

11
20



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

LA METODOLOGIA ARIMA PARA LA FORMULACION
DE MODELOS DE SERIES DE TIEMPO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN ECONOMIA

P R E S E N T A :

GABRIEL BARRETO VILLANUEVA



NOVIEMBRE 1992

TESIS CON
FALTA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INTRODUCCION	VII
CAPITULO I LOS PROCESOS ESTOCASTICOS Y LAS SERIES DE TIEMPO	1
1.1 Procesos Estocásticos.	1
1.1.1 Distribución de probabilidad de un proceso estocástico.	2
1.1.2 Procesos estacionarios y ergódicos.	5
1.2 Las series de tiempo.	10
1.3 La metodología para la construcción de modelos de series de tiempo.	20
CAPITULO II ESTACIONARIDAD DE UNA SERIE DE TIEMPO	23
2.1 Estabilización de la varianza.	25
2.2 Remoción de la tendencia.	29
2.3 Fluctuaciones estacionales.	34

CAPITULO III	MODELOS LINEALES PARA SERIES DE TIEMPO	39
3.1	Los modelos autorregresivos.	39
3.1.1	El modelo autorregresivo de primer orden.	40
3.1.1.1	Restricciones en el parámetro del proceso autorregresivo de primer orden.	43
3.1.1.2	Características especiales de un proceso AR(1).	46
3.1.2	El modelo autorregresivo de segundo orden.	51
3.1.2.1	Restricciones en los parámetros del proceso AR(2).	53
3.1.2.2	Características especiales de un proceso AR(2).	57
3.1.3	Modelos autorregresivos de orden superior.	60
3.1.3.1	Características especiales de un proceso AR(p).	61
3.2	Modelos de medias móviles.	63
3.2.1	El modelo de medias móviles de primer orden.	64
3.2.1.1	Restricciones en el parámetro del proceso de medias móviles de primer orden.	68
3.2.1.2	Características especiales de un proceso MA(1).	70
3.2.2	El modelo de medias móviles de segundo orden.	72
3.2.2.1	Restricciones en los parámetros del proceso MA(2).	75
3.2.2.2	Características especiales del proceso MA(2).	76

3.2.3	Modelos de medias móviles de orden superior.	79
3.2.3.1	Características especiales del proceso proceso MA(q).	80
3.3	Modelos autorregresivos y de medias móviles.	81
3.3.1	El modelo ARMA(1,1).	81
3.3.1.1	Restricciones en los parámetros del proceso ARMA(1,1).	86
3.3.1.2	Características especiales del proceso ARMA(1,1).	87
3.3.2	Modelos ARMA de orden superior.	91
3.3.2.1	Características especiales del proceso ARMA(p,q).	92
3.4	Modelos no estacionarios.	94
3.4.1	El modelo del camino aleatorio.	94
3.4.2	Modelos autorregresivos integrados y de medias móviles.	97
3.5	Modelos estacionales.	100
3.5.1	El modelo estacional autorregresivo.	100
3.5.2	El modelo estacional de medias móviles.	103
3.5.3	Modelos estacionales ARMA.	105
3.6	El Modelo General Estacional Multiplicativo.	106

CAPITULO IV	IDENTIFICACION	114
4.1	Estrategia de identificación.	119
4.2	Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.	119
4.2.1	Las f_{ac} y f_{acp} muestrales de una serie de tiempo.	123
4.2.1.1	Autocorrelaciones muestrales.	123
4.2.1.2	Autocorrelaciones parciales muestrales.	129
4.3	Decidir si una serie es estacionaria.	132
4.4	Las funciones de autocorrelación y autocorrelación teóricas para series estacionarias.	137
4.4.1	Las f_{ac} y f_{acp} teóricas de los modelos autorregresivos de primer y segundo orden.	137
4.4.2	Las f_{ac} y f_{acp} teóricas de los modelos de medias móviles de primer y segundo orden.	141
4.4.3	Las f_{ac} y f_{acp} teóricas de los modelos ARMA(1,1).	144
4.5	Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial teóricas de modelos estacionales.	147
4.5.1	Las f_{ac} y f_{acp} teóricas de modelos estacionales multiplicativos autorregresivos.	149
4.5.2	Las f_{ac} y f_{acp} teóricas de modelos estacionales multiplicativos de medias móviles.	154
4.6	Identificación de algunas series.	160
4.6.1	Identificación del proceso químico por lotes.	160
4.6.2	Identificación del turismo receptivo en México.	163
4.6.3	Identificación del precio de las acciones de IBM	167

CAPITULO V	ESTIMACION Y DIAGNOSTICO DEL MODELO	168
5.1	El enfoque condicional.	171
5.1.1	Estimación de modelos AR.	171
5.1.2	Estimación de modelos de MA.	179
5.1.3	Estimación de modelos ARMA.	187
5.2	El enfoque no condicional.	190
5.3	Diagnóstico del modelo.	196
5.3.1	Análisis de estacionaridad.	197
5.3.2	Análisis de los residuales.	199
5.3.3	El modelo sobreespecificado: Omisión de parámetros.	207
5.3.4	El modelo subespecificado: Inclusión de parámetros adicionales.	209
5.4	Estimación de algunas series	
5.4.1	Estimación de la serie del turismo receptivo	212
5.5.2	Estimación de la serie del precio de las acciones de IBM	214
CAPITULO VI	PRONOSTICOS	215
6.1	El criterio del pronóstico óptimo.	216
6.2	Pronósticos para modelos estacionarios.	218
6.2.1	Pronósticos para un modelo AR.	218

6.2.2	Pronósticos para un modelo MA.	222
6.3.3	Pronósticos para un modelo ARMA.	224
6.3	Pronósticos para modelos no estacionarios.	224
6.3.1	Pronósticos para el modelo ARIMA(0,1,1).	225
6.3.2	Pronósticos para el modelo ARIMA(1,1,0).	227
6.4.	Intervalos de pronósticos.	230
6.5	Pronósticos para la serie del proceso químico por lotes.	234
6.6	Actualización de pronósticos.	238
CONCLUSIONES		239
ANEXO ESTADISTICO		
Serie 1.	El Turismo Receptivo en México	242
Serie 2.	El volumen de ventas en una empresa	248
Serie 3.	El proceso químico por lotes	248
Serie 4.	Casos notificados de paludismo en México	249
Serie 5.	México: número de nacimientos.	249
Serie 6.	Precio diarios de las acciones de IBM	250
Serie 7.	Serie simulada en base a un proceso AR(1)	252
Serie 8.	Serie simulada en base a un proceso AR(1)	252
Serie 9.	Serie simulada en base a un proceso AR(2)	253
Serie 10.	Serie simulada en base a un proceso MA(1)	253
Serie 11.	Serie simulada en base a un proceso MA(2)	254
Serie 12.	Serie simulada en base a un proceso ARMA(1,1)	254
GLOSARIO DE TERMINOS		255
BIBLIOGRAFIA		260

INTRODUCCION

Una de las tareas del economista es proporcionar los elementos suficientes para la elección de una opción entre diversas alternativas. Dicha decisión se encontrará generalmente en un ambiente de incertidumbre respecto a los sucesos que puedan producirse en el futuro. Cada opción tendrá asociada una ganancia o pérdida, por lo que la decisión debe realizarse considerando el impacto de cada uno de los sucesos posibles.

Se podrán lograr mejores resultados si de alguna manera se logra reducir la incertidumbre sobre estos sucesos situados en el futuro, para ello el economista puede apoyarse en la formulación de predicciones de las circunstancias que rodean a la decisión y de la decisión misma. A estas predicciones generalmente se les denominan bajo el nombre de pronósticos.

Se pueden formular pronósticos para la macroeconomía (del gasto gubernamental, del Producto Interno Bruto, financiamiento a la industria, tasas de interés, etc.) y la economía de empresas (en áreas como finanzas, mercadotecnia, para los niveles de existencias de materia prima y programas de producción, etc.) Es fundamental que los pronósticos que se obtengan sean confiables, pues un pronóstico deficiente puede provocar efectos contraproducentes perturbadores; si por ejemplo, la demanda de un producto para cierta región es subestimada, tendrán que modificarse los programas de producción para hacer frente a la demanda anticipada, lo que incurrirá en costos más altos para aumentar la producción. Por el

contrario, si la demanda es sobreestimada, no se podrá colocar toda su producción provocando costos innecesarios de almacenaje y se perderá la oportunidad de colocar los capitales en otras inversiones.

Los pronósticos pueden obtenerse mediante métodos cualitativos o cuantitativos.⁽¹⁾

Los métodos cualitativos son aquellos en que el pasado no proporciona una información directa de la variable considerada, como la aparición de un nuevo producto en el mercado, investigaciones de tipo político o sociológico.

Entre estos métodos se puede mencionar al Delphi, el Brainstorming, el Cross-Impact, árboles de decisión, etc. El método Delphi basa la previsión mediante la generación de juicios de opinión de expertos hasta llegar a un acuerdo, en este proceso se trata de evitar la influencia de individuos o grupos dominantes. En el brainstorming (lluvia de cerebros literalmente) la previsión se efectúa a partir de la discusión entre un grupo de expertos donde se crea un ambiente determinado para facilitar que afloren nuevas ideas. El cross-impact es el tratamiento conjunto y, por lo tanto el impacto cruzado de los sucesos que configuran un escenario determinado exigiendo evaluaciones subjetivas de probabilidades de ocurrencia.

(1) Se puede consultar de manera más detallada los métodos existentes para la realización de pronósticos a W. Woll y Spyros Makridakis en Forecasting Methods for Management. Ed. J. Wiley and Sons. U.S. 1983 y a Ezequiel Uriel Jiménez en Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Ed. Paraninfo, S. A., Valencia, 1985.

Por su parte, los métodos cuantitativos se basan directamente en el comportamiento histórico de la variable en estudio, extrayendo toda la información posible de los datos para desarrollar una predicción de los valores futuros.

Dentro de los métodos cuantitativos se pueden considerar dos grandes enfoques: el análisis puramente estadístico y el análisis causal.

En el análisis puramente estadístico se rechaza el papel de la teoría económica en la especificación de los modelos, bajo el argumento de que éstos deben ser determinados libremente por los datos. Las predicciones de los valores futuros de la variable se generan utilizando como única información la contenida en los datos históricos de una serie estadística que medirá la evolución del suceso. Dentro de éstos se puede mencionar los métodos de suavizamiento exponencial, los métodos de descomposición y los modelos ARIMA (Autorregresivos Integrados y de Medias Móviles).

Los métodos de suavizamiento exponencial permiten principalmente el cálculo de los valores tendenciales de la serie. Los métodos de descomposición parten de la hipótesis de que una serie histórica se conforma de varios componentes no observables, analizándose principalmente la tendencia de la serie, el ciclo, la estacionalidad y el movimiento irregular.

Para los modelos ARIMA, se hace un planteamiento inicial de carácter general: la serie de tiempo se considera ha sido generada por un proceso estocástico. Las técnicas de elaboración de modelos

ARIMA van dirigidas precisamente a identificar el proceso generador de las observaciones, para que después en un proceso iterativo, se estime y verifique un modelo que sirva para pronosticar valores futuros para la serie.

Una de las críticas principales a los modelos ARIMA es que carecen de utilidad para la explicación del comportamiento de la variable, debido a que son modelos puramente descriptivos de los datos, la causalidad y la explicación son reemplazadas por la correlación histórica. Tal hecho no interfiere en el poder predictivo que tienen estos modelos, se considera una de las técnicas más eficientes de pronósticos de series de tiempo a corto plazo.

Por su parte, los métodos cuantitativos bajo el enfoque causal, se denominan así porque la variable objeto de estudio, se explica a través de otras variables, en un modelo donde el economista confronta conjuntamente la información teórica con la información empírica.

La crítica para los modelos causales es que en la combinación realidad-teoría y realidad-datos se introducen elementos de juicio en la explicación de la variable.

Adicionalmente, la elaboración de pronósticos mediante modelos causales puede ser imposible cuando no existen datos disponibles para las variables explicativas, o si para pronosticar deban ser previamente pronosticadas las variables independientes y esto puede ser más difícil que pronosticar a la misma variable. Cuando esto sucede o si el objetivo es meramente pronosticar, los modelos ARIMA

son un complemento o alternativa muy atractiva.

Sin embargo, la gran mayoría de la bibliografía econométrica está enfocada a los modelos causales y la específica para modelos ARIMA resultan, en principio, para el estudiante de la facultad de Economía, difícil en dos sentidos: por el nivel que presentan y por ser bibliografía editada en inglés. La presente disertación no pretende desarrollar lo que muchos autores más capacitados y con mayor tino han realizado previamente, sino intenta hacer más accesible el aprendizaje de la metodología ARIMA para la construcción de modelos de series de tiempo. Para ello se realizó una revisión de la bibliografía existente, principalmente de lo escrito por G. Box y G. Jenkins en *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (1970), de la estructura metodológica presentada por W. Vandaele en *Applied Time Series and Box-Jenkins Models* (1976) y Ezequiel Uriel Jiménez en *Análisis de Series Temporales: Modelos ARIMA* (1985) y de los documentos del Banco de México escritos por Gabriel Vera Ferrer y Victor M. Guerrero (1983).

El análisis de series de tiempo con la metodología ARIMA puede realizarse alternativamente en el dominio del tiempo o en el dominio de las frecuencias. Ambos enfoques son simplemente 2 maneras distintas de estudiar el mismo fenómeno, pero cada uno permite apreciar características con mayor o menor profundidad. Aquí se explicará únicamente el primer enfoque por su más rápida comprensión.

Se presenta en el primer capítulo los conceptos de procesos

estocásticos y de series de tiempo, así como algunos ejemplos de series reales. El capítulo II introduce la noción de estacionaridad, la importancia de trabajar con series estacionarias y como transformar series no estacionarias en estacionarias. El capítulo III presenta los modelos más importantes así como sus propiedades principales. La identificación de modelos, su estimación y validación se analizan en los capítulos IV y V. Finalmente, el capítulo VI muestra como se pueden generar pronósticos a partir del modelo que se haya considerado más adecuado.

Queda únicamente, esperar, sea de utilidad para los compañeros que se están formando como economistas, pues es a ellos a quienes va dirigido el esfuerzo realizado en la presente disertación.

CAPITULO I

LOS PROCESOS ESTOCASTICOS Y LAS SERIES DE TIEMPO

CAPITULO I LOS PROCESOS ESTOCASTICOS Y LAS SERIES DE TIEMPO

La teoría de la probabilidad estudia los fenómenos de carácter aleatorio, es decir aquellos que son determinados por el azar. Adicionalmente si este fenómeno aleatorio es resultado de un proceso, el cual se desarrolla en el tiempo, de cierta manera controlado por las leyes de probabilidad, se denomina como un proceso estocástico.

1.1 PROCESOS ESTOCASTICOS

Concretamente un proceso estocástico se define como una sucesión de variables aleatorias que corresponden a momentos sucesivos del tiempo. El proceso estocástico se denota como (z_1, z_2, \dots, z_n) . Así para cada instante en el tiempo, cada observación debe considerarse como una única variable aleatoria que posee una determinada distribución de probabilidad⁽¹⁾.

Las características de un proceso estocástico quedan perfectamente determinadas si se conoce su distribución de probabilidad.

(1) La variable aleatoria Z es un valor real que tiene la propiedad de que para cada conjunto B de números reales, existe una probabilidad denotada por $P(Z \text{ está en } B)$, donde Z es un elemento de B , por lo que Z puede tomar valores aleatoriamente (esto es, de acuerdo a una distribución de probabilidad). Cf. Emanuel Parzen en Stochastic processes. Ed. Holden Day. U.S. 1962.

1.1.1 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD EN UN PROCESO ESTOCASTICO

Quando se fija un valor en el tiempo, un proceso estocástico pasa a ser una variable aleatoria, que tendrá su correspondiente distribución de probabilidad. Así, para t_1 , la distribución de probabilidad se expresa como $P(z_1)$. Si en lugar de un valor se fijan 2 valores en el tiempo, se obtendrá una variable bidimensional con una función de distribución bivalente. Así, para t_1 y t_2 la distribución de probabilidad es $P(z_1, z_2)$. En general, para un conjunto finito de valores fijados en el tiempo, se obtiene una distribución de probabilidad conjunta. Para t_1, t_2, \dots, t_n la función de distribución conjunta es

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (1.1)$$

Un proceso estocástico queda perfectamente caracterizado cuando se determinan las funciones de distribución conjuntas para cada conjunto finito de variables del proceso, es decir, para cada valor finito n en (1.1). La figura 1.1 muestra esta distribución de probabilidad conjunta:

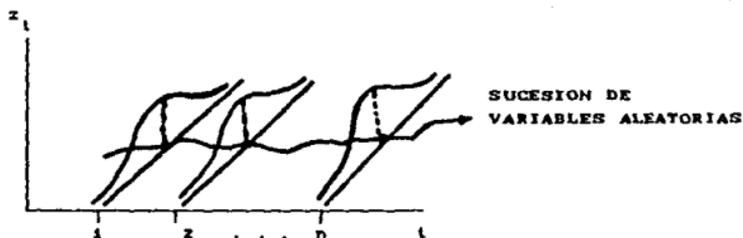


FIGURA 1.1 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CONJUNTA DE UN PROCESO ESTOCASTICA

Sin embargo, la determinación de las características de un proceso a partir de las funciones de distribución de probabilidad es, en general, un procedimiento complicado, por lo que se utiliza, alternativamente, el método de los momentos. Para una distribución de probabilidad pueden calcularse momentos de diverso orden, preferentemente son los momentos de primer y segundo orden los más utilizados.

Un momento de primer orden se define como

$$E(z_1), E(z_2), \dots, E(z_n) = E(z_t) = \mu_t \quad (1.2)$$

que es la media del proceso. El subíndice t indica que la media será, en general, distinta en cada periodo de tiempo.

Como momentos de segundo orden, se debe considerar además de la varianza, las covarianzas entre las variables referidas a distintos momentos de tiempo.

La varianza del proceso se define como

$$\text{Var}(z_t) = E[(z_t - \mu_t)^2] = \sigma^2 \quad (1.3)$$

Y las autocovarianzas se definen como

$$\text{cov}(z_t, z_{t-k}) = E(z_t - \mu_t)(z_{t-k} - \mu_{t-k}) \quad (1.4)$$

Como forma alternativa de caracterización de un proceso

estocástico se utilizan los coeficientes de autocorrelación⁽²⁾.

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(z_t, z_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(z_t)\text{var}(z_{t-k})}} \quad (1.5)$$

Las autocorrelaciones proporcionan la misma información que las autocovarianzas. Sin embargo, es preferible utilizar las autocorrelaciones por ser medidas relativas a diferencia de las autocovarianzas que están afectadas por la escala que se utilice.

Una autocorrelación mide el grado de asociación entre una observación en el tiempo t , z_t , y una observación en el tiempo $t-k$, z_{t-k} .

Para los valores z_1, z_2, \dots, z_n la autocorrelación de z_t con z_{t+1} mide la autocorrelación entre las parejas $(z_1, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{n-1}, z_n)$ y se denota por ρ_1 . Asimismo, la autocorrelación de z_t con z_{t+2} es igual a la correlación entre las $(n-2)$ parejas $(z_1, z_3), (z_2, z_4), \dots, (z_{n-2}, z_n)$ y de manera similar se denota por ρ_2 . En general, la autocorrelación entre parejas de observaciones distanciadas entre sí k periodos aparte, se denota por ρ_k .

El análisis de un proceso estocástico mediante los momentos de primer y segundo orden es más incompleta que si se realizara

(2) Dado que las correlaciones que se analizarán en el presente trabajo se dan entre observaciones de una serie histórica a distintos periodos de tiempo, es más apropiado llamarles autocorrelaciones. Lo mismo aplica para las varianzas que se denominarán como autocovarianzas.

mediante las funciones de distribución conjunta. Pero si se considera normalidad en el proceso quedara adecuadamente caracterizado a través de estos dos momentos.

1.1.2 PROCESOS ESTACIONARIOS Y ERGODICOS

Se dice que un proceso estocástico es estacionario cuando sus propiedades no son afectadas si se realiza un desplazamiento en el tiempo.

Si se considera la distribución conjunta

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (1.6)$$

con el supuesto de que todos los elementos de la distribución anterior se desplazan m periodos, la resultante distribución conjunta sería

$$P(z_{1+m}, z_{2+m}, \dots, z_{n+m}) \quad (1.7)$$

Si el proceso es estacionario en sentido estricto, se cumple que

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = P(z_{1+m}, z_{2+m}, \dots, z_{n+m})$$

El análisis de la estacionaridad de un proceso también es más compleja cuando se utilizan las funciones de distribución en lugar de los momentos. Sin embargo, por este último procedimiento el concepto de estacionaridad es más limitado. Un proceso es

estacionario de primer orden si la media es

$$E(z_1) = E(z_2) = \dots = E(z_n) = E(z_t) = \mu \quad (1.8)$$

En otras palabras, un proceso es estacionario de primer orden si la media es constante sobre el tiempo.

Un proceso es estacionario de segundo orden cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

a) La varianza es finita y permanece constante a lo largo del tiempo, es decir

$$\text{Var}(z_t) = E(z_t - \mu)^2 = \sigma^2 \quad \text{para toda } t \quad (1.9)$$

b) La autocovarianza entre dos periodos está afectada únicamente por el lapso de tiempo transcurrido entre éstos, es decir

$$E(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu) = \lambda_k \quad \text{para toda } t \quad (1.10)$$

que se define como una autocovarianza de orden k , por ser el lapso de tiempo que separa a z_t de z_{t-k} . El valor de λ_k es independiente de cual sea el periodo t que se considere.

Similarmente, las autocorrelaciones tampoco dependen del segmento de los datos que se utiliza para calcularlas.

En un proceso estacionario las autocorrelaciones quedan definidas como

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \quad k \geq 0 \quad (1.11)$$

Con λ_0 como la varianza del proceso definida en (1.9) y λ_k la autocovarianza de grado k , definida en (1.10).

Dado que estas condiciones unicamente aplican a la media y varianza del proceso se considera como una estacionaridad de segundo orden.

Por otra parte, es necesario distinguir entre lo que es un proceso estocástico y una realización de un proceso estocástico. La serie de variables observadas debe considerarse como una realización particular de un determinado proceso estocástico. Por realización debe entenderse a una secuencia de observaciones y no solamente una simple observación.

Cada observación en la serie se considera como un valor aleatorio, lo que significa que si una nueva realización pudiera generarse bajo condiciones similares, no se obtendrían los mismos valores numéricos para las observaciones. Por ejemplo, si se considera la producción de un producto a lo largo de una jornada de 8 horas. Con el supuesto de que cada día se reinicia el proceso bajo las mismas condiciones, se podría tomar medidas del peso del producto cada hora con el cual se elabora el cuadro siguiente, donde z_{it} designa el peso de la sustancia en el día i durante la hora t :

REALIZACIONES DE UN PROCESO ESTOCASTICO

DIA \ HORA	1	2	3	4	5	6	7	8
1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}	z_{18}
2	z_{21}	z_{22}	z_{23}	z_{24}	z_{25}	z_{26}	z_{27}	z_{28}
⋮								
n	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{n4}	z_{n5}	z_{n6}	z_{n7}	z_{n8}

Cada línea del cuadro anterior se puede contemplar como una realización de un mismo proceso estocástico. La figura 1.2 muestra gráficamente lo que podría ser 3 posibles realizaciones de este proceso.

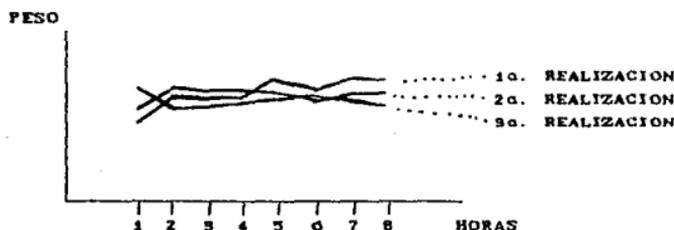


FIGURA 1.2 DIFERENTES REALIZACIONES DE UN PROCESO ESTOCASTICO

Si se dispone de un número amplio de días en que se efectúan las mediciones del peso del bien, se estaría en condiciones de realizar inferencias acerca del proceso.

Desafortunadamente, en muchas situaciones solamente se puede obtener una realización. Por ejemplo, no se puede parar la economía, ir hacia atrás hasta un punto arbitrario en el tiempo, y reiniciar el proceso económico para observar una nueva realización.

Cuando la serie observada es una sola realización de todas las posibles series que pudieron haberse generado por un mismo proceso estocástico en el mismo período de tiempo, se dispone únicamente de una muestra de tamaño 1.

Pero si el proceso es estacionario, se pueden estimar los parámetros μ , λ_0 , λ_1 , λ_2 , . . . , λ_k a partir de una sola

realización.

Con la muestra de observaciones z_1, z_2, \dots, z_n se pueden utilizar los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (1.12)$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{\mu})^2 \quad (1.13)$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (z_i - \hat{\mu})(z_{i+k} - \hat{\mu}) \quad (1.14)$$

Naturalmente al crecer k se dispone de un menor número de observaciones para el cálculo de $\hat{\lambda}_k$.

Además de la estacionaridad, es necesario que un proceso estocástico goce de la propiedad de ergodicidad, con el objeto de que la inferencia pueda realizarse en forma adecuada. Intuitivamente, un proceso estocástico es ergódico si tiene la propiedad de que las medias de las muestras formadas de una sola realización del proceso, se puedan utilizar como una aproximación de las correspondientes medias poblacionales.

Pero si los valores de una serie alejados en el tiempo están altamente correlacionados, es decir, ρ_k se mantiene en unas cotas elevadas para una k grande, sucederá que al aumentar el tamaño de la muestra se añade poca información nueva. Una consecuencia de esta situación, es que los estimadores obtenidos serán inconsistentes, ya que el aumento del tamaño de la muestra no reporta ninguna utilidad, puesto que se tendrá que calcular un número mayor de autocovarianzas para caracterizar adecuadamente el

proceso.

Si el proceso cumple con la propiedad de ergodicidad, las fórmulas definidas de (1.12) a (1.14) permiten obtener estimadores consistentes. Una condición necesaria, aunque no suficiente, de la ergodicidad es que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$$

Cuando un proceso es estacionario y ergódico, el problema de la inferencia se simplifica considerablemente.

1.2 LAS SERIES DE TIEMPO

Existen muchas clases de procesos estocásticos en diferentes ámbitos de las ciencias⁽³⁾. Una clase particular de procesos estocásticos que interesa a la economistas son las series de tiempo.

Una serie de tiempo se puede definir como un colección de

(3) Por ejemplo, el crecimiento de una población de bacterias, la lluvia de rayos cósmicos, los sistemas de calidad de la producción, la tirada de una bomba de gasolina en sucesivas corridas, el control de los inventarios, la teoría de colas, el tráfico telefónico, etc. Cf. Emanuel Parzen. Op. cit. capítulo I. También se puede consultar a S. K. Srinivasan en Stochastic point processes and their applications. Griffin's Statistical Monographs and Courses. Editado por Alan Stuart. Londres 1974.

observaciones que han sido generadas secuencialmente en el tiempo.

Una serie de tiempo es una realización única de un proceso estocástico por lo que se dispone solamente de una observación por periodo. Estas observaciones no se obtienen en general de forma determinística ya que una serie de tiempo tendrá principalmente un carácter aleatorio⁽⁴⁾.

Las observaciones en una serie de tiempo están ordenadas con respecto al tiempo y se espera sean usualmente dependientes unas con otras. Es inclusive esta dependencia de un periodo a otro, la que se utiliza para la generación de pronósticos⁽⁵⁾.

El orden de una observación en una serie de tiempo se indica mediante un subíndice t . Por lo que se denota como Z_t a la observación generada en el tiempo t . La observación generada un periodo anterior al tiempo t , como Z_{t-1} , y a la observación de k

(4) Si la serie no tuviera este carácter aleatorio no tendría sentido el registrar los valores correspondientes a distintos periodos, ya que se podrían obtener simplemente por la aplicación de una fórmula. Por ejemplo, con $Z_t = 10 + 4t$, el valor de Z_t para $t=10$ puede obtenerse inmediatamente. Cf. Ezequiel Uriel J. en Análisis de series temporales. Modelos ARIMA. Ed. Paraninfo, S. A. Valencia 1985.

(5) A diferencia del muestreo aleatorio simple donde cada extracción es independiente de las demás (por ejemplo, el comportamiento de una familia es independiente del de otra), en una serie de tiempo la observación obtenida en un periodo concreto, no será en general, independiente de las observaciones generadas en periodos anteriores (por ejemplo, el consumo nacional de un año para una economía está condicionado a los niveles de consumo que haya tomado esta variable en años anteriores).

periodos anteriores a t , como z_{t-k} .

El análisis de series de tiempo se realiza principalmente con series que han sido recolectadas en iguales o casi iguales intervalos de tiempo para obtener, por ejemplo, datos semanales, mensuales, trimestrales o anuales. A estas series se les llama series de tiempo discretas. Las series de tiempo que existen en cada punto en el tiempo se denominan como continuas.

Existen diversas formas de obtener series de tiempo discretas. Dada una serie de tiempo continua es posible construir una serie discreta tomando medidas a intervalos igualmente espaciados de tiempo. Por ejemplo, el índice de la Bolsa Mexicana de Valores tomado al cierre de operaciones diarias de días sucesivos.

Alternativamente, la serie de tiempo discreta puede originarse acumulando las observaciones para un determinado intervalo de tiempo. El número de millas voladas diariamente por una línea aérea, la producción industrial trimestral, la precipitación pluvial, son ejemplos de series acumuladas.

En muchos casos, las observaciones que conforman una serie de tiempo integran "efectos perturbadores" que dificultan su análisis. Un ejemplo muy claro es la irregularidad del calendario, el hecho de que algunos meses incluyan 4 o 5 fines de semana influye en las magnitudes de las observaciones acumuladas. Otro ejemplo es cuando una serie se presenta a valores corrientes, ya que integra en las observaciones el efecto inflacionario que incrementa sus magnitudes de manera ilusoria.

Para amínorar el impacto de estas perturbaciones, los datos originales deberán ajustarse antes de iniciar un análisis más formal. Por ejemplo, la irregularidad del calendario pudiera corregirse estandarizando meses de 30 días, esto es, multiplicando las observaciones de enero por 30/31, las de febrero por 30/28, las de marzo por 30/31 y así sucesivamente hasta el mes de diciembre. Para los datos que se presentan en valores corrientes, pueden ser divididos por algún índice para obtener una serie a valores constantes.

Sin embargo, debe considerarse cuál es el objetivo del pronóstico, si es necesario observar pronósticos mensuales o trimestrales, no tiene sentido utilizar datos semestrales para eliminar, por ejemplo, el efecto de una Semana Santa movible. Puede también ser innecesario, limpiar todas las series que se analizan, se puede dejar inajustados los datos mensuales para las diferentes longitudes de los meses pero permitir un índice estacional que incluya el efecto de los cambios en longitud de un mes a otro⁽⁶⁾.

Asimismo, se deberán excluir todas las observaciones "aberrantes" que presente una serie, pues se pueden considerar ajenas al

(6) Se puede consultar a F.H. Jones quien realiza la formulación de modelos para series con datos que han sido recolectados a intervalos desiguales de tiempo en Time Series in the Time Domain. Editado por E. J. Hannan, P.R. Krishnaiah y M.M. Rao. Ed. North Holland. Amsterdam, 1985. p. 151 y ss.

comportamiento general de esta⁽⁷⁾, o alternativamente, aminorar su influencia mediante la graduación de estos valores extremos.

Para ello, se debe analizar cuidadosamente una serie para detectar si integra posibles datos "aberrantes". En algunos casos es posible detectarlas porque se conoce su causa, como puede ser una política económica implementada para cierto periodo, la existencia de una huelga, una devaluación monetaria, elecciones políticas, una inundación, una festividad, entre otras.

Si la causa de una observación "aberrante" es conocida es conveniente tratar de explicarla y medir sus efectos. Una manera es a través del análisis de intervención el cual permite aislar el efecto provocado por un fenómeno temporal. En otros casos, será muy difícil detectar estas observaciones extremas⁽⁸⁾.

La figura 1.3 muestra lo que podría ser una observación extrema que sale del comportamiento general de la serie.

(7) Observación aberrante proviene del vocablo inglés "outliers" y se consideran a todas las observaciones extremas que se presentan en una serie. Estas pueden afectar considerablemente los niveles de pronósticos si se conservan para la formulación del modelo de series de tiempo, debido a que tienden a sobreestimar la varianza del error y sus subsecuentes pronósticos son sesgados.

(8) Se puede consultar a G.C. Tiao para la detección formal de datos aberrantes en una serie en Time Series in the Time Domain. Op. cit. p. 107 y ss.

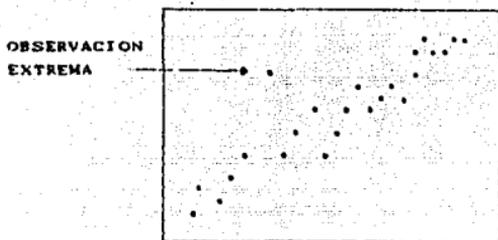


FIGURA 1.3 OBSERVACION EXTREMA EN UNA SERIE

No existe, sin embargo, ninguna regla formal que indique como se deban "limpiar" o preprocesar los datos observados de una serie.

Otro tipo de problema que se presenta en el análisis de una serie de tiempo es la captación de la información. En países como el nuestro, la falta de recursos no permite recopilar información a intervalos cortos de tiempo. De tal manera, si se quiere analizar lapsos menores a un año, es necesario derivar datos a partir de la información agregada con la que se cuenta⁽⁹⁾.

Adicionalmente, puede no disponerse de observaciones para ciertos periodos de alguna serie, lo que implica una seria restricción en

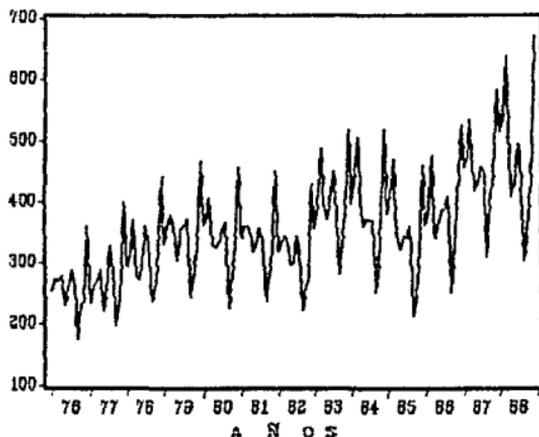
(9) El uso de datos agregados puede inducir a una baja precisión en las estimaciones y predicciones, a una baja potencia en las pruebas aplicadas a los modelos de regresión y a la imposibilidad de llevar a cabo pronósticos en el corto plazo. Existen diversos métodos para desagregar la información (aplicados principalmente para la que se presenta en forma anual), para obtener datos desagregados a intervalos menores de un año como mensuales y trimestrales. Cf. Nieves Hicks Padrón en El problema de la desagregación temporal de Series desde el punto de vista de modelos ARIMA. Tesis ITAM, 1991.

el análisis, y deberán "llenarse" tales huecos mediante algún método estadístico⁽¹⁰⁾.

El economista puede analizar diversas series de tiempo recolectadas en diferentes ámbitos de las ciencias sociales y naturales, como:

En economía: El producto interno bruto trimestral, el índice general de precios al consumidor, el precio de un bien agrícola, las exportaciones totales mensuales, las estadísticas de empleo y desempleo, los niveles de oferta monetaria, entre muchos. La figura 1.4 muestra el total de turistas que se internaron al país de enero de 1976 a diciembre de 1988. (Serie 1).

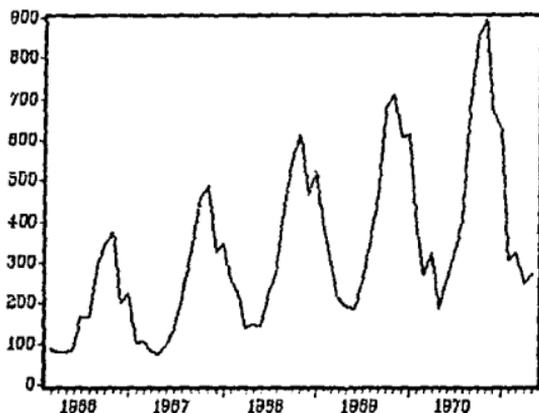
FIGURA 1.4 EL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO
(1976-1988)



(10) Idem.

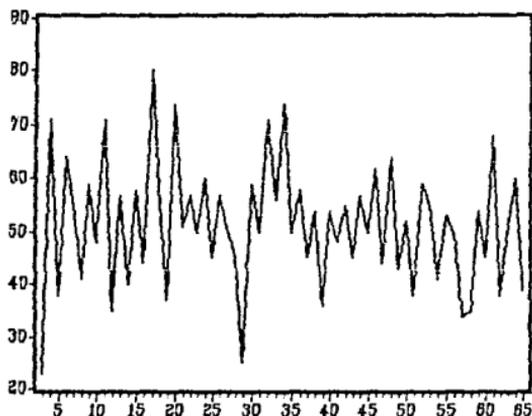
En negocios: Las ventas semanales o mensuales, el total de millas voladas por una línea aérea, la demanda de electricidad por hora por una empresa. La figura 1.5 muestra las ventas en forma mensual de una empresa (Serie 2).

FIGURA 1.5 VOLUMEN DE VENTAS MENSUALES
(1965-1971)



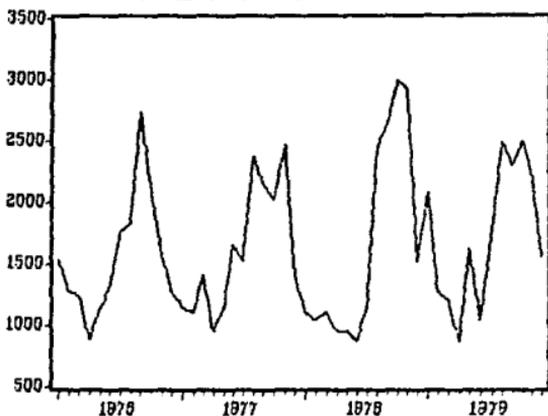
En las ciencias naturales: Existen numerosas series de tiempo en los campos de las ciencias. Algunos ejemplos son la velocidad del viento, estadísticas de precipitación pluvial, actividad solar. La figura 1.6 muestra los resultados de la producción de un proceso químico por lotes compuesto por 70 observaciones (Serie 3).

FIGURA 1.6 PRODUCCION DE UN PROCESO QUIMICO POR LOTES



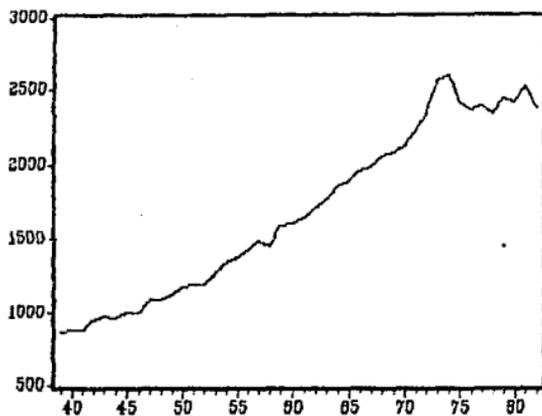
En medicina y salud pública: Estadísticas de epidemiología, reportes de inmunología, electrocardiogramas, encefalogramas. La figura 1.7 muestra los casos notificados de paludismo en México para los años de 1976 a 1982, con cifras mensuales (Serie 4).

FIGURA 1.7 CASOS NOTIFICADOS DE PALUDISMO EN MEXICO (NUMERO DE CASOS)



En Sociología: Estadísticas de criminología, tasa de nacimiento y mortalidad, tasas de suicidio, migración, entre otras. La figura 1.8 muestra el número de nacimientos ocurridos en México de 1938 a 1982. (Serie 5).

FIGURA 1.8 NUMERO DE NACIMIENTOS OCURRIDOS EN MEXICO
(1938 - 1982)



1.3 LA METODOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION DE MODELOS DE SERIES DE TIEMPO.

El enfoque de G. Box y G. Jenkins consiste en extraer los movimientos predecibles que están integrados en una serie de tiempo a partir de los datos observados. Las series son descompuestas en diferentes componentes llamados filtros⁽¹¹⁾. La metodología Box-Jenkins hace uso de tres filtros lineales: el autorregresivo (AR), el de integración (I) y el de medias móviles (MA). De ahí el hecho de llamarla indistintamente como la metodología de modelos ARIMA.

Al pasar los datos por cada filtro, se extraen algunas características de los componentes de las series. El proceso termina cuando se considera que no existe información adicional que filtrar de las series.

(11) Los modelos que se explicarán están basados en que en una serie de tiempo las observaciones sucesivas son altamente dependientes unas con otras y se utiliza esta característica para generar una serie de independientes "ruidos" a_t .



El proceso de ruido blanco a_t se supone transforma al proceso Z_t por medio de algo que es llamado filtro lineal. El filtro lineal simplemente es tomar una suma ponderada de observaciones previas, de tal manera que

$$Z_t = \mu + a_t + \psi a_{t-1} + \psi^2 a_{t-2} + \dots$$

donde las ψ transforman al ruido blanco a_t en Z_t . El modelo lineal estocástico supone que una serie puede generarse por una agregación lineal de ruido blanco. G. Box y G. Jenkins. Op. cit. p. 8 y 9.

La representación esquemática de como los datos originales son transformados por los 3 filtros, es la siguiente:



FIGURA 1.9 EL MODELO ARIMA

Después de aplicar el filtro de integración a los datos originales z_t se obtiene una serie filtrada v_t que cumple con las condiciones de estacionaridad. Posteriormente, el filtro autorregresivo produce una serie intermedia e_t , y finalmente el filtro de medias móviles genera una serie α_t , que es ruido blanco. El objetivo de aplicar estos filtros es terminar con una sucesión de variables aleatorias α_t definidas como ruido blanco, la cual es impredecible.

La variable aleatoria α_t conocida también como error, shock o ruido blanco, se asume estar normal e independientemente distribuida con media cero, varianza constante e independiente de z_{t-k} , esto es

$$E(\alpha_t) = 0 \quad (1.15)$$

$$E(\alpha_t \alpha_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$E(\alpha_t z_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

La naturaleza de estos filtros lineales es la única información que se utiliza para describir el comportamiento de las series.

Encontrar el número y naturaleza de estos filtros es identificar la estructura para la construcción del modelo. La metodología Box-Jenkins proporciona un método para identificar cuales filtros son los más apropiados en el análisis de una serie de tiempo particular, para estimar los parámetros que la describen, para diagnosticar la exactitud y confiabilidad de los modelos que han sido estimados y, finalmente, para pronosticar⁽¹²⁾.

(12) Cf. Walter Vandaele en Applied Time Series and Box-Jenkins Models. Ed. Academic Press. U.S. 1976. p. 10

CAPITULO II

ESTACIONARIDAD DE UNA SERIE DE TIEMPO

CAPITULO II ESTACIONARIDAD DE UNA SERIE DE TIEMPO

En la práctica la mayoría de las series económicas deben considerarse como no estacionarias, por lo que las propiedades de los procesos estocásticos que las generan cambian sobre el tiempo. Ante tal situación, se debe transformar la serie original para que cumpla con las condiciones de media y varianza constantes.

El primer paso en el análisis de toda serie de tiempo es construir una gráfica de las observaciones contra el tiempo. La gráfica puede develar ciertas características importantes como son la existencia de una tendencia en la serie, un comportamiento estacional, discontinuidades y datos aberrantes. Concretamente el análisis gráfico de los datos intenta descubrir si:

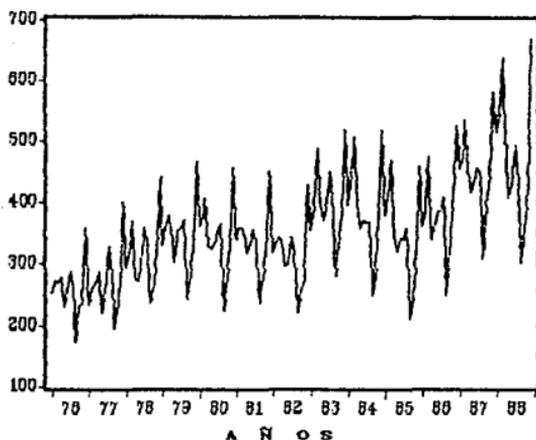
- 1) La varianza de la serie puede no considerarse constante sobre el tiempo;
- 2) La existencia de una tendencia; y
- 3) La existencia de un patrón estacional.

De encontrarse en la gráfica el punto 1) se viola el supuesto de varianza constante y de encontrarse los puntos 2) y 3) son indicaciones de que la media no es constante sobre el tiempo.

La figura 2.1 muestra nuevamente el total del Turismo Receptivo en México. Los datos se presentan en forma mensual de enero de 1976 a diciembre de 1988. Al examinarse la serie, se observa un crecimiento a lo largo de todo el período. El crecimiento de la población mundial y del nivel de vida de los países emisores,

pueden ser causas que contribuyen a la existencia de esta tendencia.

FIGURA 2.1 EL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO
(1976-1988)



También es evidente la existencia de un comportamiento estacional, en donde para el periodo de diciembre a marzo de cada año se tiene el nivel más elevado de afluencia de visitantes. Una punta secundaria se presenta en los trimestres de junio a agosto de cada año y los meses de menor magnitud en las observaciones son mayo y septiembre. La ocurrencia de este patrón estacional se debe a las características particulares del turismo, como son los periodos vacacionales en determinados meses del año, las condiciones climatológicas tanto del país emisor como receptor de turismo, los atractivos naturales y culturales que motivan los desplazamientos temporales, etc. Por ejemplo, durante el periodo vacacional de

invierno muchos norteamericanos se trasladan a México buscando condiciones climatológicas más agradables que las existentes en su país para este periodo. Estas variaciones estacionales ocurren con un alto grado de regularidad cada año, presentando una periodicidad anual o ciclo.

Finalmente, en la gráfica se puede observar que las variaciones en los datos son más "volátiles" conforme avanza el tiempo, es decir, la varianza se incrementa conforme el nivel de los datos se incrementa.

Estos 3 comportamientos indican que la serie debe considerarse como no estacionaria.

2.1 ESTABILIZACION DE LA VARIANZA

El análisis de series de tiempo requiere que la serie sea estacionaria, en particular que la varianza del proceso sea constante sobre el tiempo. Aunque las estimaciones de los parámetros y los subsecuentes pronósticos no son necesariamente incorrectos si la varianza es creciente o decreciente, el realizar afirmaciones sobre la distribución de éstos pueden resultar no del todo confiables.

Existen diferentes transformaciones de los datos para inducir a una varianza constante. La idea básica es transformar los datos de tal

manera que la curva original se linealice y al mismo tiempo haga constante la varianza sobre toda la serie. Existen dos principales transformaciones: la logarítmica y la de raíz cuadrada⁽¹⁾.

La transformación logarítmica se utiliza efectivamente cuando:

- 1) La varianza de la serie es proporcional al nivel medio de la serie.
- 2) El nivel medio de la serie se incrementa (decrece) en una tasa porcentual constante⁽²⁾.

La figura 2.2(a) muestra la gráfica de una serie a la que es necesario aplicar una transformación potencia para estabilizar su varianza, pues conforme se avanza en la serie la dispersión de los datos se incrementa. La figura 2.2(b) muestra el comportamiento que tendría esta serie "sobrecorregida" por la aplicación de

(1) Para una gran mayoría de series de tiempo es suficiente aplicar cualquiera de estas dos transformaciones para inducir estacionaridad. Sin embargo, sólo son parte de las llamadas transformaciones potencia sugeridas por Box y Cox (1964):

$$Z^{(\beta)} = \begin{cases} \frac{Z^\beta - 1}{\beta} & \beta \neq 0 \\ \log Z & \beta = 0 \end{cases}$$

donde:

Z = Serie original

(β) = Parámetro que puede tomar valores positivos y negativos

Sí $\beta = 0$ se refiere a la transformación logarítmica.

Sí $\beta = 1/2$ es la transformación por raíz cuadrada.

(2) W. Vandaele Op. Cit. p. 21

logaritmos, la dispersión de los datos es ahora mayor en el inicio de la serie.

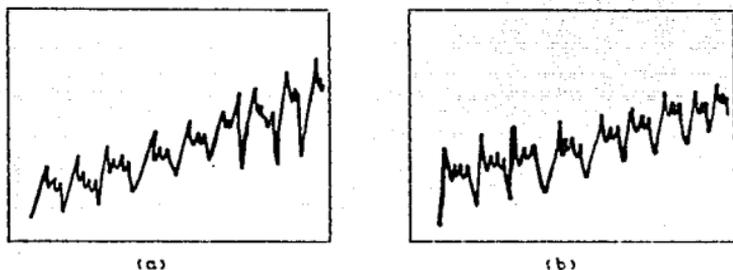


FIGURA 2.2 SERIE ORIGINAL Y SERIE TRANSFORMADA MEDIANTE LOGARITMOS

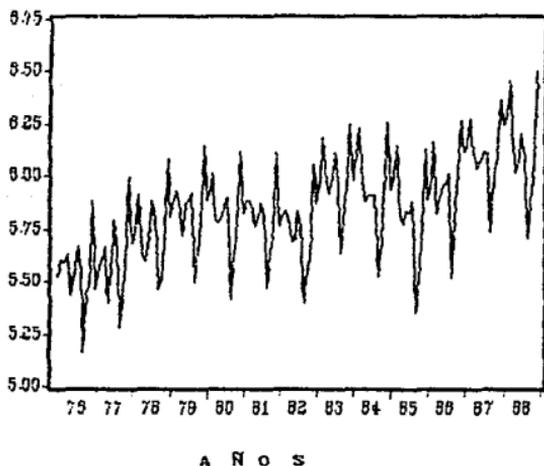
Cuando la transformación logarítmica "sobrecorriga" la varianza de una serie, se recomienda utilizar una transformación intermedia que establezca un balance entre los datos originales y la transformación por logaritmos, como es la transformación por raíz cuadrada⁽⁹⁾.

La figura 2.3 muestra a la serie del Turismo Receptivo transformada mediante la aplicación de logaritmos. Es visible en esta gráfica que la transformación logarítmica estabilizó relativamente la dispersión de los datos, y se puede considerar que la varianza de

(9) Consultar a Gabriel Vera Ferrer y a Víctor M. Guerrero en Ajuste Estacional de una Serie de Tiempo mediante el uso complementario de Métodos Tradicionales y la técnica Box-Jenkins. Documento 22 del Banco de México, México 1980. En este documento se establece el criterio del coeficiente de variación de $S_z(z^t)^{1/2}$ para determinar el valor de (β) más adecuado para estabilizar la varianza de una serie de tiempo particular.

la serie es constante sobre el tiempo (Serie 1.1).

FIGURA 2.3 LA TRANSFORMACION POR LOGARITMOS DE LA SERIE DEL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO



Aún cuando una varianza se logre estabilizar con cualquiera de las transformaciones mencionadas, los componentes de tendencia y estacionalidad seguirán presentes en la serie.

2.2 REMOCION DE LA TENDENCIA

Generalmente, las series de tiempo económicas están caracterizadas por movimientos a lo largo de una línea de tendencia⁽⁴⁾.

Intuitivamente, se desea considerar que la tendencia de la serie no sea determinística sino estocástica⁽⁵⁾. Para ello se debe aclarar la diferencia entre ajustar una serie y modelar una serie. Si el objetivo es meramente ajustar, se puede utilizar un polinomio del grado necesario que únicamente va a lograr reproducir a la serie en cada uno de sus puntos, pero que no podrá capturar ninguna característica del comportamiento estocástico de los datos. Por el contrario, si se considera que la serie ha sido generada por un proceso estocástico, con una estructura que puede ser caracterizada y descrita, un modelo de series de tiempo puede proveer, de manera más adecuada, una descripción de la naturaleza del proceso que generó la muestra de observaciones. El problema es determinar cuando el nivel de una serie se debe a una tendencia determinística o estocástica⁽⁶⁾.

(4) Se puede definir a la tendencia como el cambio sistemático en el nivel medio de la serie y que indica la existencia de una media no constante.

(5) Se puede consultar a S.M. Pandit y S.M. Wu en *Time Series and System Analysis with Applications*. Ed. John Wiley and Sons. U.S. 1983 quienes analizan más ampliamente los diferentes tipos de tendencias que se pueden presentar en una serie. P. 314 y ss.

(6) Cf. Robert S. Pindyck y Daniel L. Rubinfeld en *Econometric Models and Economic Forecasts*. International Student Edition, McGraw Hill Book, Co. Singapore, 1986. p. 495

Debido a lo anterior Box y Jenkins, utilizan un método alternativo denominado diferenciación. La diferenciación consiste en substraer los valores de las observaciones de una sobre otra en un orden de tiempo establecido. Por ejemplo, una diferenciación de primer orden consiste en la diferencia entre los valores de 2 observaciones adyacentes; una diferenciación de segundo orden es tomar diferencias de la serie diferenciada y así sucesivamente.

Si se tiene una serie original z_t , la diferencia de primer orden se expresa como

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} \quad (2.1)$$

La diferencia de segundo orden se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} \nabla^2 z_t &= \nabla \nabla z_t = \nabla(z_t - z_{t-1}) = (z_t - z_{t-1}) - (z_{t-1} - z_{t-2}) \\ &= z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

y así sucesivamente⁽⁷⁾.

Si se aplican diferenciaciones a una serie es posible obtener una nueva serie libre de tendencia. Por cada vez que se diferencie una serie se perderá una observación.

(7) El operador de diferenciación ∇ se utiliza para indicar que una serie es transformada mediante una diferenciación de primer orden. Por lo tanto, ∇^2 es la diferenciación de la serie diferenciada. Generalizando, la diferenciación de orden d se denota por ∇^d . Si una serie no estacionaria se transforma en estacionaria después de la aplicación de una o más diferenciaciones, se dice que la serie es homogénea de grado d , siendo d el número de diferenciaciones aplicadas.

Para visualizar como la diferenciación puede eliminar el componente de tendencia de una serie se presenta la siguiente tabla que contempla una serie simple y su primera diferencia.

SERIE ORIGINAL	SERIE DIFERENCIADA
z_t	$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$
1	-
3	$3 - 1 = 2$
5	$5 - 3 = 2$
7	$7 - 5 = 2$
9	$9 - 7 = 2$
11	$11 - 9 = 2$
13	$13 - 11 = 2$
15	$15 - 13 = 2$

La gráfica de ambas series se presentan en la figura 2.4, en la primera se muestra a la serie original donde se visualiza una tendencia lineal y en su diferencia se tiene una serie constante.

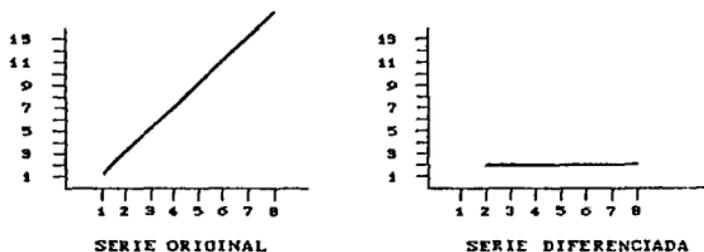


FIGURA 2.4 GRAFICA DE UNA SERIE HIPOTETICA Y SU PRIMERA DIFERENCIA

Si en lugar de una tendencia lineal la serie presentará una tendencia cuadrática sería necesario tomar más de una diferencia

para eliminar el componente de tendencia. La siguiente tabla muestra otra serie simple que presenta este comportamiento así como su primera y segunda diferencia:

SERIE ORIGINAL z_t	1o. DIFERENCIA ∇z_t	2o. DIFERENCIA $\nabla^2 z_t$
1	--	--
6	6 - 1 = 5	--
15	15 - 6 = 9	9 - 5 = 4
28	28 - 15 = 13	13 - 9 = 4
45	45 - 28 = 17	17 - 13 = 4
66	66 - 45 = 21	21 - 17 = 4
99	99 - 66 = 25	25 - 21 = 4

La gráfica de estas series se presentan en la figura 2.5, en la primera se muestra a la serie original donde se visualiza una tendencia cuadrática, la primera diferencia tiene una tendencia lineal y finalmente la 2a. diferencia hace una serie constante.

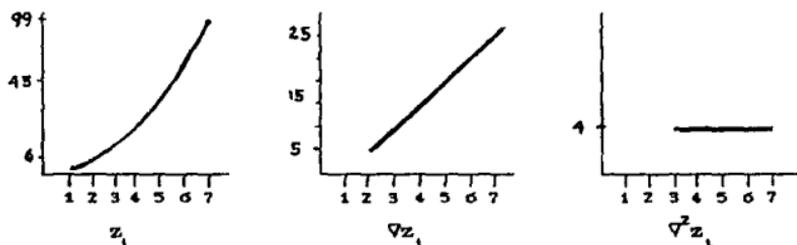
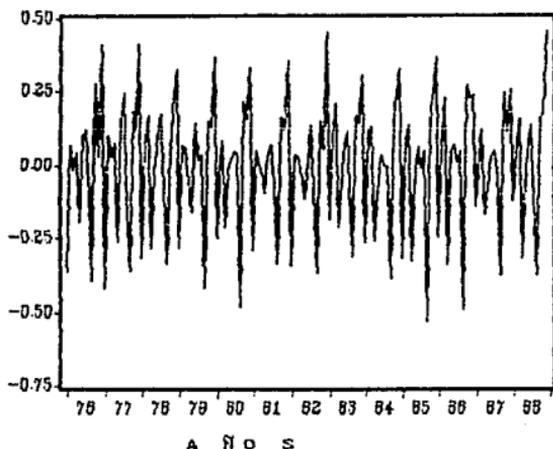


FIGURA 2.5 GRAFICA DE UNA SERIE Y SUS 1o. Y 2o. DIFERENCIAS

Para muchas series económicas, una diferenciación de primer o segundo orden será suficiente para remover el componente de tendencia. Una vez que la tendencia ha sido removida de una serie, aplicar diferenciaciones adicionales sigue produciendo series sin tendencia, pero la sobrediferenciación de una serie puede complicar la estructura del modelo a identificar y perder características importantes de la serie, esto es algo que debe de evitarse. En el capítulo IV se indica con mayor detalle cuantas diferenciaciones es adecuado aplicar a una serie para considerarla como estacionaria.

La figura 2.6 muestra la gráfica de la primera diferencia de la serie por logaritmos del Turismo Receptivo en México (Serie 1.2).

FIGURA 2.6 GRAFICA DE LA PRIMERA DIFERENCIA DE LAS SERIE TRANSFORMADA POR LOGARITMOS DEL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO



Con la primera diferencia de la serie transformada por logaritmos se elimina la tendencia que se presentaba en la serie original, sin embargo, el comportamiento estacional sigue aun presente.

2.3 FLUCTUACIONES ESTACIONALES

Muchas series tienen integrados comportamientos estacionales, que se definen como los movimientos cíclicos de corta duración que aparecen año tras año, con cierto grado de regularidad⁽⁸⁾.

Así como se mencionó que existen varios métodos para remover una tendencia, existen también diversos métodos para tratar a la estacionalidad. La gran mayoría de estos procedimientos son

(8) La estacionalidad impacta de manera considerable en muchas actividades económicas y sociales. Las variaciones en el clima en un año, las temperaturas máxima y mínima, la precipitación pluvial, la nieve, etc. son algunos ejemplos de las causas que provocan el fenómeno de estacionalidad en determinados meses y de manera similar año tras año. Existen claro, cambios en el patrón de cada año, por ejemplo, ningún verano es igual a otro.

Aparte de esta estacionalidad natural, existe la estacionalidad institucional debido a causas como los periodos vacacionales, festivales culturales y religiosos, las ventas navideñas, etc. Se puede consultar más a fondo estas causas a Raymond Baron Raphael en *Forecasting for Time Series Analysis*. The Economist Intelligence Unit. London, 1975.

llamados de autoajuste⁽⁹⁾.

El procedimiento propuesto por Box y Jenkins es la diferenciación estacional, que es muy similar a la diferenciación regular mencionada anteriormente y tiene el mismo objetivo de estabilizar el nivel medio de la serie.

Una diferenciación estacional de orden 1 indica una primera diferencia entre dos observaciones distanciadas en un periodo s , donde s es el rezago estacional.

Por ejemplo, si la serie ha sido recolectada mensualmente y presenta fluctuaciones estacionales que se repiten cada doce meses, se puede eliminar este comportamiento estacional mediante una diferenciación estacional de primer orden, con un periodo $s = 12$. Sea z_t la serie original que presenta las fluctuaciones estacionales mensuales, la serie diferenciada es

$$\nabla_{12} z_t = z_t - z_{t-12} \quad (2.3)$$

La diferenciación estacional de segundo orden con un periodo de diferenciación $s = 12$ se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla_{12}^2 z_t &= \nabla_{12} (z_t - z_{t-12}) = (z_t - z_{t-12}) - (z_{t-12} - z_{t-24}) \\ &= z_t - 2z_{t-12} + z_{t-24} \end{aligned} \quad (2.4)$$

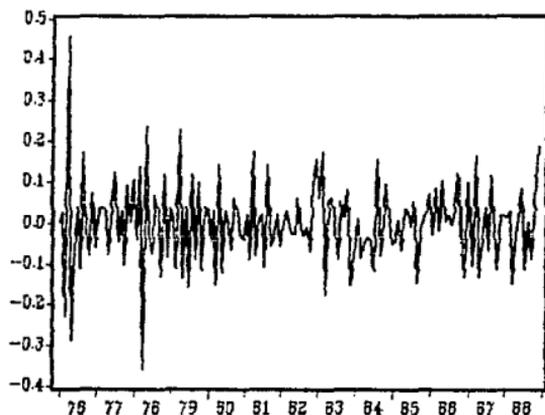
En general, una diferenciación estacional de orden D se denota como

(9) Algunos métodos para eliminar las fluctuaciones estacionales son la descomposición clásica, medias móviles, modelos de regresión con variables dummy. Cf. W. Well y Spyros Makridakis en Forecasting Methods for Management. Ed. J. Wiley and Sons, U.S. 1983.

∇_s^D , con un periodo de diferenciación estacional s .

Al igual que en la diferenciación consecutiva donde se pierde una observación por cada diferencia, en la diferenciación estacional se perderán tantas observaciones como largo sea el periodo de diferenciación s .

FIGURA 2.7 SERIE TRANSFORMADA MEDIANTE LOGARITMOS Y DIFERENCIACIONES REGULAR Y ESTACIONAL DEL TOTAL DEL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO



A Ñ O S

La figura 2.7 muestra la gráfica de la serie resultante de la aplicación de una diferenciación regular y una diferenciación estacional de primer orden, con un periodo s igual a 12, de la serie transformada por logaritmos del Total del Turismo Receptivo. El comportamiento estacional al igual que la tendencia ya no se

presenta en la gráfica y la serie puede considerarse como estacionaria (Serie 1.3).

En las modificaciones que se aplican a una serie para inducir estacionaridad se pueden combinar la transformación de varianza y las diferenciaciones consecutivas y estacionales dependiendo de las características de la serie de tiempo en análisis. Todas estas transformaciones conforman el filtro de integración:



FIGURA 2.9 EL FILTRO DE INTEORACION

La serie original z_t se transforma al filtrarse por medio del operador de estacionaridad en una nueva serie w_t . Esta serie w_t debe cumplir con las condiciones de media y varianza constantes sobre el tiempo.

CAPITULO III

MODELOS LINEALES PARA SERIES DE TIEMPO

CAPITULO III MODELOS LINEALES PARA SERIES DE TIEMPO

En este capítulo se analizan las características principales de los filtros autorregresivos, de medias móviles y mixtos que se presentaron esquemáticamente en la figura 1.7. Los modelos que se derivan de estos filtros permiten ajustar un gran número de series de tiempo estacionarias. Los modelos autorregresivos y los de medias móviles se analizan en las secciones 3.1 y 3.2, respectivamente, seguidos de los modelos mixtos en la sección 3.3. Finalmente, en las secciones 3.4 y 3.5 se presentan respectivamente, los modelos autorregresivos integrados y de medias móviles (ARIMA) y los modelos estacionales, que abarcan el análisis de las series consideradas como no estacionarias.

3.1 MODELOS AUTORREGRESIVOS

Frecuentemente, en el análisis económico, para inferir sobre los posibles valores futuros de una variable, se hace uso de las magnitudes precedentes de la misma y de ninguna otra variable. Por ejemplo, el nivel del consumo global realizada por una economía en cierto año puede ser consecuencia del nivel de consumo de un año anterior, la expectativa de beneficios en una empresa pueden estar determinadas por los beneficios obtenidos en periodos precedentes. Por lo que los modelos pueden contener adicionalmente a los valores corrientes de la variable a explicar, los valores tomados por ésta misma en periodos anteriores, es decir, el análisis se realiza en base a su comportamiento histórico.

3.1.1 EL MODELO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN

Una serie de tiempo se dice gobernada por un proceso autorregresivo de primer orden si el valor actual de la serie de tiempo $z_t^{(1)}$ puede expresarse como una función lineal del valor previo de la serie z_{t-1} y un término aleatorio a_t , esto es

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t \quad (3.1)$$

donde ϕ_1 es el parámetro autorregresivo que describe el efecto de un cambio unitario de z_{t-1} en z_t y a_t es el término aleatorio que cumple con las condiciones establecidas en (1.15), (1.16) y (1.17).

Si se ve a (3.1) como un modelo de regresión lineal en el cual la variable dependiente z_t es explicada y regresionada por su valor previo z_{t-1} , se puede entender porque a dicho proceso se le llama autorregresivo. El proceso descrito en (3.1) se define como un proceso autorregresivo de primer orden o AR(1). El orden de un proceso corresponde al número de parámetros que necesitan ser estimados. En el caso de los procesos autorregresivos, el orden del proceso corresponderá al número de retrasos de z_t incluidos en el modelo.

La figura 3.1 muestra esquemáticamente el proceso autorregresivo de

(1) Los símbolos $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ que se utilizan en la notación de los modelos denotan los valores de un proceso medidos en los intervalos iguales de tiempo $t, t-1, t-2, \dots$ y se expresan como desviaciones de la media de la serie, a menos de que se indique lo contrario. Esto se realiza para facilitar la explicación de cada uno de los procesos al no incluir el intercepto en ellos.

primer orden:



FIGURA 3.1 EL MODELO AR(1)

El término aleatorio a_t o shock es la entrada del proceso, el cual se transforma por medio del operador autorregresivo para obtener como resultado a z_t . Sin embargo, en la práctica, la única información disponible es z_t y no los shocks, por lo que para identificar el proceso que gobierna una serie, deben filtrarse los principales componentes de ésta y posteriormente utilizar estos filtros para deducir el modelo adecuado⁽²⁾.

Las figuras 3.2 y 3.3 muestran dos realizaciones típicas de procesos autorregresivos de primer orden. La figura 3.2 muestra una simulación del proceso $z_t = 0.8z_{t-1} + a_t$, cada observación está altamente correlacionada con aquellas observaciones cercanas. La figura 3.3 muestra una simulación del proceso $z_t = -0.8 + a_t$, aquí es visible un comportamiento discernible de altibajos. En el análisis de las autocovarianzas y principalmente de las

(2) Cuando se explique la función memoria para este proceso en la sección 3.1.1.2, se verá como un proceso AR(1) se puede representar como un conjunto infinito de a_t o shocks como entradas del proceso, que permitirá entender más claramente la figura 3.1.

autocorrelaciones de los diferentes procesos se verá de manera detallada la importancia de los signos y magnitudes de los valores de los parámetros.

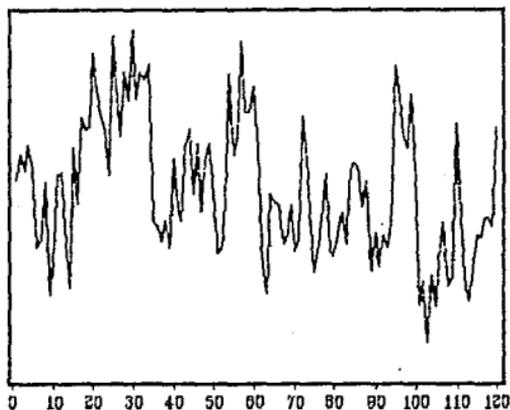


FIGURA 3.2 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 0.8z_{t-1} + a_t$

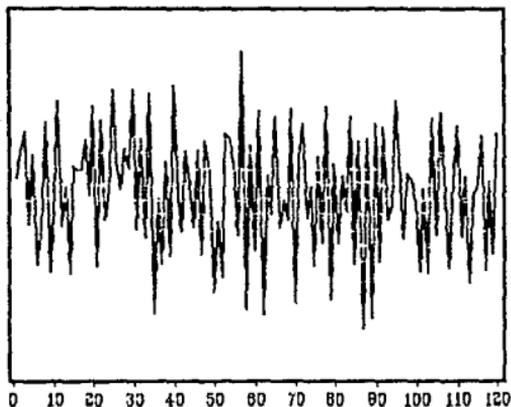


FIGURA 3.3 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = -0.8z_{t-1} + a_t$

3.1.1.1 RESTRICCIONES EN EL PARAMETRO DEL PROCESO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN: LA CONDICION DE ESTACIONARIDAD.

Como la estacionaridad de una serie es condición necesaria para su análisis, es importante conocer que restricciones impone sobre el parámetro ϕ_1 , para ello se evalúa la media y la varianza del proceso (evaluación de la condición de estacionaridad de segundo orden).

Para la media

$$\begin{aligned} E(z_t) &= E(\phi_1 z_{t-1} + \alpha_t) \\ &= \phi_1 E(z_{t-1}) + E(\alpha_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

debido a que z_t y z_{t-1} se expresan como desviaciones alrededor de la media y la esperanza de α_t es cero, lo que implica que la media de la serie no impone ninguna restricción sobre el parámetro ϕ_1 .

Sin embargo, la varianza del proceso debe ser no negativa, por lo que es necesario que $|\phi_1|$ sea menor 1. Para verificar dicha afirmación se eleva al cuadrado ambos lados de (3.1) y se operan esperanzas,

$$E(z_t^2) = E[\phi_1 z_{t-1} + \alpha_t]^2$$

sí z_t representa desviaciones con respecto a la media, el lado

izquierdo de la expresión anterior es la varianza de z_t ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_t) &= E\left[(\phi_1 z_{t-1})^2 + 2\phi_1 z_{t-1} \alpha_t + \alpha_t^2\right] \\ &= \phi_1^2 E(z_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(z_{t-1} \alpha_t) + E(\alpha_t^2) \\ &= \phi_1^2 \text{Var}(z_{t-1}) + 0 + \sigma_\alpha^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

en (3.2) se asume que z_{t-1} y α_t son independientes por (1.17) y que $E(\alpha_t^2) = \sigma_\alpha^2$ por (1.16). Ahora, si la varianza se calcula de un proceso estacionario, no existe problema al cambiar el periodo sobre el cual se evalúa. Entonces $\text{Var}(z_t) = \text{Var}(z_{t-1})$, se sustituye en (3.2),

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_t) &= \phi_1^2 \text{Var}(z_t) + \sigma_\alpha^2 \\ (1 - \phi_1^2) \text{Var}(z_t) &= \sigma_\alpha^2 \\ \text{Var}(z_t) &= \frac{\sigma_\alpha^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Para que (3.3) sea no negativo, $1 - \phi_1^2$ debe ser no negativo, lo que implica que

$$\begin{aligned} 1 - \phi_1^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq \phi_1^2 \\ |\phi_1| &\leq 1 \end{aligned}$$

Para $|\phi_1| = 1$ la $\text{Var}(z_t)$ es infinita, y la serie se considera no estacionaria. Por lo tanto, para que la varianza sea no negativa y finita, la restricción final impuesta a ϕ_1 es

$$|\phi_1| < 1$$

esta restricción es la condición de estacionaridad para un proceso AR(1).

Los dos procesos simulados anteriores (figuras 3.2 y 3.3) son estacionarios porque los valores de sus parámetros son menores a uno en valor absoluto. A fin de compararlos con un proceso no estacionario se simuló el proceso $z_t = 1.1z_{t-1} + a_t$ que muestra un crecimiento explosivo en las magnitudes de la serie, ya que el valor de $\phi_1 = 1.1$ rompe con la condición de estacionaridad (figura 3.4).

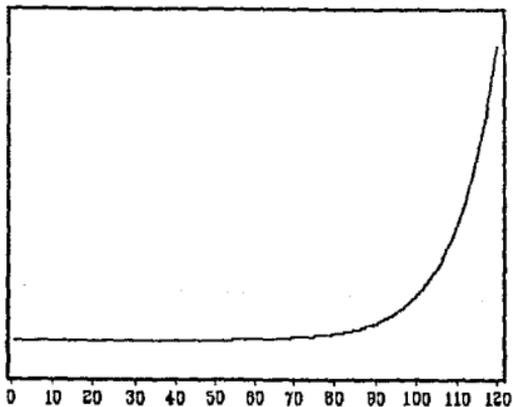


FIGURA 3.4 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 1.1z_{t-1} + a_t$

3.1.1.2 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO AR(1)

Mediante el análisis de las autocovarianzas, autocorrelaciones y función memoria es posible distinguir a un proceso autorregresivo de cualquier otro proceso, debido a que son únicas para cada proceso estocástico⁽³⁾.

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

La autocovarianza de z_t en el rezago 1 se denota por λ_1 , y se define como la covarianza entre z_t y z_{t-1} ,

$$\lambda_1 = \text{Cov}(z_t, z_{t-1}) = E(z_t z_{t-1})$$

Nuevamente z_t y z_{t-1} representan desviaciones a partir de la media de la serie. Debido a la condición de estacionariedad, la autocovarianza depende únicamente del rezago entre z_t y z_{t-1} , se desarrolla λ_1 ,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= E(\phi_1 z_{t-1} + \alpha_t)(z_{t-1}) \\ &= \phi_1 E(z_{t-1}^2) + E(z_{t-1} \alpha_t) \\ &= \phi_1 \text{Var}(z_{t-1}) + \text{Cov}(z_{t-1}, \alpha_t) \\ &= \phi_1 \text{Var}(z_t) + 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

Al igual que se denotó a la covarianza de z_t con z_{t-1} como λ_1 , se

(3) W. Vandaele hace la analogía de que las autocovarianzas, autocorrelaciones y función memoria distinguen a un proceso estocástico como la huella digital a una persona. Op. cit. p. 35

puede denotar a la varianza de z_t como λ_0 , se sustituye en (3.4).

$$\lambda_1 = \phi_1 \lambda_0 \quad (3.5)$$

La autocovarianza en el rezago 2, λ_2 , se define como la covarianza entre z_t y z_{t-2} ,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \text{Gov}(z_t, z_{t-2}) = E(z_t z_{t-2}) \\ &= E(\phi_1 z_{t-1} + \alpha_t)(z_{t-2}) \\ &= \phi_1 E(z_{t-1} z_{t-2}) + E(\alpha_t z_{t-2}) \\ &= \phi_1 \text{Gov}(z_{t-1}, z_{t-2}) + \text{Gov}(\alpha_t, z_{t-2}) \end{aligned}$$

dado que el rezago entre z_{t-1} y z_{t-2} es solamente de un periodo, entonces $\text{Gov}(z_{t-1}, z_{t-2})$ es simplemente λ_1 . Además α_t es independiente de z_{t-2} lo que reduce a la expresión anterior en

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \phi_1 \lambda_1 + 0 \quad \text{sustituyendo } \lambda_1 \text{ por su valor de (3.5), queda} \\ &= \phi_1 (\phi_1 \lambda_0) \\ &= \phi_1^2 \lambda_0 \quad (3.6) \end{aligned}$$

Si se procede de la misma forma, se tiene que para los rezagos $k > 0$ las autocovarianzas se definen como

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \phi_1 \lambda_{k-1} \\ &= \phi_1^k \lambda_0 \quad (3.7) \end{aligned}$$

El segundo parámetro útil que caracteriza a un proceso estocástico es el parámetro de autocorrelación. La autocorrelación en el rezago k , ρ_k , se define como el cociente entre la autocovarianza en el rezago k y la autocovarianza en el rezago 0, o sea la varianza de

z_t (ver 1.1f). Para el proceso autorregresivo de primer orden, las autocorrelaciones se definen como

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = \frac{\phi_1^k \lambda_0}{\lambda_0} \\ &= \phi_1^k \quad k > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por definición $\rho_0 = 1$ para todos los procesos estocásticos.

La figura 3.5 muestra las gráficas de las autocorrelaciones de los procesos simulados $z_t = 0.8z_{t-1} + \sigma_t$ y $z_t = -0.8z_{t-1} + \sigma_t$ a diferentes rezagos de $k^{(4)}$. Mientras las autocorrelaciones para el primer proceso decaen exponencialmente conforme aumenta el rezago k debido a un parámetro ϕ_1 positivo, las autocorrelaciones para el segundo proceso decaen oscilando en signo correspondiente a un parámetro ϕ_1 negativo.

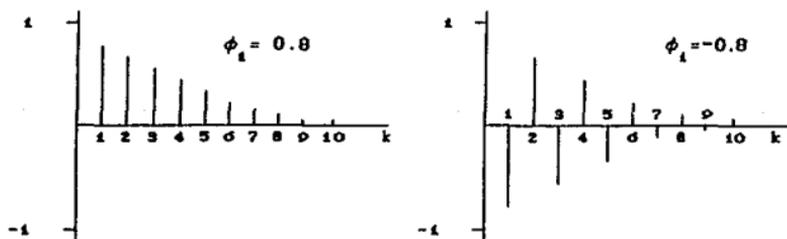


FIGURA 3.5 AUTOCORRELACIONES DE DOS PROCESOS AUTORREGRESIVOS DE PRIMER ORDEN

(4) A la gráfica de las autocorrelaciones a diferentes rezagos de un proceso se le denomina función de autocorrelación o correlograma. En el capítulo IV se verá más a detalle las funciones de autocorrelación de los diferentes procesos ARIMA.

FUNCION MEMORIA

El proceso AR(1) se distingue por poseer una "larga memoria". Se puede reescribir la ecuación $z_t = \phi_1 z_{t-1} + \alpha_t$ dada en (3.1), unicamente en términos de los errores pasados o shocks, mediante sucesivas eliminaciones de la variable z_t ,

como $z_{t-1} = \phi_1 z_{t-2} + \alpha_{t-1}$, se sustituye en (3.1)

$$\begin{aligned} z_t &= \phi_1 (\phi_1 z_{t-2} + \alpha_{t-1}) + \alpha_t \\ &= \phi_1^2 z_{t-2} + \phi_1 \alpha_{t-1} + \alpha_t \end{aligned}$$

y como $z_{t-2} = \phi_1 z_{t-3} + \alpha_{t-2}$, se sustituye en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} z_t &= \phi_1^2 (\phi_1 z_{t-3} + \alpha_{t-2}) + \phi_1 \alpha_{t-1} + \alpha_t \\ &= \phi_1^3 z_{t-3} + \phi_1^2 \alpha_{t-2} + \phi_1 \alpha_{t-1} + \alpha_t \end{aligned}$$

Si se continúa eliminando las variables desfazadas de z_t , se obtiene la representación "error-shock" del proceso AR(1),

$$z_t = \alpha_t + \phi_1 \alpha_{t-1} + \phi_1^2 \alpha_{t-2} + \phi_1^3 \alpha_{t-3} + \dots \quad (3.2)$$

Por lo que el proceso AR(1) puede ser reexpresado como la suma del error actual y un infinito número de términos de error pasados. La observación z_t está influenciada por los shocks α_t , que ocurren en el pasado, por lo que se dice que tiene una memoria infinita. Si el proceso es estacionario, con $|\phi_1| < 1$, el efecto del shock se disipará gradualmente conforme aumente el rezago del término de error. Si $|\phi_1| > 1$ se daría un mayor peso a las variables más retrasadas de α_t en la explicación del comportamiento actual, y se tendría una representación irreal del proceso autorregresivo.

Un coeficiente memoria en el rezago 1 se define como el coeficiente del término de error α_{t-1} , que es el impacto en la observación actual z_t de un shock ocurrido hace un periodo. En general, el coeficiente memoria para cualquier rezago k , para $k > 0$, es el coeficiente del término de error α_{t-k} y representa el impacto de un shock ocurrido hace k periodos de tiempo sobre la observación actual z_t .

La función memoria es la gráfica de los coeficientes memoria en los diferentes rezagos k , para $k \geq 0$, cuyo valor se toma directamente de la representación "error-shock" del proceso AR(1). La figura 3.6 muestra la función memoria del proceso AR(1) con $\phi_1 = 0.8$ cuyo valor se sustituye en (3.9) para obtener los coeficientes memoria 0.80, 0.64, 0.51, 0.41, 0.33, 0.26, 0.21, 0.17 etc. Se nota la similitud de la función memoria con el correlograma de este proceso.

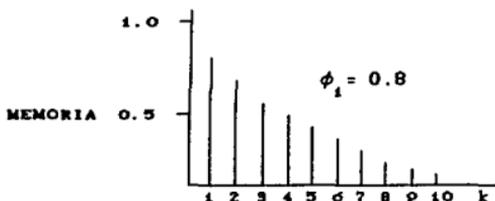


FIGURA 3.6 FUNCIÓN MEMORIA DE UN PROCESO AR(1)

3.1.2 EL MODELO AUTORREGRESIVO DE SEGUNDO ORDEN

A la ecuación (3.1) del proceso AR(1) se le pueden incluir variables retrasadas adicionales. Por ejemplo, si los eventos de 2 periodos anteriores tienen efecto en lo que sucede actualmente, se puede extender el proceso AR(1) para incluir z_{t-2} , esto es

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t \quad (3.10)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los parámetros autorregresivos de primer y segundo orden, respectivamente. El modelo en (3.10) se define como un proceso autorregresivo de segundo orden o AR(2).

Las siguientes figuras muestran algunas realizaciones típicas de modelos AR(2).

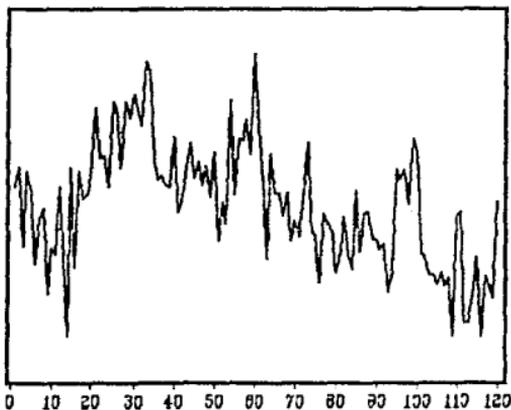


FIGURA 3.7 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 0.4z_{t-1} + 0.5z_{t-2} + a_t$

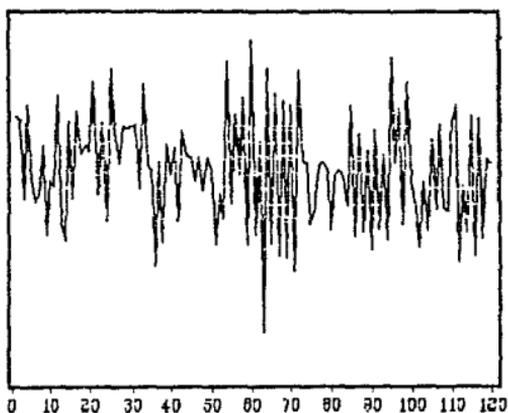


FIGURA 3.8 REALIZACION DEL PROCESO $Z_t = -0.4Z_{t-1} + 0.5Z_{t-2} + a_t$

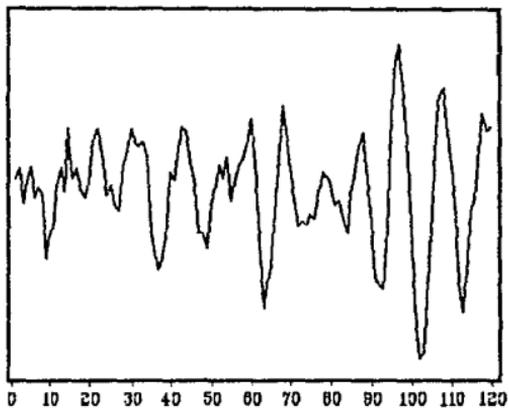


FIGURA 3.9 REALIZACION DEL PROCESO $Z_t = 1.5Z_{t-1} - 0.9Z_{t-2} + a_t$

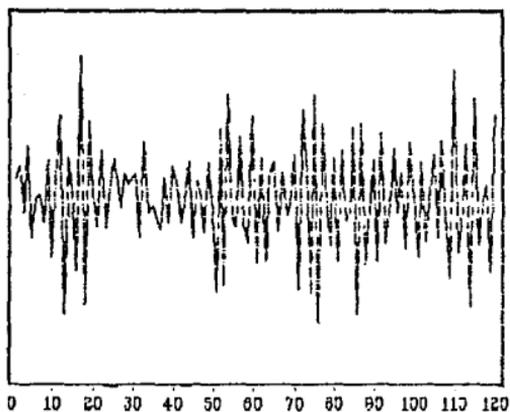


FIGURA 3.10 REALIZACIÓN DEL PROCESO $z_t = -1.5z_{t-1} - 0.9z_{t-2} + a_t$

3.1.2.1 RESTRICCIONES EN LOS PARAMETROS DEL PROCESO AUTORREGRESIVO DE SEGUNDO ORDEN

De igual manera que el proceso autorregresivo de primer orden, se debe conocer que restricciones introduce la condición de estacionaridad en los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 .

Para evaluar esta condición se reexpresa (3.10) utilizando el operador de retraso $B^{(5)}$. Esto es

(5) La relación de este operador con el operador de diferenciación se da de manera inmediata: $\nabla = 1 - B$. Por ejemplo, $\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = z_t - Bz_t = (1 - B)z_t$.

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} = a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)z_t = a_t$$

donde se considera que $Bz_t = z_{t-1}$ y $B^2 z_t = z_{t-2}$.

La expresión $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ se conoce como el polinomio característico del proceso AR(2), el cual puede resolverse como una ecuación de segundo grado con

$$B_1, B_2 = \frac{\phi_1 \pm \left[\phi_1^2 + 4\phi_2 \right]^{1/2}}{-2\phi_2} \quad (3.14)$$

su solución implica que los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 están ubicados en la región triangular delimitada por las siguientes desigualdades:

$$|\phi_2| \leq 1$$

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

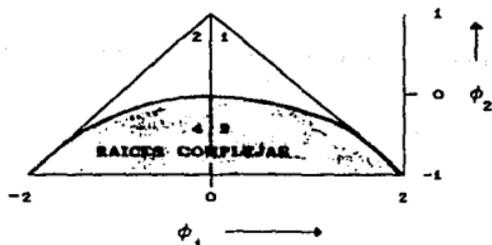


FIGURA 3.11 REGION DE ADMISIBILIDAD DE UN MODELO AR(2) PARA LOS PARAMETROS ϕ_1 Y ϕ_2

La figura 3.11 muestra esta región de admisibilidad para los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 ^(d).

(d) Esta región triangular se obtiene al resolverse el polinomio característico mediante la factorización:

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = (1 - \gamma_1 B)(1 - \gamma_2 B)$$

con $\gamma_1 + \gamma_2 = \phi_1$

$$\gamma_1 \gamma_2 = -\phi_2$$

donde γ_1 y γ_2 son las raíces o soluciones del polinomio. Estas raíces deben cumplir con las condiciones de $|\gamma_1| < 1$ y $|\gamma_2| < 1$ para que el proceso sea asintóticamente estable. Lo que implica que:

i) Como $\phi_2 = -\gamma_1 \gamma_2$, entonces $|\phi_2| < 1$

ii) $\gamma_1 < 1$

$$\gamma_1(1 - \gamma_2) < (1 - \gamma_2)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 < 1 \quad \text{se retoman las entidades}$$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

iii) $\gamma_1 > -1$

$$\gamma_1(1 + \gamma_2) > -(1 + \gamma_2)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 > -1 \quad \text{se retoman las entidades}$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

La reciprocidad de γ_1 y γ_2 con B_1 y B_2 es:

$$\gamma_1 = \frac{1}{B_1} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \frac{1}{B_2}$$

La región de admisibilidad de la figura 3.11 se divide en 4 regiones para su análisis:

Región 1:

Las raíces B_1 y B_2 son reales, las autocorrelaciones permanecen positivas y convergen a cero exponencialmente, correspondiente a una raíz positiva dominante (ver figura 3.13(a)).

Región 2:

Las raíces B_1 y B_2 son reales, las autocorrelaciones decaen gradualmente alternando en signo, correspondiente a una raíz negativa dominante (ver figura 3.13(b)).

Región 3:

En esta región las raíces son complejas dando lugar a un comportamiento pseudoperiódico con oscilaciones sinusoidales que decaen en forma exponencial (ver figura 3.13(c)).

Región 4:

Región con raíces complejas donde es más difícil apreciar el movimiento sinusoidal debido a que la convergencia se realiza con alternación de signos (figura 3.13(d)).

3.1.2.2 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO AR(2)

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

El cálculo de las autocovarianzas para los rezagos $k \geq 0$ se obtienen al multiplicar (3.10) por z_{t-k} y operar esperanzas,

$$E(z_t z_{t-k}) = E(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t) z_{t-k}$$

La varianza del proceso λ_0 , cuando $k = 0$, se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= E\left[(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t) z_t\right] \\ &= \phi_1 E(z_{t-1} z_t) + \phi_2 E(z_{t-2} z_t) + E(a_t z_t) \\ &= \phi_1 \lambda_1 + \phi_2 \lambda_2 + \sigma_a^2 \end{aligned}$$

se divide la expresión anterior entre λ_0 ,

$$1 = \phi_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \phi_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_0} + \frac{\sigma_a^2}{\lambda_0}$$

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \frac{\sigma_a^2}{\lambda_0}$$

$$1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 = \frac{\sigma_a^2}{\lambda_0}$$

y se reexpresa nuevamente para λ_0 ,

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2} \quad (3.12)$$

cuando $k = 1$ se obtiene la autocovarianza en el rezago 1, λ_1 ,

$$\lambda_1 = E(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t) z_{t-1}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \phi_1 E(z_{t-1}^2) + \phi_2 E(z_{t-2} z_{t-1}) + E(\alpha_t z_{t-1}) \\ &= \phi_1 \lambda_0 + \phi_2 \lambda_1\end{aligned}\quad (9.13)$$

para $k = 2$ se obtiene la autocovarianza en el rezago 2, λ_2 ,

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= E(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \alpha_t) z_{t-2} \\ &= \phi_1 \lambda_1 + \phi_2 \lambda_0\end{aligned}\quad (9.14)$$

en general, las autocovarianzas en el rezago k se definen como

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} + \phi_2 \lambda_{k-2} \quad k \geq 1 \quad (9.15)$$

Las autocorrelaciones se obtienen utilizando la definición de (3.15) divididas por λ_0 , para los distintos rezagos k ,

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_0} = \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k \geq 1 \quad (9.16)$$

para $k = 1$ y $k = 2$ se tiene

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2\end{aligned}$$

los valores de ρ_1 y ρ_2 se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones en términos de ϕ_1 y ϕ_2 .

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \\ \rho_2 &= \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2\end{aligned}\quad (9.17)$$

Se utilizan las condiciones de estacionaridad y las definiciones de (3.17) para encontrar los valores admisibles de ρ_1 y ρ_2 que deberán caer en la región delimitada por

$$-1 < \rho_1 < 1$$

$$-1 < \rho_2 < 1$$

$$\rho_1^2 < \frac{1}{2} (\rho_2 + 1)$$

La figura 3.12 muestra esta región admisible para ρ_1 y ρ_2 (área sombreada).

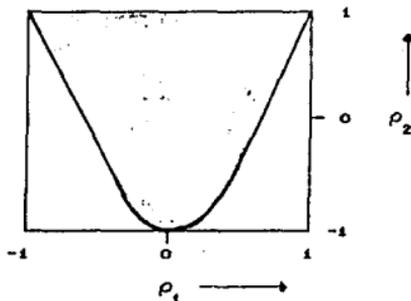


FIGURA 3.12 REGION DE ADMISIBILIDAD PARA LOS PARAMETROS ρ_1 Y ρ_2 DE UN MODELO AR(2).

La figura 3.13 muestra los correlogramas de los procesos simulados de las figuras de 3.7 a 3.10.

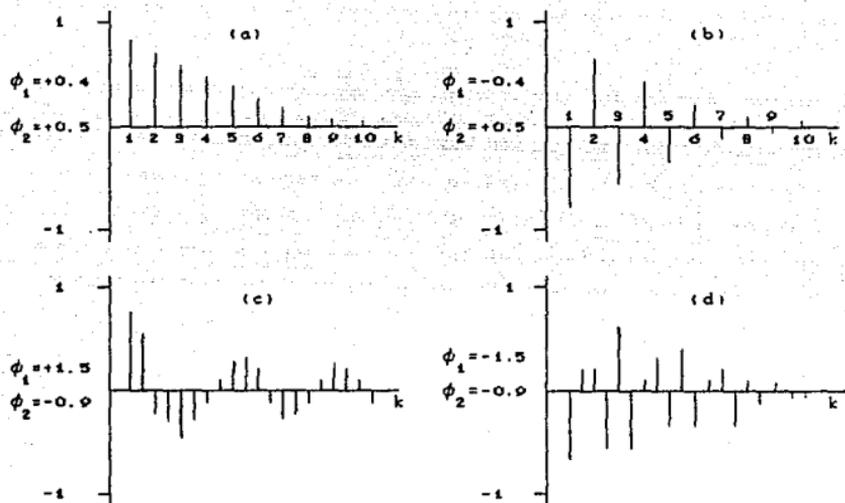


FIGURA 3.13 AUTOCORRELACIONES DE LOS PROCESOS AUTORREGRESIVOS DE SEGUNDO ORDEN SIMULADOS

3.1.3 MODELOS AUTORREGRESIVOS DE ORDEN SUPERIOR

En general, un proceso autorregresivo de orden p se define como

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + \alpha_t \quad (3.18)$$

que expresa el valor actual de la serie como una función lineal de p variables retrasadas de z_t ponderadas por sus respectivos parámetros ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, p$ y un término de error α_t .

El modelo puede reescribirse como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) z_t = a_t$$

Al resolver el polinomio característico del proceso autorregresivo de orden p , $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$, las raíces deberán caer fuera del círculo unitario para asegurar estacionaridad en el proceso.

3.1.3.1 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO AUTORREGRESIVO DE ORDEN p .

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

Las autocovarianzas del proceso se obtienen al multiplicar (3.18) por z_{t-k} y operar esperanzas.

$$E(z_t z_{t-k}) = E(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t) z_{t-k}$$

para $k = 0$, la varianza del proceso se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= E(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t) z_t \\ &= \phi_1 \lambda_1 + \phi_2 \lambda_2 + \dots + \phi_p \lambda_p + \sigma_a^2 \end{aligned}$$

dividiendo la expresión anterior entre λ_0 y al reexpresarse nuevamente para λ_0 se tiene

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p} \quad (3.19)$$

Las demás autocovarianzas para $k > 0$ se definen como

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} + \phi_2 \lambda_{k-2} + \dots + \phi_p \lambda_{k-p} \quad (3.20)$$

Las autocorrelaciones para $k > 0$ se obtienen al dividir la expresión anterior entre λ_0 ,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (3.21)$$

y se obtienen resolviendo las ecuaciones de Yule-Walker⁽⁷⁾ para los distintos rezagos de k :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

Las p ecuaciones es posible resolverlas para $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ en términos de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$.

Las condiciones de estacionaridad, autocovarianzas, autocorrelaciones y funciones memoria pueden derivarse para un proceso autorregresivo de cualquier orden. Sin embargo, los cálculos no son tan simples como los de los procesos AR(1) y AR(2). En general, estas condiciones y parámetros serán funciones complicadas de los parámetros ϕ_k . Afortunadamente para la mayoría de las series económicas, se encuentra que se pueden modelar por procesos autorregresivos de orden no mayor a 2.

(7) Consultar para un análisis más detallado de las ecuaciones de Yule Walker a Box y Jenkins. Op. cit. p. 55.

3.2 MODELOS DE MEDIAS MOVILES⁽⁸⁾

La realización de un proceso de medias móviles es un movimiento periódico. Por ejemplo, con una sucesión de lanzamientos independientes de una moneda, tomando el valor de 1 cuando aparece "sol" y el valor de -1 cuando aparece "aguila" se genera un proceso sin correlación a_1, a_2, a_3, \dots

Una realización particular de este proceso aleatorio puede ser la siguiente:

1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1
-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1

Un proceso de medias móviles puede ser el siguiente:

$$z_t = a_t + 2a_{t-1} + 2a_{t-2} + 2a_{t-3} + a_{t-4}$$

le corresponde la siguiente realización, en base al proceso sin correlación:

				2	-2	-4	-4	-4	-2	2
2	2	4	2	0	0	0	2	4	4	4
2	0	-2	-4	-4	-2	2	2	4	4	4

(8) El término de medias móviles puede provocar confusión porque los valores de $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$, que multiplican a los términos de error no necesariamente suman la unidad ni tampoco deben ser positivos. Sin embargo, es la nomenclatura usual. G. Box y G. Jenkins. Op. cit. p. 10.

La figura 3.14 muestra la gráfica de la realización del proceso de medias móviles.

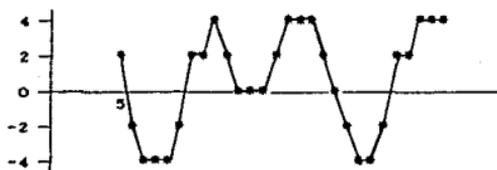


FIGURA 3.14 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = a_t + 2a_{t-1} + 2a_{t-2} + 2a_{t-3} + a_{t-4}$

En la gráfica se observa una periodicidad muy similar a la que se encuentra en ciertas series económicas. Así, el cálculo de medias móviles de una serie puramente aleatoria conduce a una serie oscilante. Este resultado tiene una gran importancia para el tratamiento de series de tiempo. Ocurre frecuentemente que, para eliminar la componente aleatoria de una serie se calculan medias móviles, sobre un periodo más o menos largo. Este procedimiento disminuye la importancia de la componente aleatoria pero no la hace desaparecer totalmente.

3.2.1 EL MODELO DE MEDIAS MOVILES DE PRIMER ORDEN

Un modelo de medias móviles de primer orden expresa al valor actual de la serie z_t como una función lineal de los valores actual y previo de los errores o shocks, a_t y a_{t-1} ,

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (3.29)$$

donde θ_1 es el parámetro de medias móviles de primer orden^(p). Al igual que en los procesos autorregresivos, los términos de error en un proceso de medias móviles se asumen que están normal e independientemente distribuidos con media cero y varianza σ_a^2 .

La figura 3.15 muestra la representación esquemática del proceso de medias móviles de primer orden.

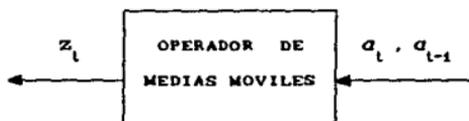


FIGURA 3.15 EL MODELO MA(1)

El filtro de medias móviles indica que se debe multiplicar un shock pasado a_{t-1} por el parámetro θ_1 y sustraerlo del valor actual del shock a_t para obtener z_t como resultado.

Las figuras 3.16 y 3.17 muestran 2 realizaciones típicas de procesos de medias móviles de primer orden.

(p) El orden de un proceso de medias móviles, corresponde al número de rezagos de la variable a_t incluidas en la representación del modelo.

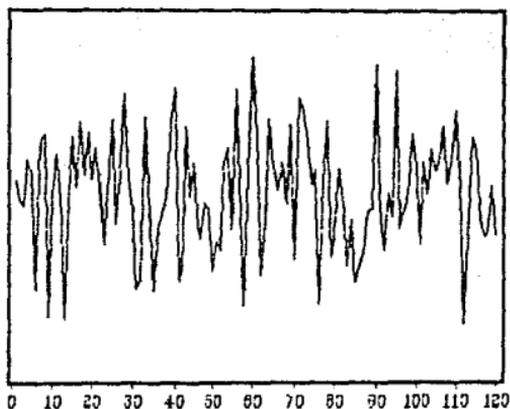


FIGURA 3.16 REALIZACION DEL PROCESO $Z_t = \alpha_t - 0.8\alpha_{t-1}$

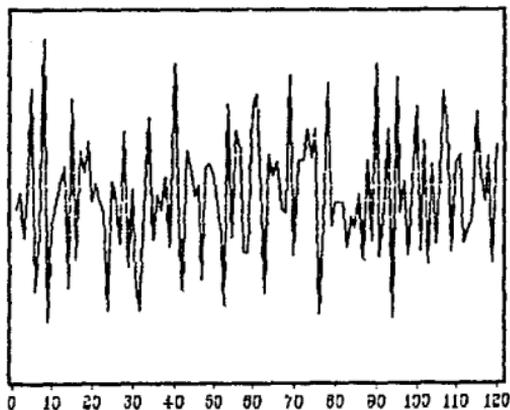


FIGURA 3.17 REALIZACION DEL PROCESO $Z_t = \alpha_t + 0.8\alpha_{t-1}$

EL PRINCIPIO DE PARSIMONIA

Una razón importante para basarse en un proceso de medias móviles es que el número de parámetros a estimar puede reducirse considerablemente. Si los parámetros que se van a estimar se calculan con un número finito de observaciones, es importante representar a un proceso de series de tiempo con el menor número de parámetros como sea posible, esto es, se desea una representación parsimoniosa pero adecuada del modelo.

Para demostrar como un proceso MA reduce el número de parámetros a estimar, se verá la equivalencia entre un proceso MA(1) y un proceso autorregresivo de orden infinito, AR(∞).

Al reexpresar (3.23) en términos de a_t , se tiene

$$a_t = z_t + \theta_1 a_{t-1}$$

similarmenete a_{t-1} se puede expresar como

$$a_{t-1} = z_{t-1} + \theta_1 a_{t-2}$$

sustituyendo a_{t-1} en (3.23) se obtiene

$$\begin{aligned} z_t &= a_t - \theta_1 (z_{t-1} + \theta_1 a_{t-2}) \\ &= a_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_1^2 a_{t-2} \end{aligned}$$

si se continua sustituyendo a_{t-2} , a_{t-3} , . . . , el proceso MA(1) se puede expresar como

$$z_t = -\theta_1 z_{t-1} - \theta_1^2 z_{t-2} - \theta_1^3 z_{t-3} - \theta_1^4 z_{t-4} - \dots + a_t \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) se llama forma invertida de un proceso MA(1) y representa al proceso con un infinito número de términos autorregresivos y sin términos de error rezagados.

Aún cuando los coeficientes de las z_t retrasadas convergen a cero si $|\theta_1| < 1$, se tendrían que incluir muchos parámetros si se opta por la representación autorregresiva del proceso MA(1). Sin embargo, muchos de los parámetros son solamente potencias de θ_1 .

Al introducir parámetros de medias móviles se obtiene una forma parsimoniosa de representar modelos autorregresivos complicados, o sea, se encuentra la forma de reducir el número de parámetros necesarios para describir adecuadamente un proceso.

3.2.1.1 RESTRICCIONES EN EL PARAMETRO DEL PROCESO DE MEDIAS MÓVILES DE PRIMER ORDEN: LA CONDICION DE INVERTIBILIDAD

Al igual que en los procesos autorregresivos se evaluará la media y la varianza para ver que restricciones se imponen al parámetro del proceso MA(1).

Para la media se operan esperanzas,

$$E(z_t) = E[\alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1}] = E\alpha_t - \theta_1 E\alpha_{t-1} = 0$$

se nota que la media de un proceso MA es constante sobre el tiempo y no impone ninguna restricción sobre el parámetro θ_1 .

Para la varianza se tiene

$$\begin{aligned}\text{Var}(z_t) &= E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})^2] \\ &= E(a_t^2 - 2\theta_1 a_t a_{t-1} + \theta_1^2 a_{t-1}^2)\end{aligned}$$

Dado que el término $E(-2\theta_1 a_t a_{t-1}) = 0$ por el supuesto dado en (1.16), se simplifica la expresión anterior,

$$\begin{aligned}\text{Var}(z_t) &= E(a_t^2) + \theta_1^2 E(a_{t-1}^2) \\ &= \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 \\ &= (1 + \theta_1^2) \sigma_a^2\end{aligned}\tag{3.25}$$

En la expresión anterior se puede notar que un modelo de medias móviles es siempre estacionario independientemente del valor de θ_1 , por lo que la condición de estacionaridad no impone ninguna restricción en éste. Sin embargo, si $|\theta_1| > 1$ se tendrá una interpretación irreal del proceso MA(1), donde se daría mayor peso a las variables más desfazadas de z_t . Es irreal pensar que un evento acaecido algunos periodos antes tenga mayor influencia en la explicación de la situación actual que los eventos que han acontecido recientemente.

Por lo anterior, se deber restringir al parámetro del modelo MA(1) a quedar en $|\theta_1| < 1$. Esta restricción se conoce como la condición de invertibilidad de un modelo MA(1) y se impone solamente cuando se representa al proceso en su forma autorregresiva (ver 3.24).

3.2.1.2 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO MA(1)

De manera similar a los procesos autorregresivos, el proceso de medias móviles puede distinguirse de otros procesos estocásticos a través de sus autocovarianzas, autocorrelaciones y función memoria.

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

Anteriormente se calculó la varianza del proceso en (3.25) como

$$\lambda_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_a^2$$

Similarmenete, la covarianza entre z_t y z_{t-1} , λ_1 , es

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= E(z_t z_{t-1}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})(a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2})] \\ &= E(a_t a_{t-1} - \theta_1 a_t a_{t-2} - \theta_1 a_{t-1}^2 + \theta_1^2 a_{t-1} a_{t-2}) \\ &= -\theta_1 E(a_{t-1}^2) \\ &= -\theta_1 \sigma_a^2\end{aligned}\tag{3.26}$$

debido a que el primer, segundo y cuarto término en la segunda línea de la expresión anterior son iguales a cero por el supuesto dado en (1.16).

En forma similar, la autocovarianza en el rezago 2, λ_2 , es

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= E(z_t z_{t-2}) = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})(a_{t-2} - \theta_1 a_{t-3})] \\ &= E(a_t a_{t-2} - \theta_1 a_t a_{t-3} - \theta_1 a_{t-1} a_{t-2} + \theta_1^2 a_{t-1} a_{t-3}) \\ &= 0\end{aligned}$$

en base a la condición de $E(\alpha_t, \alpha_{t-k}) = 0$ para toda $k \neq 0$. Se deduce que

$$\lambda_k = 0 \quad k \geq 2 \quad (9.27)$$

Las autocorrelaciones $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$ para el proceso MA(1) son

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \quad (9.28)$$

$$\rho_k = 0 \quad k \geq 2 \quad (9.29)$$

Mientras que las autocorrelaciones para un proceso AR(1) decaen gradualmente, para un proceso MA(1) se cortan abruptamente y sólo ρ_1 es diferente de cero con signo contrario al valor del parámetro θ_1 .

La figura 3.18 muestra los correlogramas de los dos procesos simulados de medias móviles:

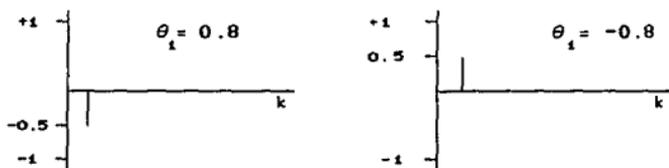


FIGURA 3.18 AUTOCORRELACIONES DE LOS PROCESOS MA(1)

FUNCION MEMORIA

Dado que la función memoria se definió como los coeficientes de un proceso cuando éste se representa en la forma "error-shock", para el modelo MA(1) se obtiene directamente de la representación del proceso. Un shock en el tiempo t , a_t , influirá en las observaciones t y $t+1$, pero no más allá de $t+1$. En el tiempo t , el sistema resiente el impacto completo del shock, y en el tiempo $t+1$ el efecto será proporcional a θ_1 .

La gráfica 3.19 muestra la función memoria de un modelo MA(1) con $\theta_1 = -0.8$.

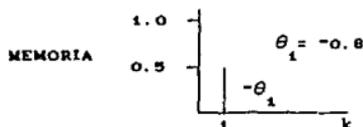


FIGURA 3.19 FUNCION MEMORIA DE UN PROCESO MA(1)

3.2.2 EL MODELO DE MEDIAS MOVILES DE SEGUNDO ORDEN

El proceso de medias móviles de segundo orden MA(2) define al valor actual z_t como una función lineal del término de error actual a_t , y de sus dos primeros retrasos, a_{t-1} y a_{t-2} ,

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad (3.30)$$

donde θ_1 y θ_2 son los parámetros de medias móviles de primer y segundo orden, respectivamente.

Las siguientes figuras muestran realizaciones típicas de procesos de medias móviles de segundo orden:

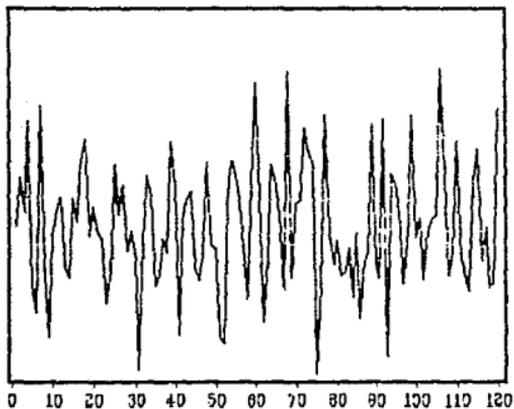


FIGURA 3.20 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = a_t + 0.4a_{t-1} - 0.5a_{t-2}$

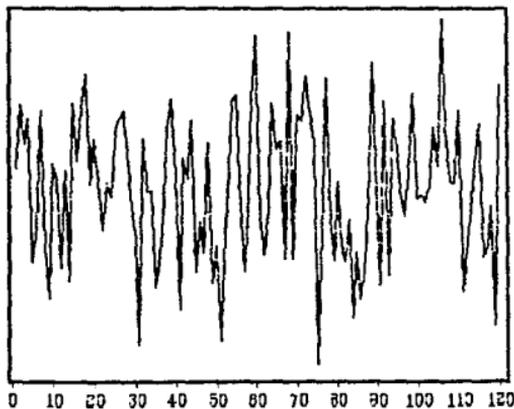


FIGURA 3.21 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = a_t - 0.4a_{t-1} - 0.5a_{t-2}$

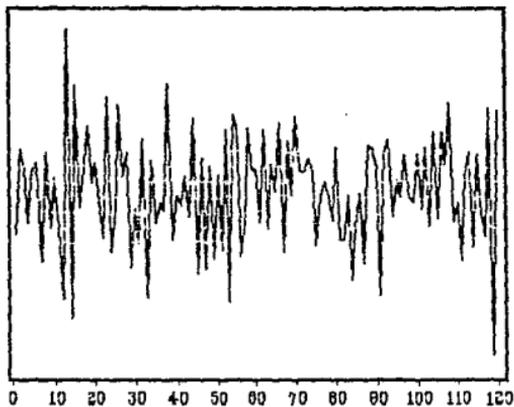


FIGURA 3.22 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = a_t - 1.5a_{t-1} + 0.9a_{t-2}$

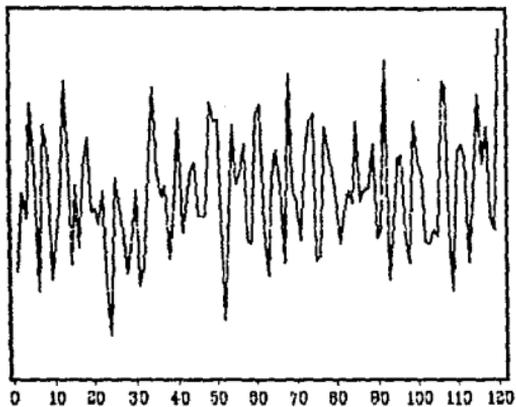


FIGURA 3.23 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = a_t + 1.5a_{t-1} + 0.9a_{t-2}$

3.2.2.1 RESTRICCIONES EN LOS PARAMETROS DEL PROCESO DE MEDIAS MOVILES DE SEGUNDO ORDEN

Para conocer que restricciones impone la condición de invertibilidad para el proceso MA(2), se reexpresa el modelo utilizando el operador de retraso B,

$$z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t \quad (3.31)$$

donde $B a_t = a_{t-1}$ y $B^2 a_t = a_{t-2}$.

El modelo es invertible solamente cuando las raíces del polinomio característico $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$, caen fuera del círculo unitario, esto es si

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$|\theta_2| < 1$$

La figura 3.24 muestra esta región de invertibilidad para los parámetros θ_1 y θ_2 . Las áreas sombreadas 1 y 2 para las raíces reales y las áreas 3 y 4 para las raíces complejas. Estas condiciones son paralelas a las restricciones de estacionaridad requeridas para un proceso AR(2).

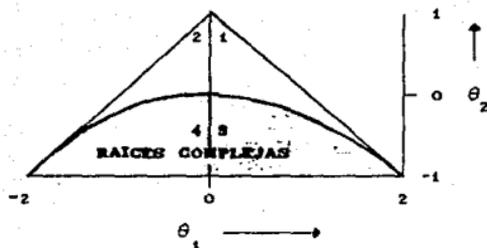


FIGURA 3.24 REGION DE INVERTIBILIDAD DEL MODELO MA(2) PARA LOS PARAMETROS θ_1 Y θ_2 .

3.2.2.2 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO MA(2)

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

Si se reexpresa a las variables retrasadas de z_t como funciones de los términos de error desfazados, se tiene

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

$$z_{t-1} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} - \theta_2 a_{t-3}$$

$$z_{t-2} = a_{t-2} - \theta_1 a_{t-3} - \theta_2 a_{t-4}$$

$$z_{t-3} = a_{t-3} - \theta_1 a_{t-4} - \theta_2 a_{t-5}$$

⋮

⋮

⋮

Para obtener la varianza del proceso, λ_0 , se eleva al cuadrado la primera línea y se operan esperanzas,

$$\begin{aligned}
 E(z_t^2) &= E(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2})^2 \\
 &= E(a_t^2 + \theta_1^2 a_{t-1}^2 + \theta_2^2 a_{t-2}^2 - 2\theta_1 a_t a_{t-1} - 2\theta_2 a_t a_{t-2} + \theta_1 \theta_2 a_{t-1} a_{t-2}) \\
 &= \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + \theta_2^2 \sigma_a^2 \\
 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_a^2
 \end{aligned} \tag{9.92}$$

Similarmente, el cálculo de las demás autocovarianzas para los rezagos $k > 0$ se pueden obtener multiplicando la primera línea por la línea correspondiente a z_{t-k} y operar esperanzas,

$$\lambda_1 = E(z_t z_{t-1}) = -\theta_1 (1 - \theta_2) \sigma_a^2 \tag{9.93}$$

$$\lambda_2 = E(z_t z_{t-2}) = -\theta_2 \sigma_a^2 \tag{9.94}$$

$$\lambda_k = E(z_t z_{t-k}) = 0 \quad k \geq 2 \tag{9.95}$$

Las autocorrelaciones se obtienen dividiendo las autocovarianzas entre λ_0 ,

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 (1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \tag{9.96}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \tag{9.97}$$

$$\rho_k = 0 \quad k > 2 \tag{9.98}$$

El proceso MA(2) tiene solamente 2 autocorrelaciones significativas cuyos valores deberán caer dentro del área delimitada por los

segmentos siguientes:

$$\rho_2 + \rho_1 = -0.5$$

$$\rho_2 - \rho_1 = -0.5$$

$$\rho_1^2 = 4\rho_2(1 - 2\rho_2)$$

La figura 3.25 muestra esta región de invertibilidad del modelo MA(2) para ρ_1 y ρ_2 (área sombreada).

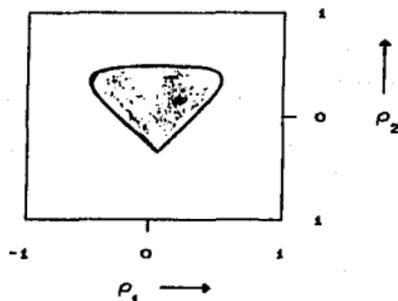
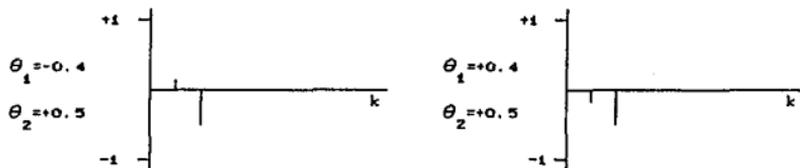


FIGURA 3.25 LA REGION DE INVERTIBILIDAD DE UN MODELO MA(2) PARA LOS PARAMETROS ρ_1 Y ρ_2

La figura 3.26 muestra los correlogramas de las realizaciones de los procesos MA(2) simulados.



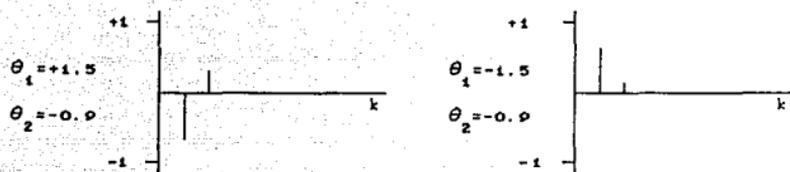


FIGURA 3.26 AUTOCORRELACIONES DE LOS PROCESOS MA(2)

3.2.3 MODELOS DE MEDIAS MOVILES DE ORDEN SUPERIOR

Un proceso MA de orden q , $MA(q)$, se define como

$$z_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q} \quad (3.59)$$

o alternativamente como

$$z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \alpha_t$$

y expresa al valor actual de la serie como una función lineal del términos de error actual α_t y q términos de error desfazados.

La condición de invertibilidad exige que las raíces del polinomio característico del proceso $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0$, caigan fuera del círculo unitario.

3.2.3.1 CARACTERISTICAS ESPECIALES DE LOS MODELOS DE MEDIAS MOVILES DE ORDEN q.

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

Las autocovarianzas se pueden obtener al multiplicar (3.39) por $z_{t-k} = a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q}$, y operar esperanzas,

$$\lambda_k = E \left[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}) (a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q}) \right]$$

para $k = 0$ se tiene a la varianza del proceso λ_0 ,

$$\lambda_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 \quad (3.40)$$

Las autocovarianzas restantes se definen como

$$\lambda_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.41)$$

Las autocorrelaciones se obtienen dividiendo (3.41) entre (3.40),

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.42)$$

Las condiciones de invertibilidad para un proceso MA(q) no son tan sencillas de derivar como las de los procesos MA(1) y MA(2), ya que integran funciones no lineales para todos los parámetros q incluidos en el modelo. Afortunadamente, muchas series económicas se pueden representar satisfactoriamente con procesos de orden no mayores a 2.

FUNCION MEMORIA

La función memoria para un modelo MA(q) es la gráfica de los valores de $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$, que se obtienen directamente de la representación del proceso.

El efecto de los shocks en un proceso MA(q) solamente persisten para q periodos.

3.3 MODELOS AUTORREGRESIVOS Y DE MEDIAS MOVILES

Los procesos estocásticos anteriores hacen referencia unicamente a estructuras autorregresivas y de medias móviles puras. En la práctica, sin embargo, es frecuente encontrar que las series de tiempo poseen tanto componentes autorregresivos como de medias móviles. A estos modelos combinados se les denomina procesos ARMA. La estructura más sencilla de un proceso combinado es el modelo ARMA(1,1).

3.3.1 EL MODELO ARMA(1,1)

El modelo AR(1), $z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$ se puede reexpresar como

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} = e_t$$

donde e_t en lugar de ser el ruido blanco a_t , es un proceso de

medias móviles,

$$e_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

si se combinan ambas expresiones se obtiene el proceso ARMA(1,1)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (9.49)$$

La representación esquemática del proceso ARMA(1,1) se muestra en la figura 3.27. La parte izquierda conforma el proceso autorregresivo y la parte derecha el proceso de medias móviles.

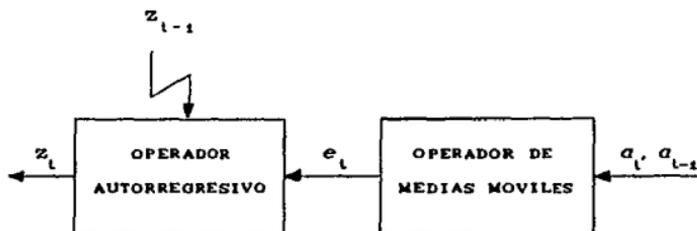


FIGURA 3.27 EL MODELO ARMA(1,1)

El proceso de medias móviles genera la serie e_t que al sustraerla del valor de z_{t-1} multiplicado por el parámetro ϕ_1 se obtiene z_t .

La inclusión de parámetros autorregresivos y de medias móviles conjuntamente genera gran parsimonia en la especificación de un modelo.

Las siguientes 6 figuras muestran realizaciones típicas de procesos ARMA(1,1).

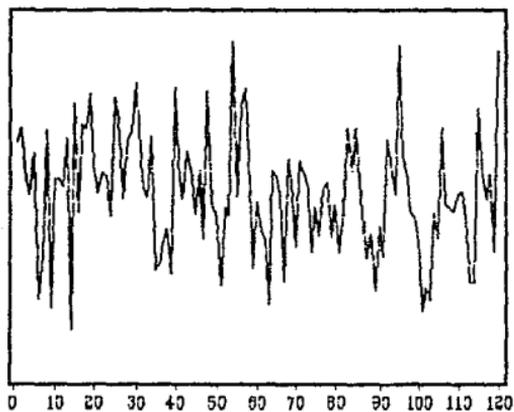


FIGURA 3.28 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 0.5z_{t-1} + a_t + 0.5a_{t-1}$

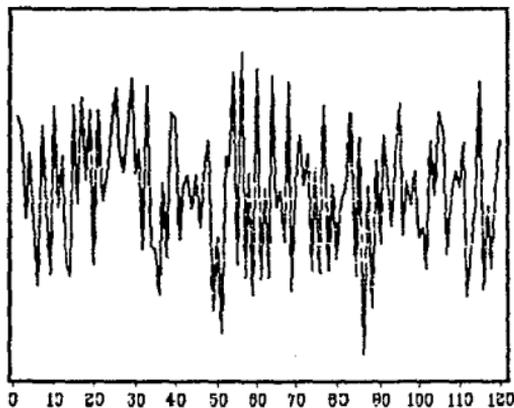


FIGURA 3.29 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = -0.8z_{t-1} + a_t - 0.8a_{t-1}$

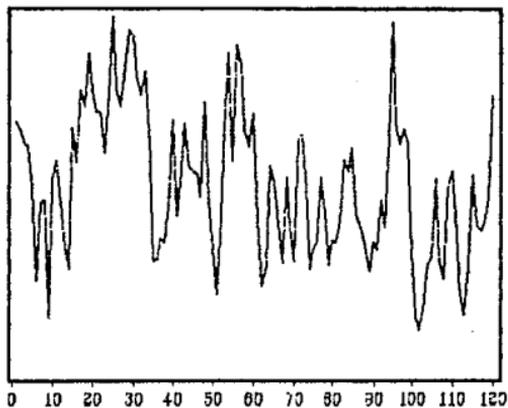


FIGURA 3.30 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 0.8z_{t-1} + a_t - 0.5a_{t-1}$

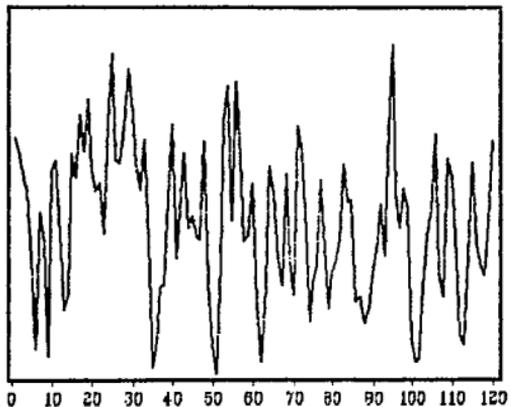


FIGURA 3.31 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = 0.5z_{t-1} + a_t - 0.8a_{t-1}$

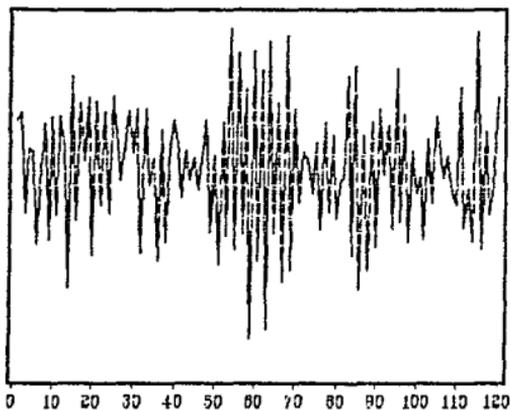


FIGURA 3.32 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = -0.9z_{t-1} + \alpha_t + 0.3\alpha_{t-1}$

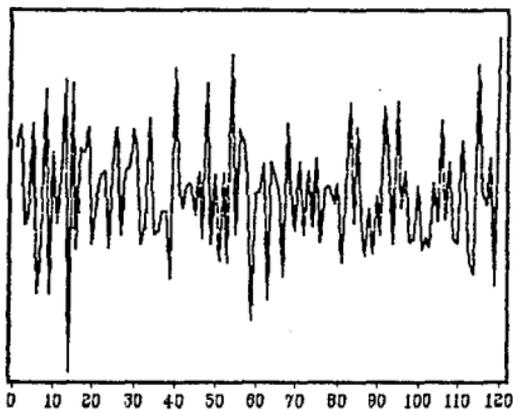


FIGURA 3.33 REALIZACION DEL PROCESO $z_t = -0.3z_{t-1} + \alpha_t + 0.9\alpha_{t-1}$

3.3.1.1 RESTRICCIONES EN LOS PARAMETROS DEL PROCESO ARMA(1,1)

Para evaluar que restricciones imponen la condición de estacionaridad e invertibilidad se reexpresa el modelo ARMA(1,1) utilizando el operador de retraso B,

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B)z_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

El proceso será estacionario e invertible si las raíces de los polinomios característicos de la parte autorregresiva $1 - \phi_1 B = 0$ y de la parte de medias móviles $1 - \theta_1 B = 0$ caen fuera del círculo unitario, esto es si $|\phi_1| < 1$ y $|\theta_1| < 1$. La región de admisibilidad se muestra en la figura 3.34.

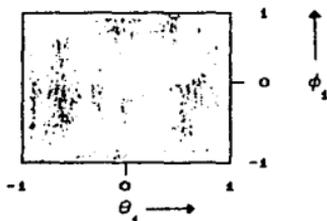


FIGURA 3.34

REGION DE ADMISIBILIDAD PARA LOS PARAMETROS ϕ_1 Y θ_1 DE UN MODELO ARMA(1,1)

3.3.1.2 CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE UN PROCESO ARMA(1,1)

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

La varianza del proceso ARMA(1,1) se calcula como sigue

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= E\left[(\phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})^2\right] \\ &= \phi_1^2 E(z_{t-1}^2) + E(a_t^2) + \theta_1^2 E(a_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(z_{t-1} a_t) \\ &\quad - 2\phi_1 \theta_1 E(z_{t-1} a_{t-1}) - 2\theta_1 E(a_t a_{t-1})\end{aligned}$$

como $E(z_{t-1} a_{t-1}) = \sigma_a^2$, se reexpresa λ_0 ,

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \phi_1^2 \lambda_0 + \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + 0 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + 0 \\ (1 - \phi_1^2) \lambda_0 &= (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2 \\ \lambda_0 &= \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}\end{aligned}\tag{3.44}$$

Las demás autocovarianzas se pueden obtener en forma similar. La autocovarianza en el rezago 1 es

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= E\left[(\phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}) z_{t-1}\right] \\ &= \phi_1 E(z_{t-1}^2) + E(z_{t-1} a_t) - \theta_1 E(z_{t-1} a_{t-1}) \\ &= \phi_1 \text{Var}(z_t) - \theta_1 \sigma_a^2 \\ &= \phi_1 \lambda_0 - \theta_1 \sigma_a^2\end{aligned}\tag{3.45}$$

si se toma λ_0 de (3.44) para reexpresar λ_1 se tiene

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1 (1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} - \theta_1 \sigma_a^2$$

al reordenarse algebraicamente queda:

$$\lambda_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \quad (9.46)$$

La autocovarianza en el rezago 2 se calcula como

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= E \left[(\phi_1 z_{t-1} + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1})(z_{t-2}) \right] \\ &= E(\phi_1 z_{t-1} z_{t-2} + \alpha_t z_{t-2} - \theta_1 \alpha_{t-1} z_{t-2}) \\ &= \phi_1 E(z_{t-1} z_{t-2}) + 0 + 0 \\ &= \phi_1 \text{Cov}(z_{t-1}, z_{t-2}) \\ &= \phi_1 \lambda_1 \end{aligned} \quad (9.47)$$

Generalizando, las autocovarianzas para los rezagos $k \geq 2$, son

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \phi_1 \lambda_{k-1} \\ &= \phi_1^{k-1} \lambda_1 \end{aligned} \quad (9.48)$$

Las autocorrelaciones para el proceso ARMA(1,1) se definen como

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1} \quad (9.49)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad k \geq 2 \quad (9.50)$$

Las autocorrelaciones inician con el valor de ρ_1 , que es una función de los parámetros ϕ_1 y θ_1 , y decaen geométricamente a partir de este valor inicial. En algunos modelos, la parte de medias móviles atenúa considerablemente esta condición a partir de la cual se inicia el decaimiento exponencial.

En base a las condiciones de estacionaridad e invertibilidad se

tiene que la región de admisibilidad para las dos primeras autocorrelaciones, ρ_1 y ρ_2 está delimitada por

$$\begin{aligned}
 &|\rho_2| < |\rho_1| \\
 &\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 + 1) & \rho_1 < 0 \\
 &\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 - 1) & \rho_1 > 0
 \end{aligned}$$

La figura 3.35 muestra esta región de admisibilidad para ambas autocorrelaciones (área sombreada de la gráfica).

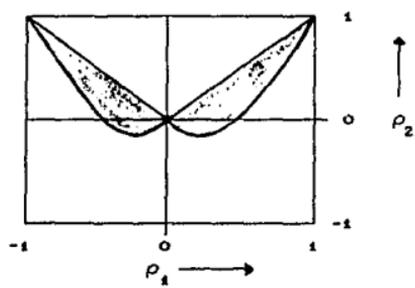
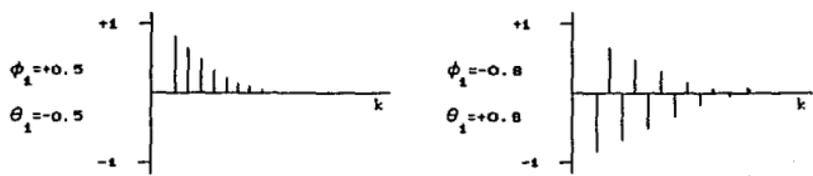


FIGURA 3.35 REGION DE ADMISIBILIDAD PARA LOS PARAMETROS ρ_1 Y ρ_2 DEL PROCESO ARMA(1,1)

La figura 3.36 muestra los correlogramas de los procesos ARMA(1,1) simulados.



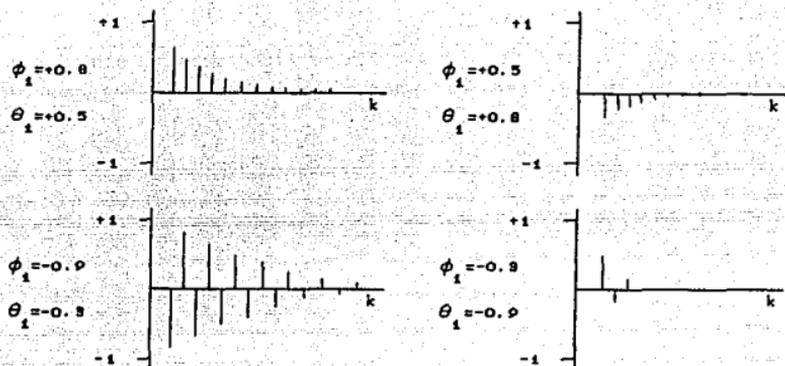


FIGURA 3.36 AUTOCORRELACIONES DE PROCESOS ARMA(1,1)

FUNCION MEMORIA

Si se elimina sucesivamente las observaciones z_{t-1}, z_{t-2}, \dots de (3.43) se tiene

$$z_t = a_t + (\phi_1 - \theta_1)a_{t-1} + \phi_1(\phi_1 - \theta_1)a_{t-2} + \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1)a_{t-3} + \phi_1^3(\phi_1 - \theta_1)a_{t-4} + \dots \quad (3.51)$$

Al igual que el proceso estacionario AR(1), las autocorrelaciones para el proceso ARMA(1,1) decaen gradualmente. La tasa de declinación está determinada por el parámetro ϕ_1 . Sin embargo, los coeficientes memoria no son iguales a los del proceso AR(1), debido

a la influencia del parámetro θ_1 .

La representación de la función memoria para un proceso ARMA(1,1) con $\phi_1 = -0.8$ y $\theta_1 = -0.4$ se muestra en la figura 3.37.

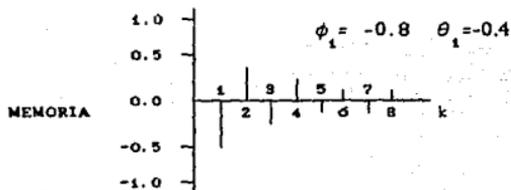


FIGURA 3.37 FUNCIÓN MEMORIA PARA UN MODELO ARMA(1,1)

3.3.2 MODELOS ARMA DE ORDEN SUPERIOR

El modelo ARMA(1,1) se puede extender para incluir parámetros autorregresivos y de medias móviles adicionales. En general, el modelo ARMA(p,q) se puede representar como

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.52)$$

donde p y q son el número de parámetros autorregresivos y de medias móviles incluidos en el modelo, respectivamente.

Las condiciones de estacionaridad e invertibilidad para el proceso ARMA(p,q) se cumplen si las raíces de sus polinomios característicos $(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) = 0$ para la parte autorregresiva y $(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) = 0$ para la parte de medias móviles, caen fuera del círculo unitario.

3.3.2.1 CARACTERISTICAS ESPECIALES DEL PROCESO ARMA(p,q)

AUTOCOVARIANZAS Y AUTOCORRELACIONES

Las autocovarianzas pueden calcularse de manera similar al proceso autorregresivo de orden p. Se multiplica (3.52) por z_{t-k} y se operan esperanzas,

$$E(z_t z_{t-k}) = E \left[\phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \right] z_{t-k}$$

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} + \dots + \phi_p \lambda_{k-p} + \lambda_{za}(k) - \theta_1 \lambda_{za}(k-1) - \dots - \theta_q \lambda_{za}(k-q)$$

(3.53)

donde $\lambda_{za}(k)$ es la función de covarianza entre z y a , y es definida como $\lambda_{za}(k) = E(z_{t-k} a_t)$. Debido a que z_{t-k} depende solamente de los shocks que han ocurrido en el tiempo $t-k$, se tiene

$$\lambda_{za}(k) = 0 \quad k > 0$$

$$\lambda_{za}(k) \neq 0 \quad k \leq 0$$

lo que implica que

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} + \phi_2 \lambda_{k-2} + \dots + \phi_p \lambda_{k-p} \quad k \geq q + 1 \quad (3.54)$$

Para la varianza del proceso, λ_0 , se tiene

$$\lambda_0 = \phi_1 \lambda_1 + \dots + \phi_p \lambda_p + \sigma_a^2 - \theta_1 \lambda_{za}(-1) - \dots - \theta_q \lambda_{za}(-q)$$

Las autocorrelaciones se obtienen utilizando (3.54),

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q + 1 \quad (3.55)$$

Por lo que el proceso ARMA(p,q) tiene q autocorrelaciones $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ que dependen directamente de (3.53). Además, los p valores $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$ proveen los valores iniciales necesarios. Si $q - p < 0$ las autocorrelaciones $\rho_j, j = 0, 1, 2, \dots$ consistirán en una mezcla de exponenciales amortiguados y ondas sinusoidales determinadas principalmente por el polinomio autorregresivo. Si $q - p \geq 0$, entonces habrá $q - p + 1$ valores iniciales $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{q-p}$ que no siguen este comportamiento general.

3.4 MODELOS NO ESTACIONARIOS

Existen muchas series de tiempo que deben considerarse generadas por procesos no estacionarios, la simple observación de una tendencia o la dispersión de los datos que crecen en tamaño con el tiempo o en determinados periodos basta para rechazar el supuesto de estacionaridad. En el capítulo II se presentó con detalle como una serie no estacionaria, pero con determinado comportamiento homogéneo, se le pueden aplicar diversas transformaciones para estabilizar su media y su varianza.

Existe una infinidad de formas en la que un proceso puede ser no estacionario. Sin embargo, una gran mayoría de las series exhiben comportamientos homogéneos que pueden ser representados por un modelo estocástico, el cual es una forma modificada de un modelo ARMA.

3.4.1 EL MODELO DEL CAMINO ALEATORIO

En el punto 3.1.1 se restringió al parámetro ϕ_1 del proceso AR(1) fuese menor a 1 en valor absoluto para asegurar estacionaridad. Un caso especial es cuando ϕ_1 es exactamente igual a 1, el modelo AR(1) se puede reexpresar como

$$z_t = z_{t-1} + a_t \quad (3.56)$$

El modelo de (3.56) se conoce como el modelo del "camino aleatorio" cuyos cambios son producidos por una serie que es ruido blanco.

Existen muy pocas series que son camino aleatorio, pero para algunas series este modelo no resulta una mala aproximación⁽¹⁰⁾. Si α_t representa pasos hacia adelante o hacia atrás del tiempo t , entonces z_t representa la posición de un caminante en el tiempo t , y la decisión hacia adonde ir para el siguiente periodo no está influenciada por su posición actual.

La figura 3.38 muestra la gráfica del precio diario de las acciones de IBM. Esta realización se caracteriza por tener oscilaciones muy "anchas" o sea, que va a la deriva. Si se tuviera una realización muy corta de este proceso, se podría concluir que el proceso sigue una tendencia marcada.

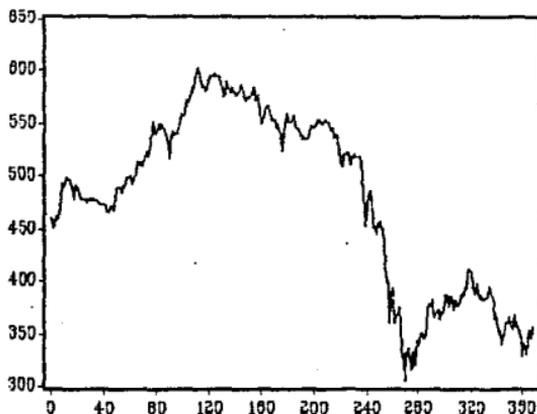


FIGURA 3.38 PRECIO DE LAS ACCIONES DE IBM

(10) Este modelo ha sido muy utilizado para representar los movimientos de los precios de las acciones en el mercado bursátil. R. Pindyck y D. Rubinfeld. Op. cit. p. 494

FUNCION MEMORIA

Mediante sucesivas eliminaciones de las variables retrasadas z_{t-1} , z_{t-2} . . . de (3.56) se obtiene

$$\begin{aligned} z_t &= z_{t-1} + a_t \\ &= z_{t-2} + a_{t-1} + a_t \\ &= a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

La expresión anterior refleja que el modelo del camino aleatorio es un proceso estocástico donde los shocks se acumulan sobre el tiempo. La coeficientes memoria del proceso son constantes y toman el valor de 1 para todos los rezagos, esto significa que un shock ocurrido en el tiempo t nunca decae. El proceso que posee una función memoria que no decae hace referencia a una serie no estacionaria.

Aunque el modelo del camino aleatorio no es estacionario, existe una forma simple de modelarlo. Al tomar una diferencia regular de primer orden el proceso se convierte en estacionario,

$$\begin{aligned} z_t - z_{t-1} &= a_t \\ v_t &= a_t \quad \text{con} \quad w_t = \nabla z_t \quad (3.57) \end{aligned}$$

Inclusive con la primera diferencia, el proceso se transforma en una serie que es ruido blanco. Lo anterior ratifica que si una serie no es estacionaria, pero si presenta un comportamiento homogéneo, se puede convertir en estacionaria aplicando el número adecuado de diferenciaciones.

Al tomar diferenciaciones de un proceso se pasa de z_t al proceso v_t . Si se considera el caso inverso, es decir, como obtener z_t a

partir del proceso w_t .

Con $w_t = z_t - z_{t-1}$ se puede reexpresar en términos de z_t ,

$$\begin{aligned} z_t &= w_t + z_{t-1} \\ &= w_t + w_{t-1} + z_{t-2} \\ &= w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

por lo tanto el proceso z_t se puede obtener sumando o "integrando" el proceso w_t . Por esto se dice que el modelo del "camino aleatorio" pertenece a la clase de modelos integrados. Esta clase está constituida por todos aquellos modelos que se pueden transformar en estacionarios mediante la aplicación de diferenciaciones de un orden determinado. En otras palabras, los modelos integrados son aquellos que se pueden obtener mediante la suma o "integración" de un proceso estacionario.

3.4.2 MODELOS AUTORREGRESIVOS INTEGRADOS Y DE MEDIAS MÓVILES

Los modelos autorregresivos integrados y de medias móviles constituyen una clase particular de modelos no estacionarios y poseen las mismas propiedades de los modelos ARMA, sólo que el análisis de los primeros se realiza sobre la serie diferenciada y

no sobre la serie original⁽¹¹⁾.

En general, los modelos autorregresivos integrados y de medias móviles se denotan como modelos ARIMA(p,d,q). Los números en paréntesis se refieren al orden del proceso autorregresivo, el grado de diferenciación consecutiva requerida para inducir estacionariedad y el orden del proceso de medias móviles, respectivamente.

Los siguientes modelos representan casos especiales cuando el proceso no es estacionario (d ≥ 1) y que se aplican a muchas series de tiempo.

1) El modelo ARIMA (0,1,1)

$$\nabla z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

correspondiente a p = 0, d = 1 y q = 1.

2) El modelo ARIMA (0,2,2)

$$\nabla^2 z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

correspondiente a p = 0, d = 2 y q = 2.

3) El modelo ARIMA (1,1,1)

$$\nabla z_t = \phi_1 \nabla z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

(11) Inclusive se pueden considerar a los modelos AR, MA y ARMA, analizados en las secciones anteriores, como una subclase de modelos ARIMA, considerando que el número de diferenciaciones que se requieren para convertir a la serie en estacionaria es nulo (d = 0).

correspondiente a $p = 1$, $d = 1$ y $q = 1$

Las autocovarianzas, autocorrelaciones y funciones memoria de los diferentes modelos ARIMA(p,d,q) son similares a las de los modelos ARMA(p,q). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, para los primeros se calculan en base a la serie diferenciada w_t y para los segundos sobre la serie z_t .

Se puede presentar nuevamente, con un mayor conocimiento, la estructura general del proceso ARIMA



FIGURA 9.39 EL MODELO ARIMA

El operador de medias móviles transforma el ruido blanco en una serie intermedia e_t . Para un filtro de medias móviles de primer orden se representa como

$$e_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

El operador autorregresivo transforma la serie e_t en otra serie intermedia w_t . El filtro autorregresivo de primer orden, w_t se puede expresar como

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + e_t$$

Finalmente, el operador de integración transforma w_t en z_t .

3.5 MODELOS ESTACIONALES

En las series de tiempo cuyos datos se recolectan a intervalos menores de un año (mensual, trimestral o cualquier otra periodicidad), es frecuente encontrar patrones estacionales. Las series pueden presentar un comportamiento periódico con "puntas" y "valles" que tienden a aparecer en forma regular después de un intervalo básico de tiempo $s^{(12)}$. Resulta lógico querer analizar, no solamente la correlación que se da entre datos adyacentes, sino también entre los periodos de cada año. Los modelos ARIMA discutidos anteriormente se pueden extender para incluir las variaciones estacionales.

3.5.1 EL MODELO ESTACIONAL AUTORREGRESIVO

Una serie de tiempo se dice gobernada por un proceso estacional autorregresivo de orden 1, si el valor actual de la serie z_t puede ser expresado como una función lineal del valor de la serie registrado hace s periodos, z_{t-s} , y un término aleatorio a_t , esto

(12) Si una serie fue recolectada mensualmente, es posible exista un comportamiento estacional. Se deseará analizar la correlación que se da no únicamente entre las observaciones de meses sucesivos de un año, sino también entre las observaciones de un mismo mes en años sucesivos. Por ejemplo, la correlación existente entre marzo con respecto a febrero y abril de un año, así como la correlación existente entre el marzo de un año con los marzos de años anteriores y siguientes.

es

$$z_t = \phi_1 z_{t-s} + \alpha_t \quad (9.58)$$

donde ϕ_1 es el parámetro estacional autorregresivo y el modelo se denota como SAR(1).

Las autocovarianzas y autocorrelaciones para un modelo estacional autorregresivo tienen un comportamiento similar a las del modelo autorregresivo regular.

Así para la varianza se tiene

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 - \phi_1^2}$$

y las demás autocovarianzas son

$$\lambda_k = \phi_1^k \lambda_0 \quad k = s, 2s, 3s, \dots$$

las autocorrelaciones para este proceso se definen como

$$\rho_k = \phi_1^k \quad k = s, 2s, 3s, \dots$$

Como puede observarse, las características del modelo regular AR(1) son aplicables para el modelo estacional SAR(1), excepto en que para el modelo estacional los coeficientes corresponden a los retardos estacionales $s, 2s, 3s \dots$

Por ejemplo, la siguiente tabla muestra las autocorrelaciones para un modelo AR(1) con un valor $\phi_1 = 0.8$ y un modelo SAR(1) con $\phi_1 = 0.8$ con un periodo $s = 4$.

AUTOCORRELACIONES DE LOS MODELOS AR(1) Y SAR(1) CON $\phi_1 = \tilde{\phi}_1 = 0.8$

RETRASO	AR(1)	SAR(1)
1	0.80	0.00
2	0.64	0.00
3	0.51	0.00
4	0.41	0.80
5	0.33	0.00
6	0.26	0.00
7	0.21	0.00
8	0.17	0.64
9	0.13	0.00
10	0.11	0.00
11	0.09	0.00
12	0.07	0.51

La figura 3.40 muestra los correlogramas de ambos procesos.

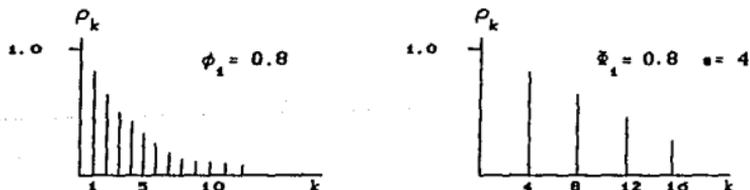


FIGURA 3.40 AUTOCORRELACIONES DE LOS MODELOS AR(1) Y SAR(1)

De la misma manera que se hizo extensivo el modelo AR(1) para incluir parámetros adicionales, se puede extender el modelo SAR(1) para agregar parámetros estacionales autorregresivos adicionales. En general, el modelo estacional autorregresivo de orden P se

define como

$$z_t = \phi_1 z_{t-2} + \phi_2 z_{t-2s} + \phi_3 z_{t-3s} + \dots + \phi_p z_{t-ps} + \alpha_t$$

o alternativamente como

$$\phi_p(B^s)z_t = \alpha_t \quad (9.59)$$

donde

$$\phi_p(B^s) = 1 - \phi_1 B^s - \phi_2 B^{2s} - \dots - \phi_p B^{ps} \quad (9.60)$$

3.5.2 EL MODELO ESTACIONAL DE MEDIAS MOVILES

Una serie de tiempo se dice gobernada por un movimiento estacional de medias móviles de orden 1, si el valor actual de la serie se puede expresar por un shock aleatorio, α_t , y un shock ocurrido exactamente s observaciones antes, α_{t-s} .

$$z_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-s} \quad (9.61)$$

donde θ_1 es el parámetro estacional de medias móviles y s es igual al periodo del modelo estacional. El modelo puede denotarse como SMA(1).

Las autocorrelaciones para un modelo SMA(1) tienen un comportamiento similar a las del modelo MA(1), excepto en que los valores de éstas aparecen en rezagos que son múltiplos del periodo

estacional s , esto es

$$\rho_k = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \quad k = s$$

$$\rho_k = 0$$

las demás autocorrelaciones

Para el modelo SMA(1) se tiene solamente una autocorrelación diferente de cero y aparece en el rezago correspondiente al periodo s .

La figura 3.41 contiene una representación de la autocorrelación para un modelo SMA(1) con $\theta_1 = -0.8$ y $s = 4$.

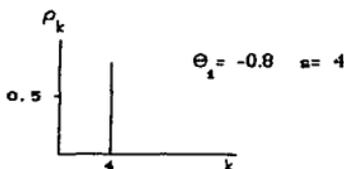


FIGURA 3.41 AUTOCORRELACION DE UN MODELO SMA(1)

Si se incluyen parámetros estacionales adicionales de medias móviles, el modelo SMA(1) puede generalizarse como

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-s} - \theta_2 a_{t-2s} - \theta_3 a_{t-3s} - \dots - \theta_\alpha a_{t-\alpha s}$$

o alternativamente como

$$z_t = \theta_\alpha (B^s)^\alpha a_t \quad (9.62)$$

donde

$$\theta_\alpha (B^s)^\alpha = 1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \dots - \theta_\alpha B^{\alpha s} \quad (9.63)$$

3.5.3 MODELOS ESTACIONALES ARMA

Se puede combinar los procesos estacionales autorregresivos y de medias móviles en una sola clase de modelos. La serie que es gobernada por un proceso estacional combinado se expresa como

$$\Phi_P(B^s)z_t = \Theta_Q(B^s)a_t \quad (3.64)$$

donde nuevamente

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps} \quad (3.65)$$

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs} \quad (3.66)$$

La diferencia con el proceso ARMA no estacional es que las autocorrelaciones aparecen en múltiplos del periodo s .

Un modelo que se presenta frecuentemente para las series de tiempo es el modelo estacional ARMA(1,1).

$$z_t = \Phi_1 z_{t-s} + a_t - \Theta_1 a_{t-s}$$

Sus autocorrelaciones tiene en mismo comportamiento que el modelo ARMA regular, excepto que éstas aparecen a múltiplos del rezago estacional s .

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{(1 - \Phi_1 \Theta_1)(\Phi_1 - \Theta_1)}{1 + \Theta_1^2 - 2\Phi_1 \Theta_1} & k = s \\ \Phi_1 \rho_{k-s} & k = 2s, 3s, \dots \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

La figura 3.42 muestra el correlograma de un proceso estacional

ARMA(1,1)

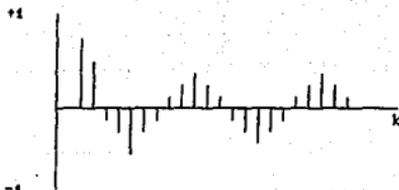


FIGURA 3.42 AUTOCORRELACIONES DEL PROCESO $Z_t = 1.5Z_{t-1} + \alpha_t - 0.8\alpha_{t-1}$

3.6 EL MODELO GENERAL ESTACIONAL MULTIPLICATIVO

La relación entre periodos de una serie se representa por el modelo

$$\bar{\phi}_p(B^s)z_t = \theta_q(B^s)$$

y la relación en los periodos por el modelo

$$\phi_p(B)z_t = \theta_q(B)$$

Si se combinan ambas influencias se obtiene el modelo general estacional multiplicativo

$$\phi_p(B)\bar{\phi}_p(B^s)\nabla_m^D \nabla_s^d z_t = \theta_q(B)\theta_q(B^s)\alpha_t \quad (3.67)$$

donde,

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (3.68)$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (3.69)$$

$$\bar{\phi}_p(B^s) = 1 - \bar{\phi}_1 B^s - \bar{\phi}_2 B^{2s} - \dots - \bar{\phi}_p B^{ps} \quad (3.70)$$

$$\theta_q(B^s) = 1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \dots - \theta_q B^{qs} \quad (3.71)$$

- p = número de parámetros autorregresivos regulares
- q = número de parámetros de medias móviles regulares
- P = número de parámetros autorregresivos estacionales
- Q = número de parámetros de medias móviles estacionales
- d = número de diferenciaciones consecutivas aplicadas a la serie
- D = número de diferenciaciones estacionales aplicadas a la serie

En (3.67) la parte autorregresiva como la parte de medias móviles aparecen como el producto de dos operadores polinomiales: uno regular y uno estacional.

Para ver como funcionan estos operadores se pueden considerar los siguientes ejemplos:

1) Un modelo autorregresivo de primer orden estacional ARIMA (0,0,0)X(1,0,0)₄ con datos recolectados trimestralmente, se puede representar como

$$z_t - \bar{\phi}_1 z_{t-4} = e_t$$

o alternativamente como

$$(1 - \bar{\phi}_1 B^4)z_t = e_t$$

se asume que el término de error no es ruido blanco, sino representa a un proceso autorregresivo de primer orden para los trimestres consecutivos,

$$e_t = \phi_1 e_{t-1} + \alpha_t$$

donde α_t si es ruido blanco. Al combinarse ambas influencias se obtiene el modelo ARIMA(1,0,0)X(1,0,0)₄

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \bar{\phi}_1 B^4)z_t = \alpha_t$$

la condición de estacionaridad exige que $|\phi_1| < 1$ y $|\phi_2| < 1$.

2) Otro modelo particular es el de medias móviles de primer orden regular y estacional ARIMA(0,1,1)X(0,1,1)₁₂ y que se expresa como

$$\nabla_{12} \nabla z_t = (1 - \theta_1)(1 - \theta_1 B^{12}) a_t$$

Para la parte estacional se tiene

$$\nabla_{12} z_t = (1 - \theta_1 B^{12}) e_t$$

y para la primera diferencia del término de error e_t está gobernada por un proceso de medias móviles de primer orden,

$$\nabla e_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Nuevamente la condición de invertibilidad exige que $|\theta_1| < 1$ y que $|\theta_2| < 1$.

A continuación se muestran algunos modelos estacionales multiplicativos que se adaptan a muchas series de tiempo. Asimismo se presentan el comportamiento de sus autocorrelaciones y sus características principales:

1) Modelo $w_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^s) a_t$ con $s \geq 3$.

Forma explícita: $w_t = a_t - \theta a_{t-1} - \theta a_{t-s} + \theta \theta a_{t-s-1}$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = (1 + \theta^2)(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_1 = -\theta(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_{s-1} = \theta \theta$$

$$\lambda_s = -\theta(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s-1}$$

Todas las demás autocovarianzas son cero.

Características especiales:

a) $\lambda_{s-1} = \lambda_{s+1}$

b) $\rho_{s-1} = \rho_{s+1}$

2) Modelo $v_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta B^S)\alpha_t$ con $s \geq 5$.

Forma explícita:

$$v_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \theta \alpha_{t-s} + \theta_1 \theta \alpha_{t-s-1} + \theta_2 \theta \alpha_{t-s-2}$$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_1 = -\theta_1(1 - \theta_2)(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_2 = -\theta_2(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_{s-2} = \theta_2 \theta$$

$$\lambda_{s-1} = \theta_1 \theta (1 - \theta_2)$$

$$\lambda_s = -\theta(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s-1}$$

$$\lambda_{s+2} = \lambda_{s-2}$$

Las demás autocovarianzas son cero

Características especiales:

a) $\lambda_{s-2} = \lambda_{s+2}$

b) $\lambda_{s-1} = \lambda_{s+1}$

3) Modelo $w_t = (1 - \theta B)(1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s})a_t$ con $s \geq 3$

Forma explícita:

$$w_t = a_t - \theta a_{t-1} - \theta_1 a_{t-s} + \theta\theta_1 a_{t-s-1} - \theta_2 a_{t-2s} + \theta\theta_2 a_{t-2s-1}$$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = (1 + \theta^2)(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\lambda_1 = -\theta(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\lambda_{s-1} = \theta\theta_1(1 - \theta_2)$$

$$\lambda_s = -\theta_1(1 + \theta^2)(1 - \theta_2)$$

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s-1}$$

$$\lambda_{2s-1} = -\theta_2(1 + \theta^2)$$

$$\lambda_{2s+1} = \lambda_{2s-1}$$

Todas las demás autocovarianzas son cero.

Características especiales:

a) $\lambda_{s-1} = \lambda_{s+1}$

b) $\lambda_{2s-1} = \lambda_{2s+1}$

4) Modelo $(1 - \Phi B^s)w_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^s)a_t$ con $s \geq 3$.

Forma explícita:

$$w_t = \Phi w_{t-s} + a_t - \theta a_{t-1} - \theta a_{t-s} + \theta\theta a_{t-s-1}$$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = (1 + \theta^2) \left[1 + \frac{(\theta - \Phi)^2}{1 - \Phi^2} \right]$$

$$\lambda_1 = -\theta \left[1 + \frac{(\theta - \bar{\phi})^2}{1 - \bar{\phi}^2} \right]$$

$$\lambda_{s-1} = \theta \left[\theta - \bar{\phi} - \frac{\bar{\phi}(\theta - \bar{\phi})^2}{1 - \bar{\phi}^2} \right]$$

$$\lambda_s = -(1 + \theta^2) \left[\theta - \bar{\phi} - \frac{\bar{\phi}(\theta - \bar{\phi})^2}{1 - \bar{\phi}^2} \right]$$

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s-1}$$

$$\lambda_j = \bar{\phi} \lambda_{j-s} \quad j \geq s + 2$$

Para $s \geq 4$ $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s-2}$ son todos cero.

Características especiales:

a) $\lambda_{s-1} = \lambda_{s+1}$

b) $\lambda_j = \bar{\phi} \lambda_{j-s} \quad j \geq s + 2$

La utilidad del modelo general multiplicativo depende de que tanto sea posible parametrizar la serie de tiempo parsimoniosamente en estos términos. Existe una gran variedad de series de tiempo estacionales originadas por diversas fuentes. No siempre es posible obtener un ajuste adecuado con modelos multiplicativos para todas las series. Una modificación es permitir un operador de medias móviles no multiplicativo.

En los casos de que un modelo no-multiplicativo sea necesario, un modelo multiplicativo puede proveer un buen inicio para la construcción de un mejor modelo no-multiplicativo.

Los siguientes dos modelos son ejemplos de modelos estacionales no multiplicativos, se presentan sus autocorrelaciones y

características principales:

$$1) \text{ Modelo } w_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t \quad \text{con } s \geq 3.$$

Forma explícita:

$$w_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_{s+1} a_{t-s-1}$$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{s+1}^2$$

$$\lambda_1 = -\theta_1 + \theta_1 \theta_2$$

$$\lambda_{s-1} = \theta_1 \theta_2$$

$$\lambda_s = \theta_1 \theta_2 - \theta_2$$

$$\lambda_{s+1} = -\theta_2$$

Todas las demás autocovarianzas son cero.

Características especiales:

a) En general

$$\lambda_{s-1} \neq \lambda_{s+1}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \neq \lambda_{s+1}$$

$$2) \text{ Modelo } (1 - \bar{\theta} B^s) w_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t \quad \text{con } s \geq 3.$$

Forma explícita:

$$w_t = \bar{\theta} w_{t-s} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_{s+1} a_{t-s-1}$$

Autocovarianzas:

$$\lambda_0 = 1 + \theta^2 + \frac{(\theta - \phi)^2}{1 - \phi^2} + \frac{(\theta_{s+1} + \theta_1 \phi)^2}{1 - \phi^2}$$

$$\lambda_1 = -\theta_1 + \frac{(\theta - \phi)(\theta_{s+1} + \theta_1 \phi)}{1 - \phi^2}$$

$$\lambda_{s-1} = (\theta - \phi) \left[\theta_1 + \phi \frac{(\theta_{s+1} + \theta_1 \phi)}{1 - \phi^2} \right]$$

$$\lambda_s = -(\theta - \phi) \left[1 - \phi \frac{(\theta - \phi)}{1 - \phi^2} \right] + (\theta_{s+1} + \theta_1 \phi) \left[\theta_1 + \phi \frac{(\theta_{s+1} + \theta_1 \phi)}{1 - \phi^2} \right]$$

$$\lambda_{s+1} = -(\theta_{s+1} + \theta_1 \phi) \left[1 - \phi \frac{(\theta - \phi)}{1 - \phi^2} \right]$$

$$\lambda_j = \phi \lambda_{j-s} \quad j \geq s+2$$

Para $s \geq 4$ $\lambda_2, \dots, \lambda_{s-2}$ son todas cero.

Características especiales:

a) $\lambda_{s-1} \neq \lambda_{s+1}$

b) $\lambda_j = \phi \lambda_{j-s} \quad j \geq s+2$

CAPITULO IV

IDENTIFICACION

CAPITULO IV IDENTIFICACION

En el capítulo I se manifestó que una serie de tiempo puede considerarse como una realización de un determinado proceso estocástico y en el capítulo III se examinaron las características de los diferentes procesos ARIMA, que son una clase particular de procesos estocásticos pero que pueden ser utilizados para describir el comportamiento de la mayor parte de las series económicas. En base a esto, se considerará que una serie de tiempo es una realización de un proceso estocástico específico $ARIMA(p,d,q)X(P,D,Q)$. Se dice se trata de un proceso específico cuando los parámetros $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q, d, D, \mu$ y σ^2 están determinados. La figura 4.1 refleja este mecanismo de generación de una serie de tiempo (tomado de Ezequiel Uriel J. p. 69):

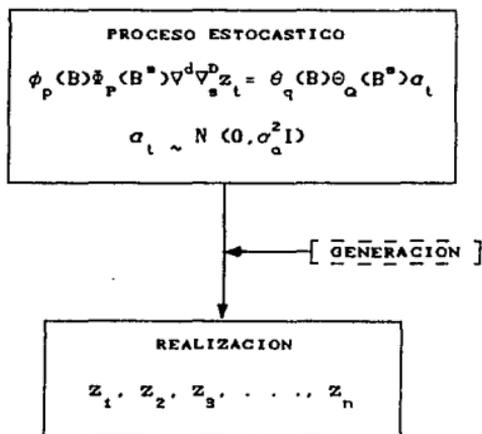


FIGURA 4.1 MECANISMO DE GENERACION DE UNA SERIE DE TIEMPO

Con este mecanismo, a partir de una muestra concreta de "ruidos blancos" a_1, a_2, \dots, a_t y de valores iniciales de z_t ($z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p+1}$) y de a_t ($a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q+1}$) se produce una realización del proceso, o dicho de otra forma, se generan los valores z_1, z_2, \dots, z_n .

Naturalmente, con una estructura $ARIMA(p,d,q)X(P,D,Q)_s$ particular pueden obtenerse diferentes realizaciones. En cada realización la muestra de "ruidos blancos" será diferente y por consiguiente también será diferente la serie de tiempo generada. Pero si todas las series generadas proceden de una misma estructura estocástica conservarán entre sí características similares.

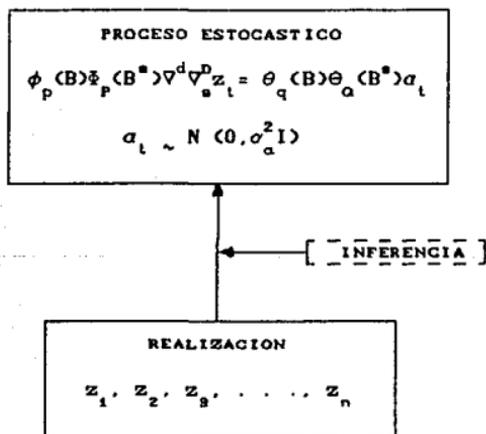


FIGURA 4.2 INFERENCIA SOBRE UN PROCESO ESTOCASTICO

Bajo esta perspectiva, de un proceso conocido previamente se pueden generar una o más realizaciones. Sin embargo, si se conocen

unicamente los valores de la serie de tiempo, el objetivo será conocer el mecanismo que verosimilmente haya podido generar la serie. La figura 4.2 muestra este último enfoque (tomado de Ezequiel Uriel J. p. 70).

Para efectuar inferencias se puede disponer de una o más realizaciones, es decir, de una o más series generadas de un mismo proceso. En la economía y en general en el ámbito de las ciencias sociales, como se indicó en el capítulo I, hay que realizar la inferencia casi siempre en base a una sola realización.

Por lo que la elaboración de un modelo ARIMA consiste en la búsqueda de un proceso $ARIMA(p,d,q)X(P,D,Q)$ que verosimilmente haya podido generar la serie de tiempo en estudio.

Las etapas que pueden considerarse en la elaboración del modelo ARIMA son las siguientes:

- 1) Identificación de las especificaciones preliminares del modelo.
- 2) Estimación de los parámetros del modelo.
- 3) Validación de la suficiencia del modelo.
- 4) Realización de pronósticos de futuras realizaciones.

En la etapa de identificación se selecciona un modelo particular de la clase general de modelos estacionales multiplicativos

$$\phi_p(B) \nabla^d \nabla_{12}^D z_t = \theta_q(B) \Theta_{\alpha}(B^s) \alpha_t$$

En una primera fase se efectúa el análisis de estacionaridad de la serie. Si la serie se considera no estacionaria, se eligen los valores más adecuados de d , D y β de tal forma que la serie

$v_t = \nabla^d \nabla_s^D z_t^{(\beta)}$ cumpla con las condiciones de estacionariedad.

En una segunda fase, se especifica el orden de los polinomios regulares autorregresivo y de medias móviles, así como el orden de los polinomios estacionales autorregresivo y de medias móviles del proceso ARMA que se considere haya podido generar la serie estacionaria v_t .

Una vez que un modelo ha sido tentativamente seleccionado se procede a estimar los parámetros incluidos. Una vez concluida la estimación, se tiene conocimiento de un proceso que, hipotéticamente, ha podido generar la serie de tiempo transformada v_t , a partir de la cual se puede obtener la serie original z_t . La serie puede expresarse como $\phi_p(B)\Phi_p(B^s)w_t = \theta_q(B)\Theta_q(B^s)\hat{z}_t$, conociendo los parámetros de la serie v_t se puede determinar la serie \hat{z}_t , y si el modelo estimado es adecuado esta serie deberá ser una serie que se aproxima al "ruido blanco".

Por lo que en la etapa de validación se aplican varias pruebas para verificar si los parámetros estimados del modelo especifican adecuadamente a los datos; si cualquier irregularidad se detecta, debe identificarse un nuevo modelo y el ciclo de identificación, estimación, verificación se repite.

Finalmente, si el modelo pasa todas las pruebas es utilizado para generar pronósticos.

La figura 4.3 muestra el diagrama de flujo de estas 4 etapas (tomado de Walter Vandaele p. 63).

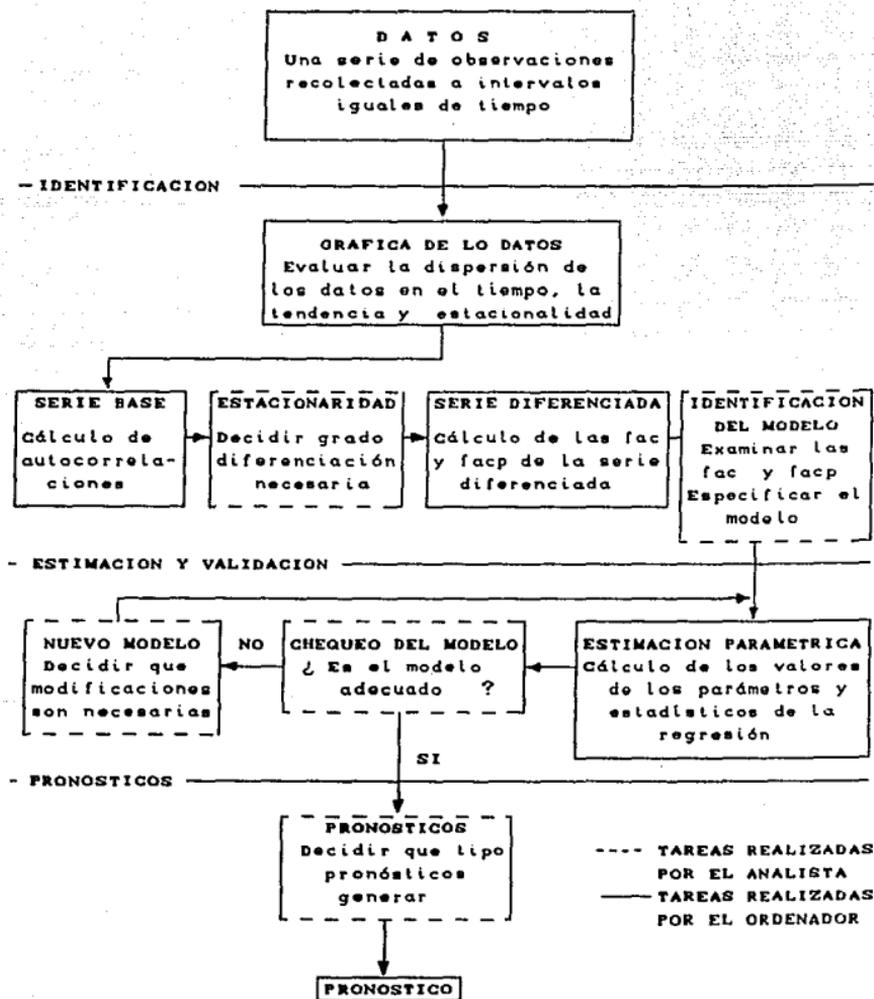


FIGURA 4.3 ETAPAS DEL PROCESO ITERATIVO BOX-JENKINS

4.1 ESTRATEGIA DE IDENTIFICACION

Dado que la clase general de modelos estacionales multiplicativos $\phi_p(B)\Phi_P(B^s)z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t$ es muy extensa, es necesario contar con un procedimiento simple que permita identificar tentativamente subclases de modelos, que sean parsimoniosos pero que expliquen adecuadamente la serie de tiempo en estudio.

La identificación es la clave para la construcción de modelos de series de tiempo. Las dos herramientas más útiles en la identificación son la función de autocorrelación (fac) y la función de autocorrelación parcial (facp). Anteriormente se expresó que los procesos estocásticos autorregresivos, de medias móviles y mixtos pueden distinguirse entre sí mediante sus autocovarianzas y autocorrelaciones. Son principalmente las autocorrelaciones las que se utilizan en la identificación tentativa de un modelo. Adicionalmente, éstas proporcionan estimaciones iniciales aproximadas de los parámetros que se han incluido, por lo que a continuación se conceptualiza, de manera formal, la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

4.2 LAS FUNCIONES DE AUTOCORRELACION Y DE AUTOCORRELACION PARCIAL

Una forma práctica de analizar las autocorrelaciones de un proceso estocástico es mediante la gráfica de éstas contra los rezagos. Esta gráfica se denomina función de autocorrelación (fac) o

correlograma⁽¹⁾. La fac es simétrica alrededor del rezago cero, por lo que $\rho_{-k} = \rho_k$ y solamente es necesario analizar su parte positiva. La figura 4.4 muestra la matriz de autocorrelación de una serie hipotética y su correspondiente fac, mientras que la figura 4.5 muestran unicamente la parte positiva de esta fac.

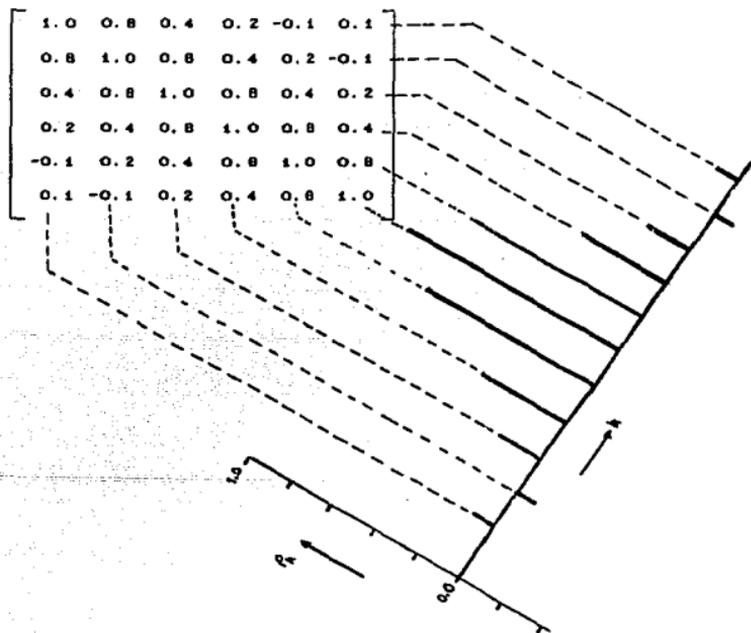


FIGURA 4.4 MATRIZ DE AUTOCORRELACION Y SU RESULTANTE FAC
(TOMADO DE BOX Y JENKINS, p. 31)

(1) En el capítulo anterior se presentaron las funciones de autocorrelación de los diferentes procesos simulados, sin embargo no se expresó de manera formal su definición.

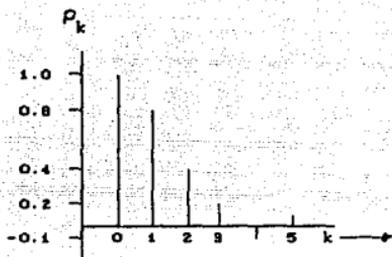


FIGURA 4.5 PARTE POSITIVA DE LA FAC DE LA FIGURA 4.4

Los valores que toma la función de autocorrelación a diferentes rezagos se analizan para determinar el comportamiento de la serie y decidir el tipo y número de parámetros a incluir para la construcción de un modelo.

Considerando que cualquier modelo ARIMA puede expresarse como un proceso autorregresivo puro⁽²⁾, que posee la característica de una fac que a pesar de que sus autocorrelaciones decaen rápidamente pueden extenderse hasta el infinito. Lo anterior indica que, inicialmente, no se puede saber cual es el orden necesario del proceso autorregresivo para ajustar adecuadamente la serie de tiempo basándose únicamente en el análisis de la fac. Sin embargo, la función de autocorrelación parcial, al contrario de un proceso autorregresivo, resume toda la información contenida en la fac en un pequeño número de estadísticos. Esto es, para explicar un proceso AR(p) solamente son necesarios p estadísticos más que un infinito número de autocorrelaciones, y la facp de un proceso AR(p)

(2) Los modelos que contengan componentes de medias móviles pueden representarse en forma autorregresiva si cumplen con la condición de invertibilidad.

tiene un límite en el rezago p , por lo que se utiliza de manera complementaria con la fac para la identificación del modelo.

En la construcción de modelos autorregresivos es necesario verificar si se requiere incluir variables adicionales desfasadas de z_t para representar de manera más adecuada a los datos. Por ejemplo, si se ha seleccionado un modelo $AR(k-1)$, se debe evaluar si un modelo $AR(k)$ puede representar más satisfactoriamente a la serie. Para tal efecto, se agrega la variable adicional desfasada z_{t-k} . Si el valor del coeficiente $|\phi_k|$ resulta significativo deberá incluirse z_{t-k} , en caso contrario deberá omitirse z_{t-k} y se considera que la representación $AR(k-1)$ del proceso es adecuada.

El coeficiente ϕ_k incluye la explicación no considerada con el modelo $AR(k-1)$, esto es, mide el efecto parcial que z_{t-k} tiene en la explicación del comportamiento de z_t en un modelo donde ya han sido incluidas las variables z_{t-1} , z_{t-2} , . . . $z_{t-(k-1)}$. El coeficiente autorregresivo de mayor orden en el modelo, en este caso ϕ_k , se define como la autocorrelación parcial en el rezago k y se denota por $\phi_{kk}^{(3)}$. La gráfica de ϕ_{kk} para diferentes rezagos de k , se denomina como la función de autocorrelación parcial.

Por ejemplo, si se supone que una serie de tiempo está gobernada

(3) La $facp$ responde inicialmente a la misma idea que la fac pues trata de medir la correlación existente entre los valores de una serie en distintos instantes de tiempo. Pero a diferencia de la fac , mide dicha correlación ajustada por el efecto de los retardos intermedios. Por ejemplo, parte de la autocorrelación entre z_t y z_{t-2} se debe en general a que ambas variables están correlacionadas con z_{t-1} . Cf. A. Novales. Op. cit. p. 220.

por un proceso AR(1)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

y se quiere evaluar el modelo AR(2)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t$$

se deduce que $\phi_{11} = \phi_1$ y $\phi_{22} = \phi_2$. Si el verdadero modelo es un AR(1) se espera que ϕ_{11} sea diferente de cero y ϕ_{22} sea igual a cero. Similarmente, si se estima los modelos AR(3), AR(4), . . . las autocorrelaciones parciales de orden 3, 4 y siguientes deberán ser todas iguales a cero.

Por lo que en la construcción de un modelo autorregresivo puede utilizarse la facp para decidir cuantos parámetros son necesarios incluir en el modelo. Se inicia con la hipótesis $p = 1$, si la autocorrelación parcial ϕ_{11} es significativamente diferente de cero se concluye que el proceso es al menos de orden 1. Para verificar si el proceso es de orden 2, se evalúa ϕ_{22} , si ϕ_{22} es estadísticamente diferente de cero se concluye que el proceso es al menos de orden 2. Similarmente se evalúa ϕ_{33} , ϕ_{44} , . . . para verificar si la serie no está gobernada por un proceso autorregresivo de mayor orden.

4.2.1 LAS FAC Y FACP MUESTRALES DE UNA SERIE DE TIEMPO

4.2.1.1 AUTOCORRELACIONES MUESTRALES

En la práctica, las autocorrelaciones poblacionales ρ_k de un

proceso estocástico son desconocidas, por lo que debe basarse en las estimaciones de éstas denominadas autocorrelaciones muestrales r_k , para identificar el modelo.

La etapa de identificación exige de un alto grado de juicio debido a que las autocorrelaciones muestrales con las que se evalúa la serie, nunca corresponden de manera exacta a las autocorrelaciones poblacionales. Más aún, no existe una forma exacta de identificar un modelo⁽⁴⁾.

Las autocorrelaciones estimadas pueden tener varianzas más grandes y pueden estar altamente correlacionadas unas con otras, por esta razón no se puede esperar una adherencia detallada a la fac poblacional en base a la fac estimada. Al utilizar la fac estimada se debe considerar que cualquier indicación sutil puede indicar o no efectos reales, por lo que debe identificarse más de un modelo tentativo para la serie en estudio.

Una estimación satisfactoria de las autocorrelaciones ρ_k , considerando (1.13) y (1.14) es

$$\hat{r}_k = \frac{\hat{c}_k}{\hat{c}_0} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} z_t z_{t+k}}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t^2} \quad k=0, 1, 2, \dots, K \quad (4.1)$$

(4) Es inexacta también debido a que los modelos que ocurren en la práctica y en las circunstancias en que se dan, es una propiedad del comportamiento del mundo real y no es posible modelarlo por un argumento puramente matemático. G. Box. y G. Jenkins. Op. cit. p. 179.

donde \hat{c}_k es la estimación de la autocovarianza λ_k , \hat{c}_0 es la estimación de la varianza de la serie, z_t y z_{t+k} son desviaciones con respecto a la media de la serie estacionaria y n es el número de observaciones disponibles posterior a las diferenciaciones aplicadas a la serie.

Por cada incremento en k se pierde una observación, \hat{c}_1 es el estadístico estimado para $n-1$ pares de observaciones; \hat{c}_2 es estimado para $n-2$ pares de observaciones y así sucesivamente.

Para ilustrar lo anterior, se calcula \hat{r}_1 para los 10 primeros valores de la serie del proceso químico por lotes. La media de los 10 primeros valores es 51 y sus desviaciones son -4, 13, -28, 20, -13, 13, 4, -10, 8 y -3.

TABLA EL PROCESO QUIMICO POR LOTES

OBSERVACIONES				
1 - 15	16 - 30	31 - 45	46 - 60	61 - 70
47	44	50	62	68
64	80	71	44	38
23	55	56	64	50
71	37	74	43	60
38	74	50	52	39
64	51	58	38	59
55	57	45	59	40
41	50	54	55	57
59	60	36	41	54
48	45	54	53	23
71	57	48	49	
35	50	55	34	
57	45	45	35	
40	25	57	54	
58	59	50	45	

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^9 z_t z_{t+1} &= (-4)(13) + (13)(28) + (-28)(20) + (20)(-13) + (-13)(13) \\ &\quad (13)(4) + (4)(-10) + (-10)(8) + (8)(-3) \\ &= -1497\end{aligned}$$

por lo que $\hat{c}_1 = \frac{-1497}{10} = -149.7$

Similarmente

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{10} z_t^2 &= (-4)^2 + (13)^2 + (-28)^2 + (20)^2 + (-13)^2 + (13)^2 + (4)^2 \\ &\quad (-10)^2 + (8)^2 + (-3)^2 = 1896\end{aligned}$$

por lo que $\hat{c}_0 = \frac{1896}{10} = 189.6$

utilizando \hat{c}_1 y \hat{c}_0 para obtener la estimación de la primera autocorrelación \hat{r}_1 se tiene

$$\hat{r}_1 = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_0} = \frac{-149.7}{189.6} = -0.79$$

La tabla siguiente muestra las autocorrelaciones estimadas para las primeras 15 autocorrelaciones utilizando la serie completa de 70 observaciones y la figura 4.6 muestra la gráfica de estas:

k	\hat{r}_k	k	\hat{r}_k	k	\hat{r}_k
1	-0.39	6	-0.05	11	0.11
2	0.30	7	0.04	12	-0.07
3	-0.17	8	-0.04	13	0.15
4	0.07	9	-0.01	14	0.04
5	-0.10	10	0.01	15	-0.01

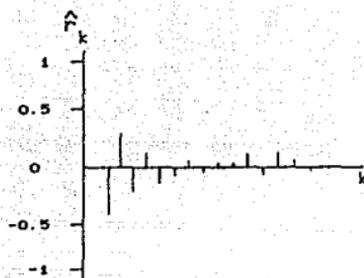


FIGURA 4.6 FUNCION DE AUTOCORRELACION DEL PROCESO QUIMICO POR LOTES

En la práctica para obtener una estimación adecuada de la ρ_k se requiere de al menos 50 observaciones y las autocorrelaciones estimadas deben calcularse para $k = 1, 2, \dots, K$, con K no mayor a $n/4$.

Como se comentó anteriormente, las autocorrelaciones poblacionales son desconocidas y como los valores estimados difieren de los teóricos, es importante en la identificación de un modelo cuando la autocorrelación ρ_k se puede considerar nula a partir de cierto rezago. Para este propósito se utiliza el error estándar de las estimaciones de los coeficientes de las autocorrelaciones para un proceso estacionario. Bartlett (1946) proporciona el siguiente estadístico para la estimación de la varianza de las autocorrelaciones:

$$\text{Var}(\hat{r}_k) \approx \frac{1}{n} \left[1 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_q^2) \right] \quad k > q \quad (4.2)$$

para ejemplificar el estadístico anterior se evaluarán las autocorrelaciones obtenidas anteriormente de la serie del proceso químico por lotes. Se inicia con el supuesto de que todas las

autocorrelaciones ρ_k son cero, la hipótesis a probar es $H_0: \rho = 0$.

La expresión (4.2) se reduce a

$$\text{Var}(\hat{r}_k) \approx \frac{1}{n} \quad (4.3)$$

Para todos los rezagos de la serie

$$\text{Var}(\hat{r}_k) \approx \frac{1}{n} = \frac{1}{70} = 0.0143$$

su correspondiente error estándar (SE) es $(0.0143)^{1/2} = 0.12$. El criterio habitual para evaluar la significancia de los valores estimados de las autocorrelaciones, en forma individual, es de ± 2 errores estándar (intervalo de confianza del 95%). Como los valores de $\hat{r}_1 = -0.39$ y $\hat{r}_2 = 0.30$ son más de 3 veces y 2.5 veces mayores, respectivamente, comparados con su error estándar, se puede considerar que ρ_1 y ρ_2 son significativamente diferentes de cero. Las estimaciones de las autocorrelaciones restantes al no rebasar, en valor absoluto, al menos 2 errores estándar pueden considerarse como nulas.

En base a lo anterior la hipótesis inicial H_0 debe rechazarse y se considera ahora la hipótesis $H_1: \rho = 2$. Se sustituye \hat{r}_1 para ρ_1 y \hat{r}_2 para ρ_2 en (4.2),

$$\text{Var}(\hat{r}_k) \approx \frac{1}{70} \left[1 + 2 \left\{ (-0.39)^2 + (0.30)^2 \right\} \right] = 0.0212 \quad k > 2$$

con un error estándar de 0.146. Como las autocorrelaciones estimadas después del rezago 2 son relativamente pequeñas comparadas con su error estándar, no existe razón para dudar que la serie está dominada por un proceso AR(2) con $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ y $\rho_k = 0$

para $k > 2$.

La fórmula de Bartlett es únicamente una aproximación a la verdadera varianza de los valores estimados de la fac. Dicha aproximación tiende a sobreestimar el valor de la varianza, generando así intervalos de confianza de un tamaño mayor del que realmente deberían tener. En consecuencia, la utilización de (4.3) tiende a mantener la hipótesis de no significancia de r_k más a menudo de lo que debiera, y con ello, a no detectar una estructura estocástica en caso de que dicha estructura existiera.

Conviene, por lo tanto, prestar atención a la posible detección de cualquier irregularidad en la fac, aún cuando el estadístico de Bartlett indique que sus valores no son significativos. En especial, conviene ser exigentes con las estimaciones de los primeros valores de la fac, y utilizar para ellos un intervalo de confianza de aproximadamente ± 1.25 o ± 1.5 errores estándar en vez del habitual intervalo de ± 2 errores estándar.

4.2.1.2 AUTOCORRELACIONES PARCIALES MUESTRALES

Por su parte, las estimaciones para los distintos rezagos de la facp pueden calcularse mediante regresiones sucesivas de procesos autorregresivos de orden 1, 2, 3, . . . por el método de mínimos cuadrados para obtener $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$, $\hat{\phi}_{33}$. . . como el último coeficiente de cada regresión.

En el caso de la regresión de z_t con z_{t-1} , si el proceso es estacionario, sus errores estándar son iguales. Por lo tanto, la pendiente estimada de la regresión coincide con el coeficiente de correlación entre z_t y z_{t-1} , es decir ϕ_{11} . Asimismo, el primer valor de la facp es igual al primer valor de la fac, debido a que al estimar la correlación entre z_t y z_{t-1} no hay que corregirla por ningún valor intermedio, por lo que en las dos funciones ϕ_{11} y r_1 toman el mismo valor numérico. Lo anterior es válido para cualquier proceso estocástico.

Alternativamente, si las estimaciones de los parámetros no son cercanas a los límites no estacionarios, se pueden utilizar las estimaciones de las ecuaciones de Yule-Walker⁽⁵⁾. Las autocorrelaciones parciales cumplen con la siguiente ecuación:

$$r_j = \phi_{k1} r_{j-1} + \phi_{k2} r_{j-2} + \dots + \phi_{kk} r_{j-k} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.4.)$$

y resolver la ecuación para $k = 1, 2, \dots$

La siguiente tabla muestra las primeras 15 estimaciones de las autocorrelaciones parciales de la serie del proceso químico por lotes obtenidas por regresiones sucesivas de procesos autorregresivos de orden 1 al 15 y la figura 4.7 muestra la gráfica de éstas:

(5) Consultar a Box y Jenkins para la resolución de las ecuaciones de Yule Walker. Op. cit. pp. 64 y 65.

k	$\hat{\phi}_{kk}$	k	$\hat{\phi}_{kk}$	k	$\hat{\phi}_{kk}$
1	-0.40	6	-0.15	11	0.18
2	0.19	7	0.05	12	-0.05
3	0.01	8	0.00	13	0.09
4	-0.07	9	-0.10	14	0.18
5	-0.07	10	-0.05	15	0.01

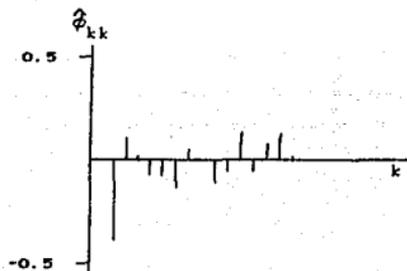


FIGURA 4.7 FUNCION DE AUTOCORRELACION PARCIAL DEL PROCESO QUIMICO POR LOTES

Al igual que en la fac se debe evaluar cuando las autocorrelaciones parciales pueden ser consideradas como nulas a partir de cierto rezago, para ello se calcula el error estándar para las autocorrelaciones parciales proporcionado por Quenouille (1949). La hipótesis de que un proceso es autorregresivo de orden p , si las estimaciones de las autocorrelaciones parciales $\hat{\phi}_{kk}$, $k > p$, se distribuyen aproximadamente independientes con varianza

$$\text{Var}(\hat{\phi}_{kk}) \approx \frac{1}{n} \quad k \geq p + 1 \quad (4.5)$$

La varianza de las autocorrelaciones parciales únicamente depende del tamaño de la muestra. La ecuación (4.5) provee un medio para determinar cuando la autocorrelación parcial $\hat{\phi}_{kk}$ puede considerarse como nula.

El valor aproximado del error estándar es

$$SE(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{(70)^{1/2}} = 0.12$$

Como el valor de $\hat{\phi}_{11} = -0.40$ es más de 3 veces el valor de su error estándar y $\hat{\phi}_{22} = 0.19$ más de 1.5 veces su error estándar, se puede considerar que ϕ_{11} y ϕ_{22} son significativamente diferentes de cero.

Las autocorrelaciones parciales restantes son en valor absoluto menores que 2 errores estándar y la mayoría de ellas menores a 1 error estándar, se puede concluir, que todas ellas son nulas y se considera la posibilidad de que es un proceso AR(2) el que domina a la serie del proceso químico por lotes.

4.3 DECIDIR SI UNA SERIE ES ESTACIONARIA

Una forma más analítica para decidir si una serie es estacionaria más que el análisis gráfico señalado en el capítulo II, es evaluar su fac con el propósito de verificar si las autocorrelaciones ρ_k decaen conforme se incrementa el rezago k . Si su fac no decae rápidamente, esto es, si presenta autocorrelaciones significativas en rezagos grandes, implica que se está analizando una serie todavía no estacionaria y es necesario aplicar diferenciaciones adicionales.

Las siguientes tablas muestran las autocorrelaciones de la serie de los precios de las acciones IBM, así como las autocorrelaciones de

su primera y segunda diferencia:

TABLA DE AUTOCORRELACIONES DE LA SERIE IBM

\hat{r}_k												
1-12	.99	.99	.98	.97	.96	.95	.95	.94	.98	.92	.91	.91
13-24	.90	.89	.88	.87	.86	.85	.84	.83	.82	.81	.82	.79
25-36	.79	.76	.75	.74	.73	.72	.71	.70	.69	.68	.67	.66

TABLA DE AUTOCORRELACIONES DE LA PRIMERA DIFERENCIA DE LA SERIE IBM

\hat{r}_k												
1-12	.09	.00	-.05	-.04	-.02	.12	.07	.04	-.07	.02	.07	.05
13-24	-.05	.07	-.07	.12	.13	.05	.05	.07	-.09	-.03	.06	.03
25-36	.02	-.11	-.06	.05	.04	.11	.07	-.08	-.07	-.01	.02	.04

TABLA DE AUTOCORRELACIONES DE LA SEGUNDA DIFERENCIA DE LA SERIE IBM

\hat{r}_k												
1-12	-.45	-.02	-.04	.00	-.07	.11	-.01	.04	-.11	.02	.04	.04
13-24	-.12	.13	-.17	.10	.05	-.04	-.01	.09	-.12	-.02	.07	-.01
24-36	.06	-.09	-.03	.06	-.04	.05	.06	-.08	.03	.01	.01	.00

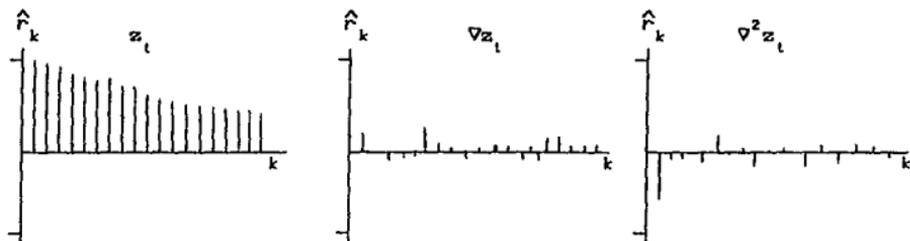


FIGURA 4.8 FUNCIONES DE AUTOCORRELACION PARA LAS SERIES z_t , ∇z_t Y $\nabla^2 z_t$ DE LA SERIE IBM

Como se espera, la fac de la primera serie (ya que se comporta como una serie de camino aleatorio) no decae rápidamente. Al observar este tipo de comportamiento en una fac, es evidencia de que se requiere aplicar diferenciaciones adicionales a la serie. También como era de esperarse, la fac de la primera diferencia de la serie si decae rápidamente, convirtiéndose inclusive en una serie de ruido blanco. Finalmente, en la segunda diferencia de la serie original se comporta como un proceso de medias móviles de primer orden con $\theta_1 = 1$, y tiene una autocorrelación significativa en el rezago 1 con un valor aproximado -0.5.

En el proceso de transformar una serie no estacionaria en estacionaria se puede ir demasiado lejos, provocando la sobrediferenciación con el objeto de eliminar todas las autocorrelaciones significativas. Lo recomendable es que, conforme los valores de la fac decaen rápidamente, no es necesario aplicar diferenciaciones adicionales⁽⁶⁾. Inclusive la sobrediferenciación de una serie hace más compleja la especificación del modelo, rompiendo con el principio de parsimonia. Afortunadamente en muchas situaciones, la fac muestra evidencia de que se ha sobrediferenciado la serie, aunque esto no puede considerarse como regla general.

(6) En el capítulo II se ejemplificó como una serie hipotética con una tendencia lineal puede eliminarse con una diferencia regular de primer orden. Asimismo, si una serie presentara una tendencia cuadrática, ésta podría eliminarse con una diferencia de segundo orden. Sin embargo, si a una serie que es estacionaria en el nivel medio se le aplican diferenciaciones se producirán series también estacionarias pero más suavizadas que la serie original, pero en contrapartida se irán perdiendo las características esenciales de la serie con cada diferencia, por lo que debe evitarse la sobrediferenciación.

Por ejemplo, el modelo puro de ruido blanco (similar a la segunda diferencia de la serie IBM)

$$z_t = a_t$$

donde todas sus autocorrelaciones para este modelo son nulas. Si se aplica una diferenciación regular de primer orden se tiene

$$z_t - z_{t-1} = a_t - a_{t-1}$$

$$w_t = a_t - a_{t-1}$$

$$\text{con } w_t = z_t - z_{t-1}$$

se obtiene un modelo MA(1) con $\theta_1 = 1$. Claramente, este modelo es más complicado que el modelo original de ruido blanco. La fac de este modelo tiene un valor en el rezago 1 de $\rho_1 = -0.5$ y cero para los demás rezagos. Consecuentemente, una estimación cercana a -0.5 para la primera autocorrelación seguida de pequeños valores para las autocorrelaciones restantes, es indicación de que se ha sobrediferenciado la serie (se puede observar que la segunda diferencia de la serie IBM presenta claramente este comportamiento, para este caso particular, una diferencia de primer orden es más que suficiente para transformar a la serie en estacionaria).

En la práctica, normalmente se aplican diferenciaciones de orden 1 o 2 para inducir estacionaridad, y solamente es necesario inspeccionar las primeras 20 autocorrelaciones para que se tenga una representación adecuada del comportamiento general de la fac⁽⁷⁾.

En los modelos estacionales, si las autocorrelaciones no decaen

(7) En los modelos que presentan un comportamiento estacional se requiere inspeccionar un número mayor de autocorrelaciones para poder observar el comportamiento periódico de las fac.

rápidamente en los rezagos que son múltiplos del periodo estacional s, es evidencia de que la serie no es estacionaria y es necesario aplicar diferenciaciones de tipo estacional.

Por ejemplo, las siguientes autocorrelaciones fueron generadas por un modelo $(1 - 0.7B)(1 - B^6)z_t = a_t$ con $\phi_t = 0.7$ (tomado de W. Vandaele, p. 72):

ρ_k												
1-12	.41	-.05	-.34	-.07	.36	.93	.37	-.07	-.37	-.12	.31	.85
13-24	.33	-.10	-.39	-.16	.26	.78	.29	-.11	-.40	-.19	.22	.73
25-36	.27	-.11	-.39	-.20	.20	.69	.26	-.11	-.37	-.19	.19	.66

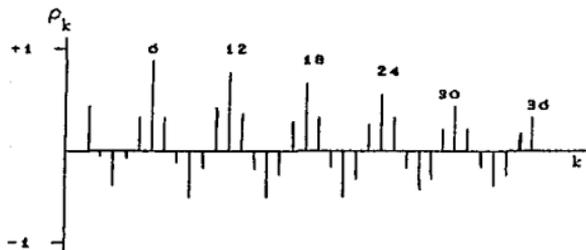


FIGURA 4.9 LA FAC DEL PROCESO $(1 - 0.7B)(1 - B^6)z_t = a_t$

Aunque las autocorrelaciones iniciales decaen rápidamente, las autocorrelaciones en la gráfica 4.9 señala "puntas" significativas en los rezagos 6, 12, 18, 24, 30 y 36 que son múltiplos del periodo estacional s. Para transformar esta serie en estacionaria se debe aplicar una diferenciación estacional de orden 6.

Una vez que se ha considerado que una serie es estacionaria, el siguiente paso es identificar un modelo dentro de la clase general de modelos estacionales multiplicativos ARIMA que mejor se adecue a

la serie. O sea, se propone la estructura de un modelo particular ARIMA que se obtiene al analizar el comportamiento de las f_{ac} y f_{acp} muestrales de la serie y compararlas con las f_{ac} y f_{acp} teóricas.

Por consiguiente, es necesario conocer detalladamente el comportamiento de las f_{ac} y f_{acp} para cada uno de los procesos teóricos analizados en el capítulo III.

4.4 LAS FUNCIONES DE AUTOCORRELACION Y AUTOCORRELACION PARCIAL TEORICAS PARA SERIES ESTACIONARIAS

4.4.1 LAS f_{ac} Y f_{acp} TEORICAS DE LOS MODELOS AUTORREGRESIVOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Para el proceso AR(1) se definieron sus autocorrelaciones teóricas como $\rho_k = \phi_1^k$ con una f_{ac} que converge a cero conforme se incrementa el orden del rezago k . Esta convergencia se realiza exponencialmente cuando $0 < \phi_1 < 1$ y oscilando en signo cuando $-1 < \phi_1 < 0$ (figuras 4.10(a) y 4.10(c) respectivamente). Por el contrario, su f_{acp} tiene solamente una autocorrelación significativa en el rezago 1 y tiene el mismo signo que el valor del parámetro ϕ_1 (figuras 4.10(b) y 4.10(d)).

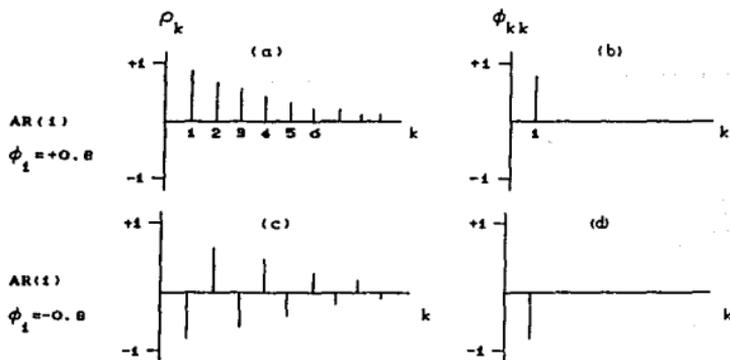
Por su parte, la f_{ac} de un proceso AR(2) presenta 4 comportamientos principales, de acuerdo a la ubicación de los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 en la región de admisibilidad (ver la figura 3.11 del capítulo III):

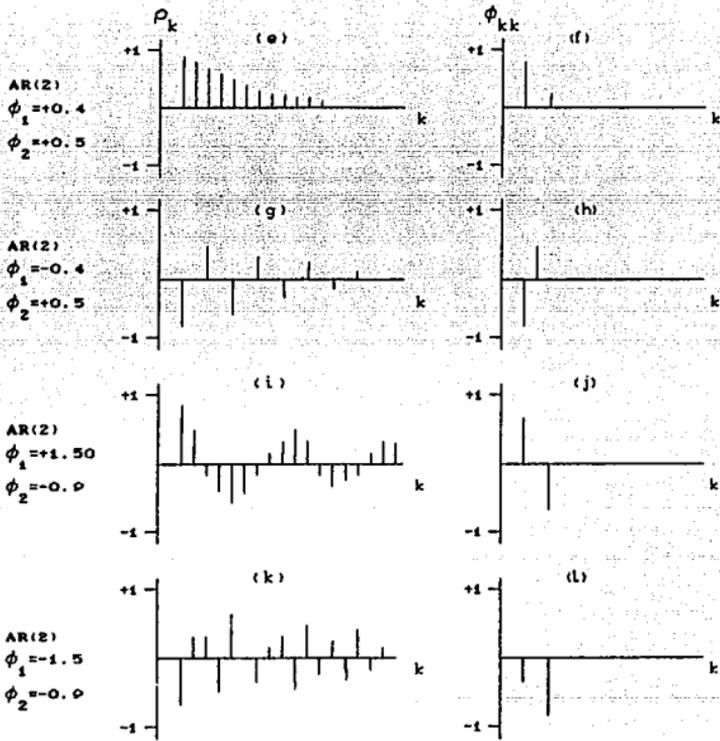
decae gradualmente si los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 se ubican en el área 1, oscilando en signo si se ubican en el área 2 (figuras 4.10e) y 4.10g). la convergencia puede realizarse siguiendo una curva sinusoidal (figuras 4.10d) y 4.10k) si los parámetros están ubicados en las áreas 3 y 4.

La fac de los procesos AR(1) y AR(2) pueden ser muy similares y no es tan fácil diferenciarlos basándose únicamente en sus autocorrelaciones. Sin embargo, en la facp si se ve claramente la diferencia entre ambos procesos. Mientras la facp para un proceso AR(1) posee solamente una autocorrelación significativa en el rezago 1 (figuras 4.10b) y 4.10d), la facp del proceso AR(2) tiene dos autocorrelaciones significativas, una en el rezago 1 y otra en el rezago 2 (figuras 4.10f), 4.10h), 4.10j) y 4.10l).

Al combinarse la información proporcionada por la fac y la facp es posible distinguir entre estos dos procesos autorregresivos.

FIGURA 4.10 LAS FAC Y FACP DE ALGUNOS PROCESOS AR(1) Y AR(2)





Para familiarizarse con la identificación se presentan los primeros 15 valores de la fac del proceso AR(1) simulado $z_t = 0.8z_{t-1} + \alpha_t$ y se comparan con los valores de la fac teórica del mismo proceso.

Aunque las autocorrelaciones muestrales no son exactamente iguales, resultan muy próximas a las autocorrelaciones teóricas.

REZAGO	FAC TEORICA	FAC SIMULADA
1	0.80	0.77
2	0.64	0.61
3	0.51	0.51
4	0.41	0.46
5	0.33	0.37
6	0.26	0.27
7	0.21	0.21
8	0.17	0.17
9	0.13	0.08
10	0.11	0.08
11	0.09	0.04
12	0.07	0.01
13	0.05	-0.02
14	0.04	-0.02
15	0.03	0.02

4.4.2 LAS FAC Y FACP TEORICAS DE LOS MODELOS DE MEDIAS MOVILES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.

Las autocorrelaciones del proceso MA(1) se definieron como

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$
$$\rho_k = 0 \quad k \geq 2$$

La primera y unica autocorrelación de la fac de un proceso MA(1) es de signo opuesto al valor de su parámetro θ_1 (figura 4.11(a) y 4.11(c)). Por el contrario, el proceso posee una facp infinita, si $\theta_1 > 0$ el proceso converge gradualmente a cero con autocorrelaciones siempre de signo negativo (figura 4.11(a)), y oscilando en signo si $\theta_1 < 0$ (figura 4.11(b)). La facp del proceso MA(1) nunca podrá ser siempre positiva, pero si puede generar una facp siempre negativa.

Por su parte, la fac para un proceso MA(2) se corta abruptamente después del rezaño 2 y los signos de ρ_1 y ρ_2 son opuestos a los de los parámetros θ_1 y θ_2 , respectivamente (figuras 4.11(e), 4.11(g), 4.11(i) y 4.11(k)). Mientras que su facp converge gradualmente (figuras 4.11(f), 4.11(h), 4.11(j) y 4.11(l)). Esta convergencia se realizará de acuerdo a la ubicación de los parámetros en la región de invertibilidad del proceso (ver figura 3.24 del capítulo III). En general, la autocorrelación diferente de cero siempre tendrá el signo opuesto al parámetro de medias móviles de mayor orden.

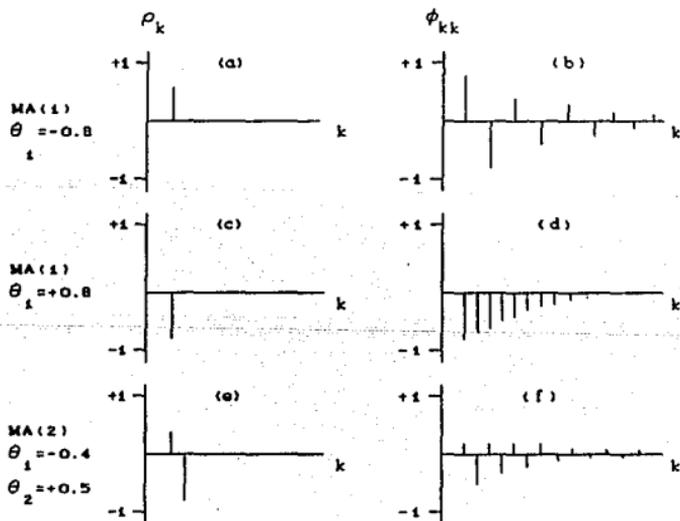
Para verificar la importancia de las fac y facp en la identificación del proceso de medias móviles se reescribe el proceso MA únicamente en términos de las variables desfazadas de z_1 , la forma invertida para obtener un proceso autorregresivo de

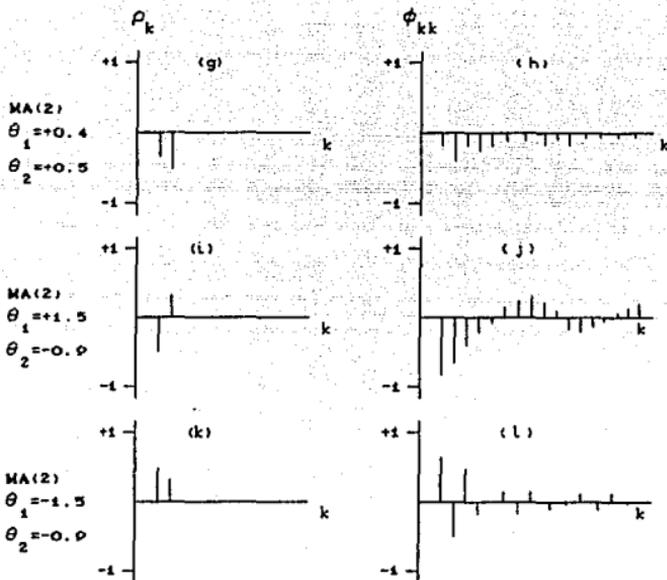
orden infinito. Para el proceso MA(1) se describió su forma invertida como

$$z_t = -\theta_1 z_{t-1} - \theta_1^2 z_{t-2} - \theta_1^3 z_{t-3} - \dots + a_t$$

Desde que todos los parámetros de la última expresión son necesarios para representar el proceso de MA(1), la facp de este proceso, al contrario del proceso AR(p), no posee un límite en el rezago p, sino será infinitamente largo. Sin embargo, debido a la condición de invertibilidad $|\theta_1| < 1$ la facp decaerá gradualmente.

FIGURA 4.11 LAS FAC Y FACP PARA ALGUNOS PROCESOS MA(1) Y MA(2)





Se comparan las primeras 15 autocorrelaciones teóricas del proceso MA(2) con las del proceso simulado $z_t = a_t - 0.8a_{t-1}$ para introducirse nuevamente en el proceso de identificación de un modelo.

Nuevamente las autocorrelaciones muestrales no corresponden exactamente a las autocorrelaciones teóricas, sin embargo son muy próximas a éstas para considerar que fueron generadas por un proceso MA(1).

REZAGO	FAC TEORICA	FAC SIMULADA
1	-0.48	-0.36
2	0.00	0.05
3	0.00	-0.02
4	0.00	0.00
5	0.00	0.04
6	0.00	-0.02
7	0.00	0.02
8	0.00	-0.03
9	0.00	0.01
10	0.00	0.00
11	0.00	0.03
12	0.00	-0.05
13	0.00	0.01
14	0.00	-0.03
15	0.00	0.03

4.4.3 LAS FAC Y FACP TEORICAS DE LOS MODELOS ARMA(1,1)

Las autocorrelaciones para el proceso ARMA(1,1) se definieron como

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad k \geq 2$$

En forma similar al proceso AR(1), la fac para un proceso ARMA(1,1) decae a partir del valor ρ_1 . Sin embargo, la autocorrelación ρ_1 depende ahora tanto del parámetro autorregresivo como el de medias móviles y no solamente de ϕ_1 . El signo de ρ_1 es determinado por el

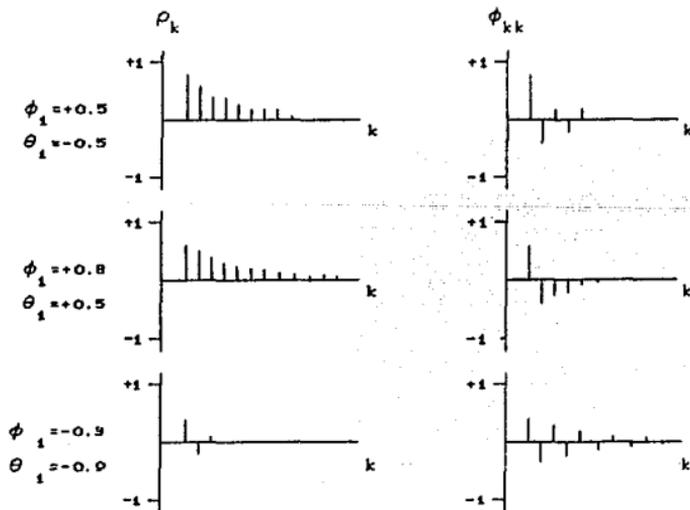
signo de la diferencia de $(\phi_1 - \theta_1)$. Esto se ve más claro si el proceso ARMA(1,1) se reescribe en su forma autorregresiva,

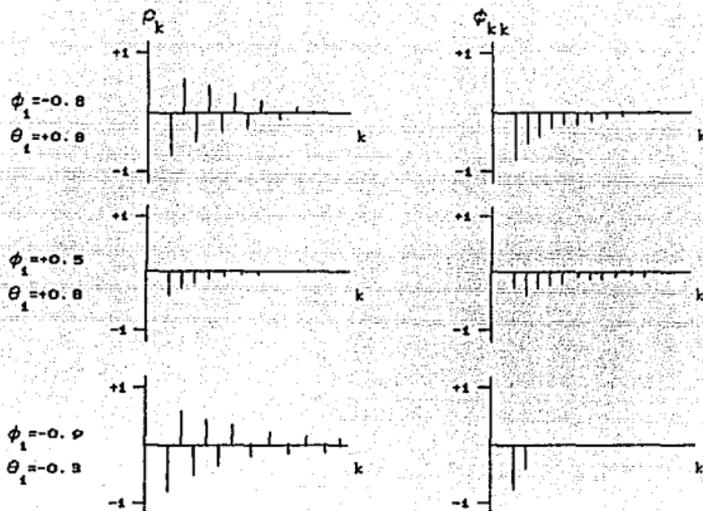
$$z_t = a_t + (\phi_1 - \theta_1)z_{t-1} + \theta_1(\phi_1 - \theta_1)z_{t-2} + \theta_1^2(\phi_1 - \theta_1)z_{t-3} + \dots$$

Si el proceso ARMA es estacionario e invertible ($|\phi_1| < 1$, $|\theta_1| < 1$), su fac y facp decaerán gradualmente. Los modelos ARMA (p,q) son los que presentan mayores dificultades en su identificación, tanto en la fac como en la facp contienen un número infinito de coeficientes distintos de cero.

La figura 4.12 muestra algunas fac y facp para el proceso ARMA(1,1) para diferentes valores de ϕ_1 y θ_1 .

FIGURA 4.12 LAS FAC Y FACP PARA ALGUNOS MODELOS ARMA(1,1)





En general la fac de un proceso ARMA(p,q) contiene p componentes autorregresivos y q componentes de medias móviles, presentando una mezcla de ondas sinusoidales y exponenciales amortiguados despues de los primeros q-p rezagos. Contrariamente, la facp es una mezcla de ondas sinusoidales y exponenciales amortiguados después de los primeros p-q rezagos.

En las gráficas de las fac y facp se puede notar la dualidad que existe entre un proceso AR y uno de MA:

La fac para un proceso MA tiene un comportamiento similar al de la facp de un proceso AR.

La facp de un proceso MA se asemeja a la facp de un proceso AR.

Se puede resumir las características de las fac y facp de los procesos anteriores en una simple tabla:

LAS FUNCIONES DE AUTOCORRELACION Y AUTOCORRELACION PARCIAL PARA MODELOS NO ESTACIONALES

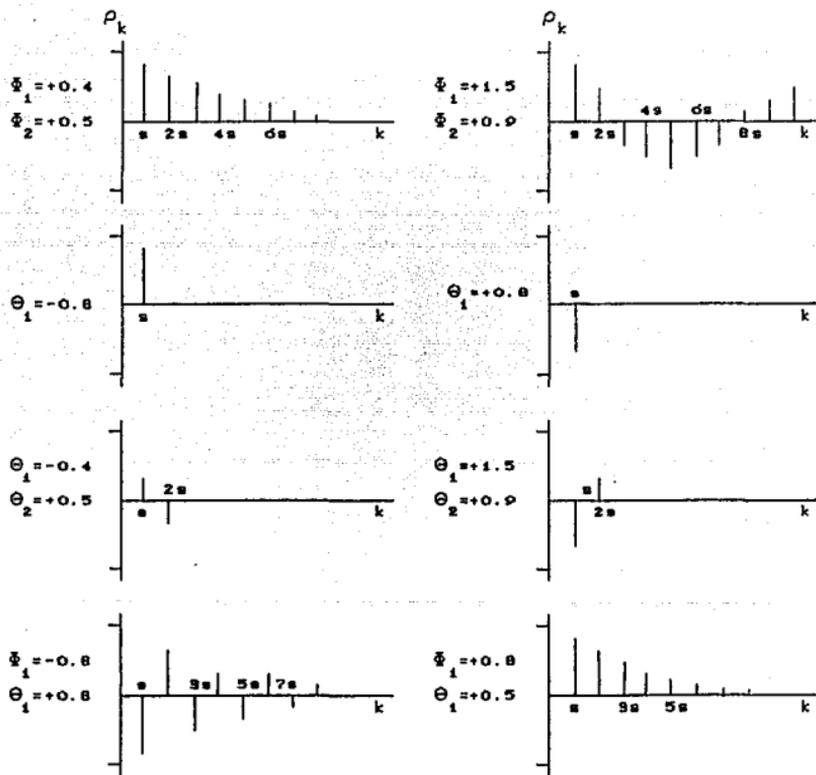
MODELO	FUNCION DE AUTOCORRELACION	FUNCION DE AUTOCORRELACION PARCIAL
AR(p)	DECAE GRADUALMENTE	LIMITE EN EL REZAGO p
MA(q)	LIMITE EN EL REZAGO q	DECAE GRADUALMENTE
ARMA(p,q)	DECAE GRADUALMENTE	DECAE GRADUALMENTE

4.5 LAS FUNCIONES DE AUTOCORRELACION Y AUTOCORRELACION PARCIAL TEORICAS DE MODELOS ESTACIONALES

Anteriormente se indicó que el comportamiento de la fac de los modelos estacionales es similar a la fac de los modelos no estacionales, excepto en que los valores de las autocorrelaciones aparecen a rezagos que son múltiplos del periodo estacional s .

La figura 4.13 muestra algunas fac de modelos estacionales puros.

FIGURA 4.13 FUNCIONES DE AUTOCORRELACION DE MODELOS ESTACIONALES PUROS



Sin embargo, en la formulación de modelos estacionales, más que modelos puros se utilizan frecuentemente, tanto parámetros

regulares como estacionales, resultando los modelos multiplicativos estacionales. Desafortunadamente, las características generales de las fac y $facp$ para los modelos estacionales multiplicativos son más difíciles de visualizar.

4.5.1 LAS FAC Y FACP TEORICAS DE MODELOS ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS AUTORREGRESIVOS

Si se tiene el siguiente modelo estacional autorregresivo

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1 B^{12})z_t = a_t$$

que en forma explícita y expresado para z_t se tiene

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_1 z_{t-12} - \phi_1^2 z_{t-13} + a_t$$

Una formulación equivalente es utilizar únicamente parámetros regulares como sigue

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-12} - \phi_3 z_{t-13} + a_t$$

donde $\phi_2 = \phi_3 = \dots = \phi_{11} = 0$ y $\phi_{12} = \phi_1 \phi_1$.

Como puede observarse el primer modelo tiene solamente 2 parámetros (uno regular y uno estacional), donde z_{t-12} refleja la interacción entre ambos. En cambio, el el segundo modelo se ha

introducido un nuevo parámetro ϕ_{13} para que recoja la influencia de este último término. Naturalmente, si existe la interacción entre la parte regular y la estacional se prefiere utilizar el primer modelo ya que es más escueto.

De la última expresión se nota claramente que las autocorrelaciones parciales, (ϕ_{kk}) , son para $k \leq 13$ y las demás valores de ϕ_{kk} para $k \geq 13$ son todos ceros. El cálculo de las fac y $facp$ para este modelo no es tan fácil ya que se trata de un proceso de orden 13.

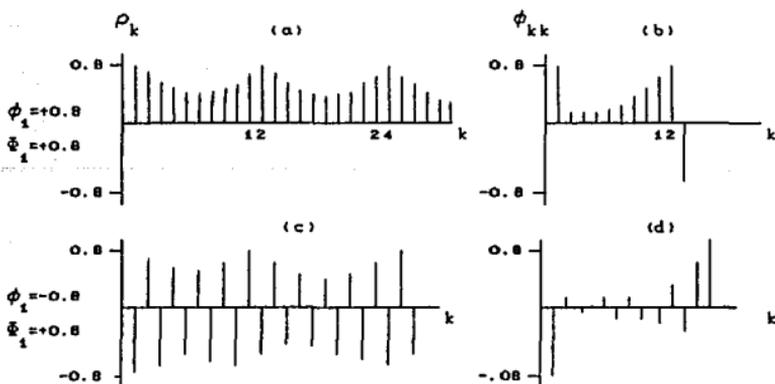
La figura 4.14 muestra las fac y $facp$ para algunos modelos estacionales multiplicativos autorregresivos con un periodo $s = 12$. El inicio de cada fac tiene un comportamiento similar a la fac del proceso $AR(1)$ regular, sin embargo, debido a la influencia del parámetro estacional, la fac crece nuevamente en valor absoluto conforme se acerca a la autocorrelación del rezago estacional.

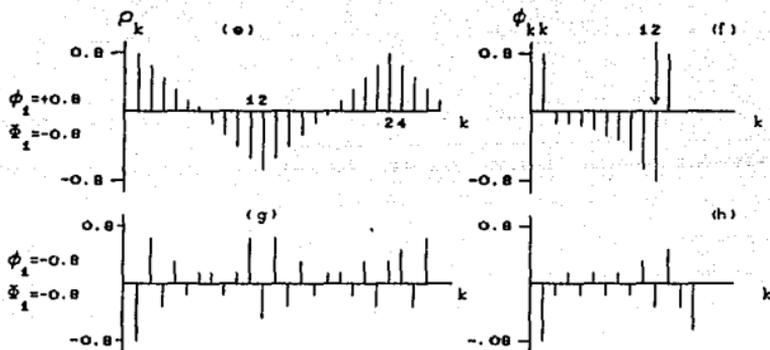
Adicionalmente se nota que todas las $facp$ tienen un límite en el rezago 13. Si el parámetro ϕ_1 es positivo, se refleja como un valor positivo en el primer rezago de la autocorrelación parcial, y si ψ_1 es positivo, se refleja como un valor positivo en el rezago 12. Similarmente, si los valores para ϕ_1 y ψ_1 son negativos, las autocorrelaciones son negativas en los rezagos 1 y 12, respectivamente. El valor de las autocorrelaciones en el rezago 13 son opuestas en signo al producto de las autocorrelaciones parciales de los rezagos 1 y 12.

Por ejemplo, al analizar la fac de la figura 4.14(e) y 4.14(f) con un parámetro regular $\phi_1 = 0.8$ y un parámetro estacional $\psi_1 = -0.8$. La fac inicia con un valor de 0.774 y decae gradualmente, en el rezago

7, el efecto del parámetro estacional hace que la fac nuevamente se incremente en valor absoluto hasta que alcanza el valor de -0.774 en el rezago 12; posteriormente en el rezago 13 la fac decrece nuevamente en valor absoluto y crece posteriormente hasta el valor de 0.621 en el rezago 24. El valor de la fac en el rezago 24 es positivo, mientras que en el 12 y 36 son negativos. Mientras que la facp para un modelo AR(1) regular tiene solamente un valor en el rezago 1, para el modelo AR(1)XSAR(1) su facp tiene una autocorrelación en el rezago uno con igual signo al valor del parámetro ϕ_1 y una autocorrelación en el rezago 12 de signo similar al valor del parámetro $\bar{\phi}_1$. Se observa también, una autocorrelación significativa en el rezago 13, cuyo signo es opuesto al producto de las autocorrelaciones parciales de los rezagos 1 y 12.

FIGURA 4.14 LAS FAC Y FACP PARA ALGUNOS PROCESOS AR(1)XSAR(1)

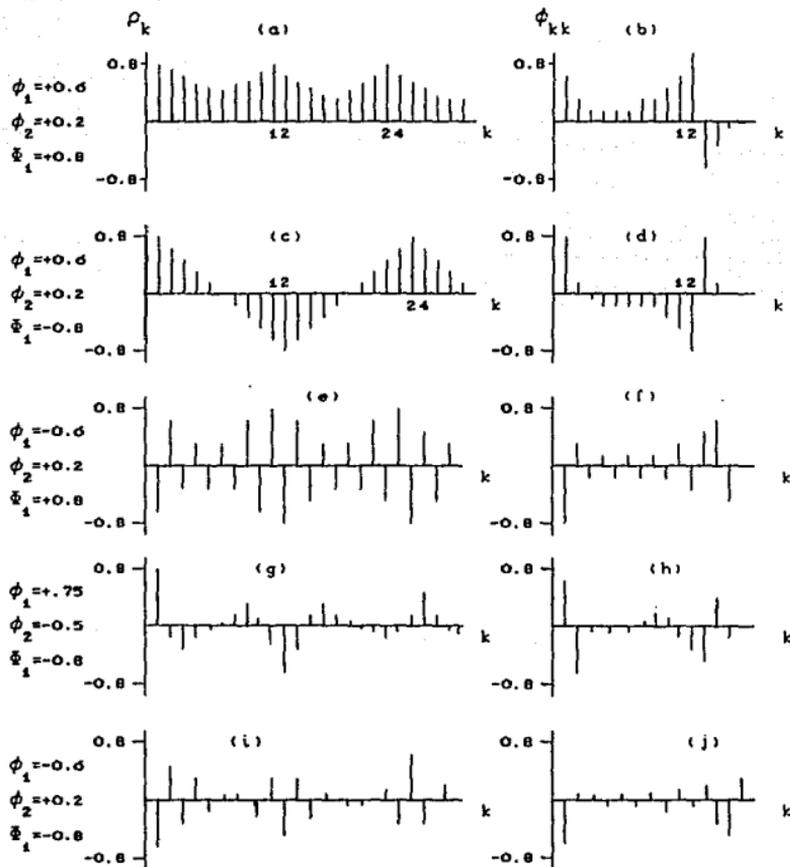


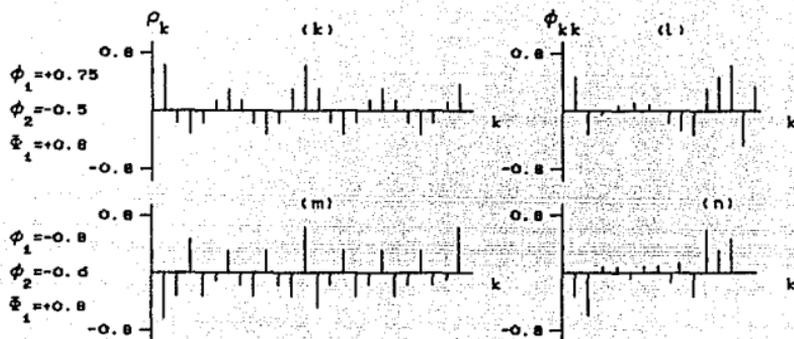


La fac de un modelo multiplicativo AR(2)XSAR(1) es similar al proceso AR(2) regular, y si $\phi_1 > 0$ la autocorrelación en el rezago 12 es positiva, e inversamente si $\phi_1 < 0$ la autocorrelación en el rezago 12 es negativa. Su facp tiene como característica principal un límite en el rezago 14; los signos de las 2 primeras autocorrelaciones parciales corresponden a los signos de los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente; mientras que las autocorrelaciones parciales en los rezagos 13 y 14 son opuestos a los signos de los productos de los rezagos 1 por 12 y del 2 por 12, respectivamente.

La figura 4.15 muestra las fac y facp para algunos modelos AR(2)XSAR(1):

FIGURA 4.15 LAS FAC Y FACF PARA ALGUNOS MODELOS AR(2)/XSAR(1)





4.5.2 LAS FAC Y FAGP TEORICAS PARA MODELOS ESTACIONALES MULTIPLICATIVOS DE MEDIAS MÓVILES

Si se considera un modelo de medias móviles con un parámetro MA regular y un parámetro MA estacional, con datos que fueron recolectados mensualmente, se tiene

$$z_t = (1 - \theta_1)(1 - \theta_1 B^{12})a_t$$

expresado en forma explícita para z_t ,

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_1 a_{t-12} + \theta_1 \theta_1 a_{t-13}$$

el orden del proceso anterior es igual a $q + sQ = 1 + 12(1) = 13$.

Como los valores de la fac de un proceso de medias móviles se cortan después del rezago correspondiente al orden del proceso, las

autocorrelaciones para este modelo serán nulas después del rezago 13:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}$$

$$\rho_{12} = \frac{-\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}$$

$$\rho_2 = 0$$

$$\rho_{11} = \frac{\theta_1 \theta_1}{(1 + \theta_1^2)(1 + \theta_1^2)}$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \rho_1 \rho_{12}$$

$$\rho_k = 0 \quad k > 13$$

Las características importantes de la fac para este proceso son:

Las autocorrelaciones ρ_1 y ρ_{12} solamente están influenciadas por los parámetros θ_1 y θ_1 , respectivamente.

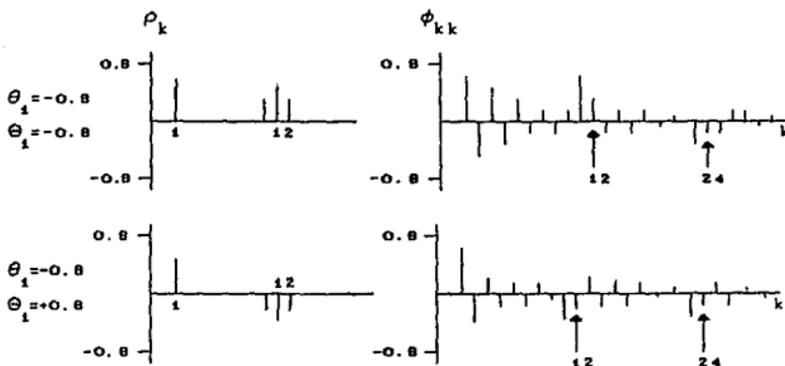
La fac es simétrica alrededor de la autocorrelación ρ_{12} con las autocorrelaciones ρ_{11} y ρ_{13} iguales. Esta simetría es una característica importante de la fac del modelo estacional multiplicativo de medias móviles.

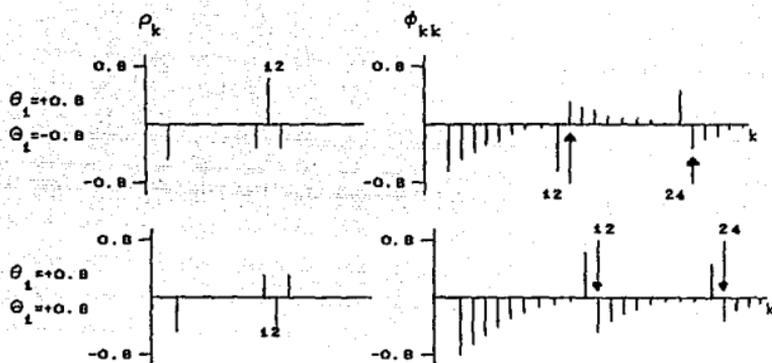
El modelo anterior puede representarse en su forma autorregresiva con un infinito número de términos de θ_1 y θ_1 . Debido a las

condiciones de invertibilidad, los valores de los coeficientes de las z_i rezagadas serán cada vez más pequeñas en valor absoluto conforme se incremente el rezago del proceso. Esto indica que el comportamiento de la facp para este modelo irá decayendo gradualmente.

La figura 4.16 muestra algunas fac y facp para un modelo de medias móviles de orden 1 tanto regular como estacional, $MA(1) \times SMA(1)_{12}$. En las gráficas se puede ver la dificultad de identificar un modelo específico estacional de medias móviles analizando únicamente la facp. Sin embargo, la fac si proporciona información clara para la identificación del modelo. La fac tiene un límite en el rezago 13 y solamente $\rho_1, \rho_{11}, \rho_{12}$ y ρ_{13} son diferentes de cero; ρ_1 y ρ_{12} son diferentes en signo a θ_1 y a Θ_1 , respectivamente; además $\rho_{11} = \rho_{13} = \rho_1 \rho_{12}$.

FIGURA 4.16 LAS FAC Y FACP PARA ALGUNOS PROCESOS DE MEDIAS MOVILES ESTACIONALES $MA(1) \times SMA(1)$

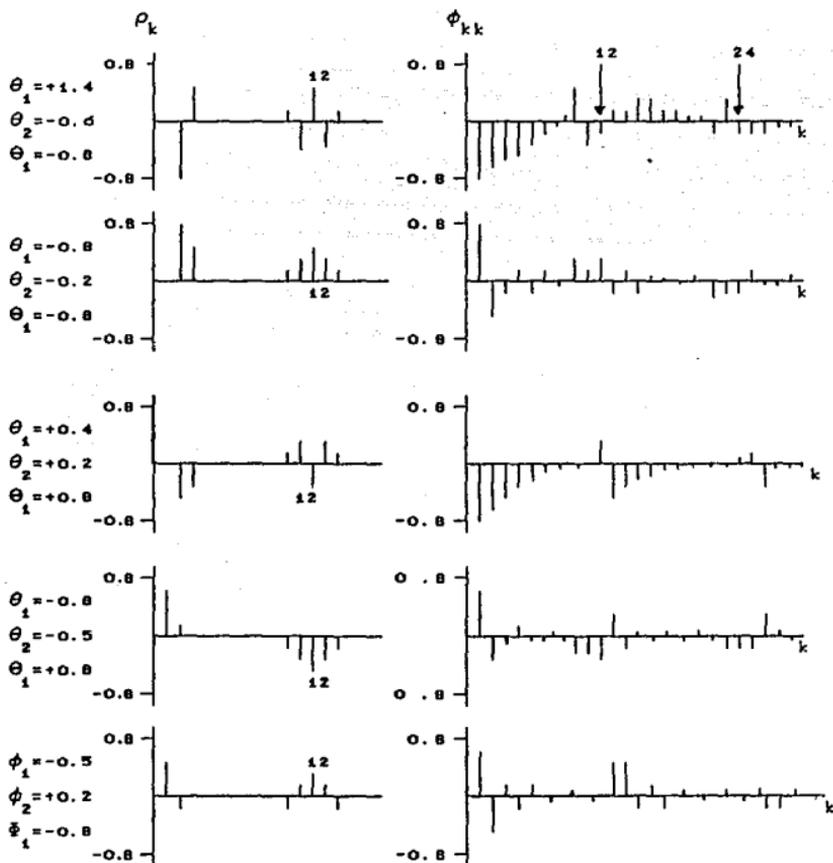


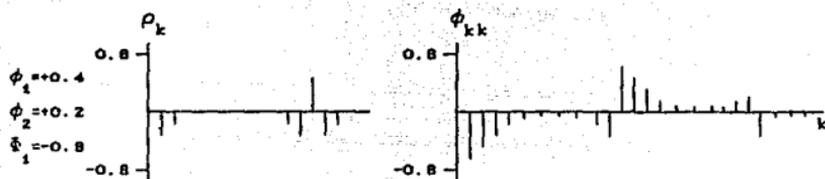


Se puede extender las características anteriores para un proceso $MA(2)XSMA(1)_{12}$. La fac del proceso tiene un límite en el rezago 14 y solamente las autocorrelaciones $\rho_1, \rho_2, \rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}$ y ρ_{14} son diferentes de cero; las autocorrelaciones ρ_1, ρ_2 y ρ_{12} tienen el signo opuesto a θ_1, θ_2 y θ_1 , respectivamente; las autocorrelaciones $\rho_{10} = \rho_{14} = \rho_2 \rho_{12}$ y $\rho_{11} = \rho_{13} = \rho_1 \rho_{12}$.

La gráfica 4.17 muestra el comportamiento de algunas fac y $facp$ para este proceso.

FIGURA 4.17 LAS FAC Y FACP PARA ALGUNOS PROCESOS DE MEDIAS MOVILES ESTACIONALES MA(2) x SMA(1).





Existen muy pocas generalizaciones para caracterizar las ϕ_{ac} y ϕ_{pac} de los modelos estacionales multiplicativos, algunas de éstas características se presentan en la siguiente tabla:

CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO MULTIPLICATIVO

MODELO $s =$ PERIODO	FUNCIONES DE AUTOCORRELACION	FUNCIONES DE AUTOCORRELACION PARCIAL
AR(p) SAR(P)	DECAE GRADUALMENTE	LIMITE DESPUES DEL REZAGO $P + sP$
MA(q) SMA(Q)	LIMITE DESPUES DEL REZAGO $Q + sQ$	DECAE GRADUALMENTE
MODELO MIXTO	DECAE GRADUALMENTE	DECAE GRADUALMENTE

4.6 IDENTIFICACION DE ALGUNAS SERIES

4.6.1 IDENTIFICACION DEL PROCESO QUIMICO POR LOTES

En base a los primeros 65 valores del total de 70 observaciones se calculó las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales que se muestran en la siguiente tabla, así como las gráficas de éstas:

IDENT CBY
Date: 8-15-1992 / Time: 12:45
SNPL range: 1 - 65
Number of observations: 65

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	par
		1	-0.402 -0.402
		2	0.333 0.205
		3	-0.205 -0.020
		4	0.111 -0.034
.	.	5	-0.183 -0.136
.	.	6	0.011 -0.127
.	.	7	0.018 0.070
.	.	8	-0.076 -0.056
.	.	9	0.041 -0.044
.	.	10	-0.016 0.009
.	.	11	0.143 0.143
.	.	12	-0.113 -0.025
.	.	13	0.091 -0.045
.	.	14	0.035 0.127
.	.	15	0.018 0.060
.	.	16	0.134 0.206
.	.	17	-0.100 -0.026
.	.	18	0.028 -0.116
.	.	19	-0.070 0.036
.	.	20	-0.005 0.004
.	.	21	0.013 0.064
.	.	22	-0.059 -0.075
.	.	23	-0.025 -0.133
.	.	24	-0.062 -0.069
.	.	25	-0.017 -0.106

Q-Statistic (25 lags) 29.440 S.E. of Correlations 0.124

El análisis de las autocorrelaciones muestran que la serie es estacionaria debido a que representan la variación en la producción de los lotes procesados bajo condiciones uniformemente controladas.

La \hat{f}_{ac} de la serie original indica que solamente las 2 primeras autocorrelaciones deben considerarse significativamente diferentes de cero pues son más de 2 veces su SE de 0.124. La \hat{f}_{acp} refuerza esta conclusión, por lo que un modelo tentativo podría ser un ARMA(2,0,0). La tercera autocorrelación posiblemente deba incluirse dentro la especificación del modelo ya que su valor es casi 2 veces su SE, por lo que el modelo alternativo a estimar sería un ARMA(3,0,0).

Las siguiente tabla muestra el cálculo de las \hat{f}_{ac} y \hat{f}_{acp} de la primera diferencia del proceso químico por lotes. Se puede observar que la estructura de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales son más complejas que las de la serie original, por lo que es preferible continuar el análisis sobre la serie original.

IDENT CBV1

Date: 8-15-1992 / Time: 13:15

SAMPL range: 2 - 65

Number of observations: 64

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
				1	-0.754 -0.754
				2	0.445 -0.286
				3	-0.304 -0.223
				4	0.229 -0.082
				5	-0.182 -0.086
				6	0.070 -0.236
				7	0.024 -0.099
				8	-0.073 -0.143
				9	0.069 -0.156
				10	-0.072 -0.196
				11	0.136 -0.015
				12	-0.154 -0.030
				13	0.093 -0.148
				14	-0.022 -0.072
				15	-0.043 -0.185
				16	0.127 0.067
				17	-0.123 0.160
				18	0.067 0.016
				19	-0.042 0.064
				20	0.066 -0.028
				21	0.037 0.161
				22	-0.046 0.155
				23	0.033 0.117
				24	-0.036 0.116
				25	-0.005 -0.069
Q-Statistic (25 lags) 67.944				S.E. of Correlations 0.125	

4.6.2 IDENTIFICACION DE LA SERIE DEL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO.

En el capítulo II se había contemplado la existencia de una tendencia, de variaciones estacionales y de una estructura de varianza creciente conforme se avanzaba en el tiempo. Para estabilizar la varianza se obtuvo una nueva serie mediante la transformación logaritmica de la serie original y para eliminar los componentes de tendencia y estacionalidad se aplicó una diferencia regular y una diferencia estacional (con $s= 12$) de primer orden a la serie logaritmica, esto es se obtuvo la serie $w_t = \nabla \nabla_{12} \log(z_t)$.

La identificación del modelo para el turismo receptivo se realizará calculando la f_{ac} y f_{acp} para la serie $w_t = \nabla \nabla_{12} \log(z_t)$. La siguiente tabla muestra las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales de esta serie así como la gráfica de éstas:

IDENT LTRM12

Date: 8-15-1992 / Time: 13:13

SAMPL range: 1971.03 - 1988.12

Number of observations: 214

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
#####	#####	1 -0.548	-0.543
..	#####	2 0.058	-0.347
..	..	3 0.096	-0.101
..	..	4 -0.062	-0.044
..	..	5 0.028	0.002
..	..	6 0.026	0.050
..	..	7 -0.017	0.065
..	..	8 -0.004	0.033
..	..	9 -0.014	-0.025
..	..	10 -0.098	-0.215
..	#####	11 0.340	0.268
#####	..	12 -0.413	-0.106
..	#####	13 0.116	-0.226
..	#####	14 0.064	-0.152
..	..	15 -0.021	0.051
..	..	16 -0.039	-0.000
..	..	17 0.030	-0.033
..	..	18 0.002	0.027
..	..	19 -0.059	-0.014
..	..	20 0.026	-0.069
..	..	21 0.053	0.038
..	..	22 -0.037	-0.095
..	#####	23 0.032	0.227
..	..	24 -0.105	-0.103
..	#####	25 0.065	-0.224
..	..	26 0.028	-0.097
..	..	27 -0.069	-0.007
..	#####	28 0.024	-0.134
..	..	29 0.050	-0.059
..	..	30 -0.071	0.028
..	..	31 0.032	0.017
..	..	32 0.019	-0.097
..	..	33 -0.053	-0.019
..	..	34 0.019	-0.110
..	..	35 -0.087	-0.066
Q-Statistic (35 lags) 146.943	S.E. of Correlations 0.068		

En la tabla anterior la fac muestra autocorrelaciones significativas en los rezagos 1, 11 y 12 y una autocorrelación

pequeña en el rezago 13. Mientras que la f_{acp} se observan valores significativos en los rezagos 1, 2, 10, 11, 12 y 13. Para filtrar estas autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales se identifican 2 modelos teóricos tentativos que tienen autocorrelaciones significativas en los rezagos 1, 11, 12 y 13 y las demás autocorrelaciones son cero (ver última parte del capítulo III):

$$\text{Modelo 1: } w_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^{12})a_t$$

$$\text{Modelo 2: } w_t = (1 - \theta_1 B - \theta_{12} B^{12} - \theta_{13} B^{13})a_t$$

para ambos modelos $w_t = \nabla \nabla_{12} \log(z_t)$.

La siguiente tabla muestra la f_{ac} y f_{acp} para la serie $w_t = \nabla \nabla_{12} \log(z_t)$, que significa que se ha aplicado una diferencia regular adicional a la serie anterior.

IDENT LTRM212
 Date: 8-15-1992 / Time: 13:26
 SMPLE range: 1971.03 - 1988.12
 Number of observations: 214

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
1	1	-0.693	-0.693
2	2	0.155	-0.567
3	3	0.058	-0.390
4	4	-0.075	-0.270
5	5	0.026	-0.213
6	6	0.015	-0.136
7	7	-0.017	-0.062
8	8	0.009	0.013
9	9	0.021	0.153
10	10	-0.169	-0.298
11	11	0.287	0.125
12	12	-0.415	0.149
13	13	0.188	-0.011
14	14	0.012	-0.154
15	15	-0.025	-0.072
16	16	-0.026	-0.011
17	17	0.030	-0.051
18	18	0.013	0.007
19	19	-0.047	0.052
20	20	0.013	-0.048
21	21	0.044	0.066
22	22	-0.054	-0.195
23	23	0.065	0.151
24	24	-0.096	0.156
25	25	0.068	-0.032
26	26	0.021	-0.087
27	27	-0.074	0.028
28	28	0.030	-0.069
29	29	0.046	-0.116
30	30	-0.074	-0.066
31	31	0.036	0.054
32	32	0.022	-0.032
33	33	-0.050	0.052
34	34	0.060	-0.013
35	35	-0.134	-0.149
Q-Statistic (35 lags) 209.675	S.E. of Correlations	0.068	

En la tabla anterior se muestran que las autocorrelaciones significativas se presentan nuevamente en los rezagos 1, 10, 11, 12

y 13 y los valores de la f_{ac} convergen gradualmente a cero. Como es visible con esta serie se tendría que identificar una estructura más complicada que la de la serie anterior, por lo que se opta por proseguir el análisis con los 2 primeros modelos identificados.

4.6.5 IDENTIFICACION DE LA SERIE DEL PRECIO DE LAS ACCIONES DE IBM

En la página 133 se presentó las f_{ac} para la serie original y sus primera y segunda diferencias. La f_{ac} de la serie original se comportó como el modelo del camino aleatorio por lo que no decae rápidamente, sin embargo la f_{ac} de la 1a. diferencia de la serie es una serie de ruido blanco y la 2a. diferencia tiene un comportamiento de medias móviles de primer orden. En base a lo anterior se pueden proponer los siguientes modelos:

Modelo 1: $(1 - \phi_1 B)z_t = \sigma_t$ en el cual se espera que el valor del parámetro sea muy cercano a 1.

Modelo 2: $\nabla z_t = \sigma_t$ Ya que la primera diferencia de la serie es ruido blanco.

CAPITULO V

ESTIMACION Y DIAGNOSTICO DEL MODELO

CAPITULO V ESTIMACION Y DIAGNOSTICO

Posterior a la identificación de un modelo particular de la clase general de modelos multiplicativos estacionales ARIMA, $\phi_p(B)\hat{\phi}_p(B^s)w_t = \theta_q(B)\hat{\theta}_q(B^s)a_t$, con $w_t = \nabla^d \nabla_s^D z_t$, se procede a estimar los vectores de los parámetros $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$, $\hat{\phi}' = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)$, $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ y $\hat{\theta}' = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q)$.

Para realizar la estimación se dispone únicamente de las observaciones de la muestra de la serie w_t que se denota como el vector $w' = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. La estimación se puede realizar por el método de mínimos cuadrados (MCO) o por la función de verosimilitud (LMV)⁽¹⁾.

Con el método MCO se seleccionan los valores de los parámetros que hagan la suma de los residuales al cuadrado (SRG) tan pequeña como sea posible. Esto es, se selecciona $\hat{\phi}$, $\hat{\hat{\phi}}$, $\hat{\theta}$, y $\hat{\hat{\theta}}$ como estimadores de ϕ , $\hat{\phi}$, θ , y $\hat{\theta}$, respectivamente, que minimice a

$$SRG(\hat{\phi}, \hat{\hat{\phi}}, \hat{\theta}, \hat{\hat{\theta}}) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^2 \quad (5.1)$$

Bajo el criterio maxmoverosimil, los estimadores se obtienen mediante la maximización de la función de verosimilitud

$$L = f(a_1 \dots a_n) \quad (5.2)$$

Cualquiera que sea el método utilizado para la estimación del

(1) En el presente trabajo únicamente se detallará la estimación por MCO, para la estimación por el LMV se puede consultar a G. Box y G. Jenkins. Op. cit. p. 208 y ss.

modelo, se plantea por una parte el problema de la determinación de los valores iniciales y por otra parte que los modelos pueden no ser lineales en los parámetros.

DETERMINACION DE LOS VALORES INICIALES

Para explicar el problema de los valores iniciales se considera el modelo ARMA(p,q). Para el modelo no es posible determinar los valores de a_t para todo el periodo disponiendo unicamente de los valores de los parámetros y de la muestra w' . Si se expresa el modelo en términos de a_t , para el periodo $t = 1$, se tiene

$$a_t = w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p+1} + \theta_1 a_{t-1} - \dots + \theta_q a_{t-q+1} \quad (5.3)$$

En (5.3) se desconocen w_0, \dots, w_{-p+1} y a_0, \dots, a_{-q+1} que se definen como los valores iniciales. Se designarán mediante los vectores fila como $w^0 = (w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$ y $a^0 = (a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-q+1})$.

La minimización de (5.1) requiere de estos valores iniciales. Es posible salvar esta dificultad si se adopta en la estimación un enfoque condicional o uno no condicional. El siguiente cuadro muestra los valores que se determinan en la estimación y los valores que se consideran como condiciones iniciales para cada uno de estos dos enfoques.

ENFOQUE CONDICIONAL

VALORES A ESTIMAR

$$\phi' = (\phi_1 \dots \phi_p)$$

$$\theta' = (\theta_1 \dots \theta_q)$$

$$\sigma_a^2$$

VALORES DADOS

$$w' = (w_1, \dots, w_n)$$

$$w^{*'} = (w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$$

$$a^{*'} = (a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q+1})$$

ENFOQUE NO CONDICIONAL

VALORES A ESTIMAR

$$\phi' = (\phi_1 \dots \phi_p)$$

$$\theta' = (\theta_1 \dots \theta_q)$$

$$w^{*'} = (w_0, w_{-1}, \dots, w_{-p+1})$$

$$a^{*'} = (a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q+1})$$

$$\sigma_a^2$$

VALORES DADOS

$$w' = (w_1, \dots, w_n)$$

La muestra observada w' aparece en ambos enfoques como valores dados. En el enfoque condicional también aparecen como valores predeterminados $w^{*'}$ y $a^{*'}$ que son en principio desconocidos, pero antes de iniciar la estimación, se les asigna valores apropiados basados en las características del modelo identificado. En el enfoque no condicional, los valores iniciales se determinan en el proceso de estimación conjuntamente con los parámetros del modelo.

NO LINEALIDAD

Un modelo ARMA(p,q) no es lineal en los coeficientes cuando se tiene $q \geq 1$, el error a_t se puede expresar como

$$a_t = \theta^{-1} \phi(B) v_t$$

La presencia de $\theta(B)$ en un modelo hace que la expresión no sea lineal en los parámetros. En un modelo de este tipo no es posible obtener soluciones analíticas, por lo que deberá utilizarse un método iterativo. La no linealidad aparece cuando el modelo ARMA contiene términos de medias móviles.

5.1 EL ENFOQUE CONDICIONAL

5.1.1 ESTIMACION DE MODELOS AR

Si un modelo AR(p) es estacionario se verifica que

$$E(w_t) = E(w_{t-1}) = \dots = E(w_{t-p}) = \mu_w$$

que por hipótesis es igual a 0.

Una solución sencilla al problema de los valores iniciales es suponer que son iguales a su media, es decir

$$w_0 = w_{-1} = \dots = w_{-p+1} = 0$$

Esta solución puede ser inadecuada en muchos casos debido a que los valores iniciales pueden estar muy alejados del valor medio teórico de la serie.

Se presenta en la figura 5.1 los primeros 40 valores de la serie simulada en base a un proceso AR(1) con $\phi_1 = 0.8$. Se va a suponer que se conocen únicamente los últimos 20 valores y que $E(w_t) = 0$.

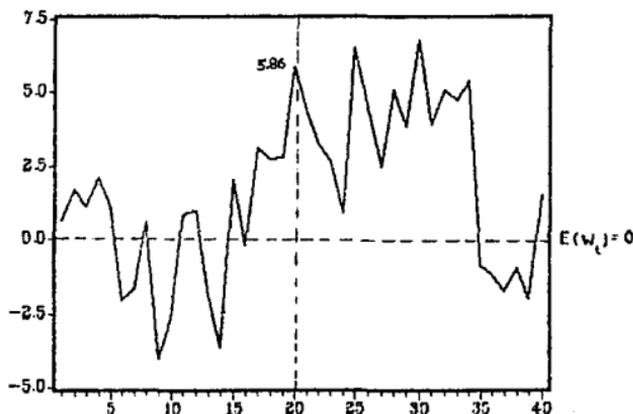


FIGURA 5.1 SERIE SIMULADA DE UN PROCESO AR(1)

La muestra de estas 20 observaciones es

$$w' = (w_1 \dots w_{21}) = (4.32, 3.70, \dots, 1.54).$$

Al desconocerse w_0 se optaría por asignarle su valor teórico medio, es decir, se hace igual a 0. Este valor está alejado del valor w_0 de la serie ($w_0 = 5.86$) lo que puede provocar desviaciones

importantes en el proceso de estimación.

Para evitar esto, se puede dividir la muestra en dos partes, la primera parte se utilizara para determinar los valores iniciales y la segunda parte para el proceso de estimación.

Para el modelo AR(1) que se esta ejemplificando se requiere solamente determinar un valor inicial, por lo tanto la partición de la muestra queda como

$$w' = (w_2, \dots, w_n) = (3.7, \dots)$$

$$w^0 = (w_1) = (4.32)$$

En ambas situaciones, la expresión a minimizar para un modelo AR(p) es la siguiente:

$$SRC = \sum_{t=m}^n \alpha^2 = \sum_{t=m}^n (w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p})^2 \quad (5.4)$$

donde

$$m = 1 \quad \text{si se hace } w_0 = w_{-1} = \dots = w_{-p+1} = E(w_t) = 0$$

$$m = p + 1 \quad \text{si se toman } w_1 \dots w_p \quad \text{como valores iniciales.}$$

La minimización de SRC con respecto a los parámetros no plantea ningún problema, ya que las ecuaciones resultantes son lineales en los parámetros.

El modelo AR(p) puede estimarse adecuadamente por el método de mínimos cuadrados, todo depende de que la especificación del modelo sea correcta. Pero a diferencia de los modelos econométricos, las variables explicativas en los modelos autorregresivos de series de tiempo son aleatorias, pues son retardos de la variable w_t que

también es aleatoria. El estimador MCO tiene buenas propiedades siempre que las variables explicativas v_{t-k} , $k = 1, 2, \dots, p$, satisfagan la condición de $E(v_{t-k} e_t) = 0$. Si el término de error no tiene autocorrelación y el modelo es estacionario, esta propiedad se satisface.

Bajo el supuesto de estacionaridad, la variable v_t depende de e_t y de sus valores anteriores, pero de ningún valor futuro de e_t . Por lo tanto, la $E(v_{t-k} e_t) = 0$, para toda $k > 0$.

Si por el contrario, el término de error e_t tuviese alguna autocorrelación, el estimador MCO dejaría de ser apropiado. Si e_t no fuese ruido blanco, sino obedeciese al modelo $e_t = \phi_1 e_{t-1} + \alpha_t$ con α_t ruido blanco se tendría que:

v_{t-1} está correlacionado con e_{t-1} a través del modelo univariante.

e_t está también correlacionado con e_{t-1} a través del modelo de autocorrelación.

En estas condiciones la $E(v_{t-1} e_t) \neq 0$ ya que ambas están correlacionadas con e_{t-1} , contradiciendo la condición de ortogonalidad necesaria para justificar el uso del estimador de MCO.

La autocorrelación del término de error es evidencia de una mala especificación del modelo. Una especificación correcta debe generar un término de error con una estructura de ruido blanco.

Con el objeto de conseguir una aproximación a los problemas que se

plantean en la estimación de un modelo de medias móviles se contempla previamente la minimización de la SRC de un modelo AR(1), mediante un proceso iterativo.

Se expresa el modelo AR(1) en términos de a_t

$$a_t = w_t - \phi_1 w_{t-1}$$

En el proceso de estimación, w_t y w_{t-1} aparecen como constantes y ϕ_1 como la variable independiente, ya que se trata de encontrar el valor de ϕ_1 tal que la SRC sea mínima. Para ello se desarrolla la serie a_t , $t \geq 2$, en el entorno de un valor arbitrario ϕ_1^* mediante la aproximación de Taylor tomando únicamente los 2 primeros términos.

$$a_t \approx a_t^* + (\phi_1 - \phi_1^*) \left[\frac{\partial a_t}{\partial \phi_1} \right]_{\phi_1 = \phi_1^*} \quad (5.5)$$

se verifica que

$$\frac{\partial a_t}{\partial \phi_1} = -w_{t-1} \quad (5.6)$$

es independiente de ϕ_1 , por lo que

$$\frac{\partial^h a_t}{\partial \phi_1^h} = 0 \quad \text{para } h > 1 \quad (5.7)$$

al sustituir (5.6) en (5.5) se tiene

$$a_t = a_t^* - (\phi_1 - \phi_1^*) (w_{t-1}) \quad (5.8)$$

o alternativamente como

$$a_t^* = (\phi_1 - \phi_1^*) (w_{t-1}) + a_t \quad (5.9)$$

Por lo tanto, la minimización de $\sum a_t^2$ es equivalente a realizar la regresión de a_t^* , generada a partir de un valor arbitrario ϕ_1^* , sobre

w_{t-1} . El parámetro a estimar por MCO será $\phi_1 - \phi_1^0$.

$$\langle \phi_1 - \hat{\phi}_1^0 \rangle = \frac{\sum \sigma_t^2 w_{t-1}}{\sum w_{t-1}^2} \quad (5.10)$$

La regresión de α_t sobre w_{t-1} puede contemplarse como un primer paso de un proceso iterativo en que, partiendo de un valor arbitrario ϕ_1^0 , las estimaciones se van actualizando según el siguiente mecanismo:

$$\phi_1^h = \phi_1^{h-1} + \langle \phi_1 - \hat{\phi}_1^{h-1} \rangle \quad (5.11)$$

Por ejemplo, se ha identificado que el proceso que generó la serie que se presenta a continuación es un AR(1) con $\phi_1 = 0.6$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_t	1.55	1.3	-1.06	-0.88	1.35	1.07	0.3	1.0	3.08	1.26

En la estimación se requiere conocer la serie α_t condicionada al valor $w_0 = 0$ que se obtiene con:

$$\alpha_t^0 = w_t - 0.6w_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, 10$$

para $\alpha_1 = w_1 - 0.6w_0 = 1.55 - 0.6(0) = 1.55$

$\alpha_2 = w_2 - 0.6w_1 = 1.3 - 0.6(1.55) = 0.37$

.

.

.

$\alpha_{10} = w_{10} - 0.6w_9 = 1.26 - 0.6(3.08) = -0.59$

Los valores para toda la serie se presenta en la siguiente tabla columna (1).

t	v_t	α_t^0	v_{t-1}	$\alpha_t^0 v_{t-1}$	v_{t-1}^2	α_t^1	$\alpha_t^1 v_{t-1}$
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	$v_0 = 0$						
1	1.55	1.55	---	---	---	1.55	---
2	1.30	0.37	1.55	0.57	2.40	0.55	0.85
3	-1.06	-1.84	1.30	-2.39	1.69	-1.69	-2.19
4	-0.88	-0.24	-1.06	0.26	1.12	-0.37	0.39
5	1.35	1.88	-0.88	-1.65	0.77	1.77	-1.56
6	1.07	0.26	1.35	0.35	1.82	0.42	0.57
7	0.30	-0.34	1.07	-0.37	1.14	-0.21	-0.23
8	1.00	0.82	0.30	0.25	0.09	0.86	0.26
9	3.08	2.48	1.00	2.48	1.00	2.59	2.60
10	1.26	-0.59	3.08	-1.81	9.49	-0.22	-0.69
				-----	-----		-----
				-2.31	19.53		0.00

Para calcular (5.10) se requiere adicionalmente conocer los valores de las series $\alpha_t^0 v_{t-1}$ y v_{t-1}^2 (columnas 3 y 4 respectivamente de la tabla anterior). Para la primera iteración se tiene

$$(\hat{\phi}_1 - \phi_1^0) = \frac{\sum \alpha_t^0 v_{t-1}}{\sum v_{t-1}^2} = \frac{-2.31}{19.53} = -0.118$$

y utilizando (5.11)

$$\hat{\phi}_1^1 = \phi_1^0 + (\hat{\phi}_1 - \phi_1^0) = 0.60 - 0.118 = 0.4819$$

Se debe tomar a $\hat{\phi}_1^1 = 0.4819$ como el valor inicial para una segunda iteración. Se calculan similarmente los valores de la serie α_t^1 utilizando $\alpha_t^1 = v_t - 0.4819 v_{t-1}$ y los valores de $\alpha_t^1 v_{t-1}$ (se presentan en la tabla anterior columnas 5 y 6, respectivamente).

Para ϕ_1^1 se tiene

$$(\phi_1^1 - \hat{\phi}_1^1) = \frac{\sum a_t^1 w_{t-1}}{\sum w_{t-1}^2} = \frac{0.00}{19.53} = 0.0$$

y al sustituirse nuevamente en (5.11) se obtiene

$$\phi_1^2 = \phi_1^1 + (\phi_1^1 - \hat{\phi}_1^1) = 0.4819 - 0.0 = 0.4819$$

El proceso iterativo para un proceso AR(1) se detiene en la primera iteración al haber llegado directamente al estimador que minimiza a la SRC. Al ser el modelo lineal en el parámetro es más que suficiente con una iteración para llegar a la solución óptima independientemente del valor inicial escogido para el parámetro autorregresivo.

La siguiente tabla muestra los valores de la SRC del ejemplo anterior estimada para los valores de ϕ_1 en el intervalo de -0.9 a 0.9 y la figura 5.2 la gráfica de éstos. Es visible en la gráfica como el valor de ϕ_1 que hace mínima la SRC se ubica entre 0.4 y 0.5.

ϕ_1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
SRC	53.8	48.6	43.8	39.4	35.4	31.8	28.5	25.6	23.2	21.1
ϕ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
SRC	19.4	18.1	17.2	16.7	16.6	16.9	17.5	18.6	20.0	

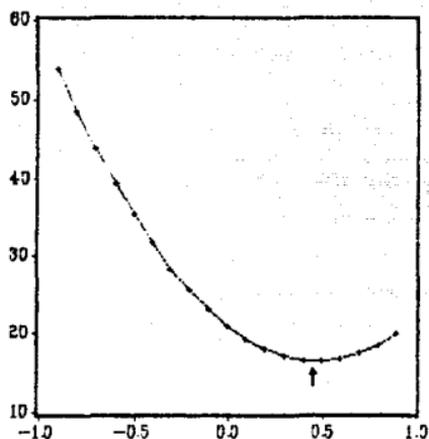


FIGURA 5.2 FUNCION DE LA SRC DEL PROCESO AR(1) ESTIMADO

5.1.2 ESTIMACION DE MODELOS DE MEDIAS MOVILES

Para explicar la estimación de modelos de medias móviles se utilizará el modelo MA(1) que expresado para a_t se tiene

$$a_t = w_t + \theta_1 a_{t-1}$$

En los modelos de medias móviles no se tienen problemas especiales en la fijación de los valores iniciales, ya que por hipótesis las a_t se suponen están incorrelacionadas entre si. Por lo que en este modelo se puede hacer $a_0 = 0$ ya que coincide con su media teórica.

Al fijar este valor inicial, se puede expresar a_t en función de la variable observable v_t , del parámetro θ_1 y de a_0 . Mediante sustituciones sucesivas se obtiene

$$\begin{aligned} a_t &= v_t + \theta_1 a_{t-1} \\ &= v_t + \theta_1 v_{t-1} + \theta_1^2 a_{t-2} \\ &\vdots \\ &= v_t + \theta_1 v_{t-1} + \theta_1^2 v_{t-2} + \dots + \theta_1^{t-1} v_1 + \theta_1^t a_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

En (5.12) se nota que a_t no es una función lineal de θ_1 , a diferencia de lo que ocurre con los modelos autorregresivos.

La estimación se realiza mediante el desarrollo de la serie de Taylor en torno a un valor arbitrario θ_1^* (2) como

$$a_t \approx a_t^* + (\theta_1 - \theta_1^*) \left[\frac{\partial a_t}{\partial \theta_1} \right]_{\theta_1 = \theta_1^*} \quad (5.13)$$

(2) A diferencia de los procesos autorregresivos puros si el modelo contiene términos de medias móviles es importante la selección de los valores iniciales. Puede utilizarse la primera autocorrelación del proceso MA(1) para la determinación del valor inicial θ_1^0 . Por ejemplo, si en la etapa de identificación se obtuvo un valor para la primera autocorrelación igual a -0.48 se puede sustituir en $r_1 = -\theta_1 / 1 + \theta_1^2$ que origina la siguiente ecuación de segundo grado

$$-0.48\theta_1^2 + \theta_1 - 0.48 = 0$$

cuyas soluciones son 0.75 y 1.33 . Se debe tomar como valor inicial a 0.75 ya que 1.33 queda fuera por la condición de invertibilidad del modelo.

para este modelo la derivada de a_t con respecto a θ_1 se expresa como

$$\frac{\partial a_t}{\partial \theta_1} = \theta_1 \frac{\partial a_{t-1}}{\partial \theta_1} + a_{t-1} \quad (5.14)$$

Para obtener (5.14) se considera que v_t es una constante y, por lo tanto, su derivada es nula. El cálculo de (5.14) se puede hacer en forma recursiva, sustituyendo θ_1 por θ_1^* y teniendo en cuenta que $\partial a_0 / \partial \theta_1 = 0$, ya que por hipótesis $a_0 = 0$. A diferencia de los modelos autorregresivos, esta derivada no es independiente del valor de θ_1^* que se toma para evaluarla.

Alternativamente, se puede calcular la derivada en forma numérica con

$$\frac{\partial a_t}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1^* a_{t-1} - (\theta_1^* + h) a_{t-1}}{h} \quad (5.15)$$

con h un valor significativamente pequeño como 0.01.

Si se designa

$$x_t^* = \left[\frac{\partial a_t}{\partial \theta_1} \right]_{\theta_1 = \theta_1^*} \quad (5.16)$$

y si se considera válida la aproximación lineal de (5.14) se tiene que

$$a_t^* = (\theta_1^* - \theta_1^*) x_t^* + a_t \quad (5.17)$$

se requiere construir previamente la variable x_t^* para calcularse la regresión de a_t^* sobre x_t^* como

$$(\theta_1^h - \hat{\theta}_1^h) = \frac{\sum a_i^2 x_i}{\sum x_i^2} \quad (5.18)$$

La expresión anterior constituye la primera iteración del proceso. La fórmula de actualización de las estimaciones sucesivas es similar a la del proceso AR(1):

$$\theta_1^h = \theta_1^{h-1} + (\theta_1^h - \hat{\theta}_1^{h-1}) \quad (5.19)$$

A diferencia de los procesos autorregresivos puros donde es suficiente una sola iteración para obtener los estimadores que minimizan a la SRC, la estimación con parámetros de medias móviles requiere más de una iteración. La estimación puede detenerse cuando las diferencias entre los valores paramétricos iniciales y finales de una etapa del proceso son pequeñas, en tal caso el proceso de estimación numérica se dice que ha convergido (supuestamente a los verdaderos valores de los parámetros). Como posible criterio de convergencia podría decidirse detener el proceso si las variaciones en los parámetros son inferiores al 0.1% de su valor inicial. Esto es si

$$|\theta_1^h - \theta_1^{h-1}| < 0.001 \quad (5.20)$$

Existe también la posibilidad de que un proceso no converja. Esto puede deberse al hecho de que el procedimiento de estimación se basa en una aproximación lineal de la función que hace depender a a_i de los parámetros del modelo y no de la verdadera relación entre ambos. Otra posibilidad es que los valores iniciales escogidos para los parámetros no hayan sido muy adecuados, por lo que cuando esto ocurre, debe repetirse el procedimiento con otros valores iniciales.

Por ejemplo, la siguiente serie se considera ha sido generada por un proceso MA(1) con $\theta_1 = -0.80$:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_t	0.6	0.72	-1.36	-0.34	-1.88	-1.20	-0.5	-2.05	-2.64	2.63

La estimación requiere el cálculo de la serie a_t^* condicionada a $a_0 = 0$ que se obtiene como

$$a_t^* = w_t - 0.8a_{t-1}^* \quad t = 1, 2, \dots, 10$$

para $a_1^* = w_1 - 0.8a_0 = 0.6 - 0.8(0) = 0.6$

$$a_2^* = w_2 - 0.8a_1^* = 0.72 - 0.8(0.6) = 0.24$$

⋮

$$a_{10}^* = w_{10} - 0.8a_9^* = 2.63 - 0.8(-1.77) = 4.09$$

Los valores de esta serie se presentan en la tabla siguiente (columna 2). Similarmente se calcula la serie a_t^* con un parámetro $\theta_1 = 0.81$ (columna 3).

La variable x_t^* (ver 5.15) se obtiene al restar la columna 3 a la columna 2 y dividir el resultado entre 0.01, que representa la diferencia entre el valor de -0.80 y -0.81 (ver columna 4). Finalmente, debe calcularse las series x_t^{*2} y $a_t^* x_t^*$ cuyos valores se presentan en las columnas 5 y 6.

PRIMERA ITERACION

t	v_t	$a_t^0 = -0.8$	$a_t^0 = -0.81$	x_t^0	x_t^{*2}	$a_t^0 x_t^0$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0		$\alpha_0 = 0$				
1	0.60	0.60	0.60	0.00	0.00	0.00
2	0.72	0.24	0.23	-0.60	0.36	-0.14
3	-1.36	-1.55	-1.55	0.25	0.06	-0.38
4	-0.34	0.90	0.92	1.35	1.83	1.22
5	-1.88	-2.60	-2.62	-2.00	3.99	5.20
6	-1.20	0.88	0.92	4.22	17.80	3.72
7	-0.05	-1.20	-1.25	-4.30	18.48	5.18
8	-2.05	-1.09	-1.04	4.69	21.96	-5.09
9	-2.64	-1.77	-1.80	-2.71	7.34	4.80
10	2.63	4.05	4.09	3.97	15.73	16.05
					87.56	30.55

El resultado de la primera iteración es

$$(\hat{\theta}_1 - \theta_1^0) = \frac{\sum a_t^0 x_t^0}{\sum x_t^{*2}} = \frac{30.55}{87.56} = 0.35$$

que se sustituye en (5.19) para obtener el valor del parámetro en la primera iteración.

$$\theta_1^1 = \theta_1^0 + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^0) = -0.80 + 0.35 = -0.45$$

Este valor de $\theta_1^1 = -0.45$ se utiliza para reiniciar el proceso en una segunda iteración como

$$a_t^1 = v_t - 0.45 a_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, 10$$

los valores de la serie a_t^1 se presentan en la columna 2 de la

siguiente tabla. Similarmente se calcula la serie a_t^1 para el valor de -0.46 (columna 3) para obtener la serie x_t^1 de acuerdo con (5.15).

SEGUNDA ITERACION

t	w_t	$a_t^1 = -0.45$	$a_t^1 = -0.46$	x_t^1	$x_t^{1,2}$	$a_t^1 x_t^1$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0		$a_0 = 0$				
1	0.60	0.60	0.60	0.00	0.00	0.00
2	0.72	0.45	0.44	-0.60	0.36	-0.27
3	-1.36	-1.56	-1.56	-0.17	0.03	0.27
4	-0.34	0.36	0.38	1.64	2.70	0.60
5	-1.88	-2.04	-2.05	-1.12	1.25	2.29
6	-1.20	-0.28	-0.25	2.56	6.54	-0.72
7	-0.05	-0.37	-0.38	-0.90	0.80	0.33
8	-2.05	-1.88	-1.87	0.79	0.62	-1.48
9	-2.64	-1.79	-1.78	1.52	2.31	-2.73
10	2.63	3.44	3.45	1.09	1.20	3.76
					15.81	2.06

El resultado de la segunda iteración es

$$\langle \hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_1^1 \rangle = \frac{\sum a_t^1 x_t^1}{\sum x_t^{1,2}} = \frac{2.06}{15.81} = 0.13$$

al sustituir en (5.19) se tiene

$$\hat{\theta}_1^2 = \hat{\theta}_1^1 + \langle \hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_1^1 \rangle = -0.45 + 0.13 = -0.32$$

este valor debe tomarse como el valor inicial para la tercera iteración y el proceso debe repetirse hasta que converja la estimación del parámetro.

El proceso converge hasta la sexta iteración cuyos estimaciones paramétricas en cada iteración son:

ITERACION	0	1	2	3	4	5	6	7
θ_1	-0.80	-0.45	-0.32	-0.26	-0.23	-0.22	-0.21	-0.21

La siguiente tabla muestra los valores de la SRC estimada para los valores de θ_1 en el intervalo de -0.9 a 0.9 y la figura 5.3 la gráfica de éstos. En la gráfica el valor de θ_1 que hace mínima la SRC se ubica entre -0.3 y -0.2.

θ_1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
SRC	42.2	33.3	29.1	27.2	26.4	25.9	25.7	25.6	25.7	26.2
ϕ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
SRC	27.0	28.5	31.0	35.0	41.3	51.2	66.7	90.7	127.5	

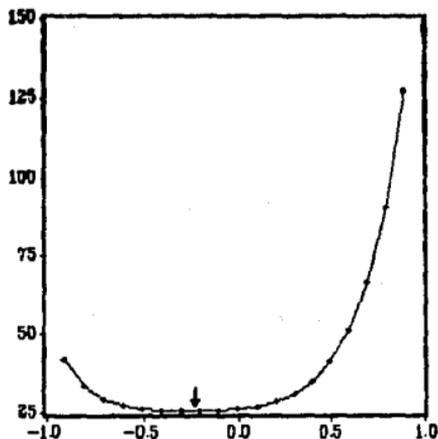


FIGURA 5.3 FUNCION DE LA SRC DEL PROCESO MA(1) ESTIMADO

5.1.3 ESTIMACION DE MODELOS ARMA

El procedimiento que se acaba de describir se puede generalizar para la estimación de cualquier modelo ARMA(p,q). El modelo se expresa como

$$a_t = v_t + \phi_1 v_{t-1} + \dots + \phi_p v_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

Definiendo al vector $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p+q}) = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$.

.. θ_q se tiene

$$a_t = a_t^* - \sum_{i=1}^{p+q} (\beta_i - \beta_i^*) x_{ti}^* \quad (5.21)$$

donde

$$x_{ti}^* = - \left[\frac{\partial a_t}{\partial \beta_i} \right]_{\beta_i = \beta_i^*} \quad (5.22)$$

Las derivadas pueden obtenerse numéricamente (como se realizó en la estimación del modelo MA(1) perturbando los parámetros incluidos en el modelo "uno cada vez". Esto es, se calcula primeramente los valores de la serie $[a_t | \psi_t, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_k^*]$. El cálculo se repite para $[a_t | \psi_t, \beta_1^* + h, \beta_2^*, \dots, \beta_k^*]$, después para $[a_t | \psi_t, \beta_1^*, \beta_2^* + h, \dots, \beta_k^*]$ y así sucesivamente.

El negativo de la derivada se obtiene utilizando

$$x_{ti}^* = (a_t | \psi_t, \beta_1^*, \dots, \beta_i^* + h_i, \dots, \beta_k^*) - (a_t | \psi_t, \beta_1^*, \dots, \beta_i^*, \dots, \beta_k^*) / h_i$$

Este procedimiento tiene la ventaja de obtener las derivadas calculando únicamente los valores de a_t y no de sus derivadas.

Si se designa X^* como

$$X^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \dots & x_{1p+q}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \dots & x_{2p+q}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \dots & x_{np+q}^* \end{bmatrix}$$

La notación (5.21) en forma compacta es

$$a^{\circ} = X^{\circ}(\beta - \beta^{\circ}) + a \quad (5.23)$$

donde a° y a son vectores de n elementos.

La estimación mínimocuadrática sería la siguiente:

$$\hat{\beta} - \beta^{\circ} = (X^{\circ} X^{\circ})^{-1} X^{\circ} a^{\circ} \quad (5.24)$$

y el mecanismo de actualización es

$$\beta^h = \beta^{h-1} + (\hat{\beta} - \beta^{h-1}) \quad (5.25)$$

El proceso iterativo continúa hasta obtenerse una convergencia satisfactoria para cada uno de los parámetros.

La matriz de covarianzas de los estimadores puede obtenerse mediante la siguiente fórmula aplicada en la última iteración:

$$V = s^2 (X^f X^f)^{-1} \quad (5.26)$$

donde

$$s^2 = \frac{\sigma^f \sigma^f}{n - p - q} \quad (5.27)$$

Todas las fórmulas anteriores son aproximadas, ya que se han efectuado bajo el supuesto de una aproximación lineal.

5.2. EL ENFOQUE NO CONDICIONAL

El enfoque no condicional se caracteriza porque los valores iniciales no se consideran como datos.

En lugar de minimizar $\sum a_t^2$, se minimiza en este enfoque la suma de cuadrados de las esperanzas condicionadas a los ruidos dada la muestra $v_1 \dots v_n$. Considerando que el proceso se inicia en un pasado remoto la suma a minimizar es

$$SRC = \sum_{t=-\infty}^n E_c [(a_t)]^2 \quad (5.28)$$

En el caso de los procesos estacionarios, las esperanzas condicionadas a la muestra v' se hacen pequeñas a medida de que se alejan del periodo muestral. En un proceso MA(q) se verifica que $E_c(a_t) = 0$ para $t < -q + 1$, ya que, al estar incorrelacionadas entre sí las a_t , únicamente $a_{-q+1} \dots a_0, a_1 \dots a_n$ han intervenido en la generación de la muestra $v_1 \dots v_n$. En general se puede considerar la aproximación de que para $t < -Q + 1$, siendo Q un entero positivo suficientemente grande, se verifica que $E_c(a_t) = 0$. Por lo tanto, la suma a minimizar en la práctica es

$$SRC^* = \sum_{t=-Q+1}^n E_c [(a_t)]^2 \quad (5.29)$$

Para explicar el cálculo de las esperanzas condicionadas, se utiliza un modelo ARMA(1,1).

$$v_t = \phi_1 v_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (5.30)$$

En (5.30) los valores de v_t se determinan en función de los valores pasados de v_t , de a_t y de los valores pasados de a_t . Es

decir, los valores sucesivos de w_t se van determinando "hacia adelante" en función de los valores pasados. En un proceso estacionario e invertible también es posible una determinación en sentido inverso, "hacia atrás", con lo que se tiene

$$w_t = \phi_1 w_{t+1} + \eta_t - \theta_1 \eta_{t+1} \quad (5.31)$$

donde η es una variable de ruido blanco con la misma varianza que $\alpha_t^{(9)}$.

Si se toman esperanzas condicionadas en (5.30) y (5.31) se obtienen las siguientes expresiones:

$$E_c[w_t] = \phi_1 E_c[w_{t-1}] + E_c[\alpha_t] - \theta_1 E_c[\alpha_{t-1}] \quad (5.32)$$

$$E_c[w_t] = \phi_1 E_c[w_{t+1}] + E_c[\eta_t] - \theta_1 E_c[\eta_{t+1}] \quad (5.33)$$

Las esperanzas condicionadas anteriores se calculan tomando como condición a los datos de la muestra, es decir, a w_1, w_2, \dots, w_n .

Por lo que se verifica que

$$E_c(w_t) = w_t \quad t = 1, \dots, n \quad (5.34)$$

puesto que la esperanza de la muestra condicionada de w en el momento t será justamente el valor que ha salido en la muestra para ese periodo.

Por otra parte también se verifica que

$$E_c[\alpha_{n+j}] = E[\alpha_{n+j}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

ya que los valores futuros que toma el ruido α_t no vienen

(9) Por lo que al enfoque no condicional se le conoce también como "backforecasting" o "backcasting" que significa pronosticar "hacia atrás" o retropronósticos.

condicionados por la muestra dada en un proceso "hacia adelante".

Analogamente si se contempla un proceso "hacia atrás" se verifica que

$$E_c[\eta_{t-j}] = E[\eta_{t-j}] = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.96)$$

ya que en este caso los ruidos η_0, η_{-1}, \dots serán independientes de la muestra dada de w' .

Si se hacen supuestos acerca de los valores finales, de la misma forma que se hizo para los valores iniciales en el enfoque condicionado, dados unos valores de los parámetros y de la muestra w_1, \dots, w_n , se puede calcular de forma recursiva "hacia atrás" la secuencia $E_c[\eta_n], E_c[\eta_{n-1}], \dots$

Así, para $t = n$

$$E_c[w_n] = \phi_1 E_c[w_{n-1}] + E_c[\eta_n] - \theta_1 E_c[\eta_{n+1}] \quad (5.97)$$

Si se hace el supuesto de que $E_c[w_{n+1}] = 0$ y de que $E_c[\eta_{n+1}] = 0$ se tiene que

$$E_c[\eta_n] = w_n$$

Para $t = n - 1$, se tiene

$$E_c[\eta_{n-1}] = w_{n-1} - \phi_1 w_n + \theta_1 E_c[\eta_n] = w_{n-1} - \phi_1 w_n + \theta_1 w_n \quad (5.98)$$

De forma similar se calculan $E_c[\eta_{n-2}], E_c[\eta_{n-3}], \dots$ hasta llegar a

$$E_c[\eta_1] = \ddot{w}_1 - \phi_1 w_2 + \theta_1 E_c[\eta_2] \quad (5.99)$$

Ahora de acuerdo a (5.36), $E_c[\eta_0], E_c[\eta_{-1}]$ son iguales a cero.

Continuando el cálculo "hacia atrás" mediante la aplicación de

(5.33) se obtendrán $E_c(w_0)$, $E_c(w_{-1})$ como

$$E_c(w_0) = \phi_1 w_1 + E_c[\eta_0] - \theta_1 E_c[\eta_1] = \phi_1 w_1 - \theta_1 E_c[\eta_1]$$

$$E_c(w_{-1}) = \phi_1 E_c(w_0)$$

$$E_c(w_{-2}) = \phi_1 E_c(w_{-1})$$

⋮

Los valores precedentes se irán atenuando, ya que no existe retroalimentación del ruido.

Una vez que se llega a valores cercanos a 0 se puede iniciar el cálculo hacia adelante que permite obtener los valores $E_c(a_t)$ en función de los parámetros de la muestra y de los valores $E_c(w_t)$ obtenidos precisamente en el proceso recursivo "hacia atrás". En consecuencia se puede evaluar SRG^* para valores dados de los parámetros.

En la estimación por MCO se evaluará (5.29) para unos valores iniciales β^* . El proceso iterativo subsiguiente se efectúa de manera similar al enfoque condicional con la diferencia de que ahora los valores iniciales no se consideran dados, sino que se calculan en forma recursiva "hacia atrás" a partir de la muestra.

En el enfoque no condicional los estimadores de máxima verosimilitud coinciden con los estimadores minimocuadráticos, en el enfoque condicional, en cambio no se da esta igualdad.

Con la serie que se utilizó para estimar el modelo MA(1) bajo el enfoque condicional se calcularán los valores de a_t mediante

retropronósticos y estimar nuevamente el modelo con el enfoque no condicional. Como la estimación de θ_1 que minimiza a la SRC es igual a 0.21 en el enfoque condicional se utilizará este valor como el valor inicial en el presente enfoque para reducir el número de iteraciones.

Se obtiene primeramente la serie η_t utilizando $\eta_t = v_t - 0.21\eta_{t+1}$ para iniciar el cálculo hacia atrás desde $t = 10$ hasta $t = 1$ (columna 2 de la tabla siguiente). Cuando se llega a η_0 se despeja v_0 para obtener la ecuación $v_0 = \eta_0 + 0.21\eta_1$ considerando que $\eta_0 = \eta_{-1} = 0$, se calculan los valores para la serie v_t hasta que se igual o muy cercano a cero (columna 1).

A partir del tiempo $t = -1$ se inicia el cálculo hacia adelante para obtener la serie a_t de manera similar al enfoque condicional (columna 3). Asimismo los cálculos de las demás series requeridas en la estimación se presentan en las columnas 4, 5, 6 y 7.

El resultado de la primera iteración es

$$(\theta_1 - \hat{\theta}_1^*) = \frac{\sum a_t x_t^*}{\sum x_t^{*2}} = \frac{-0.02}{14.12} = 0.00$$

por lo que el proceso converge en la 1a. iteración y la estimación del parámetro es igual en ambos enfoques.

PRIMERA ITERACION

t	v_t	η_t^*	$\alpha_t^* = -0.22$	$\alpha_t^* = -0.23$	x_t^*	x_t^{*2}	$\alpha_t^* x_t^*$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
-1	[0]	[0]	[0]	[0]			
0	[0.08]	[0]	[0.08]	[0.08]	[0]	[0]	[0]
1	0.60	0.39	0.58	0.58	-0.08	0.01	-0.05
2	0.72	1.01	0.60	0.59	-0.56	0.32	-0.34
3	-1.36	-1.36	-1.49	-1.49	-0.47	0.22	0.70
4	-0.34	0.00	-0.03	-0.01	1.59	2.53	-0.04
5	-1.88	-1.64	-1.87	-1.88	-0.32	0.10	0.60
6	-1.20	-1.16	-0.81	-0.79	1.94	3.78	-1.57
7	-0.05	-0.21	-0.33	-0.33	0.38	0.14	-0.13
8	-2.05	-1.38	-1.98	-1.98	0.25	0.06	-0.49
9	-2.64	-3.19	-2.22	-2.20	1.93	3.71	-4.28
10	2.63	2.63	3.10	3.12	1.80	3.24	5.58
						14.12	-0.02

Para los modelos estacionales es válido utilizar los métodos anteriores. Un proceso autorregresivo mixto, con componentes regulares y estacionales, no se puede estimar por métodos lineales, a diferencia de lo que ocurría con los procesos autorregresivos no estacionales. Por otra parte, en el enfoque condicionado de los procesos autorregresivos estacionales hay que considerar que se perderán D xs observaciones iniciales. La utilización del enfoque no condicionado requiere del cálculo hacia atrás de muchos más términos que en los procesos no estacionales. Por este motivo, en los modelos estacionales las diferencias entre una estimación condicionada y una estimación no condicionada puede llegar a ser considerable, siendo preferible el último enfoque.

5.3 DIAGNOSTICO DEL MODELO

Una vez que un modelo ha sido identificado tentativamente y sus parámetros estimados, es necesario verificar si el modelo se ajusta adecuadamente al comportamiento de la serie o si este puede mejorarse.

Se utilizarán principalmente 4 grupos de pruebas o diagnósticos para evaluar la suficiencia de un modelo:

- 1) Análisis de estacionaridad.
- 2) Análisis de los residuales.
- 3) Ajuste de parámetros adicionales: el modelo subespecificado.
- 4) Omisión de parámetros: el modelo sobreespecificado.

Si el modelo estimado es inadecuado, la aplicación de estas pruebas proporcionarán información para realizar modificaciones lógicas para mejorar la especificación del modelo. No es recomendable basarse en una sola prueba pues puede conducir a conclusiones erróneas.

Para ejemplificar la aplicación de estas pruebas se utilizará la serie del proceso químico por lotes. Se utilizaron los primeros 65 valores de la serie para la estimación de un modelo AR(2) cuya identificación se realizó en el capítulo IV. Los resultado de la estimación se presentan en la siguiente tabla:

LS // Dependent Variable is CBY
 Date: 8-15-1992 / Time: 18:38
 SNPL range: 3 - 65
 Number of observations: 63

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	56.690776	10.968001	5.1687427	0.000
AR1	-0.3175655	0.1258381	-2.5237629	0.014
AR2	0.2152171	0.1261938	1.7054494	0.093
R-squared	0.201227	Mean of dependent var	51.34921	
Adjusted R-squared	0.174601	S.D. of dependent var	11.76402	
S.E. of regression	10.68779	Sum of squared resid	6853.730	
Durbin-Watson stat	1.821383	F-statistic	7.557584	
Log likelihood	-237.1097			

Covariance Matrix

C,C	120.2971	C,AR1	-1.145620
C,AR2	-1.148479	AR1,AR1	0.015835
AR1,AR2	0.006333	AR2,AR2	0.015925

5.3.1 ANALISIS DE ESTACIONARIDAD

El análisis de estacionaridad se basa en los valores de las raíces de las estimaciones de los polinomios AR y de MA, así como en el tamaño de estas raíces. El tamaño se define como la raíz cuadrada

de la suma de cuadrados de la parte real e imaginaria de cada raíz.

Para un proceso AR una raíz cercana a 1 es indicación de que la serie no es estacionaria y se requerirá aplicar diferenciaciones adicionales a los datos. Para mayor claridad de lo anterior se tiene el siguiente modelo AR(2)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)z_t = a_t$$

si se supone que se encuentra que una de las raíces es cercana a 1, para este ejemplo se asume que la raíz es exactamente igual a 1. El modelo se puede reexpresar como

$$(1 - B)(1 - \phi B)z_t = a_t$$

$$(1 - \phi B)v_t = a_t$$

con

$$v_t = (1 - B)z_t$$

$$= z_t - z_{t-1}$$

$$= \nabla z_t$$

que demuestra la necesidad de aplicar una diferencia adicional al modelo que sustituirá al parámetro autorregresivo de orden 2.

Contrariamente, para el polinomio MA una raíz cercana a 1 indica que el modelo está posiblemente sobrediferenciado. Si se supone que se estima un modelo MA(2)

$$v_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t$$

y se encuentra que una de las raíces es igual a 1. Se puede reexpresar el modelo como

$$v_t = (1 - B)(1 - \theta B)a_t$$

si $v_t = (1 - B)z_t$ el modelo puede reducirse a

$$z_t = (1 - \theta B)\sigma_t$$

que muestra claramente la existencia de una sobrediferenciación de los datos.

Para la obtención de las raíces del modelo estimado para la serie del proceso químico se representa el modelo utilizando el polinomio autorregresivo:

$$(1 + 0.318B - 0.215B^2)z_t = \sigma_t$$

Al igualar el polinomio autorregresivo $1 + 0.318B - 0.215B^2$ a cero y resolverlo como una ecuación de segundo grado se obtienen las raíces del modelo. Para $B_1 = -1.54$ y para $B_2 = 3.02$, que muestra que ninguna de las raíces es cercana a 1 en valor absoluto y por lo tanto no se requiere aplicar una diferencia adicional a la serie.

5.3.2 ANALISIS DE LOS RESIDUALES

Si un modelo describe adecuadamente al proceso ARIMA que gobierna a la serie, entonces los residuales obtenidos del modelo deberán ser una serie de ruido blanco, con media cero, varianza constante e incorrelacionados sobre el tiempo.

Consecuentemente, el examen a las propiedades de los errores permite evaluar la suficiencia de un modelo. Se debe considerar que

el análisis de los errores se basan en sus estimaciones, denominados como residuales. Los residuales pueden estar correlacionados unos con otros, aún cuando los verdaderos errores sean independientes. Los residuales se definen como las diferencias entre los valores observados y los estimados.

Por ejemplo, para un proceso AR(1) los errores se definen como

$$\alpha_t = z_t - \phi_1 z_{t-1}$$

y los residuales como

$$\hat{\alpha}_t = z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1}$$

donde $\hat{\phi}_1$ es la estimación de ϕ_1 y $\hat{\phi}_1 z_{t-1}$ es el valor ajustado de z_t .

La figura 5.4 muestra la gráfica de los residuales para el modelo AR(2) del proceso químico por lotes. Una simple inspección visual de esta gráfica puede revelar problemas existentes en la serie, por ejemplo, los residuales mayores de los rezagos 3, 17 y 29 pudieran considerarse como la influencia de posibles observaciones "aberrantes" o indicación de que no se han filtrado aún todas las características del modelo, sin embargo la gran mayoría de los residuales caen dentro de las bandas del 95% de confianza para considerar adecuada la estimación.

Asimismo, si se advierte una tendencia creciente o decreciente en la evolución de la dispersión de los residuales será indicativo de una posible heteroscedasticidad.

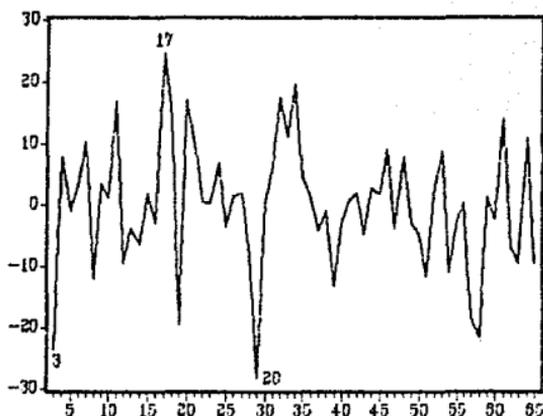


FIGURA 5.4 RESIDUALES DEL MODELO AR(2) DEL PROCESO QUIMICO POR LOTES

Constraste individual de los residuales

Si los residuales son verdaderamente ruido blanco, los valores de su fac no deberán ser estadísticamente diferentes de cero. Con la fórmula de Bartlett (ver ec. 4.2) se puede diagnosticar la significancia de las autocorrelaciones de los residuales de manera individual. Las autocorrelaciones de los residuales que están fuera del 95% de los límites de confianza serán significativamente diferentes de cero.

La siguiente tabla muestra la f_{ac} y f_{pac} de los residuales del modelo ARC(2) del proceso químico por lotes. Se puede notar que las autocorrelaciones de manera individual no rebasan 2 veces su error estándar igual a 0.126, por lo que deben considerarse como nulas.

IDENT RESID
 Date: 8-15-1992 / Time: 15:01
 SMPL range: 3 - 65
 Number of observations: 63

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
.x	.x	1 0.043	0.043
.	.	2 -0.025	-0.027
.	.	3 -0.003	-0.061
.x	.x	4 -0.065	-0.065
.xx	.xx	5 -0.178	-0.173
.	.	6 -0.027	-0.018
.	.	7 0.032	0.025
.x	.x	8 -0.109	-0.121
.x	.x	9 -0.046	-0.062
.xx	.x	10 0.121	0.090
.xxx	.xxx	11 0.130	0.121
.x	.x	12 -0.097	-0.115
.x	.x	13 0.070	0.040
.x	.x	14 0.085	0.084
.	.	15 0.030	0.088
.xx	.xxx	16 0.147	0.181
.x	.x	17 -0.040	-0.096
.x	.	18 -0.061	-0.037
.x	.	19 -0.082	0.013
.	.	20 -0.002	0.023
.	.	21 0.022	0.036
.x	.x	22 -0.061	-0.108
.x	.x	23 -0.068	-0.078
.x	.xx	24 -0.105	-0.130
.	.	25 -0.013	-0.024
Q-Statistic (25 lags)	10.533	S.E. of Correlations	0.126

Contraste global de los residuales

Un segundo test para evaluar las autocorrelaciones de los residuales en su conjunto más que de manera particular, es el estadístico Ljung-Box Q definido como

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{n-k} r_k^2(\hat{a}_l) \quad (5.40)$$

también conocido como la prueba Portmanteau de los residuales.

El estadístico Q se distribuye aproximadamente como una χ^2 con $K-p-q-P-Q$ grados de libertad bajo la hipótesis nula $H_0 = \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$. El símbolo K en el estadístico $Q(K)$ se refiere al número de términos utilizados en la sumatoria y los símbolos p, q, P, Q son los números de los parámetros autorregresivos, de medias móviles, autorregresivos estacionales y de medias móviles estacionales, respectivamente, incluidos en el modelo.

Tomando un K elevado se tiene la ventaja de que se puede captar los r_k significativos correspondientes a rezagos elevados, pero en contrapartida a medida que aumenta se disminuye la potencia del estadístico.

La hipótesis de que los residuales son ruido blanco se rechaza si el valor de Q es relativamente mayor comparado con el valor de la χ^2 de tablas a un nivel de significancia α y con $K-p-q-P-Q$ grados de libertad.

Esto es, si $Q(K) < \chi^2$ no se rechaza H_0 , contrariamente si $Q(K) > \chi^2$ se rechaza H_0 . En el proceso de contrastación, la parte más subjetiva sería la determinación a priori del nivel de

significación. En general se trata de una decisión arbitraria, siendo $\alpha = 5\%$ y $\alpha = 1\%$ los niveles más utilizados en la práctica.

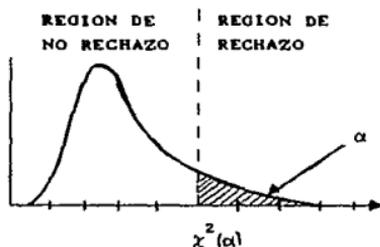


FIGURA 5.6 CONTRASTE GLOBAL DE LOS RESIDUALES

La estimación de $Q = 10.533$ para el modelo AR(2) del proceso químico por lotes basados en los primeros 25 rezagos no rebasa la χ^2 igual a 35.2, con $K = 25$ y $p = 2$ se tienen 23 grados de libertad con el 95% de confiabilidad, por lo que las autocorrelaciones tomadas en su conjunto se pueden considerar también nulas.

Primera diferencia de los residuales

Un tercer enfoque es evaluar las autocorrelaciones de la serie de la primera diferencia de los residuales. Si los errores a_t forman un proceso de ruido blanco, entonces

$$a_t = e_t \quad (5.41)$$

La primera diferencia de (5.41) se comporta como un proceso MA(1)

con el parámetro de medias móviles θ_1 igual a 1, esto es

$$a_t - a_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad \theta_1 = 1$$

La primera autocorrelación para un proceso MA(1) con $\theta_1 = 1$ es igual a -0.5 debido a que $\rho_1 = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2)$ y las autocorrelaciones restantes son cero.

La siguiente tabla muestra la fac de la primera diferencia de los residuales, para \hat{r}_1 se tiene un valor de -0.456 seguido de valores muy pequeños para las autocorrelaciones restantes, esto reafirma que la serie de los residuales es una serie de ruido blanco.

IDENT RESID1
Date: 8-15-1992 / Time: 19:12
SMPL range: 4 - 65
Number of observations: 62

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	PAC
		1	-0.414 -0.414
x	xxx	2	-0.061 -0.365
x	x	3	0.058 -0.150
x	x	4	0.056 -0.095
x	x	5	-0.199 -0.216
x	x	6	0.091 -0.141
x	x	7	0.089 -0.098
x	x	8	-0.090 -0.042
x	x	9	-0.093 -0.164
x	x	10	0.095 -0.122
x	x	11	0.118 0.104
x	x	12	-0.186 -0.050
x	x	13	0.070 -0.037
x	x	14	0.081 0.029
x	x	15	-0.109 -0.032
x	xx	16	0.104 0.170
x	x	17	-0.003 0.082
x	x	18	-0.045 0.025
x	x	19	-0.052 0.067
x	x	20	0.024 -0.019
x	x	21	0.083 0.116
x	x	22	-0.069 0.003
x	x	23	0.041 0.053
x	x	24	-0.072 -0.109
x	x	25	-0.015 -0.143

Q-Statistic (25 lags) 23.134 S E of Correlations 0.127

Es importante reconocer como los residuales de modelos mal especificados pueden utilizarse para realizar modificaciones lógicas en los modelos para que representen más adecuadamente al proceso que domina la serie.

Si se supone que se tiene un proceso MA(1)

$$\begin{aligned} z_t &= e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ &= (1 - \theta_1 B)e_t \end{aligned}$$

y se encuentra evidencia de que los residuales e_t más que ser ruido blanco son gobernados por un proceso MA(1),

$$\begin{aligned} e_t &= a_t - \lambda a_{t-1} \\ &= (1 - \lambda B)a_t \end{aligned}$$

La evidencia clara para esta situación es un valor significativo para la autocorrelación del primer residual, combinando las últimas dos expresiones

$$\begin{aligned} z_t &= (1 - \theta_1 B)(1 - \lambda B)a_t \\ &= (1 - \theta_1 B - \lambda B + \theta_1 \lambda B^2)a_t \\ &= a_t - (\theta_1 + \lambda)a_{t-1} + \lambda\theta_1 a_{t-2} \end{aligned}$$

que indica que un proceso MA(2) sería más adecuado que el proceso MA(1) identificado inicialmente.

5.3.3 EL MODELO SOBRESPECIFICADO: OMISION DE PARAMETROS

Otra prueba para checar la suficiencia de un modelo es evaluar si el modelo no contiene parámetros redundantes.

Los parámetros redundantes pueden ser localizados mediante el análisis del error estándar de las estimaciones de los parámetros (SE) y las estimaciones de las correlaciones entre los parámetros.

Se puede utilizar el SE para evaluar la significancia estadística para un solo parámetro. Se dice que un parámetro es significativamente diferente de cero si el valor absoluto de su estimación es al menos 2 veces el valor de su error estándar. Si el modelo tiene un parámetro insignificativo es indicación de que puede estar sobreespecificado y se deberá, por lo tanto, simplificarse.

Si el parámetro no significativo es el de mayor orden, el modelo puede simplificarse removiendo este parámetro del modelo. Si el parámetro no significativo no es el de mayor orden, entonces se debe examinar las correlaciones muestrales entre los parámetros para determinar cual de ellos se puede eliminar del modelo. Una alta correlación entre dos parámetros, esto es, si el coeficiente de correlación entre ambos parámetros se acerca a 1 es indicio suficiente para considerar que existe un problema grave de multicolinealidad. Si esto ocurre, los coeficientes estimados tendrán un carácter muy inestable con lo que podrían cambiar mucho de una realización a otra. Así el modelo estimado para el periodo muestral puede diferir del que se obtendría para el periodo de predicción.

Uno de los parámetros puede ser omitido sin cambiar significativamente la suficiencia del modelo. El parámetro incluido puede recoger la contribución del parámetro excluido debido a la fuerte correlación existente entre ambos.

Si el parámetro no significativo no es el de mayor orden pero está fuertemente correlacionado con el parámetro de mayor orden se puede evaluar el modelo excluyendo el parámetro de mayor orden. Si no existe correlación ente ambos parámetros, se debe reestimar el modelo suprimiendo el parámetro no significativo.

LS // Dependent Variable is C6:
 Date: 8-15-1992 / Time: 19:26
 SMPL range: 3 - 65
 Number of observations: 63

VARIABLE	COEFFICIENT	STD ERROR	T-STAT	2-TAIL SIG
C	72.211932	6.2163253	11.616498	0.000
ARI	-0.4031754	0.1171889	-3.4403894	0.001
R-squared	0.162505	Mean of dependent var	51.34521	
Adjusted R-squared	0.148776	S. D. of dependent var	11.76402	
S.E. of regression	10.85370	Sum of squared resid	7185.971	
Durbin-Watson stat	1.669238	F-statistic	11.83628	
Log likelihood	-238.6008			

Covariance Matrix			
C,C	39.64270	C,ARI	-0.710640
ARI,ARI	0.013733		

Para el proceso químico por lotes el parámetro $\phi_2 = 0.215$ es relativamente pequeño comparado con su SE = 0.126. Por lo que se debe evaluar si el proceso no puede ser descrito adecuadamente por un modelo AR(1). La tabla anterior muestra la estimación de la serie mediante un modelo AR(1) e indica que los datos pueden ajustarse adecuadamente como el modelo AR(2). El error estándar de la regresión solamente se incrementó de 10.688 a 10.854 y el estadístico Q de los residuales solamente se incrementó de 10.533 a 13.484.

Si las correlaciones muestrales entre las estimaciones de 2 parámetros indican una alta correlación entre los coeficientes de diferentes polinomios, la situación exige un análisis más detallado. Por ejemplo, si la matriz de correlación indica una alta correlación entre ϕ_2 y θ_3 , con o sin que ninguno de estos coeficientes sean no significativos.

Queda únicamente recurrir a la reespecificación del modelo donde alguno de los parámetros deberá ser omitido.

5.3.4 EL MODELO SUBESPECIFICADO: INCLUSION DE PARAMETROS ADICIONALES

Para verificar si el modelo tentativamente identificado contiene el número apropiado de parámetros para representar a los datos, se debe incluir parámetros adicionales al modelo ARIMA, para ver si con la adición trae consigo una mejoría en el modelo original.

Por ejemplo, se muestra en la siguiente tabla la estimación de la serie del proceso químico por lotes mediante un modelo ARMA(1,1) para verificar si este modelo se adecua mejor a los datos en comparación con los modelos AR(1) y AR(2). El valor del parámetro MA(1) no es significativo y la autocorrelación de ϕ_1 y θ_1 es alta por lo que se concluye que θ_1 no debe incluirse y el modelo AR(1) es más adecuado.

LS // Dependent Variable is CBY

Date: 8-15-1992 / Time: 19:39

SAMPL range: 3 - 65

Number of observations: 63

Convergence achieved after 4 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	51.483979	0.7416220	69.420782	0.000
MA(1)	0.5100377	0.2606826	1.9550473	0.055
AR(1)	-0.7686111	0.2258206	-3.4035157	0.001
R-squared	0.242690	Mean of dependent var	51.34921	
Adjusted R-squared	0.217643	S.D. of dependent var	11.76402	
S.E. of regression	10.40539	Sum of squared resid	6496.329	
Durbin-Watson stat	1.934139	F-statistic	9.623847	
Log likelihood	-235.4226			

Covariance Matrix

C,C	0.550003	C,MA(1)	0.004497
C,AR(1)	-0.005247	MA(1),MA(1)	0.068060
MA(1),AR(1)	-0.051107	AR(1),AR(1)	0.050995

Al agregar parámetros adicionales en los modelos de series de tiempo se puede caer en la trampa de parametrización redundante. La redundancia en los parámetros ocurre cuando se agrega al mismo tiempo un parámetro autorregresivo y un parámetro de medias móviles al modelo.

Si se supone que el modelo correcto es un AR(1)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

para un período $t-1$ se representa como

$$z_{t-1} = \phi_1 z_{t-2} + a_{t-1}$$

finalmente se sustrae y se reexpresa para z_t ,

$$z_t - z_{t-1} = \phi_1 z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t - a_{t-1}$$

$$z_t = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t - a_{t-1}$$

o reexpresarlo como

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

El modelo ARMA(2,1) puede derivarse directamente del modelo AR(1) agregando simplemente un parámetro autorregresivo y un parámetro de medias móviles. Como el modelo ARMA(2,1) se derivó del proceso AR(1), la diferencia entre ambos es ilusoria y se prefiere el modelo AR(1) porque hace un uso de los datos más eficiente. Primeramente, porque el modelo AR(1) puede utilizar las observaciones de z_t para el período $t = 2, \dots, n$ y el modelo ARMA(2,1) utiliza únicamente las observaciones de z_t para $t = 3, \dots, n$; y segundo porque el modelo AR(1) tiene que estimar menos

parámetros que el ARMA(2,1).

Si el modelo AR(1) es el correcto, el modelo ARMA(2,1) está claramente sobreparametrizado, con el inconveniente adicional de que se plantearían problemas en el proceso de estimación ya que una de las raíces del polinomio coincide teóricamente con θ_1^{-1} .

5.4 ESTIMACION DE ALGUNAS SERIES

En la página 197 se presentó la estimación del proceso químico por lotes con un modelo AR(2), por lo que aquí únicamente se presentará las estimaciones para los modelos identificados de la serie del turismo receptivo en México y la serie del precio de las acciones de IBM.

5.4.1 ESTIMACION DE LA SERIE DEL TURISMO RECEPTIVO EN MEXICO

La primera tabla muestra la estimación del primer modelo identificado para esta serie: $\nabla z_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^{12})a_t$.

LS // Dependent Variable is LTRM12
 Date: 11-06-1992 / Time: 16:26
 SMPL range: 1976 Q1 - 1988 Q4
 Number of observations: 156
 Convergence achieved after 10 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD ERROR	T-STAT	2-TAIL SIG
MA(1)	-0.568684	0.0741442	-7.5351812	0.000
MA(12)	-0.5469137	0.0688289	-7.9215946	0.000
R-squared	0.469368	Mean of dependent var	0.000943	
Adjusted R-squared	0.465323	S.E. of dependent var	0.163210	
S.E. of regression	0.073254	Sum of squared resid	0.925552	
Durbin-Watson stat	2.080952	F-statistic	136.2202	
Log likelihood	167.4513			

Mientras que la siguiente tabla muestra la estimación del segundo modelo identificado como $\forall \forall_{12} z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_{12} B^{12} - \theta_{18} B^{18}) a_t$.

LS // Dependent Variable is LTRM12
 Date: 11-06-1992 / Time: 16:27
 SMPL range: 1976 Q1 - 1988 Q4
 Number of observations: 156
 Convergence achieved after 3 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD ERROR	T-STAT	2-TAIL SIG
MA(1)	-0.5688428	0.0837582	-6.6720961	0.000
MA(12)	-0.2610417	0.0554866	-3.5536172	0.002
MA(18)	-0.1575807	0.0871550	-1.8057567	0.071
R-squared	0.392053	Mean of dependent var	0.000943	
Adjusted R-squared	0.384136	S.E. of dependent var	0.163210	
S.E. of regression	0.078642	Sum of squared resid	0.546226	
Durbin-Watson stat	2.349369	F-statistic	49.35349	
Log likelihood	176.8455			

5.4.2 ESTIMACION DE LA SERIE DEL PRECIO DE LAS ACCIONES DE IBM

Se estima unicamente el primer modelo identificado $(1 - \phi_1 B)z_t = \alpha_1$, ya que es el único que tiene un parámetro a estimar. Los resultados se presentan en la siguiente tabla, confirmandose, de acuerdo a la identificación realizada, la estimación para ϕ_1 cercana a 1:

LS // Dependant Variable is IBM

Date: 11-06-1992 / Time: 16:32

SMPL range: 1 - 369

Number of observations: 366

Convergence achieved after 1 iterations

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT	2-TAIL SIG
AR(1)	0.9554046	0.0507785	1284.0757	0.000
R-squared	0.952550	Mean of dependent var	478.5190	
Adjusted R-squared	0.952595	S.D. of dependent var	64.32638	
S.E. of regression	7.257845	Sum of squared resid	19332.15	
Durbin-Watson stat	1.826124	Log likelihood	-1251.075	

CAPITULO VI

PRONOSTICOS

CAPITULO VI PRONOSTICOS

Una vez que un modelo se ha considerado adecuado para representar al proceso que domina a la serie de tiempo, puede ser utilizado para la generación de pronósticos.

El periodo de datos originales se puede denotar como el periodo n y al periodo a pronosticar como h , a este intervalo de tiempo h se le define como el horizonte de pronósticos. Los valores aún no realizados de la serie serán, por lo tanto, z_{n+h} y al pronóstico para z_{n+h} como $z_n(h)$.

Debido a que la variable a pronosticar z_{n+h} , es una variable aleatoria, ésta puede ser descrita en términos de su distribución de pronósticos $f_{n,h}(z)$, que es una distribución de probabilidad condicional de las observaciones presentes y pasadas, así como de la especificación del modelo ARIMA que se haya seleccionado y estimado.

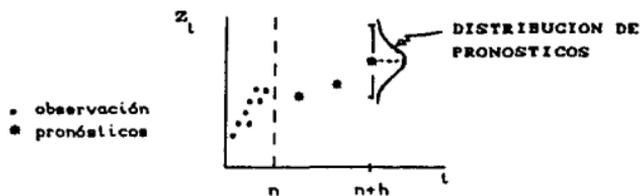


FIGURA 6.1 DISTRIBUCION DE PRONOSTICOS $f_{n,h}(z)$

6.1 EL CRITERIO DEL PRONOSTICO OPTIMO

Se desea seleccionar el pronóstico que produzca los errores cuyos cuadrados tengan los valores esperados más pequeños.

Si m_h es el valor esperado del pronóstico z_{n+h} para el periodo h , entonces $m_h = E z_{n+h}$. Otro pronóstico para z_{n+h} puede ser m definido como

$$m = m_h + d \quad (d. 1)$$

donde d es la diferencia entre m y m_h .

Utilizando el pronóstico m , la esperanza del error del pronóstico al cuadrado, se define como el valor aún no realizado en el tiempo h , z_{n+h} , menos su pronóstico m .

$$\begin{aligned} E[(z_{n+h} - m)^2] &= E\left[\left[z_{n+h} - (m_h + d)\right]^2\right] \\ &= E\left[(z_{n+h} - m_h)^2\right] - 2dE(z_{n+h} - m_h) + d^2 \end{aligned}$$

como $m_h = E z_{n+h}$, el segundo término es igual a cero y $d = 0$ para minimizar las desviaciones, queda

$$E[(z_{n+h} - m)^2] = E[(z_{n+h} - m_h)^2] \quad (d. 2)$$

que es la media del error cuadrático del pronóstico m_h . Por lo que el pronóstico óptimo para z_{n+h} se obtiene para $m = m_h = E z_{n+h}$, que goza de un error cuadrático medio mínimo.

Si z_t es un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible. Para el periodo $t = n + h$ el proceso se puede expresar como

$$z_{n+h} = \phi_1 z_{n+h-1} + \dots + \phi_p z_{n+h-p} + a_{n+h} - \theta_1 a_{n+h-1} - \dots - \theta_q a_{n+h-q}$$

El valor esperado de z_{n+h} para h periodos adelante, puede obtenerse como sigue:

- 1) Se reemplazan los errores pasados y presentes a_{n+j} , $j \leq 0$ por las estimaciones de los residuales.
- 2) Se reemplaza cada error futuro a_{n+j} , $0 < j \leq h$ por su esperanza, como a_{n+j} es ruido blanco los errores son simplemente cero.
- 3) Se reemplazan las observaciones pasadas y presentes z_{n+j} , $j \leq 0$ por los valores observados.
- 4) Se reemplaza cada valor futuro de z_{n+j} , $0 < j < h$ con su apropiado pronóstico $z_n(j)$; lo que implica que se debe pronosticar primero z_{n+1} , z_{n+2} , \dots , z_{n+h-1} para pronosticar z_{n+h} .
- 5) Se reemplazan los parámetros del modelo por sus estimaciones.

Lo anterior sirve para generar pronósticos para cualquier modelo no estacional y estacional, así como estacionarios y no estacionarios.

6.2 PRONOSTICOS PARA MODELOS ESTACIONARIOS

6.2.1 PRONOSTICOS PARA MODELOS AR

Si se considera el modelo AR(1) reintroduciendo la media μ

$$\begin{aligned}z_t - \mu &= \phi_1(z_{t-1} - \mu) + \alpha_t \\z_t &= (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_{t-1} + \alpha_t\end{aligned}\quad (6.9)$$

el valor aún no realizado para el siguiente periodo se puede expresar al sustituir $t = n + 1$,

$$z_{n+1} = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n + \alpha_{n+1}\quad (6.4)$$

la media de la distribución de pronósticos para este periodo, considerando que α_{n+1} se sustituye por su valor esperado igual a cero, es

$$Ez_{n+1} = z_n(1) = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n\quad (6.5)$$

para h periodos adelante

$$z_n(h) = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n(h-1) \quad h > 1\quad (6.6)$$

considerando que los términos de error tienen media cero por $E(\alpha_{n+h}) = 0$ para $h > 0$.

Los pronósticos para un modelo AR(1) tienden a la media de la serie. Si se expresa $z_n(h)$ en términos de z_n se tiene para $h = 2$

$$\begin{aligned}z_n(2) &= (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n(1) \\&= (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 \left[(1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n \right] \\&= (1 - \phi_1)(1 + \phi_1)\mu + \phi_1^2 z_n\end{aligned}\quad (6.7)$$

para $h = 3$

$$\begin{aligned} z_n(3) &= (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n(2) \\ &= (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 \left[(1 - \phi_1)(1 + \phi_1)\mu + \phi_1^2 z_n \right] \\ &= (1 - \phi_1)(1 + \phi_1 + \phi_1^2)\mu + \phi_1^3 z_n \end{aligned} \quad (6.8)$$

generalizando

$$z_n(h) = (1 - \phi_1)(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{h-1})\mu + \phi_1^h z_n \quad (6.9)$$

la sumatoria de $1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{h-1}$ es una serie que se comporta geométricamente, si $|\phi_1| < 1$ la suma de los términos converge a $1/1 - \phi_1$, por lo que

$$\begin{aligned} z_n(h) &= (1 - \phi_1) \left[\frac{1}{1 - \phi_1} \right] \mu + \phi_1^h z_n \\ &= \mu + \phi_1^h z_n \end{aligned} \quad (6.10)$$

si se pronostica cada vez más en el futuro, esto es, si $h \rightarrow \infty$ y dada la condición de estacionaridad $|\phi_1| < 1$ el término $\phi_1^h z_n$ tiende a cero. La expresión (6.10) se reduce a $z_n(h) = \mu$ como el mejor pronóstico de la serie. Lo anterior refleja el hecho de que en un proceso estacionario, cuanto más lejos se quiera predecir el futuro, mayor será la incertidumbre bajo la cual se obtiene la predicción. En un régimen total de incertidumbre la predicción óptima de una variable aleatoria es igual a su esperanza matemática⁽¹⁾. Por el contrario, cuando se predice a horizontes cortos, la información muestral permite mejorar la predicción que se haría si se utilizase únicamente la esperanza matemática de la variable aleatoria. La propiedad del proceso AR(1) es que toda la

(1) A. Novales. Op. cit. p. 251.

información muestral relevante para la predicción queda resumida en el último valor observado de la serie, en consecuencia dicho valor es todo lo que se precisa, junto con la esperanza matemática del proceso para elaborar predicciones.

Como se expresó, para un proceso AR(1) el horizonte de pronósticos tiende a μ , la media de la serie. Si se supone que $0 < \phi_1 < 1$ y z_n está por arriba de la media de la serie, el pronóstico decrece exponencialmente hacia la media. Similarmente si $0 < \phi_1 < 1$ y z_n se encuentra por debajo de la media, el pronóstico crecerá hacia la media. Finalmente si $-1 < \phi_1 < 0$, el pronóstico oscilará por arriba y debajo de la media hasta aproximarse a ella, no importando la posición de z_n . Cuando se analizó la función memoria del proceso AR(1) se mostró que la influencia de un shock decae gradualmente, sin embargo, persiste para un infinito número de periodos. Al analizar los pronósticos de este modelo se observa un comportamiento similar.

Por ejemplo, con los valores de $\mu = 100$, $\phi_1 = -0.30$ y $z_n = 80$, los pronósticos son los siguientes:

	h	1	2	3	4	5	6	7
$\phi_1 = -0.30$	$z_n(h)$	106	98.2	100.5	99.8	100.1	99.9	100.0

que se calculan como sigue:

$$z_n(h) = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n$$

$$z_n(1) = (1 + 0.30)100 - 0.30(80) = 106$$

$$z_n(2) = (1 + 0.30)100 - 0.30(106) = 98.2$$

$$z_n(3) = (1 + 0.30)100 - 0.30(98.2) = 100.5 \text{ y así sucesivamente.}$$

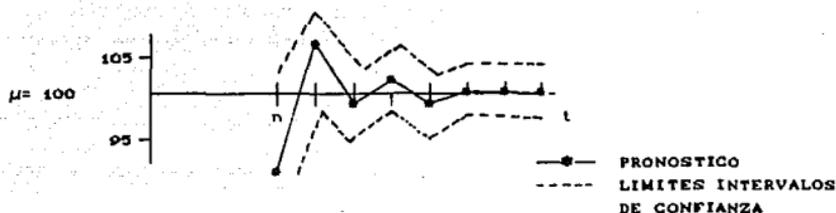


FIGURA 6.2 PRONOSTICOS DE UN MODELO AR(1)

En procesos AR(p) con $p > 1$, no existe una forma analítica sencilla para la predicción h periodos hacia el futuro. A pesar de esto, es fácil observar una diferencia con respecto a la predicción con modelos AR(1) y es que la información muestral relevante para la predicción se resume en las p últimas observaciones de la variable a predecir. Esto es

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p}$$

$$z_n(1) = \delta + \phi_1 z_n + \phi_2 z_{n-1} + \dots + \phi_p z_{n-p+1}$$

$$z_n(2) = \delta + \phi_1 z_n(1) + \phi_2 z_n + \dots + \phi_p z_{n-p+2}$$

$$z_n(3) = \delta + \phi_1 z_n(2) + \phi_2 z_n(1) + \dots + \phi_p z_{n-p+3}$$

⋮

$$z_n(h) = \delta + \phi_1 z_n(h-1) + \phi_2 z_n(h-2) + \dots + \phi_p z_n(h-p) \quad (6.11)$$

6.2.2 PRONOSTICOS PARA MODELOS MA

Los pronósticos para un modelo MA(1) se pueden generar en forma similar al proceso AR(1).

Para el periodo $n + 1$ el modelo MA(1) se puede expresar como

$$z_{n+1} = \mu + a_{n+1} - \theta_1 a_n \quad (6.12)$$

z_t ya no representa aquí desviaciones sobre la media sino los datos originales.

En el tiempo n , a_{n+1} todavía no ha sido observado y se reemplaza por su valor esperado cero. El valor del residual a_n puede calcularse como sigue⁽²⁾:

$$a_n = z_n - \mu - \theta_1 a_{n-1}$$

El pronóstico para un periodo adelante es solamente

$$z_n(1) = \mu - \theta_1 a_n \quad (6.13)$$

para dos periodos adelante

$$\begin{aligned} z_n(2) &= \mu + E(a_{n+2}) - \theta_1 E(a_{n+1}) \\ &= \mu \end{aligned} \quad (6.14)$$

debido a que a_{n+2} y a_{n+1} son desconocidos y se reemplazan por su media igual a cero.

(2) Para resolver a_n se requiere conocer a_0 . En la etapa de estimación el enfoque condicional reemplaza a a_0 por su valor esperado igual a cero, mientras que el enfoque no condicional utiliza el retropronóstico para el cálculo de estos valores iniciales.

Lo anterior es análogo al efecto del shock aleatorio del modelo MA(1) que solamente impacta para un periodo en el futuro.

Si se considera, por ejemplo, los siguientes valores para $\mu = 100$, $\theta_1 = 0.3$ y se supone que $\alpha_n = 0.5$, los pronósticos quedan:

	h	1	2	3	4
$\theta_1 = 0.3$	$z_n(h)$	98.5	100	100	100

que se calculan de la siguiente manera:

$$z_n(h) = \mu - \theta_1 \alpha_n$$

$$z_n(1) = 100 - (0.3)(5) = 98.5$$

$$z_n(2) = 100 \quad h \geq 2$$

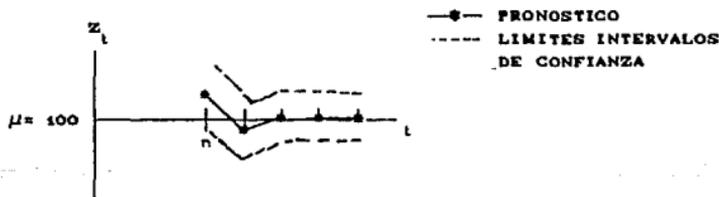


FIGURA 6.3 PRONOSTICOS PARA UN MODELO MA(1)

Similarmente en la función memoria de un modelo MA(q), el efecto de un shock solamente repercute en q periodos. Solamente los primeros q valores del perfil de pronósticos para el modelo MA(q) serán influenciados por los errores pasados y los demás valores serán iguales a la media del proceso.

$$z_n(h) = \mu \quad h > q \quad (6.15)$$

6.2.3 PRONOSTICOS PARA MODELOS ARMA

Se puede definir al modelo ARMA(1,1) introduciendo la media de la serie como

$$z_t - \mu = \phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$z_t = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (6.16)$$

reexpresado para el periodo $t = n + 1$

$$z_{n+1} = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n + a_{n+1} - \theta_1 a_n \quad (6.17)$$

los pronósticos generados secuencialmente son

$$z_n(1) = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n - \theta_1 a_n$$

$$\vdots$$

$$z_n(h) = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1 z_n(h-1) \quad h > 1 \quad (6.18)$$

Para este proceso los residuales pasados solamente influyen en el pronóstico del periodo 1. Similarmente al proceso AR(1) cada vez que se pronóstico más en el futuro, el pronóstico tiende a la media de la serie.

6.3 PRONOSTICOS PARA MODELOS NO ESTACIONARIOS

Lo analizado en la sección 6.2 se puede extender para incluir a los modelos no estacionarios, reemplazando únicamente z_{n+j} , $j \leq 0$ y $j > 0$ con los valores diferenciados w_{n+j} y resolver explícitamente para z_{n+h} , ya que el objetivo es pronosticar la serie original y no la

serie diferenciada.

6.3.1 PRONOSTICOS PARA EL MODELO ARIMA(0,1,1)

El modelo ARIMA(0,1,1) se puede expresar introduciendo la media de la serie diferenciada $v_t = z_t - z_{t-1}$. El modelo es estacionario en las primeras diferencias v_t pero no lo es en la serie original z_t .

$$z_t - z_{t-1} = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (6.19)$$

se reexpresa el modelo para el periodo $n + 1$ y se resuelve en términos de z_{n+1}

$$z_{n+1} = \mu + z_n + a_{n+1} - \theta_1 a_n \quad (6.20)$$

El pronóstico óptimo se obtiene reemplazando a_{n+1} por su media igual a 0 y utilizando z_n se calcula a_n como

$$a_n = z_n - z_{n-1} - \mu + \theta_1 a_{n-1} \quad (6.21)$$

los pronósticos serán

$$\begin{aligned} z_n(1) &= \mu + z_n - \theta_1 a_n \\ z_n(2) &= \mu + z_n(1) \\ &\vdots \\ z_n(h) &= \mu + z_n(h-1) \quad h > 1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Alternativamente se puede expresar (6.22) sustituyendo $z_n(h-1)$ como

$$z_n(h) = z_n(1) + \mu(h-1) \quad h > 1 \quad (6.23)$$

La última expresión indica que el perfil del pronóstico es una

línea recta con pendiente μ e intercepto igual al pronóstico de un periodo adelante.

Si se tiene, por ejemplo, $\mu = 100$, $\alpha_n = 5$, $\theta_t = 0.3$ y $z_n = 80$ los pronósticos son los siguientes:

	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6
z_n	80	178.5	278.5	378.5	478.5	578.5	678.5

que se calculan como sigue:

$$z_n(1) = \mu + z_n - \theta_t \alpha_n$$

$$= 100 + 80 - (0.3)(5) = 178.5$$

$$z_n(2) = \mu + z_n(1)$$

$$= 100 + 178.5 = 278.5$$

$$z_n(3) = 100 + 278.5 + 378.5$$

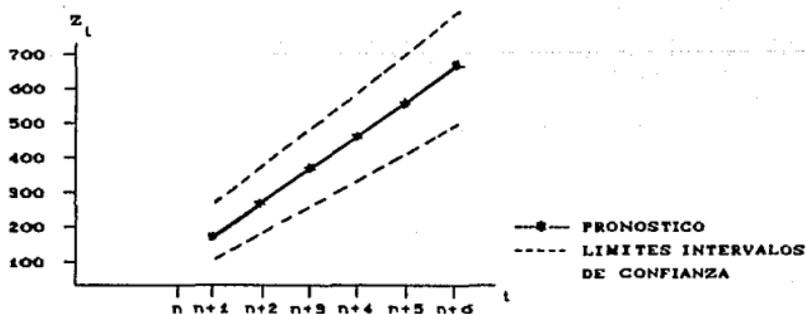


FIGURA 6.4 PRONOSTICOS DE UN MODELO ARIMA(0,1,1)

6.3.2 PRONOSTICOS PARA UN MODELO ARIMA(1,1,0)

El modelo ARIMA(1,1,0) se puede expresar introduciendo la media de la serie diferenciada

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)z_t = \delta + a_t \quad (d. 24)$$

con $\delta = (1 - \phi_1)\mu$ la media de la primera diferencia $v_t = (1 - B)z_t$.

Se resuelve para z_t

$$z_t = \delta + (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t \quad (d. 25)$$

El horizonte de pronósticos con el error cuadrático mínimo es

$$\begin{aligned} z_n(1) &= \delta + (1 + \phi_1)z_n - \phi_1 z_{n-1} \\ z_n(2) &= \delta + (1 + \phi_1)z_n(1) - \phi_1 z_n \\ &\vdots \\ z_n(h) &= \delta + (1 + \phi_1)z_n(h-1) - \phi_1 z_n(h-2) \quad h > 2 \end{aligned} \quad (d. 26)$$

Para inferir sobre el perfil de pronósticos de z_{n+h} se analizará primero el perfil de pronósticos de la serie diferenciada. Al reexpresar (d.24) en términos de la primera diferencia se obtiene

$$v_t = \delta + \phi_1 v_n + a_t$$

El perfil de pronósticos para este modelo es

$$\begin{aligned} v_n(1) &= \delta + \phi_1 v_n \\ v_n(2) &= \delta + \phi_1 v_n(1) \\ &\vdots \\ v_n(h) &= \delta + \phi_1 v_n(h-1) \end{aligned} \quad (d. 27)$$

Se sustituye progresivamente $v_n(h-1)$ de (6.27) para llegar a la siguiente expresión

$$v_n(h) = (1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^{h-1})\delta + \phi_1^h v_n \quad (6.28)$$

El pronóstico de la primera diferencia tiende a la media de la serie μ , teniendo un comportamiento similar al modelo AR(1) estacionario.

Para facilitar la inferencia sobre el pronóstico de z_t y v_t , se asume que $\phi_1 > 0$. Si el pronóstico para la serie diferenciada decrece hacia la media μ con $\mu > 0$, el pronóstico para la serie original se incrementa a una tasa decreciente y eventualmente este crecimiento se acerca a la media de la serie diferenciada. El perfil de pronósticos de v_t se acerca a μ por debajo, por lo que para una v_n negativa el perfil de z_t mostrará primero un decrecimiento y posteriormente un crecimiento a una tasa media cercana a μ .

Por ejemplo, con los siguientes datos se calcularán los pronósticos, tanto para v_n como para z_n

$$\phi_1 = 0.6 \quad \delta = 10 \quad z_n = 20 \quad z_{n-1} = 30$$

	n-1	0	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6	n+7	n+8	n+9	
v_n		<u>-10</u>	4	12.4	17.4	20.5	22.3	23.4	24.0	24.4	24.7	
z_n		<u>30</u>	<u>20</u>	24	36.4	64.8	90.3	116.2	141.7	167.0	192.2	217.3

Las siguientes figuras muestran las gráficas para cada una de estas series:

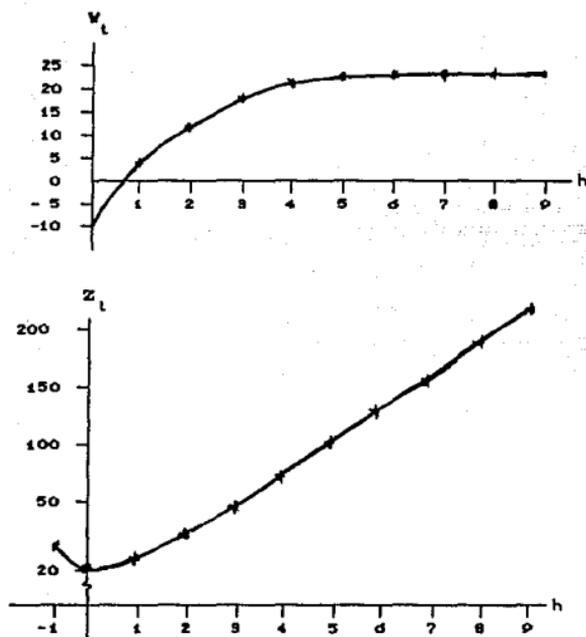


FIGURA 6.5 PRONOSTICOS DEL MODELO ARIMA(1,1,0)

La recuperación de las predicciones para cualquier serie z_t a partir de las predicciones elaboradas para las series diferenciadas se lleva a cabo de manera similar.

Adicionalmente, si el modelo estimado fue para la transformación logarítmica de la serie original z_t , denotada por $v_t = \log(z_t)$, el modo de recuperar las predicciones de los valores futuros de z_t es

$$E(z_{t+h}) = \exp \left[E z_{t+h} + \frac{1}{2} \text{var}[\alpha_t(h)] \right] \quad (6.29)$$

donde $\alpha_t(h)$ denota al error de predicción h periodos hacia el futuro. Dependiendo del tamaño de la varianza del error de predicción la expresión anterior supondrá una diferencia significativa o no con respecto a la simple alternativa de hallar la función exponencial de los valores de Ez_{t+h} .

6.4 INTERVALOS DE PRONOSTICOS

Adicionalmente al pronóstico puntual que se obtiene para los modelos, se desea inferir sobre la incertidumbre alrededor de estos puntos. Para ello debe calcularse el error estándar del pronóstico y construirse sus límites de confianza en bandas de $\pm 2SE$.

Para el cálculo de los errores estándar de los pronósticos es preferible utilizar la forma "error shock" de los modelos ARIMA, esto es, representar al modelo únicamente en términos de los errores pasados y presentes.

$$z_t = \alpha_t + \psi_1 \alpha_{t-1} + \psi_2 \alpha_{t-2} + \dots \quad (6.30)$$

Los valores de los parámetros ψ_1, ψ_2, \dots dependen del modelo ARIMA en particular. En el capítulo III se utilizó la forma "error shock" para la representación de la función memoria de los procesos estacionarios. Por ejemplo, para el modelo AR(1) se encontró que $\psi_1 = \phi_1, \psi_2 = \phi_1^2$ y en general $\psi_k = \phi_1^k$ (ver ec. 3.29).

El pronóstico óptimo $z_n(h)$ puede expresarse utilizando (6.30)

$$z_n(h) = \psi_h \alpha_n + \psi_{h+1} \alpha_{n-1} + \dots \quad (6.31)$$

Como resultado, el error de pronósticos de h periodos adelante es

$$a_n(h) = z_{n+h} + \psi_1 a_{n+h-1} + \dots + \psi_{h-1} a_{n+1} \quad (6.32)$$

la varianza del error de pronósticos es

$$\text{Var}\{a_n(h)\} = E\{a_n^2(h)\} = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \sigma_a^2 \quad (6.33)$$

Conforme el horizonte de pronósticos se alarga, las varianzas del error no decaen monotonamente

$$\text{Var}\{a_n(h)\} = \text{Var}\{a_n(h-1)\} = \sigma_a^2 \psi_{h-1}^2 \geq 0 \quad (6.34)$$

Lo que intuitivamente indica que la incertidumbre crece conforme se pronóstique cada vez más en el futuro.

Si se asume que los términos de error a_t están normalmente distribuidos, se puede caracterizar la distribución de pronósticos $f_{n,h}(z)$. Esta distribución de pronósticos se distribuirá normalmente como una variable aleatoria con media $z_n(h)$ y varianza $\text{Var}\{a_n(h)\}$, por lo tanto, si se establece un intervalo de confianza al 95% para z_{n+h} se tiene

$$z_n(h) \pm 1.96 \text{SE}\{a_n(h)\} \quad (6.35)$$

el error estándar de pronósticos (SE), se define como la raíz cuadrada de la varianza de pronósticos de (6.33). Para el cálculo de los límites de confianza se requiere de las estimaciones de los ψ_j y σ_a^2 .

CALCULO DE LOS ψ

Para obtener los límites de probabilidad de los pronósticos es necesario calcular previamente los valores de $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{h-1}$ del modelo ARIMA particular. Estos pesos ψ se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$\psi_2 = \phi_1 \psi_1 + \phi_2 - \theta_2$$

⋮

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \dots + \phi_p \psi_{j-p} - \theta_j \quad (6.30)$$

donde $\psi_0 = 1$, $\psi_j = 0$ para $j < 0$ y $\theta_j = 0$ para $j > q$.

Para el modelo AR(1) los pesos ψ_j se obtienen de la siguiente manera:

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = \phi_1$$

$$\psi_2 = \phi_1 (\phi_1) = \phi_1^2$$

$$\psi_j = \phi_1^j$$

La correspondiente varianza del error de pronósticos utilizando (6.33) es

$$\text{Var}[\hat{\alpha}_n(h)] = (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots + \phi_1^{2(h-1)})\sigma_a^2$$

Conforme h es grande la varianza de pronósticos tiende a la varianza del modelo AR(1). En la figura 6.2 se representan los intervalos de confianza para el modelo AR(1).

Similarmente, para el modelo MA(1) los pesos ψ_j se calculan como

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= -\theta_1 \\ \psi_j &= 0 \quad j > 1\end{aligned}$$

Su correspondiente varianza del error de pronósticos es

$$\begin{aligned}\text{Var}[\alpha_n(1)] &= \sigma_a^2 \\ \text{Var}[\alpha_n(h)] &= \sigma_a^2(1 + \theta_1^2) \quad h > 1\end{aligned}$$

Por lo que la varianza del error de pronósticos para 2 o más periodos adelante equivale a la varianza del modelo MA(1).

La varianza del error de pronósticos para los modelos estacionarios se hace constante conforme h es más grande y se va aproximando a la varianza de cada modelo en particular.

Contrariamente, para los modelos no estacionarios la varianza se incrementa sin límite. Por ejemplo, para el modelo IMA(1,1):

$$z_t - z_{t-1} = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

al expresarse en la forma "error shock" queda

$$z_t = \mu + a_t + (1 - \theta_1)a_{t-1} + (1 - \theta_1)a_{t-2} + \dots$$

por lo que los pesos ψ son constantes e iguales a $\psi_j = 1 - \theta_1$, para $j = 1, 2, \dots$. La varianza del error de pronósticos puede calcularse como

$$\text{Var}[\alpha_n(h)] = \sigma_a^2 [1 + (h-1)(1 - \theta_1)^2]$$

Claramente se ve que conforme h se hace más grande, la varianza se incrementa sin límite. Los límites de confianza del proceso IMA se ensanchan más y más conforme se va pronosticando en el futuro. (ver la gráfica 6.4).

6.5 PRONOSTICOS PARA LA SERIE DEL PROCESO QUIMICO POR LOTES

En el capítulo anterior se estimó la serie del proceso químico por lotes utilizando los primeros 65 datos obteniéndose los siguientes resultados:

$$z_t = 56.691 - 0.318z_{t-1} + 0.215z_{t-2} \quad \sigma_a^2 = 10.688$$

(10.968) (0.126) (0.126)

El intercepto 56.691 es una estimación de $(1 - \phi_1 - \phi_2)\mu$, por lo que se obtiene la estimación de μ como $\hat{\mu} = 51.43$, valor muy cercano a la media de los datos 51.48. Los valores entre paréntesis representan los SE del intercepto y de los parámetros estimados.

Con estas estimaciones se procede a pronosticar para los siguientes 15 puntos de la serie:

OBS.	ψ_j	L.I.	PRONOSTICO	L.S.	VALOR
	(1)	95%	(3)	95%	OBSERVADO
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
66	1.00000	36.27	57.22	78.17	59
67	-0.31759	24.93	46.91	68.89	40
68	0.31608	31.15	54.11	77.06	57
69	-0.16873	26.38	49.60	72.83	54
70	0.12161	29.22	52.58	75.95	23
71	-0.07494	27.25	50.67	74.08	
72	0.04997	28.48	51.92	75.36	
73	-0.03200	27.66	51.11	74.56	
74	0.02092	28.18	51.63	75.09	
75	-0.01353	27.84	51.29	74.75	
76	0.00880	28.06	51.51	74.97	
77	-0.00571	27.91	51.37	74.83	
78	0.00371	28.01	51.46	74.92	
79	-0.00240	27.95	51.40	74.86	
80	0.00156	27.98	51.44	74.90	

El cálculo de los pronósticos puntuales se señala a continuación y se presentan en la columna 3 del cuadro anterior:

$$\begin{aligned}
 z_n(1) &= 56.691 - 0.318z_n + 0.215z_{n-1} \\
 &= 56.691 - 0.318(39) + 0.215(60) = 57.22 \\
 z_n(2) &= 56.691 - 0.318z_n(1) + 0.219z_n \\
 &= 56.691 - 0.318(57.22) + 0.219(39) = 46.91
 \end{aligned}$$

La varianza del error de pronósticos es

$$\text{Var}[\alpha_n(h)] = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \sigma_a^2$$

se utiliza (6.33) para el cálculo de los pesos ψ :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 1 \\
 \psi_1 &= \phi_1 = -0.31759 + 0 = -0.31759 \\
 \psi_2 &= \phi_1 \psi_1 + \phi_2 = -0.31759(-0.31759) + 0.2152 = 0.31608 \\
 \psi_3 &= \phi_1 \psi_2 + \phi_2 \psi_1 = -0.31759(0.31608) + (0.2152)(-0.31759) \\
 &= -0.16873
 \end{aligned}$$

los valores de ψ para todo el periodo a pronosticar se presentan en la columna 1 del cuadro anterior. Después de 10 periodos los valores de ψ empiezan a ser muy pequeños lo que refleja el hecho de que no se agrega incertidumbre conforme se alarga el horizonte de pronósticos.

Las varianzas para cada uno de los periodos a pronosticar son:

$$\text{Var}(\alpha_n(1)) = (1 + \psi_1^2) \sigma_a^2 = [1 + (-0.31759)^2](10.688)^2 = 124.11$$

$$\text{SE}(\alpha_n(1)) = 11.21$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha_n(2)) &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2) \sigma_a^2 = [1 + (-0.31759)^2 + (0.31608)^2](10.688)^2 \\ &= 135.90 \end{aligned}$$

$$\text{SE}(\alpha_n(2)) = 11.71$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha_n(3)) &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) \sigma_a^2 = [1 + (-0.324)^2 + (0.324)^2 + (-0.176)^2] \times \\ &\quad (10.598)^2 = 139.38 \end{aligned}$$

Una vez conocidas las varianzas (y por lo tanto, el error estándar de pronósticos) se pueden construir los intervalos de confianza para cada uno de los puntos pronosticados (la columna 2 presenta el límite inferior de los intervalos de confianza y la columna 4 el límite superior en el cuadro anterior):

Observación 66

$$z_n(1) \pm 1.96\text{SE}(10.68) = 57.22 \pm 1.96(10.688) = [36.27, 78.17]$$

Observación 67

$$z_n(2) \pm 1.96\text{SE}(11.21) = 46.91 \pm 1.96(11.214) = [24.93, 68.89]$$

Observación 68

$$z_n(3) \pm 1.96\text{SE}(11.71) = 54.11 \pm 1.96(11.711) = [31.15, 77.06]$$

y así sucesivamente hasta la observación 80.

La figura 6.6 muestra la gráfica de los puntos pronosticados y sus correspondientes bandas de confianza. Se puede observar que después de 10 pronósticos los pronósticos restantes son constantes, con un

valor igual a 51.4 que es la media estimada de la serie. Asimismo, los intervalos de confianza para estos pronósticos ya no se ensanchan lo que refleja la estacionaridad de la serie original.

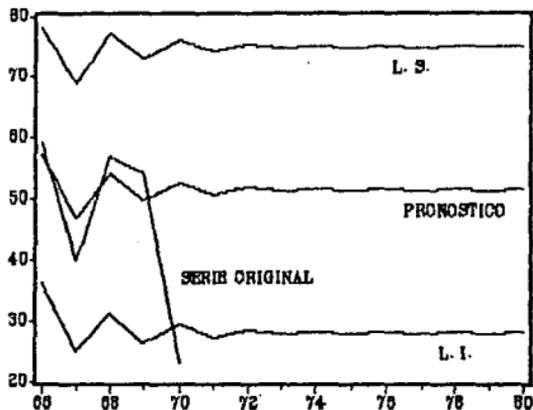


FIGURA 6.6 PRONOSTICOS EL PROCESO QUIMICO POR LOTES

6.6 ACTUALIZACION DE PRONOSTICOS

Al disponerse del valor de la siguiente observación z_{n+1} se pueden ajustar los pronósticos para los siguientes periodos. Esto puede ser generado en 2 formas⁽³⁾:

- 1) Actualización secuencial de pronósticos: Con el nuevo dato se procede a reestimar los parámetros del modelo. Asimismo se aplican nuevamente las pruebas de validación para verificar si el modelo sigue siendo adecuado y se calcula el pronóstico para el siguiente periodo. Se espera que los valores de los parámetros no cambien mucho al estimarse con un nuevo dato, en caso contrario se debe dudar de la estabilidad del modelo.
- 2) Pronósticos adaptativos: Bajo este enfoque no se reestiman los parámetros del modelo, pero si se cambia el punto de origen de los pronósticos para incorporar el nuevo dato disponible.

(3) Se puede consultar más a fondo sobre este punto a G. Box y G. Jenkins. Op. cit. p. 54 y ss.

CONCLUSIONES

Aún cuando un gran número de libros se han editado para el análisis de series de tiempo desde lo escrito por G. Box y G. Jenkins en 1970, pocos se han preocupado por presentar un nivel accesible para el estudiante con poco entrenamiento estadístico. Entre los esfuerzos más valiosos en este sentido se puede mencionar los realizados por W. Vandaele (1976) y Ezequiel Uriel J. (1985).

Al igual que ellos, en la presente disertación se intentó construir la intuición del análisis de series de tiempo. Es decir, se detalla por una lado la parte teórica de los principales modelos pero al mismo tiempo se confrontan con series simuladas o reales, que refuerzan el aprendizaje de cada uno de los procesos.

Concretamente, en el capítulo II al introducirse el concepto de estacionariedad y como transformar una serie no estacionaria en estacionaria, se utilizó la serie real del Turismo Receptivo en México que posee las principales características de una serie no estacionaria (existencia de una tendencia, varianza creciente y estacionalidad), que la hace adecuada para el desarrollo del capítulo.

En el capítulo III en el análisis de cada uno de los procesos se presentaron las gráficas y sus correspondientes funciones de autocorrelación de series simuladas simples. Estas series simuladas se generaron en base a estructuras autorregresivas, de medias

móviles y mixtas que engloban los comportamientos más comunes de los procesos.

El estudio previo de series simuladas permiten al estudiante se familiarice con los comportamientos de las series reales y su posterior identificación. Este análisis se da en sentido inverso al análisis de una serie real, aquí se conoce la estructura generadora y se estudia el comportamiento de la serie resultante, mientras que con una serie real se analiza su comportamiento para encontrar la estructura que la generó.

Por su parte, en el capítulo IV se presenta el método de estimación no paramétrica, se ejemplifica con series simples que permiten la comprensión del proceso iterativo. Sin embargo, considerando que en la actualidad se hace necesario el uso de ordenadores para el tratamiento de series reales, se presenta adicionalmente las estimaciones realizadas a través del paquete TSP (Time Series Processor), debido a que es uno de los paquetes con que el estudiante está más familiarizado en la facultad.

Es la serie del proceso químico por lotes con la que se ejemplifica principalmente toda la metodología, desde el cálculo de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, la identificación de la serie, estimación y validación de los modelos tentativos, hasta la generación de pronósticos. El seguimiento con esta serie en cada uno de los capítulos permite la comprensión global de la metodología.

Por lo tanto, con los elementos aquí manejados es posible analizar muchas de las series de tiempo reales económicas y no económicas.

La metodología deberá utilizarse como una herramienta adicional del análisis macroeconómico y microeconómico y el uso mecanicista de ésta puede conducir a conclusiones erróneas. Finalmente, hay que considerar, que no es el pronóstico del tiempo el que produce la lluvia.

ANEXO ESTADISTICO

Serie 1: Afluencia Total del Turismo Receptivo en México (1970-1984). Miles de turistas. Fuente: Secretaría de Turismo.

MES \ AÑO	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
ENERO	161.4	186.7	215.8	242.0	252.9	253.3	252.6	235.4
FEBRERO	170.1	187.4	226.4	244.9	271.8	264.4	270.4	260.6
MARZO	214.6	176.3	280.4	270.5	295.3	327.5	267.3	268.0
ABRIL	143.3	219.8	209.9	283.0	296.4	216.2	279.2	289.0
MAYO	180.2	180.9	195.2	238.0	244.8	237.3	230.2	222.1
JUNIO	213.9	222.8	276.1	286.6	301.9	280.1	255.1	257.0
JULIO	236.4	269.9	297.0	305.8	317.1	303.8	288.8	329.2
AGOSTO	222.3	237.5	262.1	314.4	321.0	305.3	259.7	283.6
SEPTIEMBRE	130.5	146.2	178.7	191.8	184.4	173.7	175.1	197.5
OCTUBRE	149.0	177.7	206.3	220.5	235.2	233.7	231.4	236.0
NOVIEMBRE	171.4	201.6	222.7	270.2	277.2	260.3	238.8	267.3
DICIEMBRE	256.9	302.6	344.0	358.6	364.2	362.2	358.4	401.5

MES \ AÑO	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
ENERO	292.7	332.6	363.8	341.4	320.1	356.1	398.2	380.6
FEBRERO	312.0	357.3	374.9	359.0	333.2	394.8	446.7	409.6
MARZO	368.0	377.3	407.6	358.6	344.0	486.3	507.2	469.4
ABRIL	277.4	357.0	331.1	347.8	331.5	393.2	392.4	341.5
MAYO	270.4	304.5	326.0	317.8	295.8	371.1	357.9	322.8
JUNIO	300.5	351.9	334.5	330.9	300.0	401.6	370.7	344.6
JULIO	358.4	358.6	352.2	356.1	344.5	450.2	370.0	341.1
AGOSTO	330.1	373.0	365.2	333.3	318.9	382.9	369.0	359.2
SEPTIEMBRE	237.1	245.3	226.0	238.7	221.6	281.2	251.0	212.0
OCTUBRE	248.7	284.6	279.6	280.0	257.1	332.2	295.8	246.5
NOVIEMBRE	318.3	324.7	327.1	317.1	272.1	382.3	375.0	319.7
DICIEMBRE	440.1	466.7	455.8	450.8	428.7	517.4	520.0	460.4

Serie 1. Continua . . .

MES \ AÑO	1986	1987	1988
ENERO	362.2	456.5	516.6
FEBRERO	380.8	472.6	544.7
MARZO	476.3	533.7	636.0
ABRIL	341.5	451.7	465.2
MAYO	359.1	418.8	410.6
JUNIO	385.9	433.3	431.6
JULIO	390.0	445.4	495.1
AGOSTO	410.0	449.4	438.7
SEPTIEMBRE	250.5	310.0	302.9
OCTUBRE	329.4	397.3	355.6
NOVIEMBRE	414.0	447.4	425.5
DICIEMBRE	525.1	581.2	669.6

Serie 1.1: Logaritmo de la serie del Turismo Receptivo en México (1970-1984).

MES \ AÑO	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
ENERO	5.08	5.23	5.37	5.49	5.53	5.53	5.53	5.46
FEBRERO	5.14	5.23	5.42	5.50	5.61	5.58	5.60	5.56
MARZO	5.37	5.17	5.64	5.60	5.69	5.79	5.59	5.59
ABRIL	4.96	5.39	5.35	5.65	5.69	5.38	5.63	5.67
MAYO	5.19	5.20	5.27	5.47	5.50	5.47	5.44	5.40
JUNIO	5.37	5.41	5.62	5.66	5.71	5.64	5.54	5.55
JULIO	5.47	5.60	5.69	5.72	5.76	5.72	5.67	5.80
AGOSTO	5.40	5.47	5.57	5.75	5.77	5.72	5.56	5.65
SEPTIEMBRE	4.87	4.98	5.19	5.26	5.22	5.16	5.17	5.29
OCTUBRE	5.00	5.18	5.33	5.40	5.46	5.45	5.44	5.46
NOVIEMBRE	5.14	5.31	5.41	5.60	5.62	5.56	5.48	5.59
DICIEMBRE	5.55	5.71	5.84	5.88	5.90	5.89	5.88	6.00

Serie 1.1 Continua . . .

MES \ AÑO	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
ENERO	5.68	5.81	5.90	5.83	5.77	5.88	5.99	5.94
FEBRERO	5.74	5.88	5.93	5.88	5.81	5.98	6.10	6.02
MARZO	5.91	5.93	6.01	5.88	5.84	6.19	6.23	6.15
ABRIL	5.63	5.88	5.80	5.85	5.80	5.97	5.97	5.83
MAYO	5.60	5.72	5.79	5.76	5.69	5.92	5.88	5.78
JUNIO	5.71	5.86	5.81	5.80	5.70	6.00	5.92	5.84
JULIO	5.88	5.88	5.86	5.88	5.84	6.11	5.91	5.83
AGOSTO	5.80	5.92	5.90	5.81	5.76	5.95	5.91	5.88
SEPTIEMBRE	5.47	5.50	5.42	5.48	5.40	5.64	5.53	5.36
OCTUBRE	5.52	5.65	5.63	5.63	5.55	5.81	5.69	5.51
NOVIEMBRE	5.76	5.78	5.79	5.76	5.61	5.95	5.93	5.77
DICIEMBRE	6.09	6.15	6.12	6.11	6.06	6.25	6.25	6.13

MES \ AÑO	1986	1987	1988
ENERO	5.89	6.12	6.25
FEBRERO	5.94	6.16	6.30
MARZO	6.17	6.28	6.46
ABRIL	5.83	6.11	6.14
MAYO	5.88	6.04	6.02
JUNIO	5.96	6.07	6.07
JULIO	5.97	6.12	6.20
AGOSTO	6.02	6.11	6.08
SEPTIEMBRE	5.52	5.74	5.71
OCTUBRE	5.80	5.98	5.87
NOVIEMBRE	6.03	6.10	6.05
DICIEMBRE	6.26	6.37	6.51

Serie 1.2

Serie de la primera diferencia del logaritmo de la serie del Turismo Receptivo en México (1970-1984).

MES \ AÑO	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
ENERO	--	-0.32	-0.34	-0.35	-0.35	-0.36	-0.36	-0.42
FEBRERO	0.05	0.00	0.05	0.01	0.07	0.04	0.07	0.10
MARZO	0.23	-0.06	0.21	0.10	0.08	0.21	-0.01	0.03
ABRIL	-0.40	0.22	-0.29	0.05	0.00	-0.42	0.04	0.08
MAYO	0.23	-0.19	-0.07	-0.17	-0.19	0.09	-0.19	-0.26
JUNIO	0.17	0.21	0.35	0.19	0.21	0.17	0.10	0.15
JULIO	0.10	0.19	0.07	0.06	0.05	0.08	0.12	0.25
AGOSTO	-0.06	-0.13	-0.13	0.03	0.01	0.00	-0.11	-0.15
SEPTIEMBRE	-0.53	-0.49	-0.38	-0.49	-0.55	-0.56	-0.39	-0.36
OCTUBRE	0.13	0.20	0.14	0.14	0.24	0.30	0.28	0.18
NOVIEMBRE	0.14	0.13	0.08	0.20	0.16	0.11	0.03	0.12
DICIEMBRE	0.40	0.41	0.43	0.28	0.27	0.33	0.41	0.41

MES \ AÑO	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
ENERO	-0.32	-0.28	-0.25	-0.29	-0.34	-0.19	-0.26	-0.31
FEBRERO	0.06	0.07	0.03	0.05	0.04	0.10	0.11	0.07
MARZO	0.17	0.05	0.08	0.00	0.03	0.21	0.13	0.14
ABRIL	-0.28	-0.06	-0.21	-0.03	-0.04	-0.21	-0.26	-0.32
MAYO	-0.03	-0.16	-0.02	-0.09	-0.11	-0.06	-0.09	-0.06
JUNIO	0.11	0.14	0.03	0.04	0.01	0.08	0.04	0.07
JULIO	0.18	0.02	0.05	0.07	0.14	0.11	0.00	-0.01
AGOSTO	-0.08	0.04	0.04	-0.07	-0.08	-0.16	0.00	0.05
SEPTIEMBRE	-0.33	-0.42	-0.48	-0.33	-0.36	-0.31	-0.39	-0.53
OCTUBRE	0.05	0.15	0.21	0.16	0.15	0.17	0.16	0.15
NOVIEMBRE	0.25	0.13	0.16	0.12	0.06	0.14	0.24	0.26
DICIEMBRE	0.32	0.36	0.33	0.35	0.45	0.30	0.33	0.36

Serie 1.2 Continua . . .

MES \ AÑO	1986	1987	1988
ENERO	-0.24	-0.14	-0.12
FEBRERO	0.05	0.03	0.05
MARZO	0.22	0.12	0.15
ABRIL	-0.33	-0.17	-0.31
MAYO	0.05	-0.08	-0.12
JUNIO	0.07	0.03	0.05
JULIO	0.01	0.05	0.14
AGOSTO	0.05	-0.01	-0.12
SEPTIEMBRE	-0.49	-0.37	-0.37
OCTUBRE	0.27	0.25	0.16
NOVIEMBRE	0.23	0.12	0.18
DICIEMBRE	0.24	0.26	0.45

Serie 1.3 Serie de la primera diferencia regular y estacional del logaritmo del Turismo Receptivo en México. (1970-1984).

MES \ AÑO	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
ENERO	--	--	-0.02	-0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.06
FEBRERO	--	-0.05	0.04	-0.04	0.06	-0.03	0.03	0.03
MARZO	--	-0.29	0.27	-0.11	-0.02	0.13	-0.23	0.04
ABRIL	--	0.62	-0.51	0.33	-0.04	-0.42	0.46	0.03
MAYO	--	-0.42	0.12	-0.10	-0.02	0.28	-0.29	-0.07
JUNIO	--	0.04	0.14	-0.16	0.02	-0.04	-0.06	0.04
JULIO	--	0.09	-0.12	-0.01	-0.02	0.03	0.04	0.12
AGOSTO	--	-0.07	0.00	0.15	-0.02	-0.01	-0.11	-0.04
SEPTIEMBRE	--	0.05	0.10	-0.11	-0.06	-0.01	0.17	0.03
OCTUBRE	--	0.06	-0.05	0.00	0.10	0.05	-0.02	-0.10
NOVIEMBRE	--	-0.01	-0.05	0.13	-0.04	-0.06	-0.08	0.09
DICIEMBRE	--	0.00	0.03	-0.15	-0.01	0.06	0.08	0.00

Serie 1.3 Continua . . .

MES \ AÑO	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
ENERO	0.10	0.04	0.03	-0.04	-0.05	0.16	-0.08	-0.05
FEBRERO	-0.04	0.01	-0.04	0.02	-0.01	0.06	0.01	-0.04
MARZO	0.14	-0.11	0.03	-0.08	0.03	0.18	-0.08	0.01
ABRIL	-0.36	0.23	-0.15	0.18	-0.01	-0.18	-0.04	-0.06
MAYO	0.24	-0.13	0.14	-0.07	-0.02	0.06	-0.03	0.04
JUNIO	-0.04	0.04	-0.12	0.01	-0.03	0.06	-0.04	0.03
JULIO	-0.07	-0.16	0.03	0.02	0.06	-0.02	-0.12	-0.01
AGOSTO	0.07	0.12	0.00	-0.10	-0.01	-0.08	0.16	0.05
SEPTIEMBRE	0.03	-0.09	-0.06	0.15	-0.03	0.06	-0.08	-0.14
OCTUBRE	-0.13	0.10	0.06	-0.05	-0.01	0.02	0.00	-0.01
NOVIEMBRE	0.12	-0.11	0.03	-0.03	-0.07	0.08	0.10	0.02
DICIEMBRE	-0.08	0.04	-0.03	0.02	0.10	-0.15	0.02	0.04

MES \ AÑO	1986	1987	1988
ENERO	0.07	0.10	0.02
FEBRERO	-0.02	-0.02	0.02
MARZO	0.09	-0.10	0.03
ABRIL	-0.01	0.17	-0.15
MAYO	0.11	-0.13	-0.05
JUNIO	0.01	-0.04	0.02
JULIO	0.02	0.04	0.09
AGOSTO	0.00	-0.06	-0.11
SEPTIEMBRE	0.03	0.12	0.00
OCTUBRE	0.12	-0.03	-0.09
NOVIEMBRE	-0.03	-0.11	0.06
DICIEMBRE	-0.13	0.02	0.19

Serie 2. Ventas mensuales. Fuente: Chatfield y Prothero (1973).
Tomado de Applied Time Series and Box Jenkins Models.

MES \ AÑO	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ENERO		223	346	518	613	628
FEBRERO		104	261	404	392	308
MARZO	90	107	224	300	273	324
ABRIL	79	85	141	210	322	248
MAYO	78	75	148	196	189	272
JUNIO	91	99	145	186	257	
JULIO	167	135	223	247	324	
AGOSTO	169	211	272	343	404	
SEPTIEMBRE	289	355	445	464	677	
OCTUBRE	347	460	560	680	858	
NOVIEMBRE	375	488	612	711	895	
DICIEMBRE	203	326	467	610	664	

Serie 3. Proceso químico por lotes. Fuente: Jenkins y Watts (1968) Tomado de Time Series Analysis: Forecasting and Control.

OBSERVACIONES				
1 - 15	16 - 30	31 - 45	46 - 60	61 - 70
47	44	50	62	68
64	80	71	44	38
23	55	56	64	50
71	37	74	43	60
38	74	50	52	39
64	51	58	38	59
55	57	45	59	40
41	50	54	55	57
59	60	36	41	54
48	45	54	53	28
71	57	48	49	
35	50	55	34	
57	45	45	35	
40	25	57	54	
58	59	50	45	

Serie 4. Casos notificados de paludismo en México (1976-1979).

Fuente: S.S.A. 1982 Unidad de Información.

MES \ AÑO	1976	1977	1978	1979
ENERO	1526	1138	1113	2071
FEBRERO	1280	1108	1050	1287
MARZO	1251	1406	1107	1201
ABRIL	892	959	957	882
MAYO	1148	1139	948	1618
JUNIO	1294	1652	875	1052
JULIO	1750	1539	1139	1784
AGOSTO	1821	2371	2446	2491
SEPTIEMBRE	2727	2137	2636	2290
OCTUBRE	2071	2033	2996	2503
NOVIEMBRE	1580	2471	2924	2245
DICIEMBRE	1278	1408	1532	1559

Serie 5. Nacimientos ocurridos en México. Fuente: INEGI, S.P.P

AÑO	NAC.	AÑO	NAC.	AÑO	NAC.
1939	865,081	1955	1,377,917	1971	2,231,399
1940	875,471	1956	1,427,722	1972	2,346,002
1941	878,935	1957	1,485,202	1973	2,572,287
1942	940,067	1958	1,447,578	1974	2,607,450
1943	963,317	1959	1,589,606	1975	2,429,424
1944	958,119	1960	1,608,174	1976	2,369,677
1945	999,093	1961	1,647,006	1977	2,401,909
1946	994,838	1962	1,705,481	1978	2,346,302
1947	1,079,816	1963	1,756,624	1979	2,448,774
1948	1,090,867	1964	1,849,408	1980	2,428,499
1949	1,123,358	1965	1,888,171	1981	2,530,662
1950	1,174,947	1966	1,954,340	1982	2,392,849
1951	1,183,788	1967	1,981,363		
1952	1,195,209	1968	2,058,251		
1953	1,261,775	1969	2,088,902		
1954	1,339,837	1970	2,132,630		

Serie 6. Precio diarios de las acciones de I.B.M (17 mayo 61 al 02 noviembre 62). Fuente: Sudhakar M. Pandit y Shien-Ming Wu.

OBSERVACIONES							
1-35	36-70	71-105	106-140	141-175	176-210	211-245	246-280
460	475	515	575	577	532	551	451
457	475	519	580	577	525	551	453
452	473	523	584	578	542	545	446
459	474	519	585	580	555	547	455
462	474	523	590	586	558	547	452
459	474	531	599	583	551	537	457
463	465	547	603	581	551	539	449
479	466	551	599	576	552	538	450
493	467	547	596	571	553	533	435
490	471	541	585	575	557	525	415
492	471	545	587	575	557	513	398
498	467	549	585	573	548	510	399
499	473	545	581	577	547	521	361
497	481	549	583	582	545	521	383
496	488	547	592	584	545	521	393
490	490	543	592	579	539	523	385
489	489	540	596	572	539	516	360
478	489	539	596	577	535	511	364
487	485	532	595	571	537	518	365
491	491	517	598	560	535	517	370
487	492	527	598	549	536	520	374
482	494	540	595	556	537	519	359
479	499	542	595	557	543	519	335
478	498	538	592	563	548	519	323
479	500	541	588	564	546	518	306
477	497	541	582	567	547	513	333
479	494	547	576	561	548	499	330
475	495	553	578	559	549	485	336
479	500	559	589	553	553	454	328
476	504	557	585	553	553	462	316
476	513	557	580	553	552	473	320
478	511	560	579	547	551	482	332
479	514	571	584	550	550	486	320
477	510	571	581	544	553	475	333
476	509	569	581	541	554	459	344

Serie 6. Continua . . .

OBSERVACIONES		
281-315	316-350	351- 369
339	394	366
350	393	359
351	409	356
350	411	355
345	409	367
350	408	357
359	393	361
375	391	355
379	388	348
376	396	343
382	387	330
370	383	340
365	388	339
367	382	331
372	384	345
373	382	352
363	383	346
371	383	352
369	388	357
376	395	
387	392	
387	386	
376	383	
385	377	
385	364	
380	369	
373	355	
382	350	
377	353	
376	340	
379	350	
386	349	
387	358	
386	360	
389	360	

Serie 7. Serie simulada para un proceso AR(1) con $\phi_1 = 0.8$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
0.68	-0.21	3.95	2.18	1.90	-2.15	-2.78	-2.03
1.69	3.17	5.10	-0.53	-2.80	-0.79	-1.53	-0.99
1.10	2.76	4.80	1.52	-3.89	0.97	-2.04	-3.62
2.11	2.80	5.39	2.22	0.16	-2.22	-1.06	-3.26
1.14	5.86	-0.90	0.10	-0.19	-2.37	5.29	2.99
-2.04	4.32	-1.17	-2.30	-0.29	-1.49	4.48	-0.73
-1.70	3.27	-1.77	-2.08	-1.90	-0.66	2.53	-3.27
0.59	2.66	-0.97	-0.19	-1.50	-1.89	2.06	-4.20
-4.02	0.92	-2.02	4.99	-0.31	1.07	4.13	-3.00
-2.63	6.53	1.54	1.74	-2.18	1.38	1.13	-1.59
0.88	4.53	-0.43	2.60	-1.59	1.26	-4.38	-1.64
1.00	2.49	-0.93	6.34	3.26	-0.40	-3.40	-0.87
-1.84	5.06	2.08	3.42	1.54	0.65	-5.95	-0.82
-3.66	3.88	2.73	3.45	-1.22	-2.96	-3.21	-1.19
2.05	6.79	0.18	4.42	-3.07	-1.41	-4.43	2.77

Serie 8. Serie simulada para un proceso AR(1) con $\phi_1 = -0.8$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
0.68	1.02	-1.41	1.80	3.42	1.53	-2.71	3.35
1.69	0.99	2.28	-2.40	-4.96	-1.99	2.73	0.81
2.58	2.29	-1.68	2.15	0.75	3.62	-0.99	-2.95
-1.15	-0.07	4.12	0.94	-0.81	-4.26	-0.44	0.52
1.61	3.56	-4.83	-3.96	3.23	1.25	3.83	2.85
-2.80	-2.91	-0.19	-1.08	-1.33	-1.94	1.22	-1.72
-1.26	3.01	-2.85	-3.34	-0.22	0.74	-1.82	0.70
2.98	-1.00	1.33	2.48	-1.01	-0.61	0.83	-3.63
-3.16	0.22	-2.50	2.34	3.51	3.21	0.62	-0.11
-0.86	4.27	4.44	1.36	-4.41	-2.82	-0.31	0.42
3.81	1.32	-0.16	-1.66	1.68	2.22	-3.16	2.45
-1.24	0.26	-1.47	5.88	2.90	-5.43	0.20	-3.07
0.31	1.88	1.82	-4.72	-0.92	2.27	-3.22	0.51
-3.18	1.13	0.39	2.07	0.29	-5.04	3.15	-2.42
1.20	4.29	-1.35	-2.27	-2.86	2.86	-1.65	2.53

Serie 9. Serie simulada para un proceso AR(2) con $\phi_1 = 1.5$ y $\phi_2 = -0.9$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
1.68	1.72	5.70	0.82	3.05	-2.62	-9.15	7.21
2.62	2.62	5.26	-4.33	-5.23	0.28	-9.89	10.86
-1.12	0.38	5.52	-4.40	-12.41	2.26	-10.31	11.71
1.42	-0.44	4.04	-6.12	-9.96	1.67	-4.08	6.39
3.01	1.23	-4.05	-1.23	-7.87	0.81	8.48	3.05
-0.40	5.78	-6.74	0.79	-2.02	-1.28	13.52	-2.56
0.65	7.02	-8.23	3.09	4.05	-0.73	16.46	-9.86
-0.10	4.33	-7.35	1.57	9.66	-2.87	11.97	-12.83
-7.04	-0.17	-4.82	3.97	6.95	-4.28	5.82	-8.53
-4.71	0.83	2.23	-0.86	2.77	-0.01	-3.35	-1.78
-3.66	-1.21	1.56	1.68	-0.73	2.43	-14.37	-0.58
0.76	-1.91	4.23	3.18	-3.56	5.23	-17.93	5.00
2.80	2.97	7.19	3.75	-3.06	6.77	-17.33	8.74
0.19	4.77	6.88	5.22	-3.31	1.45	-9.67	6.90
7.04	7.12	3.41	8.17	-2.35	-3.03	-2.34	7.21

Serie 10. Serie simulada para un proceso MA(1) con $\theta_1 = 0.8$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
0.63	0.36	-3.76	-1.28	2.55	-4.35	-0.45	1.49
-0.12	3.06	-3.42	-1.70	-3.23	0.61	-2.21	2.81
-0.39	0.89	3.17	-0.33	-1.00	3.03	0.06	0.44
1.49	2.59	-0.44	-0.56	3.12	-2.52	-0.88	1.47
0.92	0.69	-3.86	-3.03	1.20	-1.54	5.07	3.43
-3.77	1.95	-1.28	-1.91	0.20	1.11	-1.30	0.26
2.23	0.38	-0.73	-2.19	1.36	-0.10	-0.56	-5.22
2.47	-1.94	0.03	1.11	-0.32	-2.82	0.05	-1.82
-4.94	0.83	2.99	1.95	2.92	-1.05	2.54	2.33
0.10	3.10	4.37	-1.36	-2.62	-3.48	1.28	1.86
1.71	-1.10	-3.45	4.32	3.96	-2.93	-1.99	-0.98
-0.17	0.89	-2.99	-0.54	3.50	-2.27	1.31	-1.65
-5.04	4.17	2.82	-4.44	2.20	-0.62	0.04	-1.52
0.14	0.72	-0.03	0.97	0.49	-0.59	1.85	0.42
2.44	-0.43	1.36	5.61	1.01	5.30	0.99	-1.53

Serie 11. Serie simulada para un proceso MA(2) con $\theta_1 = 1.5$ y $\theta_2 = -0.9$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
-2.17	-0.77	-2.70	1.88	-1.58	-0.24	-5.47	3.31
2.35	1.23	2.96	-4.04	3.42	0.67	2.30	1.52
1.33	3.60	-5.62	1.47	-1.90	-0.23	2.90	4.92
-1.52	0.63	1.77	-3.50	1.53	-1.50	-1.30	-1.52
1.21	1.70	-1.57	0.90	0.10	2.45	0.69	-0.49
1.68	-0.42	-0.51	-3.04	3.82	-2.47	-0.16	-3.67
-3.67	-2.43	-0.93	3.43	-3.08	-2.48	2.09	1.05
2.16	5.20	5.94	-5.84	2.78	-0.12	-0.19	2.18
-1.90	-3.13	-2.52	4.31	-0.16	-4.72	-0.53	-2.88
0.87	-1.03	-0.07	3.58	4.14	-1.70	2.13	2.05
-1.89	4.81	-0.68	-3.36	1.28	0.04	-0.84	-1.12
-5.68	0.89	0.95	-1.53	1.12	-3.76	2.50	-2.26
8.85	2.21	-1.27	3.57	1.92	2.65	-1.77	4.57
-6.73	-4.00	4.10	1.27	1.20	2.45	3.33	-8.74
5.81	-0.89	-4.41	1.40	-2.82	1.95	-1.34	4.44

Serie 12. Serie simulada para un proceso ARMA(1,1) con $\phi_1 = 0.5$ y $\theta_1 = -0.5$

OBSERVACIONES							
1-15	16-30	31-45	46-60	61-75	76-90	91-105	106-120
2.28	-0.58	2.67	1.12	-1.24	-1.51	-2.32	2.81
2.82	2.97	0.41	-1.65	-1.67	0.39	2.34	-0.25
0.74	2.80	0.06	4.27	-4.26	0.63	1.29	-0.37
0.16	4.21	2.53	-0.27	1.06	-1.53	0.16	-0.56
1.80	1.95	-2.92	-0.71	0.91	-0.34	6.13	0.15
-4.04	0.23	-2.64	-3.53	-0.03	-2.20	1.64	0.21
-2.45	1.04	-1.81	-0.42	-3.36	-0.45	1.06	-0.85
2.76	0.96	-1.28	-0.73	1.60	2.85	-0.52	-3.47
-4.42	-0.74	-3.08	6.33	0.61	1.09	-0.79	-3.45
0.78	4.02	4.43	0.11	-1.94	2.81	-1.74	3.56
0.75	3.24	0.82	3.71	1.50	0.02	-4.63	0.95
0.47	0.04	0.02	4.48	1.05	-2.45	-3.65	-0.11
2.40	2.33	1.85	1.47	0.38	-1.42	-4.14	1.03
-5.28	2.62	1.15	-2.80	-2.22	-3.72	-0.61	-2.22
3.83	4.58	-0.62	-0.14	-0.42	-1.15	-1.65	5.92

GLOSARIO DE TERMINOS

Autocorrelación	Grado de asociación entre una observación en el tiempo t , y una observación en el tiempo $t - k$.
Coefficiente memoria	Coefficiente del término de error α_1 cuando el proceso se expresa en su forma error-shock.
Correlograma	Gráfica de las autocorrelaciones a diferentes rezagos de un proceso estocástico, también denominado como función de autocorrelación.
Diferenciación	Substracción de los valores de las observaciones de una sobre otra en un orden de tiempo establecido con el objeto de eliminar el componente de tendencia y/o estacionalidad.
Ergodicidad	Propiedad de un proceso para considerar válidas las medias de las muestras de una sola realización como aproximaciones de las correspondientes medias poblacionales.
Estacionalidad	Movimientos cíclicos de corta duración que aparecen año tras año con cierto grado de regularidad.
Estacionaridad	Cuando las propiedades de un proceso estocástico no son afectadas al realizar un desplazamiento en el tiempo. Es decir, su media y varianza permanecen constantes.
Fenómeno Aleatorio	Fenómeno cuyo resultado dependen del azar. A los resultados de un experimento aleatorio se les denomina como puntos muestrales y al agregado de los puntos muestrales se le llama espacio muestral.
Filtro lineal	Proceso mediante el cual la serie observada se transforma en un proceso de ruido blanco.

Función memoria	Gráfica de los coeficientes memoria a diferentes rezagos de k .
Media de un proceso	Momento de primer orden definido como $E(z_1), E(z_2), \dots, E(z_n) = \mu$.
Modelo autorregresivo	Proceso en el que se utilizan las magnitudes precedentes de una variable para explicar ésta en base a su comportamiento histórico.
Modelo de medias móviles	Proceso estocástico que origina un movimiento periódico.
Observación aberrante	Observación extrema que sale del comportamiento general de la serie.
Parsimonia	Representación del proceso de series de tiempo con el menor número de parámetros posibles.
Proceso estocástico	Sucesión de variables aleatorias que corresponden a momentos sucesivos del tiempo.
Realización de un proceso estocástico	Secuencia de observaciones generadas por un proceso estocástico.
Residuales	Diferencia entre los valores observados y estimados.
Ruido blanco	Serie de variables aleatorias sin correlación.
Serie de tiempo	Colección de observaciones que han sido generadas secuencialmente en el tiempo.
Tendencia	Cambio sistemático en el nivel medio de la serie.

Variable aleatoria	Dado un experimento que genera un espacio muestral con sus puntos muestrales E_1, E_2, \dots y probabilidades asociadas $P(E_1), P(E_2), \dots$ existe una regla para la cual un número U asocia cada punto del espacio muestral.
Varianza	Medida de dispersión alrededor de la media.

SIMBOLOGIA

z_t	Observación de la serie en el tiempo t
v_t	Serie transformada mediante el filtro de integración para convertirla en estacionaria
t	Orden de la observación en una serie de tiempo
a_t, e_t	Variable aleatoria o shock
μ	Media de un proceso estocástico
σ^2, λ_0	Varianza del proceso estocástico
λ_k	Autocovarianza de orden k
ρ_k	Autocorrelación de orden k
B	Operador de retraso
∇	Operador de diferencias
d	Grado de diferenciación regular
D	Grado de diferenciación estacional

s	Orden del rezago en la diferenciación estacional
ϕ	Parámetro autorregresivo
p	Orden del parámetro autorregresivo
θ	Parámetro de medias móviles
q	Orden del parámetro de medias móviles
Φ	Parámetro estacional autorregresivo
P	Orden del parámetro estacional autorregresivo
Θ	Parámetro estacional de medias móviles
α	Orden del parámetro estacional de medias móviles
w	Parámetro del proceso en su representación error-shock
ϕ_{kk}	Autocorrelación parcial
E	Esperanza matemática
AR	Modelo autorregresivo
MA	Modelo de medias móviles
ARMA	Modelo autorregresivo y de medias móviles
ARIMA	Modelo autorregresivo, integrado y de medias móviles
fac	Función de Autocorrelación
facp	Función de autocorrelación parcial
SRC	Suma de residuales al cuadrado condicionados
SRC*	Suma de residuales al cuadrado

v^*	Vector de valores iniciales de la serie para la estimación paramétrica
a^*	Vector de valores iniciales de la variable aleatoria.
η	Variable aleatoria en la estimación no condicionada
$Q(K)$	Prueba Q o de Portmanteau
χ^2	Jí cuadrada
n	Periodo de datos observados
h	Horizonte de pronósticos
$z_n(h)$	Pronóstico de la variable z_t
$f_{n,h}(z)$	Función de distribución de pronósticos
δ	Intercepto
SE	Error estándar
Var	Varianza
Cov	Covarianza

BIBLIOGRAFIA

- 1) Time Series Analysis: Forecasting and Control. George Box y Gilyim Jenkins. San Francisco Holden Day, 1970.
- 2) Applied Time Series and Box-Jenkins Models. Walter Vandaele. Academic Press, U.S. 1976.
- 3) Time Series in the Time Domain. Editado por E.J. Hanna, P.R. Krishnaiah y M.M. Rao. Ed. North Holland, Amsterdam 1985.
- 4) Introduction to Statistical Time Series. Wayne a. Fuller. Ed. John Wiley and Sons, 1976.
- 5) Econometric Models and Economic Forecast. Robert S. Pinyck y Daniel L. Rubinfeld. International Student Edition, McGraw Hill Book Co. Singapore 1986.
- 6) Econometric Methods. J. Johnston. McGraw Hill International Editions, I.S.E. Singapore 1984.
- 7) Forecasting Methods for Management. W. Well y Spyros Makridakis. Ed. J. Wiley and Sons. U.S. 1983.
- 8) Métodos Estadísticos de la Econometría. Edmond Malinvaud. Ediciones Ariel. Barcelona 1967.
- 9) Econometria. Alfonso Novales Cinca. Ed. McGraw Hill Madrid 1988.
- 10) Análisis de Series Temporales Económicas. Marc Nerlove, David M. Grether y José L. Carvalho. Ed. F.C.E. México 1988.
- 11) Seasonality in Tourism. A guide to Analysis of seasonality and trend for policy making. Raymond Baron Raphael. The Economist Intelligence Unit, London 1975.
- 12) Stochastic Processes. Emanuel Parzen. Ed. Holden Day, U.S. 1962.

- 13) **Stochastic Point Processes and their applications.** S.K. Srinivasan. Griffin's Statistical Monographs and Courses. Edited by Alan Stuart. London 1974.
- 14) **Time Series and system with Applications.** Sudhakar M. Pandit, Shien-Ming Wu. Ed. John Wiley and Sons. U.S. 1983.
- 15) **Análisis de Series Temporales: Modelos ARIMA.** Ezequiel Uriel Jiménez. Ed. Paraninfo, S.A. Valencia 1985.
- 16) **Time Series techniques for Economist.** Terence C. Mills. Ed. Cambridge University Press. London 1990.