UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA HERENCIA GRIEGA DE DESCARTES.

ALGUNOS DETALLES DEL ORIGEN DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de :

MATEMATICO

Presenta:

MARIA DEL PILAR RODRIGUEZ PEREZ.

MEXICO, D.F. 1992

INDICE

INTRODUCCION 1

I. LA GEOMETRIA GRIEGA COMO ANTECEDENTE DE LA GEOMETRIA ANALITICA 6
La geometría griega. Breve historia. 6
Distinción entre aritmética y geometría en los *Los Elementos* de Euclides. 8
Aportaciones de la geometría griega a la geometría analítica. 10
Clasificación de curvas en la geometría griega. 14

II. ANTECEDENTES INMEDIATOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA 15
Siglos XV y XVI, el álgebra como metáfora de la geometría. Viéte el poeta. 15
Fermat y Descartes. 20

III. LA GEOMETRIA DE R. DESCARTES, DE LA GEOMETRIA AL ALGEBRA 27
El proyecto geométrico de Descartes. 27
Multiplicación, División y Raíces.
Proposiciones en Euclides, operaciones en Descartes. 29

IV. EL PROBLEMA DE PAPPUS 52
El problema. 52
Solución de Descartes al problema de Pappus. 61
Solución analítica contemporánea del problema 81

V. CLASIFICACION DE CURVAS 86
La propuesta de Descartes. 86
Generación de curvas mecánicas a la manera de Descartes. 89
Los tres problemas clásicos, su relación con las curvas mecánicas. 92
Demostración geométrica y analítica de la duplicación del cubo. 95
Demostración geométrica y analítica de la trisección de un ángulo. 100

CONCLUSIONES 105

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

Determinar la ecuación de un lugar geométrico[1], así como, inversamente, determinar el lugar geométrico de una ecuación, es el principio fundamental de la geometría analítica.

Más aún, el estudio del "Locus" o lugar geométrico ha jugado, como veremos, un papel fundamental en la historia de las matemáticas.

El problema de demostrar la existencia del objeto geométrico aparece en la geometría griega como fundamento de ésta. "Euclides utilizó construcciones en el sentido de los teoremas de existencia, para demostrar que algunas entidades existen realmente."[2] Esto es, por medio de la construcción se muestra y se demuestra su existencia, aunque las construcciones en la geometría griega se restringen a aquellas que solo pueden hacerse en una forma admisible con regla y compás.[3]

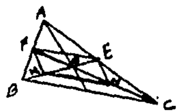
Ahora bien, la posibilidad de definir al lugar geométrico a partir de establecer una correspondencia entre

[1] Entendemos por lugar geométrico al conjunto de puntos en el plano que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.
[2] H. Eves; Estudio de las geometrías, vol. I; p. 182.
[3] Ver Eves; Ibid., p. 180.

curvas y ecuaciones con dos variables de tal forma que para cada curva hay una determinada ecuación y que a cada una de esas ecuaciones le corresponda una curva, es un método notablemente poderoso para resolver problemas de la geometría. Esto es, una vez que aparece la geometría analítica como nuevo método para abordar problemas de la geometría griega, el alcance de este método se revela como extraordinario.

Veamos con un ejemplo como es que "...la geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en la geometría."[4] Así, una vez que se plantea una correspondencia entre una curva y una ecuación, se trata en el fondo de una correspondencia entre el álgebra y la geometría que hace posible que resultados algebraicos conduzcan a resultados geométricos nuevos.

> "Consideremos la proposición: las medianas de un triángulo concurren en un punto que trisecta a cada una de ellas.
>
> La demostración que se da en la mayor parte de los textos elementales de geometría plana es la siguiente:



[4] Eves; Ibid., vol. II; p. 2.

Sea G el punto de intersección de las medianas BE y CF del triángulo ABC y sean M y N los puntos medios de BG y CG, respectivamente. Trácense FE, MN, FM y EN.

FE es paralela a BC e igual a su mitad, ya que FE es el segmento de recta que une los puntos medios de un triángulo. En forma análoga, MN es paralelo a BC e igual a su mitad, por lo tanto, FENM es un paralelogramo.

Así, MG=GE, NG=GF, i.e., BE y CF se cortan en un punto G que está a dos tercios de la distancia de uno u otro de los vértices B y C al punto medio del lado opuesto.

Esto es,

$$\begin{aligned} BE &= BM+MG+GE \\ &= 3GE \end{aligned}$$

ya que, M es el punto medio de BG, luego BM=MG=GE; análogamente

$$CF=3GF.$$

Y como esto se cumple para una pareja de medianas del triángulo ABC, se concluye que las tres medianas concurren en un punto que trisecta a cada una de ellas."[5]

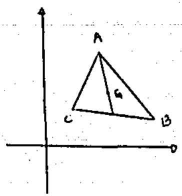
Como puede observarse, la demostración anterior requiere de cierta inventiva y de una gran habilidad que

[5] Eves; Ibid., vol. II; p. 5.

solo se consigue con la práctica. En contraste con lo anterior

"Establezcamos nuevamente la proposición en términos del método de la geometría analítica.

Sean $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ y $C=(c_1,c_2)$ los vértices de cualquier triángulo, con A, B y C puntos del plano.



Sea $G=(g_1,g_2)$ el punto del plano donde se intersectan las medianas.

Ahora, habrá que recordar que la razón en la que un punto P divide a un segmento de recta P_1P_2 esta dada por
$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$
donde $P=(x,y)$, $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ son puntos del plano; de donde se deduce que las coordenadas del punto que corta a un segmento en una razón dada serán
$$\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right) \text{ con } r \neq -1$$

Así, las coordenadas de D, el punto medio de BC y por donde pasa la mediana AD serán

$$\left(\frac{b_1+c_1}{2}\ ,\ \frac{b_2+c_2}{2}\right)$$

luego, G trisecta a AD, así las coordenadas de G son

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\ ,\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Esto muestra que G es un punto que trisecta a las tres medianas del triángulo".[6]

Aunque este ejemplo hace resaltar la eficacia del método analítico, es evidente y bien sabido que existe una larga tradición en la geometría plana; en la medida en la que es en la geometría griega en donde esta última no solamente inicia, sino que encuentra una de sus expresiones más acabadas, el presente trabajo intenta mostrar algunos aspectos detallados de la relación entre el origen de la geometría analítica y el pensamiento matemático griego y que en nuestra opinión, resultan claves para entender este orígen.

---

[6] Eves; Ibid., vol. II; p. 6.

I. LA GEOMETRIA GRIEGA COMO ANTECEDENTE DE LA GEOMETRIA ANALITICA

La geometría griega. Breve historia.

"De todas las manifestaciones del genio griego ninguna es más impresionante y aún admirable que aquella que se revela en la historia de las matemáticas griegas."[1]

En el siglo VII a.c. (alrededor del 600 a.c.) inicia la tradición matemática griega con Tales de Mileto. A el se deben los teoremas de que un círculo es bisectado por cualquier diámetro, de que los ángulos opuestos a los lados iguales en un triángulo isósceles son iguales y de que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Pitágoras y sus discípulos, entre los años 550 y 450 a.c. contribuyeron decisivamente a fundamentar tanto a una teoría de números como a la geometría, en este período desarrollaron los temas que aparecen en los libros I, II, IV, VI, de Los Elementos de Euclides. En el siglo V aparecen los llamados "tres problemas clásicos", es decir, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de cualquier ángulo. La solución de estos tres problemas implicó en gran medida el

[1] Heath, T.; A History of Greek Mathematics, Vol. I; p. 1.

desarrollo de conceptos y técnicas fundamentales para la geometría griega; tales como el descubrimiento de curvas mecánicas, es decir, curvas construidas a partir de instrumentos mecánicos sin la restricción de que la construcción sea solo con el uso de regla y compás, como la cuadratriz, la conchoide, la cisoide y otras, así como el estudio de las propiedades de las cónicas, entre otros.

En el siglo IV Eudoxo descubre la teoría de proporciones como se expone en el libro V de *Los Elementos* y propone los fundamentos del método de exhausión para medir áreas y volúmenes. Menecmo desarrolla las secciones cónicas y sus propiedades fundamentales; Teteto generaliza la teoría de irracionales; se trabaja sistemáticamente la teoría de la esfera y al final de este siglo Euclides escribe los 13 libros de *Los Elementos*, fijando con ello una manera de hacer matemáticas que tendrá vigencia durante un período de más de 2000 años.

En el siglo III haciendo un uso novedoso de la teoría de exhausión, Arquímedes, (para muchos, el más grande matemático griego) encuentra el área de un segmento de parábola, de un segmento de espiral; la superficie y el volumen de una esfera y de un segmento de esfera; el volumen de cualquier segmento de los sólidos de revolución de segundo grado; los centros de gravedad de un semicírculo, de un segmento parabólico, de cualquier segmento de un paraboloide de revolución, y de cualquiera de una esfera o de un esferoide; y una aproximación muy exacta de pi (II), entre otros resultados. Hacia el final del siglo Apolonio de Pérgamo completa la teoría geométrica de las cónicas y plantea problemas relativos a lugares geométricos. Con Apolonio puede decirse que concluye el período de la historia en el que se desarrollan los conceptos de la matemática griega.[2]

Distinción entre Aritmética y Geometría en Los Elementos de Euclides.

Al definir uno de los principios fundamentales de la geometría analítica como la relación recíproca entre la geometría y el álgebra, lo que se hace es usar libremente las operaciones aritméticas para interpretar y resolver problemas geométricos. Esto es, el aceptar la posibilidad de hacer operaciones aritméticas con objetos (magnitudes) geométricos -como se verá en detalle más adelante- nos permite establecer un nexo entre la geometría y la aritmética.

En contraste con esto, para los griegos la "geometría es la ciencia de la magnitud y la aritmética es la ciencia del número....estas son ciencias separadas y no subordinadas, requiriendo definiciones y teoremas por separado."[3]

---

[2] Ver Heath, T.; Ibid., pp. 2 y 3.

[3] Jones, Ch.; Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas, en Mathesis Vol. III, No. 1; p. 11.

Los conceptos de la geometría se refieren a las magnitudes continuas, mientras que la aritmética trabaja con los números enteros. Más aún, para los griegos, número y magnitud se distinguen por su divisibilidad. Como la magnitud es continua, esta es infinitamente divisible. El número es divisible, pero finitamente, ya que cuando se llega a la unidad el proceso de divisibilidad se detiene, pues la unidad era considerada como el origen de los números, es decir, siendo el número una colección de unidades, y al no ser lo mismo la unidad que el conjunto de unidades, el proceso de dividir concluye necesariamente. Si la unidad fuera divisible, sus partes serian divisibles y así al infinito, donde entonces la unidad sería continua y no discreta y por lo tanto esto haría al número continuo e indistinguible de la magnitud.

A pesar de que esta concepción no permite las fracciones, los griegos desarrollaron toda una teoría de las relaciones entre los números, a saber, a las razones y proporciones.

La restricción al uso de fracciones señala claramente la imposibilidad de relacionar a la geometría con la aritmética (mucho menos con el álgebra).[4] Así la longitud, el área y el volumen <u>no pueden</u> ser pensados como números asignados a una configuración dada; son conceptos geométricos.

---

[4] Ver, Jones Ch.; <u>Ibid.</u>; pp. 8 y 9.

Los problemas geométricos griegos exigen la construcción de líneas rectas o curvas, áreas, volúmenes, al margen de cualquier fórmula algebraica y para su solución se consideran más bien razones entre líneas que longitudes. Por ejemplo la cuadratura del círculo, pide la construcción de un cuadrado y no la determinación de un número (en particular Π).[5]

Aportaciones de la geometría griega a la geometría analítica.

Es importante señalar aquí, que hay algunos aspectos de la matemática griega que resultan fundamentales para el desarrollo de la geometría analítica, estos son: la teoría de proporciones, la aplicación de áreas y la idea de lugar geométrico junto con el estudio de las cónicas, así como el descubrimiento de las curvas mecánicas las cuales serán fundamentales para la solución de "los tres problemas clásicos".

La teoría de proporciones fue la herramienta básica en la matemática griega tal y como el álgebra lo es en la nuestra. Los aspectos básicos de esta teoría se encuentran en los libros V y VI de *Los Elementos*, donde ésta se desarrolla con relación a la geometría y en el libro VII con

---

[5] Ver, Boyer; The History of Analytic Geometry, pp. 7 y 8.

relación a la aritmética, esto de acuerdo con la separación entre ambos temas de la cual ya hemos hablado.[6]

Esta teoría de proporciones se construye a partir de lo siguiente.

La definición fundamental del libro V es la definición 5 que afirma los siguiente:

> "Se dice que las magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda como la tercera a la cuarta, si cualesquiera múltiplos iguales del primero y el tercero son juntos, mayores que, iguales que, o menores que cualesquiera múltiplos iguales del segundo y el cuarto tomados en el orden correspondiente".[7]

Esta definición para su mejor comprensión puede interpretarse como sigue:

$$ma>nb \quad \text{implica} \quad mc>nd$$
$$ma=nb \quad \text{implica} \quad mc=nd$$
$$ma<nb \quad \text{implica} \quad mc<nd.$$

Hay que señalar que esta interpretación no traduce fielmente el pensamiento matemático de los griegos, para quienes esta definición se refiere estrictamente a una comparación que se hace con magnitudes geométricas, donde no cabe, como ya vimos, el uso de consideraciones aritméticas.

---

[6] Cfr. Jones Ch., La influencia de Aristoteles en el fundamento de Los Elementos de Euclides, en Mathesis, Vol.III No.4, pp. 377-78.

[7] Euclides, The Elements, Vol.2, p. 114.

Como se verá, es precisamente la interpretación aritmética de las relaciones entre magnitudes geométricas, una interpretación radicalmente distinta a la de los matemáticos griegos, la que conducirá al desarrollo de la geometría analítica.

Congruentemente con la separación entre la geometría y la aritmética, Euclides da una definición de proporcionalidad relativa a los números, que aparece en la definición 20 del libro VII que dice:

> "Los números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo como el tercero es del cuarto".[8]

Con relación a la teoría de aplicación de áreas, ésta aparece desarrollada en los libros I y II de *Los Elementos*, básicamente se trata de una teoría en la cual los problemas se refieren a figuras iguales en áreas, un ejemplo de lo anterior es el problema de la cuadratura del círculo. Como veremos más adelante la aplicación de áreas resulta relevante en el desarrollo de la geometría analítica, ya que es posible resolver este tipo de problemas interpretándolos algebraicamente.

Con respecto al estudio de las cónicas, es el trabajo de Apolonio, como ya se dijo, el que completa y sistematiza el estudio de las mismas. Es a partir de éste que podría pensarse que la diferencia entre la geometría moderna y la

---

[8] Euclides, Ibid., p. 278.

geometría antigua es más de método y de modo de notación, que de contenido.

Apolonio desarrolla de un modo muy general el estudio de las secciones cónicas, a través de seccionar (con un plano) un cono circular oblicuo. Los nombres de elipse, parábola e hipérbola son dados por Apolonio al introducir un cambio significativo en la manera de su tratamiento. Arquímedes define la propiedad de las cónicas en términos de la teoría euclidiana de proporciones; por ejemplo, la parábola tiene la propiedad de que las abscisas medidas a lo largo del eje desde el vértice, son unas a otras como los cuadrados de las ordenadas correspondientes. Apolonio en cambio, hace uso de la idea y del lenguaje de la teoría de aplicación de áreas; así, la propiedad nominal básica de la parábola puede describirse por el hecho de que el rectángulo formado con el parámetro y cualquier abscisa, es igual al cuadrado sobre la ordenada correspondiente a esa abscisa, si la parábola tiene a su vértice como el origen y a su eje como línea de abscisas.

Los de elipse e hipérbola se refieren al hecho de que en estas dos curvas los cuadrados sobre una ordenada son menores que, o exceden respectivamente el rectángulo formado por la abscisa correspondiente y el parámetro, si las curvas tienen al vértice en el origen y al eje mayor o al eje transverso como línea de las abscisas.

La expresión de las propiedades de las cónicas en términos de la teoría de aplicación de áreas resulta entonces, compatible con el álgebra simbólica y con la asociación de curvas y ecuaciones en la geometría analítica.

Como veremos en el capítulo IV, hay una relación directa entre las proposiciones del tratado de las cónicas de Apolonio y las expresiones algebraicas de estas curvas desarrolladas por Descartes.[9]

Clasificación de curvas en la geometría griega.

Los antiguos geómetras griegos clasificaron a las curvas en tres grupos, el primero de ellos incluye a los "lugares planos", que son únicamente la línea recta y el círculo. El segundo grupo, el de los "lugares sólidos", está formado por las cónicas; el nombre deriva de seccionar un sólido, a saber el cono. El tercer grupo incluye a las curvas generadas a partir de la intersección de diversas líneas en movimiento, estas curvas llamadas mecánicas, reciben el nombre de "lugares lineales". Algunas de ellas son la cuadratriz, la espiral, la cisoide y la conchoide. Estas curvas junto con las cónicas sirvieron para resolver "los tres problemas clásicos". Más adelante veremos que Descartes eliminará la distinción entre todo tipo de curvas, y a diferencia de lo que hacen los griegos, propondrá un tratamiento general de ellas, también veremos el papel tan importante que juegan las curvas mecánicas, para la solución a los tres problemas.

[9] Cfr., Boyer, Ibid., pp. 23-5.

II. ANTECEDENTES INMEDIATOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

Siglos XV y XVI, el álgebra como una metáfora de la geometría. Viéte el poeta.

Hacia fines del siglo XV aparecen dos libros: el libro de Nicolás Chuquet (+ cerca 1500) *Tripartición en la ciencia de los números* de 1484, aunque no fue publicado hasta el siglo XIX y el libro de Luca Pacioli (1445-1514) *Summa de arithmetica, geometria, proportioniet proportionalita*, publicado en Venecia en 1494. Estos dos libros podrían ser considerados, en la medida en la que anticipan líneas futuras del desarrollo de las matemáticas, como una marca divisoria razonablemente clara entre las matemáticas medievales y las matemáticas modernas.[1]

Partes sustanciales de la *Tripartición* aparecen en 1520 y en 1538 en el libro *Arismetique* de Etienne de la Roche. El aspecto más importante de la *Tripartición* consiste en la tendencia hacia un álgebra simbólica que permitió a los matemáticos ir más allá de la visualización geométrica y el

[1] Ver Boyer, Ibid., p. 54; Ball, W.W.R; A Short Account of the History of Mathematics, pp. 205-08; Collette J.P., Historia de las matemáticas I, pp. 260-62.

uso de potencias mayores que la cúbica. En Chuquet se encuentran expresiones como

$$R^2.4^2.p.4^1.p.2^1.p.1.$$

que sería equivalente a

$$4x^2+4x+2x+1.$$ [2]

La *Summa de arithmetica* continúa la tendencia hacia el simbolismo algebraico; más aún, inicia un movimiento que culminará en la geometría cartesiana, a partir del intento de resolver problemas geométricos algebraicamente.

Bajo esta perspectiva, el desarrollo de las operaciones, la notación y los conceptos en la aritmética y el álgebra, serán la marca distintiva de las matemáticas del siglo XVI,[3] donde destacará como una de las figuras más importantes de este siglo Francois Viéte (1540-1603).

La contribución de este último a la historia de la geometría analítica es fundamental; las principales obras de Viéte son *In artem analyticam isagoge*, Tours 1591; el *supplementum geometriae*, y una colección de problemas geométricos, Tours, 1593; y el *De numerosa potestatum rosolutione*, Paris 1600. *In artem* contiene dos apéndices; Logistice Speciosa que trata de la suma y la multiplicación de cantidades algebraicas y de las potencias, hasta la sexta, de un binomio; y el Zetetica acerca de la solución de ecuaciones. Su libro *De aequationum rocognitione et emenpatione* fue publicado póstumamente en 1615.[4]

---

[2] Ver Boyer, Ibid., p. 55; Collette, Ibid., p. 261.
[3] Ver Boyer, Ibid., pp. 56-7.
[4] Ver Ball, Ibid., p. 230.

La importancia de la contribución de Viéte se debe más que a su contribución en la notación algebraica, al avance en las ideas en este campo. Esto es, con él se pasa de un álgebra preocupada por ecuaciones numéricas particulares como "Cubus p.6 rebus aequalis 20" es decir, $x^3+6x=20$ al estudio de las propiedades de ecuaciones de la forma "A cub.-B planum in A aequatur B plano in Z" es decir, $x^3-b^2x=b^2z$, $(A^3-B^2A=B^2Z)$. Así, al usar vocales para designar las cantidades desconocidas y consonantes para las conocidas, Viéte hace posible distinguir tres tipos de magnitudes algebraicas, a saber: números, parámetros y variables; junto con esto, su práctica de usar letras como coeficientes en los términos de una ecuación permite construir una teoría general de las ecuaciones, esto es, estudiar por ejemplo, la ecuación cúbica en vez de <u>una</u> ecuación cúbica.

Viéte esta consciente de la importancia de lo anterior, al distinguir a la <u>logistica númerosa</u> de la <u>logistica speciosa</u>; esta última trata de las "especies" o de las "formas de las cosas" a diferencia de la primera que solo hace cálculos numéricos. Al hablar de especies Viéte se acerca a la idea de una variable algebraica, en particular esto permitiría expresar relaciones entre elementos geométricos inconmensurables, inexpresables en términos de números enteros. De hecho sus vocales y sus consonantes se refieren generalmente a magnitudes geométricas, convirtiendolo en un autor que aplica sistemáticamente el álgebra para la solución de problemas geométricos. Esto nos podría llevar a pensar en una geometría analítica, pero al limitarse al estudio de ecuaciones con una sola incógnita, Viéte no está en condiciones de construirla como la hará Descartes. Ciertamente, la geometría analítica, como se verá no es solo una combinación de álgebra y geometría.[5]

Un aspecto importante del trabajo de Viéte es la aplicación novedosa del simbolismo literal a los problemas geométricos, seguida de un método mecánico de cálculo. Esto es, la traducción de un problema del campo de la geometría al campo del álgebra.

> "Esto preparó el camino para la manipulación libre y la simplificación de las expresiones algebraicas relevantes de acuerdo a reglas algorítmicas. Donde el problema geométrico estaba determinado, el resultado de la simplificación era invariablemente una ecuación algebraica irreducible en una incógnita, las raíces de la cual dan las magnitudes posibles de las líneas originales desconocidas".[6]

Veamos un ejemplo de lo anterior,

> "...dada el área de un rectángulo y la razón de sus lados, encontrar los lados del rectángulo. Viéte toma el área como B planum (B^2) y la razón de los lados como S a R (S/R). Sea el lado mayor A. Entonces S es a R como A es a (R veces A)/S, por lo

---

[5] Ver Boyer, Ibid., pp. 59-61.
[6] Boyer, Ibid., p. 62.

tanto el lado menor será (R veces A)/S. Como B planum es igual (R veces A al cuadrado)/S multiplicando por S, se obtiene la ecuación final R veces A al cuadrado igual a S veces B. De esta forma la construcción geométrica de A es fácilmente indicada."[7]

Hay que hacer notar que si bien esta aproximación algebraica ciertamente posibilita la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones planteadas por un problema geométrico, no se propone resolver el problema básico de la geometría analítica, es decir, el problema de los lugares geométricos, la solución de este problema tal como lo hace Descartes, requerirá de algo más que una aplicación del álgebra a la geometría, necesita de una geometría coordenada.

En 1593 en el *supplementum geometriae* Viéte apunta que la representación geométrica de las raíces de una ecuación cúbica o bicuadrática irreductible es equivalente a la trisección del ángulo o la duplicación del cubo. Para resolver estos problemas propone una extensión de los postulados Euclidianos que permita la construcción de curvas mecánicas (conchoide, cisoide etc.).

El trabajo de Descartes, al ser básicamente un intento para extender la sistematización algebraica a curvas de

---

[7] Cfr., Boyer, Ibid., nota 15, p. 62; La idea básica se explica a partir del siguiente razonamiento. Sea A el lado mayor, sea X el lado menor; luego A/X=S/R así $B^2=RA^2/S$ por lo tanto $SB^2=RA^2$.

grado superior, también propone liberalizar los postulados Euclidianos y se ve obligado a encontrar nuevas curvas para poder efectuar las construcciones requeridas, siendo esto lo que lo conduce a la geometría analítica.[8]

Con respecto a Viéte, Descartes afirma en una carta enviada a Mersenne en 1637 "...comienzo las reglas de mi álgebra con lo que Viéte escribió al final de su libro, De *emendatione aequationum*...Así, empiezo donde el termina."[9]

Hacia fines del siglo XVI se profundiza la tendencia a una mayor simbolización del álgebra, así como a la construcción de soluciones geométricas para problemas de la aritmética y del álgebra; junto con esto hay que apuntar un renovado interés por las obras de Apolonio, como lo ejemplificarán los intentos de restituir distintas partes de sus tratados perdidos, lo que señala un resurgimiento notable de la geometría que se extenderá hasta principios del siglo XVII.[10]

Fermat y Descartes.

Tradicionalmente se ha considerado al siglo XVII como el siglo en el que aparecen los principios de la geometría analítica. La invención de esta nueva rama de las matemáticas se debe fundamentalmente a Pierre de Fermat (1601-1665) y a Rene Descartes (1596-1650), quienes

[8] Ver, Boyer, Ibid., p. 64.
[9] Descartes R, The Geometry, nota 18, p. 10.
[10] Ver, Boyer, Ibid., pp. 66-71.

independientemente uno del otro llegan a resultados que permitirán el desarrollo de ésta.

> "...la geometría analítica elemental -como se enseña hoy- cubre usualmente cuatro temas principales en el plano cartesiano: la derivación de formulas de puntos, líneas, ángulos y áreas junto con la aplicación de estas a problemas y teoremas; la graficación de curvas; la deducción de ecuaciones de lugares geométricos; y el estudio de las propiedades de curvas, especialmente de ecuaciones lineales y cuadráticas. De estos temas Descartes hizo énfasis en el tercero y consideró brevemente algunos aspectos del último; Fermat enfatizó el último y resolvió algunos problemas relacionados con el tercero. El segundo tema no se desarrolló sino hasta principios del siglo XVIII y el primer tema hasta el fin de éste."[11]

En el caso de Fermat tenemos la particularidad de que éste publicó en raras ocasiones sus descubrimientos, cuando lo hacía, aparecían como apéndices a escritos de otros autores. En la medida en la que realizaba su trabajo para entretenerse (hay que recordar que era abogado), sus resultados más bellos aparecen en los márgenes de diversos libros. Mantuvo correspondencia con numerosos científicos de su época y tuvo una gran reputación como matemático. Después de su muerte se publican sus principales escritos en 1679

[11] Boyer, Ibid., p. 102.

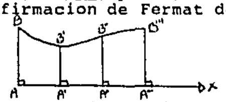
bajo el título de *Varia opera mathematica* cuarentaidos años después de la publicación de *La geometría* de Descartes.[12] Para esta época los desarrollos en este campo habían ya superado los resultados de Fermat y la publicación de ellos fue básicamente de interés histórico. Por lo anterior resulta difícil determinar la extensión de su influencia para el avance de la geometría analítica.[13]

La única obra de Fermat sobre geometría analítica es *Ad locos planos et sólidos isagoge*, una obra breve que trata de la línea, el círculo y las secciones cónicas. Esta obra comienza con lo que para Boyer constituye una formulación clara del principio fundamental de la geometría analítica, así como la introducción de la idea de variable algebraica:

> "Siempre que en una ecuación final se han encontrado dos cantidades desconocidas, tenemos un locus (lugar geométrico), y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva."[14]

Esto permite a Fermat hacer un procedimiento inverso con relación al tratamiento que habían hecho los griegos de

[12] Ver, J.P. Collette, Ibid., vol. II, p. 22.
[13] Ver, Boyer, Ibid., p. 82.
[14] Boyer, Ibid., p. 75; J.P. Collette, Ibid., p. 23.
Esta afirmacion de Fermat debe interpretarse como sigue:



En este caso las A juegan el papel de "abscisas", y para cada "ordenada" se construye el segmento correspondiente en ángulo recto con la línea (recta) de las abscisas, donde los extremos (libres) describen al lugar geométrico.

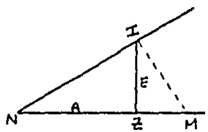
algunos problemas de lugar geométrico, con el cual la curva era primero, luego se le añadían algunas líneas que cumplían el papel de "ejes coordenados", para al final dar una descripción verbal (retórica) de las propiedades geométricas de la curva. El procedimiento de Fermat empieza con una ecuación algebraica utilizando la terminología de Viéte, para demostrar que puede ser pensada como un lugar geométrico -una curva- con respecto a un "sistema coordenado".

Antes de Fermat y Descartes no se consideraba el hecho de que en general, una ecuación algebraica con dos incógnitas determina una curva geométrica única.

> "El reconocimiento de este principio, junto con su uso como un procedimiento algorítmico formalizado, constituyó la contribución decisiva de estos dos hombres."[15]

Para ilustrar lo anterior daremos el siguiente ejemplo:

> "Fermat empieza con una ecuación lineal: **D in A aequatur B in E** equivalente a dx=by, donde d y b son constantes dadas.



[15] Boyer, Ibid., p. 76.

> De la proposición B es a D como A es a E, se puede ver que el lugar geométrico del punto en cuestión (punto I en la figura) es la línea NI."[16]

Esto es, partiendo de una recta NZM donde N es fijo, toma NZ como la cantidad desconocida A y el segmento ZI aplicado sobre la recta con un ángulo NZI, como igual a la otra cantidad desconocida E. Cuando DA=BE donde D y B son constantes, el punto I describirá un lugar geométrico representado por la semirrecta NI.[17]

Señalamos aquí, simplemente, que Fermat extiende este método al estudio de las cónicas.

En el caso de Descartes, sus ideas en torno de la geometría analítica, se desarrollan en dirección de dar un significado geométrico a la solución de ecuaciones algebraicas. La construcción geométrica de las raíces de ecuaciones determinadas, fue una de las preocupaciones principales de Viéte y Descartes, por lo demás, este último retoma explícitamente este propósito. Así, se plantea básicamente la construcción de problemas en geometría a través de la solución algebraica de ecuaciones. Aunque el procedimiento era predominantemente algebraico, el significado es puramente geométrico.

> "La <u>intención</u> de Descartes era la de Viéte y la de los geómetras de la antigüedad clásica; el método era esencialmente nuevo en tanto que hace uso de la

16 Boyer, <u>Ibid.</u>, p. 76.
17 Cfr. J.P. Collette, <u>Ibid.</u>, p. 25.

representación gráfica de ecuaciones indeterminadas."[18]

El trabajo matemático de Descartes aparece en *La geometría*, publicado en 1637 como un apéndice del conocido *Discurso del método*.

La obra está dividida en tres libros; los primeros dos tratan de la geometría analítica y el tercero incluye un análisis del álgebra de la época, hay que señalar que el álgebra que aparece en la obra es ya simbólica. Prácticamente, la única diferencia del álgebra que usa Descartes con la actual es el símbolo de igualdad (usa el símbolo por =).

El primer libro comienza con una explicación de los principios de la geometría analítica y contiene la discusión del "problema de Pappus"; fue en el intento de resolverlo que Descartes (como veremos) descubre las bases de ésta.

Asimismo, en el libro dos resuelve (como también veremos) el problema de Pappus a partir del método analítico por él propuesto y ofrece una reclasificación de curvas. En este libro es de interés el tratamiento que da a las tangentes a curvas.

En el libro tres propone la solución gráfica de ecuaciones mayores que el segundo grado, en particular las cúbicas y las cuárticas. Este libro es el más sistemático,

"...pero no es geometría analítica en el sentido estricto del término, es un curso elemental en la

[18] Boyer, Ibid., p. 83.

teoría de ecuaciones, escrito en un lenguaje y una notación casi idéntica con la de los libros de texto modernos."[19]

En el capítulo siguiente abordaremos con más detalle el método matemático cartesiano.

[19] Boyer, Ibid., p. 96.

III. LA GEOMETRIA DE DESCARTES. OPERACIONES ARITMETICAS, DE LA GEOMETRIA AL ALGEBRA.

El proyecto geométrico de Descartes.

Para Descartes,

> "Todo problema de la geometría puede ser fácilmente reducido a términos tales que el conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción."[1]

Esto es, propone imaginar a la línea recta como un objeto susceptible de ser manipulado en términos de su magnitud.

Así, es posible hacer operaciones aritméticas; sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces con la línea recta sin trasgredir el concepto geométrico; ya que pensar a la línea recta como un número, permite entonces hacer un uso libre de las operaciones aritméticas, obteniendo nuevas líneas rectas. Es decir, si se hacen operaciones con las líneas lo que se obtiene son nuevas líneas y no otra cosa.[2]

---

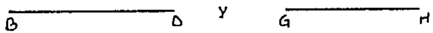
[1] Descartes, <u>Ibid.</u>, p. 2.
[2] Ver Descartes, <u>Ibid.</u>, p. 2-3.

Para hacer lo anterior propone asignarle una letra a cada línea que pueda ser trazada.

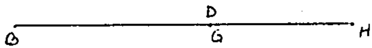
"...para sumar las líneas BD y GH, llamo a una a y a la otra b y escribo $a+b$. Entonces $a-b$ indicara que b se sustrae de a; ab que a esta multiplicada por b; a/b que a esta dividido por b; aa ó a^2 que a esta multiplicada por si misma; a^3 que éste último resultado está multiplicado por a, y así indefinidamente."[3]

Similarmente esto se haría para la extracción de raíces ya sean cuadradas, cúbicas etc., por ejemplo, si se quiere extraer la raíz cuadrada de la suma de dos líneas designadas por a y b se escribe $\sqrt{a+b}$.[4]

En esta perspectiva resulta claro ver el sentido geométrico de sumar BD y GH, ya que si tenemos



segmentos de recta, se puede entonces hacer



así, si BD=a y GH=b se tiene que BH sera $a+b$. Análogamente para la sustracción.

Ahora bien, en el caso de la multiplicación, división y extracción de raíces, la aplicación de éste principio implica, como se verá, un uso y una concepción distintos a los de la tradición geométrica griega.

---

[3] Descartes, Ibid., p. 5.
[4] Ver Descartes, Ibid., p. 5.

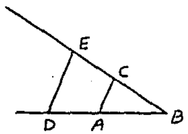
Multiplicación, división y raíces. Proposiciones en Euclides, operaciones en Descartes.

El sentido geométrico que Descartes dio a la multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas conforma, ciertamente, un nuevo punto de vista con relación a la geometría griega.

En el caso de la multiplicación, Descartes iguala este concepto al problema de habiendo tomado

> "...una línea a la cual llamare unidad para relacionarla tan cercamente como sea posible a los números, y la cual en general puede ser escogida arbitrariamente, y habiendo dado otras dos líneas, encontrar una cuarta línea que será a una de las líneas dadas, como la otra a la unidad."[5]

Esto es, considerando la siguiente figura



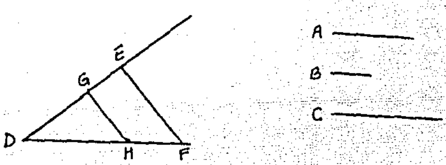
[5] Descartes, Ibid., p. 2.

Descartes afirma que si AB se toma como unidad y se quiere multiplicar BD por BC entonces BE=BD BC, con DE paralela a AC.[6]

Cabe aclarar que no demuestra[7] esta afirmación (ni las siguientes); veamos la siguiente demostración:

Proposición 1. (Euclides, libro VI, prop. 12)

"Dadas tres líneas rectas, encontrar una cuarta proporcional.



Sean A, B, C, las tres líneas dadas, entonces, se requiere encontrar una cuarta proporcional a A, B, y C.

Sean DE, DF dos líneas rectas tales que formen cualquier ángulo EDF; sea DG igual a A, GE igual a B y DH igual a C; únanse G y H; trácese EF paralela a GH. [I.31].

Como GH es paralela a EF, que es uno de los lados del triángulo DEF, por lo tanto DG es a GE como DH es a HF, [VI.2]. Esto es, A es a B como C es a HF.

6 Ver Descartes, Ibid., p. 5.

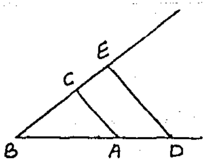
7 Descartes deja las demostraciones al lector. Ver Descartes, Ibid., libro I passim.

Por lo tanto se encontró la cuarta proporcional HF a las líneas rectas dadas A, B, y C. Q.E.D."[8]

Proposición 2.

Sean AB, BD y BC tres líneas dadas, con AB=1. Entonces BD BC=BE con DE paralela a CA.

Demostración:



Por la proposición 1. tenemos que

BA/AD=BC/CE pero,

AD=BD-BA y

CE=BE-BC entonces

BA/(BD-BA)=BC/(BE-BC) así,

BA(BE-BC)=BC(BD-BA) pero,

BA=1 entonces,

BE-BC=(BC)(BD)-BC luego,

BE=(BC)(BD).

Notemos que esta demostración y por lo tanto la afirmación de Descartes acerca de la multiplicación parecerían posibles sólo a partir de la proposición de Euclides interpretada de una manera distinta. Esto es, la

[8] Euclides, Ibid., vol.2, p. 215.

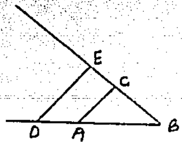
proposición euclidiana es sacada de su contexto original, y al ser reinterpretada en términos del principio original de Descartes (sustituir a las rectas por sus longitudes y asignarles letras) permite pensar a la multiplicación de dos magnitudes geométricas como una nueva magnitud (otra recta) en vez de un área, como concebían los griegos, es decir, para el pensamiento geométrico griego, hablar de (BC)(BD) es interpretado como el área del rectángulo de lados BC y BD, así como (AB)(AB) será el área de un cuadrado de lado AB, de tal manera que la proposición de Descartes constituye una forma radicalmente distinta de concebir lo geométrico.

Al dar Descartes una herramienta distinta para la interpretación de lo geométrico, esto es, al concebir a la línea recta en términos de su longitud y no en términos de magnitud como es el caso en los griegos, lo que se obtiene es el poder interpretar a la multiplicación de dos o más líneas rectas como una línea recta más, a diferencia de los griegos que interpretarían ésta, si fuera el caso, como el área o volumen que conforman estas líneas; más aún, para Descartes expresiones como a^2, a^3, etc., significan sólo líneas, de tal manera que pueden ser usados como términos algebraicos.[9]

En el caso de la división, dice:

[9] Ver Descartes, Ibíd., p. 5.

"Si se requiere dividir BE por BD, se unen E y D y se traza AC paralela a DE; entonces BC es el resultado de la división."[10]



Como puede verse claramente, Descartes considera a la división de dos líneas rectas como la operación inversa de la multiplicación, donde ésta tiene el sentido geométrico antes descrito. Con esto, al dividir dos líneas rectas lo que se obtiene es una nueva línea recta que puede ser expresada como la longitud de ella, a diferencia de lo que sucede, de nueva cuenta, en la geometría griega, donde esto es pensado como una comparación entre rectas en términos de razones y proporciones.

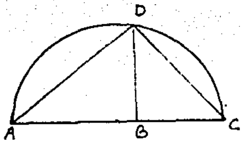
Ahora, para el caso de la extracción de raíz cuadrada, Descartes aplicara su principio básico a la proposición euclidiana:

Proposición 3. (Euclides, libro VI, prop. 13)

"Dadas dos líneas rectas encontrar una media proporcional.

---

[10] Descartes, Ibid., p. 5.



Sean AB, BC las dos líneas rectas dadas; entonces se requiere encontrar una media proporcional a AB, BC.

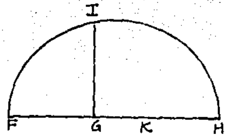
Sean estas líneas rectas colocadas en una línea recta y descríbase el semicírculo ADC sobre AC; trácese BD perpendicular a AC y únase AD y DC.

Como el ángulo ADC es un ángulo inscrito en un semicírculo , es recto. [III-31] Y como en el triángulo rectángulo ADC, DB se trazó en ángulo recto a la base, por lo tanto DB es la media proporcional entre los segmentos de la base AB y BC. [VI-8 porisma]

Por lo tanto se ha encontrado la media proporcional DB a las líneas rectas dadas AB y BC. Q.E.D."[11]

Ahora bien, considerando la siguiente figura,

[11] Euclides, Ibid., vol. 2, p. 216.



Descartes afirma que:

> "Si se quiere la raíz cuadrada de GH, añado a lo largo de la misma línea recta FG que es la unidad, y divido a FH en dos partes iguales en K, con centro en K trazo el semicírculo FIH, y dibujo una perpendicular por G hasta I, entonces GI es la raíz requerida."[12]

Veamos la siguiente demostración:

Proposición 4.

Basándonos en la figura anterior, tenemos que

$$FG/GI=GI/GH \qquad (1)$$

así, haciendo uso del principio de Descartes podemos escribir (1) como sigue

$(FG)(GH)=(GI)(GI)$ pero,

$FG=1$ entonces,

$GH=GI^2$ por lo tanto,

$GI=\sqrt{GH}$.

Puede verse, de nuevo, como la identificación que hace de las magnitudes geométricas con los números le permite, en este caso, hablar de la raíz de una magnitud en general.

[12] Descartes, Ibid., p. 5.

Compárese esto con los conceptos griegos de media proporcional de dos magnitudes o el de conmensurabilidad en cuadrado, esto es, por ejemplo, con la imposibilidad de hablar de $\sqrt{5}$ como número, y si con la posibilidad, en cambio, de concebirlo geométricamente como el lado de un cuadrado de área 5, al cual siempre es posible construir.[13]

Hasta aquí, lo que ha hecho Descartes es proponer, a partir de su principio, las bases de lo que será su método geométrico. Es decir, propone a estas operaciones como principios fundamentales para resolver problemas de la geometría, en particular, como veremos, al "problema de Pappus".

Con esto, pasa a mostrar como es que un problema geométrico puede ser entendido como un problema algebraico. Para lo cual Descartes dice:

> "Si, entonces queremos resolver cualquier problema, debe considerarse en principio como ya resuelto y deben darse nombres a todas las líneas que parezcan necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que se conocen. Entonces, sin hacer distinción entre las líneas conocidas y

[13] Ver Zsabó, Arpad; The Beginnings of Greek Geometry, parte 1, pp. 33-99; Euclides II-14. Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. (Euclides, Ibid., vol.1 p. 409). Esta proposición es equivalente a la VI-13. En este caso resulta evidente que puede tomarse como figura rectilínea dada a un rectángulo de lados 1 y 5, por lo tanto de área 5; el cuadrado construido igual en área a este rectángulo tendrá área 5, con lo cual se habra construido una magnitud geométrica que podría ser identificada con $\sqrt{5}$, pero que en realidad para los griegos sólo tiene sentido como el lado de un cuadrado de área 5.

desconocidas uno debe descifrar la dificultad de tal manera que muestre más naturalmente el modo en que ellas dependen mutuamente, hasta que sea posible expresar a una misma cantidad de dos formas: esto se nombra una ecuación, pues los términos de una de estas dos expresiones son iguales a los de la otra."[14]

Una vez planteado esto, se limita a explicar, grosso modo, como habría que relacionar las líneas desconocidas con las líneas conocidas (siendo para Descartes "las líneas", cantidades). Esto es, habrá que relacionarlas de tal forma que las desconocidas puedan quedar determinadas por aquellas que son conocidas, o si el problema resulta ser más complicado que algún otro problema (supongámoslo resuelto antes) y el cual esta implícito en nuestro problema, entonces habrá que determinar las líneas (cantidades) desconocidas en términos de las líneas (cantidades) del problema que nos resulta familiar. Obteniendo así, tantas ecuaciones como líneas desconocidas involucre el problema. Habiendo hecho esto, lo que resta es resolver las ecuaciones, esto es, el problema geométrico se ha reducido a un problema algebraico.

Antes de continuar con Descartes, cabe aquí hacer notar que este método propuesto por Descartes coincide en lo esencial con la definición que da Pappus en el libro 7 de *La Colección*. Dice Pappus:

[14] Descartes, Ibid., pp. 6-9.

"El análisis toma lo que se busca como si estuviera admitido y pasa de ello a través de sus consecuencias sucesivas a algo que se admite como resultado de la síntesis*: pues en el análisis asumimos a lo que se busca como si ya estuviera resuelto, y nos preguntamos qué es aquello de lo que ésto resulta, y de nuevo cuál es la causa antecedente de ésto último, y así sucesivamente, hasta que retrayendo así nuestros pasos llegamos a algo ya conocido o que pertenece a la clase de los primeros principios; a tal método lo llamamos análisis, siendo una solución hacia atrás."[15]

Sin embargo, es precisamente la incorporación de lo algebraico a la solución analítica de un problema geométrico junto con, como se verá, un sistema coordenado lo que permite pensar a la proposición de Descartes como el método de la geometría analítica en términos en los que la pensamos hoy en día.[16]

Retomando a Descartes, éste concluye como sigue:

"Así, todas las cantidades desconocidas pueden ser expresadas en términos de una sola cantidad, siempre

---

[15] Pappus citado por Heath, *Ibid.*, vol. II, p. 400. * Por síntesis hay que entender el proceso inverso. "...tomamos como ya resuelto aquello a lo que se llega al final del análisis y, arreglando en su orden natural, como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectandolos sucesivamente unos con otros, finalmente llegamos a la construcción de los que se buscaba, y a esto le llamamos síntesis. Pappus, *Ibid.*, p. 400.

[16] Ya Viéte aplica la palabra análisis a su álgebra geométrica. A la que consideraba como una nueva forma de análisis matemático. Ver Boyer, *Ibid.*, p. 65.

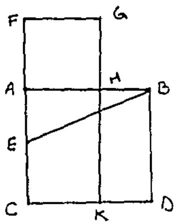
que el problema pueda ser construido por medio de líneas rectas y círculos, o por las secciones cónicas, o incluso por algunas otras curvas de grado no mayor que de tercero o cuarto."[17]

Con respecto a la mención a "otras curvas" en la cita anterior, hablaremos más adelante.

Descartes no se detiene a dar más explicación al respecto, mejor dicho, no da ningún ejemplo para mostrar la eficacia de su método; propone el lector que sea él el que lo haga. Daremos un ejemplo de como puede hacerse esto:

Proposición 5. (Euclides, libro II, prop. 11)

"Dividir una línea recta dada de tal forma que el rectángulo contenido por el todo (la línea dada) y uno de los segmentos (obtenidos) sea igual al cuadrado en el segmento restante.



Sea AB la línea dada; se requiere dividir AB de tal forma que el rectángulo contenido por el todo y uno

[17] Descartes, Ibid., p. 10.

de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Sea ABDC el cuadrado descrito en AB; [I.46] sea AC bisectada en el punto E, y únase BE; sea CA prolongada hasta F, y sea EF igual a BE. Sea el cuadrado FH descrito en AF, y sea GH prolongada hasta K.

Digo que AB ha sido cortada en H, haciendo que el rectángulo contenido por AB,BH sea igual al cuadrado contenido en AH.

Como AC ha sido bisectada en E, y FA se le añadió, el rectángulo contenido por CF,FA junto con el cuadrado en AE es igual al cuadrado en EF. [II.6]

Pero EF es igual a EB; por lo tanto el rectángulo CF,FA junto con el cuadrado en AE es igual al cuadrado en EB.

Pero los cuadrados BA y AE son iguales al cuadrado en EB, ya que el ángulo en A es recto. [I.47]

Por lo tanto el rectángulo CF,FA junto con el cuadrado en AE es igual a los cuadrados en BA y AE.

Sea el cuadrado en AE substraído de cada uno; por lo tanto el rectángulo CF,FA que resultó es igual al cuadrado en AB.

El rectángulo CF,FA es FK, pero AF es igual a FG; y el cuadrado AB es igual a AD; por lo tanto FK es igual AD.

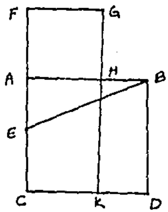
Sea AK substraído de cada uno; por lo tanto FH es igual a HD. Y HD es el rectángulo AB,BH; por AB igual a BD; y FH es el cuadrado AH; por lo tanto el rectángulo contenido por AB,BH es igual al cuadrado en HA.

Por lo tanto la línea dada AB ha sido cortada en H haciendo el rectángulo contenido por AB,BH igual al cuadrado en HA. Q.D.E"[18]

Ahora bien, procedamos a resolver este problema por medio del método que propone Descartes.

Proposición 6.

Supongamos el problema resuelto. i.e.



El rectángulo contenido en AB,BH es igual al cuadrado en AH. Esto es,

$$AB \cdot BH = AH^2$$

ya que para Descartes esta expresión tiene sentido.

Ahora,

Sea $AB=a$ (conocida)

$AH=x$ (desconocida)

[18] Euclides, <u>Ibid.</u>, vol. 1, p. 402.

$$HB=a-x \qquad \text{(se puede determinar)}$$

así como, $AB\ BH=AH^2$ entonces

$$a(a-x)=x^2$$

$$x^2+ax-a^2=0,$$

obteniendo así, una ecuación cuadrática. Resolviendo ésta, tenemos que:

$$x=(-a\ \ a\sqrt{5})/2 \qquad \text{así,}$$

$$=a(\sqrt{5}-1)/2$$ [19]

En otras palabras el problema se reduce a, dado el segmento AB, dividirlo en un punto H, de tal forma que $AB\ HB=AH^2$, donde, una vez obtenida la raíz de la ecuación lo que resta es construirla, ya que, como se verá, para Descartes la construcción de ésta, es necesaria para poder concluir la solución del problema.

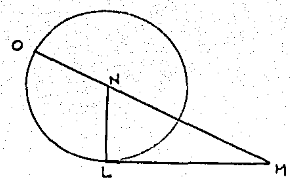
Ahora, lo que Descartes se propone es mostrar como se encuentran geométricamente, o, como se construyen las raíces o raíz de una ecuación cuadrática, esto es, como ya se mencionó, una vez que el problema geométrico es reducido a un problema algebraico y por lo tanto a la solución de ecuaciones cuadráticas, lo que falta es encontrar las raíces o raíz de la ecuación en términos geométricos, es decir, construirlas.

dice:

Proposición 7.

"...si tengo $z^2=az+b^2$,

[19] s.p.g. se tomó la raíz positiva, ya que, como se verá más adelante, cuando hay dos raices Descartes toma siempre la positiva.



construyo un triángulo rectángulo NML, donde el lado LM es igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado LN, igual a $a/2$, i.e., igual a la otra cantidad conocida que está multiplicando a z, que se supone la línea desconocida.

Ahora, prolongo MN la base* de este triángulo rectángulo hasta O, de tal forma que NO sea igual a NL; toda la línea OM es z, la línea requerida. Y ésta se expresa de la siguiente forma:

$$z=a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2}$$ "[20]

Demostración:

Tenemos que	$LM=b$,
	$LN=a/2$,
	$OM=z$,
pero,	$OM=ON+NM$,
y por construcción	$ON=a/2$
	$NM=\sqrt{NL^2+LM^2}$

[20] Descartes, Ibid., p. 13. * Descartes dice base MN, ya que así era nombrada comunmente en la época, la hipotenusa. Cfr. Descartes, nota 22, p. 13.

así, $NM=\sqrt{(1/4)a^2+b^2}$

por lo tanto, $z=a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2}$.

Veamos que esto se cumple algebraicamente, es decir, si tenemos $z^2-az+b^2=0$, entonces,

$$z=(a\pm\sqrt{a^2+4b^2})/2,$$

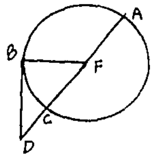
tomando a z con signo positivo tenemos que:

$$z=a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2}.$$

Por otro parte, comparando de nuevo a Descartes con Euclides encontramos que:

Proposición 8. (Euclides, libro III, prop. 36)

"Si un punto es tomado fuera de un círculo y a partir de el dos líneas rectas caen sobre el círculo, y si una de ellas corta al círculo y al otra lo toca, el rectángulo contenido por el todo de la línea recta que lo corta y la línea recta interceptada afuera por él (círculo), entre el punto y la circunferencia convexa, será igual al cuadrado sobre la tangente.



Sea D un punto tomado fuera del círculo ABC, y de D sean las dos rectas DCA y DB que caen en el círculo ABC; sea DCA la que corta al círculo ABC y sea DB la que lo toca.

Digo que el rectángulo contenido por AD y DC es igual al cuadrado en DB.

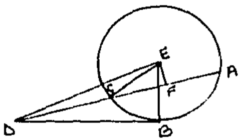
DCA o pasa por le centro o no pasa por el centro.

Primero dejemos que pase por le centro, y sea F el centro del círculo ABC; únase FB; por lo tanto el ángulo FBD es recto. [III.18]

Y como AC ha sido bisectada en F y CD es añadido a ella, el rectángulo AD,DC junto con el cuadrado en FC es igual al cuadrado en FD. [II.6]

Pero FC es igual a FB; por lo tanto el rectángulo en AD,DC junto con el cuadrado FB es igual al cuadrado FD. Y los cuadrado en FB,BD son iguales al cuadrado en FD. [I.47] Por lo tanto el rectángulo AD,DC junto con el cuadrado en FB es igual a los cuadrado en FB,BD.

Sea el cuadrado en FB sustraído de cada uno; por lo tanto el rectángulo AD,DC que resta es igual al cuadrado en la tangente DB.



Ahora, sea DCA que no pase por el centro del círculo ABC; sea E el centro y de E trácese EF perpendicular a AC; únanse EB, EC, ED. Entonces el ángulo EBD es recto. [III.18] Y como la línea recta EF que pasa por el centro corta a la línea recta AC que no pasa por el centro en ángulo recto, y también la bisecta; [III.3] por lo tanto AF es igual a FC.

Ahora, como la línea recta ha sido bisectada en el punto F, y se la añadió CD, el rectángulo contenido por AD,DC junto con el cuadrado en FC es igual al cuadrado en FD. [II.6]

Añádase el cuadrado FE a cada uno; por lo tanto el rectángulo AD,DC junto con los cuadrados en CF, FE es igual a los cuadrados en FD, FE. Pero el cuadrado en EC es igual a los cuadrados en CF, FE, por el ángulo recto EFC; [I.47] y el cuadrado en ED es igual a los cuadrados en DF, FE; por lo tanto el rectángulo AD,DC junto con el cuadrado en EC es igual al cuadrado en en ED. Y EC es igual a EB; por lo tanto el rectángulo en AD, DC junto con el cuadrado en EB es igual al cuadrado en ED. Pero los cuadrados en EB, BD son iguales al cuadrado en ED, por el ángulo recto EBD; [I.47] por lo tanto el rectángulo AD,DC junto con el cuadrado en EB es igual a los cuadrados en EB, BD.

Sustraer el cuadrado en EB de cada uno; por lo tanto el rectángulo en AD, DC que resta, es igual al cuadrado en DB. Q.E.D."[21]

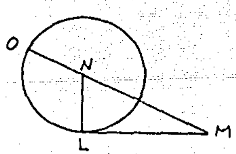
---

21 Euclides, Ibid., vol. 2, pp. 73-4.

Ahora bien,

Proposición 9.

Por la proposición 8 y la figura que Descartes propone tenemos que:



$$OM \cdot PM = LM^2,$$

dando los mismos valores que Descartes da a estas líneas, tenemos entonces que:

	$LM=b$
y si,	$OM=z$
como	$PM=OM-OP$
donde,	$OP=2ON=2LN=a$
entonces,	$PM=z-a$
y así,	$z(z-a)=b^2$
	$z^2=az+b^2$
donde,	$z=a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2}=OM.$

Descartes continúa con el siguiente ejemplo:

"Pero si tengo $y^2=-ay+b^2$, donde y es la cantidad de la cual se desea el valor, construyo el mismo triángulo rectángulo NLM, y sobre la base MN trazo

NP igual a NL y el resto PM el la raiz deseada. Así tenemos que:

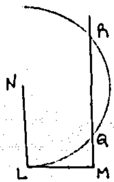
$$y=-a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2},$$

y de la misma manera, si tengo $x4=-ax^2+b^2$, PM será x^2 y tendremos que:

$$x=\sqrt{-a/2+\sqrt{(1/4)a^2+b^2}},$$

y así para otros casos.

Finalmente, si tenemos $z^2=az-b^2$, hago NL igual a $a/2$ y LM igual a b como antes; entonces en lugar de unir los puntos M y N, trazo MQR paralela a LN y con centro en N describo el círculo a través de L cortando MQR en los puntos Q y R; entonces z, la línea buscada es MQ o MR.



Para este caso puede ser expresada de dos formas:

$$z=a/2+\sqrt{(1/4)a^2-b^2}$$

y

$$z=a/2-\sqrt{(1/4)a^2-b^2}.$$

Y si el círculo descrito en N y pasando por L ni corta ni toca la línea MQR, la ecuación no tiene raíz, entonces decimos que la construcción del problema es imposible."[22]

Demostraremos estos dos últimos casos.

Por una parte tenemos que $z^2=-az+b^2$,

luego, $NM^2=NL^2+LM^2$, pero $NM=a/2+z$

$LM=b$

y $NL=a/2$ entonces,

$(a/2+z)^2=(a/2)^2+b^2$ así,

$z=-a/2+\ (1/4)a^2+b^2$.

Por otra parte, como ya vimos, la proposición 9 implica que OM PM=LM^2, pero $OM=a+z$

$PM=z$

$LM=b$ por lo tanto,

$(a+z)z=b^2$ así,

$z^2=-az+b^2$.

Ahora tenemos que $z^2=az-b^2$, hay que demostrar que

$$z=a/2\pm\sqrt{(1/4)a^2-b^2}.$$

Supongamos $MQ=z$. Tracemos una recta desde N hasta intersectar MQR en O (paralela a LM). O es el punto medio de QR (por construcción), luego MQ=OM-OQ, y

$OM=a/2$

$NQ=NL=a/2$

$NO=LM=b$,

así como $OQ^2=NQ^2-NO^2$ entonces,

$OQ=\sqrt{(1/4)a^2-b^2}$ así,

$MQ=a/2-\sqrt{(1/4)a^2-b^2}$.

---

[22] Descartes, Ibid., pp.14-7.

Ahora, si z=MR, análogamente tenemos que MR=OM+OR, así como OR=OQ (O punto medio) entonces;

$$MR=a/2+\sqrt{(1/4)a^2-b^2}.$$

Demostrando así que QM o RM serán las raíces buscadas.

Ahora, para el caso en que la recta que corta al círculo no pasa por el centro, la proposición 8 nos dice que: MR • MQ=LM^2, supongamos MR=z, MQ será $a-z$ y LM=b entonces,

$$z(a-z)=b^2 \qquad \text{por lo tanto}$$
$$z^2=az-b^2,$$

o si, QR=z, MR=$a-z$, así

$$z(a-z)=b^2$$
$$z^2=az-b^2.$$

Por lo que fácilmente podemos observar que si el círculo no toca,[23] ni corta a la línea MQR la ecuación $z^2=az-b^2$ no tiene raíces, más aún, ni siquiera se puede plantear la ecuación bajo estos términos, así pues, la construcción es imposible.

Con esto, Descartes termina de mostrar la herramienta necesaria por medio de la cual dará solución, a lo que nos parece, el problema central de su Geometría; resolver con su método el "problema de Pappus".

Concluye como sigue:

"Estas mismas raíces pueden ser encontradas por muchos otros métodos, he dado este muy simple para

23 En el caso en que tan solo la toca, el problema se reduce al anterior i.e. prop. 8.

mostrar que es posible construir cualquier problema de la geometría ordinaria haciendo no más que los poco que he explicado..."[24]

En este punto es importante hacer notar que existe en la geometría de Descartes la necesidad de construir las raíces de las ecuaciones en términos de la geometría griega, esto es, como segmentos de línea recta; esto implica, una diferencia conceptual radical con la concepción contemporánea, en donde la construcción de la raíz implica a sistemas numéricos como los reales o los complejos y todo el armazón teórico que los sustenta.

[24] Descartes, Ibid., p.17.

IV. EL PROBLEMA DE PAPPUS.

El problema.

Para Descartes la valía de su método se manifiesta por entero en la solución que encuentra al problema planteado por Pappus, problema que según dice éste, ni Euclides, ni Apolonio, ni nadie más, (ni el mismo Pappus) había podido resolver.

Este problema se refiere al "lugar geométrico", mismo que explica citando a Pappus.

> "Ese lugar de tres o cuatro líneas, a propósito del cual Apolonio se jacta y alaba por sus agragados, aunque debiera estar reconocido al primero que lo trató, es el siguiente: Si dadas las posiciones de tres rectas se trazan desde un mismo punto otras tres rectas que formen con ellas ángulos dados, y se da la relación entre el rectángulo formado por dos de estas trazadas, al cuadrado de la tercera; el punto se encontraría sobre un lugar sólido, dado en posición, es decir sobre una de las tres cónicas. Si es respecto a cuatro rectas dadas, que se trazan otras cuatro formando ángulos dados, y se da la

relación del rectángulo de dos de las distancias al de las otras dos, el punto se encontrará igualmente sobre una sección cónica. Si las rectas son solamente dos, está establecido que el lugar es plano; pero si hay más de cuatro, el lugar del punto no es ya de esos conocidos; es de esos que se llaman simplemente líneas (sin saber de antemano sobre su naturaleza o sus propiedades) y no se ha hecho la síntesis de ninguna de estas líneas ni demostrado su aplicación a esos lugares; ni aún respecto a la que parece la primera y la más indicada. He aquí como se proponen esos lugares: si de un punto se trazan a cinco rectas dadas, otras rectas que forman ángulos dados, y se da la relación entra el paralelepípedo rectángulo formado por tres de las distancias y el paralelepípedo rectángulo por las otras dos y por otra medida dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea.

Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las otras, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones... Sin embargo, poco tiempo antes de nosotros se ha acordado la libertad de hablar así, sin designar, empero, nada que no sea inteligible, diciendo: lo comprendido por tales rectas con respecto al cuadrado de tal recta, o lo comprendido por tales otras. Y es fácil, por medio de las relaciones compuestas, enunciar y demostrar en general las posiciones antes citadas y las que siguen. He aquí como:

Si de un punto se trazan sobre rectas dadas, otras rectas que formen ángulos dados y se da la relación compuesta de una de las trazadas a otra de ellas; la de un segundo par, la de un tercero, en fin la de la última a otra dada, si hay en total siete rectas; o bien la de las dos últimas, si hay ocho, el punto se encontrará sobre una línea dada.

Puede decirse lo mismo, cualquiera que sea el número de rectas, par o impar; pero como lo he dicho, para cualquiera de esos lugares que siguen al correspondiente a cuatro rectas, no hay una síntesis ya hecha que permita conocer la línea".[1]

El pasaje anterior nos plantea la necesidad de aclarar dos puntos para una mejor comprensión de este problema, a saber: qué se entiende por lugar geométrico (locus) en el pensamiento griego, y por otra parte, revisar el origen y el contexto de este problema con respecto a las cónicas de Apolonio.

La concepción griega de lugar gométrico o de teoremas de lugar se conoce sólo a partir de los escritos de Proclo, de Pappus y de Eutocio. Refiriéndose a la proposición I-35 de *Los Elementos*, Proclo dice:

[1] Descartes, Ibid., pp. 18-22.

"...llamo a estos teoremas, teoremas de lugar, en los cuales se encuentra que existe la misma propiedad sobre la totalidad de algún lugar, y llamo un lugar a la posición de una línea o superficie generada por una y la misma propiedad. Pues de los teoremas de lugar, algunos se construyen sobre líneas y otros sobre superficies. Y, como algunas líneas son planas y otras sólidas -son planas aquellas que se conciben simplemente en un plano y solidas aquellas cuyo origen se revela a partir de la sección de una figura sólida, como la hélice cilíndrica y las líneas cónicas- digo, más aún que de los teoremas de lugar sobre líneas, algunos generan un lugar plano y otros un lugar sólido".[2]

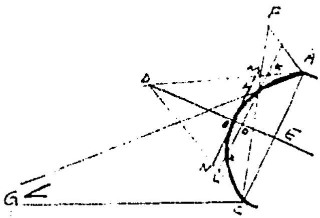
Esta clasificación de los lugares geométricos en planos y sólidos, coincide básicamente con las clasificaciones de Eutocio y de Pappus. Este último agregará los lugares lineales. Con esto tenemos de nuevo la clasificación de curvas de la cual ya hemos hablado.

Por otro lado, es en la proposición 54 del libro III de *Las cónicas* de Apolonio a partir de la cual se puede ver el origen del problema de Pappus (como el mismo dice)[3]; veamos: Proposición 10. (Apolonio, libro III, prop. 54)

"Si dos tangentes a la sección de un cono o a la circunferencia de un círculo se cortan y por los

[2] Citado por Heath, Ibid., vol.I, p. 329.
[3] Ver, Descartes, Ibid., p. 17.

puntos de contacto se trazan paralelas a las tangentes, y se trazan líneas rectas que cortan a las paralelas, desde los puntos de contacto a un mismo punto sobre la línea de la sección, entonces el rectángulo formado por las líneas rectas cortadas por el cuadrado sobre la línea recta que une a los puntos de contacto tiene una razón compuesta de la razón que el segmento interior de la línea que une al punto donde se encuentran las tangentes y el punto medio de la línea recta que une a los puntos de contacto, tiene en cuadrado con el residuo, y de la razón que tiene el rectángulo contenido por las tangentes con la cuarta parte del cuadrado sobre la línea recta que une a los puntos de contacto.



Sea ABC la sección de un cono o la circunferencia de un círculo y sean las tangentes AD y CD; únase AC y biséctese en E y únase DBE; trácense AF desde A paralela a CD y CG desde C paralela a AD; sea H algún punto de la sección, únanse AH y CH y prolónguense hasta G y F respectivamente.

Digo que:

rect.AF,CG:c.AC comp.[4] c.EB:c.BD,rect.AD,DC

cuatro veces c.AC o rect.AE,EC.

Trácese desde H paralela a AC, KHOXL, y desde B, MBN paralela a AC; entonces es evidente que MN es tangente. [A.II-29,5,6] y como

AE=EC

también MB=BN

y KO=OL

y OH=OX [A.II-7]

y KH=XL

y como MB y MA son tangentes y KHL fue trazada paralela a MB,

c.AM:c.MB::c.AK:rect.XK,KH [A.III-16]

o c.AM:rect.MB,BN::c.AK:rect.LH,HK

y rect.NC,AM:c.AM::rect.LC,AK:c.AK;

[E.VI-2,V-18]

por lo tanto es igual a

rect.NC,AM:rect.MB,BN::rect.LC,AK:rect.LH,HK

pero

rect.LC,AK:rect.LH,HK comp. LC:LH,AK:HK

o rect.LC,AK:rect.LH,HK comp. FA:AC,GC:CA

lo cual es lo mismo que

rect.GC,FA:c.CA.

Por lo tanto

---

[4] Por comp. entiéndase composición de razones; ver E.VI.23. Esto es equivalente a la "multiplicación" de razones.

rect.NC,AM:rect.MB,BN::rect.GC,FA:c.CA

pero tomando al rectángulo ND,DM como media,

rect.NC,AM:rect.MB,BNcomp.

rect.NC,AM:rect.ND,DM,rect.ND,DM:rect.MB,BN.

Por lo tanto

rect.GC,FA:c.CA comp.

rect.NC,AM:rect.ND,DM,rect.ND,DM:rect.MB,BN

pero

rect.NC,AM:rect.ND,DM::c.EB:c.BD,

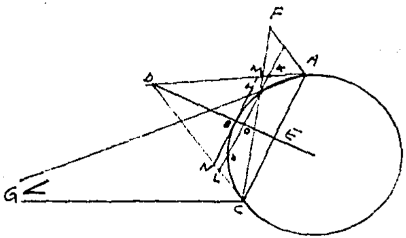
y rect.ND,DM:rect.NB,BM::rect.CD,DA:rect.CE,EA,

por lo tanto

rect.GC,FA:c.CA comp.

c.BE:c.BD,rect.CD,DA:rect.CE;EA."[5]

Resulta evidente que es necesario explicar en detalle la demostración anterior, veamos:



Sea ABC la sección de un cono o la circunferencia de un círculo y AD, CD tangentes, únase AC y bisectese en E, únase

[5] Apolonio de Pérgamo, Conics, en Great Books, Encyclopaedia Britanica., vol. 11, pp. 793-6.

DBE y trácese AF paralela a CD, y CG paralela a AD, tómese un punto H sobre la sección y únase AHG y CHF.

P.D. $FA\cdot GC:AC^2::EB^2(CD\cdot DA):BD^2(CE\cdot EA)$ i.e.

$$(FA\cdot GC)/AC^2=EB^2(CD\cdot DA)/BD^2(CE\cdot EA).$$

Trácese KHOXL paralela a AC, y MBN paralela a AC (MN es tangente)

como AE=EC, MB=BN, KO=OL, [A. II-7,9] y KH=XL, y como MB y MA son tangentes y KHL es paralela a MB entonces,

$$AM^2/MB^2=AK^2/XK\cdot KH \qquad [A.\ III\text{-}16]$$

o $\quad AM^2/(MB\cdot BN)=AK^2/(LH\cdot HK)$

y $\quad (NC\cdot AM)/AM^2=(LC\cdot AK)/AK^2 \qquad [E.\ VI\text{-}2,\ V\text{-}18d]$

por lo tanto

$$(NC\cdot AM)/(MB\cdot BN)=(LC\cdot AK)/(LH\cdot HK) \qquad (1)$$

ya que, tenemos que

$$AM^2=AK^2(MB\cdot BN)/(LH\cdot HK)$$

y $\quad AM^2=AK^2(NC\cdot AM)/(LC\cdot AK)$

así,

$$AK^2(MB\cdot BN)/(LH\cdot HK)=AK^2(NC\cdot AM)/(LC\cdot AK)$$

por lo tanto

$$(LC\cdot AK)/(LH\cdot HK)=(NC\cdot AM)/(MB\cdot BN),$$

pero

$$(LC\cdot AK)/(LH\cdot HK)=(FA\cdot GC)/CA^2 \qquad (2)$$

entonces por (1) y (2), tenemos que

$$(NC\cdot AM)/(MB\cdot BN)=(CG\cdot FA)/CA^2 \qquad (3)$$

pero tomando al rectángulo ND,DM como media proporcional entre lo que serían el rectángulo NC,AM y el rectángulo MB,BN; esto es,

$$(NC\cdot AM)/(ND\cdot DM)=(ND\cdot DM)/(MB\cdot BN)$$

y componiendo, tenemos que

$$(NC\cdot AM)/(MB\cdot BN)=(NC\cdot AM)(ND\cdot DM)/(ND\cdot DM)(MB\cdot BN) \qquad (4)$$

luego, por (3) y (4) tenemos que

$$(GC\cdot FA)/AC^2=(NC\cdot AM)(ND\cdot DM)/(ND\cdot DM)(MB\cdot BN),$$

pero componiendo

$$NC/CD=EB/BD \text{ con } AM/DM=EB/BD$$

así como

$$ND/NB=CD/CE \text{ con } DM/BM=DA/EA$$

tenemos respectivamente que

$$(NC\cdot AM)/(ND\cdot DM)=EB^2/BD^2$$

y $$(ND\cdot DM)/(NB\cdot BM)=(CD\cdot DA)/(CE\cdot EA)$$

por lo tanto

$$(GC\cdot FA)/AC^2=EB^2(CD\cdot DA)/BD^2(CE\cdot EA).$$

Es claro que este teorema nos conduce a pensar en una sección cónica o en un círculo como un lugar geométrico con respecto a tres líneas rectas, esto es, éstas tienen la propiedad de ser los lugares de los puntos cuya distancia a tres líneas rectas dadas, son tales que el cuadrado de una de las distancias está en una razón constante con el rectángulo contenido por las otras dos distancias.

Esta misma idea puede usarse para determinar la propiedad que distingue a las cónicas y al círculo como el lugar geométrico referido a cuatro líneas rectas dadas.[6]

---

[6] Una construcción detallada de ésto puede verse en Apolonio <u>Ibid.</u>, Apéndice pp. 799-804.

Ahora nos resulta claro ver que el problema planteado por Pappus (y desde luego por Descartes) es simplemente una generalización recíproca de lo anterior.

Solución de Descartes al "problema de Pappus".

Como ya se mencionó, es en los libros I y II de *La Geometría* donde aparece el "problema de Pappus". Lo que ahora nos ocupa es mostrar la solución analítica que Descartes ofrece a éste, así como, desarrollar los detalles que deja fuera de su demostración. Para esto, lo citaremos extensamente, escribiendo entre paréntesis y con itálicas la explicación al texto original.

Es en el libro I donde Descartes plantea la solución al problema -en el caso de que sean tres o cuatro líneas rectas dadas- desde una perspectiva algebraica, esto es, haciendo uso de su método (operaciones aritméticas con segmentos de línea recta). Dejemos que él nos diga como:

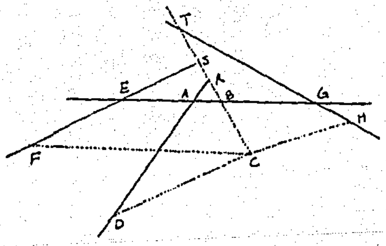
> "He descubierto que si la cuestión es propuesta para solo tres, cuatro o cinco líneas, el punto requerido puede ser encontrado por geometría elemental, esto es, usando solo regla y compás, y aplicando los principios que ya he explicado..."[7]

Descartes continúa como sigue, proponiendo la siguiente figura:

---

[7] Descartes, Ibid., p. 25.

"



Sean AB, AD, EF, GH,... cualquier número de líneas rectas dadas en posición, y sea C el punto que se requiere encontrar, del cual las líneas rectas CB, CD, CF, CH,... puedan ser trazadas formando los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG,... respectivamente con las líneas dadas, y de tal forma que el producto de algunas de estas sea igual al producto del resto, o por lo menos que estos dos productos estén en una razón dada; esta condición no hace más difícil el problema.

Primero supongo el problema resuelto, y como tantas líneas confunden, consideraré a una de las líneas dadas junto con otra de las trazadas (como por ejemplo AB y CB) como las principales, con respecto a las cuales trataré de referir a todas las demás. Llámese al segmento de línea AB, el cual esta entre los puntos A y B, x y llámese a BC y. Prolónguense las otras líneas hasta encontrarse con estas dos, prolongadas también, si es necesario. (siempre que ninguna sea paralela a las líneas principales) Entonces, en la figura se puede ver que las líneas dadas cortan a AB en los puntos A, E, G y cortan a BC en los puntos R, S, T.

Ahora, como todos los ángulos del triángulo ARB son conocidos, la proporción que hay entre los lados AB y BR esta dada.

(Ya que como AB y AD fueran dadas en posición, entonces conocemos el ángulo DAB, así el ángulo BAR=180°-DAB, luego, el ángulo CBA fue dado, entonces el ángulo ABR=180°-CBA y por lo tanto el ángulo ARB=180°-(BAR+ABR). Esta justificación esta dada en términos modernos, pero satisface la proposición 32 del libro I de "Los Elementos".[8] *Ahora, conocidos los ángulos del triángulo, la razón entre los senos de los ángulos opuestos es conocida.)*

Si tenemos que AB:BR=z:b, y como AB=x, tenemos entonces que:

$$RB=bx/z;$$

(esto es, AB/BR=z/b, entonces BR=bx/z, notemos que esto solo es posible a partir de definir las operaciones aritméticas para segmentos de línea.)

y ya que B está entre C y R, tenemos entonces que:

$$CR=y+bx/z,$$

porque si R está entre C y B , CR será igual a ybx/z, y si C está entre B y R, CR será $-y+bx/z$.

---

[8] Ver Euclides, Ibid., vol.1 p. 316.

(Esto es, ya que $CR=CB+BR$, si B está entre C y R; $CR=CB-BR$, si R está entre C y B; y por último $CR=BR-CB$, si C está entre B y A. Notemos de nuevo el uso de las operaciones aritméticas.)

Ahora, los tres ángulos del triángulo DRC, son conocidos, y por lo tanto la proporción que hay entre los lados CR y CD.

(Como el ángulo CDA está dado, el ángulo DRC=ARB, así el ángulo RCD puede conocerse. Así como también, la proporción entre los lados. Justificación antes dada. Ver supra.)

Llamemos a esta razón $z:c$, y como $CR=y+bx/z$, tenemos que:

$$CD=(cy/z)+(cbx/zz).$$

(Esto es, $CR/CD=z/c$, así $CD=cCR/z$ pero $CR=y+bx/z$ entonces, $CD=c(y+bx/z)/z=(cy/z)+(cbx/z^2)$; notemos que Descartes denota por zz a z^2, así como zzz por z^3, etc.)

Después, como las líneas AB, AD y EF están dadas en posición, la distancia de A a E es conocida. Si llamamos a esta distancia k, entonces EB es igual a $k+x$, pero ésta será $k-x$ si el punto B está entre E y A; y será $-k+x$, si E está entre A y B.

(ya que, $EB=AE+AB$, si A está entre E y B;

$EB=AE-AB$, si B está entre A y E;

$EB=-AE+AB$, si E está entre A y B. Donde Descartes toma siempre el primer caso para los fines de su demostración.)

Ahora; los ángulos del triángulo ESB son conocidos, la proporción entre BE y BS es conocida. *(ver supra)* y si la llamamos $z:d$, entonces tenemos que

$$BS=(dk+dx)/z$$

y $$CS=(zy+dk+dx)/z,$$

ó $$CS=(zy-dk-dx)/z,$$ si el punto S esta entre B y C;

ó $$CS=(-zy+dk+dx)/z,$$ si C está entre B y S.

(Esto es, como $BE/BS=z/d$ luego $BS=dBE/z$, pero $BE=k+x$ entonces, $BS=d(k+x)/z=(dk+dx)/z$; y como

$CS=CB+BS$, si B está entre C y S;

$CS=BS-BC$, si C está entre B y S;

$CS=BC-BS$, si S está entre B y C;

entonces,

$$CS=y+(dk+dx)/z=(zy+dk+dx)/z \quad (CB=y).$$

A través de la obra de Descartes uno observa que el sentido de los segmentos: esto es, como se conoce ahora: $AB=-BA$, aún no es relevante para éste, el toma indiscriminadamente el sentido de los segmentos.)

Los ángulos del triángulo FSC son conocidos y en consecuencia la proporción de CS a CF, llamémosla $z:e$. Por lo tanto, CF será $(ezy+dek+dex)/zz$.

(El ángulo CFS está dado, así el ángulo $FSC=ESB$, por lo tanto el ángulo SCF se conoce, ver supra; y como $CS/CF=z/e$ entonces,

$$CF=eCS/z$$

pero $CS=(yz+dk+dx)/z$

así $CF=(eyz+edk+edx)/z^2$.)

También AG al que llamaremos *l* está dada, y BG será $l-x$ y a causa del triángulo BGT la proporción de BG a BT es conocida, llamemosla $z:f$, así

BT será $(fl-fx)/z$

y $CT=(zy+fl-fx)/z$.

En el triángulo TCH la proporción de CT a CH está dada, llamemosla $z:g$, así

$CH=(gzy+fge-fgx)/z$."[9]

(De esto último tenemos que, AB y GH dadas en posición, luego AG=l. Por otro lado,

$BG=AG-AB$, *si B está entre A y G;*

$BG=AB+AG$, *si A está entre B y G;*

$BG=AB-AG$, *si G esta entre A y B;*

así $BG=l-x$.

Ahora, los ángulos del triángulo BGT y los del triángulo TCH estan dados, i.e., el ángulo CBA está dado, así conocemos el ángulo GBT; AB y GH dadas en posición, entonces se conoce el ángulo TGB y por tanto el ángulo BTG. Análogamente para el triángulo TCH tenemos que el ángulo CHT está dado, entonces el ángulo HTC=BTG por lo tanto conocemos el ángulo HCT. Así conocemos la proporción entre los lados (ver supra). Esto es, $BG/BT=z/F$ *y* $CT/CH=z/g$; *luego*

$BT=fBG/z$, *pero* $BG=l-x$ *entonces,*

$BT=(fl-fx)/z$.

---

[9] Descartes, Ibid., pp. 25-30.

Por otro lado tenemos que:

$CT=BC+BT$, *si* B *está entre* C *y* T*;*

$CT=BT-BC$, *si* C *está entre* B *y* T*;*

$CT=BC-BT$, *si* T *está entre* C *y* B*;*

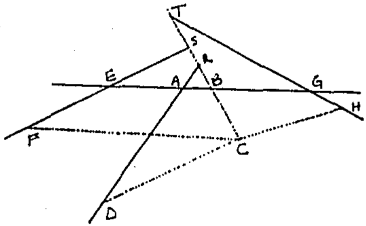
así $CT=y+(fl-fx)/z=(yz+fl+fx)/z \quad (BC=y)$.

Y como $CH=gCT/z$

entonces, $CH=(gyz+gfl-gfx)/z^2$.)

Una vez que Descartes plantea lo anterior, esto es, determina a las líneas CB, CD, CF y CH en términos de x y de y, continúa con la demostración del problema hasta el libro II como sigue:

"



Consideremos de nuevo las cuatro líneas dadas, AB, AD, EF y GH, y dejemos que el lugar geométrico generado por el punto C, sea aquel que satisface que, si las cuatro líneas CB, CD, CF y CH son trazadas a través de él haciendo ángulos dados con las líneas dadas, el producto de CB y CF es igual al producto de CD y CH. Esto es equivalente a decir que si:

$$CB=y,$$

$$CD=(czy+cbx)/zz,$$

$$CF=(ezy+dek+dex)/zz$$

y $$CH=(gzy+fgl-fgx)/zz\ ,$$

la ecuación esta dada como sigue:

$$yy=\frac{(cfglz-dekz^2)y-(dezz+fcgz-bcgz)xy+bcfglx+bcfgxx}{ezzz-cgzz}$$

Suponiendo ez mayor que *cg*; de otra manera los signos más y menos tendrían que ser todos cambiados.

(Esto es, ya que, como se supone CB CF=CD CH entonces, sustituyendo tenemos que:

$$y(dzy+dek+dex)/z^2=((czy+bcx)/z^2)((gzy+fgl-fgx)/z^2)$$

$$ez^3y^2+dekyz^2+dexyz^2=(czy+bcx)(gzy+fgl-fgx)$$

así

$$y^2=\frac{(cfglz-dekz^2)y+(bcgz-dez^2-cfgz)xy+bcfglx-bcfgx^2}{ez^3-cgz^2}$$

Ahora, si ez>cg, entonces $ez^3-cgz^2>0$*, i.e. es positivo, su raiz cuadrada es real. Esto permitirá a Descartes no enfrentarse con raices negativas.)*

Si *y* es cero o menor que cero en esta ecuación, y puesto que el punto C está dentro del ángulo DAG, se tendrá que suponer que C está dentro de uno de los siguientes ángulos: en el ángulo DAE, ó en el ángulo EAR ó en el ángulo RAG, y los signos deberán ser cambiados para llegar a este resultado. Y si para cada una de estas cuatro posiciones *y* es igual a cero, el problema será imposible de resolver.

(Esto es, de la ecuación antes obtenida tendriamos para el caso de que y=o en cualquier posición que:

$$\frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2} = 0 \;, \quad bcfg\,lx = bcfg\,x^2 \;\; \text{entonces} \;\; x = l$$

Lo que no nos permite hablar de una ecuación de dos variables, esto es, plantear la solución del problema geométrico en términos algebraicos, donde habría que dar solución a una ecuación de segundo grado con dos variables. Ahora, en el caso de $y<0$ el cambio de signos resulta evidente.)

Supongamos la solución posible, y para abreviar el trabajo escribamos $2m$ en lugar de $\dfrac{cflgz - clekz^2}{ez^3 - cgz^2}$

$2n/x$ en lugar de $\dfrac{clez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$

y así tenemos entonces que:

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$$

donde la raíz será:

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}$$

(Esto es, tomando solo la raíz positiva tenemos que:

$$y = \left(2\left(m - \frac{nx}{z}\right) + \sqrt{4\left(m - \frac{nx}{z}\right)^2 + 4(bcfglx - bcfgx^2)/(ez^3 - cgz^2)}\right)/2$$

así,

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfgl - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}} \;.)$$

De nuevo, para abreviar hagamos

$$-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2} \qquad \text{igual a } o,$$

y $\quad \dfrac{n^2}{z^2} - \dfrac{bcfg}{ez^3 - cgz^2} \qquad$ igual a p/m;

ya que todas estas cantidades son conocidas podemos llamarlas como se quiera.

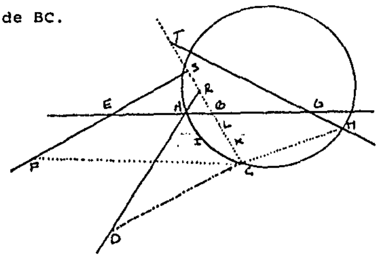
Entonces tenemos que:

$$y = m - nx/z + \sqrt{m^2 + ox + px^2/m} \;.$$

Esto nos da la longitud de la línea BC, dejando a AB o x indeterminada. Ya que el problema esta propuesto para tres o cuatro líneas, es obvio que siempre se puede tener tales términos, a pesar de que algunos de estos términos sean nulos y los signos + y - puedan ser variados."[10]

Hasta aquí lo que ha hecho Descartes es obtener BC en términos algebraicos; lo que procede es la construcción geométrica de BC.

"



Después de esto, Trazo KI igual y paralela a AB, de tal forma que corte a BC en la segmento BK igual a m, ya que la expresión para BC contiene $+m$; si esta fuera $-m$, habría que trazar IK del otro lado de AB, mientras que si m fuera cero, no se traza IK. Después trazo IL de tal forma que $IK:KL::z:n$, es decir, como $IK=x$, KL es igual a nx/z.

(Esto es, $IK/KL=z/n$ entonces, $KL=IKn/z=nx/z$.)

---

[10] Descartes, <u>Ibid.</u>, pp. 60-4.

De la misma manera conozco la razón de KL a IL, que puedo llamar $n:a$, así si KL es igual a nx/z, IL será igual a ax/z.

(Esto es, $KL/IL=n/a$ *entonces,* $IL=KLa/n=ax/z$*.)*

Tomo el punto K entre L y C ya que la ecuación contiene $-nx/z$; si este fuera $+nx/z$, tendría que tomar a L entre K y C, y si nx/z fuera cero, no trazaría IL.

Hecho esto, la línea LC queda determinada por los términos que restan de la ecuación, esto es,

$$LC=\sqrt{m^2+ox-px^2/m}.$$

(Veamos, en la figura, $BC=BL+LC$*, pero* $BL=BK-KL$*;* $BK=m$ *y* $KL=nx/z$ *entonces* $BL=m-nx/z$*,*

así, $$BC=m-nx/z+LC,$$

comparando con la ecuación,

$$BC=m-nx/z+\sqrt{m^2+ox-px^2/m},$$

LC tendrá que ser $\sqrt{m^2+ox-px^2/m}$*.)*

Es claro que si LC fuera cero, el punto C estaría sobre la línea recta IL, y si éste fuera un cuadrado perfecto, es decir, si m^2 y px^2/m fueran ambos + y o^2 fuera igual a $4pm$, o si m^2 y ox, o ox y px^2/m, fueran cero, entonces el punto C, estará sobre otra línea recta, la cual, su posición puede ser tan fácilmente determinada como en el caso de IL.

(Esto es, por casos:

i) si m^2 *y* px^2/m *tienen igual signo (+), y* $o^2=4pm$*; entonces,*

$$LC=\sqrt{m^2+2\ \ pm\ \ +px^2/m},$$
$$=\sqrt{(m+\sqrt{(p/m)}x)^2},$$
$$=m+\sqrt{(p/m)},$$

así, $BC=m-nx/z+\sqrt{(p/m)x+m}=2m+(\sqrt{p/m}-n/z)x$

i.e. $BC=2BR+(\sqrt{p/m}-n/z)AB.$

ii) si m^2=ox=o entonces,

$$LC=\sqrt{px^2/m},$$

así, $BC=m+nx/z+\sqrt{p/m}\,x$

$$=m+(\sqrt{p/m}-n/z)x$$

i.e. $BC=BK+(\sqrt{p/m}-n/z)AB.$

iii) si ox=px^2/m=o entonces,

$$Lc=\sqrt{m^2},$$

así, $BC=m-nx/z+m=2m+nx/z$

$$BC=2BK+(n/z)AB.$$

En cada caso la ecuación es lineal, así pues, será la ecuación de una recta. Más adelante hablaremos de la identificación que hace Descartes, entre ecuaciones y su representación geométrica.)

Si ninguno de estos casos ocurre, el punto C siempre está en una de las tres secciones cónicas, o en un círculo cuyo diámetro estará sobre la línea IL, y con la línea LC aplicada en orden a su diámetro *(esto es, LC es una ordenada con relación a su diámetro)*, o por lo contrario, LC paralela al diámetro e IL aplicada en orden *(en este caso IL es la ordenada)*. En particular, si el término px^2/m es cero, la sección cónica es una parábola; *(si $px^2/m=0$,* *tenemos que:* $LC=\sqrt{m^2+ox}$ *así,* $BC=m-nx/z+\sqrt{m^2+Ox}$*.)* si está precedido por un signo positivo, es una hipérbola; y finalmente, si está precedido por un signo negativo, es una elipse. Un caso excepcional ocurre cuando a^2m es igual a pz^2 y el triángulo ILC es rectángulo, en cuyo caso tenemos un círculo, en vez de una elipse."[11]

Analizaremos con algún detalle y refiriéndonos a las fuentes explicitas de Descartes, el caso de la parábola.

Este continúa como sigue:

"Si la sección cónica es una parábola, su lado recto (latus rectum) es igual a oz/a, y su eje siempre yace sobre la línea IL.

Para encontrar el vértice N, hagamos IN igual a am^2/oz, tal que el punto I este siempre entre L y N si m^2 es positiva y ox positiva; y L esté entre I y N si m^2 es negativa y ox es positiva. Pero es imposible que m^2 pueda ser negativo cuando los términos están ordenados como antes. Finalmente, si m^2 es igual a cero, los puntos N e I deben coincidir. Es fácil determinar esta parábola, con el primer problema del libro de Apolonio."[12]

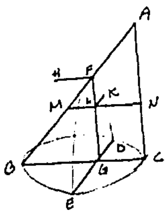
Veamos la siguiente demostración. Apolonio define a la parábola como sigue:

"Proposición 11, libro I.

---

[11] Descartes, Ibid., pp. 64-7.
[12] Descartes, Ibid., p. 68.

Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y cortado también por otro plano que corta la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si más aún, el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta dibujada de la sección del cono a su diámetro paralela a la sección común del plano cortante y de la base del cono, será igual en cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ella sobre el diámetro que empieza en el vértice de la sección y por otra línea recta que tiene la razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección, como la del cuadrado sobre la base del triángulo axial al rectángulo contenido por los dos lados sobrantes del triángulo. Sea esta sección llamada una parábola.



Sea el punto A el vértice de un cono y su base el círculo BC. Córtese el cono con un plano a través de su eje, y sea esta sección el triángulo ABC [A.I.3]. Córtese de nuevo al cono con un plano que corte su base en la línea recta DE perpendicular a la línea recta BC, y sea esta sección en la superficie del cono la línea DFE, sea el diámetro de esta sección FG [A.I.7, y def.4] paralelo al lado AC del triángulo axial. Trácese la línea recta FH desde el punto F perpendicular a la línea recta FG, de tal forma que

c.BC:rect.BA,AC::FH:FA.

Tómese al azar el punto K de la sección, a través de K trácese la línea recta KL paralela a la línea recta DE.

Digo que

c.KL=rect.HF,FL.

Trácese a través de L la línea recta MN paralela a la línea resta BC. Y como la línea recta DE es paralela a la línea recta KL, tenemos que el plano formado por KL y MN es paralelo al plano formado por BC y DE [E.XI.15], esto es, a la base del cono. Por lo tanto el plano formado por KL y MN es un círculo cuyo diámetro es MN [A.I-4]. KL es perpendicular a MN, ya que DE es perpendicular a BC [E.XI.10] por lo tanto

rect.ML,LN=c.KL [E.III.31; VI.8, porisma]

y como c.BC:rect.BA,AC::HF:FA

y c.BC:rect.BA,ACcomp.BC:CA,BC:BA [E.VI.23]

por lo tanto

HF:FAcomp.BC:CA,BC:BA

pero BC:CA::MN:NA::ML:LF [E.VI.4]

y BC:BA::MN:NA::LM:MF::NL:FA [E.VI.2]

por lo tanto

HF:FAcomp.ML:LF,NL:FA

pero rect.ML,LN:rect.LF,FAcomp.ML:LF,LN:FA

[E.VI.23]

por lo tanto

HF:FA::rect.ML,LN:rect.LF,FA

pero, tomando a la línea recta FL como altura común,

HF:FA::rect.HF,FL:rect.LF,FA [E.VI.1]

por lo tanto

rect.ML,LN:rect.LF,FA::rect.HF,FL:rect.LF,FA

[E.V.11]

por lo tanto

rect.ML,LN=rect.HF,FL [E.V.9]

pero rect.ML,LN=c.KL

por lo tanto también

c.KL=HF,FL.

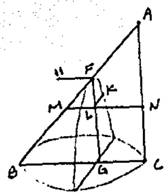
Sea esta sección llamada una parábola, y sea HF la línea recta a la cual las líneas recta dibujadas en orden al diámetro FG, están aplicadas en cuadrado, y se llama también el lado recto."[13]

Veamos ahora, una explicación detallada de la demostración de esta proposición.

---

[13] Apolonio de Pérgamo, Conics, libro I, en Great Books, Encyclopaedia Britanica, Vol. 11, pp. 615-16.

Dada la siguiente figura:



supongamos que $BC^2:(BA)(AC)::FH:FA$, i.e.,

$$BC^2/(BA)(AC)=FH/FA,$$

hay que demostrar que:

$$KL^2=(FH)(FL).$$

Tenemos que,

$$(ML)(LN)=KL^2, \qquad [E.III.31;\ VI.8,\ porisma]$$

esto es, como MNK es un círculo, trácese MK y KN, luego el ángulo MKN es recto, así, KL es la media proporcional entre ML y LN, i.e., $ML/KL=KL/LN$, por lo tanto $(ML)(LN)=KL^2$.

Ahora, tenemos que,

$$BC/CA=MN/NA=ML/LF \qquad (1) \qquad [E.V.4]$$

así como también,

$$BC/BA=MN/MA=LM/MF=NL/FA \qquad (2) \qquad [E.VI.2]$$

componiendo[14] [E.VI.23] estas dos igualdades [(1), (2)] tenemos que

$$BC^2/(CA)(BA)=MN^2/(NA)(MA)=(ML)(NL)/(LF)(FA)$$

por lo tanto

$$HF/FA=(ML)(NL)/(LF)(FA).$$

Ahora, sabemos que,

$$HF/FA=(HF)(FL)/(LF)(FA) \qquad [E.VI.1]$$

esto es, tomando a FL como altura común, por lo tanto

$$(ML)(LN)/(LF)(FA)=(HF)(FL)/(LF)(FA) \qquad [E.V.11]$$

por lo tanto

$$(ML)(LN)=(HF)(FL) \qquad [E.V.9]$$

pero $(ML)(LN)=KL^2$

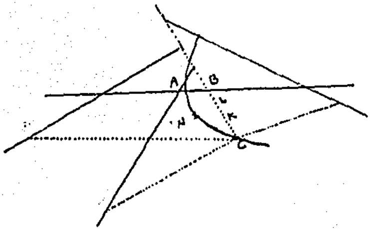
por lo tanto $KL^2=(HF)(FL)$.

Para una mayor claridad, según una interpretación contemporánea, esta igualdad puede interpretarse como la ecuación canónica de la parábola, esto es, KL sería la ordenada, FL la abscisa y HF el parámetro, así la igualdad anterior puede escribirse como la siguiente ecuación:

$$y^2=px.$$

Ahora, retomando la demostración a la proposición de Descartes tenemos que, de la figura:

14 Ver supra, nota 4, p. 57.



y por la proposición anterior, la ecuación de la parábola será:

$$LC^2=LNp, \qquad (1)$$

con p el lado recto.

Así, tenemos que, por un lado

$$LN=IL+IN,$$

sea $IN=Z$ y como $IL=ax/z$, entonces

$$LN=ax/z+Z.$$

Por otro lado, de la ecuación

$$y=m-nx/z+\sqrt{m^2+ox}$$

donde $\qquad LC=\sqrt{m^2+ox}$

tenemos que $\qquad LC=y-m+nx/z,$

por lo tanto, sustituyendo en (1)

$$(y-m+nx/z)^2=(ax/z+Z)p,$$

pero también, $\quad (y-m+nx/z)^2=m2+ox,$

por lo tanto $\quad axp/z+Zp=m^2+ox,$

igualando término a término, tenemos entonces que

$$ap/z=o \qquad y \qquad Zp=m^2,$$

de donde

$$p=oz/a \qquad y \qquad Z=am^2/oz.$$

Por lo tanto el lado recto IN será am^2/oz.[15]

Es decir, la ecuación cartesiana es equivalente a la ecuación obtenida desde la perspectiva de Apolonio; lo que muestra la certeza de la afirmación de Descartes.

De manera similar, éste propone construir al círculo, a la hipérbola o a la elipse para comprobar que los distintos casos de la ecuación los representan.

Lo anterior, es, para Descartes, suficiente para afirmar lo siguiente:

> "Puesto que todas las ecuaciones de un grado no mayor que el segundo se incluyen en la discusión que ha sido dada, no solo se resuelve completamente el problema de los antiguos relativo a tres o cuatro líneas, si no también la totalidad del problema de lo que ellos llaman la composición de lugares sólidos..., pues la solución de cualquiera de estos problemas de lugar no es más que la de encontrar un punto para cuya completa determinación falta una condición, siendo las otras condiciones tales que todos los puntos de una sola línea la satisfagan.... En cada caso puede obtenerse una ecuación que contenga a dos cantidades desconocidas y enteramente análoga a aquellas que se han encontrado antes.
> ...He mostrado, más aún que lo que he llamado la primera clase (*se verá más adelante*) de curvas no contiene a otras además de el círculo, la parábola,

[15] Ver Descartes, Ibid., p. 68, nota 112.

la hipérbola y la elipse. Esto es lo que me propuse probar."[16]

Hay que hacer notar que en el pasaje anterior aparecen las siguientes ideas:

I. Es posible definir un lugar geométrico a partir de una ecuación. (Utilizando para todo fin práctico lo que son unos ejes coordenados)

II. Toda ecuación de segundo grado tiene como lugar geométrico una sección cónica o un círculo.

Aunque estas no están demostradas desde una perspectiva contemporánea, es claro que para Descartes su validez general no puede ser puesta en duda.[17]

Solución analítica contemporánea del problema.

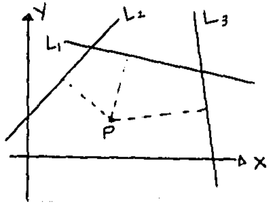
Es interesante intentar la solución del problema planteado por Pappus desde la perspectiva de la geometría analítica contemporánea (por decirlo así, se trata de cerrar un círculo) teniendo siempre en cuenta que el origen es el planteamiento que acaba de hacerse. En lo que sigue se hace uso de resultados diversos de la geometría analítica tal como pueden encontrarse en cualquier libro de texto actual.

---

[16] Descartes, Ibid. pp. 79-80.

[17] Newton ofrece una solución estrictamente geométrica muy notable al problema del lugar geométrico de tres o cuatro líneas. Esta solución aparece como el corolario II del lema XIX del libro I, sección V de los Principios matemáticos de la filosofía natural. p. 226-27.

Se resuelve en primer lugar el caso particular en que se tienen tres líneas rectas dadas.



Sean

$L_1 = A_1x+B_1y+C_1=0$

$L_2 = A_2x+B_2y+C_2=0$

$L_3 = A_3x+B_3y+C_3=0$

tres rectas dadas y sea $P=(x_1,y_1)$ un punto del plano que satisface que $d(P,L_1)^2 = d(P,L_2)d(P,L_3)$ (1) donde $d(P,L)$ es la distancia de un punto P del plano a una recta L; y es igual a:

$$d(P,L) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Hay que demostrar que el lugar geométrico de los puntos que satisfacen lo anterior es una cónica, esto es, que (1) es una ecuación cuadrática.

Demostración:

Sabemos que

$$d(P,L_1) = \frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

$$d(P,L_2) = \frac{|A_2x_1+B_2y_1+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

y $d(P, L_3) = \frac{|A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3|}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}}$

luego, sustituyendo en (1), tenemos que

$$\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1|^2}{(\sqrt{A_1^2+B_1^2})^2} = \left(\frac{|A_2x_1+B_2y_1+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)\left(\frac{|A_3x_1+B_3y_1+C_3|}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}}\right)$$

Ahora, sin perdida de generalidad tomaremos el caso en que todos y cada uno de los valores absolutos sea positivo, esto es:

$$\frac{(A_1x_1+B_1y_1+C_1)^2}{A_1^2+B_1^2} = \frac{(A_2x_1+B_2y_1+C_2)(A_3x_1+B_3y_1+C_3)}{(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)}$$

Hagamos $r=A_1^2+B_1^2$ y $s^2=(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)$ y desarrollando obtenemos que:

$(sA_1^2-rA_2A_3)x_1^2+(sA_1B_1-rA_2B_3-rB_2A_3)x_1y_1+(sB_1-rB_2B_3)y_1^2+$
$(2sA1C_1-rA_3C_2-rA_2C_3)x_1+(2sB_1C_1-rB_3C_2-rB_2C_3)y_1+sC_1-rC_3C_2=0$

asi, igualando el coeficiente de x_1^2 con A, el coeficiente en x_1y_1 con B, el coeficiente en y_1^2 con C, los de x_1 y y_1 con D y E respectivamente e igualando $sC_1^2-rC_3C_2$ con F obtenemos la siguiente ecuación:

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0$$

la que es una ecuación cuadrática. Q.E.D.

Una vez hecho esto, podemos observar que la generalización del problema de Pappus para el caso en que estén dadas 2n o 2n+1 líneas rectas se traduce en encontrar el lugar geométrico de los puntos que satisfagan la condición de que el producto de las distancias de uno de estos puntos a n de las rectas dadas es igual o proporcional al producto de este punto a las n o n+1 rectas restantes. Suponiendo los resultados de la geometría analítica, la solución de este problema quedará reducido a encontrar la ecuación de grado n o n+1, según sea el caso, que representa a tal lugar. Esto tiene sentido desde una visión actual pues estas ecuaciones tienen una representación geométrica en el plano, siendo ésto posible a partir del gran hallazgo de Descartes.

Veamos ahora una solución del caso general:

Sean $L_1, L_2, \ldots, L_{2n}$ (o $L_1, L_2, \ldots, L_{2n+1}$) rectas dadas; sea P un punto del plano. El lugar geométrico de los puntos P que satisfacen que

$$\prod d(P, L_i) = \prod d(P, L_j) \quad \text{con } i \neq j \tag{1}$$

es la gráfica de una ecuación de grado n o n+1 según sea el caso.

Demostración:

Sean $L_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

$L_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

$L_3 = A_3x + B_3y + C_3 = 0$

.

.

$L_{2n} = A_{2n}x + B_{2n}y + C_{2n} = 0$

Sea $P = (x, y)$, asi:

$$d(P, L_1) = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$\vdots$$

$$d(P, L_{2n}) = \frac{|A_{2n}x + B_{2n}y + C_{2n}|}{\sqrt{A_{2n}^2 + B_{2n}^2}}$$

ahora, sustituyendo en (1) tenemos que:

$$\prod \frac{|A_i x + B_i y + C_i|}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = \prod \frac{|A_j x + B_j y + C_j|}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2}} \quad \text{con } i \neq j$$

luego, S.P.G., tomando solo valores positivos e igualando todo a cero tenemos que

$$\prod \frac{(A_i x + B_i y + C_i)}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} - \prod \frac{(A_j x + B_j y + C_j)}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2}} = 0 \tag{2}$$

y como el grado de un producto de polinomios distintos de cero es igual a la suma de los grados de sus factores[18], tenemos entonces que (2) será la diferencia de dos polinomios de grado n o n+1 según sea el caso; asi, (2) será una ecuación de grado n o n+1. Siendo ésto lo que se quería demostrar.

---

18 Albert; Algebra Superior; p. 164, Teorema 2.

V. CLASIFICACION DE CURVAS.

La propuesta de Descartes.

A pesar de que Descartes generaliza el problema de Pappus antes de resolverlo, esta solución resultará clave no solo para justificar una posible generalización del problema, es decir, para *n* líneas dadas, si no que también lo es por que el método implícito en ésta, permite clasificar a las curvas de una manera general; esto es, la interpretación algebraica de los lugares geométricos posiblilita su clasificación en términos de ecuaciones, sin distinción en la manera de su construcción.

Así, para Descartes el problema en realidad tendrá que ser planteado como sigue:

> "Teniendo tres, cuatro o más líneas dadas en posición, se requiere primero encontrar un punto a partir del cual puedan ser trazadas otras tantas líneas, cada una de ellas haciendo un ángulo dado con una de las líneas dadas, de tal modo que el rectángulo formado por dos de estas líneas este en una razón dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o con el rectángulo de las otras

dos, si hay cuatro; o que el paralelepípedo construido sobre tres esté en una razón dada con el paralelepípedo construido sobre las otras dos y cualquiera de las dadas, si hay cinco; o el paralelepípedo de las otras tres, si hay seis; o, si hay siete, que el producto obtenido de multiplicar cuatro de ellas juntas estén en una razón dada con el producto de las otras tres restantes; o si hay ocho, que el producto de cuatro de ellas esté en una razón dada con el producto de las cuatro que resten. Así, la cuestión admite la extensión a cualquier número de líneas."[1]

Hay que hacer notar aquí que no hay ningún problema en dar un sentido geométrico al producto de *n* líneas. Contrastando con esto, Pappus reconoce que en el caso de seis líneas habría una curva determinada si para cada punto sobre ella el sólido contenido por las distancias a tres de las líneas es proporcional al sólido contenido por las distancias a las otras tres; sin embargo, no considera a los casos que involucran más de seis líneas, pues en el pensamiento geométrico griego, no tiene ningún sentido concebir cosas fuera de la tercera dimensión.[2]

Los griegos conciben como geométrico a los puntos, a las líneas, a las superficies y a los volúmenes. Así, la clasificación de las curvas quedará determinado de acuerdo

---

1 Descartes, Ibid., p. 22.
2 Ver Boyer, Ibid., pp. 37-8.

con su modo de construcción; a saber, las curvas planas (recta y circunferencia); las curvas sólidas (cónicas); y las curvas lineales (mecánicas); misma clasificación antes mencionada. Así, para Descartes, en tanto que

> "...para comprender en conjunto todas las curvas que están en la naturaleza, y distinguirlas por orden en ciertos géneros, no conozco nada mejor que decir que todos los puntos de las que pueden designarse geométricas, es decir, que admiten cierta medida tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta que puede ser expresada, la misma para todos los puntos."[3]

Las curvas podrán clasificarse de la siguiente forma:

I. Del "primero y más simple género"; todas aquellas cuya ecuación no involucre términos mayores que el rectángulo de dos cantidades desconocidas (términos en xy) o el cuadrado de una (términos en x^2). Estas son el círculo, la parábola, la hipérbola y al elipse.

II. Del "segundo género"; todas aquellas que en la ecuación contengan uno o más términos de grados tres o cuatro. (términos en x^4, y^4, x^3y, xy^3, x^2y^2, x^3, y^3,...)

III. Del "tercer género"; todas aquellas en que la ecuación es de quinto o sexto grado.

"...y así para las otras hasta el infinito."[4]

---

3 Descartes, Ibid., p. 48.
4 Cfr. Descartes, Ibid., p. 49.

Esta clasificación, modifica radicalmente la clasificación hecha por los griegos. Ya que hace a un lado los métodos de construcción, para privilegiar la satisfacción de ciertas propiedades expresadas algebraicamente en función de relaciones entre líneas dadas, que juegan el papel de lo que hoy día son los ejes coordenados.

Más aún, para Descartes no hay razón para excluir a ningún tipo de curvas en el estudio de la geometría, en función de que la "exactitud en el razonamiento", es la misma independientemente de los medios utilizados para su construcción. A pesar de esto, todavía excluirá del estudio de las curvas a aquellas que involucran dos movimientos separados que no admiten una determinación exacta, como la cuadratriz y la espiral; aunque admite a la cisoide y a la conchoide, las cuales son, también, generadas a partir de movimientos e intersecciones de rectas.[5]

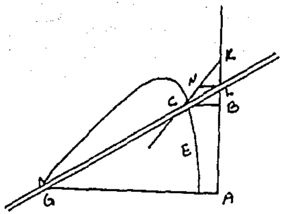
Generación de curvas mecánicas a la manera de Descartes.

Veamos con un ejemplo dado por el propio Descartes la manera en la que explica lo anterior:[6]

---

[5] Ver Descartes, Ibid., pp. 40-4.
[6] Notemos que la figura propuesta por Descartes es básicamente un "instrumento mecánico".

"



Supongamos la curva EC descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL, cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C, y de tal forma que moviendo KN sobre el mismo plano, con KL siempre coincidiendo con alguna parte de la línea BA (prolongada en ambas direcciones) y haciendo mover la regla GL circularmente alrededor del punto G, por estar ella vinculada de tal forma que pasa siempre por el punto L.

Ahora, elijo una línea recta como AB para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva EC; y en AB elijo un punto, como A, para empezar por él el cálculo. Digo que elijo éste o aquella porque soy libre de tomarlos como quiera; pues aunque haya muchas maneras de elección para hacer la ecuación más corta y más fácil, siempre, cualquiera sea la manera como se les tome, puede hacerse que la línea aparezca de un mismo género, como es fácil de demostrar.

Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como C, sobre el cual supongo que el instrumento que sirve para describirla (EC) está aplicado, trazo por este punto C la línea CB paralela a GA y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las designo a una *y* y a la otra *x*. Pero para encontrar la relación de ambas, considero también las cantidades conocidas que determinan el trazo de esa línea curva; tales como GA=*a*; KL=*b* y NL paralela a GA que denomino *c*. Luego digo: LN es a LK ó *c* a *b*, como CB o sea *y*, es a BK, que es por consiguiente by/c; y BL es $by/c-b$; y AL es $x+by/c-b$. Ademas CB es a LB ó *y* es a $by/c-b$, como GA es a LA ó *a* es a $x+by/c-b$. De manera que multiplicando la segunda por la tercera (i.e. GA por LB) se obtiene $aby/c-ab$, que el igual a $xy+byy/c-by$, que resulta multiplicando la primera por la última (i.e. CB por AL);[7] y así la ecuación que se deberá encontrar es

$$yy=cy-cxy/b+ay-ac,$$

por medio de la cual se sabe que la línea EC es de primer género; pues, en efecto, no es otra que una hipérbola."[8]

Usando el mismo instrumento e intersectando a la regla GL con distintas figuras, Descartes hace notar la

---

[7] Se tiene que CB/LB=GA/AL, así CB AL=GA LB.
[8] Descartes, Ibid., pp. 51-5.

posibilidad de construir distintas curvas, por ejemplo, si la intersección es con un círculo se describirá entonces la conchoide.[9]

Los tres problemas clásicos, su relación con las curvas mecánicas.

En los párrafos anteriores puede verse como el método desarrollado por Descartes, conduce tanto a una nueva concepción del significado de lugar geométrico, -definido ahora analíticamente- como a una reclasificación de las curvas. Esto último implica un abandono de la vieja clasificación griega, en la cual, como ya se vio, ésta depende de los métodos usados para su construcción, al extremo de que las curvas llamadas mecánicas nunca son del todo consideradas como parte de la geometría. En el caso de Descartes, la distinción entre cualquier tipo de curva (y lugar geométrico) desaparece, lo que permite tratar analíticamente cualquier curva, en particular las mecánicas.[10]

En la historia de la geometría griega estas curvas aparecen ligadas de un modo especial a "los tres problemas clásicos", por lo que resulta conveniente, para apreciar la fuerza del método cartesiano, ver más de cerca el tema.

---

9 Ver Descartes, Ibid., p. 55.
10 Descartes menciona explícitamente a la conchoide y a la cisoide, curvas mecánicas, como susceptibles del tratamiento que propone. ver Descartes, Ibid. , p. 44.

Los tres problemas clásicos fueron durante tres siglos uno de los hilos conductores de los matemáticos griegos. La geometría griega fue influenciada decisivamente por las investigaciones especializadas que se originaron en los intentos para darles solución.11

La tradición en la solución de estos problemas se remonta, por lo menos en el caso de la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo, hasta mediados del siglo V a.c. con Hipocrates de Chios, de quien se dice que reduce el primero de estos problemas a encontrar dos medias proporcionales entre dos líneas rectas dadas en proporción continua, esto es, dadas A y B se requiere encontrar dos medias proporcionales x y y tales que $A:x=x:y=y:B$; por composición de razones uno tiene entonces que $(A:x)^3=(A:x)(x:y)(y:B)$, esto es, $A^3:x^3=A:B$. Así x será el lado del cubo en la razón dada (A:B) al cubo dado (a^3).12

Sin embargo hay que tener claro que esta reducción no equivale a la solución requerida de la <u>construcción</u> geométrica de dichas medias proporcionales.

El problema de la trisección del ángulo aparecerá en fecha posterior.13

En la medida en que los métodos técnicos de la geometría avanzaron considerablemente durante el siglo IV

11 Ver Heath, <u>Ibid.</u>, p. 218.
12 Es evidente que para esta época hay un desarrollo considerable de la teoría de proporciones. En la Proposición 33 porisma, del libro XI de <u>Los Elementos</u>, puede encontrarse una prueba general para el caso de sólidos.
13 Ver Knorr, Wilbur; <u>The Ancient Tradition of Geometric Problems</u>, cap. 2 pp. 15-48 passim.

a.c. (en la academia de Platón), los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo fueron resueltos de muy diversas formas. En particular mediante el uso de curvas especiales generadas a través del seccionamiento de sólidos (como las cónicas) o a partir de la concepción geométrica de movimientos mecánicos. Así, Arquitas, Eudoxo y Menecmo dan solución a la duplicación del cubo y Dinostrato concibe a la cuadratriz para la solución de la trisección del ángulo, misma curva que puede ser usada para la cuadratura del círculo.14

> "Si cualquier período de la geometría griega puede ser llamado la edad dorada del interés en los tres problemas clásicos, este sería la última parte del siglo III a.c.. Pues estos problemas forman el motivo unificador principal en los fragmentos supervivientes del trabajo de una serie de geómetras de este tiempo: Eratostenes, Nicómedes, Hipias, Diocles, Dionisodoro, Perseo y Zenodoro. Sin duda, esta impresión es en gran medida un efecto de la preservación selectiva de evidencia, pues las fuentes principales son las compilaciones sobre la duplicación del cubo y otros problemas hechas por Eutocio y Pappus. Cabe entonces, muy poca duda de que el conocimiento mostrado en estos fragmentos se

---

14 Ver Knorr, Ibid., pp. 49-50 y 86. Un estudio detallado de las distintas soluciones a estos problemas puede encontrarse en Heath, Ibid., vol. I, cap. VII y en Knorr, op. cit. capítulos 3, 5, 6.

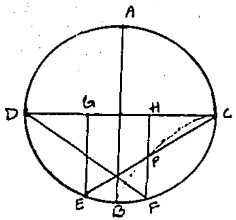
extendió a otros campos de la geometría y la ciencia matemática, y en algunas instancias lo que se puede vislumbrar en esta dirección es razonablemente bueno. En particular, podemos detectar esfuerzos serios en la aplicación de la geometría a campos como la astronomía, la geografía, la óptica y la mecánica, y un interés correspondiente en el uso de los métodos mecánicos en la geometría. Dicho esto, aún podemos admitir a los tres problemas como el sello de este periodo. Eratostenes y Diocles dieron soluciones a la duplicación del cubo, Nicómedes estudio los tres problemas; y los métodos geométricos característicos de este período encontraron sus aplicaciones representativas en las construcciones de estos problemas."15

A continuación, y en función de la importancia que para la geometría griega tienen la solución de estos problemas, analizaremos con detalle la solución a la duplicación del cubo propuesta por Diocles utilizando la cisoide, así como, la de la trisección del ángulo por medio de la conchoide de Nicómedes. También daremos en cada caso la solución analítica de estos dos problemas; misma que solo tiene sentido a partir del pensamiento geométrico de Descartes.

Demostración geométrica y analítica de la duplicación del cubo.

15 Knorr, Ibid. p. 210.

"



Supongamos que AB, DC son diámetros de un círculo haciendo un ángulo recto entre ellos. Tomemos E y F dos puntos en los cuadrantes BD y BC respectivamente, de tal forma que los arcos BE y BF sean iguales.

Tracemos EG y FH perpendiculares a DC. Unase CE y sea P el punto de intersección de CE y FH.

La cisoide será el lugar geométrico de todos los puntos P correspondientes a diferentes posiciones de E en el cuadrante BD y de F a igual distancia de B en el cuadrante BC.

Si P es cualquiera de los puntos encontrados por medio de la construcción anterior, se requiere probar que FH y HC son dos medias proporcionales en proporción continua entre DH y HP o que

$$DH:HF::HF:HC::HC:HP.$$

$(DH/HF=HF/HC=HC/HP)$

Ahora, es claro que EG=FH (por construcción) y DG=HC, así que

CG:GE::DH:HF.

(CG/GE=DH/HF)

Y ya que FH es una media proporcional de DH y HC [E.VI.13] tenemos que

DH:HF::HF:CH,

(DH/HF=HF/CH)

pero por triángulos semejantes

CG:GE::CH:HP,

(CG/GE=CH/HP)

se sigue entonces que

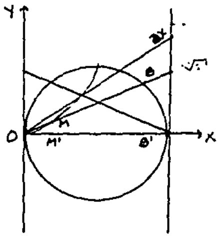
DH:HF::HF:CH::CH:HP,

(DH/HF=HF/CH=CH/HP)

o FH, HC son las dos medias proporcionales entre DH y HP."16

Dadas estas dos medias proporcionales basta retomar a Hipocrates de Chios para tener la solución completa.

Veamos ahora la solución analítica.



16 Heath, Ibid. pp. 264-6.

Trácese un círculo de diámetro 1; llamemos O uno de los puntos extremos del diámetro; trácese una recta perpendicular al diámetro que pase por el otro punto extremo, llamemos a esta recta *l*; trácense cualquier número de rectas que pasen por O e intersecten a *l*; en cada una de estas rectas dibújese desde O el segmento de recta determinado por los puntos de intersección del círculo y *l* con cada una de estas rectas.

El lugar geométrico de los puntos así determinados es la **cisoide.**

La ecuación de ésta curva se obtiene como sigue:

Tomemos como ejes X y Y a las rectas perpendicular y paralela a *l* que pasan por O respectivamente. Tómese una de las rectas restantes que pase por O y llamemos M al punto que determina a la cisoide y B al punto de intersección de esta recta con el círculo. Trácense las rectas paralelas a *l* que pasen por M y B, y llamemos M' y B' a los puntos de intersección de estas rectas con X respectivamente.

Ahora, de la figura podemos observar que:

$$OB'/BB'=OM'/MM', \qquad (1) \qquad [E.VI.12]$$

sean $OM'=x$ y $MM'=y$, así, como el diámetro es 1 tenemos que

$$OB'=1-x. \qquad (|B'l|=OM')$$

Por otro lado, tenemos que,

$$OB'/BB'=BB'/OM' \qquad [E.VI.13]$$

así, $$BB'= x(1-x) \;,$$

sustituyendo valores en (1), tenemos entonces que,

$$1-x/\ x(1-x) = x/y$$

esto es, $y^2(1-x)^2/x^2=x(1-x)$

luego, $y^2-xy^2=x^3$,

por lo tanto la ecuación de la cisoide antes descrita queda como sigue:

$$(x^2+y^2)x=y^3,$$

la cual tiene una cúspide en O y l será asíntota.

Ahora, para resolver el problema de la duplicación del cubo haremos lo siguiente:

Escribamos la ecuación de la cisoide como sigue,

$$(y/x)^3=y/(1-x),$$

trácese la recta $y=ax$; como $x=1$ es la ecuación de l, entonces a será la longitud del segmento que queda determinado por la intersección de $y=ax$ con l y X. Ahora,

$$a=y/x$$

entonces, $y/(1-x)=a^3$,

que será la ecuación de la recta que pasa por $y=0$, $x=1$ y por el punto de intersección de la cisoide con la recta ax, esta recta intersectará a Y en a^3.

Llamemos x al lado del cubo a duplicar, así el volumen de éste será x^3; llamemos y al lado del cubo duplicado entonces, su volumen que descrito por y^3.

Así, lo que queremos es:

$$y^3=2x^3$$

esto es, $y/x=\sqrt[3]{2}$,

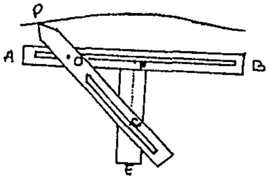
es decir, construir el segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$.

Trácese sobre Y desde O, un segmento de longitud 2; a partir del punto extremo de este segmento [(0,2)] trácese la recta que pase por $y=0$, $x=1$ (i.e. (1,0)),; ahora, desde el punto de intersección de esta recta con la cisoide trácese la recta que pase por O e intersécte a l.

Por lo tanto, la intersección de esta última recta con l y el eje X, determinarán al segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$.[17] Lo que, en efecto, resuelve totalmente el problema planteado.

Demostración geométrica y analítica de la trisección de un ángulo.

Nicómedes (aprox. siglo II a.c.) inventa una curva llamada conchoide con el fin de dar solución al problema de la trisección del ángulo. Construyó esta curva por medio de un instrumento mecánico, que puede ser descrito como sigue:



AB es una regla con una ranura paralela a su largo; Nicómedes llama a AB <u>regla</u> (κανών).

FE otra regla (fija) en ángulo recto con AB, con un pivote fijo en un punto C; Nicómedes llama a C <u>polo</u> (πόλος).

---

17 Cfr., Klein, Felix; <u>Famous Problems of Elementary Geometry</u>, pp. 44-5.

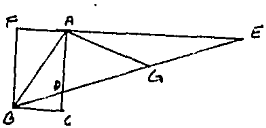
PC una tercera regla (P punto extremo) con una ranura paralela a su largo, la cual entra en C.

D un pivote fijo en PC, (punto entre P y C) en línea recta con la ranura de PC; D puede moverse por la ranura de AB; Nicómedes llama a la longitud constante entre P y D distancia (διάστημα).

Ahora, si la regla PC se mueve de tal forma que el pivote D recorre el largo de la ranura de AB, el punto P de la regla PC, describirá a la curva llamada **conchoide**.

La propiedad fundamental de esta curva es que, si cualquier recta es trazada desde C a la curva (como PC), la longitud intersectada (PD) en esta recta entre la curva y AB es constante.

Veamos ahora, la solución de la trisección de cualquier ángulo dado, por medio de la conchoide.



Sea ABC cualquier ángulo dado, trácese AC perpendicular a BC. Completar el paralelogramo ACBF y prolongese el lado FA.

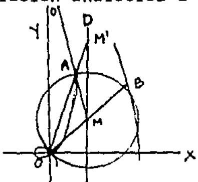
Sea B el polo; AC la regla y sea la distancia igual a 2AB.

Llamemos E, a el punto de intersección de la conchoide y la recta FA; únase BE y sea D el punto de intersección de AC con BE. Ahora, biséctese DE en G, únase AG. Entonces

DG=GE=AG=AB

por lo tanto	ABG= AGB,	
pero	AGB=2 AEG	
y	AEG= EBC	(FE y BC paralelas)
luego	ABC= EBC+ ABG	
así,	ABC= EBC+2 EBC	
por lo tanto	ABC=3 EBC	
es decir,	EBC=(1/3) ABC.18	

Veamos la solución analítica a este problema.



Sea O un punto fijo, a una distancia a de una línea recta fija D. Si trazamos cualquier número de rectas a través de O y sobre cada una de estas rectas dibujamos

---

18 Cfr., Heath, Ibid., vol. I, pp. 235-6, 238-9. La conchoide que describe el instrumento aquí mencionado era llamada la "primera" conchoide. Pappus hace mención de la noción de por lo menos cuatro tipos distintos de esta curva; llamándolas "primera", "segunda", "tercera" y "cuarta" conchoide. Se sabe que la "primera" era conocida por los griegos, de las otras tres no se tiene certeza, sin embargo, la naturaleza de éstas depende de variar la condición de que la distancia sea mayor, menor o igual a la longitud del segmento CD. Para una mayor claridad de lo anterior, ver Heath, Ibid., p. 240.

apartir de su intersección con D en ambas direcciones un segmento de longitud b.

El lugar geométrico de puntos así determinados es la conchoide.

De acuerdo a que si b es mayor o menor que a, el origen es un nudo ó un punto conjugado; para $b=a$ es una cúspide.

Ahora, tomando como ejes X y Y las rectas perpendicular y paralela a D que pasan por O respectivamente, la ecuación de la conchoide se determina como sigue:

Sea O el origen; OB la recta que satisface que OM=MB donde M es el punto de intersección de esta recta con D. Llamemos a B el punto (x,y). De la figura podemos observar que,

$$x-a/x=b/OB \qquad (OD=a,\ OM=b) \qquad [E.VI.12]$$

entonces, $OB=bx/(x-a)$

así como, $OB= x^2+y^2$ [E.I.47]

entonces, $x^2+y^2 =bx/(x-a)$

por lo tanto $(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0$

será la ecuación de la conchoide, siendo de cuarto grado, con un doble punto en el origen y compuesta de dos ramas que tienen como asíntota común a la recta $x=a$ (D).

La solución a la trisección del ángulo se obtiene como sigue:

Sea BOY el ángulo a trisectar. Trácese el círculo con centro en M y radio $OM=b$. Sea A el punto de intersección de este círculo con la conchoide. Unase OA; entonces, AOY=(1/3) BOY[19]

Veamos una demostración de lo anterior.

Prolongese OA hasta intersectar D; llamemos M' a este punto. Unase MA y prolongese hasta intersectar con Y; llamemos a este punto O'.

Ahora, OM=MA

entonces, OAM= BOA= M'AO'.

Ahora, OM'M= AOY

y MA=AM' (por construcción)

así, O'MM'= AOY

luego, OM'M+ O'MM'= M'AO' [E.I.32]

es decir, 2 AOY= BOA

y como BOY= BOA+ AOY

entonces, BOY=3 AOY

por lo tanto, AOY=(1/3) BOY.

Lo que concluye la construcción buscada.

---

19 Cfr., Klein, Ibid., pp. 45-7.

CONCLUSIONES

Nos parece que este trabajo muestra de un modo efectivo, a partir del estudio detallado de aspectos tales como el análisis del sentido de las operaciones aritméticas en la geometría, la clasificación de curvas, la redefinición de conceptos matemáticos, etc., la cercanía y la lejanía simultáneas de la manera de pensar de Descartes con respecto al pensamiento matemático griego.

Es a partir de ésto que, entonces, se entiende mejor en que medida la geometría analítica es el resultado de pensar de una manera distinta los problemas geométricos de la tradición griega; en que medida la geometría analítica puede pensarse como la intersección entre el álgebra y la geometría.

En la medida en la que este trabajo fue desarrollandose, la conveniencia de ir al pensamiento original y a la consideración del detalle como la vía más adecuada para la comprensión de la manera en la que surgen nuevas ideas se tornó evideente. Esto mismo es lo que posibilita, desde nuestra perspectiva, una concepción radicalmente distinta de la geometría analítica a partir de entender el lugar que ocupa el pensamiento matemático griego en las ideas de Descartes.

Desde un punto de vista más personal, puedo concluír que el trabajo me proporcionó una concepción distinta de las matemáticas y lo matemático, y la convicción de que este no es sino el principio de un trabajo por hacer.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Adrian, Albert; Algebra Superior; UTEHA; México; 1961.

2. Apolonio de Pérgamo; Conics, en Great Books, vol. 11; Encyclopaedia Britannica; E.U.; 1978.

3. Ball, W.W.Rouse; A Short Account of the History of Mathematics; Dover Publications, Inc.; New York; 1960.

4. Boyer, Carl. B.; History of Analytic Geometry, #s 6,7, de The Scripta Mathematica Studies; Scripta Mathematica, Yeshiva University; New York; .

5. Collette, J.P.; Historia de las matemáticas, 2 vols.; Siglo XXI; México, D.F.; 1986.

6. Descartes, René; The Geometry; Dover Publications, Inc.; New York; 1954.

7. Euclides; The Thirteen Books of The Elements, 3 vols., editados por Sir Thomas L. Heath; Dover Publications, Inc.; New York; 1956.

8. Eves, Howard; Estudio de las geometrías, 2 vols.; UTEHA; México, D.F.; 1969.

9. Heath, Sir Thomas L.; A History of Greek Mathematics, 2 vols.; Dover Publications, Inc.; New York; 1981.

10. Jones, Ch.; "Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas.", en _Mathesis_, vol. III, número 1; México, D.F.; 1987.

Jones, Ch.; "La influencia de Aristóteles en el fundamento de _Los Elementos_ de Euclides.", en _Mathesis_, vol. III, número 4; México, D.F.; 1987.

11. Klein, Felix; _Famous Problems of Elementary Geometry_; Dover Publications, Inc.; New York; 1956.

12. Knorr, Wilbur; _The Ancient Tradition of Geometric Problems_; Birkhäuser; Boston; 1986.

13. Newton, Isaac; _Principios de la filosofía natural_, 2 vols.; Alianza Editorial; México; 1987.

14. Szabó, Arpád; _The Beginnings of Greek Mathematics_; D. Reidel Publishing Company; Dordrecht, Holland; Boston, USA; 1978.