Esta solución tiene las siguientes características:

1. La solución conforme a la distribución inicial del ingreso, asigna a A una parte igual a OM/OC y ON/OC para B.

2. A y B pagan un impuesto tal que cada una de las tasas marginales de sustitución en consumo de S por X es igual a cada una de las tasas de precio, así que nuestra regla de valuación se cumple.

3. La contribución combinada de impuesto de A y B iguala el costo de S.

4. La solución satisface el criterio de eficiencia del modelo de Samuelson, es decir, que la suma de las tasas marginales de sustitución igualan a la tasa marginal de transformación. La solución E refleja un punto en la frontera de utilidad de la figura No.3, a este punto corresponde un nivel dado de distribución del ingreso y una regla de valuación especificada.

Condiciones de mercado y provisión de bienes públicos

En el modelo presentado asumimos que las preferencias de los consumidores son conocidas, para lo cual fue necesario un proceso de política, es decir, un proceso de votación a través del cual se dan a conocer las preferencias, considerando, además, una distribución inicial del ingreso. Bajo estas consideraciones pudimos aproximar una asignación de recursos para producir bienes sociales y privados los que se distribuirían optimamente a los consumidores, alcanzando así las condiciones de eficiencia en el sentido de Pareto.

Sin embargo esta solución no es factible, ya que los beneficios de los bienes sociales están disponibles para "toda la sociedad", por otra parte, se espera que mediante el proceso de votación se aproxime una solución eficiente. Pero ésta solución requiere de un mercado competitivo para la distribución de bienes privados y es óptima dada una distribución inicial del ingreso.

Provisión de bienes públicos

Hasta ahora hemos manejado nuestro análisis considerando que la provisión de bienes privados se lleva a cabo a través del mercado, y la provisión de bienes sociales "involucra un proceso presupuestario". Es decir, hemos partido de una clara distinción entre bienes privados y sociales; sin embargo puede existir un obstáculo a tal distinción ya que ciertas necesidades pueden aparecer en una gran variedad de formas, y pueden ser satisfecha a través de compras de bienes privados o a través de la provisión de bienes sociales.

Si consideramos, ademas como bienes o servicios públicos, a algunos servicios disponibles para el público, tales como los museos o restaurantes, vemos que son en realidad provistos "privadamente", otros como el transporte son generalmente privados.

La provisión privada se asume como la producción , provisión o reparto de servicios para el sector privado en uno o más casos. Allí donde hay muchos compradores y vendedores, por ejemplo, los mercados convencionales pueden organizarse para permitir a los compradores "exigentes" los valores óptimos ofrecidos por la competencia, mientras que los proveedores intentan hacer la mejor oferta, compitiendo así por los clientes. Los proveedores privados, pueden, además, proveer bienes o servicios de las siguientes formas: 1.- A través de contratos de agencias públicas. 2.- Franquicia monopólica. 3.- Contratos administrativos. 4.- A través de fiadores, y 5.- Por cooperativas de consumo.

Por otra parte, en una economía como la nuestra, el gobierno generalmente no actúa en los negocios de produción y venta de los bienes privados. Sin embargo puede haber situaciones con las que el gobierno venda dichos bienes. Tal es el caso de la venta de tabaco que en algunos países se asume como la venta a través de una empresa de gobierno; y la venta de licor o de vino es frecuentemente regulada a través de tiendas o almacenes del Estado o bajo regulación del gobierno. En estos casos, el gobierno "asume una posición monopolista. Siguiendo el comportamiento de un monopolista privado, podría igualar el beneficio público marginal (BPMg) con el CMg, así como maximizar las ganancias, dejando BPMg > CMg. La solución eficiente para el gobierno no es seguir este patrón y explotar su poder monopólico, aunque esto implique una industria competitiva. Aunque la determinación de esta solución eficiente puede dificultarse fuera del mercado competitivo, una vez que esto es conseguido, podría autorizar un precio justo para cubrir el precio justo para cubrir el bajo costo, esto permitiría que el costo fuera cargado a los consumidores del servicio.

Si el gobierno no siguiera esta regla para cargar un alto precio, esta política podría ser considerada equivalente a una imposición excesiva de impuesto al producto.

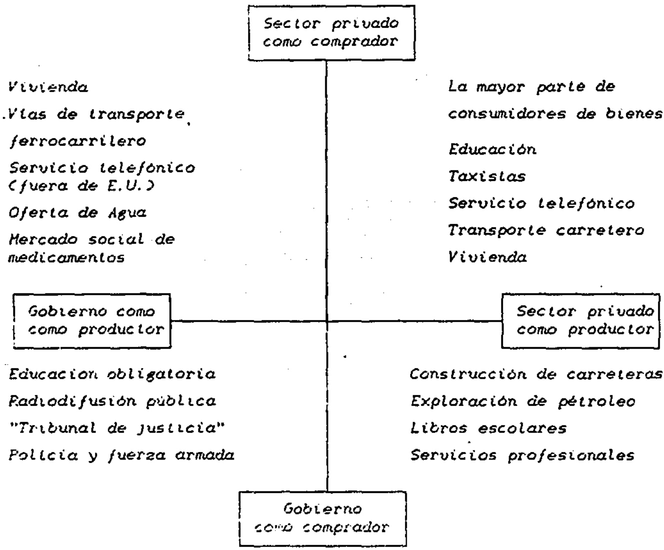
La fijación de tal impuesto, distorsiona la distribución de los recursos e incluye una carga exesiva, a menos que sea justificado por demérito de los bienes; este puede ser el caso en el precio del tabaco y el licor, productos que son frecuentemente considerados nocivos.

Así, el gobierno y el sector privado puede actuar como compradores o productores (y por lo tanto, proveedores) de bienes y servicios públicos, o como ambos, esto se puede ilustrar en la matriz siguiente (cuadro 1)

La parte superior del cuadrante representa al sector privado como comprador, y la parte de abajo del cuadrante representa al sector público como comprador. El lado derecho del cuadrante representa al sector privado como productor y el cuadro de la izquierda representa al sector gobierno como productor. Muchos bienes y servicios pueden aparecer en uno o más cuadrantes, dependiendo del país considerado. Además, las actividades pueden moverse de un cuadrante a otro, por ejemplo, servicios tomados por el sector público o relacionados con el sector privado.

La parte de la esquina derecha del cuadrante representa los casos en los cuales ambos, compras y producción los hace el sector privado. Estas actividades, típicamente de este sector, también incluyen servicios públicos que son producidos privadamente en muchos países, como los taxistas, agua embotellada, y muchas medicinas.

En la parte izquierda superior del cuadrante se presentanlas actividades en las cuales el gobieno actúa como productor y los individuos privados como compradores. Esto incluye industrias nacionalizadas, coorporaciones públicas, y en lo que hasta hace poco fue la URSS, casi todos los bienes y servicios, otras actividades en este cuadrante podrían ser "mercados sociales", por medio de los cuales las agencias de salud venden medicinas, por ejemplo, los compradores son individuos cuyas compras estan determinadas por sus necesidades y preferencias.



Cuadro 1. Gobierno y sector privado como comprador y productor de servicios públicos.

La parte inferior izquierda del cuadrante cubre los sectores en los cuales las agencias públicas actuan como ambos, compradores y productores de servicios. Un ejemplo típico es la educación primaria obligatoria, donde una "agencia" pública emplea maestros y también decide la actividad educacional. Las decisiones son extendidas a través de un proceso de política en el cual las personas afectadas pueden tener "roles" importantes, pero una vez más las decisiones tomadas por los individuos no pueden influir en los resultados excepto en acciones futuras de política. Por ejemplo, si se decide que un lenguaje particular no se enseñara en escuelas estatales, las familias no pueden cambiar hoy la regulación estatal.

Otras actividades en este cuadrante son las fuerzas armadas y la policía, las leyes de la corte y los empleados del gobierno juzgan y deciden que cosas se pueden trabajar. Arbitros, quienes desempeñen trabajos similares pero son empleados privadamente, podrían estar en la parte superior del cuadrante como fuerzas de seguridad privada, escuelas privadas en E.U. y,ahora en México, servicios telefónicos.

Finalmente, en la parte inferior derecha del cuadrante estan las actividades que son producidas por el sector privado pero que son compradas por el gobierno. Contratando afuera y administrando contratos apegados a esta categoría. Un ejemplo de esto es la construcción o mantenimiento de carreteras: el gobierno decide cuando serán construidas estas y su estandard, pero las empresas privadas deciden construirlas y mantenerlas. Los doctores se emplean así mismos, trabajando bajo un proyecto nacional de salud, el cual, sin embargo, podría estar en este cuadrante: los profesionistas trabajan para sí, pero su remuneración se obtiene fuera del fondo público.

Un cambio en la provisión pública o privada podría incluir cambios hacia la parte izquierda o la parte derecha de esta matriz. Sin embargo, esto no cambia invariablemente hacia la parte superior derecha del cuadrante (esto es, al mercado normal privado) Un movimiento hacia la parte inferior derecha del cuadrante puede tener ciertas ventajas. El gobierno podría estar relacionado con la provisión de servicios, pero en un rol diferente, como comprador en lugar del productor.

Como vemos, es posible impedir a las empresas que arrojen contaminantes, pero es mucho más difícil para los gobiernos fomentar la provisión de bienes públicos a través del mercado.

Estas son actividades económicas que proporcionan grandes o pequeños beneficios a la comunidad que no es posible dejar a la iniciativa privada. Importantes ejemplos de producción de bienes públicos son el mantenimiento de la defensa nacional y del orden público interno, la construcción de autopistas y el apoyo a la ciencia pura, y a la sanidad pública. Las empresas privadas no proporcionarán estos bienes públicos porque sus beneficios se dispersan tanto entre la población que ninguna empresa o consumidor tiene incentivos para proporcionarlos (como los faros suministrados por el Estado).

Dado que generalmente serán insuficientes los bienes públicos suministrados por las empresas privadas, el Estado debe intervenir para proporcionarlos. Al comprar bienes públicos, como defensa nacional o faros, se comporta exactamente igual que cualquier otro gastador. Al canalizar recursos a partir de ese momento se hace cargo del sistema de precios y éste actúa "casi" como si se tratará de elecciones privadas más que colectivas.

Más tipicamente, el gobierno ofrece bienes, los cuales no pueden ser provistos eficientemente por empresas privadas porque su producción está sujeta a costos decrecientes. Este es el caso de servicios públicos tales como el agua, el suministro de *electricidad, el sistema de transporte y el servicio postal[4]. Estas son "areas" donde el mercado competitivo no puede funcionar porque grandes empresas pueden producir con un bajo costo, y finalmente una sola empresa se encarga de proveer el mercado entero. A través de la intervención del gobierno, maximizando ganancias, resultado de su comportamiento monopólico, podría generar una pequeña producción con un alto precio. Aunque la regulación del gobierno es una alternativa, la existencia de costos decrecientes implica que la empresa podría sufrir pérdidas en caso de ser forzada de operar hasta el punto en el que el precio es igual al CMg. El gobierno puede preferir esto para vender el mismo servicio y una empresa pública es substituida para la regulación de una empresa privada.*

Esta situación es explicada en la figura 7, donde CP y CMg son las curvas de costo promedio y costo marginal de la industria, y IPP y IMg son las curvas de ingreso promedio y marginal. Siguiendo la regla IPP = CMg, el precio eficiente se sitúa en Pmc y el nivel de producción en OA. Puesto que el CP es decreciente, el CMg tiene que estar bajo CP; y como IPP = CMg con un nivel de producción OA, se sigue que OP sea tan grande como IPP. Así se incurre en una pérdida. En la fig.7, la unidad pérdida es igual a BC y la pérdida total es igual a PmcBCD.

Una empresa privada podría evadir este problema al igualar IPMg con el CMg y maximizar el beneficio a un precio Pm, con una producción limitada OE. Aquí no se excluye por política pública el cargar un precio Pm, es decir, cargar una cantidad exesiva de impuestos al producto. Como otra posibilidad, ¿ el gobierno podría eludir la pérdida cargandola a la evaluación del CP, es decir, igualando el IPP con el CP [8] Con la producción OF y el precio Pac, la empresa podría hacerlo, pero la producción OF estaría abajo del nivel de eficiencia OA. Alrededor de este no se logra una cantidad eficiente al precio Pmc y producción OA, ya que deja un déficit que

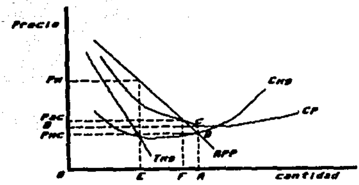


Fig. 1.7. Valuación del costo marginal y promedio.

tiene que ser cubierto de algún modo.

Consideremos una economía donde en todas las empresas el precio es igual al costo marginal, la producción ideal se obtendrá en este punto, si los CMgs son crecientes. En cambio, si el costo medio(CMe) está bajando, la igualdad del precio con el CMg implica una pérdida, esta pérdida debe ser financiada con algún "impuesto", conforme a las alternativas que examinaremos posteriormente.

Evidentemente, surgen algunas complicaciones. Cuando la competencia no sea perfecta en otras industrias , y, por lo tanto, los precios superan los costos marginales, la fijación del precio de un producto, al nivel del costo marginal, generará una producción mayor que la ideal. Se obtendrá la distribución ideal de los recursos entre las industrias, cuando la razón de precios a costos marginales sea igual, en todas las industrias. Pero si los precios se encuentran por encima de los costos marginales no será ideal la oferta de factores productivos. Esto sugiere que, si nos ocupamos de la determinación del precio de un servicio -público dado- y debemos suponer el hecho de que en todos los demás productos el precio es igual al CMg multiplicado por algún factor $a > 1$-, se obtendrá el nivel ideal de producción de este servicio público si su precio se fija entre el CMg y aCMg. La localización ideal del precio dentro de este intervalo, dependerá del efecto de este sobre la oferta de los factores, y de su distribución. Surge un problema similar cuando una industria constituye un sustituto cercano del producto de otra, en que la razón del precio al CMg, sea muy diferente de la existente en la mayoría de las industrias.

La segunda complicación se refiere al control de la política de inversión. Se ha sostenido que si los precios se fijan a un nivel igual (o proporcional) al CMg, habrá un criterio automático en cuanto a la cantidad de inversión que debe realizarse. Esto sólo es cierto si nos referimos a la magnitud de la inversión realizada por una empresa que ya existe, y si dicha cantidad puede tratarse como una variable continua (es decir, si no hay indivisibilidades significativas, de planta). En este caso se pueden trazar curvas de costo medio y marginal, a largo plazo, y la producción óptima se obtiene cuando el precio es igual al CMg, a corto y largo plazo. Lo primero asegura la obtención del nivel ideal de producción, con el equipo de capital dado; lo segundo asegura la disponibilidad de la cantidad requerida de equipo de capital.

Los precios de los bienes públicos

La problemática más importante de la fijación de precios de los servicios públicos, deriva del hecho de que los costos no dependen solamente del nivel de producción, sino también del número de consumidores y del momento y lugar de la entrega. El principio implicado en la igualación del precio al nivel del Cmg, es sencillo aunque su aplicación puede no serlo. [cada consumidor debe pagar los costos de la empresa, si consume sus productos, menos los costos en que incurriría la empresa, si no los consume]. En muchos casos esto implicará un precio de varias partes para asegurar que *(este principio) se aplique al consumo total del consumidor, y también a cada una de las partes de ese consumo. Por ejemplo, el suscriptor telefónico debe pagar el costo de instalación, una renta del teléfono, y un cargo por cada llamada que haga relacionado con la distancia.*

Por último surge una complicación del hecho de que los costos marginales pueden fluctuar, grandemente, en períodos cortos. Es decir, consideremos, por ejemplo, que si los autobuses que circulan en Calzada I. Zaragoza de las diez de la mañana tienen asientos vacíos, un lunes por la mañana, el costo marginal de transportar un pasajero adicional puede ser insignificante. Pero de las siete a las nueve de la mañana, podría haber congestionamiento que refierese a autobuses "especiales", de modo que el CMg será elevado. Sin embargo, la variación de los precios sería extremadamente inconveniente. Si se decide que, para permitir a los consumidores que hagan sus planes por adelantado, se cobrará el mismo precio a las diez de la mañana y a las siete de la mañana. Y que la tarifa sólo se cambiará una vez al año ¿ cual será el CMg ?. La única solución consiste en promediar el CMg a lo largo de todo el intervalo, donde deban regir los precios uniformes. Esta solución es una transacción, entre la igualdad exacta de CMg, y el precio, por una parte y las ganancias de la conveniencia queobtienen los consumidores, y la empresa de cierto grado de estabilidad. Dado que esto implica un precio mejor que el CMg, para algunos consumidores y menor, para otros, produce cierta distribución desigual de los recursos, que sólo puede disminuirse aumentando el número y la flexibilidad de las siguientes tarifas.

En un mercado imperfecto el precio supera al CMg, en cada una de las empresas. Por lo tanto, estas no están produciendo al nivel óptimo.

Supongamos que se obligue a todas las empresas a elevar la producción y equiparar el precio con el CMg. Cada empresa debe tratar, entonces, de aumentar su producción. Sin embargo, no pueden hacerlo, así al mismo tiempo sin alterar los niveles de costo marginal. Si todas las empresas se ven afectadas de la misma manera, todas producirán al mismo nivel que antes, y sus costos marginales habrán aumentado, hasta el nivel del precio. Pero los beneficios de cada empresa se habrán reducido, y algunas de ellas saldrán del mercado. Esto puede ilustrarse con un diagrama (fig. 8).

Sean CMe_1 y CMg_1, las curvas de costo medio y costo marginal, cuando las empresas esten elevando al máximo sus beneficios, y DD' e IMg las curvas de demanda e ingreso marginal. La competencia por los factores, resultante del intento de ampliar la producción de OA a OB, hace que la curva de CMg suba hasta que pase por P. Esto debe subir también la curva de costo medio, la que, por lo tanto ya no pasará por P.

Por lo tanto se liberan recursos, lo cual permite la expansión de las empresas restantes y, al mismo tiempo aumenta la curva de demanda para todas las empresas que permanecen en la industria.

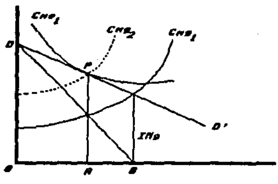


Fig. 1.8. Ajustamiento de beneficios externos.

Esta disminución del número de empresas, continuará hasta que la curva de demanda se eleve lo suficiente, y las curvas de costo bajen lo suficiente para que la curva de demanda corte a la curva de CMe en su intersección con la curva de CMg.

Si consideramos totalmente irracionales las preferencias de los consumidores, este método de regulación de los mercados imperfectos, resulta satisfactorio porque asegura la oferta óptima de los factores, además de su distribución óptima entre las industrias.

Sin embargo, es poco realista considerar irracionales todas, o aún la mayoría de las preferencias de los consumidores. Si no hacemos este supuesto, la imposición de la equiparación del precio con el costo marginal, implica la eliminación de empresas, y con ello, la pérdida del exedente de los consumidores. La ganancia se obtiene de la eliminación de una empresa, puede ser mayor o menor, que la pérdida de exedente derivada del menor número de elecciones al alcance del consumidor.

No existe ninguna prueba practicable para describir si una fuente de oferta particular debe ser eliminada, o no. Ello se debe a que el exedente de los consumidores, derivado de la existencia de la empresa A depende de que las empresas B y C continúen existiendo. Por lo tanto, aún cuando conociéramos las escalas de preferencias completas de cada individuo, la condición relativa a cuáles y cuántas empresas deben permanecer en el mercado, sólo puede expresarse en un sistema insoluble de desigualdades.

Existe una justificación de la conservación de algunas fuentes de oferta, que no podrían pagar sus costos si se equiparace el precio al Cmg, y si se conservan, alcanzarán un nivel ideal de producción mediante dicha equiparación. El costo debe sufragarse en alguna forma, con fondos estatales, o bién la igualación del precio al costo medio. Pero si el gobierno paga la pérdida, y no tiene un criterio acerca de cuales empresas deba retener, se experimentará una fuerte inclinación a la concentración de la producción, en aras de la eficiencia y la eliminación de pérdidas. Las alternativas parecen ser la operación de Lerner, con la reducción de la escala de elección del consumidor, y la retención del sistema actual de fijación del precio, al nivel del CMe en los mercados imperfectos. El último sistema conserva la elección de los consumidores a expensas de la eficiencia productiva, y de una oferta distorsionada de los factores.

Por lo tanto, la elección entre estos dos métodos no la dicta la lógica del razonamiento económico. Sólo se puede basar en una estimación personal de importancia relativa de mantenimiento de la variedad de la elección, frente a la eliminación de los desperdicios de la competencia perfecta.

Consideraciones para financiar el déficit

Para analizar las diferentes alternativas para financiar o cubrir el déficit consideramos el caso más sencillo posible. Por ejemplo, la construcción de un puente cuesta cierta cantidad, y de ahí en adelante el costo no se ve afectado por el número de veces que se use. El costo marginal es cero, y el costo medio representa, simplemente la difusión de los costos fijos sobre un número variable de usuarios. Deben resolverse entonces tres problemas:

i) Si se construye un puente ¿ qué cuota debe cobrarse a los usuarios, y cuál es el precio de sus servicios ?

ii) ¿ Con qué criterio debe decidirse la construcción de un puente ?

iii) Si las respuestas a las dos interrogantes implican una pérdida por la construcción del puente ¿ cómo debe *financiarse esta pérdida ?*

La primera respuesta es sencilla. Cualquier cuota que se cobre, impedirá que el puente se utilice en algunas ocasiones. Pero el costo de utilización del puente, una vez construido, es cero, y la pérdida de quienes no pueden cruzarlo, no es compensada por una ganancia por nadie. Así pues, el mejor uso de los recursos disponibles se obtiene cuando todos cuantos quieran cruzar el puente lo hagan, y una cuota impide ésto. Podemos expresar lo anterior afirmado que la producción ideal se alcanza cuando el precio es cero.

El segundo interrogante es más complicado. Si la decisión de construir el puente la asume una empresa privada , y se financia con una cuota, el puente se cOnstruirá, siempre que la cuota más ventajosa pague al menos el costo. Esto significa que los ingresos deben pagar el valor de los factores empleados en su producción, que es igual al valor de su producto en otros usos (siempre que en las otras industrias la competencia sea perfecta). Ahora bien, considérese el caso de un puente que, de acuerdo con este criterio, no se justifica construir. Si no se construye habrá pérdidas por dos razones; primero, porque existen consumidores que estarían dispuestos a pagar la cuota que fije la empresa y algunos más, antes que prescindir del puente, por lo tanto, si se construye recibirán una ganancia por encima de lo planeado, y si no se construye esa ganancia se pierde; en segundo, pierden las personas que no esten dispuestas a pagar la cuota y quienes sólo se beneficiarán si se construye el puente y no se cobran cuotas. Por lo tanto el criterio de la rentabilidad no es el adecuado para decidir si el puente representa una ganacia para la comunidad en su conjunto.

Supongamos que el propietario pudiera cobrar precios *diferentes a cada usuario, de tal modo que cada uno de ellos pague la cantidad máxima que estuviese dispuestc a pagar por el uso del puente en cada ocasión. Es decir, supongamos que se puede prácticar una discriminación perfecta.*

Si el propietario encuentra que con esta discriminación, sus ingresos superan a sus gastos, la construcción será una ganancia neta para la comunidad.

En consecuencia, el criterio para decidir si el puente debe construirse es que se paguen sus costos, cuando se cobre sobre la base de discriminación perfecta.

Podemos probar lo anterior en términos de la teoría Marshalliana del exedente de los consumidores. en la gráfica 9, DD' es la curva de demanda, y AP es el valor de la cuota que elevará al máximo los ingresos del propietario del puente (rectángulo AOPB). El puente será construido por un empresario privado, siempre que los ingresos superen al costo anual del puente, pero no de otra manera. Si se construye y se cobra una cuota de AP, el exedente de los consumidores está representado por el área BDP. El hecho de que se cobre una cuota significa que todos los consumidores para quienes el uso del puente valga menos que AP perderán un exedente de los consumidores representado por APD', a pesar de que, por hipótesis, no se requeriría ningún gasto para satisfacerlos. Entonces el monopolista que discrimina tendría ingresos representados por toda el área ODD' y todos los consumidores para quienes el puente tenga algún valor lo usarán.

Si la curva de demanda es una linea recta, y un empresario privado construye el puente, sólo la mitad de los usuarios potenciales lo usarán en realidad, y sólo se construirá si la ganacia potencial total es el doble del costo de la construcción. Esto mide en algún grado la ineficiencia de un sistema de

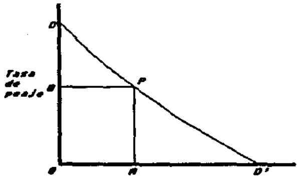


Fig. 1.9. Número de personas que usan el puente en un año.

prestación de servicios públicos sobre la base del ingreso que pueda obtenerse por los mismos.

Ahora resulta que, por dos razones, el puente no podrá financiarse si ha de obtenrse la oferta óptima de sus servicios. En primer lugar cualquier cuota producirá una mala distribución de los recursos; en segundo, se construirán puentes que no podrán pagarse solos con ningún método practicable de fijación de cuotas. El tercer interrogante se refiere a la forma de finaciamiento de esta pérdida.

La respuesta obvia parece ser que la pérdida debe cubrirse con fondos generales de la tesorería, o sea por los contribuyentes, mediante una adición a los impuestos que ya están pagando. Esta es la solución que propone Hotelling y Lerner, pero no es totalmente satisfactoria. Se olvida el hecho de que la tribulación no es un proceso indoloro, y también el hecho de que es posible que los beneficiarios del puente no sean los mismos que deben pagar los impuestos adicionales.

Hotelling acude al hecho de que siempre habra impuestos que no impliquen costos para la sociedad. En realidad, aunque puede haber algunos impuestos que serían conveniente establecer, aún cuando no haya necesidad de recaudaciones (a las bebidas alcohólicas, o posiblemente a las personas muy ricas), todo estos impuestos ya se habrán establecido. Tampoco existen impuestos neutrales en ningún Estado moderno. Si la tesorería debe hacer nuevos gastos, los propios impuestos adicionales producirán una mala distribución de los recursos. Hotelling reconoce esta hecho con respecto al impuesto sobre el ingreso, que produce una desviación de la actividad pagada a la no pagada (de trabajo al ocio, y del trabajo remunerado al no remunerado), de la inversión arriesgada a la segura y del mejoramiento de la eficiencia, a la evasión de impuestos. Por estas razónes, sostiene que el déficit debe pagarse con impuestos a la renta de la tierra. Ahora bien, si el impuesto a las rentas, a una tasa mayor que otros ingresos, es legítimo (y probablemente la mayoría de nosotros pensaríamos que no lo es), tales rentas debieran gravarse en su totalidad, ya sea que deban financiarse, o no, los servicios públicos, con la tributación general. Por lo tanto el gasto adicional debe financiarse, de nuevo, con las fuentes normales de recaudacion, principalmente los impuestos al ingreso o los indirectos.

Lerner es menos explícito, pero parece contemplar que el Estado distribuiría un dividendo social que sería independiente de otros ingresos. Por lo tanto, si hay que financiar pérdidas de los servicios públicos, este dividendo podría ser reducido convenientemente, sin causar una mala distribución de los recursos. Resulta, sin embargo, difícil concebir un dividendo social positivo (excepto en una sociedad completamente colectiva en que el Estado reciba todo el ingreso derivado de la propiedad), a menos que el gasto estatal se financie con otros impuestos. Lerner considera la posibilidad de un dividendo social negativo, es decir , un impuesto de suma fija. Esta sería ciertamente una solución; desde cierto *punto de vista, un impuesto de suma fija es el impuesto ideal porque no produce mala distribución de los recursos. Infortunadamente es el más regresivo de los impuestos, de modo que como solución práctica al problema de obtención de recaudaciones, solo puede existir en sociedades muy excepcionales.*

Así pues, una solución completa de la política de precios de los servicios públicos debe considerar la ventaja de su funcionamiento en condiciones que generen pérdidas y, al mismo tiempo, los impuestos que deberán establecerse para pagar esta pérdida. Un puente podría producir una pequeña ganancia neta sobre su costo, pero si la recaudación de los impuestos adicionales que se requieren para financiarlo implica una pérdida mayor, de exedente de los consumidores, no debe construirse. Los dos aspectos del problema deben examinarse al mismo tiempo.

Cuando se construye un puente, y no se cobran cuotas, para cada usuario habrá alguna disminución de su ingreso, que lo dejaría tan bien como antes.

Este es su excedente de consumidor. El criterio de decidir la construcción del puente, es que la suma de todos los excedentes de consumidores que produce, supere al costo del puente. Por lo tanto, si se puede inventar algun método para cobrar una suma fija anual a cada usuario, ajustada de tal forma que nadie deba pagar más que su excedente de consumidor, este será el método de cobro. Dado que la suma es fija, no se podrá evitar, mediante cambio alguno del consumo, o de la oferta de factores, de modo que no produce ninguna mala distribución de recursos. Tampoco produce ninguna redistribución de ingresos entre los constribuyentes y los usuarios del puente. Por último, lo que probablemente es más importante, permite controlar la cantidad de inversión.

Esta es una cuestión sumamente difícil. Podemos establecer un criterio formal de los casos en que debe construirse un puente:

cuando sea rentable con discriminación perfecta, o lo que es lo mismo, cuando los excedentes de los consumidores supere el costo. Pero ¿cómo podemos descrubrir si ésta condición se satisface en un caso particular? Hotelling considera que este "no es un problema histórico, sino matemático y económico". Pero no es tan simple como eso. ¿Como procederemos para descubrir el excedente de los consumidores obtenido del servicio de un puente?. Si ha habido un transbordador, el excedente será mayor que el ingreso bruto del transbordador, pero ¿cómo intentaremos determinar en qué medida será mayor?. La única solución posible (y sólo en algunos casos) consiste en cobrar a cada usuario una suma fija imputable especificamente al puente y permitirle que se rehuse a pagar -al costo de no utilizar jamás el puente- si el cobro le parece demasiado elevado. La única persona que puede tratar de estimar su excedente de consumidor, es el propio consumidor. Si no existe forma alguna de que el consumidor compare el costo con la ventaja, se presentará el peligro grave de que se hagan estimaciones totalmente divorciadas de los hechos, y que nunca se revelen como tales. En cuanto se admite que pueden justificarse inversiones no rentables, y que ningun cálculo practicable puede demostrar si lo son o no, queda abierto el camino para cualquier inversión que desee cualquier autoridad pública. En la mayoría de los casos se encontrará que no es posible una verificación completa, pero algunos métodos de financiamiento son mejores que otros, para lograr una verificación parcial.

Lo más sencillo es juzgar varias políticas de fijación de precios considerando como óptimo la igualdad del precio con el costo marginal (en la caso del puente igual a cero). Esto causará una perdida que debe pagarse mediante un impuesto, el cual puede asumir varias formas: impuesto al ingreso, tarifas locales, una cuota para los usuarios o la venta de boletos estacionales. Algunos de estos impuestos sólo pueden ser recaudadas por una autoridad fiscal, mientras que otros pueden ser recaudadas por empresarios privados. Sin embargo, el principio es el mismo. Hay que establecer algún impuesto, y el problema consiste en encontrar el mejor. Naturalmente no habrá una respuesta; el mejor impuesto será diferente de acuerdo con la naturaleza precisa de cada caso particular.

Primero debemos establecer los criterios para decidir cuales impuestos son buenos:

1) La producción ideal de una invesion dada. Un impuesto es bueno si asegura que, una vez hecha la inversión, la usarán todos cuando esten dispuestos a pagar el CMg.

2) La inversión óptima. Un impuesto es bueno, si asegura que un puente, que no resulta rentable con ninguna cuota todavía, se puede constuir. Es bueno, también , en la medida en que asegure que no se construyan puentes cuyó costo supere al excedente de los consumidores. Existe un doble problema; el sistema de financiamiento no debe ser demasiado cicatero ni demasiado despilfarrador.

3) La distribución de la carga. Un buen impuesto es el que coloque la carga donde lo desean las preferencias políticas. Si la distribución de los ingresos era óptima, antes de la construcción del puente, esto significa que los costos deben pagarlos los usuarios del mismo.

4) El financiaminto autónomo. La mayoría de los análisis recientes de este problema, han pasado por alto la influencia que tiene el método de financiamiento sobre la organización de la industria. Es claro que si las autoridades públicas deben pagar las pérdidas, tendrán que controlar la operación de la empresa. En un mundo donde no se puede prever completamente el futuro, la pérdida a pagar

variará año con año y dependerá de la eficiencia de los administradores. De modo que quien quiera que haya de pagar la pérdida, debe nombrar y controlar a los administradores. Esto significa no sólo la nacionalización, sino la nacioanlización con el control político detallado de las operaciones. Se cree, generalmente que una empresa privada tendrá más incentivos para ser eficiente, que una empresa de propiedad estatal (aunque esto puede ser contrarrestando, con creces, por el hecho de que la empresa estatal puede tratar de favorecer los intereses de los consumidores, mientras que una empresa privada, sólo lo hará en condiciones especiales, que nunca existen en el campo de los servicios públicos). Se cree también, generalmente, que una empresa pública tenderá a ser más eficiente entre mayor sea el grado de autonomía de que disfrute. Pero sólo pueden tener autonomía, si su financiamiento es autónomo. Por lo tanto, un sistema de fijacion de precios que permita a la empresa pagar la pérdida derivada de la igualdad de precios y costos marginales, directamente y sin recurrir a las autoridades políticas es por ese motivo preferible a un sistema que no tenga tal característica. La importancia de esta consideración depende de una estimación de la ventaja administratriva de la autonomía.

Se advertirá que no hemos incluido como criterio la cuestión de los incentivos para la eficiencia de operación de la empresa, en oposición a la eficiencia de la decisiones de inversión. Sin llegar a la explotación absoluta monopólica (que no consideramos en absoluto), todos los sistemas de fijación de precios de los servicios públicos, abandonan el incentivo automático de la eficiencia derivada de la motivación del beneficio. La eficacia del funcionamiento del cualquier sistema, depende entonces, de métodos administrativos detallados de control y designación. Todo cuanto podemos decir, en general, es que la autonomía de las decisiones hace posible la eficiencia, mientras que la división de la responsabilidad de las decisiones la vuelve muy difícil.

Aplicando los cuatro criterios de un buen impuesto, podemos considerar los métodos siguientes de financiamiento del déficit:

a) Subsidio con fondos nacionales: esto es equivalente a un aumento de la tributación nacional, del que sólo tenemos que considerar un aumento del impuesto al ingreso, o de los impuestos indirectos sobre el consumo.

b) La tarifa en dos partes: este es un impuesto a la propiedad real como condición de la oferta del servicio público.

c) Subsidio con fondos locales: en el Reino Unido esto equivale a un impuesto sobre los bienes raíces.

d) El precio igual al costo medio: esto equivale a la igualdad del precio, con el costo marginal mas un impuesto al consumidor del servicio público (que recauda directamente la empresa correspondiente).

e) Discriminación de precios esto equivale a la igualdad del precio, con el costo marginal, más un impuesto al consumo, a tasas diferentes para clases diferentes de consumidores.

Todos estos métodos de financiamiento pueden considerarse simplemente como métodos diferentes de recaudación, de los fondos necesarios para pagar el déficit resultante del método óptimo de fijación del precio de los servicios del puente. En seguida examinaremos detalladamente las ventajas de estos métodos, con referencia a un conjunto mas amplio de servicios públicos, el puente es sólo un ejemplo. Esto implica que incluyamos otras consideraciones y pasemos por alto algunas de las complicaciones que surgen con la fijación de los precios de otros servicios públicos. Se verá que cada uno de estos métodos de tributación, *puede estar justificado en casos particulares, y que no puede haber un juicio a priori, en el sentido de que alguno de ellos sea siempre el correcto.*

A) Los fondos nacionales. Esta solución tiene la ventaja de permitir la equiparación del precio con el costo marginal, y la realización de inversiones que no serían posibles con ninguno de los tres métodos mencionados, en el último término. Cuando la ventaja es local (como ocurre en la mayoría de los servicios públicos) este método no tiene ninguna ventaja sobre el uso de tasas locales, pero cuando la ventaja se difunde ampliamente, es éste el único método que puede impedir que la oferta del servicio pública sea menor de lo que debiera ser. Los ferrocarriles, los caminos trocales, o los servicios de defensa, deben ser administrados para el país, en conjunto y, por lo tanto, financiados nacionalmente. Esta ventaja le ha parecido concluyente a Hotelling. Pero Coase ha señalado que esta solución tiene algunas grandes desventajas. No impide que la inversión en servicios públicos aumente hasta el nivel óptimo, pero no puede impedir que aumente por encima de dicho nivel. Es posible que grabe a algunas personas para beneficio de otras, y asegura la pérdida de la autonomía financiera.

Si las finanzas nacionales dependieran de un impuesto de suma fija, esta sería la objeción principal. Pero, en realidad, debemos considerar otros impuestos. Como antes vimos, un impuesto al ingreso conduce a una mala distribución de los recursos, y no hay razón para que esa mala distribución no sea tan importante, como la ganancia derivada de la igualdad del precio y el costo marginal, en algún servicio público. Si el impuesto es indirecto sobre el consumo, ello significa que la igualdad del precio con el CMg se obtiene en una industria a expensas de una desigualdad del precio, y el costo marginal en alguna otra industria. Debe haber alguna *ganancia, porque el impuesto indirecto podría cobrarse al producto del servicio público (en cuyo caso llegamos a la igualdad de precio con el costo medio); si no es así, ello se deberá a que se piensa que algún otro impuesto directo produce una pérdida menor de excedente de consumidores. Pero la ganancia puede ser menor que la pérdida de autonomía financiera y del control sobre la inversión excesiva.*

Por esta razón, es erronea la afirmación de que el empleo de la tributación general, deberá ser la respuesta correcta en todos los casos de servicios públicos. Es igualmente erroneo sostener, que nunca puede serlo. En el caso del uso de puentes y caminos por los peatones, toda otra forma de financiamiento sería intolerablemente inconveniente. Para los ferrocarriles las únicas alternativas son la igualdad del precio con el CMg, o la discrimanación de precios, y puede justificarse un subsidio con fondos estatales. Lo que es más importante, los servicios generales del Estado (por ejemplo los servicios de defensa), son servicios públicos cuyos beneficiarios son los ciudadanos del país. El único método de financiamiento es el de la tributación general, en forma tal, que el contribuyente no pague más que el excedente de consumidor, obtenido de dichos servicios.

B) La tarifa de dos partes. El principio de este método es que el consumidor paga una suma fija, por año, si desea consumir el producto del servicio público, y además, paga el costo marginal de cada unidad producida. Si la suma fija se determinase, separadamente para cada consumidor, de manera tal que ningún consumidor debiese pagar, más que el excedente que obtenga de su cosumo, éste método sería ideal. En realidad es imposible la determinación individual, y el cobro fijo debe relacionarse con algun criterio objetivo. Esto significa que puede considerarse como un impuesto sobre algo distinto del consumo de los servicios públicos. El método más común consiste en basar el cobro, en el valor prorrateable de las instalaciones.

Ello proporciona un control sobre la inversión excesiva, porque a medida que la inversión aumenta, debe aumentar el cargo fijo, y los consumidores tienen la oportunidad de retirarse. Esto no asegura que la inversión excedera el nivel óptimo, pero si que el exceso no llegará a superar el excedente de los consumidores. Además éste método preserva la autonomía financiera del servicio público, y asegura que los beneficiarios pagarán el costo. Por último, permite que quienes decidan incurrir en el cargo fijo, consumirán la cantidad óptima del servicio ofrecido.

Estas razones convencerán a Coase de que éste es el método de financiamiento correcto. Pero hay objeciones teóricas y prácticas. Es cierto que el método permite que quienes están dispuestos a pagar el cargo fijo, consuman la cantidad óptima, pero también excluye por completo a quienes considerán que el cargo es demasiado elevado. Por lo tanto, el método es solo eficiente en los servicios donde existe algun criterio que permita relacionar estrechadamente el cargo con los excedentes individuales. Cualquiera que sea la base utilizada, implica un impuesto sobre alguna forma de gasto, y, por lo tanto una desviación correspondiente de los recursos; si el cargo fijo se basa en el valor prorrateable, sera equivalente para los consumidores, a un aumento de las tasas, y constituira un desaliento la construcción de viviendas de alto valor prorrateable.

El valor de este sistema en cualquier caso dado, depende enteramente de la base sobre la cuál pueda evaluarse el cargo fijo; depende del impuesto que implique. En el caso de electricidad, funciona bien porque el factor desalentador del impuesto, es pequeño y porque le impuesto corresponde bastante bien al exedente derivado del uso de la electricidad, al costo marginal, pero aún así debe excluir a algunos consumidores que estarían dispuestos a comprar electricidad al costo marginal. En el caso del gas, este sistema de cobro esta restringido por las objeciones de esta clase.

En cuanto a los ferrocarriles, los individuos difieren grandemente en el uso que hacen del servicio ofrecido y no se puede encontrar una base para la determinación del cargo fijo. En la esfera limitada, donde resulta fácil la aplicación de la tarifa de dos partes, puede argumentarse fuertemente a su favor, pero no debe olvidarse que esta esfera es muy limitada.

C) Las tarifas locales. Un subsidio con fondos locales financiados por tarifas, parece muy diferente a la tarifa de dos partes. Sin embargo, a excepción del hecho de que implica una pérdida de autonomía financiera es exactamente equivalente al uso de una tarifa de dos partes en el caso de cualquier servicio que consuman todos cuantos paguen la cuota. Este es el caso de la provisión de agua. La diferencia surge, entonces, solamente de la pérdida de la autonomía financiera y de la pérdida del derecho de retirarse cuando el cargo fijo (o el elemento apropiado de la cuota general) supere al exedente del consumidor. Esta es una ventaja cuando el retiro implique costos para otras personas (por ejemplo la eliminación de los derechos) y es inevitable cuando no se puede identificar a los consumidores (el uso de caminos o autobuses locales). De nuevo, este es el método de financiamiento adecuado para algunas clases de servicio público.

D) Igualación del precio al costo medio. Este método pude considerarse como el de la igualdad del precio al CMg, combinado como un impuesto indirecto sobre el servicio ofrecido. En cuanto se admita que la pérdida derivada de la igualdad del precio con el costo marginal puede ser financiada con impuestos indirectos, no podemos excluir la posibilidad de que el mejor impuesto pueda ser el que se establezca sobre el servicio público particular, que origina dicha pérdida. Este caso sería posible si no existiese otros factores, pero, en realidad, sólo puede darse raramente y por accidente.

El método tiene las desventajas obvias de disminuir la explotación de la inversión existente, por debajo del nivel óptimo, y de disminuir el monto de la inversión por debajo del óptimo. Por otra parte, asegura la autonomía financiera, e impide que haya una redistribución del ingreso de una sección de la comunidad a otra. Por último, asegura que la inversión no sea exesiva, como ninguno de los otros métodos puede hacerlo. Por lo tanto, cuando sea importante la autonomía financiera, cuando las desventajas de la inversión excesiva sean mayores que las de la inversión deficiente, y cuando no haya bases suficientes para una tarifa de dos partes, queda la posibilidad de que el mejor método de financiamiento consista en permitir, a la empresa, que cubra un precio igual a sus costos medios.

E) La discriminación de precios. Esta es una variante del método anterior, en que el impuesto necesario para financiar la pérdida deriva de la igualdad del precio y el costo marginal, se establece sobre los consumidores, pero a tasas diferentes, para clases diferentes de consumidores. Cuando la discrimación es prácticable, siempre se pueden encontrar tasas diferenciales que aumenten la producción y la inversión, por encima del nivel que se alcanza con un sólo precio, sin que lleguen jamás a exeder (o bien, dado que nunca puede prácticarse la discriminación perfecta, sin que lleguen, jamás, a alcanzar), el nivel ideal. Por lo tanto, es preferible esta política siempre que sea prácticable. En la práctica la aplicación de la discriminación puede verse limitada *por el hecho de que el auge de la producción a nivel máximo, puede requerir la discriminación contra clases de consumidores que se desea favorecer por razones sociales. Por esta razón ha visto impedida la discriminación en los ferrocarriles.*

Los ejemplos más comunes de discriminación se encuentran en las tarifas de los ferrocarriles y (como una alternativa a la tarifa de dos partes) en las tarifas eléctricas. Antes del desarrollo del transporte carretero, las tarifas del ferrocarril eran satisfactorias. La única alternativa habría sido el financiamiento mediante la tributación general, y es razonable creer que la racionalización, que esto habría implicado, habría tornado mucho menos activo, el desarrollo de los ferrocarriles; que habría disminuido la inversión en lugar de aumentarla.

Sin embargo no hay un método de financiamiento de los servicios públicos que sea el mejor en todos los casos. El método apropiado depende de las condiciones detalladas de cada caso, y estas pueden cambiar, de tiempo en tiempo.

Antes de presentar una formalización matemática de algunos aspectos expuestos hasta aquí sobre la fijación de precios óptimos, consideremos algunos aspectos importantes en la distribución de bienes públicos que no hemos mencionado, como son la limitación local y el problema de la saturación u horas pico.

Cuando hablamos de bienes publicamos como "existe la misma disponibilidad del uso del servicio para todos", no pensabamos que la población del mundo o la de un país completo fuera incluida. El area del beneficio social es limitada para la mayor parte de los bienes sociales y los miembros de un grupo son de este modo son confinados por los residentes de esta área. Esta restricción no cambia el procedimiento natural del argumento. Un grupo que es suficientemente grande para requerir provisión de bienes sociales, a través de un proceso político, no necesita ser incluido todo. Al *mismo tiempo este "futuro" de limitación espacial de beneficios es esencial en la aplicación de la teoría de bienes sociales para el gobierno local.*

Otro caso, también de especial importancia -en relación a las finanzas locales-, surge a través de los bienes consumidos en iguales cantidades por todos los miembros de un grupo particular, que pueden ser verdaderamente competitivos en consumo. Cada que más usuarios se suman al consumo, la calidad de los servicios recibidos por todos los usuarios, dada una instalación, disminuye. Así, por ejemplo, la calidad de instrucción recibida por el estudiante individual de un profesor singular, puede disminuir por el aumento de alumnos que reciben la clase, o una calle previamente vacía puede "presumir" de regresar con tráfico creciente.

De este modo un mayor problema en la valuación pública resulta para la variavilidad de demanda de servicios públicos. El poder de demanda suele ser mayor durante el día que en la noche y más durante algunas horas del día que en otras. Ahora, ¿ se contemplan ambas variaciones en la valuación de los servicios de una planta dada y en la evaluación de la decisión de inversión en una nueva planta ?. Y bien, ¿ ésta variación está distribuída de acuerdo al grado de congestión ?

Veamos como resolver este problema, suponemos que la capacidad de una planta dada es tal que puede cargar un precio igual al CMg; ¿ la demanda durante un período, que llamaremos período "pico", es mayormente excesiva al máximo poder de suministro que puede surtirse, ya que fuera del período "pico" hay una mayor distribución por capacidad excesiva ? Será necesario fijar una provisión límite en el período "pico". Así se cargaría un precio igual al suministro limitado con mayor demanda. Los consumidores que no encontrarán el uso del precio provechoso en el período "pico", desviarán su demanda fuera de este período, cuando el servicio sea provisto a un precio mas bajo que el CMg de operación. Fuera de este periodo "pico" el uso del bien se incrementará y el suministro derivado para los consumidores de este servicio será maximizado.

Esto se ilustra en la figura (10) donde OC es la capacidad de uso, D_pD_p es la demanda en el periodo "pico" y D_oD_o es la demanda fuera del periodo "pico". AB es la curva de operación de CMg, que asumimos constante sobre la capacidad de uso, en tal punto la curva de oferta se vuelve totalmente inelástica. De este modo el precio+ en el periodo "pico" es OP_p, mientras que fuera de él, el precio es OA. En el periodo "pico" se utiliza una capacidad igual a OC y fuera de éste se usa OF.

Otros resultados podrían obtenerse cuando en ambos, en el periodo "pico" y fuera de él, las demandas intersectarán la curva vertical de oferta o cuando ese resto de la capacidad excesiva en ambos periodos cargara precios diferenciales porque la operación de costos es variable. Sin embargo, sólo en la situación de operación constante de costo y exceso de capacidad en ambos periodos es que un precio uniforme será apropiado.

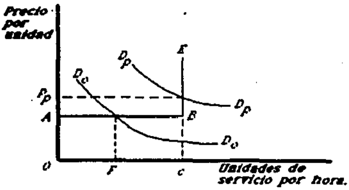


Fig. 1.10. Valuación de horas pico con capacidad fija.

La solución de la figura (10) puede ser la mejor posible bajo ciertas circunstancias, pero difícilmente es una situación satisfactoria.

A largo plazo, el problema es ajustar la dimensión de la capacidad en la existencia de la demanda variable. La solución de este problema resulta de particular interés, anteriormente vimos a los usuarios dentro y fuera del periodo de demanda máxima como "adaptados" al servicio de la planta. O, conducidos diferentemente, pudimos observar en la planta como un bien social (o un tipo de bien intermedio) que ofrece servicios a los consumidores en el periodo "pico" y fuera de el, quienes en su momento pudieron utilizarlo. Se calcula el beneficio al proveer una nueva inversión, la cual debe adaptar la demanda que tiene que ser considerada aplicando, al mismo tiempo, la regla del largo plazo de igualación del precio al CMg.

Tal solución es ilustrada en la fig. (11)

El eje horizontal ahora mide las unidades de poder de suministro de capacidad de operación para varios niveles de capacidad. Dp es la curva de demanda de consumidores en el periodo

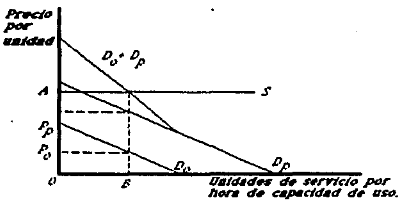


Fig. .1.11. Valuación de horas pico con capacidad variable.

máximo y D_o es la curva de demanda de los conumidores fuera del período, en donde la demanda en cada caso revela el nivel de poder disponible con capacidad de uso. Turnando en el lado del costo, simplificamos asumiendo que, operando con un CMg igual a cero sólo en el largo plazo o la capacidad de costo estuvo cubierta. Con una capacidad de costo constante a largo plazo en OA, la capacidad marginal de largo plazo, la curva de costo esta dada por AS. Puesto que las dos demandas relatan un período de tiempo diferente (e.g. máxima demanda de 7 a 11 am y de 4 a 8 pm, y fuera del período "pico" de 11 am a 4 pm y de 8 pm a 7 am) estas no son competitivas en el uso del bien. Las curvas de demanda de los dos grupos de usuarios pueden ahora ser sumadas verticalmente para obtener la demanda total de la capacidad de la planta. La propia capacidad de la planta es determinada por OB donde la capacidad de CMg es AS igual al precio, incluyendo OP_p para ser cargado en el período "pico". A este precio cada grupo usará completamente la planta durante este período.

Mientras que la valuación diferencial en el caso de la fig. (11) conduce a toda la utilización en ambos períodos, este resultado no es necesario. Suponemos que la demanda por capacidad de producción fuera del período máximo está abajo de la curva D_o baja de cero a un nivel el cual D_p intersecta la curva de capacidad de CMg D_p. En este caso la solución eficiente es cargar el precio del CMg en el período máximo el cual permite el uso fuera del período "pico". Entonces el resto del exeso de capacidad, será ineficiente para limitar este uso cargando un precio. Sin embargo, una vez más surge una cuestión de equidad, puesto que los usarios del período "pico" pueden sentir que fuera de éste no podrán ser "polizontes" pero podrían contribuir con el costo.

Los principios fundamentales de este tipo de análisis son reflejados en el precio inicial (pactado) participando de utilidades, e.g. una valuación de poder diferencial usada en diferentes partes del día. En otra situación tal diferenciación refleja el razonamiento de la capacidad eficiente de producción en el proceso máximo para la mayoría de los usos urgentes.

Ahora consideraremos el problema que afronta un organismo público o semipúblico como el servicio de correos y de teléfonos. Dicho organismo ha de determinar los precios de sus productos de manera que se maximice el bienestar social. Si ese es su único objetivo los precios deberán ser iguales a los costos marginales, como ya hemos visto.

Desgraciadamente, las tecnologías de los organismos públicos se suelen caracterizar porque dan lugar a unos costes medios decrecientes. Los ejemplos citados parecen poseer de hecho tecnologías que aplican unos costes medios muy elevados y costos marginales bastante reducidos. La regla de la "igualdad del precio y el CMg " indudablemente dará como resultado un nivel de beneficios negativo, que, resulta socialmente inaceptable.

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿ cuál sería la política óptima de fijación de los precios, sujeta a la retricción de que los beneficios sean iguales a cero (o cualquier otro valor predeterminado)? Para poder dar una respuesta, imponemos algunas restriciones al problema. En primer lugar, suponemos que todos los consumidores son idénticos, de modo que podemos representar el bienestar agregado mediante una sola función indirecta de utilidad $v(p,y)$.

En segundo lugar supondremos que le ingreso es independiente de las variaciones de los precios, lo cual en este caso equivale a suponer que un mismo bien no puede ser factor y producto simultáneamente.

Sea $x_i(p)$ la función de demanda del consumidor del i-ésimo bien, y sea $P(p) = \sum p_i x_i(p) - \sum c_i(x_i(p))$ la función de *beneficios del monopolista.*

Esta función toma en consideración implícitamente la conducta demandante de los consumidores.

Podemos expresar el problema de maximización del organismo público de la siguiente forma :

$$\text{max.} \quad v(p\,,\,y)$$

$$\text{s.a.} \quad P(p) = 0$$

Las condiciones de primer orden serán :

$$-\mu\frac{\partial v(p^*\,,\,y)}{\partial p_i} - t\,\frac{\partial P(p^*)}{\partial p_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

Aplicando la propiedad de la derivada de la función indirecta de utilidad, podemos escribir esta condición como :

$$-\,x_i(p,\;y)\mu\frac{\partial v(p^*\,,\,y)}{\partial y} - t\frac{\partial P(p^*)}{\partial p_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

es decir

$$\frac{x_i(p^*,y)}{x_j(p^*,y)} = \frac{\partial P(p^*)/\partial p_i}{\partial P(p^*)/\partial p_j} = \frac{\partial P(p^*)\partial p_j}{\partial P(p^*)\partial p_i} \qquad \begin{matrix} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n \end{matrix}$$

Esto significa que el incremento marginal de los beneficios resultante de la variación de un precio ha de ser proporcional al nivel de producción del bien en cuestión. Para espresar esta cuestión de manera mas transparente desarrollamos la derivada de la función beneficios del monopolista de acuerdo con su definición. Supondremos, únicamente para simplificación que la demanda del bien i es independiente del precio del bien j, así que: $\partial x_i(p)/\partial p_i = 0$, para $i \neq j$.

Expresamos la función de beneficio como:

$$P(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) p_i - \sum_{i=1}^{n} c_i \left[x_i(p) \right]$$

de modo que:

$$\frac{\partial P(p)}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i} + x_i - \frac{\partial c_i(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i}$$

$$= x_i + \left[p_i - \frac{\partial c_i(x_i)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i}$$

Hacemos $\lambda = 1/(\partial v(p^{*}, y)/\partial y)$ *y lo sustituimos en las condiciones de primer orden iniciales:*

$$- x_i = \lambda x_i + \lambda \left[p_i - \frac{\partial c_i(x_i)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i}$$

Reordenando tenemos :

$$- \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \frac{x_i}{(\partial x_i(p)/\partial p_i)} = p_i - \frac{\partial c_i(x_i)}{\partial x_i}$$

Dividimos ambos miembros por p_i; *sea* $\epsilon_i = - \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i}$ *la elasticidad de la demanda respecto al propio precio.*

Tenemos entonces que:

$$\frac{1+\lambda}{\lambda}\ \frac{1}{\epsilon_i} = \frac{p_i^{*} - \dfrac{\partial c_i(x_i)}{\partial x_i}}{p_i^{*}} \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\left[1 + \frac{1}{\lambda} \right] \frac{1}{\epsilon_i} = 1 - \frac{\partial c_i(x_i)}{p_i\, \partial x_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

Esta formula indica que la desviación porcentual de los precios respecto a los costos marginales habría de ser inversamente proporcional a las elasticidades de la demanda de los bienes en cuestión. Lo cual significa que los bienes cuya elasticidad de demanda es muy pequeña deberían venderse a un precio mucho mayor que su CMg y viceversa.

¿ Cual es el sentido de esta regla ? Desde el punto de vista del bienestar social, lo relevante es la cantidad consumida de cada bien. Los bienes de cuya demanda es poco elástica, son relativamente insensibles a los aumentos de su precio; en consecuencia para estos bienes se fijarán unos precios muy superiores a los costos marginales. Para los bienes cuya demanda es relativamente sensible al precio, éste se fijará mucho más proximo al CMg. De este modo se minimiza la distorsión que nos aportaría de la combinación óptima de consumo.

Por último advertimos que el problema de la elección de los precios óptimos sujeto a una restricción presupuestaria es análogo al problema de la elección de los impuestos óptimos sujeto a una restricción sobre la recaudación impositiva, como hemos análizado.

CAPITULO II

CAPITULO II

MODELO DINAMICO

II. 1. Consideraremos ahora las características relevantes de los bienes públicos vistos en el analisis previo para que a partir de estas abordemos la base de lo que será el cuerpo analítico de este capítulo, es decir, la caracterización fundamental para construir la conceptualización del modelo dinámico y de la utilización de la teoría de control óptimo.

Los bienes públicos se distinguen como aquellos que no generan exclusividad y no son competitivos en el mercado, razón por la cual su provisión o suministro no se hace a través de las condiciones generales del mercado, sino que involucra un proceso presupuestario, ya que estos no se pueden dividir en unidades que se convierten en posesión única o se venden fácilmente a consumidores individuales.

Por otra parte, los beneficios derivados del bien público producen efectos externos indivisibles de consumo en más de un agente. Estos beneficios externos o externalidades son una característica exclusiva de los bienes públicos. Este fenómeno se produce cuando existe un efecto difusión, es decir, cuando la conducta de un agente económico (empresa, gobierno o consumidores) afecta (o involucra) el campo de acción de los demás agentes.

Estas características plantean problemas especiales como el determinar la cantidad óptima de suministro de estos bienes, cuándo suministrarlo, cómo fijar el precio, etc.

Hemos señalado que en el caso de los bienes sociales, siguiendo el principio fundamental de la utilizacion óptima de los recursos, si el objetivo es maximizar el bienestar social los precios deberán ser iguales a la suma de los costos marginales.

Además el beneficio marginal derivado por los consumidores es diferente para cada uno, por tanto, es la suma horizontal de estos, lo que se igualará al costo marginal.

La condición de optimalidad del problema de maximizar el beneficio de una empresa proveedora de bienes públicos es la siguiente: la suma de las tasas marginales de sustitución entre los bienes públicos y privados debe ser igual al costo marginal de suministrar una unidad adicional del bien público; llegamos así a la relación fundamental.

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} = \frac{UMg}{UMgx_1} + \frac{UMg}{UMgx_2} = CMg(G)$$

$$TMgS_1 + TMgS_2 = CMg(G)$$

Desde el punto de vista del bienestar social, lo reelevante es la cantidad consumida de cada bien. Los bienes cuya demanda es relativamente insensible (al cambio) a los aumentos de su precio, para estos bienes se pueden fijar precios muy superiores a los costos marginales. Pero los bienes cuya demanda es relativamente sensible al precio, éste se fjará mucho más próximo al CMg. De este modo se minimiza la distancia que nos apartaría de la combinación optima de consumo.

Por otra parte vimos que generalmente el gobierno ofrece bienes los cuales no necesariamente pueden ser provistos eficientemente por empresas privadas, porque su producción esta sujeta a costos decrecientes. Este es el caso de servicios publicos tales como el agua, la energía eléctrica, "la defensa nacional", el servicio postal, etc. Estas son áreas donde el mercado competitivo no funcionaría adecuadamente porque grandes empresas pueden producir con un bajo costo y finalmente una sola se encarga de *proveer el mercado entero.*

Para el caso de empresas "productoras" o provedoras de bienes públicos, en los que, generalmente sus costos son negativos o incurren en pérdidas hay mecanismos para cubrir o financiar el déficit, generalmente a través de la política impositiva. Existen diversos criterios para fijar "un buen impuesto" para el financiamiento del déficit, mencionamos algunos como:

a) Subsidios con fondos nacionales.

b) La tarifa de dos partes.

c) Subsidio con fondos locales.

d) El precio igual al costo medio.

e) Discriminación de precios.

En México la provisión de bienes (y/o servicios) públicos se lleva a cabo, generalmente, por empresas públicas, aún cuando recientemente la iniciativa privada ha empezado a participar en este sector.

No es nuestro objetivo análizar el carácter o el porque en nuestro país la empresa productora de bienes públicos se ha desarrollado por medio de control estatal. Aunque si es importante destacar que en México las empresas del Estado, o de participación estatal, constituyen un grupo heterogéneo con objetivos y medios diversos. Existen aquellas que son controladas presupuestalmente, que son los que representan propiamente un instrumento adicional de política económica, tanto desde la óptica de asignación de recursos como la de sus efectos presupuestales y macroeconómicos, y las otras en las que se mantenía una participación sin controlar la empresa y que se han desincorporado por no considerarse ni prioritarias ni estratégicas.

Los organismos y empresas controladas no se han caracterizado como un elemento muy dinámico en la política de ingresos del Estado. La participación de los ingresos corrientes de las empresas *públicas en los ingresos corrientes totales del sector público ha observado una tendencia descendente. Sobre todo en los períodos de crisis aguda (1982-1986).*

La lenta evolución de los ingresos de las empresas públicas se explica comunmente por la política de subsidios realizada a través de la venta de bienes y servicios de estas empresas.

Con un indicador relativamente sencillo puede compararse la evolución de los precios de las empresas públicas con el índice de precios al mayoreo y se comprueba la existencia de rezagos sistemáticos en el índice de precios de estas empresas.

Con un indicador relativamente sencillo puede compararse la evolución de los precios de las empresas públicas con el índice de precios al mayoreo y se comprueba la existencia de rezagos sistemáticos en el índice de precios de estas empresas.

La política de ingresos de las empresas públicas se basa en la modificación de sus precios y presenta dificultades de aplicación debido a que se utiliza con objetivos diversos, como: incentivos, suministro de bienes a la población de escasos recursos, empleo, etc.

Son tres los aspectos que se consideran en la modificación de los precios y tarifas de los bienes y servicios de las empresas públicas:

i) Su efecto en la racionalización del consumo.

ii) La generación de recursos adicionales y su efecto en la estructura de precios y costos de las empresas, y

iii) Sus implicaciones macroeconómicas.

La evolución de las dos primeras se realiza tomando como base estudios sobre la demanda y la estructura de costos de las empresas.

Al analizar globalmente las cuentas de producción de las *empresas paraestatales se observa la disminución de la capacidad para generar exedentes que sustenten la expansión y apoyen las finanzas públicas. En estas, el concepto de superavit muestra la dificultad de generar recursos en forma autónoma.*

En la medida en que las empresas públicas, consideradas globalmente, no se expandan por sus propios medios y tengan que recurrir al subsidio gubernamental, no sólo para sus gasto de inversión, sino también para el gasto corriente, se está comprometiendo un instrumento útil de política económica y deteriorando el proceso de asignación de recursos.

Desde el punto de vista macroeconómico, la empresa pública de México se ha utilizado, además, como medio de asignación directa de recursos a través de la inversión en sectores considerados de alta prioridad o como instrumento de canalización de subsidios y regulación de precios.

La reducida capacidad de ahorro en las empresas públicas y los mayores volúmenes de inversión realizados por ellas ocasionan que su participación en el déficit económico del sector público sea creciente, al menos hasta años recientes; así las empresas públicas constituyen un elemento fundamental en la política presupuestal.

De esta manera uno de los elementos de análisis de las finanzas de estas empresas se refiere al mecanismo de determinación de su precio.

La política de precios y tarifas de las empresas del Estado o de participación estatal es difícil de definir globalmente por la diversidad de objetivos que persiguen o por las condiciones productivas en las que operan.

Muchas veces se aduce como principio teórico de la política de precios públicos de la igualdad del precio y el costo marginal aunque generalmente no se precisa su validéz en relación con las condiciones de la economía, la estructura del mercado ni de la empresa pública.

El principio es estático, y, en general, las condiciones de mercados concentrados donde operan las empresas públicas no permiten adoptarlo como instrumento eficiente de asignación de recursos, al menos en su esquema original. Por otra parte existen las empresas, como el caso de ferrocarriles y la electricidad, con costos decrecientes donde la adopción del principio del costo marginal de corto plazo ocasionaría pérdidas, y el de los costos medios o marginales de largo plazo implicaría la exclusión de usuarios en detrimento de la utilidad pública. En el caso de empresas de producción y distribución de electricidad se observan otros aspectos especiales relacionados con la distribución de la demanda y la utilización promedio de la capacidad instalada que implica precios diferenciales.

En el caso de México existen además de los aspectos generales de política de precios y tarifas, elementos particulares relacionados con los objetivos implícitos o explícitos asignados a las empresas públicas. Estos objetivos tienen que ver con la promoción económica, con la construcción de infraestructura o con la política de subsidios aún cuando no tienen un orden claro de prioridades.

Para evaluar el logro de los objetivos de una política de precios en forma más completa se requiere de información de la incidencia de las decisiones de las empresas públicas en las decisiones de inversión privada o en las modificaciones en el ingreso real de los grupos subsidiados.

Aquí se hace hincapié en las empresas que pueden clasificarse como productoras de bienes y que se asemejan en mayor medida con las empresas privadas. A continuación se presentan algunos aspectos macroeconómicos y después se análizan algunas relaciones de la política de precios con el resto de la economía.

-La fijación de precios y tarifas: criterios generales o implicaciones microeconómicas.

La definición de una política de precios depende de los objetivos asignados a las empresas y de los efectos de los cambios en dicha política. El análisis implicaría:

i) Precisar cuál ha sido ésta hasta ahora y en función de que objetivos se ha establecido.

ii) La interdependencia de la política de precios con otros aspectos de importancia como el ahorro público, el nivel general de precios, la incidencia distributiva, etc.

La modificación de los precios de las empresas públicas se ha utilizado más como recurso de última instancia para contener el aumento del déficit público que como instrumento de movilización de recursos. Este aspecto de la política de precios y tarifas a nivel macroeconómico ha sido insuficientemente considerado.

En forma general la relación de la política de precios de las empresas públicas con la economía en su conjunto se establece, en el corto plazo, principalmente a través del proceso de formación de precios y de sus efectos en las finanzas públicas. La repercusión de las modificaciones en los precios de las empresas públicas, en el corto plazo, está en función de la importancia y la localización de las empresas en el proceso productivo , así como sus efectos presupuestales.

Se dice que la incidencia de las modificaciones de precios de las empresas públicas en el nivel general de precios es de "una solo vez" y su magnitud depende de la importancia que estas tengan en la estructura de costos, aunque depende también de las condiciones de estabilidad económicas.

Los precios y tarifas del sector públicos constituyen un elemento en el proceso de formación de precios, cuya especificación considera, tanto elementos de costo como de demanda.

Los precios de los bienes producidos en la economía mexicana se fijan, generalmente, en relación con los costos considerados normales mas un margen de beneficio, este proceso estará sometido en el corto plazo a la restricción representada por las fluctuaciones de la demanda.

Los precios y tarifas del sector público constituyen un elemento de costo en la función de precios para las empresas privadas y por esta vía afectan al resto del sistema. Otro efecto importante de la política de precios del sector público se refleja en la evolución de los ingresos de las empresas controladas presupuestalmente; en el caso extremo de mantener los precios nominales constantes, los ingresos de estas empresas se incrementarían sólo en la medida en que aumente el volumen de sus ventas, por lo que habitualmente ocurre una disminución de sus ingresos reales.

Las modificaciones de precios de las empresas públicas pueden ser eficaces como medio de movilización de recursos internos para formación de capital a través de los aumentos en el ahorro público. Además, habría que tomar en cuenta que existen otros aspectos como la disminución relativa del déficit público que amplía generalmente los margenes de maniobra de la política económica.

Así, podemos concluir que la intervención en la fijación de precios es importante en un estudio de largo plazo sobre la provisión de bienes públicos. Por ello se construirá un modelo dinamico que permite, en parte, analizar algunos de los elementos mencionados arriba. En particular, considerar el papel del tiempo en las decisiones de fijación de precios de los bienes públicos.

II.2. EL ESQUEMA DINAMICO, UNA PRIMERA APROXIMACION.

Asumimos como proceso dinámico aquel que considera los cambios ocurridos en un periodo de tiempo (de t_0 a t_1), estos cambios pueden ser determinados o influidos por decisiones que se toman en el presente, decisiones que son inherentemente dinámicas. Por ejemplo consideremos una empresa (o agente económico) productora o proveedora de bienes públicos. Esta empresa cuenta con un acervo de capital productivo Ko que le permite generar un nivel determinado de bienes el cual satisface una demanda dada, en un periodo de tiempo (de t_0 a t_1). Supongamos el progreso técnico como dado. La empresa en un primer momento se enfrenta a un precio inicial Po .

Si la empresa decidiera "sobre utilizar" su acervo de capital para satisfacer una demanda inicial, ésta le provocaría problemas posteriores, es decir, en algún momento su capacidad instalada sería insuficiente para satisfacer la demanda en otro momento, consecuentemente aumentaría sus costos. Así una decisión que se toma en un momento "inicial" puede afectar o incluso determinar una decisión futura.

En este sentido, cada decisión impone una externalidad posterior, de esta manera hablamos, efectivamente, de procesos dinámicos.

Cada elección o decisión que se toma en el presente, genera un comportamiento en el tiempo o trayectoria a lo largo de la cual se presentan cambios en el flujo de recursos e ingresos que han sido extendidos a lo largo del tiempo.

Por otra parte las decisiones que se toman en cada momento deben contemplar la utilización óptima de los recursos y la maximización de la riqueza.

Para ver con mayor claridad en que consiste este proceso y como nuestras decisiones pueden generar una trayectoria "óptima" que refleje que nuestros objetivos productivos y de provisión de bienes lo son, consideremos el ejemplo anterior, una empresa productora (incluyendo el caso de la provisión) de bienes públicos con un acervo de capital productivo inicial K_o, donde asumimos, además, que el valor de la empresa está dado por el valor del stock.

La dimensión o tamaño del acervo de capital cambiará a través del tiempo y su valor variara correspondientemente. Cuando se cuenta con un stock de capital importante, se puede pretender elevar los niveles de producción más allá de los requerimientos inmediatos, razón por la cual una decisión en el presente puede tener un efecto adicional en el costo marginal de suministrar bienes públicos en el futuro, sobre todo cuando se refiere a recursos no renovables, y afectar también el valor presente de los recursos. Así, el valor presente de los recursos totales es el valor capitalizado de la suma de los beneficios futuros menos los costos, por tanto las decisiones tomadas en el presente que afectan el costo del acervo productivo son reflejadas en el valor presente de los recursos.

Sea $K(t)$ el stock de capital (o acervo productivo) en algún momento t, así la utilidad $K_o = K(t_o)$. El suministro de bienes públicos se lleva a cabo en términos de la existencia de un nivel creciente de acervo de capital productivo, el cual estaría relacionado directamente con el nivel de ingresos de la empresa y éste finalmente por "el precio, que para este tipo de bienes, fija la empresa", P, donde el precio en algún momento sería $P_t = P(t_t)$.

LLamemos $\dot{K}$ a la variación (o capacidad de crecimiento) del acervo productivo de capital. Así $\dot{K}_t = K(t_t)$, donde:

$$\dot{K} = f(\dot{Y}(Pt_t) - C)$$

$$\dot{K} = f(\dot{Y} - C) \qquad (1)$$

es decir, la variación en el acervo de K es función directa de la variación del ingreso menos los costos, donde además la "satisfacción" de la demanda es función del stock de capital $X^d = f(K_o)$.

La ecuación (1) define la dinámica de este modelo, es llamada ecuación de estado, $K(t)$ es la variable de estado y $P(t)$ es la variable de control. Esta es la variable de cambios por decisiones en el mercado o controles (un mayor o menor precio en la medida en que le ha sido imputado un nivel de impuesto determinado, las decisiones de canalizar mayores o menores cantidades de ingreso al mantenimiento o amplicación del stock, etc.).

El grado o nivel de suministro (o provisión) de bienes públicos depende del acervo de capital productivo, del producto del trabajo y otros factores. Asumamos una función de costos bien definida con las propiedades usuales; entonces definimos $C = (K, W)$ donde W es el vector de precios de los factores, incluido el trabajo.

Nuestro problema de programación es que dada una demanda a satisfacer en lo futuro debemos encontrar una trayectoria de precios que garantice la existencia de un nivel de capital productivo que sea congruente con aquella en cada momento. Es decir, para satisfacer un nivel de demanda creciente en el tiempo se requiere incrementar el stock inicial de capital K_o.

Los ingresos que se obtienen deben ser suficientes no sólo para cubrir los costos de operación en t (que incluyen el mantenimiento del acervo de capital productivo), sino que le permita incrementar el acervo en un horizonte de planeación temporal.

En este sentido los costos de la empresa en t_o son los derivados de las operaciones en K_o, del costo de los factores en el momento t_0, i.e. C_0^v y además el costo de ampliación del stock de capital o inversión.

La característica de ser bienes públicos implica que el precio no refleja las valuaciones marginales de los consumidores y por tanto requiere un proceso exógeno para determinarlo.

Este proceso exógeno debe considerar que al fijar el precio relativo se fija el ingreso recibido por la empresa, por tanto se estará determinando la capacidad de crecimiento del acervo productivo.

Hasta aquí sólo hemos definido el problema, el cuál está referido a la optimización de recursos en un horizonte de planeación intertemporal. En lo que sigue describiremos los aspectos fundamentales de la teoría de control, considerando que ésta es una metodología apropiada para análizar las condiciones que plantea el problema.

PRINCIPIOS DE LA TEORIA DE CONTROL

La moderna teoría del control se ha convertido en un procedimiento "familiar" para resolver los problemas de optimización a lo largo del tiempo. Su interés reside, en parte, en que este método permite tratar aquellos casos en que existen límites superiores y/o inferiores efectivos para las *variables de control* (en nuestro caso los precios).

En la teoría de control se considera que un sistema económico queda determinado en cada instante por un conjunto de *variables de estado*, condicionados a restricciones dinámicas, que describen "el funcionamiento del sistema". Hay, además, otras variables, las *variables de control*, que son instrumentos cuyos valores se pueden fijar arbitrariamente dentro de ciertos límites. Estos instrumentos influyen sobre las *variables de estado*.

A continuación definimos cada una de estas variables y otros elementos, como el tiempo, que considera el planteamiento formal del problema de control de acuerdo a Michael Intriligator (1973) y a Richard Courant (1979) sobre el cálculo de variaciones.

El problema de control considera: el tiempo, las *variables de estado*, *variables de control*, ecuaciones de movimiento, condiciones para el tiempo inicial y el tiempo terminal y el funcional objetivo.

El tiempo: se considera continuo y se define sobre un intervalo que comprende un tiempo inicial (t_0) que generalmente está dado y un tiempo final (t_1) que puede o no ser especificado. Por tanto este se expresa como:

$$t_0 \leq t \leq t_1 \qquad \text{o bien} \qquad t \in [t_0\ ,\ t_1]$$

En cualquier momento $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ bien definido, el "estado" del sistema se distingue por n números reales $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ llamadas *variables de estado* que conforman el *vector de estado* $\in \mathbb{R}^n$, i.e.

$$\bar{x} = (x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

geométricamente representa un punto en el espacio $\mathbb{R}^n$ cada una de estas variables se supone función continua del tiempo tal que describen una trayectoria a lo largo de éste llamada *trayectoria de estado*, i.e.

$$\left\{\bar{x}(t)\right\} = \left\{\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n \ / \ t_0 \leq t \leq t_1\right\}$$

así cada valor de esta trayectoria en cualquier momento t es un *vector de estado*. Por lo tanto la *trayectoria de estado*, geométricamente representa una sucesión de puntos $\in \mathbb{R}^n$ que comienzan en el estado inicial

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

y finaliza en el estado terminal

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

Las variables de control: se refiere a las decisiones óptimas o adecuadas en cualquier momento $t \in [t_0, t_1]$, estas se representan por r números reales, $u_1(t)$, $u_2(t)$..., $u_r(t)$ que forman un vector columna de dimensión r

$$\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$$

geométricamente representa un punto en $\mathbb{R}^r$. Cada *variable de control* es una función continua a trozos del tiempo, con la posible excepción de un número finito de saltos discretos, esto es:

$$\left\{\bar{u}(t)\right\} = \left\{\bar{u}(t) \in \mathbb{R} \ / \ t_0 \leq t \leq t_1\right\}$$

donde el valor en cualquier tiempo (o momento) t del intervalo es el vector de control

$$\bar{u}(t) = \left\{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)\right\}$$

"Las *variables de control* se eligen con sugeción a ciertas condiciones en cuanto a sus posibles valores, reunidas en la restricción de que el vector de control en todos los tiempos del intervalo pertinente, debe permanecer a un subconjunto Ω dado no vacío del espacio euclidiano de dimensión r

$$\bar{u}(t) \in \Omega \qquad t_0 \le t \le t_1$$

en donde Ω se supone, por lo general, compacto (cerrado y acotado), convexo e invariante respecto al tiempo. La *trayectoria de control* es admisible si es una función continua de valores vectoriales del tiempo, cuyo valor en cualquier punto del intervalo correspondiente pertenece a Ω. El conjunto U de control es el conjunto de todas las *trayectorias de control* que son funciones continuas a trozos del tiempo en el intervalo de tiempo pertinente, cuyos valores en todos los tiempos de este intervalo pertenecen a Ω" (Intriligator, 1973). Por tanto la *trayectoria de control* debe pertenecer a este conjunto, es decir,

$$\{ \bar{u}(t) \} \in U$$

"La *trayectoria de estado* $\{ \bar{x}(t) \}$ se caracteriza por las ecuaciones de movimiento: un conjunto de n ecuaciones diferenciales que dan la tasa instantánea de variación de cada variable de estado en función de las *variables de estado*, de las *variables de control* y del tiempo :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

o bien

$$\frac{\partial x_j}{\partial t}(t) = \dot{x}_j(t) = f_j\Big[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t);\ u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t);\ t\Big],$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

donde cada una de las n funciones $f_1(\ldots), f_2(\ldots), \ldots, f_n(\ldots)$ se supone dada y continuamente diferenciable. Si las ecuaciones diferenciales no dependen explícitamente del tiempo, entonces las ecuaciones de movimiento son autónomos.

Las condiciones de contorno de las ecuaciones de movimiento son los valores iniciales (dados) de las *variables de estado*. Dados estos valores iniciales y dada una *trayectoria de control* $\{\ \bar{u}(t)\ \}$, existe una *trayectoria de estado* única $\{\ \bar{x}(t)\ \}$ que satisface las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno y que puede obtenerse integrando las ecuaciones diferenciales partiendo de x_0. Una *trayectoria de estado* obtenida a partir de las ecuaciones de movimiento y del estado inicial utilizando un control admisible se denomina factible, y cualquier vector alcanzado con una trayectoria factible en un tiempo finito se denomina accesible.

El tiempo terminal, t_1 viene definido por:

$$(\bar{x}(t),\ t) \in T \qquad\qquad \text{en } t = t_1$$

donde T es un subconjunto dado de $\mathbb{R}^{n+1}$, llamado superficie terminal. Casos especiales importantes son el problema del tiempo terminal, en que t_1 viene dado explícitamente como un vector de parámetro del problema y el problema, del estado terminal, en que $\bar{x}(t_1)$ está dado explícitamente como un vector de parámetros del problema.

El *funcional objetivo* es una aplicación de las trayectorias de control en puntos de la recta real, cuyo valor debe ser maximizado. Generalmente tiene la forma siguiente:

$$J = J\{\bar{u}(t)\} = \int_{to}^{t_1} I(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)\ dt\ + F(\bar{x}_1,\ t_1)$$

donde el integrando del primer término $I(\ldots)$, llamado la función intermedia, muestra la dependencia del funcional respecto a las trayectorias temporales de las *variables de estado*, de las *variables de control* y de tiempo comprendido en el intervalo de tiempo pertinente.

$$I(\bar{x}, \bar{u}, t) = I(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t); t)$$

siendo $t_0 \leq t \leq t_1$

El segundo término $F(\ldots)$, denominado *función final*, muestra la dependecia del funcional respecto al estado terminal y al tiempo terminal:

$$F(\bar{x}_1, t) = F(x_1(t_1), x_2(t_2), \ldots, x_n(t_n))$$

Tanto $I(\ldots)$ como $F(\ldots)$ se suponen *dadas* y continuamente diferenciales. El funcional objetivo $J = J\{\bar{u}(t)\}$ es expresado como un funcional en la *trayectoria de control*, ya que dadas $f(\ldots)$ y $\bar{x}_0$, la trayectoria $\{\bar{u}(t)\}$ determina la trayectoria $\{\bar{x}(t)\}$

Resumiendo, elproblema general de control es:

$$\max_{\{\bar{u}(t)\}} \quad J = \int_{to}^{t_1} I(\bar{x}, \bar{u}, t)\, dt + F(\bar{x}_1, t_1)$$

sujeto a $\quad \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$

t_0 y $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ dado

$(\bar{x}(t), t) \in T$ en $t = t_1$

$\{\bar{u}(t)\} \in U$

La geometria del problema se muestra en la figura (2.1), para el caso de una variable de estado.

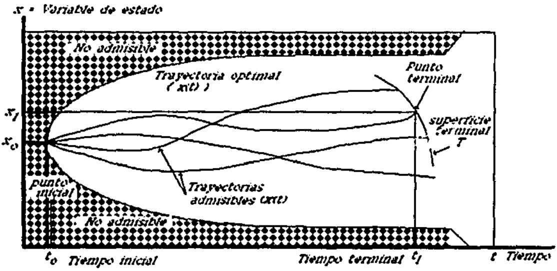


Fig. 2.1. Geometría del problema de control en el caso de una variable de estado.

Comenzando en el estado inicial x_0 dado en el tiempo inicial t_0, la *trayectoria de estado* { x(t) } debe tomarse del conjunto de trayectorias factibles, cada una de las cuales resulta de utilizar una *trayectoria de control* admisible { $\bar{u}(t)$ }.

· La *trayectoria de estado* factible particular que sea { $x^*(t)$ }, que sea optimal, debe alcanzar la superficie terminal y debe maximizar el funcional objetivo entre el conjunto de todas dichas trayectorias.

Algunos casos especiales

· El primer caso especial es el problema de control de tiempo optimal, en el cual el objetivo es desplazar las *variables de estado* en un tiempo mínimo de valores iniciales dados a valores terminales dados. En este caso la función objetivo es:

$$J = -(t_1 - t_0)$$

· El segundo caso especial es el de un servomecanismo, en el cual un estado deseado $\bar{x}^{o}(t)$ viene especificado para cada tiempo del intervalo pertinente, y el objetivo consiste en asegurar que el vector de estado real esté suficientemente próximo al estado deseado en cualquier tiempo del intervalo.

· Un tercer caso especial es el de mínimo esfuerzo en el cual el funcional objetivo depende solamente de la trayectoria de control.

Tipos de Control

Existen dos tipos de control que pueden estudiarse en relación con el problema de control. Uno de ellos es el de circuito abierto, en el cual la trayectoria de control optimal resolviendo el problema general de control, viene determinada en función del tiempo

$$\{ \bar{u}^{*}(t) \}$$

Este control de circuito abierto está totalmente especificado en el tiempo inicial t_o, y la trayectoria de estado $\{ \bar{x}(t) \}$ se determina integrando las ecuaciones de movimiento partiendo de sus valores iniciales prescritos, utilizando el control de circuito abierto.

El otro tipo de control es el control de circuito cerrado, en el que la trayectoria optimal viene determinada en función de las variables de estado en curso y del tiempo.

$$\{ \bar{u}^{*}(\bar{x}(t),\ t) \}$$

En contraste con el control de circuito abierto en el que todas las decisiones se toman de antemano, en el control de circuito cerrado las decisiones pueden revisarse a la luz de (los nuevos acontecimientos) la nueva información contenida en las variables de estado en curso. El problema de obtener el control de circuito cerrado optimal se llama de síntesis.

El problema de control como problema de programación en un espacio de infinitas dimensiones; teorema generalizado de Weierstrass.

El problema de control puede considerarse como un problema de programación matemática en un espacio de infinitas dimensiones, siendo este espacio el de todas las funciones $u(t)$, de valores reales y continuas a intervalos definidos en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Según el teorema de Weierstrass, existe una solución al problema general de control si el funcional objetivo $J\,[\bar{u}(t)]$ es un funcional continuo en las trayectorias de control y si el subconjunto U de infinitas dimensiones al cual está confinada la trayectoria de control es compacto. Un caso especial muy importante para el cual existen soluciones es aquel en que las funciones $I(\ldots)$ y $f(\ldots)$ son lineales en $\bar{u}$.

Cálculo de variaciones

La primera aproximación al problema de control es el cálculo de variaciones. El problema de control tratado en el cálculo de variaciones clásico consiste en elegir una trayectoria temporal para una variable de estado que une puntos inicial y terminal dados de modo que maximice el valor de la integral de una función dada de la variable de estado, la tasa instantánea de variación de la variable de estado y del tiempo. Así, pues, el problema de cálculo de variaciones clásico es:

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \qquad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

Donde $I(x, \dot{x}, t)$ es una función continuamente diferenciable y t_0, t_1, x_0 y x_1 son parámetros dados. Existe solamente una variable de estado y una variable de control; la variable de control es simplemente la tasa de variación instantánea de la variable de estado, siendo la ecuación de movimiento:

$$\dot{x} = u$$

de modo que u se reemplaza por $\dot{x}$ en $I(\ldots)$; y la variable de control puede tomar cualquier valor:

$$\Omega = \mathbb{R}$$

De este modo, la única restricción sobre la trayectoria de control es la de que sea una función continua a intervalos de tiempo. Cualquier trayectoria $\{x(t)\}$ que cumpla las condiciones de contorno de (2.1) y la condición de continuidad de que $x(t)$ sea continua y las $\dot{x}(t)$ sea funciones continuas a intervalos de tiempo se denomina admisible, y el problema de cálculo de variaciones clásico consiste en elegir una trayectoria admisible que maximice la integral funcional objetivo.

El problema fundamental de cálculo de variaciones es el siguiente: entre todas las funciones (trayectorias) que están definidas, son continuas y poseen primera y segunda derivadas *continuas en el intervalo* $t_0 \leq t \leq t_1$ *y para los cuales se prescriben valores inicial y terminal* $z_0 = z(t_0)$ *y* $z_1 = z(t_1)$, *encontrar aquella para la cual el funcional J tiene el mayor valor posible (o el menor valor posible).*

Al discutir este problema, un punto esencial es la naturaleza de las condiciones de admisibilidad impuestas sobre las funciones z(t). Formar el valor J(z) simplemente requiere que cuando se sustituye z(t), I será una función seccionalmente continua de t y esto queda asegurado si la derivada de z '(t) es seccionalmente continua. Pero incluso se han hecho más rigurosas las condiciones de admisión al requerir que las primeras derivadas, e incluso las segundas derivadas, de las trayectorias z(t) sean continuas. Por supuesto, como consecuencia se restringe el campo en el que debe buscarse el máximo o el mínimo. Sin embargo, se encontrará que, de hecho, ésta restricción no afecta la solución, es decir, que la trayectoria que es más favorable cuando se cuenta con un campo más amplio siempre se encontrará en el campo más restringido de funciones con primeras y segundas derivadas continuas.

- *Condiciones necesarias para la existencia de valores extremos de un funcional*

Anulación de la primera variación

El propósito es encontrar las condiciones necesarias para que una función {z(t)} pueda proporcionar un máximo o un mínimo, o bien, un valor extremo de la integral $J\{z(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$

Se procede siguiendo un método bastante análogo al usado en el problema elemental de encontrar los valores extremos de una función de una o más variables. Se supone que {x(t)} es la solución, dicha *solución debe satisfacer ciertas condiciones necesarias análogas a la condición de primer orden de que se anulen las derivadas, ésta es la ecuación de Euler del cálculo de variaciones. Entonces se tiene que expresar el hecho de que (para la existencia de un mínimo) J debe "crecer" cuando se reemplaza* $\{x(t)\}$ *por otra función admisible* $\{z(t)\}$. *Ademas como simplemente estamos interesados en obtener las condiciones necesarias, podemos restringirnos a la consideración de cualquier clase especial de funciones que estén próximas a* $\{x(t)\}$, *es decir, funciones para las que el valor absoluto de la diferencia* $\{x(t)\} - \{z(t)\}$ *permanece entre cotas prescritas.*

Se piensa en la función solución (o trayectoria optima) $\{x(t)\}$ *como un miembro de una familia uniparamétrica, con parámetro* ε *construída como sigue: se toma cualquier función* $\eta(x)$ *que se anule sobre la frontera del intervalo, es decir, para la cual* $\eta(t_0)=0$, $\eta(t_1)=0$ *y que tenga primera y segunda derivada continuas en todo punto del intervalo cerrado. Entonces se usa la familia de funciones:*

$$z(t,\ \varepsilon) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$$

$$z(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t) \qquad (2.2)$$

La variación en torno a la trayectoria solución $\{z(t)\}$ *satisface a la vez las condiciones de contorno y de continuidad, y por tanto es una trayectoria admisible.*

La expresión $\varepsilon\eta(t) = \delta\{x(t)\}$ *se llama variación de la función* $\{x(t)\}$ *[puesto que* $\eta(t) = \dfrac{\partial\{z(t)\}}{\partial\varepsilon}$, *el simbolo* δ *denota la diferencial que se obtiene cuando se considera a* ε *como la variable independiente y a* t *como un parámetro]. El parámetro* ε *mide la diferencia entre la trayectoria solucion* $\{x(t)\}$ *y la variacion en torno a la trayectoria solución* $\{z(t)\}$, *donde*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{ z(t) \} = \{ x(t) \}$$

Entonces si se consideran fijas tanto la función (o trayectoria) $\{x(t)\}$ como la función $\{z(t)\}$, el valor del funcional objetivo para $\{z(t)\}$ puede considerse como una función de ε, esto es:

$$F(x(t) + \varepsilon) = J(\varepsilon) = \int_{to}^{t1} I(x + \varepsilon\eta,\ \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta},\ t)\ dt$$

Y el postulado de que $\{x(t)\}$ dará un maximo de $J(\varepsilon)$ implica que la función de arriba poseerá un máximo para $\varepsilon = 0$, de modo que como condiciones necesarias se tienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(0) = 0$$

y la desigualdad

$$\frac{d^2 J}{d^2 \varepsilon} \leqq 0$$

La condición $^{dJ}/_{d\varepsilon} = 0$ debe ser satisfecha por toda función η que satisfaga las condiciones anteriores pero que, por otra parte es arbitraria.

Haciendo a un lado la cuestión de discriminar entre los máximos y los mínimos, se dice que si una función $\{x(t)\}$ satisface la ecuación $^{dJ}/_{d\varepsilon}\ (0) = 0$ para todas las funciones η, integral F es "estacionaria" para $\{z(t)\} = \{x(t)\}$. Si, como antes, se usa el símbolo δ para denotar la diferenciación con respecto a ε, también *se dice que la ecuación:*

$$dF = \varepsilon \frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$

cuando es satisfecha por la función (o trayectoria) $\{z(t)\} = \{x(t)\}$ y η arbitraria, expresa el carácter estacionario de F. La expresión:

$$\varepsilon \frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = \varepsilon \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_{to}^{t_1} I(x + \varepsilon\eta,\ \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta},\ t)\, dt\right\}_{\varepsilon=0}$$

se llama variación o, más precisamente, primera variación (de aquí proviene el uso del término "cálculo de variaciones", con lo que se quiere indicar que, en este tema, se desea considerar el comportamiento de funciones de una función cuando se hace variar a esta función independiente, o función argumento, alterando un parámetro ε) de la integral. Por lo tanto, el carácter estacionario de una integral y la anulación de la primera variación significan exactamente lo mismo.

El carácter estacionario es necesario para la existencia de máximos o mínimos, pero, como en el caso de los máximos o los mínimos ordinarios, no es una condición suficiente para que se presente cualquiera de estas posiblidades.

El objetivo principal es transformar la condición $^{\partial J}/_{\partial\varepsilon}\ (0)=0$, para el carácter estacionario (o anulación de la primera variación) de la integral, de manera tal que se convierta en una condición sólo para $\{x(t)\}$ y ya no contenga a la función arbitraria η .

· Deducción de la ecuación diferencial de Euler

El criterio fundamental del cálculo de variaciones lo constituye el teorema siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que la integral

$$J[z(t)] = \int_{to}^{t1} I(x, \dot{x}, t)\, dt$$

sea estacionaria cuando $\{x(t)\} = \{z(t)\}$, *es que* $\{x(t)\}$ *sea una función (o trayectoria) admisible que satisfaga la ecuación diferencial de Euler:*

$$L(x) = \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden.

o, detalladamente: $I\dot{x}\dot{x}X" + I\dot{x}x\dot{X} + F_{t}x - Fx = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}\right)\frac{d^2x}{d^2t} + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} - \frac{\partial I}{\partial x}\right) = 0$$

Para probarlo puede derivarse la expresión

$$J(\varepsilon) = \int_{to}^{t1} I(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t)\, dt$$

con respecto a ε, bajo el signo integral siempre que la derivación proporcione una función de t que sea continua o, al menos, seccionalmente continua. En este caso, poniendo $x + \varepsilon\eta = y$ y derivando se obtiene bajo el signo integral la expresión $\eta I y + \dot{\eta} I \dot{y}$, la cuál, debido a las hipótesis establecidas acerca de I, $x(t)$ y $\eta(t)$, satisface las condiciones que se acaban de enunciar. Así inmediatamente se obtiene:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial I}{\partial x}\eta + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right] dt$$

Para propósitos posteriores, nótese que al deducir esta ecuación nada se ha aplicado más allá de la continuidad de las funciones $x(t)$ *y* η *y la continuidad seccional de sus primeras derivadas. En esta ecuación aparece la función arbitraria bajo el signo integral en forma doble, a saber, como* η *y como* η'. *Sin embargo de inmediato se puede eliminar* $\dot{\eta}$, *integrando por partes; se tiene así:*

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial I}{\partial x}\eta\, dt + \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\eta\right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\eta\, dt$$

y por las condiciones de contorno $[\eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)]$

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\right]\eta\, dt$$

En esta integración por partes se tiene que suponer que la expresióm $(d/dt)(\partial I/\partial \dot{x})$ *está definida y es integrable, pero evidentemente éste es el caso, ya que se supuso la continuidad de las segundas derivadas de* I.

De aquí que, si se escribe

$$L(x) = \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

por brevedad, se tiene la ecuación:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta L(x)\, dt = 0$$

Esta ecuación debe ser satisfecha por toda función η *que satisfaga las condiciones establecidas pero que, por otra parte, sea arbitraria. De esto se concluye que:*

$$L(x) = 0$$

en virtud de lo siguiente:

LEMA: Si una función $C(t)$*, continua en el intervalo bajo condición, satisface la relación*

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) C(t)\, dt = 0$$

para una función arbitraria $\eta(t)$ *tal que* $\eta(t_0)=\eta(t_1) = 0$ *y* $\eta''(t)$ *es continua, entonces* $C(t) = 0$ *para todo valor de* t *en el intervalo.*

Para encontrar las soluciones $\{x(t)\}$ *del máximo (o mínimo) debe encontrarse una solución particular de la ecuación diferencial de Euler para el intervalo* $t_0 \leq t \leq t_1$*, que tome los valores prescritos,* t_0 *y* t_1 *en los puntos extremos. Dado que la integral completa de la ecuación diferencial de Euler de segundo orden contiene dos constantes de integración, es de esperar que pueda determinarse una solución única, haciendo que estas dos constantes se ajusten a las condicones de contorno; éstas proporcionan dos* ecuaciones que las constantes de integración deben satisfacer.

En general, no es posible resolver la ecuación diferencial de Euler explícitamente en términos de funciones elementales o integración, y tiene uno que contentarse con demostrar que el problema variacional se reduce a un problema de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, para casos especiales importantes y de hecho, para la mayoría de los ejemplos clásicos, la ecuación se puede resolver por medio de integrales.

Las condiciones de contorno asociadas son las dadas en el problema, los valores inicial y terminal:

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_1$$

Cualquier trayectoria $\{x(t)\}$ que satisafaga la ecuación de Euler para toda t, $t_0 \leq t \leq t_1$, y cumpla las condiciones de contorno anteriores se denomina extremal y si existe una solución al problema de cálculo de variaciones clásico es necesario que sea un extremal.

En el caso general, de función intermedia (integrado) depende de tres variables: $I(x, \dot{x}, t)$; si, no obstante, la función intermedia no depende explícitamente de $\dot{x}$, entonces la ecuación de Euler se vuelve:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0$$

Si la función intermedia no depende explícitamente de x, la ecuación de Euler se convierte en :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

que puede integrarse directamente

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} = constante$$

Si la función intermedia no depende explícitamente de t entonces, como la ecuación de Euler se puede siempre escribir:

$$\frac{d}{dt}\left[I - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right] - \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

la ecuación de Euler implica en este caso que:

$$I - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\dot{x} = constante$$

CONDICIONES NECESARIAS

· La ecuación de Euler es una condición necesaria análoga a la condición de primer orden de que la derivada se anule en el caso estático.

· La condición análoga a la condición necesaria de segundo orden en el caso estático es la condición de Legendre de que la trayectoria solución $\{x(t)\}$ debe satisfacer.

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2} \leq 0 \qquad \text{para todo} \quad t \in [\, t_0,\ t_1 \,]$$

Esta condición se desprende del análisis de la variación en torno a la trayectoria solución, siendo la condición necesaria de segundo orden para que $J(\varepsilon)$ sea maximizado en $\varepsilon=0$:

$$\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) \leq 0$$

· La condición análoga a la del caso estático, de que la función objetivo sea cóncava, a la condición de Weierstrass, de que si $\{x(t)\}$ es la trayectoria solución y $\{z(t)\}$ es cualquier otra trayectoria admisible:

$$E(x, \dot{x}, t, \dot{z}) \leq 0$$

donde $E(\ldots)$ es la función de exceso de Weierstrass, definida por:

$$E(x, \dot{x}, t, \dot{z}) = I(x, \dot{z}, t) - I(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t)(\dot{z} - \dot{x})$$

Esta condición se cumple siempre si la función intermedia $I(x, \dot{x}, t)$ es cóncava cuando se considera como función de la variable de control $\dot{x}$.

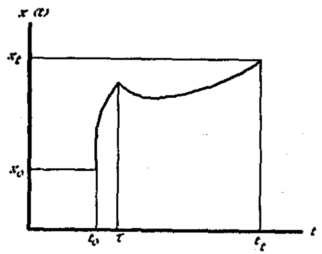


Fig. 2.2. Una esquina aparece en el tiempo t

Las últimas de las condiciones necesarias que se presentan aquí son las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdman, dependen de forma esencial del tiempo. En tanto que la trayectoria $\{x(t)\}$ es continua, la trayectoria de control $\{\dot{x}(t)\}$ necesita únicamente ser continua a intervalos y, por consiguiente, puede ciertamente constar de segmentos de curvas unidos en puntos llamados esquinas en los que $\dot{x}(t)$ es discontinua (una esquina de esta índole tiene lugar en el tiempo τ es la fig (2.2). Las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdman exigen que $(\partial I/\partial\dot{x})$ e $(I - \partial I/\partial\dot{x}\dot{x})$ sean continuas a través de la esquina. Así, pues si tenemos una esquina en el tiempo t :

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau-} = \left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau+}$$

$$\left[I - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} \right]_{\tau-} = \left[I - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} \right]_{\tau+}$$

en que $\tau-$ y $\tau+$ expresan, respectivamente, los límites a la izquierda y a la derecha:

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau-} = \lim_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} \left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]$$

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{\tau+} = \lim_{\substack{t\to\tau \\ t>\tau}} \left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]$$

Hasta aquí, el problema que estamos considerando cuenta solamente con una sola variable de estado. El problema del cálculo de variaciones clásico con un vector de n variables de estado es:

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t)dt$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

siendo $\bar{x}(t)$ *y* $\dot{\bar{x}}(t)$ *los vectores columna:*

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$$

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))'$$

las condiciones necesarias en este caso son:

Ecuación de Euler: $\dfrac{\partial I}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

Condiciones de contorno: $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad , \quad \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$

Condición de Legendre: $\dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}$ *definida negativa o semidefinida negativa.*

Condición de Weierstrass: $E(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t, \dot{\bar{z}}) \leq 0$

Condición de esquina de Weierstrass-Erdman:

$\dfrac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}$ *y* $I - \dfrac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\dot{\bar{x}}$ *continuas a través de las esquinas con:*

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial I}{\partial x_1}, \frac{\partial I}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial I}{\partial x_n} \right]$$

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} = \left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_n} \right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right] = \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_1}\right], \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_2}\right], \ldots, \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_n}\right]\right]$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\bar{x}}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1\, \partial \dot{x}_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_1\, \partial \dot{x}_n} \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_2\, \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial I}{\partial \dot{x}_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_2\, \partial \dot{x}_n} \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_n\, \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}_n\, \partial \dot{x}_2} & \cdots & \dfrac{\partial I}{\partial \dot{x}_n^2} \end{bmatrix}$$

$$E(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t, \dot{\bar{z}}) = I(\bar{x}, \dot{\bar{z}}, t) - I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) - \frac{\partial x}{\partial \dot{\bar{x}}}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)(\dot{\bar{z}} - \dot{\bar{x}})$$

Así, pues, por ejemplo, hay n *ecuaciones de Euler*

$$\frac{\partial I}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_j}\right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

· *Condiciones de transversalidad*

En el problema tratado hasta ahora, tanto el tiempo terminal como el estado terminal son dados. En el caso de una superficie terminal, la condición:

$$(\bar{x}(t),\ t) \in T \qquad \text{en} \quad t = t_1$$

define el tiempo terminal t_1, *y el estado terminal* $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$. *Supongamos que la superficie terminal esté dada por las condiciones:*

$$T\,(\bar{x}(t),\ t) = 0 \qquad \text{en } t = t_1$$

Siendo T una función vectorial de las variables de estado y tiempo. Las condiciones necesarias en este caso, puede deducirse utilizando la variación en el entorno de la solución. Supongamos, en el caso de problemas de una única variable de estado, que $\{x(t)\}$ *sea la trayectoria solución y* $\{z(t)\}$ *la variación entorno a la trayectoria:*

$$z(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$$

La trayectoria solución alcanza la superficie terminal en el tiempo t_1:

$$T(x(t),\ t) = 0 \qquad \text{en} \quad t = t_1$$

y la variación en torno a la trayectoria solución alcanza la superficie terminal en el tiempo $t_1(\varepsilon)$:

$$T(z(t),\ t) = 0 \qquad \text{en} \quad t = t_1(\varepsilon)$$

donde: $\lim_{\varepsilon \to 0} t_1(\varepsilon) = t_1$

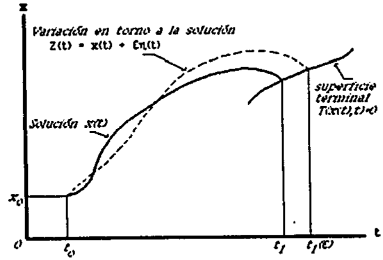


Fig. 2.3. Variación en torno a la trayectoria solución en el caso de una superficie terminal.

como se muestra en la fig. [2.3]. El funcional objetivo valorado para $\{z(t)\}$ es una función de ε:

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} I(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t)dt$$

y como $J(\varepsilon)$ alcanza un máximo en $\varepsilon=0$, correspondiente a la solución $\{x(t)\}$:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}(0) = I\Big|_{t_1(\varepsilon)} \frac{dt_1(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial I}{\partial x}\eta + \frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}\right]dt = 0$$

Integrado por partes, como antes:

$$I\left|\frac{dt_1(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right._{t_1(\varepsilon)}\Bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\Bigg|_{t_1(\varepsilon)} \eta(t_1(\varepsilon)) + \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\right)\right]\eta dt = 0$$

Dado que los primeros términos no depende de $\eta(\varepsilon)$, excepto para $t = t_1(\varepsilon)$, la ecuación de Euler debe cumplirse como anteriormente:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\right) = 0$$

De este modo:

$$I\left|\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right._{t_1(\varepsilon)}\Bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\Bigg|_{t_1(\varepsilon)} \eta(t_1(\varepsilon)) = 0 \qquad (2.3)$$

Pero la derivada $\partial t_1(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ se obtiene derivando la expresión:

$$T\left[x(t_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(t_1(\varepsilon)),\ t_1(\varepsilon)\right] = 0$$

Con respecto a ε, obteniendose:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt_1(\varepsilon)}\,\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} + \eta\,(t_1(\varepsilon)) + \varepsilon\,\frac{d\eta}{dt_1(\varepsilon)}\,\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right) + \frac{\partial T}{\partial t}\,\frac{dt_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$$

Tomando el límite al tender $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left[\frac{dx}{dt_1}\,\frac{dt_1}{d\varepsilon}+\eta(t_1)\right]+\frac{\partial T}{\partial t}\,\frac{dt_1}{d\varepsilon}=0$$

y combinado con (2.3) se obtiene la condición de transversalidad:

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\right]_{t_1}\frac{\partial T}{\partial x}-\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1}\frac{\partial T}{\partial t}=0$$

Puesto que:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{T(\ldots)=0}=-\frac{\partial T}{\partial t}$$

la condición se puede escribir:

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\right]_{t_1}+\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right]_{t_1}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{T(\ldots)=0}=0$$

y, de modo más general, en el caso de un vector de variables de estado, la condición de transversalidad es :

$$\left[I-\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\,\dot{\bar{x}}\right]_{t_1}+\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right]_{t_1}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)_{T(\ldots)=0}=0$$

donde $\left({}^{d\bar{x}}/dt\right)_{T(\ldots)=0}$ *es el vector gradiente, vector columna normal a la superficie terminal.*

· *Restricciones*

El tratamiento por cálculo de variaciones puede utilizarse para cáracterizar soluciones a varios problemas de control con restricciones. Un tipo de restricción importante es la integral, en la que la integral de una función dada se mantiene constante. Este problema, llamado problema isoperimétrico, es de forma:

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)dt$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

$$K = \int_{t_0}^{t_1} G(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)dt = c$$

siendo G(...) una función dada continuamente diferenciable y c una constante dada. La restricción se tiene en cuenta introduciendo el multiplicador de Lagrange λ *y resumiendo el funcional:*

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} \Big[I(\ldots) + \lambda\, G(\ldots) \Big] dt$$

siendo las condiciones necesarias las requeridas para hallar un máximo de J' con respecto a la trayectoria {x(t)} y un mínimo de J' con respecto al multiplicador de Lagrange λ *. Por ejemplo, la ecuación de Euler es:*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[I(\ldots)+\lambda\, G(\ldots)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}}\left(I(\ldots)+\lambda\, G(\ldots)\right)\right]=0$$

la cual, junto a las condiciones de contorno y la restricción, define la solución.

Un segundo tipo de restricciones importante es un conjunto de restricciones de igualdad que relacionan las variables de estado, sus tasas de variación y el tiempo. En este caso el problema es:

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J=\int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ t)dt$$

$$\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$$

$$\bar{x}(t_1)=\bar{x}_1$$

$$\bar{g}(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ t)=\bar{b}$$

donde $\bar{g}(\ldots)$ *es un vector columna dado de* r *funciones y* $\bar{b}$ *vector columna dado. Se supone que* $n > r$, *llamandose la diferencia* $n-r$ *grados de libertad del problema, y que la matriz jacobiana:*

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix}$$

es de un rango de fila completo en todos los puntos de la trayectoria solución. El método para hallar la solución implica la introducción de r *multiplicadores de Lagrange:*

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

definiendo la función lagrangiana como:

$$L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t, \bar{y}) = I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \bar{\lambda}[\bar{b} - \bar{g}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)]$$

la solución se obtiene eligiendo $\{x(t)\}$ *para maximizar* $\bar{\lambda}$ *y para minimizar:*

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t, \bar{y})dt$$

lo que lleva a la ecuación de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}}\right) = 0$$

que junto con las condiciones de contorno y la restricción, define la solución.

Un tercer tipo de restricciones importante es el de restricciones de desigualdad, que relaciona las variables de estado, sus tasas de variación y el tiempo. En este caso el problema es:

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)\,dt$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) \leq \bar{b}$$

donde $\bar{g}(\ldots)$ es nuevamente un vector columna de r funciones. Formando la lagrangiana como:

$$L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t, \bar{y}) = I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \bar{\lambda}\,[\bar{b} - \bar{g}(\bar{x}, \dot{x}, t)]$$

la solución debe satisfacer

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}}\right) = 0$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \dot{x}, t) \leq \bar{b}$$

$$\bar{\lambda} \geq 0$$

$$\bar{\lambda}[\bar{b} - \bar{g}(\bar{x}, \dot{x}, t)] = 0$$

donde las primeras n condiciones son las ecuaciones de Euler y las restantes son las condiciones de Kuhn-Tucker;, estas, últimas implican que cualquier multiplicador de lagrange se anula si la restricción correspondiente se satisface como desigualdad estricta y que cualquiera se satisface como igualdad si el correspondiente multiplicador de lagrange es positivo.

Así, pues, el cálculo de variaciones puede emplearse para resolver problemas de control que contengan ciertos tipos de restricciones. Pero la debilidad principal del cálculo de variaciones clásico radica en que no puede atacar directamente problemas en que las variables de control estén restringidas a un conjunto de control dado, debilidad superada por los enfoques de la programación dinámica y del principio del máximo.

· Programación dinámica

La programación dinámica es una de las dos " modernas" aproximaciones al problema de control. Este método puede aplicarse directamente al problema general de control.

$$\max_{\{x(t)\}} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x}, \bar{u}, t)\partial t + F(\bar{x}_1, t_1)$$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \qquad (2.4)$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

$$\{\bar{u}(t)\} \in U$$

El enfoque de programación dinámica consiste en tomar el problema de control particular que se va a resolver incluyendo dentro de una clase más amplia de problemas caracterizados por ciertos parametros, y aplicando el "principio básico de optimalidad" para obtener una relación de recurrencia fundamental que vincule elementos de este conjunto de problemas. Con algunos supuestos de moderación complementarios, la relación de recurrencia fundamental comporta una ecuación diferencial parcial básica, la ecuación de Bellman, que al ser resuelta da la solución para el conjunto más amplio de problemas y, por tanto al problema particular en cuestión.

El principio de la optimalidad y la ecuación de Bellman

El principio de optimalidad dice: "una politica optimal tiene la propiedad de que, cualquiera que sea el estado y decisión iniciales (es decir, el control), las decisiones restantes deben constituir una política optimal con respecto al estado resultante de la primera decisión".

Este principio puede ser ilustrado en la siguiente fig. (2.4); para el caso de un problema con una sola variable de estado. La curva $\vec{x}^*(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$, es la trayectoria asociada al control optimal, suponiendo dados los estados inicial y terminal. Esta trayectoria se divide en dos partes : 1 y 2 en el tiempo τ. De acuerdo con el principio de optimalidad, la trayectoria 2, definida para $\tau \leq t \leq t_1$, debe, en si misma, representar una trayectoria optimal con respecto a la condición inicial $x(\tau)$. Así que la segunda porción de una trayectoria optimal debe ser a su vez una trayectoria optimal independiente de cómo el sistema haya alcanzado las condiciones iniciales para esta segunda porción.

De acuerdo con el principio de optimalidad (2) debe representar por sí misma una trayectoria optimal.

Suponiendo que existe una solución al problema general del control (2.4), sea,

$$J^{*}(\bar{x},\ t)$$

la función de actuación optima, que es el valor maximizado del funcional objetivo para el problema que comienza en el estado inicial $\bar{x}$ en el tiempo t. El problema se incorpora a una clase más amplia de problemas caracterizados por sus n+1 parámetros iniciales. El valor optimal de la función objetivo para el problema particular en cuestión (2.4) es, pues:

$$J^{*} = J^{*}(\bar{x}_o,\ t_o)$$

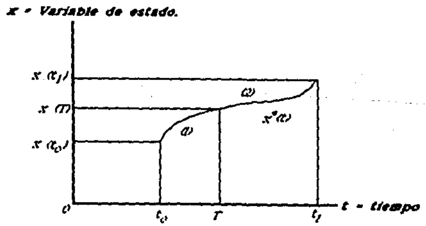


Fig. 2.4. De acuerdo con el principio de optimalidad (2) debe representar por sí misma una trayectoria optimal.

De acuerdo con el principio de optimalidad, si $J^{*}(\bar{x}, t)$ *es la función de actuación optimal para el problema que comienza en el estado* $\bar{x}$ *y el tiempo* t *, entonces* $J^{*}(\bar{x}+ \bar{x}, t+ t)$ *es la función de actuación optimal para la segunda porción de la trayectoria optimal, comenzando en el estado* $\bar{x}$ + $\bar{x}$ *y en el tiempo* t + t. *Sobre el intervalo de tiempo comprendido de* t *a* $t+ t$, *sin embargo, el único incremento que podría recibir la función de actuación optimal vendría de la función intermedia (integrando), la cual aporta* $l(\bar{x},\bar{u},t)\ t$. *La función de actuación optimal en todo el curso temporal que comienza en el tiempo* t *será entonces igual a la suma óptima de las contribuciones de las dos porciones de tiempo.*
Así pues:

$$J^{*}(\bar{x}, t) = \max_{\{\bar{u}(t)\}} [l(\bar{x}, \bar{u}, t)\ t + J^{*}(\bar{x} + \bar{x}, t + t)] \qquad (2.5)$$

que es la relación de recurrencia fundamental.

Un supuesto crítico de enfoque de programación dinámica es el de que la función de actuación optimal $J^{*}(\bar{x}, t)$ *sea función uniforme de las n+1 variables, y continuamente diferenciable con respecto a las variaciones en los parámetros iniciales. Según este supuesto podemos utilizar un desarrollo en serie de Taylor para representar* $J^{*}(\bar{x}+ \bar{x}, t+ t)$ *en el punto* $(\bar{x}, t)$:

$$J^{*}(\bar{x} + \bar{x}, t + t) = J^{*}(\bar{x}, t) + \frac{\partial J^{*}}{\partial \bar{x}}\ \bar{x} + \frac{\partial J^{*}}{\partial t}\ t + \ldots \qquad (2.6)$$

siendo $\partial J^{*}/\partial \bar{x}$ *el vector fila:*

$$\frac{\partial J^{*}}{\bar{x}} = \left[\frac{\partial J^{*}}{\partial x_1}, \frac{\partial J^{*}}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial J^{*}}{\partial x_n} \right]$$

sustituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene

$$0 = \max_{\{\bar{u}(t)\}} \left[l(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} \frac{x}{t} + \frac{\partial J^*}{\partial t} + \dots \right]$$

y tomando el límite cuando $t \longrightarrow 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\bar{x}}{t} = \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

se obtiene:

$$\frac{-\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\bar{u}(t)\}} \left[l(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} f(\bar{x}, \bar{u}, t) \right]$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial parcial básica de la pogramación dinámica y se llama "ecuación de Bellman". El segundo término entre corchetes es el producto interno del vector fila $\partial J^*/\partial x$ y el vector columna $f(\bar{x}, \bar{u}, t)$ de modo que la ecuación de Bellman puede también escribirse así:

$$\frac{-\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\bar{u}(t)\}} \left[l(\bar{x}, \bar{u}, t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J^*}{\partial x_j} f_j(\bar{x}, \bar{u}, t) \right]$$

La condición de contorno asociada a la ecuación de Bellman es la condición terminal:

$$J^*(\bar{x}(t_1), t_1) = F(\bar{x}_1, t_1)$$

que establece que el valor de la función de actuación optimal para el poblema que comienza en el estado terminal y en el tiempo terminal es simplemente el valor de la función final F(...) para este estado y tiempo.

Si se resolviese la ecuación de Bellman, se obtendría la función de actuación optimal y, por tanto, se resolvería el problema. Pero en general, esta ecuación diferencial parcial de primer orden, que se caracteriza por ser no lineal no tiene solución analítica.

· Programación dinámica y cálculo de variaciones

El problema de la programación dinámica es más general que el problema de cálculo de variaciones clásico, de modo que si el problema de la programación dinámica se especializa en ese campo del cálculo de variaciones clásico, la condición necesaria de la programación dinámica, la ecuación de Bellman debe implicar las condiciones necesarias del cálculo de variaciones, incluso la ecuación de Euler, la condición de Legendre, la condición de Weierstrass y las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdman.

El problema de cálculo de las variaciones clásico, es un caso especial del problema de programación dinámica (2.4) con:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{u}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^n$$

o sea, las variables de control son las tasas instantáneas de variación de las variables de estado y las variables de control no están sometidas a restricciones. En este caso, la ecuación de Bellman se convierte en:

$$\frac{-\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\dot{\bar{x}}\}} \left[I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \frac{\partial J}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right]$$

Suponiendo que la expresión entre corchetes tiene un máximo, una condición necesaria para su maximización es:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\bar{x}}} = \left[I(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}\,\dot{\bar{x}} \right] = 0$$

o, puesto que $\partial J^*/\partial \bar{x}$ es independiente de $\dot{\bar{x}}$:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} = - \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}$$

Tomando una derivada total con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}\right) = - \frac{\partial^2 J^*}{\partial t\,\partial \bar{x}} - (\dot{\bar{x}})' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}^2} \qquad (2.7)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\partial J^*/\partial \bar{x}$ depende de $\bar{x}$ y t, y :

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial t\,\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial t\,\partial x_1}, \ \dots \ , \frac{\partial^2 J^*}{\partial t\,\partial x_n} \right)$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 J^*}{\partial x_n\,\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2_n} \end{pmatrix}$$

Pero según la ecuación de Bellman:

$$- \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial J^*}{\partial t}\right) = \frac{\partial I}{\partial \bar{x}} + (\dot{\bar{x}})' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}^2} \qquad (2.8)$$

combinando (2.7) y (2.8) y utilizando la igualdad de las derivadas parciales mixtas, se obtiene la ecuación de Euler del cálculo de variaciones.

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right] = 0$$

La condición de Legendre se obtiene inmediatamente de las condiciones necesarias de segundo orden para la maximización anterior :

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{\bar{x}}^2}\left[I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \right]$$ semidefinida negativa o definida negativa.

Dado que $\partial J^*/\partial \bar{x}$ es independiente de $\dot{\bar{x}}$, la condición es :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\bar{x}}^2}$$ Semidefinida negativa o definida negativa.

que es la condición de Legendre.

La condición de Weierstrass se obtiene también de la maximización dentro de la ecuación de Bellman, que establece que si $\{\dot{\bar{x}}(t)\}$ es una solución:

$$I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} \geq I(\bar{x}, \dot{\bar{z}}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{z}}$$

para cualquier vector columna $\dot{\bar{z}}_o$. Disponiendo nuevamente de los términos y empleando

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} = -\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}$$

se tiene :

$$I(\bar{x}, \dot{\bar{z}}, t) - I(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)(\dot{\bar{z}} - \dot{\bar{x}}) \leq 0$$

Finalmente la condición de esquina de Weierstrass-Erdman se obtiene de las ecuaciones:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} = -\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}$$

$$I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\dot{\bar{x}} = I + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}}\dot{\bar{x}} = -\frac{\partial J^*}{\partial t}$$

Como $\partial J^*/\partial \bar{x}$ y $\partial J^*/\partial t$ son continuos, se sigue que:

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} \qquad \text{y} \qquad \left[I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\dot{\bar{x}} \right]$$

son continuas a través de las esquina, que son las condiciones de esquina de Weierstrass.

El enfoque de programación dinámica permite, pues, obtener las condiciones necesarias para los problemas clásicos de cálculo de variaciones. La programación dinámica puede también utilizarse para tratar los problemas de cálculo de variaciones con restricciones.

- Solución por programación dinámica de los problemas de optimizacion de etapa multiple.

En muchos problemas, el tiempo aparece como una variable discreta en lugar de ser continua y dichos problemas, llamados problemas de optimización de etapa múltiple, pueden resolverse por programación dinamica.

En los problemas de optimización de etapa múltiple, la variable tiempo toma los valores discretos.

$$t_0,\ t_{0+1},\ t_{0+2},\ldots,\ t_1$$

El estado del sistema en el tiempo t, viene dado por el vector $\bar{x}_t$ y el control en el tiempo t por el vector $\bar{u}_t$. El estado en el tiempo $t+1$ viene dado por

$$\bar{x}_{t+1} = f_t(\bar{x}_t,\ \bar{u}_t), \qquad t = t_0,\ t_{0+1},\ t_{0+2},\ldots,\ t_{1-1}$$

donde $f_t(\ldots)$ es un vector de funciones continuamente diferenciables del estado contemporáneo y de las variables de control. El estado inicial es:

$$\bar{x}_0$$

que se supone dado. La función objetivo es:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} I_t(\bar{x}_t,\ \bar{u}_t) + F(\bar{x}_{t_1},\ t_1)$$

que debe maximizarse eligiendo una sucesión de vectores de control:

$$\{ \bar{u}_{t0}, \bar{u}_{t0+1}, \bar{u}_{t+2}, \ldots, \bar{u}_{t1-1} \}$$

sujeto a la condición de que estos controles pertenezcan a un conjunto de control dado:

$$\bar{u}_t \in \Omega \qquad t = t_0, t_{0+1}, \ldots, t_{1-1}$$

Al igual que se hizo anteriormente, el enfoque por programación dinámica en este caso consiste en incorporar el problema por resolver en un conjunto más amplio de problemas caracterizado por ciertos parámetros y emplear entonces el principio de optimalidad para obtener una relación de recurrencia fundamental. Tomando como parámetros del problema de optimización de etapa múltiple el estado y tiempo iniciales, la función de actuación optimal es:

$$J^{*}(\bar{x}, t)$$

que es el valor optimal de la función objetivo para un problema que comienza en el estado x en el tiempo t. Siendo la solución al problema en cuestión:

$$J^{*}(\bar{x}_0, t_0)$$

Del principio de optimalidad se sigue que:

$$J^{*}(\bar{x}, t) = \max_{u_t} [\, I_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t) + J^{*}(\bar{x}_{t+1}, t+1) \,]$$

lo que dice que el valor optimal de la función objetivo, partiendo del estado x en el tiempo t, consiste en la suma optimal de la cantidad añadida en el tiempo t, $I_t(x_t, u_t)$, *y el valor optimal restante,* $J^*(x_{t+1}, t+1)$. *Utilizando la ecuación* $x_{t+1} = f_t(x_t, u_t)$, *la relación de recurrencia es:*

$$J^*(\bar{x}, t) = \max_{u_t} \left[I(\bar{x}_t, \bar{u}_t) + J^*(f_t(\bar{x}_t, \bar{u}_t), t+1) \right]$$

La condición de contorno es:

$$J^*(\bar{x}_1, t_1) = F(\bar{x}_{t1}, t_1)$$

que establece que el valor optimal de la función objetivo, partiendo de $\bar{x}_1$ *y* t_1 *es simplemente el valor de la función final en este estado y en este tiempo.*

Otra aproximación al problema de optimización en la etapa multiple consiste en caracterizar el problema no por el estado inicial y el tiempo inicial, sino por el estado inicial y por la cantidad de tiempo que resta por pasar en el problema. La función de actuación optimal es, entonces:

$$J^*_\tau(\bar{x}_{t1-\tau})$$

que es el valor optimal de la función objetivo para un problema de longitud τ , *partiendo del estado* $x_{t1-\tau}$. *La solución al problema en cuestión es, por tanto, para* $\tau=t_1$: $J^*_{t1}(\bar{x}_0)$. *En este caso, el método de programación dinámica resuelve el problema retrocediendo desde el tiempo terminal* t_1 *a través de una sucesión de soluciones.*

El primer término de esta sucesión es $J_0^*(x_{t1})$ que es el valor optimal de la función objetivo para un problema de longitud cero partiendo (y permaneciendo) en x_{t1}. Pero el valor optimal para este problema es simplemente el valor de la función objetivo final.

$$J_0^*(\bar{x}_{t1}) = F(\bar{x}_{t1}, t_1)$$

Consideremos ahora $J_1^*(\bar{x}_{t1-1})$, que el valor optimal de la función objetivo para el problema de longitud uno, partiendo de $\bar{x}_{t1-1}$ y llamado primera etapa. Este problema de longitud uno, que implica la elección del vector de control u_{t1-1}, se optimiza maximizando la parte particular de la función objetivo relacionada con este tiempo. $I_{t1-1}(\bar{x}_{t1-1}, \bar{u}_{t1-1})$ más el valor optimal para el problema que parte en t_1:

$$J_1^*(\bar{x}_{t1-1}) = \max_{u_{t1-1}} [\, I_{t1-1}(\bar{x}_{t1-1}, \bar{u}_{t1-1}) + J_0^*(\bar{x}_{t1})\,]$$

o empleando $\bar{x}_{t+1} = f(x_t, u_t)$, $\qquad t = t_0, t_{0+1}, \ldots, t_{1-1}$

$$J_1^*(\bar{x}_{t1-1}) = \max_{u_{t1-1}} [I_{t1-1}(\bar{x}_{t1-1}, \bar{u}_{t1-1}) + J_0^*(\bar{f}_{t1-1}(\bar{x}_{t1-1}, \bar{u}_{t1-1}))]$$

Esta elección de control en la etapa uno, es compatible con el principio de optimalidad, ya que el control $\bar{u}_{t1-1}$ es optimal con *respecto al estado* $\bar{x}_{t1-1}$ *resultante de las primeras* $t1-1$ *elecciones de vectores de control* $\bar{u}_{to}$, $\bar{u}_{to+1}$, ..., $\bar{u}_{t1-2}$. *Análogamente para la segunda etapa, con dos unidades de tiempo por pasar, para la cual.*

$$J_2^*(\bar{x}_{t1-2}) = \max_{u_{t1-2}} [I_{t1-2}(\bar{x}_{t1-2}, \bar{u}_{t1-2}) + J_1^*(f_{t1-2}(\bar{x}_{t1-2}, \bar{u}_{t1-2}))]$$

La relación general de recurrencia para la etapa τ *es:*

$$J_\tau^*(\bar{x}_{t1-\tau}) = \max_{u_{t1-\tau}} [I_{t1-\tau}(\bar{x}_{t1-\tau}, \bar{u}_{t1-\tau}) + J_{\tau-1}^*(\bar{f}_{t1-\tau}(\bar{x}_{t1-\tau}, \bar{u}_{t1-\tau}))] \quad \text{... (2.9)}$$

El problema se resuelve entonces como $J_{t1}^*(\bar{x}_o)$, *último valor optimal encontrado en la sucesión de problemas de optimización de una sola etapa, descritos por las ecuaciones funcionales (2.8) para* $\tau=1,\ldots,t1$, *con la condición de contorno* $J_o^*(\bar{x}_{t1})=F(\bar{x}_{t1}, t1)$. *El problema de optimización de etapa multiple, queda, pues, reducida, mediante la progresión dinámica, a una sucesión de problemas de optimización de una sola etapa.*

El principio del máximo

El principio del máximo es el tercer enfoque del problema de control y es frecuentemente más útil dado que puede enfrentarse directamente con las restricciones generales sobre las variables de control y sugiere habitualmente la naturaleza de la solución. El principio del máximo ha sido el enfoque básico del cálculo de *controles optimales en muchos problemas importantes en matemáticas, ingeniería y economía.*

El problema del principio del maximo es el problema de control general:

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x}, \bar{u}, t)\, dt + F(\bar{x}_1, t_1)$$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \qquad (2.10)$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$$

$$\{\bar{u}(t)\} \in U$$

Siendo $I(\ldots)$, $F(\ldots)$ y $f(\ldots)$ funciones dadas continuamente diferenciables; t_0, $\bar{x}_0$, son parámetros dados; t_1 o $\bar{x}_1$ son parámetros dados (o $T(\bar{x}, t) = 0$ define la superficie terminal); y $\{\bar{u}(t)\}$, la trayectoria de control, debe pertenecer al conjunto de control U dado, lo que exige que $\bar{u}(t)$ sea una función continua a intervalos del tiempo, cuyos valores deben pertenecer al conjunto Ω, un subconjunto dado de $\mathbb{R}^r$ no vacío y compacto.

- *Las variables de coestado, el hamiltoniano y el principio del máximo.*

Podemos considerar el principio del máximo como una extensión de método de los multiplicadores de Lagrange a los problemas de (control) optimización dinámica. Consideremos el problema de control (2.10), en el caso especial en que el tiempo terminal es dado y las variables de control no tienen restricciones. Se trata de un problema de maximización sujeta a restricciones, en donde la expresión que ha de maximizarse es el funcional objetivo:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x},\ \bar{u},\ t)\, dt + F(\bar{x}_1,\ t_1)$$

y las restricciones son las n ecuaciones diferenciales, que pueden escribirse:

$$f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) - \dot{\bar{x}}(t) = 0\ , \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

Precediendo en forma análoga a como se hizo en los problemas estáticos, se añade al problema un vector (fila) de nuevas variables una por cada una de las n restricciones:

$$\bar{\lambda}(t) = (\lambda_1(t),\ \lambda_2(t), \ldots,\ \lambda_n(t)) \qquad (2.11)$$

Estas nuevas variables se denominan variables de coestado, y son los equivalentes dinámicos de los multiplicadores de Lagrange de los problemas estáticos de máximización sujeta a restricciones. Dado que cada variable de coestado corresponde a una de las ecuaciones diferenciales del movimiento, que a su vez se define sobre todo el intervalo de tiempo desde t_0 a t_1, las variables de coestado varían en general con el tiempo, como se indica en (2.11), y se supone que son funciones no nulas continuas de tiempo.

Procediendo por analogía con el caso estático, el paso siguiente es definir una función lagrangiana igual a la expresión que se desea maximizar más el producto interno del vector multiplicador de Lagrange y las retricciones. Pero como las restricciones y las variables de coestado están definidas en todo el intervalo de tiempo , el producto interno se trata propiamente *bajo el signo integral, siendo la expresión lagrangiana:*

$$L = J + \int_{t_0}^{t_1} \bar{\lambda}[f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) - \dot{\bar{x}}\ ]\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} I(\bar{x},\ \bar{u},\ t) + \bar{\lambda}[f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) - \dot{\bar{x}}]\, dt + F(\bar{x}_1,\ t_1) \qquad (2.12)$$

Prosiguiendo la analogía con el caso estático, un punto de silla de la lagrangiana nos daría la solución. Pero aquí, el punto de silla está situado en el espacio de funciones, en donde $(\{\bar{u}^*(t)\}, \{\bar{\lambda}^*(t)\})$ *representa un punto de silla si:*

$$L(\{\bar{u}(t)\},\{\bar{\lambda}^*(t)\}) \le L(\{\bar{u}^*(t)\},\{\bar{\lambda}^*(t)\}) \le L(\{\bar{u}^*(t)\},\{\bar{\lambda}(t)\}) \qquad (2.13)$$

La trayectoria de control $\{\bar{u}^*(t)\}$ *resuelve entonces el problema de control.*

Por la segunda desigualdad

$$\int_{t_0}^{t_1} \{(\bar{\lambda}^* - \bar{\lambda})\ [f(\bar{x}^*,\ \bar{u}^*,\ t) - \dot{\bar{x}}^*]\}\, dt \le 0 \qquad (2.14)$$

que se cumple para toda $\{\bar{\lambda}(t)\}$ *continua solamente si:*

$$\dot{\bar{x}}^* = f(\bar{x}^*,\ \bar{u}^*,\ t) \qquad (2.15)$$

por lo tanto la integral (2.14) es positiva. Así, pues las ecuaciones del movimiento se satisfacen a lo largo de la trayectoria optimal. Pero partiendo de la primera desigualdad de

(2.13)

$$J\{\vec{u}^*(t)\} \geq J\{\bar{u}(t)\} + \int_{to}^{t1} \{\vec{\lambda}^*[f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) - \dot{\bar{x}}]\}\, dt \qquad (2.16)$$

de modo que, para todas las trayectorias de control $\{\bar{u}(t)\}$ que satisfacen las ecuaciones de movimiento:

$$J\{\bar{u}^*(t)\} \geq J\{\bar{u}(t)\}$$

y por tanto $\{u^*(t)\}$ es la trayectoria optimal. El valor optimal del funcional objetivo es el valor de la lagrangiana en el punto de silla.

Consideremos ahora las condiciones necesarias para dicho punto de silla. Según (2.12), una variación de la trayectoria de la variable de coestado a $\{\bar{\lambda}(t) + \bar{\lambda}(t)\}$ donde $\bar{\lambda}(t)$ es cualquier función continua del tiempo, haría variar la lagrangiana en:

$$L = \int_{to}^{t1} \bar{\lambda}\ [f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) - \dot{\bar{x}}\ ]\, dt \qquad (2.17)$$

Igualando a cero la variación de la lagrangiana, la condición necesaria de primer orden para minimizar L por elección de $\{\bar{\lambda}(t)\}$, requiere, según el principio fundamental del cálculo de variaciones, que las ecuaciones de movimiento sean satisfechas:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) \qquad (2.18)$$

Según esto, el obtener en este caso como condiciones necesarias las ecuaciones de movimiento, es completamente análogo a obtener las restricciones como condiciones necesarias en los problemas estaticos.

Para desarrollar las restantes condiciones necesarias, adviértase que el término $-\bar{\lambda}(t)\,\dot{\bar{x}}(t)$ en (2.12) Se puede integrar por partes

$$L = \int_{t0}^{t1} \{l(\bar{x},\ \bar{u},\ t) + \bar{\lambda}\, f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) + \dot{\bar{\lambda}}\,\bar{x}\}\,dt + F(\bar{x}_1,\ t_1) - [\bar{\lambda}(t_1)\,\bar{x}(t_1) - \bar{\lambda}(t_0)\,\bar{x}(t_0)] \tag{2.19}$$

Las dos primeras expresiones bajo el signo integral se define como la función hamiltoniana

$$H(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{\lambda},\ t) \equiv I(\bar{x},\ \bar{u},\ t) + \bar{\lambda}\, f(\bar{x},\ \bar{u},\ t) \tag{2.20}$$

es decir, la función hamiltoniana se define como la suma de la función intermedia (integrando) del funcional objetivo más el producto interno del vector de variables de coestado y el vector de funciones que define la tasa de variación de las variables de estado. Así:

$$L = \int_{t0}^{t1} \{H(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{\lambda},\ t) + \dot{\bar{\lambda}}\,\bar{x}\}\,dt + F(\bar{x}_1,\ t_1) - [\bar{\lambda}(t_1)\,\bar{x}(t_1) - \bar{\lambda}(t_0)\,\bar{x}(t_0)] \tag{2.21}$$

Considérese el efecto de un cambio en la trayectoria de control pasando de $\{\bar{u}(t) + \bar{u}(t)\}$ con un cambio correspondiente en la trayectoria de estado desde $\{\bar{x}(t)\}$ a $\{\bar{x}(t) + \bar{y}(t)$. El cambio en la lagrangiana es:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial H}{du} \quad \bar{u} - \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}} \right] \quad \bar{x} \right\} dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1} - \bar{\lambda}(t_1) \right] \quad \bar{x}_1 \qquad (2.22)$$

en donde:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}, \frac{\partial H}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial u_r} \right)$$
$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \qquad (2.23)$$

Para que exista un máximo es necesario que se anule la variación de la lagrangiana, lo que exige, ya que (2.22) debe cumplirse para cualquier $\{\bar{u}(t)\}$, que:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0 \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad (2.24)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = - \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad t_0 \le t_1 \le t_1 \qquad (2.25)$$

$$\bar{\lambda}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1} \qquad (2.26)$$

Las condiciones necesarias (2.24) establecen que la función hamiltoniana se máximiza mediante la elección de las variables de control en cada punto a lo largo de la trayectoria optimal, siendo las r condiciones de (2.24) las de un máximo interior, puesto que en el problema que se considera no hay restricciones sobre los valores que toman las variables de control. Más generalmente, si existen restricciones respecto a los valores que toman las variables de control, la condición (2.24) se convierte en :

$$\max_{\{\bar{u}\in\ \}} H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) \quad \text{para toda } t, \quad t_0 \le t \le t_1 \qquad (2.27)$$

o sea, la función hamiltoniana se maximiza en cada punto del tiempo a lo largo de la trayectoria optimal por elección de las variables de control. De este modo, en cualquier tiempo t de intervalo posible existe o bien una solución interior en la cual:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0 \qquad (2.28)$$

como en la programación clásica, o bien una solución de contorno en la cual:

$$\frac{\partial H}{\partial n} \ge 0 \qquad (2.29)$$

donde n es una normal dirigida hacia afuera, sobre el contorno de Ω, como en la programación lineal.

Las condiciones necesarias (2.28) y (2.29) son ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, respectivamente, para las variables de coestado. Las ecuaciones diferenciales requiren de la tasa de variación instantánea de cada variable de coestado sea opuesta a la derivada parcial de la función hamiltoniana con respecto a la correspondiente variable de estado, y las condiciones de contorno establecen que el valor terminal de cada variable de coestado es la derivada parcial de la función final con respecto a la correspondiente variable de estado.

Las ecuaciones diferenciales para las variables de estado, es decir, las ecuaciones de movimiento, pueden expresarse, en términos *del hamiltoniano, de este modo:*

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \qquad (2.30)$$

Estas ecuaciones diferenciales para las variables de estado, y las ecuaciones diferenciales para las variables de coestado más todas las condiciones de contorno se denominan ecuaciones canónicas:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \qquad \bar{x}(t) = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad \bar{\lambda}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1} \qquad (2.31)$$

Conjunto de 2n ecuaciones diferenciales de las cuales la mitad tiene condiciones de contorno en el tiempo terminal.

Consideremos ahora el cambio en el hamiltoniano con el tiempo. Dado que $H = H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{t})$:

$$\frac{\partial H}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \dot{\bar{u}} + \dot{\bar{\lambda}} \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial H}{dt} \qquad (2.32)$$

utilizando las condiciones de movimiento y, agrupando términos:

$$\frac{\partial H}{dt} = \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}\right] f(\bar{x}, \bar{u}, t) + \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{u}}\right] \dot{\bar{u}} + \frac{\partial H}{dt} \qquad (2.33)$$

A lo largo de la trayectoria optimal el primer termino se anula a causa de la ecuación diferencial para la variable de coestado. El segundo término se anula porque o bien se anula la derivada parcial *para una solución interior o bien* $\dot{\bar{u}}$ *se anula para una solución de contorno. Así, pues, a lo largo de la trayectoria optimal:*

$$\frac{\partial H}{dt} = \frac{\partial H}{dt} \qquad (2.34)$$

En particular, si el problema es autónomo en cuanto a que $I(\ldots)$ *como* $f(\ldots)$ *no muestran ninguna dependencia explícita respecto del tiempo, entonces el hamiltoniano tampoco presenta dependencia explícita respecto del tiempo y, como* $\partial H/dt = 0$, *a lo largo de la trayectoria optimal, el valor del hamiltoniano es constante en el tiempo.*

Resumiendo, la técnica del principio del máximo supone añadir al problema n variables de coestado, $\bar{\lambda}(t)$, *definiendo la función hamiltoniana así:*

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) \equiv I(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}\, f(\bar{x}, \bar{u}, t) \qquad (2.35)$$

y resolviendo por las trayectorias $\{\bar{u}(t)\}$, $\{\bar{\lambda}(t)\}$ *y* $\{\bar{x}(t)\}$ *con:*

$$\max_{\{u\in\ \}} H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) \quad \text{para toda } t, \quad t_0 \le t \le t_1 \qquad (2.36)$$

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \qquad \bar{\lambda}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1}$$

Estas condiciones son necesarias para un máximo local. La forma de la solución para el control optimal se sigue a menudo fácilmente de la maximización del hamiltoniano, que por lo común da las variables de control optimal no como funciones del tiempo, sino como funciones de las variables de coestado. Para obtener las variables de control como funciones del tiempo, que requieren entonces los cursos temporales de las variables de coestado, lo que comporta resolver un problema de valores de contorno de dos puntos -las ecuaciones canónicas- 2n ecuaciones diferenciales de las cuales n tiene condiciones de contorno iniciales (las de las variables de estado) y n tienen ecuaciones de contorno terminales (las de las variables de coestado).

· *Interpretación de las variables de coestado*

Las variables de coestado del principio del máximo dan información sobre la sensibilidad de la solución a variaciones de los parámetros.

La lagrangiana definida anteriormente en (2.12) es igual al valor optimal de la función objetivo, cuando se le dan valores en la solución $\{\bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t)\}$ $\{\bar{x}^*(t)\}$. Así, pues, por (2.12):

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \{ H(\bar{x}^*, \bar{u}^*, \bar{\lambda}^*, t) + \dot{\bar{\lambda}}^* \bar{x}^* \} \, dt \qquad (2.37)$$
$$+ F(\bar{x}_1, t_1) - [\bar{\lambda}^*(t_1)\, \bar{x}^*(t_1) - \bar{\lambda}^*(t_0)\, \bar{x}(t_0)]$$

las sensibilidades de la solución, a las variaciones en los parámetros que son los parámetros t_0, t_1 y $\bar{x}(t_0)$, vienen indicadas por las derivadas parciales de J^* con respecto a estas variables.

La sensibilidad del valor optimal de la función objetivo a un cambio en el tiempo inicial t_0 está dada por :

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_0} = -\left[H^* + \dot{\bar{\lambda}}\, \bar{x}^* \right]_{t_0} + \left[\bar{\lambda}^*\, \dot{\bar{x}}^* + \dot{\bar{\lambda}}^*\, \bar{x}^* \right]_{t_0}$$

$$= -\left[H^* - \bar{\lambda}^*\, \dot{\bar{x}}^* \right]_{t_0} \qquad (2.38)$$

$$= -\left[I(\bar{x}^*, \lambda^*, t) \right]_{t_0}$$

o sea por el opuesto del valor inicial de la función intermedia. Variar el tiempo inicial, por tanto, reduce J^* en la porción de la función intermedia que se pierde en razón del cambio en el tiempo inicial.

La sensibilidad de J^* a las variaciones en el tiempo terminal, t_1, está dada por :

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_1} = \left[H^* + \dot{\bar{\lambda}}^*\, \bar{x}^* \right]_{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \bar{x}(t_1)} \frac{\partial \bar{x}^*(t_1)}{dt_1} + \frac{\partial F}{\partial t_1} - \left[\dot{\bar{\lambda}}^*\, \bar{x}^* + \bar{\lambda}^*\, \dot{\bar{x}}^* \right]_{t_1} \qquad (2.39)$$

$$= \left[I\ (\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right]_{t_1} + \frac{\partial F}{\partial \bar{x}(t_1)} \frac{\partial \bar{x}^*(t_1)}{dt_1} + \frac{\partial F}{\partial t_1} (\bar{x}^*(t_1), t_1)$$

o sea por el valor terminal de la función intermedia más el incremento de la función final.

Las sensibilidades del valor optimal del funcional objetivo a los cambios en el estado inicial $\bar{x}(t_0)$ vienen dados por:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}(t_0)} = \bar{\lambda}^*(t_0) \qquad (2.40)$$

o sea por el valor inicial de la correspondiente variable de coestado optimal. Este resultado indica la interpretación de las variables de coestado inicial como variaciones en el valor optimal del funcional objetivo debidos a las variaciones en las correspondientes variables de estado inicial. De este modo, a cualquier problema dinámico de economizar consistente en la distribución en el tiempo le corresponde un problema dual de valoración en el tiempo que es problema de determinar cursos temporales para las variables de coestado. Esta interpretación de las variables de coestado es el análogo dinámico de la interpretacón de los multiplicadores de Lagrange de los problemas de economizar estáticos.

· *El principio del máximo y el cálculo de variaciones*

En el problema del cálculo de variaciones clásico las variables de control son las tasas de variación instantánea de las variables de estado, y las variables de control carecen de restricciones en cuanto al valor:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{u} \qquad (2.41)$$

$$\Omega = \mathbb{R}$$

El hamiltoniano es:

$$H(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{\lambda},\ t) = I(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ t) + \bar{\lambda}\,\dot{\bar{x}} \qquad (2.42)$$

y maximizar el hamiltoniano eligiendo $\dot{\bar{x}}$, requiere, como una condición necesaria de primer orden, que:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\bar{x}}} = \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} + \bar{\lambda} = 0\ ,$$

así que: $$\bar{\lambda} = -\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} \quad (2.43)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right] \quad (2.44)$$

pero, según la ecuación canonica para las variables de coestado:

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial I}{\partial \bar{x}} \quad (2.45)$$

combinando (2.44) y (2.45) se obtiene la ecuacuación de Euler del cálculo de variaciones:

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\right] = 0 \quad (2.46)$$

La condición necesaria de segundo orden para la maximización de hamiltoniano es la condición referente a la matriz hessiana de las derivadas parciales de segundo orden de la función hamiltoniana:

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{\bar{x}}^2}\right] \text{ definida negativa o semidefinida negativa} \quad (2.47)$$

lo que da la condición de legendre:

$$\left[\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{\bar{x}}^2}\right] \text{ definida negativa o semidefinida negativa} \quad (2.48)$$

Nuevamente, según el principio del máximo, si $\bar{u} = \dot{\bar{x}}$ es el control optimal, entonces para cualquier otro control $\dot{z}$:

$$H(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ \bar{\lambda},\ t) \geq H(\bar{x},\ \dot{z},\ \bar{\lambda},\ t), \qquad (2.49)$$

de modo que, según (2.42)

$$I(\bar{x},\ \dot{\bar{x}},\ t) + \bar{\lambda}\ \dot{\bar{x}} \geq I(\bar{x},\ \dot{z},\ t) + \bar{\lambda}\ \dot{z} \qquad (2.50)$$

utilizando (2.43) y reagrupando los términos se obtiene la condición de Weierstrass:

$$E(\bar{x},\dot{\bar{x}},t,\dot{z}) = I(\bar{x},\dot{z},t) - I(\bar{x},\dot{\bar{x}},t) - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} + (\bar{x},\dot{\bar{x}},t)(\dot{z}-\dot{\bar{x}}) \leq 0 \qquad (2.51)$$

Finalmente, de acuerdo con el principio del máximo λ y H son funciones continuas del tiempo. Pero:

$$\bar{\lambda} = -\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} \qquad (2.52)$$

$$H = I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\ \dot{\bar{x}}$$

de modo que $\partial I/\partial \dot{\bar{x}}$ e $(I - \partial I/\partial \dot{\bar{x}})\ \dot{\bar{x}}$ son funciones continuas del tiempo, obteniéndose así las condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann :

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}} \quad e \quad I - \frac{\partial I}{\partial \dot{\bar{x}}}\ \dot{\bar{x}} \quad \text{Continuas a través de las esquinas} \qquad (2.53)$$

Así, las condiciones necesarias de cálculo de variaciones se han deducido del principio del máximo.. Hay casos especiales del cálculo de variaciones que pueden también tratarse empleando el principio del máximo. Por ejemplo, si la función intermedia $I(\ldots)$ no depende explícitamente del tiempo, el problema es autónomo, en cuyo caso, y según (2.34), el hamiltoniano es constante a lo largo del curso optimal, de modo que:

$$H = I - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}} \dot{x} = \text{constante} \qquad (2.54)$$

que es la condición obtenida anteriormente $I - \frac{\partial I}{\partial \bar{x}} \dot{x} = \text{cte}$, para este caso.

· El principio del máximo y la programación dinámica

En la programación dinámica, la función de acción optimal $J(\bar{x}, t)$ se define como el valor optimal del funcional objetivo para el problema que comienza en el estado inicial $\bar{x}$ y el tiempo inicial t, y el enfoque requiere la solución de la ecuación fundamental en derivadas parciales (ecuación de Bellman):

$$\frac{-\partial J^{*}}{\partial t} = \max_{\{\bar{u}\}} \left[I(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial J^{*}}{\partial \bar{x}} f(\bar{x}, \bar{u}, t) \right] \qquad (2.55)$$

La relación entre este enfoque y el del principio del máximo se basa en la ecuación $\frac{\partial J^{*}}{\partial \bar{x}(t_0)} = \bar{\lambda}^{*}(t_0)$, que dice que la variación del valor optimal del funcional objetivo con respecto al estado inicial, es el valor inicial de la variable de estado. Empleando la función de acción optimal:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda} \qquad (2.56)$$

La expresión entre corchetes en la ecuación de Bellman es, por tanto, la función hamiltoniana:

$$I(\bar{x},\bar{u},t) + \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} f(\bar{x},\bar{u},t) = I(\bar{x},\bar{u},t) + \bar{\lambda} f(\bar{x},\bar{u},t) = H(\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},t) \qquad (2.57)$$

y (2.55) se puede escribir:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\bar{u}\}} \left[H(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{\lambda},\ t)\right] \qquad (2.58)$$

La maximización que pide esta ecuación es la de maximizar el hamiltoniano por elección de variables de control dentro del conjunto de control, el cual es, por supuesto, el propio principio del máximo. Suponiendo que $\bar{u}$ es el control que maximiza el hamiltoniano:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = H\left(\bar{x},\ \bar{u},\ \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}},\ t\right) \qquad (2.59)$$

llamada la ecuación Hamilton-Jacobi. Derivando con respecto a $\bar{x}$:

$$\frac{-\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}}\right)' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}^2} \qquad (2.60)$$

pero derivando $\dfrac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} = \bar{\lambda}$:

$$\dot{\bar{\lambda}} = (\dot{\bar{x}})' \frac{\partial^2 J^*}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 J^*}{\partial t \partial} \qquad (2.61)$$

Combinando (2.60) y (2.61) y por la igualdad de las derivadas parciales mixtas de segundo orden (ya que $J^*(\bar{x}, t)$, se supone en programación dinámica continuamente diferenciable), se obtienen las ecuaciones canónicas del principio del máximo:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} \qquad (2.62)$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

finalmente, la condición de contorno terminal sobre la ecuación de Bellman implica la condición de contorno terminal sobre las variables de coestado, puesto que

$$J^*(\bar{x}_1, t_1) = F(\bar{x}_1, t_1)$$

implica que:

$$\bar{\lambda}(t_1) = \frac{\partial J^*}{\partial \bar{x}} (\bar{x}_1, t) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_1}$$

Las condiciones de la programación dinámica (la ec. de Bellman) y su condición de entorno, implican, las condiciones del principio del máximo. El principio del máximo, sin embargo, no implica la ecuación de Bellman, ya que el principio del máximo no exige que la función de acción optimal sea continuamente diferenciable. Por lo que respecta al cálculo de controles óptimos, los dos métodos *representan dos enfoques del problema dinámico de economizar muy diferentes: la programación dinámica lleva a una ecuación diferencial parcial no lineal, mientras que el principio del máximo lleva a dos conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias. El principio del máximo es frecuentemente un método más fructífero, debido a que, divide la resolución de la ecuación de Bellman en dos etapas, la primera para hallar los controles optimales en función de las variables de coestado, y la segunda para hallar los cursos temporales de las variables de coestado. La primera etapa se hace generalmente con gran facilidad, y a menudo, arroja luz sobre la naturaleza de la solución, facilitando la solución por otros medios. La segunda es más difícil, ya que comporta la resolución de un problema de valores de contorno de dos puntos. La programación dinámica, en cambio, exige que ambas etapas sean conjuntas por resolución de la ecuación de Bellman. Para una solución analítica, por tanto, el enfoque del principio del máximo es generalmente más útil que el de programación dinámica.*

II.4 TEORIA DE CONTROL Y MODELO GENERAL DE UTILIZACION DE CAPITAL.

En lo que sigue se desarrolla un esquema general que nos permita derivar algunas conclusiones básicas sobre la utilización de la teoría de control aplicado al análisis económico. Resulta conveniente, no obstante, mencionar que sólo se retoman algunos de los resultados expuestos hasta aquí y que el interés rádica en presentar esta metodología.

En el caso de la empresa productora de bienes públicos,. como en otras empresas, se sabe que el flujo de bienes dependerá de su stock de acervo productivo, además de considerar los costos en que incurre. Además en un horizonte de planeación le interesa adquirir nuevo capital para enfrentar la demanda de mercado. La empresa recibe un flujo de ingreso dado por R(k) que depende del precio el cual se adquieren sus bienes en el mercado.

Por otra parte sabemos que uno de los problemas que tiene una empresa productora de bienes públicos es el determinar su precio. Consideremos este elemento posteriormente una vez que analicemos las condiciones bajo las cuales la empresa incrementa y aprovecha su stock productivo.

Sea el stock de capital K(t) en el tiempo t, el cual permite a la empresa generar un flujo, digamos anual, de ingreso. Debe decirse que en todos los casos nos referiremos a ingresos reales o precios reales, para acercarnos a la valuación del acervo productivo en cada momento del tiempo.

La empresa combina el stock de capital en cada momento en el tiempo con otros factores productivos, como trabajo y otros insumos, de manera que en cada periodo minimiza sus costos de operación. Por otro lado, debemos decir que el acervo productivo se deprecia en cada intervalo una masa de bk y que el costo de inversión de nuevo capital esta dado por c(u).

Este último debe interpretarse como el costo que le permite a la empresa mantener un funcionamiento óptimo, digamos para satisfacer adecuadamente la demanda de bienes que enfrenta. Cabe señalar que en el caso de bienes públicos esta puede ser creciente, digamos en función del crecimiento de población, o de la evolución del proceso de industrialización, como en el caso de la electricidad.

En términos generales a toda empresa que se fije un horizonte de planeación, digamos de t0 a t1, le interesa utilizar su acervo productivo y adquirir o adicionar nuevo capital de manera que le permita maximizar su riqueza. Así;

maximizar $\int_{t_0}^{t_1} R(k(t)) - c(u(t))\, e^{-rt}\, dt$

sujeto a $k' = u(t) - bk(t),\ k(o) = ko > 0$

Suponemos funciones bien comportadas y la existencia de una solución interior donde la tasa de adquisición de nuevo capital sea positiva $u(t) > 0$ y que el stock productivo, en el incremento t sea, evidentemente $k(t) > 0$. Cabe señalar que la primera condición $u(t) > 0$ permite generar una trayectoria de flujo de bienes, por ejemplo para satisfacer una demanda creciente.

Asimismo debemos suponer que la calidad del bien público permanece constante en el tiempo, o bien que el incremento del stock nos permite ofrecer los bienes con igual característica durante el tiempo.

La ecuación $K'=U- bk$ debe interpretarse como la ecuación de movimiento del modelo, ya que en esta se lee que la tasa de cambio del acervo productivo depende de la nueva adquisición de capital, además de la depreciación que se origina en un periodo determinado.

En terminos de las decisiones que tome la empresa, ésta debe poner especial atención a la compra de nuevo capital e inversión adicional a n', como al costo de oportunidad de la misma. En el caso de fondos publicos o privados dicha condición será determinante para evaluar la viabilidad de un proyecto o bien la planeación adecuada del presupuesto.

Al suponer funciones bien comportadas, esto es $R(K)$ concava $c(n)$ convexa, se asegura la existencia del máximo y permite satisfacer las condiciones de primer orden del problema de maximización.

En este caso el valor del Hamiltoniano se puede expresar como.

$H= R(K) - C(u)+ m (u-bk)$

de donde se obtiene

$Hu= -c'(u) +m = 0$

$Hk= R'(k) - bm= rm - m'$

donde además sabemos que

$k'(t) = u(t) - bk (t)$

La derivada respecto de u (adquisición de capital) de la función H implica que el valor marginal actual del acervo productivo m(t) debe igualarse a los costos marginales de inversión del nuevo capital c'(u).

Por otra parte, la parcial respecto de k podemos escribirla como

$R'(k) + m' = (b+r)$

donde los costos de oportunidad que enfrenta la empresa estan dados por (b+r)m, es decir por la tasa de depreciación del valor del acervo productivo, más el valor que produce la inversión alternativa r, (por ejemplo una tasa de descuento o tasa de interés del mercado).

Esto también puede interpretarse de la siguiente manera: a lo largo de la trayectoria que maximiza el valor de la riqueza el costo de oportunidad marginal, es decir en el periodo t, debe igualar a la tasa marginal a la cual los ingresos son producidos, que se derivan de dos fuentes, del acervo productivo y de la nueva inversion.

La expansion del acervo productivo de la empresa productora de bienes públicos responde, como cualquier empresa, a costos de oportunidad que deben reflejarse en sus esquemas de planeación.

De esta forma, si ahora retornamos el problema de fijación del supremo de los bienes, puede decirse, que en una trayectoria óptima y en ausencia de transferencias, la decisión de cotizar un bien en el mercado dependerá fundamentalmente de la nota de expansión que fije la empresa para su acervo productivo.

Es decir, el flujo de ingresos que espera recibir deberá ajustarse al costo de oportunidad que enfrenta, por ello el precio de un bien con estas características debe ser considerado como un elemento endógeno para la gestión administrativa.

Ahora bien, si suponemos que existen transferencias, (considerando los costos de oportunidad que estas mismas conllevan), los ingresos contenidos por la venta de bienes más éstas, deberan igualarse a los costos de inversión en que incurren las empresas. En este caso se estará recurriendo a un proceso presupuestario además del aspecto operativo de una industria.

Debe mencionarse que además de considerar el precio en términos reales de los bienes que ofrece la empresa, considerando por ejemplo un deflactor para toda la economía, los costos de reposición e incremento del acervo productivo son indispensables para elevar flujo de ingresos, por periodos o en un horizonte de planeación, que requiere la empresa para su operación.

Una trayectoria de precios relativos a la baja significa entonces un flujo de ingresos insuficiente para la reposición del stock de capital, y en todo caso implicaría transferencias de otros sectores, ya sea como subsidios, partidas presupuestales o endeudamiento.

Esta característica es particularmente relevante para el caso de las empresas públicas en México, donde existen generalmente restricciones en la fijación de precios que son ajenas a la empresa y que durante una buena parte de la historia económica del país se ha traducido en un déficit de operacion de aquellas, y por lo tanto en transferencias crecientes que tienen un impacto considerable en las finanzas del sector público.

LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS

Para fines de exposición consideraremos en la especificación del modelo dinámico la función de producción Cobb-Douglas, ya que permite una mayor flexibilidad para explicar los conceptos de la teoría del control. En esta sección se describen las características más importantes de esta función y posteriormente se definen los parámetros que se consideran en nuestro problema de optimización.

La función de producción Cobb-Douglas.

$$q = A\, a^{\alpha}\, b^{1-\alpha}$$

En forma linealemte homogénea. Desde luego, por relación económica debemos estipular que $A > 0$ y que $0 < \alpha < 1$.

Los parámetros A y α se llaman parámetro de eficiencia y parámetro de la intensidad de insumos, respectivamente. A es denominado así porque, para cada combinación de insumos, cuando mejor es A, mayor es el nivel de producción.

Características de la función Cobb-Douglas.

Por la ecuación $$q = A\, a^{\alpha}\, b^{1-\alpha}$$

los productos marginales son :

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \alpha\, A\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-1} \quad y \quad \frac{\partial q}{\partial b} = (1-\alpha)\, A\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}$$

Como para un nivel positivo de insumos, cada termino, en cada una de las expresiones, es estrictamente positivo los productos marginales son siempre positivos. Además disminuyen en forma monótona a lo largo de todo el rango de valores de los insumos de cero hasta ∞, este hecho puede verse facilmente por

$$\frac{\partial^2 q}{\partial a^2} = \alpha \ (1-\alpha) \ A \ a^{\alpha-2} \ b^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial b^2} = - \alpha \ (1-\alpha) \ A \ a^{\alpha} \ b^{-\alpha-1}$$

Por las ecuaciones $\frac{\partial q}{\partial a} = \alpha \ A\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-1}$ y,

$$\frac{\partial q}{\partial b} = (1-\alpha) \ A\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}$$

la tasa marginal de sustitución técnica de a por b (designada como s) es

$$s = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{b}{a}\right)$$

de lo cual se sigue que la elasticidad de sustitución es 1 (α = 1). La elasticidad de sustitución es una medida no negativa de la facilidad relativa con la cual un insumo puede ser sustituido por otro en tanto que se mantiene una producción constante. La elasticidad es estrictamente positiva cuando los insumos son mutuamente limitados. La elasticidad es un número puro dependiente de las unidades en las cuales se miden los insumos y la producción. Finalmente es una relación simétrica que generalmente es una función del punto en el cual se mide el insumo.

Para cualquier nivel dado de s, cuanto mayor es α (la intensidad del insumo) menor sera el cociente de los insumos $\frac{b}{a}$ Así, cuanto mayor sea α, más a-intensivo será el proceso de elaboración en cualquier punto de la producción. Esto explica que se designe α como el parámetro intensidad del insumo.

La derivada de la ecuación $s = \frac{\alpha}{1 - \alpha}\left(\frac{b}{a}\right)$ con respecto al cociente de insumos $\left[\left(\frac{b}{a}\right) = w\right]$ es

$$\frac{\partial s}{\partial w} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Al invertir y multiplicar por el cociente $s : w$ se confirma que la elasticidad de la sustitución es ciertamente la unidad

$$\frac{\partial w}{\partial s} \quad \frac{s}{w} = \sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = 1$$

La elasticidad de sustitición es tan sólo la recíproca del exponente del cociente de los insumos en la expresión correspondiente a la TMgST.

Debe mencionarse una propiedad decisiva de la función Cobb-Douglas debido a que representa, de hecho, una característica levemente endeble. Para presentar esta cuestión, supongamos que los productos marginales son siempre no negativos, como en Cobb-Douglas. Entonces, a medida que el uso de un insumo aumenta indefinitivamente, en tanto que el uso del otro se mantiene constante, el producto marginal del insumo aumentado debe acercarse asintóticamente a cero, esto es:

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\partial q}{\partial a} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{b \to \infty} \frac{\partial q}{\partial b} = 0$$

Si valen las expresiones anteriores, se debe seguir que

$$\lim_{a\to\infty} q = m_1 \qquad y \qquad \lim_{b\to\infty} q = m_2$$

donde m_1 y m_2 son positivas, constantes finitas.

Al aplicar esto a la función Cobb-Douglas en la ecuación $q = A\, a^{\alpha}\, b^{1-\alpha}$ se encuentra :

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\partial q}{\partial a} = \lim_{b\to\infty} \alpha A \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-1} = 0$$

cuando $0<\alpha<1$

Sin embargo,

$$\lim_{a\to\infty} q = \lim_{a\to\infty} A\, a^{\alpha}\, b^{1-\alpha} = \infty$$

El mismo tipo de expresión vale para el PMg de B y para la producción cuando B se aumenta en forma indefinida. Parecería que la función Cobb-Douglas tiene una contradicción interna. No es así: "en la función de producción Cobb-Doublas, la producción llegará a ser infinita para un orden superior, a aquel en que desaparece el producto marginal, cuando 'a' crece indefinidamente en tanto que 'b' permanece constante. En otras palabras, los servicios de 'a' contribuyen a la producción, permitiendo diferirlos antes de que el producto marginal llegue a cero a medida que los insumos 'a' sean muy grandes ".

Debe gustarnos (idealmente) contar que la función se acerque a un límite a medida que un insumo aumenta sin límite. Ciertamente la función debe alcanzar un punto máximo y después descender.

La función Cobb-Douglas con precios fijos de los factores

Con precios fijos en los insumos, el costo total es sólo una función de la producción y de nada más. Pero el producto está determinado por la función de producción. Así, conociendo una función de produción específica, la función costo, asociada siempre, puede ser derivada.

Aquí se deriva y se examina en detalle la función costo, asociada con una función de producción Cobb-Douglas.

Sea la función Cobb-Douglas expresada en la forma de

$$q = a\, x_1\, x_2 \qquad (0 < a,\ \alpha,\ \beta)$$

En donde p_1 p_2 *son representantes de los precios unitarios constantes de los insumos* X_1 *y* X_2*. Dada la ecuación* $q = a\, x_1\ \ x_2$ *la igualdad entre la TMgST y la relación entre insumos y precios, la condición que define la trayectoria de expansión (esta se define como el conjunto de las combinaciones de insumos para los cuales la TMgST es igual a la relación entre insumos y precio. La trayectoria de expansión se define así, en donde los niveles de uso de los insumos dependen del volúmen de la producción) requiere que*

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

Después, tomemos los logaritmos de las ecuaciones $q = \alpha x_1\ x_2$ *y* $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$ *expresémoslos como un par de ecuaciones simultáneas*

$$\alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 = \ln q - \ln a$$

$$- \ln x_1 + \ln x_2 = \ln \beta - \ln \alpha + \ln p_1 - \ln p_2$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones anteriores para x_1 y x_2 *se obtiene*

$$x_1^* = (\alpha^{-1}\, q\, \beta^{-} \quad \alpha \quad \rho_1^{-} \quad \rho_2 \;)^{1/(\; + \;)}$$

$$x_2^* = (\alpha^{-1}\, q\, \beta \quad \alpha^{-} \quad \rho_1\, \rho_2^{-} \quad)^{1/(\; + \;)}$$

en donde x_1^* y x_2^* *son las cantidaddes requeridas de los insumos para producir q unidades del producto con la relación de insumos que minimiza el costo i.e.* $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\alpha x_2}{\beta x_1}$

El costo de producir q unidades del bien es

$$c = \rho_1 x_1^* + \rho_1 x_2^*$$

al sustituir valores de x_1^* y x_2^* *en la función costo anterior se obtiene:*

$$c = \rho_2\left[\left(\frac{\beta\rho_1}{\alpha\rho_2}\right)^{\alpha} \frac{q}{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)} + \rho_1\left[\left(\frac{\beta\rho_1}{\alpha\rho_2}\right)^{-\beta} \frac{q}{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)}$$

Si consideramos que

$$\rho_1\left[\left(\frac{\beta\rho_1}{\alpha\rho_2}\right)^{-\beta} \frac{q}{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha\ \rho_2}{\beta}\left[\left(\frac{\beta\rho_1}{\alpha\rho_2}\right)^{\alpha} \frac{q}{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)}$$

y lo sustituimos en la ecuación de costo tenemos

$$c = \rho_2\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\left[\left(\frac{\beta\rho_1}{\alpha\rho_2}\right)^{\alpha} \frac{q}{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)}$$

Dado los parámetros tecnólogicos a, α y β están dados, al igual que los parámteros de mercado p_1 y p_2, la ecuación anterior muestra al costo como una función de la producción sola.

El costo promedio y el Costo Marginal pueden obtenerse de la

función costo: $$c = p_2\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\left[\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}\frac{q}{a}\right]^{1/(\alpha+\beta)}$$

Costo Promedio $$\bar{c} = \left[p_2\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/(\alpha+\beta)} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)}}\right]$$

$$c' = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[p_2\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/(\alpha+\beta)} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)}}\right]$$

De manera similar , la elasticidad de costo es

$$k = \frac{c'}{c} = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

el exponente de q en la función costo. De manera parecida, la elasticidad del costo promedio es

$$\gamma = k - 1 = \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

que es también el exponente de q en la función costo promedio. Finalmente dado que $\theta\varepsilon = 0$ en el caso de funciones homógeneas (esto es, el coeficiente de la función es una constante), la elasticidad del costo marginal es

$$= \gamma = k - 1 = \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

Se puede ver fácilmente por las tres últimas ecuaciones que el grado de homogeneidad reviste de importancia máxima. Este hecho también puede verse directamente en las funciones de costo promedio y costo marginal y sus derivadas.

CAPITULO III

CAPITULO III.

EL SUMINISTRO DE ENERGIA ELECTRICA EN MEXICO COMO EJEMPLO DE EMPRESA PROVEEDORA DE UN BIEN PUBLICO.

Este capítulo trata sobre el comportamiento de la Comisión Federal de Electricidad como un ejemplo de empresa de control estatal proveedora de servicios públicos.

El esquema de análisis del capítulo está construido de la siguiente manera:

Primero: Importancia de la entidad en el contexto económico nacional en el sector industrial paraestatal.

Segundo: Un estudio general del desarrollo del mercado eléctrico en el periodo 1984-1991, basado en, la CFE subdirección de construcción, Gerencia de Estudios.

Tercero: Un análisis del desarrollo del Sector Eléctrico referente a su carácter de empresa pública destacando, conforme al Informe de Labores de la Secretaría de Energía Minas e Industrias Paraestatal (SEMIP)-CFE, los siguientes renglones: saneammiento financiero, que incluye tarifas eléctricas, relación precio medio/costo medio, asunción de pasivos; financiamiento de la inversión, principalmente, con el objeto de mostrar o ejemplificar lo que sobre empresas públicas hemos apuntado en los capítulos anteriores.

3.1 La empresa pública en México: Evaluación del desempeño en los últimos años, relaciones con la política económica y cumplimiento de las funciones asignadas a la empresa pública.

3.1.1 La constitución del sector de empresas públicas.

Desde un punto de vista histórico se puede comprobar la existencia de diferentes motivaciones para ld creación de entidades paraestatales a lo largo del periodo que se inicia con la Constitución de 1917, entre otras se puede hablar de lo siguiente:

· Creación de empresas para ejercer algunas de las nuevas funciones que la Constitución encomendaba al Estado, tales como dar estabilidad al sistema económico nacional y propiciar el desarrollo económico. Las primeras entidades creadas corresponden a la década de los veinte y los treinta y coadyuvan a ordenar el sistema bancario (Banco de México, 1925), aumentar la integración física del país (Comisión Nacional de Caminos), el impulso al desarrollo de ciertas actividades, permitiéndoles el acceso en condiciones adecuadas el financiamiento bancario (Nacional Financiera, 1934; Bamco de Crédito Agrícola, 1926; Banco Nacional Hipotecario,1933).

· Constitución de entidades para explotar por parte de la Nación, recursos estratégicos o para generar insumos de uso difundido en el plano industrial o agrícola. Destacando entre estas: Petróleos Mexicanos, Comisión Federal de Electricidad y Ferrocarriles Nacionales de México.

· Desarrollo de entidades para aumentar la integración de la planta productiva nacional. Destaca la creación de la Siderúgica Lazaro Cárdenas Las Truchas en los años setenta.

· Constitución de entidades para impulsar el desarrollo tecnológico y las servicios modernos de apoyo a la actividad productiva y comercial. Así por ejemplo, en los setenta se organizan el Instituto Mexicano del Petróleo, el Instituto de Investigaciones Elécticas, el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares y el Instituto Mexicano de Comercio Exterior.

· Creación de empresas para lograr objetivos específicos de bienestar social, sea por la vía de suministrar productos básicos de consumo masivo a precios adecuados: en esta función destaca CONASUPO.

Con respecto a desarrollo social el Estado proporciona servicios relacionados con la educación, la salud, la seguridad y la prevensión social. También intervienen en los sectores agrícolas y pecuario con programas de financiamieto por medio de diversos organismos.

El gobierno participa ampliamente en sectores como el carretero, el ferroviario, el portuario y el aéreo, además de controlar todo lo relacionado con los correos, los telégrafos, hasta hace poco telefonos y las telecomunicaciones. En este sentido, la provisión de estos servicios a sido tradicionalmente una función del Estado. Lo mismo pasa con la oferta de otros que han sido típicamente considerados monopolios naturales y que incluyen la oferta de agua, electricidad, gas, etc.

En el sector industrial el gobierno participa en los subsectores minero, siderúrgico, azucarero, de fertilizantes, automotriz, ferroviario y naval; en materia energética el Estado se encarga totalmente del sector en lo correspondiente a los hidrocarburos y a la electricidad.

Para evaluar edecuadamente el carácter empresarial del Estado mexicano debe considerarse que, entre 1940 y 1980 el Estado fue:

-El fundador de ciento once empresas que introdujeron treinta y siete nuevos productos básico en el catálogo de la producción industrial del país.

-Socio posterior de 124 más, también productoras algunas de nuevos productos, y en treinta y cinco de las cuales se vió obligado a participar en forma mayoritaria por mala situación de las empresas, al recibirlas en pago de adeudos crediticios que no pudieron cubrir sus iniciales dueños del sector privado.

-En cincuenta y nueve adicionales llegó a ser accionista fundador o posterior devido a que fueron creadas por empresas en que ya participaba o bién al sumarse a estas empresas controladoras.

-Así, la acción del Estado en México se refleja en la existencia de numerosas empresas con participación estatal mayoritaria y también de organismos descentralizados entre los que destacan PEMEX, CFE, Disel Nacional, Aereopuertos y Servicios Auxiliares, Caminos y Puentes Federales de Ingresos, Servicio Postal y Telégrafos Nacionales entre otros.

El diagnóstico de la situación actual del sector que se ha constituido a lo largo de seis décadads debe comprender tanto elementos que corresponden a su estructura como a los que se refieren a su funcionamiento. Habitualmente se manejan diversas tésis sobre la estructura y desempeño de la empresa pública mexicana que conviene someter a un análisis a efecto de determinar su carácter causal y/o consecuencia.

Para efecto del trabajo que presentamos sólo abordaremos aquellos aspectos que se relacionan estrechamente con los fines u objetivos de ejemplificación de nuestro tema, a saber, los precios y tarifas y su efecto sobre las finanzas del sector, destacando principalmente su participación como inversionista y los fondos de financiamiento.

Posteriormente, estas generalidades sobre empresas públicas las expondremos de manera particular al tomar el suministro de energía eléctrica en México (por la CFE), como un ejemplo de empresa de control Estatal proveedora de servicios públicos.

Un importante problema del sector de empresas públicas en México es que el déficit financiero de éste incide sobre el equilibrio macroeconómico, especialmente en el período previo a la reorganización económica iniciada en 1983, tema que veremos más adelante.

El cuadro 3.1 muestra que para el conjunto de empresas públicas comerciales e industriales controladas presupuestalmente, su déficit antes de transferencias alcanzó un 49.5% del déficit financiero total del sector público durante 1977-1982. Si se tiene en cuenta que la restante parte del déficit se divide entre el sector central y la intermediación financiera, se puede concluir que el sector paraestatal fue el principal determinante del desequilibrio entre gasto e ingreso público.

CUADRO 3.1
PARTICIPACION DEL DEFICIT DE LAS EMPRESAS PUBLICAS COMERCIALES E INDUSTRIALES EN EL DEFICIT TOTAL DEL SECTOR PUBLICO.[1]
(Porcentaje)

Concepto	1977-1982	1983-1984
MEXICO		
Déficit antes de transferencias	49.50	29.00
Déficit después de transferencias	31.30	-14.60
MEXICO (INCLUIDO PEMEX)		
Déficit antes de transferencias	31.90	58.50
Déficit después de transferencias	12.90	15.00

(1). Incluye solamente empresas controladas presupuestalmente.
(2). El signo menos indica superávit.
Fuente: Elaborado con datos de la SHyCP.

La cifra anterior debe ser calificada, pues representa un promedio de seis años. Los datos para 1981, señalan un deterioro mucho mayor de la finanzas paraestatales. Su real magnitud se aprecia al verificar que su déficit antes de transferencias alcazaba un 8% del PIB (es decir 54% 'del défict financiero del sector público).

Por otra parte, el conjunto de las empresas públicas presentan superávit en sus operaciones en los años de 1975-1982, mientras que sus cuentas de capital son permanentemente deficitarias, compensando el saldo operativo.

La participación de las empresas públicas industriales y comercilaes en el PIB fue de 8.4% en 1980-1981, y sus gastos de capital fueron equivalentes a 5.5% del PIB en esos años. No es de extrañarse pues que el ahorro interno de las empresas no alcanzará a 25% de su inversión y que se debiran aceptar razones de apalancamiento no sostenibles en periodos de elevadas tasas de interés. Esto aunado a la politica de precios y tarifas que en ciertos periodos ha llevado a no autorizar y/o actualizar aumentos de acuerdo con los costos de producción en las empresas públicas, genera un efecto adicional sobre el déficit financiero del sector.

3.1.2 El marco de participación de las emnpresas públicas en la economía y la racionalización en el área industrial.

El marco fundamental que norma la participación del Estado en la economía es la Constitución Política, la que, en su artículo 25, establece que "corresponde al Estado la rectoría del desarrollo nacional para garantizar que éste sea integral, que fortalezca la soberanía nacional y su régimen democrático...".

Las funciones del sector público quedan precisadas en otro parrafo del mismo artículo donde se sostiene que "el sector público tendrá a su cargo de manera exclusiva las áreas estratégicas, manteniendo simpre el Gobierno Federal la propiedad y el control sobre los organismos que en su caso se establezcan".

Por otra parte, en el Programa Nacional de Fomento Industrial y Comercio Exterior de 1985, se indica que la industria estatal concentrará su participación en las actividades estratégicas reservadas con exclusividad al Estado y, por sí sola o con la participación de los sectores privado y social, en actividades prioritarias.

La participación del Estado en la industria petrolera es exclusiva, sin posibilidad de intervención de otros sectores, en las ramas estratégicas de refinación de petróleo.

Por su parte, la participación prioritaria es propia de actividades con elevados requisitos de inversión, largos plazos de maduración o utilización de tecnologás nuevas o de punta; entre ellas destacan las industrias básicas de hierro y el acero, la producción de abonos y fertilizantes, los tractores, el equipo de transporte, los motores a diesel para autobuses y camiones y la fabricación de peoductos de minerales no ferrosos, auque cabe destacar que por las necesidades de inversión se está aumentando la participación de la iniciativa privada.

En lo que respecta a las restantes ramas industriales, se les ha dividido en dos grupos a efecto de las política de participación estatal: las de participación complementaria y las de participación no recomendable.

La participación complementaria se preveé para actividades que se espera sean desarrolladas de acuerdo con las fuerzas de mercado por los sectores privados y social; sólo en el caso de que este desarrollo no sea suficiente para alcanzar los objetivos de interés público, el Estado participará. Primero, mediante la intervención indirecta en políticas de fomento protección y regulación; posteriormente, se considerará la conveniencia de abrir coinversiones con otros sectorres o en su caso, de instalar empresas públicas mayoritarias. Estas a su vez, alcanzados sus objetivos de inversión y producción podrán ser vendidos a los *sectores social o privado.*

Finalmente se considera no recomendable la participación del sector público en veinte ramas o subramas industriales. La política de racionalización de la intervención estatal en la industria comenzó a concretarse en la decisión de vendender ocho entidades en los años 1983 y 1984. Estas desincorporaciones se concentraron en las empresas de la rama automotriz, en lo que hace a la producción de automóviles para pasajeros y en productoras de bicicletas y accesorios. Estas ventas fueron realizadas a los sectores privados y social.

Asimismo, en estos años se procedió a liquidar diez empresas, a cancelar tres proyectos y a resectorializar en otras dependencias de la Administración Pública Federal a otras diez. En total el sector industrial paraestatal se redujo en treinta y una entidades.

Entre 1985 y 1986, se liquidaron treinta y una empresas, se transfirieron siete a tres entides federativas (Yucatán, Hidalgo y Michoacán), y se ofrecieron a la venta cuarenta y cuatro empresas de participación estatal mayoritaria.

Las treinta y uno liquidaciones corresponden a empresas no viables (y que por lo tanto no pueden ser vendidas) o entidades que ya cumplieron sus objetivos; todas estuvieron en suspensión de operaciones y catorce de ellas no tenían activos, estando constituidas estatutariamente. Estas entidades formalmente hubieran estado ubicadas en ramas industriales como textil, petroquímica secundaria, azúcar, autopartes, productos de minerales no metálicos y servicios de apoyo a estas actividades.

Las cuarenta y cuatro empresas se dividen en treinta y una de participación Estatal mayoritaria y 13 minoritaria. La venta de las mayoritarias se ha decidido con base en que la intervención directa no es indispensable para el logro de los objetivos de la política económica general o porque hay producción nacional suficiente de *los bienes producidos o porque la presencia Estatal no tiene un peso significativo en esas ramas. En lo que respecta a las empresas de participación minoritaria, se considera que ya se cumplieron los propósitos que ocacionaron el apoyo de capital por parte del Estado o porque se considera que se puede fomentar a estas empresas mediante otros instrumentos de política.*

En este contexto en el Diario Oficial de la Federación de fecha 24 de marzo de 1986, apareció la resolución de la Secretaría de Programación y Presupuesto mediante la cual se autoriza la disolución, liquidación extensión, fusión o transferencia de cincuenta y nueve entidades paraestatales.

Según este documento, El Gobierno de la República ratificó, después de exponer el entorno y caracteres de la problemática económica, la necesidad de reajustar la economía, introduciendo cambios estructurales o de fondo, para fortalecer la capacidad de desarrollo, para lo cual la presidencia anunció los lineamientos de política económica en los que se establece, en materia de gasto público, que se impondrá austeridad y se combatirá toda desviación o desperdicio; y con relación a la estructura del sector público: que se continuarán liquidando, vendiendo, fucionando, o transfiriendo a los gobiernos locales, las entidades no prioritarias manteniendo bajo control público las áreas señaladas por la Constitución de la República como actividades estratégicas y eliminando los casos de presencia estatal injustificada para disminuir el endeudamiento excesivo y la fragilidad fiscal.

No sólo los problemas internos orillaron al Gobierno Federal a tomar estas medidas descentralizadoras o privatizadoras de empresas paraestatales, en general "durante los ochenta se ha dado un movimiento en varios paises del mundo, hacia la privatización de la actividad economía en general y, en particular, hacia la provisión por parte del sector privado de varios serviciós que *tradicionalmente se consideraban prerrógativos del sector público" (Hurtado, C. 1990)*

En general se clasifica la privatización de un servicio en tres categorías. Primero, se puede distinguir qué sector público o privado se encargará directamente de satisfacer la demanda. Segundo, el financiamiento del servicio o de la infraestructura necesaria puede también pasar del gobierno al sector privado. Tercero, la provisión y la administración del servicio en sí es otro aspecto que puede ser provisto por un particular en vez del Estado.

La privatización de serviciós públicos que se puede plantear en México es, al menos en un inicio, solamente parcial, tal vez debido a que comunmente persiste un cierto grado de interés público, de seguridad o estratégico, en la provisión de esos servicios.

Respecto al movimiento internacional hacia la desincorporación de acciones del Estado, vale la pena señalar que varios de los servicios que tradicionalmente se habían considerado monopolios naturales, justificandose así su propiedad estatal o por lo menos su regulación, ha dejado de serlo. Este es el caso de las compañías de teléfonos en Estados Unidos. También en este país el surgimiento de numerosas empresas de mensajería ha suplido parte de los servicios provistos por el Servicio Postal Federal.

Otros ejemplos están concentrados en los sectores de la eletricidad, las telecomunicaciones, el agua y el transporte. Entre ellos están algunos sistemas de generación de energía eléctrica en Costa Rica y Chile; teléfonos de larga distancia para empresas en la zona libre de Jamaica; operación de la infraestructura de provisión de agua (propiedad pública) por parte del sector privado en Francia, pozos de agua privados en algunas partes de la India y administración privada de la venta de agua en Kenia y el transporte público en Buenos Aires.

Tomando en cuenta el amplio ámbito de acción del Estado en México y las experiencias internacionales someramente señaladas, cabe plantearse la conveniencia de que en México algunos servicios hasta ahora responsabilidad del gobierno pasen a manos de la iniciativa privada al menos parcialmente.

Hay por lo menos dos razones para pensar que la participación privada en la provición de diversos servicios es conveniente desde el punto de vista económico y pertinente en la actualidad por el lado financiero. El último punto se debe a la restricción financiera actual del sector público.

Tal vez la principal conveniencia de la participación privada en la provisión de servicios públicos está en los incentivos a la eficiencia, tanto en la construcción de la infraestructura como en la operación misma del servicio.

Hasta ahora los servicios a cargo del sector público han mostrado dos tipos de ineficiencias: i) ineficiencia operativa desde el punto de vista administrativo de una gran número de agencias públicas, y ii) ineficiencia económica en la oferta de varios servicios causada por distorciones en sus precios. A menudo hay retrasos en los precios debido a razones políticas y, a veces, la estructura de los precios de los distintos aspectos de un servicio es incorrecta como consecuancia de la influencia de grupos de interés.

Es posible que con la participación, parcial o total, del sector privado en la construcción de infraestructura y en la operación del servicio se reduzcan ambas ineficiencias. Para ilustrar la idea combiene pensar en el caso de un servicio que requiera primero inversión (construcción) en la infraestructura y luego en su operación, y que en ambas etapas el sector privado participe parcialmente en sociedad con algún agente gubernamental, como sería el gobierno de algún estado, el que financiaría su participación mediante el endeudamineto público.

En primer lugar, dentro del esquema de participación del sector privado y el gobierno del estado existe el incentivo de hacer una buena evaluación del proyecto. Esto es así porque el sector privado busca maximizar su rentabilidad, minimizando el costo de la infraestructura, y por su parte el gobierno del estado al endeudarse, tiene los mismos intereses. Esto último no necesariamente sucedería si el gobierno simplemente recibiera una asignación de gasto público federal: cuando la obra pública se paga con gasto público el gobierno estatal sólo tiene incentivos para maximizar el monto de las transferencias que recibe.

En cuanto a la eficiencia en la operaración, hay que tomar en cuenta que con el esquema de participación tanto el gobierno del estado como el sector privado tienen incentivos para fijar un cobro apropiado por el servicio.

Se entiende por cobro eficiente del servicio aquel que considera: i) la intensidad de uso de servicio (horas normales y horas pico); ii) el deterioro del servicio por distintos usuarios; iii) el aspecto externo de otros usuarios en términos, por ejemplo, del aumento en el tiempo de uso de los demás que genera el usuario marginal y iv) el valor presente neto del proyecto que debe ser positivo para ser rentable.

Con el esquema de coparticipación tanto del sector privado como el gobierno tienen incentivos para hacer un cobro eficiente y hacer rentable el proyecto, aunque ello no es una meta fácil de lograr. En muchos casos, como son las carreteras, los puertos y otros servicios, el gobierno ha enfrentado oposición a la actualización de cuotas por parte de distintos grupos. El mantenimiento de los precios de los servicios en términos reales se complica por la existencia de tal oposición y por la falta de incentivos de las agencias gubernamentales para incrementar los precios y las tarifas.

El siguiente cuadro 3.2 muestra como los precios y las tarifas del sector público son suceptibles de sufrir retrasos. La actualización de los precios y tarifas de bienes y servicios públicos es un problema tan importante que ha aparecido como fundamental en todos los planes de política económica, y su ausencia o lentitud en algunas épocas incluso ha sido señalada como culpable de graves problemas como vimos antes.

CUADRO 3.2
REZAGO DE ALGUNAS CUOTAS DE DERECHO[a]
(porcentaje)

Sector	1984	1986
Servicios aduaneros	32.70	41.20
Minería	40.10	50.70
Telégrafos	30.00	59.30
Autotransporte federal	16.20	28.90

Fuente: Dirección General de Política de Ingresos, con base en la Ley Federal de Derechos.
(a) Tomando como base 1982, suponiendo que en ese año el rezago era cero.

Como se señaló anteriormente el papel de los incentivos no es lo único que sugiere la conveniencia de la participación privada en la provisión de servicios públicos. De manera muy importante está la nesecidad actual de reducir la carga financiera y el tamaño del sector público. Esta consideración se ha tornado apremiante en los *años recientes y seguirá siendo en los próximos.*

Este aspecto es probablemente lo que lleve a las autoridades a instrumentar esquemas de participación , aunque sea parcial, con el sector privado en la provisión de diversos servicios. En particular, la necesidad de inversión en construcción de infraestructura es urgente y no está claro hasta dónde el sector público pueda contar con los recursos necesarios para llevarla a cabo por sí mismo.

La urgencia de reactivar la inversión pública será evidente en cuanto se logren las metas de estabilización y la economía reinicie el proceso de crecimiento. En los años recientes los esfuerzos de finanzas públicas han afectado principalmente la inversión pública. De hecho la proporción de gasto de capital en el gasto público total ha caído de 35.6% en 1981 a 12.5% en 1987. Ello refleja la relativa facilidad de reducir el gasto público en el renglón de inversión en comparación a otros gastos. El cuadro 3.3 muestra la contracción del gasto de inversión en los últimos siete años.

CUADRO 3.3
GASTO DE CAPITAL DEL SECTOR PUBLICO.
(porcentaje del PIB)

Años	GASTOS DE CAPITAL	OBRAS PUBLICAS Y BIENES
1980	10.0	8.3
1981	13.4	9.6
1982	10.6	8.1
1983	7.8	5.6
1984	6.9	5.7
1985	6.3	4.9
1986	6.1	4.7
1987	5.9	4.6

Fuente: Indicadores Económicos, Banco de México.

Es claro que la contracción en el gasto en obras públicas y bienes ha sido importante y prolongada, y que se requerirán incrementos en este renglón cuando, una vez restablecida la economía, se pretenda regresar a la senda del crecimiento.

Si en las condiciones actuales se piensa en un ajuste permanente de las finanzas públicas para llevar a cabo una estabilización igualmente duradera, el esfuerzo de reponer una infraestructura que se ha depreciado recientemente por el reducido nivel de inversión pública no deberá recaer de manera exclusiva en el sector público. Ello provocaría presiones de gasto incompatible con el programa de estabilización.

El problema puede ser también de creación de nueva infraestructura además de la mera reposición. Esto es debido a los cambios en la estructura productiva del país proveniente de la apertura comercial que recién se ha llevado a cabo y que al parecer se prolongará en el futuro previsible.

Una posible solución al problema es depender, auque sea de manera parcial, de la inversión privada para invertir en infraestructura y operar un conjunto de servicios. Esta necesidad financiera de depender de la inversión privada se complementa con el papel de los incentivos ya tratado, para hacer de los esquemas de coparticipación pública y privada mecanismos eficientes en sus aspectos financieros y operativos para proporcionar servicios que próximamente serán de apremiante necesidad.

3.11. Estudio del desarrollo del mercado eléctrico. período 1984-1991

La Comisión Federal de Electricidad realiza anualmente un estudio del desarrollo del mercado eléctrico a fin de actualizar sus programas de expansión a diez años del Sector Eléctrico.

El estudio se enfoca a obtener estimaciones de la capacidad y energía que se requerirá en los próximos diez años.

La base del Programa de Obras de Inversión del Sector Eléctrico (POISE) requiere estimar el desarrollo del mercado eléctrico a un nivel de desagregación geográfica que permita la localización y tamaño de las centrales de generación, de las subestaciones y líneas requeridas. Desde el punto de vista del sector eléctrico esto implica que el estudio de mercado se efectúe en las zonas y regiones hasta obtener el pronóstico a nivel nacional.

Ya que la demanda de energía eléctrica se presenta en forma instantánea y no es posible producirla y almacenarla sino que se produce en el momento en que se demanda, es indispensable verificar la expansión del Sector Eléctrico garantizando que la oferta posible se conserve siempre superior a la demanda, con un nivel de confiabilidad aceptable.

Por esta razón el criterio del Sector Eléctrico no ha sido establecer un programa de obras asociado al pronóstico de alta demanda. Esta estrategia se apoya en el hecho de que en caso de existir un exeso de capacidad el costo en que se incurre es inferior al que resultaría para el país por insuficiencia en la oferta de energía eléctrica.

Si se demuestra que el diseño del programa de obras fue alto se pueden hacer ajustes en el ritmo de construccción para absorver la capacidad existente en plazo breve.

El estudio del desarrollo del mercado eléctrico es resultado de la revisión anual que se lleva a cabo en los departamentos de planeación Zona Norte y Zona Sur de la Gerencia de Estudios.

El procedimiento seguido en los pronósticos de demanda de energía eléctrica se pueden resumir como siguen: El país se divide en ciento cinco zonas y nueve pequeños sistemas aislados; las zonas *a su vez se agrupan en áreas o sistemas. Adicional y únicamente en las áreas Occidental y Oriental, se tiene el concepto de región.*

Para cada una de las zonas se cuenta con los datos históricos correspondientes, ventas de energía eléctrica, consumo, demanda, etc. En los datos históricos se tienen registradas individualmente las cargas o demandas consideradas importantes. La definición de una carga o demanda como importante es arbitraria pero corresponden a usuarios o proyectos con consumo grande, en su mayoría del sector industrial.

Para las demandas importantes se investigan las fechas más probables de de conexión con el sistema. La información proviene de las solicitudes formales presentadas por los usuarios y de las encuestas que el sector realiza con este propósito. En esta investigación se determinan fechas, energías y capacidades requeridas.

Las cifras históricas se pueden dividir en lo que corresponde al "crecimiento normal" y demnadas importantes. Para cada zona se pronostica el desarrollo normal y se le añaden cargas importantes previstas.

Mediante la aplicación de modelos de tendencia a nivel de área, se elaboran pronósticos del crecimiento normal, que se comparan con los resultados obtenidos al agregar los pronósticos de las zonas del área, con base en esto se llega posteriormente a un pronóstico de crecimiento por zona y área.

Una vez obtenidos los pronósticos de crecimiento normal de la demanda de energía se "añaden las demandas importantes" y así se llega a la estimación final de energía necesaria (GWH).

En cuanto a la determinación de las demandas máximas en MW, se comienza por considerar para cada zona la evolución histórica de los factores de demanda. De esta información se determina su propio factor de carga y su posible evolución, esto se combina con los *pronósticos de crecimiento normal de la demanda neta de energía y se obtiene así un factor de demanda para la zona. Con esta base se determinan las demandas máximas netas de estas.*

En cada área o región se suman las demandas máximas netas de sus zonas y los resultados se modulan con sus factores de diversidad. Quedan así determinadas las demandas netas máximas para el área o región. Al agregarse las estimaciones de usos propios se obtiene el total de la demanda máxima bruta.

En lo que a las ventas se refiere, se toma en cuenta la evolución de las pérdidas en las diferentes áreas y sistemas así como los registros de ventas, que se ajustan para eliminar el efecto del rezago debido a los ciclos de facturación. Se procede entonces a estimar los valores estimados de ventas de energía en GWH.

Una vez deteremінados los valores estimados de ventas de energía en GWH. a nivel sector, estos se desglosan por grupos de tarifas. Esta descompocisión se obtiene considerando la evolución de la participación de los diferentes grupos en el total, la del número de usuarios y del consumo promedio.

Los resultados obtenidos se publican a nivel de sistema, área, región y zona.

Modelo econométrico de demanda de energía eléctrica

Una verificación final del estudio del desarrollo del mercado se hace mediante la comparación de los resultados de éste con los de un modelo macroeconómico. La idea básica es que la demanda de energía eléctrica se ve influenciada de de modo primordial por las condiciones de tipo económico, demográfico, climatológico y tecnológico.

Las condiciones climatológicas tienen efectos cíclicos y aún cuando son importantes para el diseño del sistema eléctrico, su relevancia es menor para propósitos de pronóstico a mediano y largo plazo. La tecnología produce cambios decisivos, pero su efecto tiende a manifestarse en el largo plazo, entre otras cosas porque el reemplazo de maquinaria y equipo es un proceso gradual.

El modelo desarrollado por la CFE, explica los cambios en la generación a través de los que tiene la población y el ritmo de actividad económica , medido este con el Producto Interno Bruto y la Inversión Bruta Fija. El modelo ajusta bien los datos históricos y tiene buen poder de predicción.

Es conveniente hacer notar que, tanto para el ajuste del modelo como para la elaboración del pronóstico se consideraron de manera especial, dada su magnitud, cuatro cargas: la del proyecto de bombeo de agua para la ciudad de México (conocido como Cutzamala), la etapa número dos de la Siderúrgica Lázaro Cárdenas (que utiliza hornos eléctricos), la ampliación de las instalaciones de la empresa Alumsa, y finalmente el proyecto de exportación a los Estados Unidos de America desde la Central Geotérmica de "Cerro Prieto".

Los datos históricos y los resultados que arroja el modelo para un escenario económico compatible con los pronósticos del estudio aparecen en el cuadro 3.4 .

Interpretación de los resultados

Como se puede apreciar, los pronósticos de demanda del estudio de desarrollo del mercado eléctrico, implican una tasa media anual del crecimiento interno bruto (PIB), de 4.76% en el periodo 1988-1998 y una recuperación de la inversión bruta fija que deberá pasar del 17 al 23% del PIB al final del horizonte.

En estas condiciones, la generación neta (sin incluir

CUADRO 3.4
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
GERENCIA DE ESTUDIOS
SUBGERENCIA DE EVALUACION Y ESTUDIOS ECONOMICOS

MODELO ECONOMETRICO PARA PREDECIR LA DEMANDA DE ENERGIA ELECTRICA

AÑO	GENERACION BRUTA		GENERACION NETA		VENTAS		P I B		I B F		IBF/PIB (%)	POBLACION (10^6)
	(GWh)	(%)	(GWh)	(%)	(GWh)	(%)	($80*10^10)	(%)	($80*10^10)	(%)		
1980	62,490	7.58	59,957	7.78	52,658	6.53	447.008	6.32	110.676	14.94	24.76	69.393
1981	68,213	9.16	65,099	9.61	57,455	9.11	486.222	8.77	128.638	16.23	26.46	71.284
1982	73,222	7.34	70,292	6.99	61,479	7.00	483.169	(0.63)	107.037	(16.79)	22.15	73.188
1983	74,843	2.21	71,518	1.74	62,099	1.01	462.894	(4.20)	76.767	(28.28)	16.58	75.107
1984	79,538	6.27	76,007	6.29	66,333	6.82	479.505	3.59	81.701	6.43	17.04	77.043
1985	85,301	7.25	81,443	7.15	71,062	7.13	492.043	2.61	88.116	7.85	17.91	78.996
1986	89,505	4.93	85,234	4.72	74,473	4.80	473.215	(3.83)	77.720	(11.80)	16.42	80.970
1987	96,365	7.66	91,669	7.49	79,590	6.87	480.239	1.48	77.234	(0.62)	16.08	82.966
1988	102,073	5.92	97,225	6.06	83,881	5.39	487.443	1.50	80.169	3.80	16.45	84.976
1989	108,262	6.08	103,088	6.03	89,248	6.40	511.675	4.97	89.543	11.69	17.50	86.993
1990	115,091	6.29	109,631	6.35	95,239	6.71	538.663	5.28	113.124	26.33	21.00	89.012
1991	122,453	6.40	116,712	6.46	101,624	6.70	561.679	4.27	123.569	9.23	22.00	91.036
1992	130,025	6.18	123,838	6.11	108,061	6.32	582.389	3.69	131.039	6.05	22.50	93.070
1993	138,575	6.58	131,839	6.46	115,234	6.65	604.732	3.84	139.068	6.14	23.00	95.107
1994	147,961	6.77	140,708	6.73	123,200	6.91	633.867	4.82	145.794	4.82	23.00	97.141
1995	157,683	6.58	149,764	6.44	131,347	6.61	670.377	5.76	154.167	5.76	23.00	99.165
1996	166,880	5.83	158,300	5.70	138,917	5.76	702.478	4.79	161.570	4.79	23.00	101.182
1997	176,136	5.56	167,178	5.61	146,756	5.64	739.980	5.34	170.191	5.34	23.00	103.196
1998	187,402	6.40	177,933	6.43	156,404	6.57	775.818	4.85	178.439	4.85	23.00	105.199

A partir de 1989 son datos estimados.
PIB = Producto Interno Bruto en decenas de miles de millones de pesos de 1980
IFB = Inversión Bruta Fija en decenas de miles de millones de pesos de 1980
FUENTE: Comisión Federal de Electricidad. Subdirección de Construcción.
Gerencia de Estudios.

exportaciones) crecerá a una tasa media de aproximadamente :6.5% y la elasticidad generación a PIB quedará en 1.3. Notese que durante el periodo 1970-1980, la elasticidad media fue de 1.35 y en el periodo 1975-1985, de 1.79.

Históricamente la elasticidad ha sido elevada en los años de bajo crecimiento económico y más bajo en los años de alto crecimiento. Esto es lógico si se toma en cuenta que , como resultado de la electrificación, el número de usuarios del sector ha aumentado de manera estable todos los años. Es decir, que el monto principal del crecimiento de la demanda de energía eléctrica, ha sido de número de usuarios, más que el crecimiento promedio.

En cuanto a la tasa media de crecimiento de la población, es conveniente tomar en cuaenta que, de acuerdo con CONAPO. en el periodo 1988-1998, la población entre veinte y sesenta y cuatro años crecerá a una tasa anual del 3.8%. Si se tiene un aumento anual de entre 2.0 y 2.5% en la productibidad de la mano de obra, la economía , para dar cabida al incremento de la fuerza laboral. estaría obligada a crecer a una tasa de cerca del 5%. Desde este punto de vista la tasa mendia de crecimiento de 4.76% del PIB que implica el estudio de desarrollo de mercado eléctrico puede juzgarse baja.

3.III. Análisis general de la producción y productividad del Sector eléctrico, así como de las orientaciones de política sectorial y principales resultados de operación

3.III.1 Antecedentes.

La Comisión Federal de Electricidad creada en 1937, ha realizado en cincuenta y dos años de existencia una actividad prioritaria en el desarrollo de México, constituyendo un ejemplo del ejercicio de la participación de la empresa pública en el desarrollo nacional.

El crecimiento constante del país ha sido y es el reto fundamental de la Institución ya que debe incrementar en forma constante la capacidad de generación para responder oportunamente a los requerimientos de energía eléctrica en todo el país.

A través de nueve sistemas, el fluido eléctrico corre por todo el país por más de 275,000 kilómetros de líneas de trnsmisión. Existen catorce divisiones de distribución que son responsables de la operación y conservación de las instalaciones al servicio del usuario.

Estas instalaciones han sido suficientes para satisfacer la demanda de la planta industrial del país y el 87% de la población ya cuenta con servicios eléctricos, faltando por electrificar nucleos de población de menos de 2500 habitantes.

Saneamiento financiero y financiamiento de la inversión

El presente análisis se refiere al trabajo realizado durante los últimos años por el sector eléctrico, así como a las políticas y objetivos a que debe sujetarse para acrecentar su contribución al desarrollo del país y la estratégia para alcanzar dichos objetivos, a saber: mejorar la productibidad del sector eléctrico, haciendo un uso eficiente de sus recursos; sanear su situación financiera; diversificar las fuentes primarias para la generación de energía, reduciendo el consumo de petróleo; vincular su desarrollo a la planta industrial, para incrementar la inversión y el empleo, entre otros.

Si bien es cierto que la demanda de energía eléctrica en el país se ha satisfecho, se advierte que los recursos han sido insuficientes, y ante una demanda creciente la Comisión Federal de

Electricidad ha llevado a cabo accciones para incrementar los recursos financieros mediante financiamientos externos y de particulares, así, por ejemplo, se obtuvo un préstamo del Banco Internacional de Fomento y Reconstrucción por 460 millones de dólares para financiar parcialmente la construcción de las centrales hidroeléctricas de Aguamilpa y Zimapán.

Se negoció y fué aprovada una segunda línea de crédito del Banco Mundial el 25 de septiembre de 1990, por un monto de 450 millones de dólares, con el propósito de apoyar la fase 1991-1992, del Programa de Obras e Inversiones del Sector Eléctrico (POISE), específicamente el progama de transmisión y distribución de los programas especiales de apoyo a la red de distribución y de renovación de las plantas termoeléctricas, así como estudios para controlar la contaminación derivado de estos componentes.

Asimismo, se negoció la obtención de un cofinanciamiento del Banco Interamericano de Desarrollo, el 6 de abril de 1991, a ser destinado a los mismos fines, por 330 millones de dólares.

Si las negociaciones con la banca internacional continuan evolucionando favarablemente, durante el presente sexenio, se podrían ejercer cerca de 1,700 millones de dólares.

En este contexto, la CFE como organismo estratégico y prioritario, en coordinación con el Gobierno Federal, ha implementado diversas acciones para lograr su saneamiento y equilibrio financiero. Dentro de estas destaca la celebración de sucesivos convenios de rehabilitación financiera en los años 1985 y 1986, mediante los cuales el Estado asumió pasivos a cargo de la CFE, por un importe total equivalente a 9366 millones de dólares. Esta asunción por parte del gobierno federal representó el 82% del total de la deuda de ese organismo.

También se han llevado a cabo políticas de incremento a las tarifas en términos reales ya que ambos, el Gobierno Federal y el

Sector Eléctrico consideran que, la recuperación gradual del precio de la energía, la limitación de recursos provenientes de créditos y transferencias del Estado con base en el establecimiento de una sana política de financiamiento de la inversión y la asunción de pasivos en consideración a que su excesiva acumulación impide la buena marcha de la entidad, son medidas concretas para la rehabilitación financiera.

Sin embargo debido a la insuficiencia de los ajustes tarifarios autorizados, y a la imposibilidad de estructurar adecuadamente la deuda, principalmente la de corto plazo, en el mes de noviembre de 1989, el Gobierno Federal asumió pasivos por 1.4 billones de pesos que, CFE adeudaba al Fondo de Financiamiento del Sector Público.

La estructura del financiamiento de la inversión comparativamente con 1988, se comportó de la siguiente manera:

Concepto	1987	1988	1989	Jun/90
Recursos propios	1%	31%	55%	70%
Transferencias del Gobierno federal	49%	19%	19%	10%
Endeudamiento Bruto	50%	50%	26%	20%

Fuente: Informe de Labores. SEMIP. CFE. 1989-1990.

Cabe señalar que el incremento de la participación de los ingresos propios, obedeció principalmente a la asunción de pasivos efectuados por el Gobierno Federal, con lo que se liberaron recursos que fueron canalizados al gasto de inversión.

También por lo anterior, el endeudaminto neto tuvo un efecto significativo, resultado de la amortización más de tres veces superior a la disposición de crédito. Sin embargo aún sin considerar la asunción de pasivos citada se dió un endeudamiento neto, en 1989, de 371 millones de pesos, aproximadamente.

La evolución de las transferencias se muestra en el cuadro 3.5 .

Por su parte la relación precio medio/costo medio mejoró debido a los incrementos tarifarios en los últimos tres años; con el fin de analizar la evolución reciente de este cociente, se presenta una tabla de la relación precio/costo por grupo de tarifa para 1985, 1986 y 1987 tomando en cuenta las tarifas autorizadas el 31 de diciembre de 1986 y la relación precio/costo (total) para 1988, 1989, y junio de 1990 con relación a 1988.

RELACION PRECIO MEDIO / COSTO MEDIO.

Sectores	1985	1986	1987	1988	1989	jun/90
Residencial	0.39	0.39	0.34			
Industrial	1.01	0.96	1.02			
Doméstico	0.61	0.65	0.72			
Servicios	0.60	0.61	0.68			
Riego agric.	0.19	0.15	0.15			
Rev. y export.	ns	1.80	1.87			
Total	0.64	0.64	0.67	0.76	0.78	0.76

Fuente: Informe de labores. SEMIP. CFE, varios años.

Como se observa al analizar el cuadro anterior, en los dos primeros años no se presenta practicamente ningun cambio en la relación precio/costo. En 1987 se observa un deterioro uniforme, salvo en las tarifas residencial y de bombeo agricola, ya que hubo una reducción en la relación precio medio/ costo medio, inclusive con relación a 1985.

CUADRO 3.5
ANALISIS DE TRANSFERENCIA E INGRESOS TOTALES 1982–1990
(Millones de pesos)

C O N C E P T O	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990 _2/
Para Inversión (Patrimoniales)	60,122.8	74,873.0	86,983.0	117,500.0	101,248.4	652,228.0	488,938.6	544,600.0	580,000.0
Para Intereses				499,203.6	429,203.6	378,882.0	882,200.0	694,400.0	255,800.0
Para Amortización					69,786.8	80,000.0		522,300.0	1,227,400.0
Por Asunción de Pasivos									
Para Gasto Corriente	68,744.1	231,854.5	266,168.8	13,010.3		142,856.0			
Total de Trans. Fiscales	128,866.9	306,727.5	353,151.8	733,688.2	6,580,185.4	1,251,946.0	1,181,138.6	3,134,445.0	2,083,200.0
Ingresos Totales_3/	391,074.5	211,261.3	491,397.3	701,896.2	1,335,191.0	2,968,947.0	7,198,517.7	8,846,960.0	10,028,400.0
% Transferencias/Ingresos	33.0	145.2	71.9	78.9	50.2	42.2	16.4	19.9	20.6
% Transferencias C/Asunción/ Ingresos				104.5	492.8			35.4	

_1/Cifras Correspondientes a CFE.
_2/ Presupuesto aprobado por la H.Cámara.
_3/ Ingresos corrientes y de capital, financiamientos e ingresos por operaciones ajenas.

En otro orden de ideas y como consecuencia de los aumentos decretados a los bienes y servicios públicos, así como las estrategias financieras implementadas por la CFE, en 1990, se planteó ante las autoridades correspondientes una ampliación presupuestal del orden de 1.3 millones de pesos, la cual será financiada íntegramente con recursos propios y permitirá además conjuntamente con la disposición de 0.42 billones de créditos del exterior, un ahorro en las transferencias del Gobierno Federal por 0. 57 billones de pesos.

El análisis de las finanzas del Sector Eléctrico muestra cómo a lo largo de los últimos años la inversión ha sido financiada con endeudamiento externo y tranferencias del Gobierno Federal lo que se ha convertido en una carga importante para el Estado, ya que además de las transferencias ha asumido pasivos de la entidad y ha otorgado subsidios al consumo de energía de algunos sectores. Cabe mencionar que como parte de la política de descentralización administrativa iniciada en 1983, concedió incentivos a los usuarios de las tarifas industriales consistentes de una deducción del 5 % del importe de las cuaotas correspondientes por consumo de energía eléctrica, a los usuarios cuyas industrias se encuentran establecidas en ciudades incluidas en los Programas de Fomento Industrial para 1987.

Por otra parte, la inversión de la CFE en el periodo 1982-1989, representó el 24% del total de los egresos de capital de los organismos y empresas sujetas a control presupuestal y participó con el 158% del déficit de éste universo. Es importante notar que para cubrir éste déficit el financiamiento provino tanto de fuentes internas como externas. En este mismo periodo las transferencias totales de capital del sector paraestatal controlado sumaron 11 848.5 miles de millones de pesos y las destinadas al sector eléctrico sumaron 2 770.3 miles de millones de pesos que

Cuadro 3.6

Ingresos y Gastos del Sector Paraestatal controlado y del Sector Eléctrico Nacional
1982-1989
(Miles de millones de pesos)

	1982		1983		1984		1985		1986		1987		1988		1989 _e/	
	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _b/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _c/	Sector Paraestatal Controlado	Sector Eléctrico Nacional _a/ _c/
CUENTA CORRIENTE																
Ingresos corrientes	1,310.1	101.6	2,281.3	167.2	4,337.0	366.1	8,251.2	564.2	10,308.2	1,203.4	24,365.0	2,738.1	49,120.5	6,867.7	52,453.7	9,382.1
Gasto corriente	1,200.1	154.9	2,419.8	339.3	3,867.0	592.7	8,076.5	846.2	10,151.3	1,301.1	22,722.9	2,538.2	42,803.7	5,285.5	49,925.2	7,156.6
Ahorro (antes de transferencias)	110.1	(53.1)	(138.5)	(172.0)	470.0	(227.4)	174.7	(282.0)	157.9	(97.7)	1,642.1	199.9	6,316.8	1,582.1	2,528.5	2,225.5
Transferencias corrientes _c/	244.1	98.2	491.5	231.9	743.0	266.2	962.8	433.8	1,238.6	480.2	2,018.8	519.7	2,760.7	692.2	3,334.2	694.4
Ahorro corriente	354.2	45.1	353.0	59.9	1,213.0	38.8	1,137.5	151.8	1,396.5	418.5	3,660.9	719.6	9,077.5	2,274.3	5,862.7	2,919.9
CUENTA DE CAPITAL																
Ingresos de capital	7.4	0.1	158.0	0.1	14.9	0.2	303.3		25.6		118.9		66.7		412.1	
Egresos de capital	548.5	127.8	725.4	198.2	1,217.3	286.3	1,521.3	404.5	2,585.7	631.3	5,880.0	1,475.2	11,010.8	2,946.9	11,254.8	3,438.8
Inversión física	498.0	118.2	630.0	162.8	947.4	258.0	1,366.7	397.9	2,100.9	615.2	5,163.4	1,423.2	9,798.7	2,790.9	10,169.0	3,326.4
Inversión financiera	6.8	0.1	10.5	0.2	5.6	0.6	33.1	0.6	113.6	2.0	78.0	25.2	80.9	79.3	33.5	33.3
Otros	43.8	8.5	69.9	33.2	264.3	27.7	121.5	6.0	371.2	14.1	647.6	26.8	1,131.2	77.6	1,052.4	78.9
Transferencias de capital _c/	104.2	31.9	208.2	74.9	280.6	87.0	509.1	117.5	1,041.5	171.0	2,146.5	732.2	3,043.9	486.9	4,422.5	1,089.9
(Déficit) o Superávit en cuenta de capital	(436.9)	(96.5)	(358.2)	(121.2)	(921.8)	(199.1)	(802.0)	(287.0)	(1,518.6)	(460.3)	(3,620.6)	(743.0)	(7,901.2)	(2,459.0)	(6,420.2)	(2,371.7)
(DEFICIT) O SUPERAVIT FINANCIERO	(87.2)	(50.7)	(5.2)	(61.3)	229.2	(160.6)	(245.8)	(135.4)	(122.1)	(40.9)	30.3	(23.4)	1,176.3	(184.7)	(567.5)	(546.2)
Financiamiento del (déficit) o superávit																
Aumento neto de la deuda	129.2	59.6	115.0	60.7	(97.8)	163.6	(31.0)	143.7	(206.9)	58.7	1,845.0	18.2	205.7	195.6	1,750.8	(205.7)
Financiamiento	370.9	114.8	552.7	118.9	690.7	238.3	1,037.4	264.2	1,792.6	327.8	5,757.4	687.9	8,519.7	1,312.4	11,364.6	758.0
Amortización	241.7	56.0	437.7	58.2	787.5	74.7	1,068.4	120.5	1,999.7	269.1	3,912.4	669.7	8,314.0	116.8	9,613.8	963.7
Variación de disponibilidades	(46.5)	(0.1)	(109.8)	0.7	(193.4)	(3.2)	(214.5)	(8.3)	328.9	(17.9)	(1,875.2)	5.2	(1,382.0)	(10.9)	(1,183.3)	(342.5)

_a/Incluye CFE y Cía. de Luz y Fuerza del Centro, S.A. (En liquidación).
_b/Incluye transferencias del Gobierno Federal.
_c/Incluye transferencias para pago de pasivo.
FUENTE: Presidencia de la República. Informe de Gobierno, 1990.

significan el 23.38% del total, y con respecto al incremento de la deuda se tiene para el sector paraestatal un total de 3 710.0 mil millones de pesos y el incremento de la deuda del Sector Eléctrico sumó 499.6 mil millones de pesos, lo que significó con respecto al total el 13.32%. La suma del total de transferencias e incremento de la deuda del sector paraestatal, en miles de millones de pesos, fué de 15 558.5, mientras que la suma de los egresos totales de el sector fué, en miles de millones de pesos, de 9 507.8 que representan el 61.11% de la suma de aquellos en este periodo (1982-1989). Ver cuadro 3.6 .

Es claro notar entonces que la participación de los recursos propios del sector en el financiamiento de la inversión es mínima, esto obedece a serios problemas en la captación de ingresos por concepto de venta, porque, si bien, es cierto que la demanda de usuarios ha aumentado más que el consumo promedio de energía, éste aumento no se ve reflejado en un incremento real de los ingresos, debido, principalmente al rezago en los precios de venta lo cual continua afectando la estructura financiera de éste sector.

El cuadro 3.7, muestra la relación de precios de la industria eléctrica con el INPC.

Se observa que la relación del índice de precios de la CFE con respecto al INPC mostró una tendencia descendente, lo que significa que los precios de la Industria Eléctrica disminuyeron en términos reales. Por su parte la variación de los precios del Sector Eléctrico, hasta antes de la política de descentralización y revisión de precios y tarifas, en 1983, era menor a la variación con respecto al año anterior, del INPC Apartir de 1983 esta variación en el INPC del sector es mayor, excepto en 1985 y 1986, años en los que el gobierno decide otorgar subsidios al precio de la energía de algunas tarifas (industrial y de riego agrícola), ese aumento se debió a los aumentos autorizados, como muestra la

CUADRO 3.7
INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR Y POR OBJETO DEL GASTO DE LA INDUSTRIA ELECTRICA Y DURABILIDAD DE LOS BIENES.
(Variación porcentual)

Años	INPC (1)	INPC por objeto de la Ind. E. (2)	(2/1) %	INPC* Variación con resp. al año anterior	INPC* por objeto del gasto
1970	32.3	64.2	198.8		
1971	34.0	64.2	188.8	5.3	0
1972	35.7	65.2	183.6	5.0	1.5
1973	40.0	68.5	171.3	12.0	5.06
1974	49.5	79.9	161.4	23.7	16.6
1975	57.0	82.0	143.9	15.1	2.62
1976	66.0	86.0	130.0	15.7	4.8
1977	85.1	98.0	115.2	28.7	13.95
1978	100.0	100.0	1.0	17.5	2.04
1979	118.2	118.0	99.8	18.2	18
1980	149.3	144.4	96.7	26.3	22.3
1981	191.1	170.2	89.1	27.9	17.8
1982	303.6	242.0	79.7	58.8	42.1
1983	612.9	531.9	86.8	101.8	119.7
1984	1 014.1	938.8	92.6	64.5	76.4
1985	1 599.7	1 311.7	82.0	57.7	39.7
1986	2 979.2	2 761.3	92.7	86.2	110.51
1987	6 906.6	4 970.0	72.0	31.8	79.9
1988	14 719.2	10 209.3	69.4	113.1	105.4
1989	17 750.6	11 312.6	63.7	20.5	10.8

(*)Cálculos propios con base en las columnas (1) y (2).
Fuente: La Economía Mexicana en Cifras, NAFINSA. 1990

siguiente tabla, de acuerdo a los datos del Informe de Labores de SEMP-CFE.

Sin embargo a pesar de éste aumento, en términos reales, el INP del sector disminuyó con respecto al INPC, lo que muestra la importancia del rezago en los precios de dicho bien.

Conceptos	1985	1986	1987
Incremento de tarifas eléctricas	18.0%	53.0%	41.0%
Incremento mensual acumulativo	2.5%	3.5%	3.5%

Fuente: El informe de labores de SEMIP-CFE. Varios años.

Por otro lado, la participación de la inversión de la CFE en la inversión pública total pagada, aumenta en los años 1980 a 1990 lo que significó mayor participación del Estado en la asignación de recursos al sector en ese periodo. Ver cuadro 3.8 .

Con respecto a los proyectos y obras terminadas se tiene que la inversión en centrales generadoras se incrementó durante 1989 y 1990, con la terminación de doce unidades de nueve centrales que entraron en operación comercial y otras que se encuentran en pruebas operativas. En las líneas de transmisión en junio de 1990 se terminaron catorce obras con un total de quinientos kilómetros de circuito y se lograron trabajos de otros cincuenta y cuatro proyectos que cumplieron la metas establecidas para 1990, para tales fines se gestionaron los créditos ya mencionados, con el BID, el BIRF y el Banco Mundial.

En otro ámbito, se ha llevado a cabo una política de ahorro y uso eficiente de energía, para esto se creó la Comisión Nacional Para el Ahorro de Energía (CONAE), cuyos proyectos para 1990 con respecto a las tarifas, y a fin de inducir el uso eficiente de la energía eléctrica entre todos los usuarios, fueron el revisar las tarifas de los servicios residenciales de alto consumo y en los usos industriales, eliminar el descuento establecido en 1989 para el bombeo de agua dedicado al riego agrícola y aplicar las tarifas generales a las tortillerías y molinos de nixtamal.

CUADRO 3.8
INVERSION PUBLICA TOTAL PAGADA
INVERSION DE LA COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
(1977-1989)
(en millones de pesos)

Año	Inversión pública pagada (1)	Inversión CFE (2)	(2)/(1)* %
1977	140 245	15 840	11.2
1978	203 140	26 774	13.1
1979	299 705	39 146	13.0
1980	424 196	57 525	13.5
1981	789 407	79 323	10.0
1982	995 864	106 688	10.7
1983	1 338 020	147 246	11.0
1984	1 984 796	234 013	11.8
1985	2 867 399	364 504	12.7
1986	4 773 821	566 921	11.8
1987	10 792 516	1 341 526	12.4
1988	17 300 500	2 648 977	15.3
1989	19 212 161	2 874 925	15.0

(*) Cálculo propios.
Fuente: La Economía Mexicana en Cifras. NAFINSA.1990.

En cuanto al financiamiento para que los usuarios pudieran disponer de recursos financieros, se gestionó en 1990, ante el Banco Nacional de Obras y Servicios Públicos una línea de crédito para apoyar proyectos que incentiven el ahorro en el alumbrado público y se integró un fideicomiso con aportaciones de los proveedores de equipo y contratistas de la CFE, la propia CFE y SUTERM (Sindicato Unico de Trabajadores de la República Mexicana), para sustentar proyectos en diversos sectores. El monto conjunto de estos apoyos es del orden de veinte mil millones de pesos para 1990.

Se preparan acuerdos con INFONAVIT y FOVISSSTE para la construcción de viviendas con criterios de ahorro de energía y con el Banco de Comercio Exterior y el Instituto de Investigaciones Eléctricas para reducir el consumo de energía eléctrica en la fabricación de productos de exportación.

Adicionalmente se estan acordando con el Departamento del Distrito Federal, medidas de ahorro en alumbrado público y en el bombeo de agua potable y negra, así como para aprovechar su capacidad instalada de autogeneración.

Como vemos el Gobierno Federal está muy interesado en el saneamiento de las finanzas del sector paraestatal controlado al promover políticas que refuercen las finanzas de las diferentes entidades. En el Sector Eléctrico en particular, se busca lograr poco a poco el autofinanciamiento de la inversión, para lo cual la Industria Eléctrica debe aumentar la captación de ingresos propios a través de la venta de energía que le permita mantener, ampliar y desarrollar las fuentes de generación que garanticen la satisfacción de la creciente demanda.

Sin embargo, como hemos visto, existen diversos criterios para fijar el precio de un bien público que tienen que ver con procesos de política de asignación de impuestos.

Ese proceso no es fácil en la práctica, ya que para determinar si debe intentarse el pago de un servicio municipal, mediante un cobro específico, puede considerarse varios principios; por supuesto, su efecto específico varía de un caso a otro. Uno de estos principios se refiere al efecto distributivo del cobro, en relación con el de la tributación general que podría reemplazar.

Lo más sencillo es juzgar varias políticas de fijación de precios considerando como el óptimo la igualdad del precio con el costo marginal (pero en el caso de bienes públicos como anotamos antes, este sería cero). Esto causaría una pérdida que debe pagarse mediante un impuesto, el cual puede asumir varias formas: impuesto al ingreso, tarifas locales, una cuota para los usuarios, etc. estos criterios ya fueron discutidos en el capítulo I de este trabajo, y como vimos, es un proceso que involucra todo un proceso presupuestario.

Así, notamos que, en particular para el caso de suministro de energía eléctrica, que es un bien (o servicio) público, los precios y tarifas han presentado un rezago importante que ha tenido efectos macroeconómicos y sobre todo ha dañado seriamente las finanzas del sector central, contribuyendo de manera significativa al déficit de ese universo.

Por otra parte, estos rezagos crean dificultades para generar recursos excedentes que sustenten su expansión, que para el Sector Eléctrico implica un elevado costo, ya que la "infraestructura", por ejemplo, para la transmisión y distribución requiere de fuertes inversiones que han sido financiados principalmente, como vimos, por endeudamiento exterior y transferencias del Gobierno Federal.

"En el caso de México existen además de los aspectos generales de la política de precios y tarifas, elementos particulares relacionados con los objetivos implícitos o explícitos asignados a las empresas públicas, estos tienen que ver con la promoción económica, con la construcción de infraestructura o con la política de subsidios" (Gómez Octavio. 1982).

En general, podemos corroborar que dado que los bienes públicos presentan características particulares que los distinguen, como la generación de externalidades, puede ser muy complicado, en términos de los efectos que puede tener, por principio, fijar el precio del bien y posteriormente variarlo de acuerdo a los requerimientos, por ejemplo de ingresos, de la empresa productora y/o proveedora de este tipo de bienes.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Hemos señalado la importancia de las economías y deseconomías externas en el desarrollo del análisis de los bienes públicos utilizando fundamentos microeconómicos. Hemos explicado que algunos bienes o servicios que tienen fuertes externalidades (por ejemplo, las autopistas, educación y la defensa) se convierten en bienes públicos.

Resultados importantes para los bienes públicos son los siguientes:

· La curva de demanda es obtenida por la adición vertical de las demandas individuales mostrando la suma de los precios que los individuos estan dispuestos a pagar.

· Todos los consumidores consumen la misma cantidad del bien, en condiciones de no saturación.

· El beneficio marginal derivado por los consumidores es diferente (para cada uno) y éste es la suma de los beneficios marginales que igualarán al costo marginal.

· Definimos la eficiencia como la igualdad entre la tasa marginal de transformación en producción y la suma de las tasas marginales de sustitución en consumo de los consumidores.

· La condición de optimalidad de este problema es la siguiente: la suma de las relaciones marginales de sustitución entre el bien privado y el público de los consumidores debe ser igual al costo marginal de suministrar una unidad adicional del bien público.
· La problematica más importante de la fijación de precios de los

bienes y servicios públicos, deriva del hecho de que los costos no dependen solamente del nivel de producción sino también del número de consumidores y del momento y lugar de la entrega.

· Un organismo proveedor de servicios públicos se enfrenta al problema de determinar los precios de sus productos de manera que se maximice el bienestar social. Si ese es su único objetivo los precios deberan ser igual a los costos marginales.

· De esta manera el incremento marginal de los beneficios resultante de la variación de un precio ha de ser proporcional al nivel de producción del bien en cuestión. Es decir, desde el punto de vista del bienestar social, lo esencial es la cantidad consumida de cada bien. Para los bienes cuya demanda es poco elástica, es decir son relativamente insensibles a los aumentos en su precio, generalmente se fijarán precios muy superiores a los costos marginales. Para los bienes cuya demanda es relativamente sensible al precio, este se fijará mucho más próximo al costo marginal.

Por otra parte vemos que se utilisa la regulación pública para abordar otras externalidades como la contaminación del aire y el agua. En este caso la regulación implica frecuentemente la internalisación del coste en el proceso de producción, lo que a su vez puede conllevar a una traslación hacia adelante de los costos a los consumidores, una traslación hacia los costos de los proveedores, su absorsión por parte de los productores o alguna combinación de las tres posibilidades.

Asi mismo vimos que, para el caso de empresas productoras o proveedoras de bienes públicos, generalmente, sus costos son negativos o incurren en pérdidas que tiene que ser cubiertas de alguna manera. La forma más común de cubrir éste déficit es a través de la política impositiva.

Existen diversos criterios para la fijación de un buen impuesto para el financiamiento del déficit, entre otros: la tarifa de dos partes, discriminación de precios, subsidio con fondos locales o con fondos nacionales.

Este último ha sido el criterio que ha adoptado en nuestro ejemplo de empresa proveedora de bienes públicos, la CFE, es decir, recurrir al endeudamiento para sanear sus finanzas. Sin embargo vimos que la transferencia de recursos por parte del sector central al Sector Eléctrico se ha convertido en un serio problema de gasto público, que, dado los últimos acontecimientos de crisis y recuperación, no puede seguirse manteniendo.

Así pues, la participación de los recursos propios del Sector Eléctrico en las subvención de la inversión es mínima, esto se debe fundamentalmente a que el Sector se enfrenta a serios problemas en la captación de ingresos por la venta del servicio.

En el caso del suministro de energía eléctrica los precios y tarifas han permanecido rezagados y muestran, en relación con el INPC, una caída en términos reales, estos resagos crean dificultades para generar recursos excedentes que sustenten su expansión, que para el Sector, implica un elevado costo, ya que la infraestructura para transmisión y distribución requiere fuertes inversiones que se han financiado con fuentes alternas.

Es importante destacar que en el esquema teórico, en ausencia de transferencias, la produccióm de los bienes públicos está relacionada con el crecimiento de la inversión en el Sector.

Por su parte, el precio de los bienes públicos debe responder, además de las condiciones de optimalidad del consumidor, a llevar a la emmpresa a ser autofinanciable en el largo plazo, o bién, a que dada una limitante en las transferencia, revise sus esquemas de fijación de precios.

BIBLIOGRAFIA

Comisión Federal de Electricidad (1990). "El Banco Mundial otorga a México un nuevo prestamo en apoyo al Sector Eléctrico" en El mercado de Valores" Año LI, No.19, Octubre 1o.

Comisión Federal de Electricidad (1991). "Financiamiento que otorga el BID y el BIRF a los Sectores Eléctrico y de Salud" en El mercado de Valores" Año LI, No.9, Mayo 1o.

Comisión Federal de Electricidad (1989). "Estudio del Mercado Eléctrico". Subdirección de Construcción. Gerencia de Estudios

Comisión Federal de Electricidad . Informe de Labores SEMIP. Varios años.

Courant, Richard (1979). Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. 2, Ed. Limusa.

Chambers, Robert (1989). Applied production analysis. Cambridge University.

Douglas J., Wilde. (1976). Teoría de optimización. Ed. URMO.S-A. Barcelona, España. 1a. ed.

El Mercado de Valores (1986). "Disolución Fusión o Transferencia de Entidades Paraestatales". Año XLVI. No. 14, Abril 7.

El Mercado de Valores (1985). El papel de las empresas públicas en el desarrollo económico. Año XLV. No. 21, Mayo 27.

Ferguson, C.E. (1985). Teoría neoclásica de la producción y distribución. Ed. Trillas.

Gómez, Octavio (1982). "Las empresas públicas en México: Desempeño reciente y relaciones con la política económica" en Lecturas del trimestre económico. Vol. XLIX No.194, Abril-Junio. F.C.E.

Henderson, M. Alexander (1974). "La fijación de los precios de las empresas de servicios públicos" en la Economía de Bienestar. Lecturas del Trimestre Económico. No. 9, Vol. II, Ed. FCE.

Hurtado, Carlos (1991)."Opciones de provisión de servicios públicos" en El efecto de la regulación de algunos sectores de la economía mexicana. Lecturas del Trimestre Económico. No.70, FCE.

Intriligator, Michael (1973). Optimización matemática y teoría económica. Ed. Pretice/Hall internacional.

Malinvaud, Edmond (1984). Teoría macroeconómica. Alianza Universidad. textos.

Miller, Le Roy (1986). Teoría microeconómica. 1a. edición Mc. Graw Hill.

Musgrave Richard y Peggy Musgrave (1984). Public finances in theory and practices. 4a. edición. Mc.Graw-Hill.

Mussa, Michael (1976). Studies in monetary economics. North-Holland Publishing Company.

Neher, Philip (1981). Crecimiento Económico y Desarrollo. 1a. edición. Aguilar.

Roth, Gabriel (1987). The private provision of public services in developing countries. Published for the World Bank. Oxford University Press.

Samuelson / Nordhaus (1987). Economía. 12a edición. Mc.Graw-Hill.

Silberberg, Eugen (1970). The structure of economics. Mathematical Analysis. 2ª.edición. Mc.Graw-Hill.

Varian, Hall (1986). Análisis Macroeconómico. 1ª.edición. Ed. Antoni Bosh.

Varian, Hall (1987). Microeconomía Intermedia. 1ª.edición. Ed. Antoni Bosh.

Villarreal, René (1985)." Las empresas públicas como instrumento de política económica" en El Mercado de Valores. Año XLV. No. 25, Junio 24.

Wiliam Sher y Rudy Pinola (1981). Teoría microeconómica Alianza Universidad Textos.