7
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HACIA UNA HISTORIA CRITICA DE LA MATEMATICA EN MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS ROSALIO CARIO RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1992

7
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HACIA UNA HISTORIA CRITICA DE LA MATEMATICA EN MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS ROSALIO CARIO RAMIREZ

MEXICO, D. F. 1992

Objetivo

El objetivo de este trabajo es hacer un análisis crítico sobre la última parte del primer libro impreso de la matemática en el Nuevo Mundo, el cual trata sobre el *Arte Mayor*, es decir, el Algebra.

Prólogo

La problemática que existe en la conformación de la historia de la ciencia en México, y en particular de la matemática, se centra en las siguientes dos causas:

a) Carencia de las fuentes originales,

b) Insuficiente preparación profesional en el estudio de la historia de la ciencia y en particular de una historia de la matemática.

Sobre el primer punto hay que decir, que muchos son los factores que han contribuido a la casi total desaparición de las fuentes originales en nuestro país, mermando el acervo, no sólo de las ciencias sino, en todas las ramas culturales de la nación. Estos aspectos no los discutiremos aquí ya que es una problemática archiconocida.

Actualmente para hacer una historia crítica en México, se tiene que acudir a instituciones del extranjero, donde ahora radica parte de este acervo cultural. Este es, el caso del primer libro de la matemática, que fue impreso en nuestro país, en el año de 1556 por Juan Pablos Bressano, cuyo título es: "Sumario cõmpẽndíofo delas quẽntas *de plata y oro q̃ en los reynòs del Píru fon neceffarías a los mercàderes:y todo genero de tratantes. Cõ algunas reglas tocantes a la Arìthmetíca". "Fecho por Juan Díez freyle".*

Por otro lado, conceptualizar una historia de la matemática, sin ser profesional en esta disciplina, conduce por lo general a múltiples y equivocadas interpretaciones; es así, que para realizar una historia crítica de la ciencia y en especial de la matemática, se debe hacer dentro de una paráfrasis juiciosa, teniendo siempre presente, el horizonte histórico de las obras. Por tanto, para llevar a cabo esto, hay que tomar en cuenta, por lo menos, dos parámetros: tener formación profesional en la matemática y de igual manera en la historia de la misma.

Quiero expresar mi gratitud a todos aquellos que por su estímulo y ayuda hicieron posible la culminación de este trabajo. En especial a mis amigos: Mat. David Hernández Perez, al M. en C. Jaime Feliciano Hernández e Irma Rodríguez Arteaga, así como a Isaac Miranda Z., Alfonso Estrada G., Victor M. Perez C., Felipe Chavez C. y Daniel Escalante G.†compañeros de espeluznantes aventuras.

Advertencia

Sabemos de las discrepancias sobre la utilización del lenguaje algébrico, que sustituye a la demostración geométrica; estamos concientes que hay una pérdida en la sensibilidad de contemplar geométricamente todos los problemas que se presentan en este trabajo, pero el lenguaje geométrico desbordaría el número de páginas de esta tesis.

Aunque también hay que decir que el estudio acucioso de los problemas en lenguaje algébrico y su transformación al geométrico no es nada complicado, ejemplo de esto son las proposiciones 4, 5 y 6 del libro II de los *Elementos de Euclides* y los problemas G.1 y G.2, que se encuentran dentro de estas mismas páginas.

Indice

1 **Introducción** 1

2 **Ficha Bibliográfica del Libro** 5
Contenido del Libro 7

3 **El Arte Mayor** 11
tesis 25
Al lector 26

4 **Matemática Babilonica y Egipcia** 27
Primer Período 28
Segundo Período 41
Egipcios 43
Conclusión 45

5 **Etapa Alejandrina** 47
Euclides 47
Conclusión 63
Héron 64
Conclusión 68
Excursus I 69
Números Figurados 69
Gnomo 70
Tripletas Pitagóricas 72
Aplicación de Areas 77

6 **Etapa Diofantina** 79
Diofanto 79
Conclusión 96

7 Matemática Arabe (I) **97**
Al-Khuwārizmī 97
Conclusión 108

8 Matemática Arabe (II) **109**
Abū-Kāmil 109
Al-Karajī 114
Al-Kayyāmī 117
Ha-Nasi 123
Conclusión 125
Epítome 126
Excursus II 127
Bibliografía 129
Colofón 133

Capítulo 1

Introducción

Antes de dar a conocer todo lo referente a *"El Sumario Compendioso..."*, recordaremos brevemente la situación política y social por la que atravesó la Nueva España en el siglo XVI, así como el papel que jugó la imprenta en el Nuevo Continente.

En 1519, Hernán Cortés entra a la Ciudad de Tenochtitlan; consumándose dos años después la conquista, siendo ésta acompañada de la destrucción de las culturas que allí existían. El gobierno monárquico español nombra, a Antonio de Mendoza como el primer virrey de la Nueva España, asume su cargo en el año de 1535 y por más de una década se hace cargo de los asuntos de la colonia, siendo hábilmente asesorado por el primer obispo de México (y principal destructor de la cultura precolombina), Juan de Zumarraga. De este par de autoridades, surge posiblemente la idea de traer una imprenta al nuevo mundo [1].

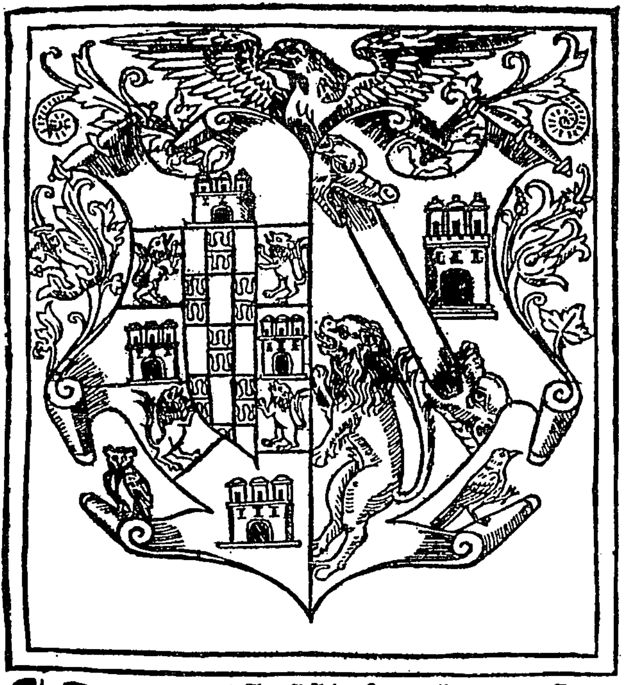
La historia de la imprenta en la Nueva España, es muy confusa, pero lo que de cierto se conoce es: en el año de 1539, Juan Cronberger hombre de negocios e impresor alemán, radicado en Sevilla, firma un contrato con Juan Pablos Bressano, natural de la ciudad de Brescia, Italia, por el cual se compromete a venir a la Cd. de México con una impresora y con la firma de la "Casa de Juan Cronberger "[1][4][5].

Por otro lado en una bibliografía Mexicana del siglo XVI [2] se encuentra una lista de todos los posibles libros impresos en este siglo, el primero de los cuales se señala con el título; *"Escala Espiritual para llegar al cielo de San Juan Clímaco"*(véase también [3]) editado en 1537, de dicho ejemplar no se ha encontrado referencia alguna; el siguiente es: *"Breve y más compendiosa doctrina christiana en lengua mexicana y castellana, que contiene las cosas más necesarias de nuestra sancta fe catholica, para aprovechamiento destos indios naturales y salvación de sus ánimas "*, (del cual si hay referencias), imprimiéndose en el año de 1539, considerándolo como el primer libro impreso en México. En base a lo anterior podemos decir que la fecha en que llegó la imprenta a la Cd. de México y con esto a toda América fue a finales de 1539 o principios de 1540, siendo su primer impresor Juan Pablos Bressano, (la fecha se toma, en base al libro del que se tiene referencia).

Los escasos datos bibliográficos [2] indican que en el año de 1556, cinco fueron los libros publicados, entre estos se encuentra el *"Sumario Compendioso..."*. En lo que resta del siglo no se volvió a imprimir libros relativos a la matemática a excepción de un manual naval, titulado: *"Instrucción Nautica"* realizado por *Diego García de Palacio* [1][2] el cual fue publicado en el año de 1587.

La imprenta desde sus inicios, estuvo subsidiada por la iniciativa privada, como ya se vio, y fue introducida en la Nueva España como un instrumento evangelizador razón por la cual, la mayoría de los libros tratan sobre asuntos religiosos [6]. Aunado a lo anterior, Juan Pablos, hace referencia, que la imprenta era un *"mal negocio"* [1], ¿por qué?. Revisando los hechos se puede atribuir esto a tres factores: primero, un gran porcentaje de los españoles que llegaron a México no sabían leer; segundo, era más barato copiar que imprimir; tercero el papel escaseaba por acá [6]. Entonces, ¿por qué, un libro referente a la matemática?. De acuerdo al contenido de este libro se puede suponer que era necesaria una guía que tuviera tablas en las cuales se podía consultar sin mucho esfuerzo, el cambio de una moneda a otra, el impuesto a pagar por algún trabajo, etc., cabe hacer notar, que es una época donde el circulante es oro y plata (por su cantidad),[1] así como el comercio en general, está en su mejor momento. Pero lo que es más remarcable en este libro no queda hasta aquí, ya que, como veremos en la última parte del texto se encuentran problemas referentes a la aritmética y al álgebra planteados a partir de problemas reales.

[1] En el año de 1543 se descubre la primera mina de plata en Santa Fé del Nuevo Reino de Granada hoy Zacatecas, también hay que recordar que se está hablando del oro de los tesoros saqueados por los conquistadores [7][8].



¶ Sumario cōpēdioso delas quētas

de plata y oro q̄ en los reynos del Piru son necessarias a los mercaderes: y todo genero de tratantes. Cō algunas reglas tocantes al Arithmetica.

Fecho por Juan Diez freyle.

Reglas ordinarias.

Ya que bastantemente tengo puesto por donde sin hazer quenta se pueda saber el valor de qualquier varra o tejo de plata o oro por diferente ley y peso que tenga y el valor delos ynteresses que se acostumbran a dar por qualquier plata o oro hasta treynta por ciento. y assi mismo el valor de qualesquier pesos de plata corriente comprados de ensayado razonando el ynteres de ocho a veynte por ciento juntamente con todo lo mas necesario dela nueua España cō las reduciones de pesos ducados y coronas, de aqui adelante pondre algunas reglas delas necesarias en los reynos del Peru juntamente con algunas quistiones para curiosos entre las quales van algunas del arte mayor reseruadas al algebra: las quales con lo demas sino fuere tal como conuiene recebid la voluntad y sea caritatiuamente emendado dela falta que tuuiere.

Capítulo 2

Ficha Bibliográfica del Libro

Título

Sumario cõpendiofo delas quẽtas||*de plata y oro q̃ en los reynòs del* **Píru** *fon neceſſarías a||los mercáderes:y todo genero de tratantes. Cõ algunas||reglas tocantes a la Arítħmetíca.||Fecħo por Juan Díez freyle||.*

El libro aparece citado en una lista de publicaciones del siglo XVI con el número 25, [1] [2]; constando de CIII hojas numeradas excluyendo la portada. El tamaño es dado en cuartos de folio, con las tablas en letra romana. El colofón aparece en el revés de la última hoja y el título en la portada al pie de un escudo de armas (véase página 3).

Signaturas

$a - n$, de ocho hojas cada una excepto n que tiene sólo siete.

Errores

De foliación: VI por VII y falta LXXXI. De signatura: ninguno.

Ejemplares[1]

Biblioteca Huntington

Biblioteca Nacional de Madrid

Biblioteca del Museo Británico

Reclamos

No tiene.

Vuelta a la portada, dedicatoria al virrey D. Luis de Velasco que dice: *Al Illustrissimo Señor Don Luys de Velasco Visorrey y gouernador dla nueva* España. *Juan diez freyle:que perpetua felicidad le dessea.* apareciendo

[1] Tienen además copia (del ejemplar que se encuentra en España), la Universidad de Michigan y la colección particular de D. E. Smith [9].

también ahí el *Privilegio*[2] (permiso de impresión), por ocho años, fechado el 15 de abril de 1556, terminando a la mitad del frente de la otra foja. Sigue inmediatamente el prólogo al lector. En la vuelta de esta segunda foja se encuentra el principio de la obra: "*En el nombre de Dios y de su sacratísima Madre, Señora nuestra. Amén*".

Posteriormente, se presenta una advertencia: *Ya que baftantemente tengo puefto por donde fin hazer quenta fe pueda faber el valor de qualquíer varra o tejo de plata o oro por diferente ley y pefo que tenga y el valor delos ynterefes que fe a coftumbran a dar por qualquíer plata o oro hafta treynta por cíento.y affimifmo el valor de qualefquír pefos de plata corríente comprados de enfayado*[3] *razonando el ynteres de ocho a veyte por cíento juntamente con todo lo necefario dela nueva Efpaña cõ las reducíones de pefos*[4] *ducados y coronas,de aquí adelante pondre algunas reglas delas necefarías en los reynos del Peru juntamente con algunas quíftíones para curíofos entre las quales van algunas del arte mayor refervadas al algebra:las cuales conlo demas fino fuere tal como convíene recebídla voluntad y fea carítatívamente emendado de lafalta que tuvíere.* A continuación los problemas referentes a las *Reglas Ordinarias*.

Sigue la introducción a los problemas de aritmética, que el autor llama "*quistiones*", entre las cuales van algunas del "*arte mayor*"[5], reservadas al álgebra y que ocupan de la foja xcj a la ciij fte., tras ésta, el colofón:

"*Fin de la obra.||A honrra y gloria de nuestro señor Jesu||Christo y de la bendita y gloriosa virgen santa Maria su madre||y señora nuestra. Aqui se acaba el presente tratado Jntitulado Su||mario compendioso de cuentas de plata y oro necessarias en||los reynos del Piru. El cual fue impresso en la muy||grande ynsigne y muy leal ciudad de Mexico en||casa de Juan Pablos Bressano: con licencia del||muy Jllustrissimo señor Don Luys de Ve||lasco, Visorrey y gouernador desta Nueua ||españa. E assi mismo con licencia del muy||Jllustre y reuerendissimo. S. don. fray||Alonso de Montufar arcobispo de||mexico: por quanto fue visto y exa||minado, y se hallo ser prouecho||so imprimirse. Acabose de||imprimir: a veynte y nue||ue dias*

[2]Este se encuentra en el cuarto tomo de *Mercedes* del Archivo General, fol. 329, y está reproducido en Investigaciones Bibliográficas, apéndice 1, pp.135-136 [2].

[3]Después de que el minero producía plata pura en su hacienda mediante la destilación del mercurio contenido en la amalgama, la llevaba a la casa de afinación u oficina de ensaye, donde se analizaba su grado de pureza y se fundía en barras o lingotes de unos 130 marcos cada uno.

[4]Unidad más común en la contabilidad Real Hacienda de la nueva España, que equivalía a ocho reales cada uno con un valor de 34 maravedís. El peso valía entonces, 272 maravedís.

[5]Este término es usado en el siglo XVI aproximadamente 11 años antes de que apareciera El Sumario..., [14] (ver Cardano) y proviene del latín *ars magna*, (álgebra) asignando entonces, el calificativo de *ars minor* a lo que ahora conocemos como la aritmética.

del mes de||Mayo. Año del na||cimiento de nuestro|| Señor Jesu||Christo||de .1556||años.||"[6]

Termina el libro con la foja ciiij, que contiene la tabla: La vuelta es blanca.

Respecto al autor, Juan Díez, no se ha encontrado dato biográfico; sin embargo, existen dos teorías que hablan sobre su persona:

La primera se refiere a relacionarlo como un comerciante radicado primero en Perú, trasladándose posteriormente a México, donde imprime su libro. Esta teoría no es aceptada debido a que el autor presenta conocimientos tales, que es difícil asociarlo a un mercader. Además está la palabra "freyle" que indica una connotación religiosa, aunque hay quien opina que es apellido.

La segunda teoría sugerida por Smith [15] señala que vino a México con Hernán Cortés como capellán por la similitud en el apellido "Díez". A partir de este dato se hizo un análisis de la información que se encuentra en *Historia Verdadera de la Conquista de la Nueva España*,[7] por Bernal Díaz del Castillo [16], y por el grabado que se localiza al principio de las *Reglas Ordinarias* el cual representa el desembarco y posesión de territorio (véase pág. 4) se llega a la conclusión, que además de la similitud con el apellido, las fechas y el grabado nos llevan a afirmar que el presbítero Juan Díez es el autor del *Sumario Compendioso....* Icazbalceta [2] argumenta que este capellán fallece 25 años antes de la impresión del libro. Esto último es falso, ya que seguramente Icazbalceta está confundido con un Juan Díez que "muere en poder de los indios"[8]. Además se tiene otra referencia que se localiza después de la dedicatoria y en la que el mismo autor dice: ***Por quãnto Juã diez fryle estãte presente enesta ciudad de Mexico me a ħeħo relaciõ q̃l cõ ci ã cu y dado trabajo y industria a cõpuesto un libro de quẽtas de plata y oro cõ algunas reglas t'uera del ordinario: tocãntes al arismetica: el q̃l es de muħa utilidad y pueħo pa en los reynos del Piru a causa d'las muħas variedades q̃ enel ay en las leyes de plata y oro y otras cosas q̃ alla le usã lasq̃les todas estan enel dicħo libro muy copiosamẽte puestas.***[15]. Esto último nos indica que el autor está presente al momento de la impresión de su trabajo.

Contenido del Libro

"*El Sumario Compendioso...*" se encuentra formado por tres partes. La primera se ocupa del uso de algoritmos; que el autor denomina *Reglas Ordinarias* utilizadas para resolver problemas cotidianos como eran: el cambio

[6]En el colofón podemos notar el proceso para obtener la *licencia* de impresión de un libro, ésta consistía en pasar por revisión del virrey, para luego pasar por el clero [17].

[7]Véase pp. 68, 86, 577, 589 y 590.

[8]Véase p. 590 de la relación de Bernal Díaz del Castillo.

de moneda, el impuesto a pagar por algún trabajo, etc. [12]. Dicha parte presenta las siguientes secciones:

-"*Como hacer plata corriente en ensayada*".

Esto es, que tanto por ciento había que pagar por pasar la plata en "bruto" a "trabajada"; dependiendo esto, de la cantidad de plata. La regla que da Juan Díez se puede fácilmente identificar como la actual "regla de tres"; la cual se usa implícitamente para resolver los problemas de las secciones posteriores.

-"*Hacer de pesos ducados y de ducados pesos*"

-"*Reducir pesos a maravedís*[9] *sin multiplicar*".

Aquí se nota el uso del "tomín"[10] como paso intermedio para realizar la conversión. Dentro de esta misma sección se encuentra lo siguiente: "*Tantos pesos cuantas coronas son sin hacerlo por maravedis*", dicho cambio de monedas se explica sólo usando ejemplos, sin dar una regla general como en los anteriores apartados.

-"*Guiso de memoria*"

Esta es una regla que se refiere a la cantidad de pesos que se deben de dar por un maravedí; se sugiere aprender de memoria, por el uso tan cotidiano.

-"*Guiso para saber lo que se debe de quinto*[11] *de culquier plata corriente u oro que se fuera a quintar.*"

-"*Regla para cobrar de su majestad por el quinto*"

La segunda parte[12] (fol. xcvij) del libro trata problemas relativos a la aritmética (arte menor) denominados *quistiones*. Comienza dando la definición de número cuadrado y cúbico[13], siguiendo con algunos problemas: como obtener un número cuadrado a partir de un número dado,[14] generalizando esto hasta la cuarta *quistion* donde encontramos una tabla que nos

[9] Palabra que surge de la dinastía Moorish para dar nombre a la primera moneda acuñada durante su mandato. En estas tablas 56 maravedís equivalen a un tomín.

[10] Octava parte de un peso y sinónimo de *un real*, es también un tercio de *Dracma*. El nombre viene del árabe que quiere decir *una octava parte*.

[11] El *quinto* era el impuesto que correspondía a una quinta parte sobre lo recaudado de plata producida por los mineros no reconocidos por la Real Hacienda. El *diezmo* era el impuesto de una décima parte sobre la plata producida por los mineros reconocidos como tales por la Real Hacienda. Además de la cobranza de estos impuestos según era el caso se cobrabá el uno por ciento que se destinaba para pagar salarios de los empleados y otros gastos de administración de la Real Caja, lugar de recaudación de impuestos sucursal de la Real Hacienda.

[12] En esta parte nos podemos dar cuenta de la influencia que tenía Juan Díez de la matemática griega y árabe, ya que, habla de temas que fácilmente se pueden identificar como; las tripletas pitagóricas, el mismo teorema de Pitágoras, aplicación de áreas y el concepto de *gnomo* el cual es importantísimo para poder resolver, por métodos geométricos, una ecuación de segundo grado (véase excursus I).

[13] A partir de estas definiciones se encuentra un esquema Euclideo, es decir, define conceptos que usará más adelante.

[14] Aquí Juan Díez está hablando del concepto de *gnomo* (véase excursus I).

señala los números *congruentes* y su respectivo número cuadrado *congruo* y una regla para obtenerlos. Dicha regla consiste en *ajustar*,[15] quitando o agregando algunas unidades a un número dado para poder obtener un número cuadrado. Cuando esto sucede se señala al número dado como *congruente* y su cuadrado más próximo *congruo*.

A finales de esta parte, se da una regla para encontrar dos números cuadrados que al sumarlos se produce otro número cuadrado.[16]

En la tercera y última parte encontramos diez problemas (*quistiones*) que se refieren al *arte mayor* (álgebra); que traducidos en notación actual serían los siguientes:

$$x^2 - 15\tfrac{3}{4} = x \tag{i}$$

$$x^2 + x = 1260 \tag{ii}$$

$$4x^2 = 9000 \tag{iii}$$

$$\frac{x^2}{5} = 80 \tag{iv}$$

$$\tfrac{1}{4}x(3x) = 48 \tag{v}$$

$$x^2 + 25x^2 = 1664 \tag{vi}$$

$$x(4x)(16x) = 1728 \tag{vii}$$

$$x(1\tfrac{1}{2}x)(\tfrac{1}{2}x) = 162 \tag{viii}$$

$$64x^9 = 32768 \tag{ix}$$

$$\frac{x^3}{64} = 125 \tag{x}$$

Todos los problemas tienen una solución muy ingeniosa, pero los dos primeros, nos llamaron la atención, ya que la solución que plantea Juan Díez (que si bien está dada en una forma retórica), nos llevan a una construcción geométrica, alternativa a las encontradas en los Babilonios, Egipcios, Griegos y Arabes. Confirmaremos lo anterior, haciendo un breve esbozo histórico de los métodos de solución de ecuaciones de segundo grado, después de analizar los resultados dados por Juan Díez.

[15] Es decir, aplicación de áreas.
[16] Teorema de Pitágoras, usando lo que se denomina "Las tripletas pitagóricas".

Notables. Quistiones.

¶ Quistiones del arte mayor tocantes al algebra.

¶ Primera quistion.

¶ Da me vn numero quadrado que restando del, 15, y $\frac{1}{4}$ quede su propria rayz.

¶ Regla.

¶ Digo que el numero sea vna cosa demediala es media cosa multiplica la en si haze $\frac{1}{4}$ de zenso ajustale a, 15, y $\frac{1}{4}$ haze, 16, cuya rayz quadrada y mas el medio dela cosa es rayz del numero demãdado Prueua quadra rayz quadrada de. 16. y mas el medio dla cosa q̃ es: q̃tro y medio haze. 20, y $\frac{1}{4}$ que es el numero quadrado demandado resta del, 15, y $\frac{1}{4}$ quedan, 4, y $\frac{1}{2}$ que es la rayz del proprio.

¶ Segunda quistion.

¶ Es vno que se fleta en vn nauio y pregunta al maestre que es lo que ha de dar de flete el maestre dize que no le ha de lleuar mas q̃ alos otros boluiendo el passajero a replicar quanto seria el maestre responde que han de ser tantos pesos que multiplicados por si y ayuntando los alo produto el remanente sera, 1260. demando quanto demanda el maestre.

¶ Regla.

¶ Digo que el flete sea vna cosa de p̃s. la mitad es media cosa quadra la en si haze $\frac{1}{4}$ de zenso ayunta lo a. 1260. hazẽ, 1260, y vn q̃rto rayz delos quales menos medio dela cosa es el numero demãdado del flete: reduce, 1260, y $\frac{1}{4}$ a quartos son $\frac{5041}{4}$ la rayz es. 71, medios resta el medio dela cosa que es medio quedan, 70, medios que son, 35, p̃s y tanto es lo q̃ demãda del flete: Prueua multiplica. 35. en si hazẽ, 1225, ayunta los cõ, 35, son, 1260, q̃ es numero dmãdado

¶ Tercero quistion.

¶ Vno vende cabras no se las que son mas de que llego vn merchã te y le pregunta quantas abra el vendedor responde son tantas que si las multiplcayes en si y lo produto quadruplayes el vltimo produzido sera, 90000, demando quantas cabras tenia.

Capítulo 3

El Arte Mayor

No creo que uno pueda siempre descartar el retorno a ideas antiguas con sólo decir "ese es un salto hacia atrás".

Carlos Graef Fernandez

Notables. Quíſtíones.[1]

¶Q*uíſtíones del arte mayor tocantes al algebra.*

¶P*rímera quíſtíon.*

¶D*a me un numero quadrado que reſtado del,* 15, *y* $\frac{3}{4}$ *quede ſu propía rayz.*

¶R*egla.*

¶D*ígo que el numero ſea un coſa*[2] *demediala es media coſa multiplicala en ſi ƕaze* $\frac{1}{4}$ *de zenſo*[3] *ajustale*[4] *a* 15 *y* $\frac{3}{4}$ *haze* 16, *cuya rayz quadrada y mas el medio dela coſa es rayz del numero demadado.* P*rueba: quadra rayz quadrada de, 16, y mas el medío d'la coſa q̃ es: q̃tro y medio ƕaze* 20 *y* $\frac{1}{4}$ *que es el numero quadrado demandado reſta del,* 15, *y* $\frac{3}{4}$ *quedan,* 4, *y* $\frac{1}{2}$ *que es la rayz del propio.*

[1] vuelta fol. c

[2] *Cosa* que la identificamos por: x

[3] *Zenso* probiene del Latín *census*, que en notación matemática actual es: x^2

[4] Completa el cuadrado

Este problema se traduce como la ecuación: $x^2 - 15\frac{3}{4} = x$[5] y la solución algebraica como geométrica es la siguiente:
Sea x la *cosa*

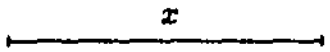


Figura 1.

Cuando habla Juan Díez de *demediar la cosa en sí*, quiere decir tomar la mitad del coeficiente de x, y como éste es 1 entonces tenemos $\frac{1}{2}$

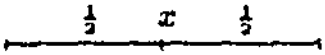


Figura 2.

Al cuadrarlo tenemos $\frac{1}{4}$ (definición de número cuadrado fol. *xcvij*).

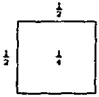


Figura 3.

Ajustarle (es decir, sumarle) $15\frac{3}{4}$, así tenemos: $15\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$. Este paso se puede fácilmente identificar como el de completar el cuadrado.

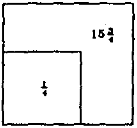


Figura 4.

Extraemos raíz cuadrada y sumamos la "otra" mitad de la *cosa*, esto nos produce: $4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$, que es el número buscado.

[5] La raíz negativa ($x = -3\frac{1}{2}$) se ignora

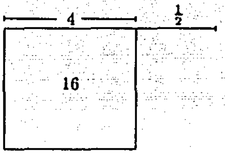


Figura 5.

La prueba es como sigue: primero cuadramos 16, es decir, construimos un cuadrado de área 16 pero, esto es muy importante, este cuadrado consta de 16 cuadritos (Fig. 6). Ahora si le agregamos el *medio de la cosa* como nos lo indican, en verdad estamos agregando un *gnomo* para no afectar el cuadrado, este *gnomo* consta de 4 cuartos y medio. Tenemos así un cuadrado de área $20\frac{1}{4}$, si le restamos $15\frac{3}{4}$ nos queda sólo un cuadrado de área $4\frac{1}{2}$, que en la figura se observa como el *gnomo* más $\frac{1}{4}$.

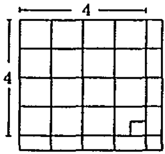


Figura 6.

Como podemos darnos cuenta la prueba es sólo un juego de áreas partidas en "cuadritos".

Este problema lo podemos resolver por técnicas geométricas realizadas por al-khuwārizmī y abū-Kāmil. observemos que la ecuación a resolver es de la forma $x^2 = px + q$ para cuando $x > \frac{p}{2}$ con $p = 1$ y $q = 15\frac{3}{4}$ (véase pag. 113). La solución geométrica se expresa como en la figura 39.

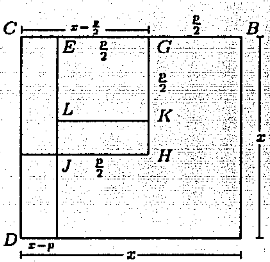


Figura 39.

Algebraicamente se tiene:

$$\overline{BC}\cdot\overline{EC}+\overline{GE}^2=\overline{CG}^2$$

$$x(x-p)+(\tfrac{1}{2}p)^2=(x-\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$x(x-p)=q \qquad (q=x^2-px)$$

sustituyendo tenemos $15\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=16=(x-\frac{1}{2}p)^2$ este resultado es el área del cuadrado CH cuyo lado valdría 4, pero falta agregar $\frac{p}{2}$ que es $\frac{1}{2}$ así encontramos que $x=4\frac{1}{2}$, que es la solución al problema.

¶*Segunda quiſtíon.*

¶E*s uno que ſe ſleta en un navio y pregunta al maeſtre, lo que ha de dar de flete el maeſtre díze que no le ha de llevar mas q̃ a los otros, bolviendo el paſſajero a replícar quanto ſería, el maeſtre reſponde que han de ſer tantos peſos que multíplícandolos por ſi y ayuntando los*[6] *a lo produto el remanente ſera,* 1260. *demando quanto demanda el maeſtre.*

¶R*egla.*

¶D*ígo que el flete ſea una coſa de pˢ. la mítad es medía coſa quadrala en en ſi hace* $\frac{1}{4}$ *de zenso ayuntalo a* 1260 *hazẽ* 1260 *y un q̃rto rayz de los quales menos el medío dela coſa es el numero demãdado del flete: reduce,* 1260, *y* $\frac{1}{4}$ *a quartos ſon* $\frac{5041}{4}$ *la rayz es.* 71, *medíos reſta el medío dela*

[6] sumarlos, que en este caso será "completar el cuadrado"

cofa que es un medío quedan, 70, medíos que fon, 35, ps y tanto es lo q̄ demãnda del flete: **Prueba** *multíplíca. 35. en fi hazẽ, 1225, ayuntalos cõ, 35, fon, 1260, q̄ es numero d'mãndado*

Este problema nos habla de la ecuación: $x^2 + x = 1260$, la cual se resuelve similarmente al problema anterior en sus tres primeros pasos, continuaremos entonces desde el cuarto, es decir:
Ajustamos $\frac{1}{4}$ a 1260, entonces se tiene: $1260 + \frac{1}{4} = 1260\frac{1}{4}$

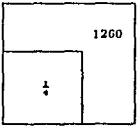


Figura 7.

que al trasladarlo en cuartos se produce: $\frac{5041}{4}$; raíz del cual es: $\frac{71}{2}$

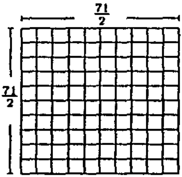


Figura 8.

Ahora se nos dice que restemos la mitad de la *cosa*, el coeficiente de ésta es 1 se resta entonces $\frac{1}{2}$ así: $35\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 35$ que es valor buscado. Sólo hay que aclarar que al restarle $\frac{1}{2}$ se está restando un *gnomo* que consta de dos rectángulos de $\frac{70}{2} \cdot \frac{1}{2}$ y el $\frac{1}{4}$que se encuentra en la esquina inferior derecha (Fig. 9) así, lo que esta pasando es:

$$\frac{5041}{4} - \frac{141}{4} = \frac{4900}{4} = 1225$$

el cual es el área del cuadrado resultante, que al sacarle raíz nos da 35.

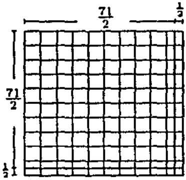


Figura 9.

La prueba sólo se restringe a sustituir la cantidad encontrada en la ecuación producida. Pero veamos como se resuelve esta ecuación con los resultados obtenidos por Euclides.

Como la ecuación $x^2 + x = 1260$ es de la forma $x^2 + px = q$ usaremos entonces la proposición 4 del libro II de los *Elementos* (véase pág. 49) donde $p = 1$ y $q = 1260$. La figura que se obtiene es la siguiente:

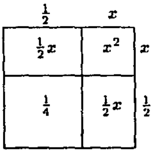


Figura 10.

el *gnomo* como veremos adelante es q que es igual a 1260 más el cuadrado de área $\frac{1}{4}$ nos produce un cuadrado de área $1260\frac{1}{4}$. Este cuadrado tiene por lado $35\frac{1}{2}$, pero sabemos que una parte mide $\frac{1}{2}$ entonces se tiene una ecuación del siguiente tipo:

$$x + \tfrac{1}{2} = 35\tfrac{1}{2}$$

de aquí se obtiene que $x = 35$ que es la solución al problema.

Esta ecuación también se puede resolver geométricamente por medio de la proposición 6 del libro II de los *Elementos* (pág. 55) ya que es el caso $x^2 = px + q$ que se puede llevar a $x^2 + px = q$ o viceversa.

¶*Tercero quíftíon.*

¶*Uno vende cabras no fe las que fon mas de que llego un merchãnte y le pregunta quantas abra el vendedor refponde fon tantas que fi las multíplcays en fi y lo produto quadruplays el ultímo produzído fera, 90000, demando quantas cabras tenía.*

¶*Regla.*

¶*Dígo que tenga una cofa de cabras multíplíca en fi haze un zenfo multíplíca el zenfo por, 4, que es quadruplo haze, 4, zenfos iguales a. 90000. cabzas q̃ es numero parte numero por cenfo el aduenímíento es, 22250*[7]*. rayz delos quales fon las cabras q̃ tenia. Prueba toma, 150, rayz de. 22250. multíplíca en fi hazen, 22250, multíplícalos por, 4, que es el quadruplallo fon 90000.*

Este problema lo podemos escribir en notación matemática moderna como la ecuación $4x^2 = 90000$. La solución que da Díez a este problema es sencillo y versa sólo en despejar x^2 (*censo*) para luego extraer la raíz de ambos lados es decir:

$$4x^2 = 90000 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{90000}{4} = 22500$$

así:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{22500} \quad \Rightarrow \quad x = 150$$

La prueba o comprobación se restringe sólo a sustituir el valor encontrado y comprobar la igualdad.

¶*Quarta quíftíon.*

¶*Uno va por un camíno pregunta a otro que leguas avía hafta una cierta parte el otro le refponde ay tantas leguas que fi las multíplícays en fi y lo produto partís por, 5, el aduenimiento fera. 80. demandado que leguas abra enlo que díze.*

¶*Regla.*

¶*Dígo que aya una cofa de legua quadrala en fi haze un cẽfo*[8] *partele por, 5, el aduenímíento es $\frac{1}{5}$ de cenfo yguala. 80. leguas parte numero por cenfo que es. 80. por $\frac{1}{5}$ el aduenímíento es. 400. cuya rayz fon las leguas que ay: pues multíplíca rayz de. 400. en fi q̃ es. 20, y lo produzído parte por. 5. el aduenímíento fera. 80. numero demandado.*

[7] Error de impresión el número correcto es 22500
[8] Abreviación de la palabra *censo*

La ecuación que se desprende de este problema es: $\frac{1}{5}x^2 = 80$. Aquí hay que notar que el "despeje" que usa Díez para resolverse el problema es "inverso" del problema anterior, así podemos transcribir esto como sigue:

$$\tfrac{1}{5}x^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 400$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{400} \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

La prueba, al igual que en los últimos dos problemas, se restringe a sustituir el valor encontrado en la ecuación.

¶Q*uínta quíſtíon.*

¶U*no compra ropa dela tíerra en trípla proporcion de tal fuerte q̃ multiplicando el tríple por el quarto del ſu tríple que ſon las píeças de ropa que compro lo producto ſera,* 48. *peſos demando que píeças de ropa compro.*

¶R*egla.*

¶D*ígo que compro una coſa de píeças de ropa por tres coſas de p̃s que es una trípla proporcion de ropa multíplíca un quarto de coſa de píeças de ropa por,* 3. *coſas de peſos es* $\frac{1}{4}$ *de cenſo yguales a* 48. *peſos que es numero parte numero por cẽſo que es.* 48. *por* $\frac{3}{4}$ *el aduenímíento es.* 64. *rayz de los quales ſon las píeças de ropa q̃ compro coſtaronle el tríple que es rayz de,* 676[9], P*rueba multíplíca rayz de,* 676, *que es,* 24, *por.* 2. *que esel* $\frac{1}{4}$ *del ſu tríple de rrayz de,* 64, *el aduenímínto es,* 48, *numero demandado.*

En este problema no se produce una ecuación tan directa como en los casos anteriores, es decir, Juan Díez nos indica hacer una operación antes, ésta es:

$$3x \cdot \tfrac{1}{4}x \tag{1}$$

hay que hacer notar también que se está operando indiferentemente de las cosas que sean, ya que aquí se multiplican prendas con pesos, además se nota el conocimiemto de poder agrupar términos semejantes (esto también lo notamos en la *quistion* anterior).

La solución viene planteada de esta forma: Después de haber realizado la operación (1) e igualando a 48 se "despeja" como sigue:

$$\tfrac{3}{4}x^2 = 48 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{48}{\frac{3}{4}} = 64$$

que al extraer raíz cuadrada de ambos lados obtenemos que $x = 8$. El resultado que obtiene de haber "despejado" x^2 lo podemos interpretar de

[9]Error de impresión el número correcto es 576

dos formas; la primera, es que usa los dos tipos de "despejes" vistos en los problemas anteriores o la segunda, conoce el cociente de fracciones[10].

La comprobación la hace por medio de la susutitución del valor encontrado en la ecuación (1) igualada a 48.

¶*Sexta quíſtíon.*

¶*Uno tíene yeguas y vacas en quíncupla proporcion de tal ſurte que ſi multiplícas las yeguas en ſi y las vacas en ſi y lo producto ſumas ſeran,* 1694[11]*, demãdo q̃ntas ſõ las yeguas y quantas las vacas.*

¶*Regla.*

¶*Dígo que tenga una coſa de yeguas y, 5, coſas de vacas multíplíca una coſa en ſi ḅaze un cenſo mul. 5. coſas en ſi ḅazen, 25, cẽſos ayuntalo ſon. 26. cenſos yguales a, 1664, yeguas y vacas numero demandado parte numero por cenſo que es. 1664, por, 26, el aduenímíento es, 64, cuya rayz ſon las yeguas y el quíncuplo las vacas q̃s rayz de.* 1600, *Prueba: toma, rayz de, 64, es, 8, quíncupla los ḅazen, 40, que es rayz de, 1600, ſuma el quadrado de, 8, q̃ ſon las yeguas con el quadrado de 40, que ſon las vacas ḅazẽ, 1664, q̃ ſue lo demandado.*

La ecuación que se deduce es:

$$x^2 + 25x^2 = 1664 \tag{2}$$

esto implica que: $26x^2 = 1664$. Como se puede notar tuvimos que hacer una operación antes de llegar a esta última ecuación, que a diferencia de el problema anterior aquí se hace una suma y la incógnita es de mayor grado (*censo*).

La solución la podemos plantear de la siguiente forma:

$$26x^2 = 1664 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{1664}{26} = 64$$

lo cual al extraer raíz encontramos que $x = 8$. El "despeje" ya es familiar y lo podemos localizar el la tercera *quistion*.

La prueba a este problema, lo hace sustituyendo el valor encontrado en la ecuación (2).

[10] $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, esta regla se le conoce en la época medieval como el método de la cocina usada mucho en Europa

[11] Error de impresión el número correcto es 1664, como se ve más adelante, en la *Regla*.

¶*Setíma quíftíon.*

¶*Uno tíene tres joyas ẽ q̃drupla proporciõ de valor de tal manera que multíplícando lo que vale la prímera por el valor dela fegunda y lo produzído por el valor dela tercera el ultímo producto fera,* 1728, *demando que esel valor de cada joya.*

¶*Regla.*

¶*Dígo que la prímera valga una fosa y la fegũda,* 4, *cofas y la tercera,* 16, *que como veys eftan en quadrupla proporcíon mul una cofa por,* 4, *cofas es,* 4, *cenfos multíplícalos por,* 16 *cofas dela tercera ȝazes,* 64, *cubos yguales a,* 1728, *que es numero parte numero por cubo el aduenímíento es,* 27, *cuya rayz cuba que es,* 3, *es el valor dela prímera y la fegunda vale rayz cuba de,* 1728. *que es,* 12, *y la tercera vale,* 48, *que es rayz cuba de,* 2304[12], Prueba: *mul. el valor d' la prímera que es,* 3, *por el dela fegunda que es doze y el aduenímíẽto por la tercera, que es,* 48, *lo producto delas multíplícacíones fera,* 1728.

La ecuación que se produce es la siguiente:

$$x \cdot 4x \cdot 16x = 1728 \tag{3}$$

la cual al hacer la opreación correspondiente nos queda:

$$64x^3 = 1728 \quad \Rightarrow \quad x^3 = \tfrac{1728}{64} = 27$$

raíz cúbica de lo cual nos da $x = 3$. Aquí hay que hacer mención del conocimiento de la teoría de las operaciones con exponentes, ya que al multiplicar tres veces la *cosa* (x) se obtiene un cubo (x^3 definición en el fol. *xcij*).

La prueba se hace sustituyendo el valor obtenido en la igualdad (3), pero Díez lo enuncia de una forma muy interesante, ya que, deduce la raíz cúbica de donde proviene cada número, es decir, para el primer elemento de la igualdad (3) se obtiene de extraer raíz cúbica de 27, para el segundo, nos dice que el valor es 12 que es raíz cúbica de 1728 y para el tercer elemento cuyo valor es 48 que es raíz cúbica de 110592.

¶*Octava quíftíon.*

¶*Uno tíene ȝíjos y ȝíjas en proporcíon fis*[13] *que altera de tal arte q̃ mul. los ȝíjos por las ȝíjas y lo producto por la mítad delos ȝíjos el ultímo produzído fera,* 162, *demando quanto fon los ȝíjos y quantas las ȝíjas*[14].

[12] Error de impresión el número correcto es 110592

[13] No se encuentra traducción para esta palabra, tal vez sea una referencia por usar la palabra *proposición*. Esta palabra la encontramos también en la *decima quistion*.

[14] Este problema tiene mucho parecido al de las *niñas* plantedo por al-Khuwārizmī (pág. 107).

¶*Regla.*

¶Dígo que los hijos sean una cosa y las hijas una cosa y medía en fis que altera proporcíon mul. una cosa por una cosa y medía es un censo y medío el qual mutíplíca por medía cosa que es mítad delos híjos hazes $\frac{3}{4}$ de cubo yguales a, 162, híjos y híjas que es numero parte numero por cubo que es, 162. por $\frac{3}{4}$ el aduenímíento es, 216, rayz cuba delos quales son los híjos y las híjas rayz cuba de, 729, Prueba, mul. rayz cuba de, 216, que es, 6, por rayz cuba de. 729 que es, 9, hazen, 54, los quales mul. por medío de seys que son los híjos lo producto es, 162, que esel numero demandado.

La ecuación que se produce es:

$$\tfrac{3}{2}x \cdot x \cdot \tfrac{x}{2} = 162 \tag{4}$$

la cual al realizar las operaciones se obtiene:

$$\tfrac{3}{4}x^3 = 162$$

para dar solución a esta ecuación hace el "despeje" de la misma forma que en la *quistion* número cinco, así:

$$\tfrac{3}{4}x^3 = 162 \quad \Rightarrow \quad x^3 = \frac{162}{\frac{3}{4}} = \frac{648}{3} = 216$$

que extrayendo raíz cúbica en ambos lados de la igualdad nos queda que $x = 6$, que es el valor buscado.

Este problema es muy interesante ya que la razón que exhibe Díez en los dos primeros términos de la igualdad (4); $\frac{3}{2}x$ y x se conocen en la cultura Griega como: *altera proporción*[15]

La prueba que nos dan es que el valor encontrado 6 es el número de los hijos y como las hijas estan en $\frac{3}{2}$ de proporción respecto a los hijos, éstas serán entonces 9, que es raíz cúbica de 729.

¶*Novena quíftíon.*

¶Uno ha de hazer dos pagamentos ẽ quadrupla proporciõ de meses en tal manera: q̃ quadrando el su quadruplo[16] *y lo que saliere mull. por el cuaduplo y lo produzído cubícando el ultímo produzído sea.* 32768. *demando a quantos meses son los pagamentos.*

---

[15] La palabra *Proporción* es usada por *Razón* en el siglo XVI.

[16] *su quadruplo* tal vez quiera decir *subcuadruplo* que sería el inverso de 4 que en este caso, es $\frac{1}{4}$; aunque no se ve tan clara esta operación, sino hasta la décima *quístíon*.

¶Regla.

¶Dígo que los 2 pagamentos sean una cosa y 4 cosas que es quadrupla proporcíon quadra el su quadruplo es un censo multíplícale por el quadruplo es. 4. cubos cubícalos azes. 64. cubos de cubos yguales a. 32768. que es numero: parte numero por cubos de cubos que es. 32768. por. 64. el aduenímíento es. 512. cuya rayz cuba de rayz cuba seran los meses del prímer pagamento y rayz cubíca de rayz q̃drada de, 262144. serã el segundo pagamẽto. Prueba rayz cubíca de. 512. es. 8. y rayz cubíca de. 8. es. 2. que es el prímer plazo: y rayz q̃drada de. 262144. es. 512. y rayz cubíca de. 512. es. 8. que esel segundo plazo: quadra el. 2. q̃ es su quadruplo de. 8. es. 4. el qual multíplíca por el quadruplo es. 32. cubícalos el ultímo produzído es. 32768. numero demandado.

Se tiene una ecuación del estilo:

$$x^2 \cdot 4x \tag{5}$$

que al elevarla al cubo e igualando a 32768 se produce:

$$64x^9 = 32768$$

Juan Díez para resolverla hace lo siguiente:

$$64x^9 = 32768 \quad \Rightarrow \quad x^9 = \tfrac{32768}{64} = 512$$

que al extraer raíz novena nos queda $x = 2$, que son los meses del primer pago. Para obtener el pago del segundo mes, lo que hace es susutituir $x = 2$ en $4x$ de la ecuación (5) y lo eleva a la potencia 6, es decir:

$$(4x)^6 = 8^6 = 262144$$

a este número se le extrae raíz cuadrada, quedando 512 para luego extraer raíz cúbica, produciendo 8 es así que $x = 8$ el pago del segundo mes. La prueba la hace sustituyendo en (5) los valores correspondientes así: $x^2 = 4$ con $x = 2$ y $4x = 32$ con $x = 8$, la multiplicación de estos la eleva al cubo, produciendo 32768, lo cual comprueba la igualdad.

¶Dezena quístíon.

¶Un hombre tíene dos híjos en proporciõ sis que quartas d' hedad en tal manera que, mul. el su quadruplo[17] *dela hedad del menor por el su quíncuplo*[18] *dela hedad del mayor y lo que salíere cuadruplando y delo produzído sacãdo su rayz y cubícãdo la mítad el ultímo produzído sera. 125. años: demando que hedad tíene cada uno.*

[17] Multiplica por $\frac{1}{4}$ en lugar de 4.
[18] Multiplica por $\frac{1}{5}$ en lugar de 5.

¶Regla.

¶Digo que el menor aya una cofa de años y el mayor aya una cosa y $\frac{1}{4}$ de cofa de años que es fis que quarta proporcio͂, mul. el fu quadruplo del menor por el fu quíntuplo del mayor que es $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{4}$ lo producto es $\frac{1}{16}$ de cenfo quadrupla $\frac{1}{16}$ es $\frac{1}{4}$ de cenfo fu rayz es medía cofa cubíca fu mítad que es un q͂rto de la cofa el ultímo produzído es $\frac{1}{64}$ de cubo ygual a. 125. que es lo que fe bufca pte numero por cubo que es. 125. por $\frac{1}{64}$ el aduenímíento es. 8000, cuya rayz cubíca fon los años del menor y rayz quadrada es. 625. fon los del mayor. Prueba toma rayz cuba de. 8000. ꝸedad del menor es. 20. mul. el fu quadruplo que es. 5 por el fu quíncuplo de. 25. rayz quadrada de. 625. que es, 5. lo producto es, 25, quadruplalos ꝸazen cíento, toma la mítad de fu rayz es, 5, cubícalos el ultímo producído es. 125. numero demandado lo qual nota.

El desarrollo del planteamiento del problema lo transcribiremos en notación matemática actual, éste es el siguiente:

$$\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5x}{4}=\frac{x^2}{16};$$

$$4\cdot\frac{x^2}{16}=\frac{x^2}{4};$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2};\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{4}$$

que al elevarlo al cubo e igualando a 125 se tiene:

$$\frac{x^3}{64}=125 \quad\Rightarrow\quad x^3=125\cdot 64=8000$$

al extrer raíz cúbica se tiene que $x=20$, que es la edad del hijo menor. Por otro lado

$$\frac{x^3}{64}=125 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x}{4}\right)^2\frac{x}{4}=125 \quad\Rightarrow\quad \frac{5x}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2=625$$

sustituimos $x=20$ en el primer término fraccionario

$$\frac{100}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2=625 \quad\Rightarrow\quad 5\cdot 5\left(\frac{x}{4}\right)^2=625$$

$$\Rightarrow\quad 5^2\left(\frac{x}{4}\right)^2=625 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{5}{4}x\right)^2=625$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados del último término se tiene

$$\frac{5}{4}x=25$$

que es la edad del hijo mayor. En este último paso no se ve muy claro el resultado, ya que, si usamos el álgebra actual esta x valdría, sacando raíz en ambos lados y despejando, 20, pero hay que tomar en cuenta que la edad del hijo mayor está en una proporción de $\frac{5}{4}$ con respecto a la edad del hijo menor que es x, es decir, al sacar raíz a 625 nos da la edad del mayor que es 25. Por otra parte también hay que notar que la edad del hijo mayor no la desglosa tan explícitamente en la *Regla* como la edad del menor, sólo afirma que es raíz cuadrada de 625, tal vez, él está usando la *Regla Falsa*, esta suposición no es incoherente, puesto que los pasos a seguir para encontrar la edad del hijo mayor están en la *Prueba* tal y como acostumbraban los Egipcios (véase pág. 43).

Tesis

Juan Díez es indudablemente heredero de la tradición Arabe y por consiguiente también de la Griega, su libro es una continuación de estas formas de pensamiento. En la primera parte de su libro que trata sobre el *arte menor* (la cual no se profundizó al nivel que quisiéramos por los motivos expuestos en la introducción de este trabajo) el autor sintetiza una serie de conocimientos con un objetivo netamente práctico, esta sistematización esta dada en forma típica que plasma los avances aritméticos de las corrientes antes citadas y enriquecida además por pensadores del siglo XV.

Por lo que respecta al *arte mayor* la temática muestra fuertes influencias Arabes como ya se mencionó especialmente de abū-Kāmil y al-Khuwārizmī aunque se puede notar sobre todo en las *quistiones* primera y segunda que son ecuaciones mixtas (i.e. ecuaciones que tienen términos cudráticos y lineales) una forma ¡alternativa de construcción geométrica! para la solución de estos problemas, lo cual no deja de sorprendernos.

Sobre las restantes *quistiones* de esta misma segunda parte, es interesante observar, la creatividad y astucia con que se da solución a los problemas, así como el grado de las ecuaciones, recordemos que la novena *quistion* trata sobre una ecuación de ¡noveno grado!, mientras que las *quistiones* séptima y octava son ecuaciones de tercer grado, ecuaciones que en ese tiempo se están estudiando simultáneamente en Europa.

En este trabajo no se dan soluciones geométricas para los problemas del 3 al 10, ya que, se restringen en unos casos a encontrar un cuadrado (*quistiones* 3-6) o un cubo (*quistiones* 7, 8, 10), para luego extraer raíz cuadrada o cúbica, según sea el caso, encontrando el lado de la figura correspondiente, y con esto la solución al problema. Lo que si es relevante es el manejo del álgebra para reducirlas a una forma sencilla, este manejo algebraico consiste en: diferentes formas de "despejar" la incógnita, un ejemplo de esto se encuentran en casi todos los problemas; álgebra de exponentes, que se encuentra desde la quinta hasta la décima *quistion* y; reducción de términos semejantes que se observa en el quinto problema.

Por último hay que hacer notar, que los problemas muestran ya un cambio del proceso geométrico al algebraico, trayendo consigo los elementos necesarios para considerar la solución general de la ecuación de segundo grado, la cual será plasmada en los proximos años.

Al lector:

Para poder comprender la profundidad del pensamiento matemático en la solución de los problemas del *arte mayor*, procedemos a dar paso a un análisis histórico sobre el tratamiento de las ecuaciones cuadráticas, cabe hacer notar que esta recopilación se plasma por vez primera en este trabajo, ya que, no se ha encontrado una sistematización en ninguna otra fuente consultada.

El material expuesto abarca un período de alrededor de 2000 años a. c. hasta mediados del siglo XII.

Capítulo 4

Matemática Babilonica y Egipcia

En un tiempo pregunté: ¿de dónde vienen las más altas cimas? aprendí entonces que vienen del fondo del mar.

Zaratustra

A través de los análisis de las tabletas de arcilla que se han rescatado por diversas excavaciones arqueológicas [18] encontramos dos tipos de textos matemáticos, el primero de estos contiene únicamente problemas y en el segundo se encuentran sólo tablas de referencia, además se tienen identificados dos períodos importantes de la matemática babilónica, el primero alrededor de 2000 años a. c. y el segundo alrededor de 200-150 años a. c., llamado este último el período de los Seléucidas.

Un ejemplo de ecuaciones de segundo grado, entre los más importantes del primer período, es el siguiente:

$$x^2 - 16x - 80 = 0 \qquad SKT - No.8$$

esta ecuación surge de la problemática de medir áreas regulares, lo cual es una cuestión típica en la presente cultura, en este problema en particular se da la división de un triángulo rectángulo a través de una línea paralela al cateto adyacente, formando así un triángulo rectángulo y un trapecio.

En lo que respecta al segundo período, se encontró con lo que se puede catalogar como el origen de Euclides II-5, para las ecuaciones de segundo grado, éstas parten del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = p$$
$$xy = q$$

donde $q = 1$.

A continuación se da paso al desarrollo de los ejemplos de estas dos etapas no sin advertir que la solución la daremos en base a algunos resultados que se verán mas adelante.

Primer Período (2000 años a. c.)

Ejemplo B.1 ([19][34])

Como ya se mencionó, uno de los problemas más importantes es la ecuación $x^2 - 16x - 80 = 0$, ésta surge de un problema que se sintetiza de la siguiente forma:

"Dado un triángulo rectángulo, éste es dividido, de tal forma que se obtiene un trapecio y nuevamente un triángulo rectángulo, con las condiciones siguientes: $B_0 = 30$, $F_u = 270$ y $L_u = L_0 + 10$". El problema es encontrar los valores de L_u y L_0 para los cuales se cumpla la última igualdad (no se ofrece solución original del problema).

A continuación se exhibe la figura 11, y los pasos algebraicos para encontrar la solución al problema de una forma moderna.

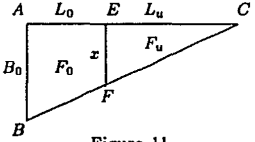


Figura 11.

El área del triángulo

$$CEF = \frac{x(L_0 + 10)}{2} = 270$$

$$\Rightarrow \qquad L_0 = \frac{540 - 10x}{x} \tag{1}$$

el área del trapecio

$$EABF = \frac{(30 + x)}{2}\frac{(540 - 10x)}{x} = F_0$$

por tanto

$$16200 - 300x + 540x - 10x^2 = 2xF_0$$

$$\Rightarrow \qquad 10x^2 + (2F_0 - 240)x = 16200 \tag{2}$$

el área del triángulo

$$ABC = \left(\frac{2L_0 + 10}{2}\right) 30 = F_0 + 270$$

$$\Rightarrow \qquad F_0 = 30L_0 - 120 \tag{3}$$

Si se sustituye la ecuación (3) en la (2) y se multiplica por $\frac{1}{10}$ se obtiene lo siguiente:

$$x^2 + (6L_0 - 48)x = 16200$$

ahora si se sustituye en (1), se produce la ecuación:

$$x^2 + (6[\tfrac{540-10x}{x}] - 48)x = 1620$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + 1620 = 108x \tag{4}$$

esta ecuación es de la forma $x^2 + q = px$ (según Euclides, el cual se verá más adelante), cuya solución está dada por

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

sustituyendo los valores para p y q se obtiene que:

$$x = 18 \quad y \quad x = 90$$

para la ecuación (4). Pero si se sustituye el valor de $x = 90$, en (1) $L_0 < 0$ y esto no puede ser una solución para la ecuación; ya que no se admiten valores negativos[1]. Entonces, si se toma el valor de $x = 18$, implica $L_0 = 20$ luego

$$L_u = 30 \quad y \quad F_0 = 480.$$

A continuación se expondrá la forma (actual) en la que se obtiene la ecuación estudiada.

Supongase que $AE = x$, y como el área del triángulo $ECF = 270$ entonces tenemos lo siguiente:

$$270 = \frac{1}{2}EF(x + 10) \tag{1}$$

[1]Dentro del pensamiento matemático antiguo y hasta el siglo XVI no se considera una solución con valores negativos.

y por triángulos semejantes:

$$30 : EF = 2x + 10 : x + 10 \tag{2}$$

si obtenemos EF de (1) y se sustituye en (2), esto nos lleva a la ecuación:

$$x^2 - 16x - 80 = 0.$$

Una generalización a problemas de este tipo (problemas de triángulos rectángulos) los da B. L. van der Waerden en su libro *El despertar de la Ciencia* [20], esta obra es un ensayo del avance de las estructuras del pensamiento matemático, así como, la mecánica del conocimiento babilónico. Consideremos el siguiente problema:

$$F_1 - F_2 = D$$
$$y_2 - y_1 = d$$

como se puede notar, de estas dos ecuaciones y de la figura 12, las incógnitas son: x, y_1, y_2

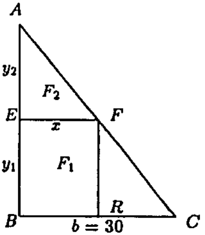


Figura 12.

se sabe además que $F_1 - F_2$ es igual al área del trapecio $EBCF$ menos el área del triángulo AEF es decir:

$$\tfrac{1}{2}(y_1(x + b)) - \tfrac{1}{2}y_2 x = D \tag{1}$$
$$y_2 - y_1 = d$$

y por triángulos semejantes tenemos que; el triángulo AEF lo es con el triángulo FRC de donde

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{b - x} \tag{3}$$

Usando (1) tenemos:

$$\begin{aligned} & y_1(x+b) - y_2 x = 2D \\ \Rightarrow \quad & -(y_2 - y_1)x + y_1 b = 2D \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} & y_2 - y_1 = d \\ \Rightarrow \quad & -dx + y_1 b = 2D \qquad (4) \end{aligned}$$

De (3) tenemos:

$$y_1 = \frac{b-x}{x} y_2$$

y como

$$\begin{aligned} & y_2 = y_1 + d \\ \Rightarrow \quad & y_1 = \frac{b-x}{x}(y_1 + d) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{by_1 + bd - xy_1 - xd}{x} \\ y_1 + \frac{xy_1 - by_1}{x} &= \frac{bd - xd}{x} \\ \frac{xy_1 + xy_1 - by_1}{x} &= \frac{bd - xd}{x} \\ (2x - b)y_1 &= (b - x)d \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y_1 = \frac{(b-x)}{(2x-b)} d \qquad (5)$$

Ahora si se sustituye (5) en (4) se obtiene:

$$-dx + \frac{(b-x)}{(2x-b)} db = 2D$$

desarrollando y reduciendo términos semejantes se llega a:

$$x^2 + \frac{2Dx}{d} = \frac{b^2}{2} + \frac{D}{d} b$$

que es una ecuación de la forma; $x^2 + px = q$ (Euclides), cuya solución es:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

de donde

$$p = \frac{2D}{d} \quad y \quad q = \frac{b^2}{2} + \frac{D}{d}b$$

sustituyendo, se encuentra la solución para x que es:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]} - \frac{D}{d}$$

por otro lado, si se multiplica por $(b-x)$ a la ecuación (1), se tiene que:

$$\tfrac{1}{2}y_1(b^2 - x^2) = \tfrac{1}{2}y_2x(b-x) + D(b-x) \tag{6}$$

ahora, si se sustituye la ecuación (3) en la (6) se obtiene:

$$\tfrac{1}{2}y_1(b^2 - x^2) = \tfrac{1}{2}y_1x^2 + D(b-x) \tag{7}$$

y de (3):

$$xy_2(b-x) = y_1x^2$$

de donde, si se multiplica por $\frac{1}{2}$:

$$\frac{xy_2}{2}(b-x) = \frac{y_1x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad F_2(b-x) = \frac{y_1x^2}{2}$$

si se sustituye esta ecuación en (7) se produce

$$\tfrac{1}{2}y_1(b^2 - x^2) = F_2(b-x) + D(b-x) = (b-x)(F_2 + D) = (b-x)F_1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{(b-x)F_1}{\frac{1}{2}(b^2 - x^2)}$$

que es la solución para y_1 y $y_2 = y_1 + d$.

A continuación se presenta una modificación al problema anterior, sin pérdida de generalidad nos podemos preguntar: ¿Qué pasa si se aumenta la altura del triángulo ABC?.

Como se sabe, del triángulo ABC $y_1 - y_2 = d$ y $F_1 - F_2 = D$, entonces:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]} - \frac{D}{d}$$

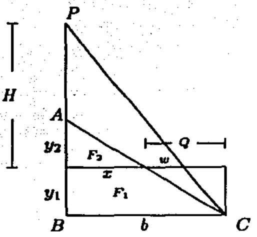


Figura 13.

De la figura 13 se tiene que:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{Q}{x} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{y_1 x}{y_2} \tag{1}$$

y

$$\frac{y_1}{H} = \frac{Q-w}{x+w} \qquad \Rightarrow \qquad y_1 x + y_1 w = QH - wH$$

$$\Rightarrow \qquad (y_1 + H)w = QH - xy_1$$

por lo tanto

$$w = \frac{QH - xy_1}{y_1 + H}$$

También de la figura 13 se puede definir lo siguiente:

$$x^* = x + w = x + \frac{QH - xy_1}{y_1 + H}$$

$$\Rightarrow \qquad x^* = \frac{xy_1 + Hx + QH - xy_1}{y_1 + H}$$

por lo tanto

$$x^* = \frac{Hx + QH}{y_1 + H}$$

usando la ecuación (1) se tiene:

$$x^* = \frac{Hx + (\frac{y_1 x}{y_2})H}{y_1 + H} \qquad \Rightarrow \qquad x^* = x\left[\frac{H(y_1 + y_2)}{y_2(H + y_1)}\right]$$

Sea

$$k = \frac{H(y_1 + y_2)}{y_2(H + y_1)} \qquad \Rightarrow \qquad x^* = xk$$

entonces la solución para x^* es:

$$x^* = \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]} - \frac{D}{d}\right)\left(\frac{H(y_1 + y_2)}{y_2(H + y_1)}\right)$$

ahora como $\frac{x^*}{k} = x$ entonces:

$$\frac{x^*}{k} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]} - \frac{D}{d}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^*}{k} + \frac{D}{d} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{d}+b\right)^2 + \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]}$$

si se eleva al cuadrado ambas partes de la ecuación anterior, y se agrupan los términos se obtiene lo siguiente:

$$\frac{x^{*2}}{k^2} + \frac{2x^*D}{kd} = \frac{D}{d}b + \frac{b^2}{2}$$

esto último es para x^* del triángulo PBC. Recordemos que para x en el triángulo ABC se obtuvo la ecuación:

$$x^2 + 2x\frac{D}{D} = \frac{D}{d}b + \frac{b^2}{2}.$$

Las dos últimas ecuaciones son muy parecidas, observando que el término de la derecha no se altera, el cual es constante. Ahora se tiene que:

$$x^* = xk = x\left(\frac{H(y_1 + y_2)}{y_2(H + y_1)}\right).$$

Aquí cabría preguntarse ¿Qué pasa si se hace H muy grande?. Como ya se sabe

$$k = \frac{H(y_1 + y_2)}{y_2(H + y_1)}$$

ahora multiplicando por $\frac{H}{H}$ se produce lo siguiente:

$$k = \frac{y_1 + y_2}{y_2 + \frac{y_1 y_2}{H}}$$

cuando H se hace muy grande ocurre lo siguiente:

$$k = \frac{y_1 + y_2}{y_2}$$

por otro lado de la figura 13 se puede ver que:

$$\frac{y_1 + y_2}{b} = \frac{y_2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1 + y_2}{y_2} = \frac{b}{x} = k$$

por lo tanto si H es muy grande

$$x^* = xk = x\frac{b}{x} = b$$

lo que significa, que x a lo más podrá valer lo que mide la base del triángulo, la cual es constante.

Otro problema es el siguiente [21]:

Ejemplo B.2

Se pide encontrar dos números cuadrados que al sumarlos den un cuadrado de área 1000, los Babilonios lo plantean de esta manera:

Sean $x^2 + y^2 = A$ y $y = \frac{a}{b}x - d$ donde $A = 1000$, $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $d = 10$ y $\overline{x} = \frac{x}{b}$ (Fig. 14)

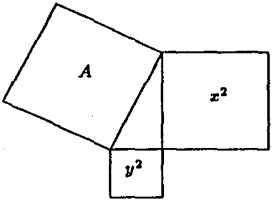


Figura 14.

si se sustituye y en la ecuación original se produce:

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}x - d\right)^2 = A$$

$$\Rightarrow \quad x^2\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)-2\frac{a}{b}xd+d^2-A=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2\left(\frac{a}{b}+1\right)-2da\overline{x}+d^2-A=0$$

si se divide todo por $\frac{a}{b}+1$

$$\Rightarrow \quad x^2-\frac{b^2(2da)}{a^2+b^2}\overline{x}+\frac{b^2(d^2-A)}{a^2+b^2}=0$$

ahora si se divide por b^2 se obtiene:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{2da}{a^2+b^2}\overline{x}+\frac{d^2-A}{a^2+b^2}=0$$

pero por hipótesis se sabe que $\overline{x}=\frac{x}{b}$

$$\overline{x}^2-\frac{2da}{a^2+b^2}\overline{x}+\frac{d^2-A}{a^2+b^2}=0$$

ésta es una ecuación de la forma:

$$\overline{x}^2+q=p\overline{x}$$

cuya solución está dada por

$$\overline{x}=\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p\right)^2-q}$$

así que sustituyendo tenemos:

$$\overline{x}=\frac{da}{a^2+b^2}\pm\sqrt{\left(\frac{da}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{A-d^2}{a^2+b^2}\right)}$$

haciendo operaciones algebraicas sencillas:

$$\overline{x}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(da\pm\sqrt{a^2d^2+(a^2+b^2)(A-d^2)}\right)$$

y por lo tanto, sustituyendo los valores $A=1000$, $b=3$ y $a=2$ se tiene:

$$\overline{x}=10$$

pero

$$\overline{x}=\frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x=30$$

por lo tanto

$$x^2 = 900$$

luego entonces

$$y^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 10$$

La generalización que dan los Babilonios al problema anterior está en los siguientes términos:

Ejemplo B.3

Sea $x^2 + y^2 = A$; $x = u + d_1$; $y = \frac{a}{b}u + d_2$; $\overline{u} = \frac{u}{b}$ (Fig. 15)

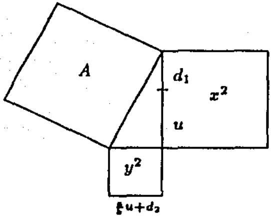


Figura 15.

para su solución, se procederá a sustituir la variables x y y en la ecuación original

$$(u + d_1)^2 + \left(\frac{a}{b}u + d_2\right)^2 = A$$

si se desarrollan los binomios y se agrupan los términos se tiene lo siguiente:

$$u^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\left(d_1 + \frac{a}{b}d_2\right)u + d_1^2 + d_2^2 = A$$

ahora como $x = u + d_1$ entonces $x > d_1$ esto implica que $x^2 > d_1^2$. Por otro lado $y = \frac{a}{b}u + d_2$ entonces $y > d_2$ esto implica que $y^2 > d_2^2$ por lo tanto $A = x^2 + y^2 > d_1^2 + d_2^2$, así:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)u^2 + 2\left(d_1 + \frac{a}{b}d_2\right)u = A - d_1^2 - d_2^2$$

si se desarrollan los paréntesis y se divide primero por $1+\frac{a^2}{b^2}$ y luego por b^2 se obtiene lo siguiente:

$$\frac{u^2}{b^2}+2\frac{(d_1b+ad_2)(\frac{u}{b})}{a^2+b^2}=\frac{A-d_1^2-d_2^2}{a^2+b^2}$$

ahora como $\overline{u}=\frac{u}{b}$ entonces:

$$\overline{u}^2+2\frac{d_1b+ad_2}{a^2+b^2}\overline{u}=\frac{A-d_1^2-d_2^2}{a^2+b^2}$$

ésta es una ecuación de la forma Euclidea

$$\overline{u}^2+p\overline{u}=q$$

teniendo como solución

$$\overline{u}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$$

si se sustituyen los valores obtenidos para p y q, se produce la siguiente ecuación:

$$\overline{u}=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\pm\sqrt{A\left(a^2+b^2\right)-\left(ad_1-bd_2\right)^2}-\left(d_1b+ad_2\right)\right]$$

que es la solución a la ecuación pero en términos de $\overline{u}$. Si se hace el cambio de variable, es decir $u=\overline{u}b$ queda lo siguiente:

$$u=\frac{b}{a^2+b^2}\left[\pm\sqrt{A\left(a^2+b^2\right)-\left(ad_1-bd_2\right)^2}-\left(d_1b+ad_2\right)\right]$$

que es la solución en términos de u. Para obtener la solución en términos de x, sólo hay que fijarse en la condición para ésta, es decir, $x=u+d_1$, al despejar el valor de u en términos de x la solución final queda como sigue:

$$x=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a(d_1a-bd_2)\pm\sqrt{A(a^2+b^2)-(ad_1-bd_2)^2}\right]$$

A continuación se presentarán dos últimos problemas de esta sección, en los cuales se tienen las bases para una generalización que se hará en el período de los Seléucidas, estos problemas son los siguientes:

Ejemplo B.4[2]

Se tiene que: $x^2 + y^2 = 100$ y $y = \frac{3}{4}x$. Como $y = \frac{3}{4}x$, se traza una recta cualquiera $\overline{AB}$, se divide en 7 partes iguales, colocándose los cuadrados de x y y sobre esta línea (Fig. 16).

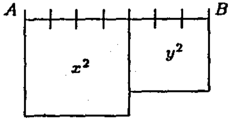


Figura 16.

como $y < x$, el área que se obtiene al hacer un cuadrado de y es menor al área que se obtiene al hacer uno de área x, por lo tanto se puede inscribir un cuadrado de área y^2 dentro del área x^2 (Fig. 17) así:

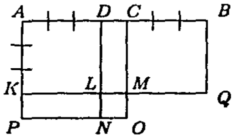


Figura 17.

como $x^2 + y^2 = 100$ que es el área del cuadrado $ADLK$, más el área del cuadrado $CBQM$, más el área del rectángulo $DCML$, más el área del rectángulo $KLNP$, más el área del cuadrado $LMON = 100$. Por otro lado se tiene que, el área del cuadrado $ADLK$, es igual al área del cuadrado $CBQM = y^2$. El área del rectángulo $KLNP$, es igual al área del rectángulo $DCML$, que es igual a $\frac{1}{3}y^2$. El área del cuadrado $LMON$, es igual a $\frac{1}{3}$ del área del rectángulo $DCLM$, que es igual $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}y^2) = \frac{1}{9}y^2$. De todo lo anterior se puede decir que:

$$2y^2 + 2(\tfrac{1}{3}y^2) + \tfrac{1}{9}y^2 = 100$$

[2]Este mismo problema se verá más adelante en la cultura egipcia, en el cual se observa el uso de las tripletas pitagóricas para su solución.

haciendo operaciones llegamos a que:

$$y^2 = 36 \quad y \quad x^2 = 64.$$

Ejemplo B.5

(2000 años a. c. AO 8862 Louvre. [19][22])

Dado el sistema de ecuaciones siguiente encontrar sus soluciones:

$$x - y + xy = 183$$

$$x + y = 27$$

Como se puede notar la solución geométrica gira alrededor de la construcción de un rectángulo que tiene por lados x y y (Fig. 18).

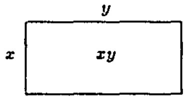


Figura 18.

La solución algebraica se describirá como sigue: Si se despeja y de la segunda ecuación y se sustituye en la primera se produce la ecuación de segundo orden:

$$x^2 - 29x + 210 = 0$$

la cual es una ecuación de la forma

$$x^2 + q = px$$

según Euclides (las cuales las veremos más adelante), teniendo como solución $x_1 = 15$ y $x_2 = 14$, hay que notar que la solución son dos raíces positivas, de las cuales la que conviene tomar es $x = 15$ por lo tanto $y = 12$, que son los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones planteado.

Segundo Período

(Seléucidas 200-150 años a. c.)

En una serie de tablillas encontradas en la Cd. Uruk se tienen cuatro problemas los cuales son de la forma $x + y = p$ $xy = q$ con $q = 1$. Al valor de x se le suma el valor del recíproco y obtenemos p. Los valores que toma p son los siguientes:

1) $p = 2$; 0, 0, 33, 20.
2) $p = 2$; 3.
3) $p = 2$; 5, 26, 40.
4) $p = 2$; 0, 15.

que, en fracciones sexagesimales se pueden expresar de la forma:

$$p = 2 + \frac{33}{60^3} + \frac{20}{60^4} \cdots$$

Este tipo de problemas fueron ideados de manera artística o artificial y con ayuda de las tablas Babilónicas de recíprocos, se podía obtener de manera inmediata el valor de x o de y.

Una igualdad que está vinculada con el sistema de ecuaciones anterior es:

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$$

ésta se encuentra en Euclides VI-28 que, a su vez, es una generalización de II-5.

Las condiciones para dar solución a la igualdad anterior están regidas, nuevamente, a partir del sistema $x + y = p$ y $xy = 1$, es decir :

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - 1$$

así la solución cuando $q = 1$ es:

$$x = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}$$

$$y = \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{2}$$

esto nos conduce a:

$$\tfrac{1}{2}p; \quad (\tfrac{1}{2}p)^2; \quad (\tfrac{1}{2}p)^2 - q; \quad \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 - q}$$

de manera que si se cierra el ciclo se produce:

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 - q}$$

siendo ésta, la solución a la ecuación de la forma:

$$x^2 + q = px$$

Es muy interesante notar que la serie que consta de seis términos, es la regla o procedimiento de lo que ahora se conoce como completar el cuadrado perfecto. Otra manera de visualizar este procedimiento se muestra a continuación:

$$x^2 - px + q = 0$$

$$x^2 - px + q + \left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \tfrac{1}{2}p\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 - q$$

$$x - \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 - q}$$

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 - q}.$$

Egipcios

Dentro de las escasas fuentes de la matemática egipcia y en particular a lo que se refiere a la historia de las ecuaciones de segundo grado, se tienen identificadas cuatro, éstas se originaron durante lo que se denomina Reino Medio (aprox. 2000 años a. c.).

La primera fuente llamada *Papiro de Moscú*, la cual se encuentra en el museo de Moscú; proviene de la ciudad de Los Muertos (*Drah Abu'l Negga*), localizada en Tebas. Este papiro cuenta con las siguientes características: 25 mts. de largo por 8 cm. de ancho, contiene 25 problemas de la vida cotidiana, escritos aproximadamente en el año de 1900 a. c. con un estilo "maestro-estudiante".

La segunda fuente denominada *Papiro de Rhind* se encuentra en el museo Británico de Londres, las dimensiones de este papiro son aproximadamente de 5.34 mts. de largo por 33 cm. de ancho (en su forma original[3]), consta de 84 problemas agrupados en capítulos, escrito alrededor del año 1800 a. c. y encontrado por el arqueólogo inglés A. H. Rhind en el año de 1858 d. c. en la Cd. de Luxor.

Aparte de estas dos obras conocidas se encuentran distintos papiros y tablas de madera con diverso contenido matemático, las cuales se les consideran fuentes menores, entre éstas podemos mencionar las siguientes:

Papiro de Petrie [23] también llamado *Papiro de Kahum* encontrado en el año de 1897 por F. Ll. Griffith. Aquí se muestra el primer ejemplo de una ecuación de segundo grado, ésta, se encuentra en la tabla 8 del papiro.

Papiro de Berlín (6619) [24], el cual fue descubierto en el año de 1900 por Schack, encontrándose un segundo ejemplo de ecuación cuadrática.

Los problemas que se encuentran en los citados papiros, son *a grosso modo* los siguientes:

Ejemplo E.1

Papiro de Kahum

"Se tiene un volumen de $120u^3$ el cual hay que dividir en 10 cuerpos de altura 1 de tal forma que la superficie sea un cuadrado, cuyos lados tengan la proporción de 1 y $\frac{3}{4}$". La solución a este ejemplo es a través de la denominada *regla falsa* o *falsa suposición (asunción)*[4] [31] la cual nos

[3] En la actualidad se encuentra mutilado.

[4] Regla que usan mucho los egipcios para poder resolver sus problemas y la cual consiste en tomar una cantidad al arbitrio, ésta, se sustituye en la "ecuación" para ver si cumple con las condiciones, sino, se toma otra hasta que se satisfaga la "ecuación", para luego redactar el problema con su solución.

conducirá a una raíz irracional de $\frac{3}{4}$. El cálculo procede de la siguiente forma:

Divide 1 entre $\frac{3}{4}$ eso da $1\frac{1}{3}$ multiplica 12 con $1\frac{1}{3}$ y obtenemos 16, la raíz de 16 es 4, la cual es la longitud de uno de los lados del cuadrado. Ahora toma $\frac{3}{4}$ de 12 lo cual es 3 lo cual es el otro lado del cuadrado. Estas ecuaciones expresadas en forma actual son las siguientes:

$$xy = 12$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo E.2

Papiro de Berlín (6619)

El segundo problema lo descifró Schack en 1903, el cual trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{1\frac{1}{2}}$$

$$x^2 + y^2 = 400$$

La prueba que da su autor es como sigue:

Sea $x = 2$ y $y = 1\frac{1}{2}$, estos valores sustituidos en la primera ecuación nos da $6\frac{1}{4}$ si tomamos raíz, nos da $2\frac{1}{2}$, la cual es un octavo de 20, ¿esto a qué nos lleva? a que ahora $x = 16$ y $y = 12$, es decir, la solución a este problema esta dado por lo que se denomina tripletas pitágoricas, las cuales son de la forma $(12, 16, 20)$ ó $(6, 8, 10)$ ó $(3, 4, 5)$ que también son solución del siguiente ejemplo

Ejemplo E.3

Papiro de Rhind

"Dividir una superficie en dos diferentes cuadrados, esto es, 100 u^2 serán divididas en dos magnitudes diferentes desconocidas, teniendo una razón de $\frac{3}{4}$ de una de las magnitudes con respecto de la otra."[5] En este ejemplo se vuelve a aplicar la *regla falsa*, el desarrollo es el siguiente:

"Haz un cuadrado de lado 1 y toma $\frac{3}{4}$ de la longitud del lado, multiplica esto en sí, y da $\frac{9}{12}$, *cuando se hace esto varias veces* obtenemos $\frac{25}{16}$, toma raíz y da $\frac{5}{4}$, toma raíz del lado dado 100 y da 10, divide 10 entre $\frac{5}{4}$ esto

[5] Este problema ya se vio en los babilonios (ejemplo B.4).

produce 8, el resto es despreciado, toma ahora $\frac{3}{4}$ de estos 8 y te da 6 que son los valores que concuerdan con el problema planteado."

Si traducimos el problema en lenguaje matemático actual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Como $x = \frac{3}{4}y$, se sustituye en $x^2 + y^2 = 100$, entonces se tiene; $(\frac{9}{16}y)^2 + y^2 = 100$, esto implica que; $y^2 = 64$ luego entonces $y = 8$. Ahora sustituyendo el valor de y en la primera ecuación se tiene que $x^2 = 36$ así $x = 6$, obteniéndose los valores para x y y.

Cabe aclarar, que la generalización a estos tres problemas, la encontramos en el libro de los *Datos* de Euclides proposiciones 84, 85, 86, las cuales las podemos escribir como:

$$\begin{matrix} xy = k^2 & xy = k^2 & xy = k^2 \\ x - y = a & x + y = a & x^2 - y^2 = a \end{matrix}$$

Conclusión

De los resultados obtenidos de los Babilonios y Egipcios, se concluye, que la conceptualización matemática, se basa en hechos prácticos y empíricos, pero aún así, se encuentra en varios problemas un grado de sofisticación en el planteamiento y solución de estos; encontramos además el primer concepto de *raíz* y la solución a problemas a través de la *regla falsa*.

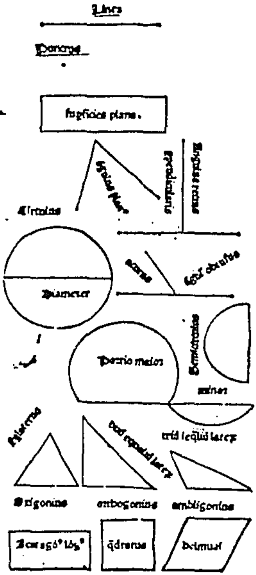
El punto importante en esta matemática es la conceptualización de la idea de *medir*, siendo éste el segundo concepto fundamental de la matemática, recordemos que el primero es el de *contar*.

El concepto de *medir áreas* nos conduce a dos grandes corrientes de la matemática: El primero es el de *medir áreas irregulares* conduciéndonos al principio fundamental del cálculo y las implicaciones que conlleva. El segundo, el cual enfocamos no a la profundidad que quisiéramos, es de *medir áreas regulares*, que no es más, que un principio fundamental en el álgebra.

Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi/cacissimi: in artem Geometrie incipit quã foelicissime:

De principiis p se notis: ⁊ p̃mo de diffini/tionibus earundem.

Punctus est cuius ps nõ est. Linea est lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ ex/tremitates sĩt duo pũcta. Linea recta ẽ ab vno pũcto ad aliũ breuissima extẽ/sio i extremitates suas vtrũq; eo⁊ reci/piens. Superficies ẽ q̃ lõgitudinẽ ⁊ lati/tudinẽ tñ h;: cui⁹ termĩ quidẽ sũt lineę. Superficies plana ẽ ab vna linea ad a/liã extẽsio i extremitates suas recipiẽs. Angulus planus ẽ duarũ linearũ al/ternus ɔtactus: quarũ expãsio ẽ sup sup/ficiẽ applicatioq; nõ directa. Quãdo aũt angulũ ɔtinẽt due lineę recte rectiline⁹ angulus noĩat. Qñ recta linea sup rectã steterit duoq; anguli vtrobiq; fuerit eq̃les: eo⁊ vterq; rect⁹ erit. Lineaq; linee supstãs ei cui supstat ppendicularis vocat. Angulus vo qui recto maior ẽ obtusus dicit. Angul⁹ vo minor recto acut⁹ appellat. Termin⁹ ẽ qd vniuscuiusq; finis ẽ. Figura ẽ q̃ tmino vl terminis ɔtinet. Circul⁹ ẽ figura plana vna q̃dem li/nea ɔtẽta: q̃ circũferentia noĩat: in cui⁹ medio pũct⁹ ẽ: a quo oẽs lineę recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiinuicẽ sũt equales. Et hic quidẽ pũct⁹ cẽtrũ circuli dr. Diameter circuli ẽ linea recta que sup ei⁹ centrũ trãsiens extremitatesq; suas circũferẽtię applicans circulũ i duo media diuidit. Semicirculus ẽ figura plana dia/metro circuli ⁊ medietate circũferentię ɔtenta. Portio circu/li ẽ figura plana recta linea ⁊ parte circũferẽtię ɔtẽta: semicircu/lo quidẽ aut maior aut minor. Rectilinee figure sũt q̃ rectis li/neis continent quarũ quedã trilatere q̃ trib⁹ rectis lineis: quedã quadrilatere q̃ q̃tuor rectis lineis. q̃dã multilatere que pluribus q̃; quatuor rectis lineis continent. Figurarũ trilaterarũ: alia est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs eq̃lia latera. Alia triangulus triũ inequalium laterũ. Harũ iterũ alia est orthogoniũ: vnũ .s. rectum angulum habens. Alia ẽ am/bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigoni/um: in qua tres anguli sunt acuti. Figurarũ autẽ quadrilatera⁊ Alia est q̃dratum quod est equilaterũ atq; rectangulũ. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̃ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.



Pie mẽorie Dñs Gotfridus bischoff doctor sac. theo. de[dit] hunc librum Carthus. dom⁹ sci Johis baptiste in hassia cũ aliis vt fidel. ...

Capítulo 5

Etapa Alejandrina

En Geometría no hay ningún camino especial para los reyes.

Euclides

Se puede indicar sin temor a equivocarnos, que gran parte del conocimiento griego (el cual parte alrededor del año 1200 a. c.) se acumuló en el recinto dedicado a las musas, es decir, en el *Museum*, éste estuvo situado en el delta del Nilo, en la ciudad de Alejandría.

Euclides de Alejandría

(Florecimiento 295 años a.c.)

Uno de los matemáticos más importantes de esta cultura es sin duda alguna, Euclides, el cual no sólo aportó un desarrollo bien definido sobre ecuaciones de segundo grado, sino que realizó una basta recopilación de los trabajos matemáticos de las culturas que lo precedieron, sintetizando la visión geométrica de la matématica.

Euclides es el matemático más celebre de todos los tiempos, su nombre es sinónimo de geometría, pero sólo dos hechos se conocen de su vida que están fuera de toda disputa; uno de estos, es el referente a que, Euclides se le localiza entre los pupilos de Platón (347 años a. c.) y los de Arquímedes (287 años a. c.), el otro versa en el lugar en que nació, Alejandría, este último dato es importante ya que muy frecuentemente se confunde con un Euclides nacido en Megara, el cual falleció 100 años antes que Euclides de Alejandría [25]. La fama de Euclides reside en ser el autor de los *Elementos* que constan de 13 libros los cuales han ejercido una profunda influencia en el pensamiento humano.

Los *Data* o *Datos* es otro trabajo de Euclides, éste, trata sobre geometría pura y está relacionado con los libros I, II, III, IV, V y VI de los *Elementos*, con algunas diferencias de lenguaje.

Por lo que respecta al desarrollo de las ecuaciones de segundo grado del que se habla1 a en el principio, lo encontramos básicamente en el libro II de *Los Elementos*, el cual consta de 14 proposiciones que nos permiten comprender el significado geométrico de una ecuación de este tipo así como su solución. Euclides da tres formas de ecuación cuadrática, las cuales las localizamos en las proposiciones 4, 5 y 6. Una de las definiciones que preceden este libro nos habla del *gnomo*, este concepto es de suma importancia para dar solución a estas ecuaciones, la definición es la siguiente:

En todo paralelogramo dése el nombre de gnomo a uno cualquiera de los dos paralelogramos alrededor del diámetro junto con sus complementos.[1]

Dos definiciones importantes para la mejor comprensión de lo que es un *gnomo*, son las siguientes (la primera aportada por Herón de Alejandría, y la segunda por Aristóteles):

Se entiende por gnomo en toda su generalidad; todo aquello que, añadido a cualquier número o figura, hace que el todo resulte semejante a aquello que se añadió. [27].

Si a un cuadrado se le aplica un gnomo, éste sufre un crecimiento pero no se altera. [27].

Como podemos darnos cuenta en estas dos definiciones no sólo se habla en un sentido puramente geométrico, es decir, el concepto de *gnomo* también se puede emplear algebraicamente.

Por lo anterior, se puede concluir que el *gnomo* es el término independiente de una ecuación de segundo grado. Es importante mencionar aquí que el concepto de *gnomo* esta fuertemente ligado con los conceptos de *números figurados* y *tripletas pitagóricas*[2].

Euclides, como ya se mencionó, da tres tipos de ecuaciones de segundo grado, las cuales son:

$$x^2 + px = q \qquad II-4$$

$$x^2 + q = px \qquad II-5$$

$$x^2 = px + q \qquad II-6$$

A continuación daremos la estructura geométrica y algebraica de estas ecuaciones.

---

[1] véase excursus I.
[2] véase excursus I.

Proposición II-4 [26]

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes.

Divídase pues, la línea entera AB, al arbitrio, por el punto G.

Digo que el cuadrado de la recta AB es igual a los cuadrados de las AG, GB más el duplo del rectángulo comprendido por las AG, GB (Fig. 19).

Demostración

Constrúyase sobre la línea AB el cuadrado ADEB, y trácese la BD, y por el punto G trácese la GZ paralela a cada una de las AD, EB. Mas por el punto H trácese la TK paralela a cada una de las AB, DE. Ahora bien: puesto que la GZ es paralela con la AD, y sobre ella incide la BD, el ángulo externo GHB es igual al interno y opuesto ADB. Mas también el ángulo ADB es igual al ABD, porque el lado BA es igual con el AD, por lo cual serán iguales los ángulos GHB y HBG y por tanto también el lado BG es igual al lado GH.

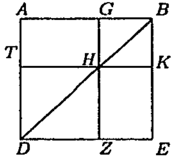


Figura 19.

Mas, por una parte el GB es igual al HK y por otra lo son el GH y el KB. Por lo tanto el dominio GHKB es equilátero. Digo también que es rectángulo, porque la GH es paralela con la BK y sobre ellas incide la recta GB, los ángulos KBG, HGB serán iguales a dos rectos. Mas, el KBG es recto, luego el BGH es también recto de manera que también los ángulos opuestos GHK, HKB serán rectos: luego el GHKB es rectángulo. Mas, se demostró que era equilátero, luego es cuadrado. Y además está formado por la recta GB, y por parecido razonamiento el TZ es un cuadrado y está formado por la recta TH, es decir por la AG. Por tanto los cuadrados TZ, KG están construídos sobre las rectas AG, GB: y puesto que el AH es igual al HE y el HA está comprendido por las rectas AG, GB, porque la HG es igual a la GB, será también el HE igual al comprendido por las AG, GB.

Por tanto: los AH, HE son iguales al doble del comprendido por las AG, GB. Mas, por otra parte también los cuadrados TZ, GK, están construídos por las rectas AG, GB luego los cuadrados TZ, GK, AH, HE son iguales a los cuadrados de los lados AG, GB más el doble del rectángulo comprendido por los AG, GB. Mas, los TZ, GK, AH, HE hacen el ADEB entero, que es el cuadrado construído sobre la recta AB, luego el cuadrado construído sobre la recta AB es igual a los cuadrados de los lados AG, GB más el doble de rectángulo comprendido por los AG, BG. Por tanto: si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes. Que es lo que se había de demostrar.

Algebraicamente esta proposición lo que nos dice es lo siguiente:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GB}^2 + 2 \cdot \overline{AG} \cdot \overline{GB}$$

Si hacemos $\overline{AG} = \frac{1}{2}p$, $\overline{GB} = x$ y $\overline{HE} = \overline{HA} = \frac{1}{2}px$, se produce lo siguiente:

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + (\tfrac{1}{2}p)^2$$

ahora, como es una ecuación de la forma

$$x^2 + px = q$$

entonces

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = q + (\tfrac{1}{2}p)^2$$

si se toma la raíz cuadrada de ambos lados de la igualdad se tiene:

$$(x + \tfrac{1}{2}p) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q}$$

entonces

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q} - \tfrac{1}{2}p$$

que es la solución para la ecuación $x^2 + px = q$ (Fig. 20).

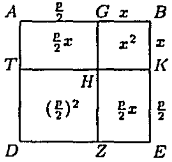


Figura 20.

Antes de seguir adelante, se abrirá un paréntesis, para dar paso a la proposición II-11, la cual da otra forma de llegar al mismo resultado que la proposición II-4. Esta es la siguiente:

Dividir una recta en dos partes de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la otra parte restante [25].[3]

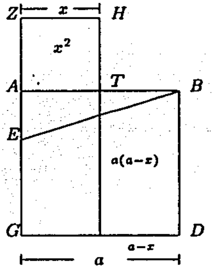


Figura 21.

Sea AB la recta dada. Entonces hay que dividir la AB por T de manera que, el rectángulo comprendido por los lados AB, BT es igual al cuadrado sobre TA (Fig. 21).

Algebraicamente ¿qué quiere decir esto?. Traduciendo en notación moderna se tiene que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

[3]Esta proposición –que Euclides repite en VI-30– equivale al problema de dividir un segmento en media y extrema razón, que ya conocían los pitagóricos por necesitar resolverlo para construir el pentágono regular. Por otro lado para encontrar el segmento que llamaron *áureo* ($\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) recurrían al *gnomo*, el cual les permitía dividir el segmento en otros dos, formando un rectángulo de área dada. Esto último esta ligado al problema de construir una figura congruente con una dada y semejante a una tercera, para el caso particular de un cuadrado [28], esto conduce a la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

haciendo operaciones se produce:

$$x^2 = a(a - x)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = a^2 - ax$$

por lo tanto

$$x^2 + ax = a^2$$

que es el caso de la ecuación $x^2 + px = q$ que se obtuvo en la proposición II-4.

Proposición II-5 [26]

Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta total más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes es igual al cuadrado de la mitad de la recta dada.[4]

Córtese pues, una recta cualquiera, AB, en partes iguales por el punto G; y en desiguales por el D.

Digo que el rectángulo comprendido por AD, DB más el cuadrado de GD es igual al cuadrado de GB (Fig. 22).

Demostración

Sobre GB constrúyase el cuadrado GEZB, y trácese BE, y por el punto D trácese la DH paralela a cada una de las rectas GE, BZ, y por el punto T trácese además la KM paralela a cada una de las rectas EZ, AB, y de nuevo por el punto A trácese la AK paralela a las rectas GL, BM. Puesto que el complemento GT es igual al complemento TZ, añádase el cuadrado DM común; el cuadrado GM entero será igual al DZ entero. Mas el GM es igual al AL, porque la recta AG es igual a la GB; por tanto también el AL será igual al DZ. Añádase el GT común; será por tanto, el AT entero igual al gnomo XCN, (que consta del rectángulo HM más el cuadrado MD más el rectángulo DL) más el AT es el comprendido por las rectas AD, DB, porque la DT es igual a la DB, luego también el gnomo XCN será igual al comprendido por las rectas AD, DB. Añádase el cuadrado LH común, que es igual al cuadrado del lado GD; será por tanto, el gnomo XCN más el LH igual al rectángulo comprendido por las rectas AD, DB más el cuadrado de

[4] Al analizar la interpretación algebraica, se puede notar que, esta proposición trata de una aplicación elíptica de área: es decir, si se considera un segmento rectilíneo dado $AB = a$, entonces constrúyase un rectángulo AT equivalente a un cuadrado dado b^2, de modo que la parte del área que *falte* ($\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$) del rectángulo ax sobre AB sea un cuadrado $BT = x^2$ [28]

la GD. Más, el gnomo XCN junto con el LH entero hacen el cuadrado GEZB, que es el construído sobre el lado GB, luego el rectángulo comprendido por las rectas AD, DB más el cuadrado de la GD es igual al cuadrado de la GB. Así al dividir una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes es igual al cuadrado de la mitad de la recta dada. Que es lo que se había que demostrar.

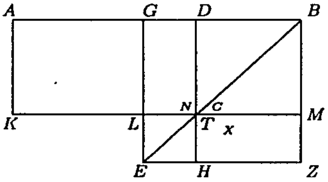


Figura 22.

La proposición anterior lo que nos dice en notación actual es lo siguiente:

$$\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{GD}^2 = \overline{GB}^2$$

Para encontrar la solución algebraica a este problema, se dividirá en dos casos; uno para cuando $x < \frac{1}{2}p$ y el segundo, cuando $x > \frac{1}{2}p$.

Primer Caso: Sea $\overline{AD} = p - x$, $\overline{DB} = x$, $\overline{GD} = \frac{1}{2}p - x$ y $\overline{GB} = \frac{1}{2}p$. Si se sustituye en la ecuación producida de la figura 22 se obtiene lo siguiente:

$$(p - x)x + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

ahora, como es una ecuación de la forma

$$x^2 + q = px \qquad \Rightarrow \qquad q = px - x^2$$

entonces

$$q + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$
$$(\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 - q$$
$$(\tfrac{1}{2}p - x) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

por lo tanto

$$x = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

que es la solución a la ecuación $x^2 + q = px$ para el caso $x < \frac{1}{2}p$ (Fig. 23).

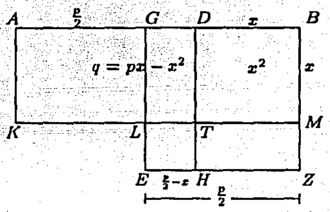


Figura 23.

Segundo Caso: Sea $\overline{GB} = x$, $\overline{AD} = \overline{DB} = \frac{1}{2}p$, entonces $\overline{AG} = p - x$. Si sustituimos en la ecuación que se produjo de la figura 22 estos valores, obtenemos lo siguiente:

$$(p - x)x + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

como en el caso anterior, tenemos que:

$$x^2 + q = px \qquad \Rightarrow \qquad q = px - x^2$$

entonces

$$q + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$\Rightarrow \qquad (x - \tfrac{1}{2}p) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

que es la solución de la ecuación $x^2 + q = px$ para el caso $x > \frac{1}{2}p$. A continuación se exhibe la figura que da solución geométrica a este caso (Fig. 24).

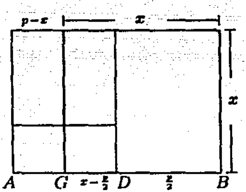


Figura 24.

Por último se tiene la ecuación de la forma:

$$x^2 = px + q$$

que se obtiene de la proposición II-6.

Proposición II-6 [26]

Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida.[5]

Córtese en dos por el punto G la recta AB y añádasele en recta BD.

Digo que el rectángulo comprendido por las rectas AD, DB junto con el cuadrado de la GB es igual al cuadrado de la GD (Fig. 25).

Demostración

Constrúyase sobre la GD el cuadrado GEZD, y trácese la recta DE; y por el punto B trácese la BH, paralela a cada una de las EG, DZ y por el

[5] Esta proposición es una aplicación hiperbólica de áreas, [28] es decir: constrúyase sobre un segmento dado $AB = a$ un rectángulo AM equivalente a un cuadrado dado b^2, de tal modo que la parte del área que *sobre* (υπερβολη), sea un cuadrado, cuya traducción algebraica es la igualdad:

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$$

Euclides va a generalizar esta proposición y la anterior en *Data* 84 y 85 tomando el caso de paralelogramos en lugar de rectángulos llevándolo así a resolver la doble ecuación:

$$ax \pm x^2 = b^2.$$

punto T trácese la KM paralela a cada una de las AB, EZ y por el punto A trácese la AK paralela a cada una de las GL, DM. Ahora bien: puesto que la AG es igual a la GB será también igual rectángulo AL con el GT. Mas el GT es igual al TZ, luego también el AL es igual Al TZ. Añádase el común GM; el AM entero será, entonces, igual al gnomo NXO (que consta del rectángulo HM más el cuadrado MB más el rectángulo BL). Mas el AM está comprendido por las rectas AD, DB, porque la DM es igual a DB, luego también el gnomo NXO será igual al rectángulo comprendido por las rectas AD, DB. Añádase el común LH, que es igual al cuadrado de la BG, luego el rectángulo comprendido por las rectas AD, DB más el cuadrado de la GB es igual al gnomo NXO y LH. Mas el gnomo NXO y el LH entero hacen el cuadrado GEZD, que es el construído sobre el lado GD, luego el rectángulo comprendido por las AD, DB más el cuadrado de la GB es igual al cuadrado de la GD. Luego si se divide una recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta por la línea mitad y por la añadida. Que es lo que se había que demostrar.

La proposición anterior lo que nos dice en notación actual es lo siguiente:

$$\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\overline{GB}^2=\overline{GD}^2$$

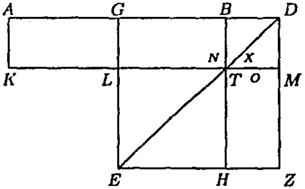


Figura 25.

La solución algebraica al igual que la proposición anterior, se dará en dos casos; con la diferancia, que el primero de éstos se va a llevar al caso $x^2+px=q$ con $x<\frac{p}{2}$ dada su similitud con la proposición II-4 y el segundo, cuando no se pueda llevar a éste, es decir, $x>\frac{p}{2}$.[6]

Primer Caso: Si se sustituyen los valores; $\overline{BD}=x$ y $\overline{AG}=\overline{GB}=\frac{1}{2}p$,

[6]Existe un tercer caso cuando $x=\frac{p}{2}$, éste no fue estudiado hasta el florecimiento de los Arabes.

en la ecuación que se produjo de la figura 25 obtenemos:

$$(x+p)x+(\tfrac{1}{2}p)^2=(x+\tfrac{1}{2}p)^2$$

pero sabemos que

$$x^2+px=q$$

entonces

$$q+(\tfrac{1}{2}p)^2=(x+\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$\Rightarrow \qquad (x+\tfrac{1}{2}p)=\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2+q}$$

$$\Rightarrow \qquad x=\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2+q}-\tfrac{1}{2}p$$

lo anterior es la solución a la ecuación $x^2=px+q$, llevada a la forma $x^2+px=q$ (Fig. 26).

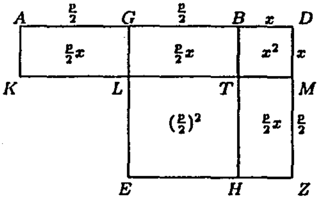


Figura 26.

Segundo Caso: La ecuación no se puede llevar a la forma $x^2+px=q$ y $x>\frac{p}{2}$. Solución geométrica (Fig. 27):

$$\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\overline{GB}^2=\overline{GD}^2$$

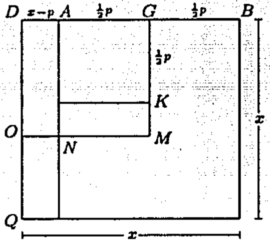


Figura 27.

Interpretación de la solución algebraica: Si igualamos: $\overline{DB} = x$ y $\overline{AG} = \overline{GB} = \frac{1}{2}p$ y se sustituye(en la misma forma como hasta ahora) se obtiene:

$$(x-p)x + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (x - \tfrac{1}{2}p)^2$$

pero sabemos que

$$x^2 = px + q \quad \Rightarrow \quad q = x^2 - px$$

entonces

$$q + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (x - \tfrac{1}{2}p)^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q} = (x - \tfrac{1}{2}p)$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q} + \tfrac{1}{2}p$$

Lo anterior es la solución a la ecuación $x^2 = px + q$, para el caso en que no se pueda llevar a la forma $x^2 + px = q$.

Una cuarta forma de ecuación de segundo grado sería:

$$x^2 + px + q = 0$$

¿Qué pasa con esta ecuación la cual no se encontró por ningún lado en el estudio realizado?.

Si se analiza la solución algebraica de los tres casos anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$x^2 + px = q \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q} - \tfrac{p}{2}$$
$$x^2 + q = px \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$
$$x^2 = px + q \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q} \pm \tfrac{p}{2}$$

se puede decir que los signos de las raíces son de la forma:

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & - \\ + & - & + & - \end{array}$$

para la proposición II-5 las raíces son del tipo de la primera columna, mientras que la segunda y tercera columna, corresponden a los signos de las soluciones de las proposiciones II-4 y 6, la última columna corresponde a la ecuación del tipo $x^2 + px + q = 0$, esto quiere decir que, para las proposiciones II-4, 5, 6 al menos existe una solución positiva, para el último caso las dos raíces son negativas, es decir, no tiene solución geométrica, que era el objetivo de los griegos. Este es el motivo por el cual no se realizará un estudio sobre la ecuación que ahora se le conoce como la *general de segundo grado.*

Ejemplo G.1

Entre los ejemplos que podemos mencionar tenemos uno que se encontró en la proposición 58 de los *Datos*, la cual es un caso de *Elementos* VI-28, este ejemplo es el siguiente:

$$x^2 + 21 = 10x$$

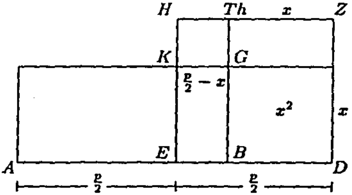


Figura 28.

En la figura 28 se tiene que $\overline{AD} = p = 10$, así el desarrollo de Euclides se plantea como sigue:

- $\overline{AD}$ se biseca por E de manera que $\overline{ED}$ es conocido	$\frac{1}{2}p$	5
- Se construye el cuadrado EDZH, también es conocido	$(\frac{1}{2}p)^2$	25
- El rectángulo AG más el cuadrado GH es igual a $\overline{ED}^2$ se conoce	$q + (\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{1}{2}p)^2$	$21 + (\frac{p}{2} - x)^2 = 25$
- También el cuadrado GH es conocido	$(\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$	$(\frac{p}{2} - x)^2 = 25 - 21$
- También el lado $\overline{EB}$ es conocido	$(\frac{p}{2} - x) = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$	$\frac{p}{2} - x = 2$
- También $\overline{BD}$ es conocido	$x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$	$x = 5 - 2$
- Así		$x = 3$

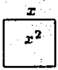
Hay que hacer notar que este desarrollo es idéntico en los babilonios y árabes.

Otro ejemplo que podemos mencionar es el siguiente:

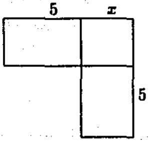
Ejemplo G.2

$$x^2 + 10x = 39$$

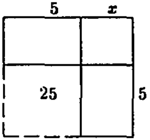
Describiremos la solución paso a paso para visualizar mejor el contenido geométrico de ésta.
a) Se coloca el cuadrado de x



b) Se toma la mitad del término en x y se junta al cuadrado x, obteniendo así un *gnomo*.



c) Se completa el cuadrado



d) Obtenemos el área total, ¿ de qué forma ?. Como se sabe el *gnomo* significa el término independiente de la ecuación de segundo grado es decir

q, que en este caso es 39, por otro lado al completar el cuadrado de lado $5+x$ se obtiene un cuadrado de área 25, por lo tanto el área total es $25+39$ que es igual a 64.
e) Se toma la raíz cuadrada para obtener el lado del cuadrado total, ésta es 8. Esto se puede hacer, ya que, los Babilonios ya tenían tablas de raíces, o en su defecto la proposición II-14 de los *Elementos* nos habla del método geométrico para encontrar la raíz de cualquier número.
f) Como sabemos que el lado del cuadrado total vale 8 y tenemos que un pedazo de este lado es 5 entonces, todo el problema se reduce a una ecuación de primer grado que es la siguiente:

$$5+x=8 \qquad \Rightarrow \qquad x=3$$

que es la solución a la ecuación $x^2+10x=39$, la raíz negativa ($x=-13$) se ignora.

A continuación daremos paso a un análisis que se efectuó acerca del libro de los *Data*, como un complemento del estudio de las ecuaciones de segundo grado, y donde nos encontramos un interesante desarrollo sobre la solución de una ecuación bicuadrática (ecuaciones que tiene dos incógnitas que son números cuadrados).

-*Data* 59 se refiere a *Elementos* VI-29, que trata de las ecuaciones del tipo $x^2+px=q$

Es interesante también observar los siguientes ejemplos que se encuentran en los *Data*:

$$\begin{array}{lllll} Data: & 84 & x\cdot y=q; & x-y=q \\ Data: & 85 & x\cdot y=q; & x+y=p \\ Data: & 86 & x\cdot y=q; & x^2-y^2=d^2 \end{array}$$

Así también se encontró que: *Data* 84 nos conduce a *Data* 59, únicamente que $y=x-p$ y que $q=x(x-p)=x^2-px$, es decir, la solución de la ecuación $x^2=px+q$ (la forma anterior falta en *Elementos* VI-28 y VI-29).

Data 85 nos lleva a *Data* 58 y *Elementos* VI-26, lo interesante aquí es que se toma sólo $x<\frac{1}{2}p$ (el otro caso, es decir, $x>\frac{1}{2}p$ lo estudio abū Kāmil).

Data 86 es el ejemplo más antiguo de una ecuación bicuadrática en la matemática griega. El tratamiento que se le da a este problema, nos muestra un caracter muy avanzado por Euclides en el álgebra. Este ejemplo es el siguiente:

$$x^2 - y^2 = d^2 = 16$$
$$xy = q^2 = 15$$
$$xz = d^2 = 16;$$
$$z = \frac{d^2}{x} = \frac{16}{x}$$

$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = AB \cdot BD$	falta	$x^2 - y^2 = xz$	$= 16;$
$[AB \cdot (AB - BD) = \overline{BC}^2]$	en		
$AB \cdot AD = \overline{BC}^2$	Euclides	$x(x-z) = y^2$	
$\frac{AB \cdot BD}{AB \cdot BC}$	es conocido	$\frac{xz}{xy} = \frac{d^2}{q^2}$	$= \frac{16}{15};$
$\frac{BD}{BC}$	es conocido	$\frac{z}{y} = \frac{d^2}{q^2}$	$= \frac{16}{15};$
$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2}$	es conocido	$\frac{z^2}{y^2} = \frac{d^4}{q^4}$	$= \frac{256}{225};$
$\overline{BC}^2 = AB \cdot AD$	es conocido	$y^2 = x(x-z)$	
por tanto $\frac{AB \cdot AD}{\overline{BD}^2}$	es conocido	$\frac{x(x-z)}{z^2} = \frac{q^4}{d^4}$	$= \frac{225}{256};$
$\frac{4AB \cdot AD + \overline{BD}^2}{\overline{BD}^2}$	es conocido	$\frac{4x(x-z)+z^2}{z^2} = \frac{4q^4+d^4}{d^4}$	$= 4\frac{225}{256} + 1;$
$\frac{(AB+AD)^2}{\overline{BD}^2}$	es conocido	$\frac{(2x-z)^2}{z^2} = \frac{4q^4+d^4}{d^4}$	$= \frac{289}{64};$
$\frac{AB+AD}{BD}$	es conocido	$\frac{2x-z}{2} = \sqrt{\frac{4q^4+d^4}{d^4}} + 1$	$= \frac{17}{8};$
$\frac{AB+AD+DB}{BD}$	es conocido	$\frac{x+(x-z)+z}{z} = \sqrt{\frac{4q^4+d^4}{d^4}} + 1$	$= \frac{25}{8};$
$\frac{2AB}{BD}$	es conocido	$\frac{2x}{z} = \sqrt{\frac{q^4+d^4}{d^4}} + 1$	$= \frac{25}{8};$
$\frac{AB}{BD}$	es conocido	$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{4q^4+d^4}{d^4}} + 1)$	$= \frac{25}{16};$
haciendo $AB \cdot BD$	es conocido	$xz = d^2$	$= 16;$
$\overline{AB}^2$	es conocido	$x^2 = \frac{1}{2}d^2(\sqrt{\frac{4q^4+d^4}{d^4}} + 1)$	$= 25;$
AB	es conocido	$x = \sqrt{\frac{1}{2}d^2(\sqrt{\frac{4q^4+d^4}{d^4}} + 1)}$	$= 5;$
BC	es conocido	$y = \frac{q^2}{x}$	$= 3.$

La figura solución es la siguiente (Fig. 29.):

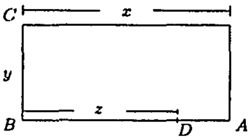


Figura 29.

Es interesante indicar que Proclo en el comentario del libro I de los *Elementos* [29] asegura que las aplicaciones de área, que en este ejemplo se manejan, se remontan a la escuela pitágorica, pero en los análisis establecidos sobre los egipcios y babilonios vemos que estos son de mayor antiguedad.

Conclusión

Como puede darse cuenta el lector, Euclides es uno de los pioneros en resolver ecuaciones de segundo orden por métodos geométricos, lo cual lo hacen por la sencilles y maestría con que expone el análisis, uno de los más grandes matemáticos de su tiempo, además de que es una de las principales fuentes de inspiración para el desarrollo de la matemática moderna.

La metemática en Euclides como se apunta, empieza a ser más formal esto lo observamos en la precisión de los enunciados, el mecanismo de las demostraciones, la concatenación de los teoremas y el deseo de reducir al mínimo los fundamentos de las deducciones, esto convierte a la geometría en una ciencia autónoma de la todavía no conocida álgebra.

Héron de Alejandría

(Florecimiento en el año 62 d. c.)

Héron es otro de los grandes matemáticos griegos, su nombre aparece en algunos trabajos, que estan escritos en griego, existiendo dos obras más, una redactada en árabe como lo es *La Mecánica* y en latín *Optica*. Aparte de estos datos no se sabe nada de cierto de Héron, provocando un sin fin de teorías acerca de él, una de éstas es la fecha de su florecimiento, la cual deduce Neugebauer [14] apartir de un eclipse de luna que se observó por el año 62 d. c. y que Héron hace referencia en su libro titulado *Dioptra*. Esta fecha aunque ambigua puede ser un acercamiento a la edad de Héron ya que no ocurrió un eclipse de estas características hasta 500 años después.

Fuentes Arabes nos indican que Héron escribió un comentario sobre los *Elementos*, la nomenclatura que utiliza tiene rasgos más algebraicos, II-4, 5, 6, es un ejemplo de ésto. A continuación veamos cual es análisis que hace Héron para la proposición II-5.

Al comenzar se hace la siguiente consideración: cuando $\overline{ag} = \overline{bg}$ entonces

$$\overline{ad}\cdot\overline{bd}+\overline{dg}^2=\overline{bg}^2$$

es decir

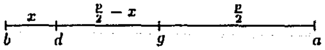


Figura 30.

El análisis parte sobre el lado izquierdo y concluye en el derecho, en una segunda etapa se parte por la derecha y se finaliza en la izquierda. Los resultados son los siguientes:

1)	$\overline{ad}\cdot\overline{bd}+\overline{dg}^2$	$(p-x)\cdot x+(\frac{1}{2}p-x)^2$
2)	$(\overline{ag}+\overline{gd})\cdot\overline{bd}+\overline{dg}^2$	$[\frac{1}{2}p+(\frac{1}{2}p-x)]\cdot x+(\frac{1}{2}p-x)^2$
3)	$(\overline{bg}+\overline{gd})\cdot\overline{bd}+\overline{dg}^2$	
4)	$\overline{bg}\cdot\overline{bd}+\overline{gd}\cdot\overline{bd}+\overline{dg}^2$	$\frac{1}{2}px+(\frac{1}{2}p-x)\cdot x+(\frac{1}{2}p-x)^2$
5)	$\overline{bg}\cdot\overline{bd}+\overline{dg}\cdot(\overline{bd}+\overline{dg})$	$\frac{1}{2}px+(\frac{1}{2}p-x)[x+(\frac{1}{2}p-x)]$
6)	$\overline{bg}\cdot\overline{bd}+\overline{gd}\cdot\overline{bg}$	$\frac{1}{2}px+(\frac{1}{2}p-x)\cdot\frac{1}{2}p$
7)	$\overline{bg}\cdot(\overline{bd}+\overline{gd})$	$\frac{1}{2}p[x+(\frac{1}{2}p-x)]$
8)	$\overline{bg}\cdot\overline{bg}$	$\frac{1}{2}p\cdot\frac{1}{2}p$

Veamos ahora la demostración corta que hace Héron para la proposición II-6: demostrar que $\overline{ad}\cdot\overline{bd}+\overline{bg}^2=\overline{gd}^2$

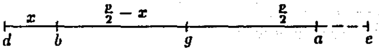


Figura 31.

El segmento $\overline{da}$, se prolongará por el extremo a con la condición $\overline{ae}=\overline{db}$, siendo g el punto medio de $\overline{de}$ y por lo tanto se aplica II-5, quedando demostrada la proposición.

En su obra la *Métrica*, se encuentra un sólo ejemplo de ecuación de segundo grado, ésta es: Se tiene un triángulo con los siguientes lados

$$\overline{AB}=13,\quad \overline{BC}=14,\quad \overline{CA}=15$$

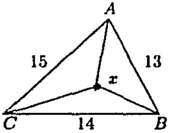


Figura 32.

Se quiere encontrar un punto x dentro del triángulo en el cual las áreas formadas por el punto x y los vértices sean iguales, además se tiene que:

$$x+y=14$$

$$xy=\frac{6720}{144}$$

resolviendo el sistema nos produce la ecuación:

$$x^2-14x+\frac{6720}{144}=0$$

cuya solución es:

$$x=7\pm\sqrt{2\tfrac{1}{3}}$$

El valor que encuentra Héron es una aproximación, pero es importante notar que de las raíces positivas el toma la mayor, $x_2>\frac{1}{2}p$. Euclides tomará la raíz menor, los dos coinciden en afirmar que x^2 tiene coeficiente 1. También hay que decir, que el tiempo que transita entre Euclides y Héron, los matemáticos griegos tomaban el valor mayor de la raíz.

En la *Geométrica* se encuentra una segunda ecuación cuadrática la cual nace del siguiente problema: Sean tres números a, b, c que suman 212. ¿A cuánto equivalen estos números?. Este problema lo planteó Héron de una forma que en notación moderna sería el siguiente:

$$x + \tfrac{22}{7}x + \tfrac{11}{14}x^2 = 212$$

Una primera pregunta para nosotros es: ¿Qué significa cada término?. Si tomamos en cuenta que:
Perímetro de una circunferencia es igual a $2\pi r$,
Area es igual a πr^2,
Diámetro es igual a $2r$.
Consideremos entonces lo siguiente: Sea $x = 2r$

$$\Rightarrow \quad 2r + \tfrac{22}{7}2r + \tfrac{11}{14}(2r)^2 = 212$$

$$\Rightarrow \quad 2r + \tfrac{22}{7}2r + \tfrac{11}{14}(4r^2) = 212$$

$$\Rightarrow \quad 2r + \pi 2r + \tfrac{44}{14}r^2 = 212$$

Si al tercer término se multiplica por un uno de la siguiente forma $\frac{\pi}{\pi}$ se tiene que:

$$\Rightarrow \quad 2r + \pi 2r + \tfrac{44}{14}\tfrac{\pi}{\pi}r^2 = 212$$

$$\Rightarrow \quad 2r + \pi 2r + \tfrac{44}{44.044}\pi r^2 = 212$$

por lo tanto:
El primer término es el diámetro de la circunferencia,
El segundo es el perímetro,
El tercero es el área,
Y algo muy importante $\frac{22}{7} \approx \pi$.

La solución de esta ecuación esta dada de la siguiente manera: A la ecuación original se le multiplica por 154 obteniendo:

$$154(\tfrac{11}{14}x^2 + \tfrac{29}{7}x) = (212)(154)$$

$$11^2x^2 + (2)(11)(29)(x) = (212)(154)$$

si se completa el cuadrado (algebraicamente) se tiene:

$$11^2x^2 + (2)(11)(29)(x) + 29^2 = (212)(154) + 841 = 33489$$

$$\Rightarrow \quad (11x + 29)^2 = 33489$$

tomando la raíz cuadrada de ambos lados se obtiene:

$$(11x + 29) = 183$$

$$11x = 183 - 29 \quad \Rightarrow \quad x = 14$$

que es la solución a la ecuación propuesta.

El siguiente problema también es de Héron, y al igual que el anterior hay que interpretar los términos de la ecuación:

$$x^2 + 4x = 896$$

Esto es relativamente sencillo, ya que se puede notar que el término x es el lado de un cuadrado y x^2 obviamente su área, es decir:

$$A + L = 896$$

una posible solución geométrica se puede dar en base a la proposición II-4 de los Elementos de Euclides (Fig. 33.).

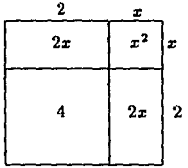


Figura 33.

el área total esta dada por:

$$A_T = 4 + 896 = 900$$

se extrae raíz cuadrada entonces:

$$\sqrt{900} = 30$$

así encontramos el lado del cuadrado, entonces:

$$2 + x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 28$$

Conclusión

En base a la metemática de Euclides, Héron sintetiza algunos resultados sobre ecuaciones cuadráticas, esto se nota claramente en las soluciones que da a este tipo de ecuaciones. Es importante notar además, que la concepción de la matemática griega ha significado un cambio radical, ya que en los dos último problemas expuestos por Héron se puede observar que suman líneas y áreas, lo cual va en contra del principio de dimensión de la matemática clásica.

Excursus I

Números Figurados

Un número figurado es aquel que se le representa mediante puntos que forman figuras.

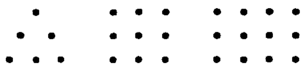


Figura 1.

Al parecer, lo dicho anteriormente, hablar de los números figurados es una tarea trivial. Pero asombrarse es lo menos que se puede hacer; si se considera la seria atención que pusieron sobre el tema, los filósofos griegos en el transcurso del período, desde Filolao (siglo V a.c.), hasta Proclo (siglo V d.c.). Para poder comprender lo anterior se examinara una de las primeras manifestaciones de dualidad como es lo, *par* e *impar*, que fue planteada en un principio por los pitagóricos y que posteriormente la retomaron los platónicos.

Para plantearlo en términos originales se transcribirá uno de los apartados de los fragmentos de Filolao *Sobre la Naturaleza*.

"El número tiene dos especies eidéticas propias: par e impar, y una tercera mezcla de entre ambas: la par-impar."

"Y en ambas especies eidéticas hay muchas formas que por sí mismo indica cada número."

Así la cuestión de paridad es un concepto primario en la matemática pitagóricas, pero la dicotomía de lo *par* e *impar* se ha de contemplar en un horizonte más amplio, como lo es en una lista de los diez contrarios preservada por Aristóteles en su *Metafísica* [30].

Finito	Infinito
Par	*Impar*
Unidad	Pluralidad
Derecha	Izquierda
Macho	Hembra
Reposo	Movimiento
Rectilínio	Curvo
Luz	Tinieblas
Bien	Mal
Cuadrado	Cuadrilátero Irregular

Se encuentra en esta tabla que la dualidad *par-impar* sólo puede compararse con la par "Limitado-Ilimitado".

Para ilustrar lo anterior se dará el siguiente ejemplo: Se consideran dos números 4 y 5, y se colocan de una manera simétrica, como en la figura 2.

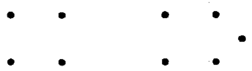


Figura 2.

Si se intenta dividir en dos partes iguales el 4, éste no ofrecerá ningún problema; pero un procedimiento análogo con el número 5 se verá que a éste le sobrará una unidad, como en la figura 3.

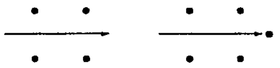


Figura 3.

El proceso es completamente análogo para cualesquiera dos números, uno *par* y el otro *impar*. Es en este sentido que lo *impar* es limitado y lo *par* es ilimitado.

Para dar una definición más rigurosa de lo que es un número figurado se debere definir primero lo que es un:

Gnomo

El *gnomo* era un instrumento que fue importado a Grecia desde Babilonia alrededor del siglo VI a. c. constaba de una varita perpendicular que proyectaba la sombra producida por el Sol sobre un disco, que servía para conocer la posición del Sol y el curso del tiempo.

Más tarde por extensión, se denominó *gnomo* a una escuadra de carpintero, pasando así como una mera analogía, a los números figurados.

La definición geométrica del concepto de *gnomo* se tiene en el Libro II (definición 2) y en la proposición I-44 de los Elementos de Euclides, entonces en este espacio daremos la definición desde el punto de vista aritmético:

"Un gnomo es aquel número que, cuando se suma a una clase dada de números figurados consecutivos, produce el siguiente término en aquella clase." [27].

La definición es moderna pero no por ésto, incoherente desde el punto de vista histórico. Para probarlo se darán tres definiciones más, elaboradas por Knorr [27], para luego compararlas con un texto original de Jámblico.

"Cuando el primer término de una clase de números figurados es la unidad, y los gnomones son los enteros sucesivos comenzando por el dos, la clase formada es aquélla de los números triangulares."

"Cuando el primer término es de una clase de números figurados es la unidad, y los gnomones son los enteros impares sucesivos comenzando por el tres, la clase formada es aquélla de los números cuadrados."

"Cuando el primer término de una clase de números figurados es la unidad, y los gnomones son los enteros impares sucesivos comenzando por el cuatro, la clase formada es aquella de los números Heterométicos u oblongos."

Comparemos ahora lo que nos dice Jámblico en un fragmento de sus comentarios de la *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco:

"En la representación de los números poligonales dos de los lados en todos los casos permanecen los mismos y son producidos; pero los lados adicionales son incluídos por la aplicación del gnomo y siempre cambian. Hay uno de tales lados adicionales en el caso del triángulo, dos en el caso del cuadrado, tres en el caso del pentágono, y así indefinidamente; la diferencia entre el número de lados del polígono (de muchos lados) y el número de lados que cambia es dos." (véase [33], pp. 124).

Este lenguaje es relativamente obscuro pero se aclara si se observa la figura 4.

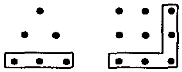


Figura 4.

las cuales son representaciones de los números 6 y 9 terceros en la lista de los números triangulares y cuadrados respectivamente (véase tabla 1, [33], pp. 124), aquí el *gnomo* es el número de puntos que estan encerrados en el rectángulo.

TABLA 1									
Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	36	45
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	92	117
Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91	120	153
Heptagonales	1	7	18	34	55	81	112	148	189

Como se puede notar aunque todo este desarrollo se da desde un punto de vista aritmético, se puede fácilmente visualizar desde un punto de vista geométrico.

De todo lo anterior surge un interesante tema, en el cual el concepto de número figurado y principalmente el de *gnomo*, juegan un papel fundamental, éste es la teoría de las:

Tripletas Pitagóricas

A manera de recordatorio, diremos, que dichas tripletas son números enteros que satisfacen el conocido teorema de Pitágoras, ($x^2 + y^2 = z^2$) el cual va a generar triángulos rectángulos. Una propiedad de estas ternas, es que no tienen factores en común. Sobre los denominadas tripletas podemos trazar sus orígenes desde el período Megalítico (4800-3000 a.c.) [31] pero no fue hasta la era pitagórica que se da un estudio amplio sobre este tema.

Pitágoras investigó el problema aritmético de encontrar números racionales, los cuales podrían ser los lados de los triángulos rectángulos o de cuadrados, los cuales son la suma de dos cuadrados, encontrándose así el comienzo del análisis indeterminado, extendiéndose éste, hasta la etapa del desarrollo de Diofanto. Afortunadamente Proclo conservó los métodos de solución pitagóricos en el siguiente pasaje. "*Ciertos métodos para el descubrimiento de triángulos de este tipo se los debemos a Platón y otros a Pitágoras. Estos comienzan por los números impares. Para esto tomaremos números impares pequeños de los lados que comprenden el ángulo recto, entonces tomemos su cuadrado, sustraemos la unidad y tomamos la mitad, los lados que comprenden el ángulo recto, finalmente sumamos la unidad y así formamos el resto del lado, la hipotenusa. Por ejemplo tomemos 3, cuadramos y sustraemos la unidad, así nos produce el 8 a éste, se le toma la mitad que es 4, entonces sumamos la unidad y así obtenemos 5 y encontramos un triángulo rectángulo de lado 3, 4 y 5. El método de Platón arguye para números pares. Si tomamos un número par y producimos uno de los lados que comprenden el ángulo recto; entonces bisectamos este número y cuadramos su mitad, a esto le sumamos la unidad, formaremos la hipotenusa y si sustraemos la unidad nos dará el otro lado alrededor del ángulo* *recto. Por ejemplo tomamos 4, cuadramos su mitad nos da 2 y produce 4; entonces sustraemos la unidad produciendo 3 y sumamos la unidad produce 5, así formamos el mismo triángulo que obtuvimos con el otro método"* [25].

La fórmula de Pitágoras si m es impar es:

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

los lados del triángulo rectángulo serán $m, m^2 - 1/2, m^2 + 1/2$. Mientras que la fórmula de Platón es:

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

donde n no necesariamente es impar.

Con éstas dos formas se pueden encontrar las tripletas que forman los triángulos rectángulos, pero ¿cómo llegaron a estas dos fórmulas sus respectivos autores?.

Moritz Cantor retomando una idea de Röth (*Geschichte der abendländischen Philosophie,II.527*) describe un posible camino con el cual los pitagóricos llegaron a su fórmula. Si se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$, ésto implica que:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

Estos números se pueden encontrar fácilmente si $c+b$ y $c-b$ son ambos pares o impares, y si $c+b$ y $c-b$ al multiplicarse se produce un número cuadrado. La primera condición es necesaria ya que c y b pueden ser números enteros y la suma o diferencia puede ser par, mientras que, la segunda condición se satisface, si $c+b$ y $c-b$ son números similares.[7]

Un caso simple de dos números similares es el 1 y a^2, y ya que 1 es impar la primera condición requiere que a^2 y por lo tanto a sea también impar. Se puede tomar ahora 1 y $(2n+1)^2$ como $c-b$ y $c+b$ respectivamente, entonces se tiene:

$$b = \frac{(2n+1)^2 - 1}{2},$$

$$c = \frac{(2n+1)^2 - 1}{2} + 1,$$

mientras que

$$a = 2n + 1.$$

[7] Estos números fueron conocidos probablemente antes de Platón, ésto se infiere a partir de que aparecen en Teón de Smirna, quien dijo: En el plano de los números similares están, primero, todos los números cuadrados, y segundo, cada número oblongo tiene en sus lados esta proporción. Ejemplo: 6 es un número oblongo con longitud 3 y anchura 2; 24 es otro número de este estilo, con longitud 6 y anchura 4. Ya que 6 es a 3, como 4 es a 2, entonces 6 y 24 son números similares [25][32].

Hay que notar que la forma de c y b corresponde a la descripción que da Proclo.

Otra posibilidad es que $c - b = 2$, en éste caso el número similar $c + b$ puede ser el doble del cuadrado, es decir, un número de la forma $2n^2$ o la mitad de un número cuadrado $(2n)^2/2$, de ésto resultaría:

$$a = 2n,$$

$$b = n^2 - 1,$$

$$c = n^2 + 1,$$

lo cual es la solución de Platón dada por Proclo.

Existe otro método de obtener las soluciones dadas por los platónicos y pitagóricos, lo que constituye una objeción a la conjetura de Cantor, ésta va en el sentido, de que tanto los platónicos como los pitagóricos pudieron con igual facilidad deducir este tipo de triángulos. Aunque en el caso de Pitágoras tal vez no uso este método, ya que de lo contrario éste no llegaría a la fórmula dada. Por otro lado, en lo que respecta a Platón, se le atribuye el descubrimiento de la segunda serie de triángulos semejantes.

Pitágoras parece haber usado otro método, en el cual estaba directamente involucrada la *observación*. Una solución satisfactoria a ésto, es lo siguiente: Pitágoras al estar enterado que los números impares consecutivos eran *gnomos*, (o la diferencia entre los números cuadrados consecutivos) escribió en tres columnas lo siguiente. En la primera los números naturales, en la segunda sus cuadrados, y en la tercera, los impares sucesivos, constituyendo la diferencia entre los cuadrados sucesivos en la segunda columna, así tenemos la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

Pitágoras sólo tomó los números de la tercera línea y la alzó donde están los cuadrados, de esta regla presumiblemente se obtendría, la fórmula para encontrar conexión, con los cuadrados de la tercera línea, y los dos cuadrados adyacentes en la segunda. Aunque esto también requiere de un pequeño argumento, hay que recalcar aquí, que la observación juega un papel importante. Es así como, la práctica de representar los números figurados la cual dominaban los griegos, les va a ser de gran ayuda. Un claro ejemplo es que se puede encontrar, dado un número cuadrado su próximo superior, ¿cómo?, añadiendo una línea de puntos alrededor de dos de los lados adyecentes en forma de *gnomo* (Fig. 5).

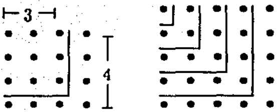


Figura 5.

Si a es el lado de un cuadrado, el *gnomo* será expuesto por pura inspección y contará con $2a+1$ puntos o unidades. Ahora bien como $2a+1$ puede ser un cuadrado, entonces:

$$2a+1=n^2$$

de donde

$$a=\tfrac{1}{2}(n^2-1)$$

y

$$a+1=\tfrac{1}{2}(n^2+1)$$

ahora como a y $a+1$ pueden ser enteros, n debe de ser impar, entonces así se tiene una de las fórmulas pitagóricas

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

Todo lo anterior se puede tomar como una teoría sólida, ya que, tenemos un comentario de Filoponus [25], el cual dice: "*Como una prueba... los pitagóricos hacen referencia que aconteció con la adición de los números; para cuando los números impares están sucesivamente sumados a un número cuadrado, éstos preservan este cuadrado y equilátero... Los números impares son llamados gnomos, porque cuando se suman están alrededor de los cuadrados, ellos preservan la forma cuadrada...* Alexander Aprodisiensis da exactamente una explicación de la frase "*cuando los gnomos están alrededor*", significa tomar una figura con los números impares "*por eso es la práctica de los pitagóricos al representar las cosas como figuras.*"

Por otro lado, si se acepta la explicación de la fórmula de Pitágoras, ¿qué se puede decir entonces de Platón?. Existen dos simples explicaciones:

1) Si se observa detenidamente la fórmula de Platón, se tiene el doble del lado del cuadrado en la fórmula pitagórica es decir:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

donde, sin embargo, n no necesariamente es impar.

2) Si para los Pitagóricos el *gnomo* consiste de una línea de puntos alrededor de dos lados adyacentes de un cuadrado, es natural pensar que otra solución podría ser un doble *gnomo*, es decir, una doble columna de puntos, este *gnomo* igualmente producirá un cuadrado aunque más grande. Sólo queda por saber una cosa, ¿este doble *gnomo* podrá ser un cuadrado?. Si el lado de un cuadrado es a, entonces es fácil observar que el número de unidades o de puntos en el doble *gnomo* está dado por $4a+4$ (Fig. 6), entonces tiene:

$$4a+4=4n^2$$

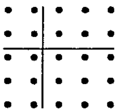


Figura 6.

por lo tanto $a=n^2-1$, luego entonces $a+2=n^2+1$ obteniéndose así la fórmula Platónica

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2.$$

Esto último se puede confirmar en Euclides II-8 (Fig. 7), la cual prueba que

$$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$

si sustituye a b por 1, se obtiene

$$4a+(a-1)^2=(a+1)^2$$

sea $a=n^2$ obteniéndose así la fórmula de Platón.

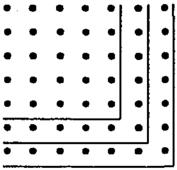


Figura 7.

Aplicación de Areas

En el comentario a la proposición I-44 de los *Elementos* de Euclides Proclo da una invaluable nota sobre la "*Aplicación de Areas*", el cual es uno de los métodos más poderosos realizados por la geometría griega.

Antes de seguir adelante tomemos en cuenta el comentario de la proposición I-4 de los *Elementos* en la cual se hace referencia a que Euclides emplea la palabra *εφαϱμοξειν*, (ajustar, encajar adaptarse) en el sentido de aplicar o trasladadar, una figura sobre otra, es decir, superponiéndolas, operación que puede hacerse ya que admite que *el espacio no ejerce acción deformante sobre los cuerpos cuando éstos se trasladan de un lugar a otro*, postulado que utilizaron todos los geómetras griegos sin enunciarlo explícitamente [28].

Habiendo tenido este antecedente regresamos a la proposición I-44. Proclo, tomando la noticia de Eudemo [25] nos dice: "*Estas cosas son muy viejas y son descubiertas por la musa de los pitagóricos*". Seguramente se está refiriendo a la *Aplicación, Excedente* y *Faltante* de áreas. Esto es creado por los últimos geómetras pitagóricos como Apolonio, que es el primero en llamar a estas cosas "*líneas cónicas*" designandolas como, *parábola* (aplicación), *hipérbola* (excedente), y *elipse* (faltante), siendo estas dos últimas comparadas respecto al círculo, que era la figura perfecta para los griegos. Como nos podemos dar cuenta, la construcción geométrica sobre la aplicación de áreas es de tres tipos:

1) Dada una línea y un cuadrado, si nosotros construimos un rectángulo sobre una línea como base y ésta es igual que un cuadrado la aplicación es, *igual* o *parabólica.*

2) Pero si el rectángulo es igual al cuadrado dado y es menor que la línea de base tal que el área del faltante es un cuadrado, la aplicación es *elíptica.*

3) Si el rectángulo es igual al cuadrado dado y es mayor que la línea de base tal que el área es un cuadrado entonces la aplicación es *hiperbólica* [8].

Como ya se mencionó Apolonio fue el primero en conceptualizar los términos parábola, hipérbola y elipse, los cuales expresan en cada caso la propiedad fundamental de las curvas establecidas por él. Esta propiedad fundamental es una equivalencia geométrica de la ecuación cartesiana referida a algún diámetro de la cónica y la tangente en su extremidad como ejes. Si el parámetro de los ordinales forman varios puntos de las cónicas dibujadas en un diámetro dado, sera denotado por p (p existe por consiguiente, en el caso de la hipérbola y elipse, ésto sera igual a $(d')^2/d$, donde d es la longitud del diámetro dado y d' su conjugado). Apolonio da las propiedades de las tres cónicas de la siguiente forma:

a) Para la parábola: el cuadrado sobre la ordenada, en algún punto es igual a un rectángulo aplicado a p como base y altura igual a la correspondiente abscisa. Esto dicho en notación usual es:

$$y^2 = px$$

b) Para la hipérbola y elipse: el cuadrado sobre la ordenada es igual a el rectángulo aplicado a p teniendo así el ancho de la abscisa y excediendo (para la hipérbola) o faltando (para la elipse), una figura, similar y situada similarmente al rectángulo contenido por el diámetro dado y p. Esto en la hipérbola es:

$$y^2 = px + \frac{x^2}{d^2}pd,$$

ó

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2,$$

mientras que para la elipse se tiene:

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2.$$

Capítulo 6

Etapa Diofantina

Ni de día ni de noche se os caigan de las manos los modelos griegos.

Horacio, Ars poetica

Diofanto de Alejandría

(Florecimiento en el año 250 d. c.)

Otro de los grandes matemáticos de la cultura griega es Diofanto del cual no se sabe nada a excepción de algunos datos aislados, como son: Diofanto florece en el siglo tercero, esto se deriva de un comentario de Michael Psellus (siglo XIX) en el que reporta que Anatolio un obispo de Laodicea (270 años a. c.) le dedica un tratado sobre computación egipcia a su amigo Diofanto. Este dato concuerda con la suposición que hace Dionsio sobre Diofanto al dedicarle a su vez a su amigo obispo su obra maestra *Aritmética*. Otros de los datos que se saben de este ilustre matemático son: se caso a la edad de 33 años, su hijo muere a la edad de 42 años, y cuatro años más tarde muere su padre a la edad de 84 años, esto es todo lo que se sabe de su vida.

De los pocos escritos que sobreviven de Diofanto, se conocen sólo cuatro, *Moriastica*, *Porismata*, *Números Poligonales*, *Aritmética*, de este último, que es su gran obra, nos habla de 13 libros, de los cuales sólo se tuvo conocimiento de seis, hasta hace pocos años que se encontraron los restantes. Estos libros son de gran importancia histórica y científica, ya que como alguna vez se refirió Regiomontano; *aquí se encuentra todo, la flor de la aritmética, el ars rei et census, llamada álgebra para los árabes.*

La *Aritmética* [33] presenta una colección de problemas determinados e indeterminados los cuales son tratados por ecuaciones y/o igualdades algebraicas. Diofanto generalmente procede para resolver los problemas por la forma más simple hasta llegar a lo más complicado, es decir, empieza a aumentar el grado a la ecuación así como el número de incognitas. A continuación se dará paso a describir los métodos de solución de ecuaciones, para luego enunciar algunos de los problemas más interesantes.

Los métodos de solución a ecuaciones en Diofanto las encontramos divididas en dos ramas:

A) Ecuaciones determinadas de cualquier grado

B) Ecuaciones indeterminadas

A) *Ecuaciones Determinadas*

En este tipo de ecuaciones encontramos las *puras*, *cuadráticas mixtas* (es decir, contienen incógnitas de diferentes grados), y las *simultáneas que involucran cuadráticas.*

1) *Ecuaciones Puras*: Estas ecuaciones Diofanto las trata como ecuaciones de primer grado sea cual sea su grado, ya que las reducía a una ecuación de la forma $Ax^m = B$, donde x puede tomar cualquier valor, ya sea racional, entero o fraccional; además si m es par, sólo se toma el valor positivo excluyendo el negativo por "imposible". Esto es viable ya que en la definición 11 nos dice que; *"se puede bajar el grado de la incógnita* (x) *con dividirla por alguna potencia de* x*"*, así también enuncia en esta definición, que si *"tenemos términos* (x) *comunes, aunque los coeficientes de éstos sean diferentes, los podemos reducir sumando estos coeficientes"*.[1] En base a esta definición Diofanto afirma que cuando dos términos están a la izquierda iguales a un término en la derecha la ecuación tiene solución, ésta puede estar dada por ensayo, prueba o experimento o por medio de límites enteros o forzados, *" es así que se puede comprender la solución que da Héron a la ecuación* $(14 - x)x = 6720/144$ *y a Hipocrates de Chios a la cuadratura de las lunas".*

En una ecuación ya identificada en Héron se puede observar alguno de estos procedimientos. Sea

$$\frac{11}{14}x^2 + \frac{29}{7}x = 212$$

se multiplica por un cierto número (154), entonces

$$121x^2 + 638x = 212 \cdot 154$$

cuya solución es

$$x = \sqrt{\frac{(154 \cdot 212 + 841) - 29}{11}}$$

[1] Esta definición la encontraremos también en al-Khuwārizmī con el nombre de *al-jabr y al-muqābala.*

Este método no se le puede atribuir a Diofanto pero en el tratamiento que hace de la ecuación $ax^2 - bx + c = 0$, lo aplica de la siguiente forma: Sea

$$ax^2 - bx + c = 0$$

se multiplica por a, se obtiene

$$a^2x^2 - bax + ac = 0$$

completando el cuadrado

$$ax = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - ac}$$

y

$$x = \frac{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - ac}}{a}$$

Así llegamos a:

2) *Ecuaciones Cuadráticas*: Estas ecuaciones se dividen en tres tipos según Diofanto.

$$\begin{array}{rlll} I) & mx^2 + px = q & con & x = \frac{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m} \\ II) & mx^2 = px + q & con & x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m} \\ III) & mx^2 + q = px & con & x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - mq}}{m} \end{array}$$

Tomando en cuenta todo lo anterior podemos pasar a:

3) *Ecuaciones Simultáneas que Involucran Cuadráticas.*

Diofanto nos las exhibe dando las siguientes pares de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc} \xi + \eta = 2a & \xi + \eta = 2a & \xi - \eta = 2a \\ \xi\eta = B & \xi^2 + \eta^2 = B & \xi\eta = B \end{array}$$

las letras griegas son los números que se desean encontrar.

En el primer par de ecuaciones se asigna $a = x$, y se hace:

$$\xi - \eta = 2x \qquad (\xi > \eta)$$

por adición y substracción se produce:

$$\xi = a + x \qquad \eta = a - x$$

en consecuencia

$$\xi\eta = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2 = B$$

de esta igualdad se puede encontrar fácilmente la x para la ecuación *pura* cuadrática.

Por otro lado si se elimina ξ de la ecuación original, tenemos:

$$\eta^2 - 2a\eta + B = 0$$

la cual se resuelve completando el cuadrado $(a - \eta)^2$, entonces se tiene:

$$(a - \eta)^2 = a^2 - B$$

Diofanto finaliza la ecuación asignandole $a - \eta$ a x

La solución para el segundo par de ecuaciones se expresa como sigue:

$$\xi^2 + \eta^2 = (a + x)^2 + (a - x)^2 = 2(a^2 + x^2) = B$$

Para resolver el tercer y último par de ecuaciones se usa que $\xi + \eta = 2x$ y se sigue el mismo procedimiento que en el primer caso.

Por último, en esta sección encontramos la única ecuación de tercer grado que aparece en la *Aritmética*, ésta se localiza en la proposición 17 del libro VI, la cual ponemos en forma actual para su mayor comprensión:

$$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$$

la solución simplemente se expone diciendo: *ya que x es encontrada debe de ser* 4. Haciendo un análisis de esta ecuación y usando un poco el álgebra se tiene que:

$$x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$$

Diofanto posiblemente no detecta el factor común,[2] pero nosotros si, entonces dividimos por ese término común a ambos lados de la ecuación obteniéndose así el valor de una raíz que es $x = 4$, las otras dos raíces son $x = \pm\sqrt{-1}$ las cuales no se toman en cuenta por obvia razón.

B) *Ecuaciones Indeterminadas de Segundo Grado*

En este tipo de ecuaciones a Diofanto no le interesa la forma de la raíz (entera ó racional) sólo toma en cuenta que sea positiva. ***Cabe aclarar que mucha de la información aquí recabada no nos es útil para nuestros propósitos, pero creo que es muy interesante el desarrollo, del planteamiento como de la solución de estas ecuaciones.***

a) La forma de estas ecuaciones es de 1 ó 2 (pero no más) incógnitas en la ecuación $Ax^2 + Bx + C$ ó de simples formas construidas por números

[2] O posiblemente usa el método del ensayo y/o error para dar solución a esta ecuación.

racionales para encontrar así un valor sustituible a x. El caso más general es el de resolver 1 ó 2 de la forma $Ax^2 + Bx + C = y^2$.

1) Ecuación Simple: Estas ecuaciones toman formas muy especiales cuando uno o más coeficientes se cancelan o satisfasen ciertas condiciones que Diofanto identifica como *"iguales a y^2"*, es decir, *"iguales a un cuadrado o toman un cuadrado"*, entre estas ecuaciones tenemos los siguientes casos:

1.1) Ecuaciones que siempre se pueden resolver racionalmente, esto es en el caso cuando A ó C ó ambas desaparecen.

Primer Caso: $Bx = y^2$, Diofanto lo que hace es sustiuir y^2 por un número cuadrado; Sea m^2 esta número entonces $x = m^2/B$.

Segundo Caso: $Bx + C = y^2$ se hace lo mismo que en el caso anterior entonces se tiene que $x = (m^2 - C)/B$ aquí se admiten valores fraccionarios para x, sólo con la repetida condición de que sea positivo.

Tercer Caso: $Ax^2 + Bx = y^2$ se sustituye y por algún multiplo de x como, mx/n, entonces $Ax^2 + Bx = m^2x/n^2$, el factor x desaparece y la raíz es $x = 0$, entonces $x = Bn^2/m^2 - An^2$.

1.2) Ecuaciones que sólo pueden resolverse racionalmente, si cumplen con ciertas condiciones. Estas ecuaciones son las siguientes:

Ecuación de la forma $Ax^2 + C = y^2$; ésta puede tener solución racional sólo cuando:

a) Cuando A es positiva y cuadrada, sea a^2, entonces

$$a^2x^2 + C = y^2$$

donde

$$y^2 = (ax \pm m)^2$$

por lo tanto

$$a^2x^2 + C = (ax \pm m)^2$$

entoces

$$x = \pm\frac{C - m^2}{2ma}$$

la m y el doble signo van a estar restringidos para una x positiva dada.

b) Cuando C es positiva y un cuadrado, sea c^2, entonces

$$Ax^2 + c^2 = y^2$$

aquí Diofanto hace

$$y = (mx \pm c)$$

por lo tanto

$$Ax^2 + c^2 = (mx \pm c)^2$$

así

$$x = \pm \frac{2mc}{A - m^2}$$

c) Cuando una solución es conocida, el número de la otra solución puede ser encontrada, esto es lo que enuncia Diofanto en el lema VI-15, sólo cuando C es negativa: *"Dados dos números, si uno es multiplicado por algún cuadrado y el otro es substraído formando el producto, el resultado es un cuadrado, entonces el otro cuadrado puede ser encontrado."*

El método que enuncia Diofanto para encontrar otro valor de x que satisfaga la ecuación $Ax^2 - C = y^2$ conociendo uno es el siguiente:

Supongase que x_0 es el valor conocido y que q es el correspondiente valor para y, entonces hacemos $x = x_0 + \xi$ en la expresión original, lo cual es equivalente a $(q - k\xi)^2$ donde k es algún valor entero. Ya que $A(x_0 + \xi)^2 - C = (q - k\xi)^2$ de aquí se sigue (por hipótesis $Ax_0^2 - C = q^2$) que:

$$2\xi(Ax_0 + kq) = \xi^2(k^2 - A)$$

entonces

$$\xi = \frac{2(Ax_0 + kq)}{k^2 - A}$$

y

$$x = x_0 + \frac{2(Ax_0 + kq)}{k^2 - A}$$

En un segundo lema (VI-12) Diofanto prueba que la ecuación $Ax^2 + C = y^2$ podría tener un número infinito de soluciones cuando $A + C$ sea un número cuadrado, es decir, en un caso particular donde $x = 1$.

El lema VI-15 es muy parecido, al citado anteriormente, así, supongase que $A + C = q^2$, si hacemos $1 + \xi$ para x en la expresión original $Ax^2 + C$ y concideramos la equivalencia $(q - k\xi)^2$ donde k es elemento de los enteros, entonces

$$A(1 + \xi)^2 + C = (q - k\xi)^2$$

de aquí se sigue

$$2\xi(A + kq) = \xi^2(k^2 - A)$$

por lo tanto

$$\xi = \frac{2(A + kq)}{k^2 - A}$$

y

$$x = 1 + \frac{2(A + kq)}{k^2 - A}$$

con $k^2 > A$

Es claro que si $x = 0$ satisface la ecuación, C es un cuadrado por lo tanto c) incluye el caso previo b).

Esto último se puede observar en la proposición VI-14 de la *Aritmética* en el cual Diofanto afirma: *"una solución racional de la ecuación $Ax^2 - c^2 = y^2$ es imposible a menos que A sea la suma de dos cuadrados"*, es decir, si $x = p/q$ y satisface la ecuación $Ax^2 - c^2 = k^2$, entonces $Ap^2 = c^2q^2 + k^2q^2$ ó

$$A = \left(\frac{cq}{p}\right)^2 + \left(\frac{kq}{p}\right)^2$$

Por último se considera la ecuación de forma: $Ax^2 + Bx + C = y^2$. Esta ecuación se puede reducir con un cambio de variable, es decir: $x = z - \frac{B}{2A}$, la cual, si sustituimos nos produce lo siguiente:

$$Az^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} = y^2$$

según Diofanto la solución sólo puede ser posible si:
a) Cuando A es positiva y un cuadrado o la ecuación es

$$a^2x^2 + Bx + C = y^2$$

si $y^2 = (ax - m)^2$, entonces $x = \frac{m^2 - C}{2am + B}$
b) Cuando C es positiva y un cuadrado o la ecuación es

$$Ax^2 + Bx + c^2 = y^2$$

si $y^2 = (c - mx)^2$, entonces $x = \frac{2mc + B}{m^2 - A}$
c) Cuando $\frac{1}{4}B^2 - AC$ es un número cuadrado y positivo, este caso Diofanto no lo enuncia explícitamente, pero lo usa en el problema IV-31 de la *Aritmética*. De aquí se puede deducir que es un caso de la forma

$$Ax^2 + C = y^2$$

Ahora, de acuerdo con Diofanto $Ax^2 + Bx + C = m^2x^2$, tiene solución

$$x = \frac{-\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC + Cm^2}}{A - m^2}$$

donde x es racional previendo que $\frac{1}{4}B^2 - AC + Cm^2$ es un cuadrado, y lo es, cuando $\frac{1}{4}B^2 - AC$ es un cuadrado. En caso contrario se puede resolver la ecuación

$$\tfrac{1}{4}B^2 - AC + Cm^2 = y^2$$

2) Ecuación Doble.

Se entiende por doble ecuación, como el problema de encontrar el valor de una cantidad desconocida, la cual tomará, dos diferentes funciones de un sistema racional de números cuadrados, es decir, se tiene que resolver el siguiente sistema:

$$mx^2 + \alpha x + a = u^2$$

$$nx^2 + \beta x + b = w^2$$

con números racionales. Una condición preliminar, es que cada una de las ecuaciones pueden crear un cuadrado, esto siempre es posible, cuando el término en x^2 desaparece, así el sistema se reduce al caso más simple, es decir:

I) *Ecuación Doble de Primer Grado*

Diofanto da un método general de resolver ecuaciones del tipo:

$$\alpha x + a = u^2$$

$$\beta x + b = w^2$$

tomando la diferencia acorde con la naturaleza de los coeficientes

α) Primer método de solución de

$$\alpha x + a = u^2$$

$$\beta x + b = w^2$$

este método depende en gran parte de la igualdad

$$[\tfrac{1}{2}(p+q)]^2 - [\tfrac{1}{2}(p-q)]^2 = pq$$

si la diferencia entre las dos expresiones es x se puede separar en dos factores p, q, éstos son iguales a $(\frac{1}{2}(p \pm q))^2$ respectivamente. Diofanto establece así lo siguiente: "*observar la diferencia* (entre las las dos expresiones), *busca dos números los cuales su producto debe ser igual a su diferencia; entonces ambas igualdades de la mitad de el cuadrado de las expresiones son menores o la suma de la mitad del cuadrado es mayor.*"

Aquí se tomará el caso general y se investigaran las clases de los casos particulares aplicables al punto de vista de Diofanto, recordando que sus casos son semejantes a ecuaciones cuadráticas en x reducidas a una ecuación de primer grado. Sea

$$\alpha x + a = u^2$$

$$\beta x + b = w^2$$

substrayendo tenemos

$$(\alpha-\beta)x+(a-b)=u^2-w^2$$

separamos $(\alpha-\beta)x+(a-b)$ en dos factores, éstos son p, $[(\alpha-\beta)x+(a-b)]/p$ entonces

$$u\pm w=\frac{(\alpha-\beta)x+a-b}{p};\quad u\mp w=p$$

así

$$u^2=\alpha x+a=\frac{1}{4}\left(\frac{(\alpha-\beta)x+a-b}{p}+p\right)^2$$

por lo tanto $[(\alpha-\beta)x+a-b+p^2]^2=4p^2(\alpha x+a)$, ó

$$(\alpha-\beta)^2x^2+2x[(\alpha-\beta)(a-b+p^2)-2p^2\alpha]+(a-b+p^2)^2-4ap^2=0$$

esto es,

$$(\alpha-\beta)^2x^2+2x[(\alpha-\beta)(a-b)-p^2(\alpha+\beta)]+(a-b)^2-2p^2(a+b)+p^4=0$$

Ahora, esta ecuación se puede reducir en cualquiera de los siguientes casos:
i) El coeficiente en x^2 puede desaparecer, así: $\alpha=\beta$
ii) El término independiente puede desaparecer, entonces:

$$p^4-2p^2(a+b)+(a-b)^2=0\quad o\quad [p^2-(a+b)]^2=4ab$$

donde a ó b ó ambos puede ser un número cuadrado, así podemos sustituir c^2 ó d^2 respectivamente, p entonces es igual a $c\pm d$ ó la razón de a a b que es la razón de un cuadrado a un cuadrado.

Por lo que respecta a i) la condición $\alpha-\beta$ puede no existir, es decir, podemos resolver la ecuación tomando los coeficientes de x iguales en ambas expresiones y multiplicarlas por un número cuadrado, esta operación no afecta, ya que la multiplicación de cuadrados da un cuadrado. En otras palabras sólo es necesario que la razón de α a β sera la razón de un cuadrado a un cuadrado. Así podemos hacer $\alpha/\beta=m^2/n^2$ ó $\alpha n^2=\beta m^2$, la ecuación se puede resolver multiplicando por un cuadrado n^2 y m^2, respectivamente, entonces podemos resolver la ecuación simple original:

$$\alpha m^2x+a=u^2$$

$$\alpha n^2x+b=w^2$$

semejante a la ecuación

$$\alpha x + a = u'^2$$

$$\beta x + d^2 = w'^2$$

con un infinito número de caminos posibles.

De nuevo, la ecuación bajo la condición ii)

$$\alpha x + c^2 = u^2$$

$$\beta x + d^2 = w^2$$

se puede resolver como en la expresión anterior o escribiéndola como sigue

$$\alpha d^2 x + c^2 d^2 = u'^2$$

$$\beta c^2 x + c^2 d^2 = w'^2$$

esto último se obtiene de multiplicar por d^2 y c^2, aquí los términos independientes pueden ser iguales.

A continuación se darán los posibles casos que se encuentran en los trabajos de Diofanto para dar solución a estas ecuaciones.

1) De la forma

$$\alpha m^2 x + a = u^2$$

$$\alpha n^2 x + b = w^2$$

este caso es el más común ya que los coeficientes de x son iguales.

2) De la forma

$$\alpha x + c^2 = u^2$$

$$\beta x + d^2 = w^2$$

al igual que en el caso anterior se puede dar solución a la ecuación de esta forma o escribiéndola como sigue

$$\alpha d^2 x + c^2 d^2 = u'^2$$

$$\beta c^2 x + c^2 d^2 = w'^2$$

Solución General para la forma 1) o

$$\alpha m^2 x + a = u^2$$

$$\alpha n^2 x + b = w^2$$

si se multiplica la ecuación por n^2, m^2 respectivamente, entonces se resolverá la ecuación

$$\alpha m^2 n^2 x + an^2 = u'^2$$
$$\alpha m^2 n^2 x + bm^2 = w'^2$$

la diferencia es $an^2 - bm^2$, supongase que están separadas en dos factores p y q. Sea $u' \pm w' = p$, $u' \mp w' = q$; por lo tanto

$$u'^2 = \tfrac{1}{4}(p+q)^2, \quad w'^2 = \tfrac{1}{4}(p-q)^2$$

y $\alpha m^2 n^2 x + an^2 = \frac{1}{4}(p+q)^2$ ó $\alpha m^2 n^2 x + bm^2 = \frac{1}{4}(p-q)^2$ cada una de las ecuaciones da el mismo valor para x el cual esta dado por

$$x = \frac{\frac{1}{4}(p^2+q^2) - \frac{1}{2}(an^2+bm^2)}{\alpha m^2 n^2}$$

pues $pq = an^2 - bm^2$. Algunos de los factores p ó q pueden escogerse de tal forma que el valor de x sea positivo.

Solución General (primer método) para la forma 2) o

$$\alpha x + c^2 = u'^2$$

$$\beta x + d^2 = w'^2$$

se multiplica por d^2, c^2 respectivamente, entonces se pueden escribir como

$$\alpha d^2 x + c^2 d^2 = u^2$$

$$\beta c^2 x + c^2 d^2 = w^2$$

u existe y es muy grande. La diferencia es igual a $(\alpha d^2 - \beta c^2)x$. Sean los factores de esto px y q, entonces se tiene

$$u^2 = \tfrac{1}{4}(px+q)^2$$

$$w^2 = \tfrac{1}{4}(px-q)^2$$

así x se encuentra en la ecuación de la forma

$$\alpha d^2 x + c^2 d^2 = \tfrac{1}{4}(px+q)^2$$

esta ecuación nos produce

$$p^2x^2 + 2x(pq - 2\alpha d^2) + q^2 - 4c^2d^2 = 0$$

o ya que, $pq = (\alpha d^2 - \beta c^2)$

$$p^2x^2 - 2x(\alpha d^2 + \beta c^2) + q^2 - 4c^2d^2 = 0$$

esta ecuación se puede reducir a una ecuación simple como lo requiere Diofanto, el término independiente desaparece, es decir, $q^2 = 4c^2d^2$, reduciendo $q = 2cd$. Este método proporciona una solución para la *ecuación doble*, con q restringida a el valor $2cd$, esta solución es:

$$x = \frac{2(\alpha d^2 + \beta c^2)}{p^2} = \frac{8c^2d^2(\alpha d^2 + \beta c^2)}{(\alpha d^2 - \beta c^2)^2}$$

Solución General (segundo método) para la forma 2) ó

$$\alpha x + c^2 = u^2$$

$$\beta x + d^2 = w^2$$

La diferencia es igual a $(\alpha - \beta)x + (c^2 - d^2)$.
Sean los factores p y $[(\alpha - \beta)x + c^2 - d^2]/p$.
Entonces como ya se probó anteriormente p puede ser igual a $(c \pm d)$.
Por lo tanto los factores son

$$\frac{\alpha - \beta}{c \pm d}x + c \mp d, \quad c \pm d$$

finalmente

$$\alpha x + c^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha - \beta}{c \pm d}x + c \mp d + c \pm d\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha - \beta}{c \pm d}x + 2c\right)^2$$

por lo tanto

$$\left(\frac{\alpha - \beta}{c \pm d}\right)^2 x^2 + 4x\left(\frac{c(\alpha - \beta)}{c \pm d} - \alpha\right) = 0$$

esta ecuación tiene dos posibles valores para x, ya que, uno de los factores (q) se puede expresar como $(c + d)$ ó $(c - d)$.

β) Segundo Método para resolver una ecuación doble de primer grado.

Considérese sólo el caso especial

$$hx + n^2 = u^2$$

$$(h + f)x + n^2 = w^2$$

tomando esta expresión y n^2 se escribe en forma de magnitudes, denotadas por A, B, C.

$$A = (h + f)x + n^2, \quad B = hx + n^2, \quad C = n^2$$

por lo tanto

$$\frac{A-B}{B-C}=\frac{f}{h}$$

donde

$$A-B=fx;\quad B-C=hx$$

supóngase ahora que $hx+n^2=(y+n)^2$; por lo tanto $hx=y^2+2ny$, y $A-B=\frac{f}{h}(y^2+2ny)$ ó $A=(y+n)^2+\frac{f}{h}(y^2+2ny)$ lo anterior es necesario tomando en esta expresión un cuadrado, así tenemos:

$$(1+\tfrac{f}{h})y^2+2n(\tfrac{f}{h}+1)y+n^2+(py-n)^2$$

con algún número de valores posibles para x y y, éstos pueden ser encontrados dada p.

II) *Ecuación Doble de Segundo Grado*

O de la forma:

$$Ax^2+Bx+C=u^2$$

$$A'x^2+B'x+C'=w^2$$

Para este tipo de ecuaciones se hace un análisis mucho menos exhausto en comparación con las ecuaciones dobles de primer grado. Diofanto sólo se restringe a casos muy especiales, que tienen soluciones muy sencillas, usando los métodos ya vistos. Estos casos son los siguientes:

i) Primer tipo:

$$\rho^2x^2+\alpha x+a=u^2$$

$$\rho^2x^2+\beta x+b=w^2$$

la diferencia es $(\alpha-\beta)x+(a-b)$, siguiendo los métodos anteriores resolveremos esto por medio de dos factores

$$(a-b)\left(\frac{\alpha-\beta}{a-b}x+1\right)$$

como lo hemos venido haciendo ponemos lo siguiente:

$$\rho^2x^2+\alpha x+a=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{a-b}x+1+a-b\right)^2$$

ó

$$\rho^2x^2+\beta x+b=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{a-b}x+1-a+b\right)^2$$

x debe de ser racional, y esto sucede cuando:

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{\alpha - \beta}{a - b}$$

este caso es válido sólo cuando a sea distinto de b.

ii) El segundo tipo encontrado es:

$$x^2 + \alpha x + a = u^2$$

$$\beta x + a = w^2$$

como se puede observar una ecuación no tiene término en x^2 y $\rho = 1$, $a = b$. La diferencia $x^2 + (\alpha - \beta)x$ se resuelve entre dos factores

$$x(x + \alpha - \beta)$$

y

$$\beta x + a = \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2$$

lo cual nos da el valor de x al despejar.

iii) Un caso separado el cual no fue resuelto por los métodos de Diofanto es el siguiente:

$$\alpha x^2 + ax = u^2$$

$$\beta x^2 + bx = w^2$$

Diofanto asumiría que $u^2 = m^2x^2$; ahora por i) $x = \frac{a}{m^2-\alpha}$ si sustituimos en ii) tenemos:

$$\beta\left(\frac{a}{m^2 - \alpha}\right)^2 + \frac{ba}{m^2 - \alpha} \quad o \quad \frac{a^2\beta + ba(m^2 - \alpha)}{(m^2 - \alpha)^2}$$

que es igual a un cuadrado. Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$abm^2 + a(a\beta - \alpha b) = y^2$$

ahora esta forma puede no dar resultado, de acuerdo con los métodos usados y es que depende en gran parte de los coeficientes. Pero si incluimos una condición extra, la solución se va a dar, ésta es la siguiente:

$$\frac{a\beta - \alpha b}{a}$$

que es un cuadrado ó $\frac{a}{b}$ que también es un cuadrado.

A continuación se darán varios ejemplos que ilustran las técnicas usadas por Diofanto para dar solución a ecuaciones determinadas e indeterminadas.

Caso I: $ax^2 + bx = c$

Un ejemplo muy ilustrativo es el que se encuentra en VI-6 de la *Aritmética*, éste dice lo siguiente: "Encontrar un triángulo rectángulo el cual al sumarle el área a una de sus perpendiculares produce un número dado."

Sea 7 el número dado, en el triángulo $(3x, 4x, 5x)$, entonces se tiene $6x^2 + 3x = 7$. Para que tenga solución este problema es necesario que: la mitad del coeficiente de x^2 más el producto del coeficiente de x^2 y el coeficiente independiente es igual a un cuadrado, pero $(1\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot 7$ es diferente de un cuadrado. Lo que se intentará hacer entonces es encontrar un triángulo que reemplace a el triángulo rectángulo, es decir, que reemplace la solución (3,4,5), así este nuevo triángulo tendrá las siguientes características: la mitad de una de las perpendiculares al cuadrado más 7 veces el área será igual a un cuadrado.

Sea m una perpendicular y uno la otra, entonces se tiene que $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ es igual a un cuadrado ó $14m + 1$ es igual a un cuadrado. Ahora ya que el triángulo es racional $m^2 + 1$ es un cuadrado. La diferencia $m^2 - 14m$ es igual a $m(m - 14)$, sustituyendo se tiene que $7^2 = 14m + 1$, entonces $m = 24/7$, por lo tanto el triángulo auxiliar es (24/7,1,25/7) ó (24, 7, 25), entonces, como al principio, tenemos el triángulo $(24x, 7x, 25x)$, por lo tanto $84x^2 + 7x = 7$ y $x = \frac{1}{4}$, por lo tanto una solución es (6, 7/4, 25/4).

Caso II: $ax^2 + c = bx$

Para este caso enunciaremos tres problemas que son los siguientes:
IV-22, (23) $x^2 + 4 = 4x$ cuya raíz es $x = 2$
V-10, (13) $\frac{19}{12} > \frac{6x}{x^2+1} > \frac{17}{12}$ o $19x^2 + 19 > 72x > 17x^2 + 17$ esta ecuación se resuelve de la siguiente manera: se va a tomar la parte de la izquierda primero como una igualdad, es decir, $19x^2 + 19 = 72x$ entonces

$$19x = 36 \pm \sqrt{935}; \qquad x_1 = \frac{66.57}{19}, \quad x_2 = \frac{5.43}{19}$$

ahora, para el lado derecho se tiene

$$17x^2 + 17 = 72x; \qquad x_1 = \frac{67.7}{17}, \quad x_2 = \frac{4.3}{17}$$

así Diofanto nos da la solución como sigue:

$$\frac{67}{17} > x > \frac{66}{19}$$

V-30, (33) $24x > x^2 + 60 > 22x$, la técnica para resolver esta ecuación es parecida al ejemplo anterior, ésta es:

$$24x = x^2 + 60; \quad x = 12 \pm \sqrt{84}; \quad x_1 = 21.17, \quad x_2 = 2.83$$

$$22x = x^2 + 60; \quad x = 11 \pm \sqrt{61}; \quad x_1 18.8, \quad x_2 = 3.2$$

Caso III: $ax^2 = bx + c$

Los ejemplos que encontramos para este tipo de ecuación son los siguientes:

$$\begin{array}{rlll} IV-31,(33): & 5x^2 = 3x + 18 & & \\ VI-7: & 84x^2 = 7x + 7 & \textit{donde} & x = \frac{1}{3} \\ VI-9: & 630x^2 = 73x + 6 & \textit{donde} & x = \frac{6}{35} \\ IV-39,(45): & 2x^2 > 6x + 18 & \textit{donde} & x = 4.85 \\ V-30,(33): & x^2 > 5x + 60 & \textit{donde} & x > 10.6, \\ & x^2 < 8x + 60 & \textit{donde} & x < 12.7 \end{array}$$

Los siguientes ejemplos son para ilustrar los métodos de solución de ecuaciones dobles de primero y segundo grado.

I-27, (30): $u + v = 20$; $u \cdot v = 96$ donde $u > v$ y $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - uv$ es un cuadrado.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(u-v) = x & u = x + 10 \\ \frac{1}{2}(u+v) = 10 & v = 10 - x \end{array}$$

$$u \cdot v = (x + 10)(10 - x) = 100 - x^2 = 96$$

$$x^2 = 4 \qquad x = 2 \qquad\qquad u = 12, \qquad v = 8$$

I-28, (31): $u + v = 20$; $u^2 + v^2 = 208$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(u-v) = x & u = x + 10 \\ \frac{1}{2}(u+v) = 10 & v = 10 - x \end{array}$$

$$u^2 + v^2 = 2x^2 + 200 = 208$$

$$x^2 = 4 \qquad x = 2; \qquad\qquad u = 12, \quad v = 8$$

I-29, (32): $u + v = 20$; $u^2 - v^2 = 80$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(u-v) = x & u = x + 10 \\ \frac{1}{2}(u+v) = 10 & v = 10 - x \end{array}$$

$$u^2 - v^2 = 40x = 80$$

$$x = 2; \qquad\qquad u = 12, \quad v = 8$$

I-30, (33): $u - v = 4$; $uv = 96$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(u+v) = x & u = x + 2 \\ \frac{1}{2}(u-v) = 2 & v = x - 2 \end{array}$$

$$uv = x^2 - 4 = 96$$

$$x = 10; \qquad u = 12, \quad v = 8$$

I-31, (34): $u = 3v; \quad u^2 + v^2 = 5(u+v)$

$$v = x, \quad u = 3x; \qquad 9x^2 + x^2 = 5(3x + x)$$

$$10x^2 = 20x$$

$$x = 2; \qquad u = 6, \quad v = 2$$

I-32, (35): $u = 3v; \quad u^2 - v^2 = 10(u - v)$

$$v = x, u = 3x; 9x^2 + x^2 = 10 \cdot 2x$$

$$x = 2; \qquad u = 6, \quad v = 2$$

I-33, (36): $u = 3v; \quad u^2 - v^2 = 6(u + v)$

$$v = x, \quad u = 3x; \qquad 9x^2 - x^2 = 6 \cdot 4x$$

$$x = 3; \qquad u = 9, \quad v = 3$$

I-34, (37): $u = 3v; \quad u^2 - v^2 = 12(u - v)$

$$v = x, \quad u = 3x; \qquad 9x^2 - x^2 = 12 \cdot 2x$$

$$x = 3; \qquad u = 9, \quad v = 3$$

I-35, (38): $u = 3v; \quad v^2 = 6u$

$$x^2 = 18x, \quad x = 18; \qquad u = 54, \quad v = 18$$

I-38, (41) $u = 3v; \quad v^2 = 6(u - v)$

$$x^2 = 12x, \quad x = 12; \qquad u = 36, \quad v = 12$$

II-6: $u - v = 2; \quad u^2 - v^2 = (u - v) + 20$

$$v = x, \quad u = x + 2; \qquad 4x + 4 = 22$$

$$x = 4\tfrac{1}{2}; \qquad u = 6\tfrac{1}{2}, \quad v = 4\tfrac{1}{2}$$

IV-1 $u^3 + v^3 = 370; \quad u + v = 10$

$$u = x + 5; \quad v = 5 - x; \quad u^3 + v^3 = 30x^2 + 250 = 370$$

$$30x^2 = 120 \qquad x = 2; u = 7, \quad v = 3$$

IV-2: $u^3 - v^3 = 504; \quad u - v = 6$

$$u = x + 3; \quad v = x - 3; \quad u^3 - v^3 = 18x^2 + 54 = 504$$

$$18x^2 = 450 \quad x^2 = 5; \qquad u = 8, \quad v = 2$$

Conclusión

Diofanto nos exhibe con lujo de precisión la división de las ecuaciones cuadráticas conocidas hasta ahora y algunas que el descubre, notamos además un gran avance y variedad en la solución a estas ecuaciones. En la *Aritmética* podemos encontrar una notación matemática completa que nos hace pensar que Diofanto es el precursor de lo ciencia que más adelante se le llamará Lógica Matemática.

Por último y a manera de conclusión de los capítulos 4 y 5 diremos que en la cultura griega representada por estos tres grandes matemáticos, podemos encontrar un alto grado de conocimiento así como un complejo manejo de la geometría.

La estructura de la matemática empieza a hacer más formal, como lo podemos observar en las demostraciones y en el proceso de complejidad de los problemas, sin embargo se dislumbra un cambio, éste nos va a llevar a lo que en los árabes se conoce como, el *álgebra-geométrica*, la cual veremos a continuación.

Capítulo 7

Matemática Arabe (I)

¡Qué sería tu felicidad, radiante astro, si no tuvieras aquellos para los que brillas!.

Zaratustra

Dentro de esta cultura podemos hablar de grandes matemáticos, como lo son al-Khuwārizmī, abū-Kāmil, al-Karajī, al-Khayyāmī y Abraham Bar Hiyya Ha-Nasi, también conocido como Savasorda, en los cuales encontramos un gran avance en la matemática antigua, ya que, el desarrollo algebraico, toma un primer plano sobre el análisis geométrico, aunque no por ésto deja de existir. Empecemos entonces con:

Muhammed Ibn Mūsā Al-Khuwārizmī

(antes del año 800-después del año 847)

El más grande algebrista del mundo árabe y de su tiempo es sin duda al-Khuwārizmī. Su nombre se debe (según su etimología) al pueblo en el que creció, por tal motivo a al-Khuwārizmī se le ha ubicado en un distrito entre los ríos Tigris y Eufrates, es decir, en la Mesopotamia.

Podemos citar entre sus trabajos: *El Algebra y Almucabala*, algunos trabajos astronómicos, *Tratado sobre Números Hindus, El Calendario Judio, La Geografía.* Todos son libros muy interesantes, pero por los motivos que nos mueven a hacer este trabajo nos restringiremos al estudio de *El Algebra y Almucabala*.

El Algebra y Almucabala es un trabajo elemental de matemáticas donde al-Khuwārizmī analiza y da solución a problemas cotidianos. Pero la verdadera importancia no queda hasta aquí. Este libro abre un nuevo y novedoso enfoque, en lo que respecta al tratamiento de las ecuaciones, su obra troquela el pensamiento matemático de los siguientes 600 años. En sus primeros seis capítulos nos muestra como dar solución a cuestiones que conciernen a particiones, a la aritmética, medidas de longitud. etc. Estos problemas los generaliza en las siguientes ecuaciones:

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = b$$

$$ax = b$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$ax^2 = bx + c$$

donde a, b, c, son números enteros positivos. Cada una de ellas se elaboró por casos ya que, al-Khuwārizmī descarta la existencia de números negativos o cero en los coeficientes[1]. En esta misma parte introductoria se da una interpretación geométrica que explican las citadas ecuaciones, las cuales podemos decir que son conocidas por una forma familiar, a las del libro II de los *Elementos* de Euclides. Por último y como un comentario final a estos seis capítulos el autor nos hace saber que cualquier ecuación de primer o de segundo grado se puede resolver reduciendola a alguna de estas seis formas.

Dos de las operaciones que introduce, en combinación con las operaciones aritméticas (adición, subtracción, multiplicación y división) son "*al-jabr*" y "*al-muqabāla*[2]", las cuales, tienen una traducción aproximada a "completar" o "completación" y "balance" o "balanza" (respectivamente), esta última se refiere a los procesos de reducir cantidades positivas de la misma potencia en ambos lados de la ecuación, mientras que la primera se refiere al proceso de eliminar cantidades negativas. Ejemplo:

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

por *al-jabr* esto es igual a

$$5x^2 = 40x$$

y por *al-muqābala*

$$50 + x^2 = 29 + 10x$$

[1] Una de las fuentes principales de al-Khuwārizmī son los hindus, los cuales, si admiten números negativos y ceros en los coeficientes de las variables dependientes

[2] Nombres que provienen de términos medicos, (véase excursus II)

se reduce a[3]

$$21 + x^2 = 10x$$

En *"El Algebra..."* no se utilizan símbolos,[4] ya que todo es expresado con palabras, de los términos importantes tenemos: "*šai*" (*cosa* o alguna cosa) la emplea para nombrar una cantidad desconocida; para la potencia dos usa "*māl*" (riqueza, propiedad, cantidad, *censo*); para la potencia uno "*ğidhr*" (raíz); para la unidad "*dirham*" (unidad de moneda)[5]. En una sección muy corta de este libro encontramos un tratado "*Sobre las Transacciones en los Negocios*", en la que se expone, lo que se conoce en la actualidad como la "regla de tres" o en otras palabras; *determinar el cuarto miembro en una proporción en la suma de dos cantidades y un precio dado.* Más adelante habla sobre mediciones prácticas; dando reglas para encontrar áreas de figuras planas incluyendo el círculo y volúmenes de sólidos como el cono, la pirámide y la pirámide truncada.

En la última parte encontramos sólo problemas resueltos, que involucran a la aritmética o simples ecuaciones lineales las cuales requieren de un *"alto grado de conocimiento islámico de las leyes de la naturaleza"* según el autor[6].

Se tiene el conocimiento que *"El Algebra..."* fue el primer trabajo escrito en árabe. Durante mucho tiempo predominó la duda si el autor conocía o no las técnicas algebraicas de los hindus y los griegos, por lo que respecta a éstos ultimos, nuevas investigaciones en las revistas especializadas demuestran lo contrario. Aunque hay que hacer notar que *"El Algebra..."*, es uno de los primeros libros, escrito por al-Khuwārizmī, y que, en comparación con los trabajos citados anteriormente se observa la enorme influencia que recibió, de los Hebreos, Hindus y Judíos. Ahora que si se ve influenciado por todas estas culturas para la elaboración de *"El Algebra..."* (que efectivamente es un libro elemental como se mencionó al principio), se debe hacer hincapié que ninguno de los trabajos conocidos hasta ahora, es presentado con tanta sencilles y claridad, por lo que lo hace (inclusive en la actualidad), como un libro de texto merecedor de grandes elogios.

Respecto a la traducción de la obra de al-Khuwārizmī, Karpinski [35] señala que los principales hombres que trabajaron en esto, fueron Robert

---

[3] Esta ecuación es de sumo interes ya que como veremos además de trabajarla al-Khuwārizmī lo hace también Abū-Kāmil y con anterioridad Euclides

[4] Contrario a los hindus

[5] al-Khuwārizmī hace referencia a estos tres números los cuales los podemos identificar como: números deadicos (1, 2,...,10), censo= x^2 y cantidades como lo son Dracmas, numeri, constantes (véase excursus II).

[6] Aquí se encuentran, como veremos, soluciones irracionales

de Chester[7] y Gerardo de Cremona, los cuales, trasladaron todo del árabe al latín en el siglo XV de nuestra era; facilitando las cosas para que los Italianos y Españoles[8] hicieran sus propias traducciones. Es así como al-Khuwārizmī no sólo influye en sus sucesores árabes, sino también en el desarrollo del álgebra en los próximos 600 años como ya se había citado con anterioridad.

Después de hacer un breve comentario de lo que es al-Khuwārizmī, entremos ahora en materia. Como ya se mencionó, (y en particular es lo que nos conduce, a hacer este estudio), al-Khuwārizmī da seis tipos de ecuaciones mixtas, es decir, ecuaciones que contienen tanto, incógnitas lineales como cuadráticas, en estas seis formas se encuentran cinco de segundo grado, y una de primero, como sigue:

			se reduce a
i)	Censo igual a raíces:	$ax^2 = bx$	$x^2 = px$
ii)	Censo igual a un número:	$ax^2 = c$	$x^2 = q$
iii)	Raíces igual a números:	$bx = c$	$px = q$
iv)	Censo y raíces iguales a números:		$x^2 + px = q$
v)	Censo y números igual a raíces:		$x^2 + q = px$
vi)	Raíces y números igual a censos:		$x^2 = px + q$

En "*El Algebra...*" no se encuentran formas geométricas, de los tres primeros casos, sin embargo, es fácil notar que su representación, para la primera ecuación, seria la proposición II-14 de los *Elementos* de Euclides, para la segunda un simple cuadrado, mientras que para la tercera ecuación, seria una línea, multiplicada por algún número, dando como resultado, una línea más extendida (hay que recordar que al-Khuwārizmī, no usa coeficientes negativos ni ceros).

En lo que respecta a las tres restantes ecuaciones tenemos una clara representación geométrica, en las cuales se podra observar, una similitud con las proposiciones II-4, 5, y 6 de los *Elementos*. Estas representaciones las vamos a dar seguidas de un ejemplo para ilustrar mejor.

Caso *iv*: *Censo y raíces igual a números* [9]

$$x^2 + px = q \qquad x = +\sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q} - \tfrac{p}{2}$$

[7] El análisis que se se va a hacer sobre el trabajo de al-Khuwārizmī esta basado en la traducción que hiciera Robert de Chester al latín del *Algebra*, y que fue traducida a su vez al inglés por Louis Charles Karpinski.

[8] Algunas de estas traducciones llegaron a manos de Juan Díez, ya que, el trabajo de éste se asimila en mucho al del *Algebra*, en cuanto a estructura y palabras para denotar incógnitas, potencias etc.

[9] Karpinski, [35] pags. 82,87

La solución geométrica está dada en términos de la proposición II-4 de los *Elementos*, con la diferancia, que al-Khuwārizmī, toma los rectángulos px y los parte formando cuatro partes iguales, a éstas, las va a colocar, sobre el cuadrado de x en forma de cruz (Fig. 34.), representando así lo que en Euclides sería, el *gnomo* en forma de escuadra.

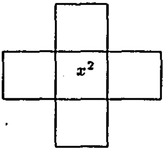


Figura 34.

Después de hacer lo anterior, el siguiente paso es el de completar el cuadrado, al igual que en Euclides, nada más que en este caso, se tendrán cuatro cuadrados de lado $\frac{1}{4}p$. A continuación se da la figura resultante, comparándola con la figura de la proposición II-4 (Fig. 35.)

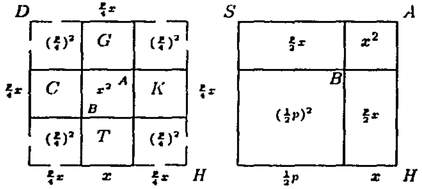


Figura 35.

Ejemplo A.1 $\quad x^2 + 10x = 39$

Solución: Sea $p = 10$ y $q = 39$ (que es el *gnomo* en Euclides), entonces $px = 10x$ pero la figura 34 dice que a este par de rectángulos hay que partirlos en cuatro partes iguales, es decir, $\frac{p}{4}x$, y colocarlos en forma de cruz alrededor del cuadrado de x, formando así el *gnomo*, al estilo de al-Khuwārizmī, que no deja de valer 39; se prosigue completando el cuadrado, para ésto, se necesitan cuatro cuadrados de lado $\frac{p}{4}$. Teniendo en cuenta lo anterior, la figura queda como sigue (Fig. 36):

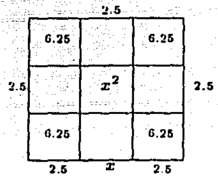


Figura 36.

Como se puede notar el lado del cuadrado total es, $x + 5$, entonces el área de éste es:

$$(x + 5)^2$$

pero, se sabe que el *gnomo* en forma de cruz vale 39 y los cuadrados que se usaron para completar el cuadrado total suman 25, entonces:

$$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$$

si se extrae la raíz de ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$x + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

que es la solución al problema planteado.

Caso *v*: *Censo y números iguales a raíces*

$$x^2 + q = px \qquad x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

La solución que da al-Khuwārizmī a esta ecuación, es casi idéntica a la que se encuentra, en la proposición II-5 de los *Elementos*, existiendo una única diferencia; que el cuadrado de x está en la parte izquierda del rectángulo, y no dentro del cuadrado producido por una de las partes, como en Euclides[10] (ver Fig. 23). Es asi que la figura 37 queda como sigue:

[10]Hay que hacer notar que al-Khuwārizmī no cita a Euclides en su *Algebra*

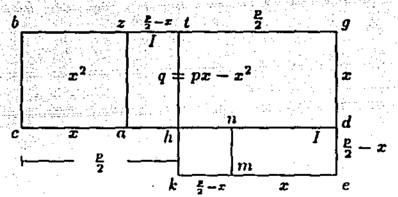


Figura 37.

Para al-Khuwārizmī es conocido que esta forma de ecuación, las raíces, son o dos positivas o una doble o no tiene ninguna.

$$\text{Ejemplo A.2} \qquad x^2 + 21 = 10x$$

De la figura 37 podemos extraer los siguientes datos: $\overline{bc} = \overline{ca} = x$; $\overline{cd} = \overline{bg} = 10$, entonces $\overline{tg} = \overline{ke} = \overline{ge} = \overline{tk} = 5$, luego el cuadrado $kegt = 25$; por otro lado el rectángulo $azgd = px - x^2 = q = 21$, ahora, por Euclides el rectángulo $ahtz$ es igual al rectángulo $nmed$, es así que, el rectángulo $azgd$ se puede convertir en el gnomo hgm, estó implica que el cuadrado $kmnh$ es igual a 4, entonces $\overline{km} = 2$ por lo tanto si $\overline{me} = x$ y se tiene que $\overline{tg} = \overline{ke} = 5$, entonces $x = 3$, que es la solución al problema, para cuando $x < \frac{p}{2}$ (Fig. 38). Como se sabe esta ecuación también tiéne solución algebraica para cuando $x = 7$, la solución geométrica al-Khuwārizmī no la presenta explicitamente, sino, implicitamente como veremos más adelante.

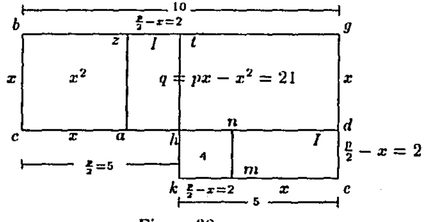


Figura 38.

Caso *vi*: *Raíces y números iguales a censos* [11] [12]

$$x^2 = px + q \qquad x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q}$$

La figura que se encuentra para esta ecuación se puede identificar como el caso, en que no se puede reducir a la ecuación a la forma $x^2 + px = q$ (ver Fig. 27) de la proposición II-6 de los *Elementos*. Esta figura en su totalidad es igual a la de la proposición mencionada, la cual es de la forma:

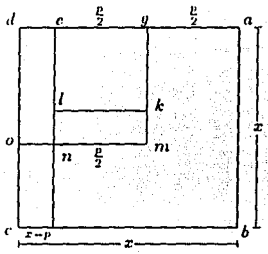


Figura 39.

Ejemplo[13] A.3 $\quad x^2 = 3x + 4$

Sea $p = 3$ y $q = 4$, de la figura 39 se sabe que; el cuadrado $abcd = x^2$; $\overline{ae} = p = 3$, ahora como $\overline{ea}$ está dividida por g en partes iguales, se tiene que $\overline{ag} = \overline{eg} = \frac{p}{2} = 1\frac{1}{2}$; cb por otro lado es igual a $px = 3x$; $ec = x^2 - px = q$; $\overline{dg} = x - \frac{1}{2}p = x - 1\frac{1}{2}$; por último, el rectángulo kn es igual al rectángulo nc (por Euclides II-6). Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que $\overline{dg}^2$ es igual al cuadrado $eglk$ más el rectángulo $lkmn$ más el rectángulo $deno$, pero como el rectángulo kn es igual al nc, entonces se puede decir que ec es igual al *gnomo eok* $= 4$, luego $\overline{dg}^2$, también es igual al *gnomo eok* más el cuadrado $egkl$, es decir:

$$\overline{dg}^2 = 4 + (1\tfrac{1}{2})^2.$$

---

[11] Karpinski, [35] pags. 82-84

[12] Este caso Euclides lo completa con *Data* 84

[13] Este ejemplo fue tomado de una fuente anónima. También hay que notar que éste une a al-Khuwārizmī con Savasorda (el cual veremos más adelante) y ambos nos llevan a Euclides.

Ahora como $dg = x - 1\frac{1}{2}$, si se eleva al cuadrado esta igualdad produce:

$$(x - 1\tfrac{1}{2})^2 = 4 + (1\tfrac{1}{2})^2$$

de aquí se obtiene que:

$$x = 1\tfrac{1}{2} + \sqrt{4 + (1\tfrac{1}{2})^2} = 1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2} = 4$$

que es es resultado al problema propuesto.

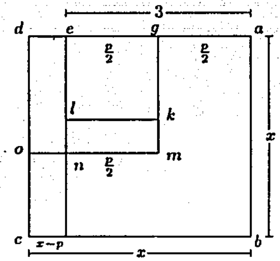


Figura 40.

Antes de seguir adelante abriremos un espacio para aclarar un poco que al-Khuwārizmī, ya conocía las posibles formas de las raíces en la ecuación del tipo v, para esto, se expondrá otra solución al ejemplo $x^2 + 21 = 10x$ ésta proviene de una fuente anónima, Al-Khuwārizmī nos dice lo siguiente: *toma la mitad de la cosa* (x) *y multiplícala en si da* 25, *ahora quítale* 21 (por *al-muqabala*, pero geométricamente como sabemos 21 es el término independiente de la ecuación, que viene siendo el *gnomo*, éste se construye en base a *Elementos* II-4 como dos veces el rectángulo $5x$ más x^2) *así nos queda un cuadrado de área* 4 (lo que esta haciendo en este paso es lo inverso de lo que se hace en *Elementos* II-4, es decir, mientras que en esta proposición se suma el *gnomo*, en este caso se lo va a quitar), *extrae raíz, ésta es* 2 *réstasela al lado del cuadrado total y nos da* 3 (i.e. $5 - 2 = 3$), *que es la solución al problema* (Fig. 41). *Para comprobarlo toma* 2 *y sumaselo a el lado del cuadrado* 5 *y se produce* 7 *que también es solución. Esto no se puede hacer cuando* $x < \frac{x}{2}$, *sólo cuando* $x = \frac{x}{2}$, (el caso cuando $x > \frac{x}{2}$ se vera hasta abū-Kāmil).

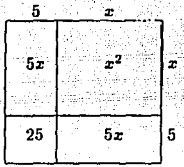


Figura 41.

Este problema nos lleva a las siguientes conclusiones: al-Khuwārizmī sabe que para este tipo de ecuaciones existen o dos raíces, (como lo acabamos de observar), o no tiene raíces, (raíces negativas), o tiene una raíz doble, este último caso puede ser cuando la ecuación $x^2 + q = px$ se pueda reducir a la forma $x^2 = q$, es decir, cuando p no exista, no podemos decir que cuando $p = 0$ ya que recordemos que no se admiten coeficientes cero en la ecuación. Este tipo de ecuaciones las encontramos en el capítulo referente a los *números negativos y positivos* del *Algebra*, y en donde además se encuentran soluciones irracionales, esto es muy interesante ya que posiblemente la geometría deja de existir para dar paso solamente al álgebra.

Números Negativos y Positivos

Al-Khuwārizmī en este capítulo, encuentra la existencia de cuadrados numéricos irracionales, a los cuales llamo *ǧidhr asamm* (raíz de paloma), es muy probable que sea una traducción del griego *alogos* (inconmensurable). Por su parte Cremona tradujo *asamm* al latín como *surdus*, y no fue hasta el siglo XVIII cuando cambio este concepto al de *irracional*.

La forma en que al-Khuwārizmī observo las raíces irracionales de una ecuación, fue en general, por la ecuación del tipo $x^2 = q$ y de un ejemplo particular, éste es: $10x = (10 - x)^2$ cuya solución es $x = 15 - 5\sqrt{5}$ (¡irracional, no se puede dibujar!), a continuación le siguen seis problemas que corresponden a los seis diferentes tipos de ecuaciones con soluciones irracionales, éstos son:

1) $4x(10 - x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 = 40x$
2) $\frac{27}{9}x^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{9}x^2 = 100$
3) $\frac{10-x}{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad 5x = 10$
4) $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 1) = 20 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 7x = 228$
5) $x^2 + (10 - x)^2 = 58 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 21 = 10x$
6) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x + 24 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12x + 288$

hay que hacer notar que en el segundo ejemplo al-Khuwārizmī utiliza quebrados, ya que divide $\frac{25}{9}/100$, y $9/25$ lo expresa como $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$, y además tenemos otra forma de expresar la ya conocida ecuación $x^2+21=10x$ como lo vemos en el inciso 5. A continuación se darán otros ejemplos y la forma original de solución:[14]

"*¿Cuanto es* $10+x$ *por* $x-10$*?.10 multiplicado por* x *da* $10x$*, y* x *por* x *da* x^2 *positivo; así 10 por 10 negativo da 100 unidades negativas y* x *multiplicada por 10 negativo de* $10x$ *negativo. Tú puedes decir, por lo tanto que esta suma produce* x^2 *menos 100 unidades*" [15].

"*Por otra parte, sí algúna vez preguntan, cual es el producto de 10 unidades y un medio de* x *multiplicada por un medio de unidad menos* $5x$*, tú precede así: 10 multiplicado por un medio de unidad dan 5 unidades y un medio de* x *por un medio de unidad dan un cuarto de* x*; así, 10 por* $5x$ *negativo da* $50x$ *negativo. De donde la suma total de esta multiplicación es 5 unidades, a lo cual sera substraido* $49x$ *y* $\frac{3}{4}x$*. Entonces* $\frac{1}{2}x$ *multiplicado por* $5x$ *negativo da dos y un medio de* x^2 *negativa. La suma total de esta multiplicación es, 5 unidades a la cual se le substrae dos y un medio de* x^2*,* $49x$ *y* $\frac{3}{4}x$"[16].

"*Otro problema: ¿Cuanto es* $10+x$ *multiplicado por* $x-10$*? . Esto es lo mismo que* $x+10$ *por* $x-10$*. De donde, tú puedes proceder de esta manera:* x *multiplicada por* x *da* x^2*, y 10 por* x *da 10 raices positivas; así* x *multiplicada por 10 negativo da* $10x$ *negativo. De donde,* $10x$ *sera agregado (positivo) y* $10x$ *sera substraido (negativo), se quitan, cancelandese uno al otro, restando sólo* x^2*. Entonces 10 por 10 negativo da 100 unidades que seran substraidas de* x^2*. El producto total por lo tanto es la cantidad* x^2 *menos 100 unidades.*"

Como se puede notar en este tercer problema Al-Khuwārizmī precisa más cada operación respecto del primero, deduciendo, tal vez de los dos, que, $(10+x)(10-x)$ es igual a $100-x^2$. También hay que notar que estos problemas son los que tienen raíces iguales.

A continuación sigue el apartado, llamado "*Problemas Adicionales*", en el cual encontramos, sistemas de ecuaciones, con la primera condición $x+y=10$ y con la segunda, con cosas como: $xy=21$[17]; $y^2-x^2=40$[18]; $x^2+y^2+(y-x)=54$[19], etc.. Hay uno ejemplo de entre los anteriores que resulta de gran interés, ya que, nos encontramos uno parecido en Juan Díez en la octava *quistion* del *arte mayor*, este ejemplo es el siguiente: *Yo divido*

[14] Traducción del libro de Karpinski.

[15] $(10+x)(x-10)=10x-100+x^2-10x=x^2-100$

[16] $(10+\frac{1}{2}x)(\frac{1}{2}-5x)=5-49\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2}x^2$.

[17] $x(10-x)=21; x^2+21=10x; x=3$, luego entonces $y=7$

[18] $(10-x)^2-x^2=40; 20x=60; x=3$, luego entonces $y=7$

[19] $x^2+(10-x)^2+10-2x=54; x=4$, luego entonces $y=6$

la unidad entre niñas y hago que cada una reciba la misma parte fraccional de la cosa. Ahora sí sumo a una niña al número, cada una recibira por su parte un sexto (de unidad) ***menos que antes.*** Este problema en simbología actual seria como sigue:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$$

y cuya solución es: $x = 2$.

Conclusión

En al-Khuwārizmī podemos notar el cambio de un pensamiento geométrico puro a lo que en esta cultura se le llama álgebra-geométrica, de hecho en su afán por sintetizar aun más los fundamentos de las deducciones, escuela que deja Euclides en sus trabajos, tiende a borrar a la deducción geometría (hay que recordar que al-Khuwārizmī no cita a Euclides en sus trabajos). Esto último para bien de nosotros nunca se a dado, y es que la geometría es una de las formas más bellas de deducir, plantear y resolver problemas por complicados que estos sean.

Capítulo 8

Matemática Arabe (II)

El fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y entre ellas, la intuición.

Henri Poincaré

Abū-Kāmil Šuğa ibn Aslam ibn Muhammad al-Hāsib al Miṣrī

(850-930 años d. c. aprox.)

Abū-Kāmil también conocido como "*El calculador de Egipto*" (al Miṣrī) se puede localizar después de la época floreciente de al-Khuwārizmī. Los datos biográficos de abū-Kāmil no son muy precisos pero, podemos conocer algunos basándonos en sus obras. Entre ellas existe un manuscrito titulado: *El libro de las cosas raras y el arte del cálculo*, éste, contiene ecuaciones con soluciones enteras y algunas indeterminadas. Otro trabajo que se le debe a este creativo matemático es: *Sobre el Pentágono y el Decágono*, en el cual, se muestra un estudio algebraico sobre como encontrar soluciones a ecuaciones de cuarto grado y cuadráticas mixtas con coeficientes irracionales. Pero la obra más importante es sin duda: *El Algebra* [36], donde se pone de manifiesto la grandeza de este matemático.

El Algebra, de abū-Kāmil es un libro que engloba todos sus trabajos, y aunque se basa en mucho al-Khuwārizmī, existen aportaciones de sumo interés e importancia, de entre éstas, podemos citar las siguientes:
1) abū-Kāmil es el primer musulmán que trabaja con exponentes mayores que dos llamándolos por ejemplo: x^6 el cubo del cubo; x^5 cuadrado del cuadrado de la raíz; x^8 cuadrado del cuadrado del cuadrado del cuadrado;

x^7 no lo usa ya que no lo generaliza: x^4 el cuadrado del cuadrado; etc., esto lo construye en base a la suma de los exponentes en la multiplicación de las variables (x).
2) Para encontrar la solución para x^2, se basa en el comportamiento para la x, es decir, primero encuentra la solución para ésta.
3) abū-Kāmil, analiza la obra de Euclides; llegando a la conclusión de que en particular, en el libro II de los Elementos; las diez primeras proposiciones son independientes unas de otras, además toma en cuenta el análisis de Euclides para el caso $x < \frac{p}{2}$ en la ecuación $x^2 + p = px$ y resuelve también el caso $x > \frac{p}{2}$ para ésta misma.
4) Análisis de ecuaciones indeterminadas, que también se encuentran en Diofanto.
5) Las técnicas que usa por lo regular abū-Kāmil, las desarrolla usando ciertas igualdades para poder así resolver los problemas, de entre éstas tenemos: $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$, la cual desconoce al-Khuwārizmī; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$; $\frac{x}{y}\frac{y}{x} = 1$
6) De lo anterior y en particular de la primera igualdad, nos damos cuenta que abū-Kāmil usa la división para poder bajar el grado a los exponentes, cosa que al-Khuwārizmī ignora ya que él prefiere abstraer la raíz de ambos lados de la igualdad.

Abū-Kāmil nunca estuvo distanciado de al-Khuwārizmī como se había citado con anterioridad, y es que usa conceptos y ecuaciones que previamente este último ya habia obtenido, es así cuando abū-Kāmil adopta directamente de su predecesor el concepto de *raíz* (*ǧidhr*) que él redefine como: 1^2x,[1] este concepto es de suma importancia ya que geométricamente está vinculado con lo que ya conocemos como el *gnomo*.

Abū-Kāmil también estudio las ecuaciones de segundo grado, dando soluciones geométricas muy parecidas, a las encontradas en al-Khuwārizmī y Euclides, aunque no deja de aportar soluciones alternativas, como es el caso de la solución a la ecuación $x^2 + 21 = 10x$. Para comparar la forma de solución a una ecuación cuadrática en abū-Kāmil, se darán los mismos ejemplos que en al-Khuwārizmī.

[1] Esto ya lo conocian los geómetras hebreos.

Caso iv: A.4 $x^2 + 10x = 39 \quad (p = 10; \quad q = 39)$

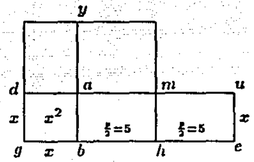


Figura 42.

Abū-Kāmil indica que el cuadrado $abgd = x^2$; el rectángulo $abeu = 10x$, entonces el rectángulo $gu = x^2 + 10x$, que también, se sabe es igual a 39, ya que $\overline{cg} \cdot \overline{gb}$ es igual al *gnomo mgy*, y esto porque, $\overline{bc}$ está cortada por h en dos partes iguales, entonces $\overline{bh} = \overline{hc} = \frac{1}{2}p$ (Fig. 42); ahora por Euclides II-6 se tiene que:

$$\overline{cg} \cdot \overline{gb} + \overline{hb}^2 = \overline{hg}^2$$

esto implica que

$$(x + p)x + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p + x)^2$$

sustituyendo

$$39 + 25 = (5 + x)^2$$

por lo tanto

$$x = \sqrt{39 + 25} - 5 = 3.$$

Como se observa el procedimiento usado por abu-kāmil es la proposición II-6 de los *Elementos* cuando ésta se puede reducir a la proposición II-4. misma ecuación.

Caso v: A.5 $x^2 + 21 = 10x \quad (p = 10; \quad q = 21)$

Como es una ecuación de la forma $x^2 + q = px$ se tiene la siguiente solución:

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

entonces sustituyendo se produce:

$$x_1 = 5 - 2 = 3 < \tfrac{1}{2}p$$

$$x_2 = 5 + 2 = 7 > \tfrac{1}{2}p$$

para el primer caso abū-Kāmil da la siguiente solución geométrica (Fig. 43)

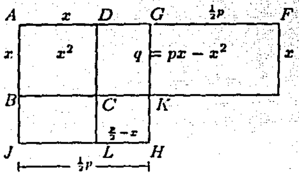


Figura 43.

Haciendo la traducción algebraica se tiene lo siguiente:

$$\overline{DF} \cdot \overline{DA} + \overline{GD}^2 = \overline{AG}^2$$

$$(p - x)x + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$21 + (5 - x)^2 = 5^2$$

$$5 - x = \sqrt{4}$$

$$x_1 = 5 - 2 = 3$$

para entender esta solución sólo basta saber que el rectángulo GC es igual al CJ para poder visualizar el *gnomo* como se ha hecho hasta ahora. La figura además tiene mucho parecido con Euclides II-5.

Para encontrar la solución de x_2 se tiene la siguiente solución:

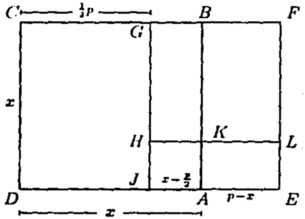


Figura 44.

Traduciendo se tiene que:

$$\overline{BF}\cdot\overline{BC}+\overline{BG}^2=\overline{GC}^2$$

$$(p-x)x+(x-\tfrac{1}{2}p)^2=(\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$21+(x-5)^2=5^2$$

$$(x-5)^2=\sqrt{4}$$

$$x_2=5+2=7$$

todo el razonamiento que da aquí abū-Kāmil es nuevo para nosotros, ya que, es hasta ahora cuando, se da una solución clara para el caso $x>\frac{p}{2}$.

Caso vi: A.6 $x^2=3x+4 \quad (p=3;\ \ q=4)$

Esta ecuación abū-Kāmil la resuelve usando la misma técnica que usará al-Khuwārizmī.

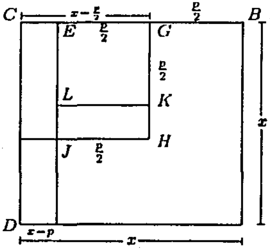


Figura 45.

$$\overline{BC}\cdot\overline{EC}+\overline{GE}^2=\overline{CG}^2$$

$$x(x-p)+(\tfrac{1}{2}p)^2=(x-\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$4+2\tfrac{1}{2}=(x-\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$x=\sqrt{6\tfrac{1}{4}}+1\tfrac{1}{2}=4.$$

Abū Bakr Ibn Muhammad Ibn Al Husayn Al-Karajī

(Bagdad, finales del siglo X, principios del XI)

Sobre la vida de este matemático árabe no se conoce virtualmente nada, inclusive el nombre que aquí se enuncia puede no ser el verdadero, aunque es el que se adopta, por manuscritos que se le relacionan a este científico.

Se cree que al-Karajī floreció a finales del siglo X o principios del XI, y que toda su vida transcurrió en Bagdad. Al-kajarī conoce los trabajos de sus predecesores como Euclides, Diofanto al-Khuwārizmī y abū-Kāmil y se evoca al estudio de la matemática, dándole una interpretación muy propia, esto lo sintetiza en dos grandes obras *al-Fakhrī* y *al-Badī*. Estos trabajos son muy interesantes desde el punto de vista de la historia de la matemática. Entre sus logros podemos mencionar lo siguiente:

Las operaciones elementales de la aritmética las lleva al intervalo $[0, \infty]$ y presenta una álgebra sobre polinomios, esto último, lo hace basándose en el *Algebra* de al-Khuwārizmī, las contribuciones que hace abū-Kāmil a este trabajo y la *Aritmética* de Diofanto, (hay que recordar que Diofanto fue traducido al árabe por abū'l Wafa (940-988) a finales del siglo X d. c.). En su tratado *al-Fakhrī* presenta un estudio sobre el álgebra de exponentes, dando una aplicación de operaciones aritméticas de éstos, él estudia primero dos sucesiones $x, x^2, ...x^9, ..., \cdot 1/x, 1/x^2, ..., 1/x^9, ..., \cdot$ para después dar las siguientes reglas:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \cdots \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x} \cdots = \frac{1}{x^{n-1}} : \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^{n-1}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}, \cdots, \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{n+m}} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x} \cdot x^2 = \frac{x^2}{x}, \frac{1}{x} \cdot x^3 = \frac{x^3}{x}, \cdots, \frac{1}{x^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n} \qquad (4)$$

estas reglas son muy importantes ya que al-Samaw'al (matemático y narrador de al-Karajī) crea en base a ésto, lo que ahora se le llama Teoría de Grupos, y se da por primera vez la regla $x^m x^n = x^{m+n}$, donde m y n son enteros positivos.

Al-kajarjī crea la división de monomios entre monomios y de un polinomio entre un monomio dando así las bases para la creación de la Teoría de Anillos. Extiende las operaciones algebraicas a cantidades irracionales, ésto lo realiza tomando el trabajo de Euclides (*Los Elementos*) descartando la definición de número, del libro VII, la cual dice: "*el todo se compone de* *unidades*" y aceptando el libro X en el cual se define el concepto de inconmensurabilidad e irracionalidad, sólo que, a estos conceptos los usa como *números* no como magnitudes[2]. En *al-Fakhrī* se presenta el desarrollo de $(a+b)^3$ mientras que en *al-Badī* $(a-b)^3$ y $(a+b)^4$ y su generalización:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^n$$

donde $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C - n - 1^m$ son los coeficientes binomiales. Al-Karajī enuncia también las proposiciones[3] $(ab)^n = a^n b^n$ y

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} = n(\tfrac{1}{2} + \tfrac{n}{2})$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i(\tfrac{2n}{3} + \tfrac{1}{3})$$

Por último hay que decir, que conociendo el trabajo de la *Aritmética* de Diofanto, al-Karajī se ve influenciado de tal modo en el análisis indeterminado, que sus trabajos *al-Fakhrī* como *al-Badī* contienen como ejemplos algunos problemas de la *Aritmética* y suma otros diferentes pero con el mismo estilo.

Respecto al tratamiento en particular de las ecuaciones de segundo grado, al-Karajī retoma el desarrollo elaborado por Euclides, de hecho, enuncia las proposiciones II-4, 5 y 6 de los *Elementos* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} II-4 & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ II-5 & ab + (\frac{a+b}{2} - b)^2 = ab + (\frac{a+b}{2} - a)^2 = (\frac{a+b}{2})^2 \\ II-6 & (a+m)\cdot m + (\frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a + m)^2 \end{array}$$

sólo notamos una generalización de II-4 que la expresa como:

$$a^2 \pm na + (\tfrac{1}{2}n)^2 = (a \pm \tfrac{1}{2}n)^2$$

Y de las clasificaciones de ecuaciones de segundo orden ya vistas en al-Khuwārizmī, al-Karajī trabaja sólo con $ax^2 + c = px$ y $ax^2 = px + c$. Los ejemplos que exhibe este matemático tenemos la ya conocida ecuación:

---

[2] Nuestra fuente [14] hace el comentario que esta última aseveración provoca toda una reinterpretación del libro X de los *Elementos*, aunque en mi opinión, es de todos los 13 libros

[3] Las demostraciones las hace al-Samaw'al, por ejemplo en la primera proposición él parte de $(ab)^{n-1}$ y llega a $(ab)^n$, ¡ esta es la primera vez que se tiene conocimiento de una demostración por inducción !.

Ejemplo A.7 $x^2 + 10x = 39$

Este problema lo resuelve de la siguiente forma: Traza el segmento $\overline{CA}$ (Fig. 46) el cual parte por B en partes desiguales y por D de tal manera que $\overline{BD} = \overline{DA}$ asigna a $\overline{CB} = x$ y $\overline{BA} = 10$, ahora conociendo que $\overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$ por la proposición II-6 de los *Elementos*, sustituye obteniendo así, $39 + 5^2 = \overline{DC}^2$; $\overline{DC} = 8 = 5 + x$, por lo tanto $x = 3$.

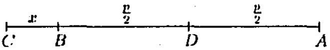


Figura 46.

Existen otros ejemplos como son: $3x^2 + 6x = 24$ y $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 6$ los cuales resuelve de manera similar, es decir, aplica directamente resultados vistos por sus predecesores.

Resuelve además la ecuación $ax^2 + bx + c = u^2$, suponiendo que a y c son dos números positivos y cuadrados, considerando también las siguientes posibilidades: a es un cuadrado, b es un cuadrado, ninguno de los dos a ó b son cuadrados en $ax^2 + b = u^2$, pero $-b/a$ es un cuadrado. En suma él exhibe que, $\pm(bx - c) - x^2 = u^2$ no es solución racional a menos que $b^2/4 \pm c$ es la suma de dos cuadrados.

Esto es sólo lo que tenemos de este matemático sobre ecuaciones cuadráticas ya que más bien él se dedica a dar solución a ecuaciones de "alto grado", como:

$$ax^{2n} + bx^n = c; \quad ax^{2n} + c = bx^n;$$
$$bx^n + c = ax^{2n}; \quad ax^2n + m = bx^{n+m} + cx^m$$

Como podemos darnos cuenta las ecuaciones de segundo grado empiezan a perder interés y sobre todo el razonamiento geométrico.

Al-Kayyāmī Ghiyāth Al-Dīn Aba'l-Fath 'Umar Ibn Ibrāhīm Al-Nīsābūrī

(Nīshāpūr, Khurasan (ahora Iran) 1048-Nīshāpūr 1131)

Al-Kayyāmī también se le conoce como Omar Kayyam, su nombre estipula que fue hijo de Ibrāhīm; el calificativo de al-Kayyāmī indica que sus padres o sus antepasados fueron comerciantes, sus otros nombres como Umar es su propia designación, mientras que Ghiyāth al-Dīn (ayudante de la Fé) es un epíteto honorífico que se le dio en vida, y al-Nīsābūrī indica la fecha de su nacimiento. Fuentes árabes de los siglos XII al XV sólo no concuerdan con el último dato de su nombre ya que se cree que él nació aproximadamente en el año de 1017.

Los trabajos que escribió este matemático, astrónomo, filósofo, músico y poeta son inumerables, pero su más importante contribución científica es *Risāla fī'l-brarāhīn alā masā'il al-jabr wa'l-muqābala* (Tratado sobre una demostración de problemas del álgebra y almuqabala)[4] y un comentario sobre la teoría de las líneas paralelas y de las *razones* cuyo título es: *Sharh ma ashkala min musādarāt kitāb Uqlīdis.* Estos tratados fueron escritos alrededor del año 1077. Entre otras cosas al-Khayyāmī da una solución algebraica al problema de determinar la cantidad de oro o plata que existe en alguna aleación, con tan sólo saber el peso específico de cada metal. Pero empecemos por el principio.

En *Los Problemas de la Arimlética* que es otro tratado de al-Khayyāmī escribe lo siguiente: *Los hindus tienen métodos para extraer los lados de los cuadrados y cubos basados en la investigación de pequeños números de casos, lo cual, es* (limitado) *al conocimiento de los cuadrados de nueve enteros, esto es, el cuadrado de* 1, 2, 3 *y así, y sus productos entre cada uno de estos, que es el producto de* 2 *con* 3 *y así. Yo tengo escrito un libro el cual prueba la validez de estos métodos y exhibo una regla para encontrar la solución, y tengo un suplemento de este tipo, que es, para encontrar el lado de un cuadrado cuadrado y el cuadrado-cubo, y el cubo-cubo, o aún más grandes; y estas demostraciones son sólo demostraciones algebraicas, basadas sobre la parte algebraica del libro de los Elementos*[5]. [14]

En el *Risāla* encontramos la primera definición de álgebra la cuál dice: *El arte del al-jabr y al-muqābala, es el arte de la ciencia cuyo sujeto es el número puro y cantidades medibles en cuanto a éstas, son deconocidas, sumadas a una cosa conocida con ayuda de las cuales se puede encontrar*

[4] Este trabajo no es el original es una copia

[5] Como se puede notar al-Khayyāmī tiene un alto grado de conocimiento sobre la matemática griega, hindú y en consecuencia de la china.

y que (conociendo) *la cosa en cada una de las cantidades o una razón....* El *número puro* al cual se refiere al-Khayyāmī es el número natural mientras que las *cantidades medibles*, son las líneas, superficies, cuerpos o el tiempo, en esta mismo enunciado agrega: *ahora la extración del al-jabr son efectuadas por ecuaciones... en donde las potencias están bien conocidas.*

También se encuentra aquí (*Risāla*) una construcción geométrica de una ecuación cúbica elaborada por un estudiante musulman, que es de la siguiente forma:

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

ésta, se resuelve por medio de la intersección de una circunferencia

$$y^2 = (x - 10) \cdot (20 - x)$$

y una hiporbola

$$xy = 10\sqrt{2}(x - 10)$$

al-Khayyāmī hace notar que la solución tiene un error de menos del uno por ciento y que, *esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales* (se está refiriendo a los métodos ya vistos) ya que requiere del uso de secciones cónicas. De aquí surge todo un estudio sobre ecuaciones de tercer grado el cual concluye con las siguientes afirmaciones: primero, todas las ecuaciones que se puedan reducir a una ecuación de segundo grado pueden ser resueltas por secciones cónicas y que su solución aritmética es desconocida;[6] segundo, no todas las ecuaciones de tercer grado se pueden resolver por medio de regla y compás, esto es, con radicales cuadráticos;[7] tercero, la ecuación $x^3 + qx = px^2 + r$ puede bajo ciertos criterios poseer tres raíces positivas.

En el *Sharh*, se encuentra toda una teoría acerca de las *razones* y *proporciones*, esta teoría es equivalente a la expuesta en el libro V de los *Elementos*. Las demostraciones que se encuentran a este capítulo son más generales, a diferencia de las griegas que no las tratan de esta manera. También se empieza a desarrollar un nuevo concepto de número, incluyendo todos los positivos racionales, y es que muestra la ¡divisibilidad de la unidad!, esto lo hace por medio de la composición de *razones*, la cual describe así: *no consideremos la magnitud g como una línea, superficie, cuerpo o el tiempo; pero sea considerada esta magnitud como abstracta por estas razones y por pertenencia reales de los números, pero no números absolutos y verdaderos. Para la razón de a a b pueden ser frecuentemente imposible encontrar dos números los cuales su razón puede ser igual a esta razón* [14]. Lo que quiere decir al-Khayyāmī es: primero se selecciona la

[6] Esto fue descubierto hasta el siglo XVI

[7] En 1637 Descartes repite esta misma proposición, la cual es demostrada por P. Wantzel en 1837

unidad y una auxiliar cantidad g por medio de la cual la *razón* $1/g$ es la misma que a/b. Aquí a y b se toman como magnitudes homogéneas arbitrarias que generalmente son inconmensurables, consecuentemente $1/g$ es también inconmensurable.

De lo anterior al-Khayyāmī desarrolla una teoría sobre ecuaciones de grados inversos, es decir, "*parte de la cosa, parte del cuadrado, y así*". Un ejemplo es el siguiente:

$$\frac{1}{x^3} + \frac{31}{x^2} + \frac{51}{x} = \frac{33}{8}$$

la cual, reduce por medio de un interesante cambio de variable $x = 1/z$. También considera casos como:

$$x^2 + 2x = 2 + \frac{21}{x^2}$$

esta ecuación produce una de cuarto grado, la solución la da por medio de limites superiores y dice: *Sí esto* (la serie de potencias consecutivas) *se extiende a 5 clases o a 6 clases o a 7, esto no puede ser extraído por algún método*, es decir no encuentra solución.

Sobre la teoría de las líneas paralelas él empieza tomando la definición aristotélica la cual dice: *Sean dos líneas rectas convergentes intersectadas, esto es imposible que dos líneas rectas convergentes diverjan en la dirección de la convergencia.* Al-Khayyāmī prueba primero que dos perpendiculares de una línea recta no se pueden intersectar porque esta intersección simétrica, puede estar en dos puntos o en ambos lados de la línea recta, por lo tanto, no pueden cruzarse. Sigue con una segunda proposición: *Dos perpendiculares sobre una línea recta no pueden diverger ya que si esto sucediera tendríamos dos divergencias sobre ambos lados de la línea recta.* Al-Khayyāmī probo ocho proposiciones[8] más, que en su opinion, deben de sumarse a el libro I de los *Elementos* y quitar la proposición 29 de este mismo libro, en la cual Euclides se refiere a la teoría de las paralelas basada en el 5^0 postulado, de su obra.

Sobre el escaso estudio de las ecuaciones de segundo grado al-Kayyāmī se refiere solamente a las proposiciones II-5 y 6 de los *Elementos*, su generalización que se encuentra en VI-28 y 29 también de los *Elementos* y los *Data* 58 y 59. Los ejemplos que estudia este matemático son los siguientes:

---

[8] Algunas de las conclusiones que se obtienen de estas proposiciones sirvierón para crear el primer teorema de la geometría no-euclideana, realizado por Lobachenski y Riemann

Ejemplo A.8 $x^2 + 10x = 39$

Este lo resuelve por medio de la proposición II-6 de los *Elementos* y exhibe una figura (Fig. 47) que esta incompleta, ya que todo el razonamiento lo hace algebraicamente, usando el hecho de que $\overline{EA} \cdot \overline{AD} + \overline{DZ}^2 = \overline{ZA}^2$.

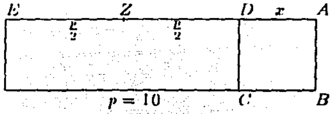


Figura 47.

Ejemplo A.9 $x^2 + 21 = 10x$

Aquí usa *Elementos* II-5 y su interpretación algebraica, la cuál, es:

$$\overline{EA} \cdot \overline{AB} + \overline{ZA}^2 = \overline{ZB}^2$$

Notamos que el exhibe tres figuras, que corresponden a los casos cuando $x < p/2$ (Fig. 48); $x > p/2$ (Fig. 49) y $x = p/2$ (Fig. 50).

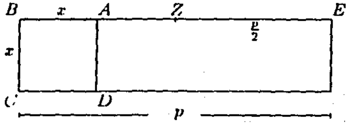


Figura 48.

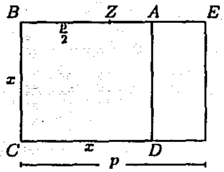


Figura 49.

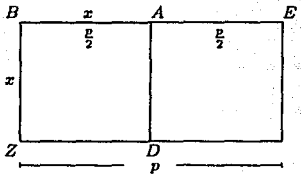


Figura 50.

Sólo hay que notar, que A cae siempre a la mitad del segmento correspondiente para cada caso, es decir, para el caso $x < p/2$ A es el punto medio del segmento $\overline{BZ}$; para $x = p/2$ A parte a $\overline{BE}$ a la mitad y para $x > p/2$ A es la mitad de $\overline{ZE}$.

Ejemplo A.10 $x^2 = 5x + 6$

Este problema lo plantea como en la figura 51:

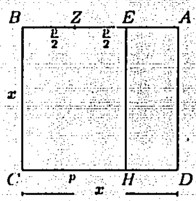


Figura 51.

en donde podemos notar que las particiones del segmento $\overline{BA}$ por Z y E nos conducen a la proposición II-6 de los *Elementos* es decir

$$\overline{EA} \cdot \overline{AB} + \overline{ZA}^2 = \overline{ZB}^2$$

Aunque a al-Kayyāmī se le considera como el hombre que rescató a la geometría (véase el comentario a la solución de la ecuación de tercer grado que hace por medio de circunferencias e hipérbolas), la aplicación de ésta a ecuaciones de segundo grado es muy escasa, ya que al igual que al-Karajī prefiere dar solución a ecuaciones de mayor grado.

Abraham Bar Hiyya Ha-Nasi

(ca. 1136 d.c. en Barcelona)

A ha-Nasi se le conoció en Arabia como Sãhib al-Shurta, que quiere decir, "Mayor de la Casa Real" tal vez denota un tipo de posición social[9], este título traducido al latín se nombra como Savasorda, que es como también se le conoce a este grande matemático y astrónomo [14].

Savasorda escribe *Enciclopedia* y un tratado sobre geometría práctica, mediciones de áreas y volúmenes que involucran ecuaciones de segundo grado, titulado; *Hibbūr ha-meshīhah we-ha-tishboret*, que fue traducido al latín por Platón de Tivoli en el año de 1116, llevando el nombre de *Liber embadorum*. Es importante indicar que por primera vez en Europa, se tiene conocimiento de las ecuaciones de segundo orden.

Hibbūr es el primer trabajo escrito y expuesto en Europa sobre álgebra árabe, éste contiene entre otras cosas la solución completa de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, además aquí se encuentra la división de figuras geometricas, lo cuál influenció en la matemática de Leonardo Fibonacci.

Savasorda por su parte se ve influenciado por, (e inclusive recomieneda las lecturas de los trabajos), Euclides, Teodorus de Bitania, Apolonio de Pergamo, Héron de Alejandría, entre otros. Pero la base de su trabajo es un viejo tratado sobre la geometría hebrea que lleva por título *Mishnat ha-Middot* (150 años a. c.). Este trabajo puede ser el enlace de la matemática entre los palestinos y la primera civilización medieval árabe.

En su *Enciclopedia* usa técnicas de solución a problemas, téoricos y practicos que incluye "el arte del calcúlo parcial y la aritmética en los negocios, la teoría de los números y definiciones geométricas". Este libro puede ser el primer trabajo algorítmico en el Oeste de Europa.

Savasorda al igual que al-Karajī y al-Kayyāmī no profundiza en el estudio de ecuaciones de segundo grado, de hecho, retoma al igual que sus compatriotas las proposiciones II-4, 5 y 6 de los *Elementos* para resolver dichas ecuaciones. Entre los ejemplos que encontramos en Savasorda podemos mencionar el siguiente:

Ejemplo A.11 $x^2 - 4x = 21$

El cuál resuelve por medio de la formula $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 + q}$ y además exhibe la siguiente figura (Fig. 52):

[9] Se refiere a una especie de embajador, ya que como veremos Ah-Nasi vivió en Barcelona, España

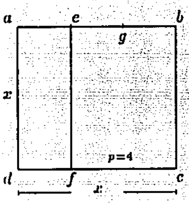


Figura 52.

asignandole al cuadrado $abcd = x^2$; el rectángulo $ebcf = px$ y $aefd = 21$, después nos dice que hay que partir $\overline{eb}$ por g en partes iguales, y usando el hecho de que; $\overline{ab} \cdot \overline{ae} + \overline{eg}^2 = \overline{ag}^2$ (*Elementos II-6*) sustituimos, así se produce que:

$$21 = 2^2 = (x - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad 5 = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

Ejemplo A.12 $x^2 + 3 = 4x$

Este lo resuelve por medio de dos formas, exhibiendo figuras para cada caso, éstas son:

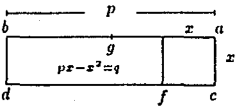


Figura 53.

aquí se obtiene que $x = 1$ (Fig. 53). La otra figura es:

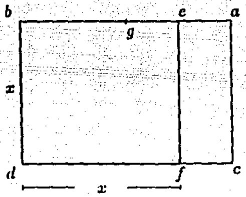


Figura 54.

aquí se obtiene que $x = 3$ (Fig. 54). Aunque no se ve explícitamente la solución está dada por medio de *Elementos* II-5 en sus dos casos (véase al-Khuwārizmī).

Conclusión

En este último periodo de la cultura árabe que va del año 850 d. c. al año 1136 d. c. se nota ya una transformación del pensamiento de la estructura geométrica a la estructura algebraica, siempre tomando como base en todo este proceso el trabajo de Euclides, el cual se ve incrementado por estos hombres influyendo en gran medida a los matemáticos de los próximos siglos.

También notamos en este periodo la consideración de ecuaciones de grado mayor que dos, ya que posiblemente se creen suficientemente estudiadas por su predecesor al-Khuwārizmī. Este incremento en el grado de las ecuaciones trae consigo grandes aportaciones a la matemática que en algunos casos perdura hasta nuestros días.

Por último hay que decir que el pensamiento árabe empieza a germinar en Europa con lo que se abren nuevos horizontes a la ciencia y en particular a la matemática.

Epítome

Con esto se termina el análisis histórico que sirvió para entender las soluciones que da Juan Díez a los problemas expuestos en su trabajo sobre el *arte mayor*. En este análisis, el cual no pasa de ser un bosquejo ya que, hay tanto que decir, nos damos cuenta del proceso de la matemática a lo largo de 3000 años aproximadamente. Estas culturas son la base de la matemática que hoy se estudia, con esto quiero decir, que la obra de todos estos hombres es tan completa que sólo nos han dejado la tarea de perfeccionarla.

El matemático que se jacte de serlo tiene necesariamente que conocer la historia de la matemática y nunca despreciarla (como sucede muchas de las veces) más al contrario debe respetarla, ya que si se quiere creer un sol, por el sólo hecho de ser matemático, despertará al conocer esta historia y se dará cuenta que es mucho menos que nada.

Excursus II

En el título de la obra de al-Khuwārizmī *Kitāb fī al-jābr al-muqābala* se encuentra literalmente definido el proceso de la "restitución a su lugar de los huesos dislocados", así un algebrista sería entonces un "huesero". En el sentido matemático *al-jābr* (restauración) es la transposición de términos en una ecuación y *al-muqābala* (oposición) es la reducción de términos semejantes, un ejemplo de esto es lo siguiente:

Sea $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ desarrollando términos se tiene:

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

al-Khuwārizmī procede de la siguente manera. Por *al-jābr*:

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x$$

divide entre 2 y agrupa términos. Así por *al-muqabāla*, se tiene:

$$x^2 + 21 = 10x$$

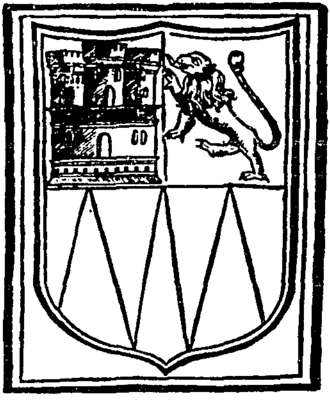
Hay que hacer notar que para Diofanto los términos significan la "compensación de las partes difíciles". Al-Kayyāmī, por otro lado habla de las formas de solución del *álgebra*. Hacia el año de 1000 d. c. se utiliza ya el término *algebrista*, y en el siglo XIV la palabra *álgebra* es la que ya se indica por esta ciencia. Por último los árabes europeos, al utilizar el trabajo de al-Khuwārizmī la palabra *ğim* ya no la dicen como *al-dschabr* sino como *al-gabr*.

Se había indicado en el estudio que se hizo sobre al-Khuwārizmī, que este se refiere a tres números, estos son:
a) *Dirham* del griego *Drachme* que indica unidad monetaria
b) *ğidhr* indica raíz o *šai* (cosa) y
c) *māl* indica censo y también cuadrado
así por ejemplo al-Khuwārizmī nos indica que: *māl* es el producto de *ğidhr* consigo mismo, donde *ğidhr* es una magnitud [10]. Además *māl* se encuentra en testamentos y herencias[11], aquí el término indica propiedad, también sirve como una magnitud desconocida en un problema lineal. Posteriormente *māl* tuvo la acepción del cuadrado, en contra posición de la palabra *ğidhr*. Por último la palabra *šai* se utilizaba como indicación de la magnitud buscada, es decir, la solución o la raíz de la ecuación.

[10] Más tarde al-Karajī cambiaría el concepto *magnitud* por el de *número*.
[11] Como se puede observar en los problemas complementarios de *El Algebra* [35].

zen ciento, toma la mitad de su rayz es 25. cubicalos el ultimo produ
zido es. 125. numero demandado lo qual nota.

¶ No he querido ser enesto mas largo lo uno por euitar prolixidad y lo otro porque como siempre he dicho mi yntento nunca fue otro que poner las cosas necessarias enel comun destos reygnos: y assi vereys como enlo de mas he sido breue suplico os, sea tomado ẽ seruicio y recebida la voluntad como de quien dessea seruir.



Bibliografía

[1] Wagner, Henry Raup, *Nueva Bibliografía Mexicana del siglo XVI*, Ed. Polis, México, 1940, pp. 5, 11, 148.

[2] García, Icazbalceta, *Bibliografía Mexicana del siglo XVI*, Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1954, pp. 123-126.

[3] Iguíniz, Juan Bautista, *El Primer Libro Impreso en México*. Ed. Asociación de libreros de México, México, 1939.

[4] Medina, José Toribio, *La Imprenta en México (1539-1821)*, Tomo I. Santiago de Chile, 1912 (impreso en la casa del autor)

[5] Iguíniz, Juan Bautista, *La Imprenta en la Nueva España*, Ed. Porrúa, México, 1938.

[6] Moreno de los Arcos, Roberto, *Ensayos de bibliografía Mexicana* U.N.A.M., México, 1989.

[7] Bakewell P. S., *Minería y sociedad en el México colonial, Zacatecas (1546-1700)*, Fondo de Cultura Económica, México, 1976, pp. 20-26.

[8] Brandig D. A., *Mineros y comerciantes en el México borbónico (1763-1810)*, Fondo de Cultura Económica, México, 1975, pp. 23.

[9] Karpinski, Louis Charles, *Bibliography of Matematical works printed in America through 1850*, Ann Arbor: The University of Michigan Press, U.S.A., 1940, pp. 24-25.

[10] De Leguina, E., *La Plata Española*, Librería de Fernando Fé, Madrid, 1854, pp. 68.

[11] Cajori, Florian, *The Eariest Arithmetic Published in America*, University of California, U.S.A., febrero de 1927.

[12] Díez, Juan, *El Sumario compendioso de la Cuentas de Oro y Plata...*, México, 1556, (copias del facsímil).

[13] Carrillo Trujillo, M. Myrna, *La historia de la moneda en México*, México, 1960.

[14] Gillispie Coulston, Charles, *Dictionary of Scientific Biography*

[15] Smith D. Eugene, *The Sumario Compendioso of Brother Juan Diez*, Boston and London, Ginn and Company Publishers, 1921.

[15'] Smith, D. Eugene, *The First Work on Mathematics Priend in the New World*, University of Columbia, 1920.

[16] Díaz del Castillo, Bernal, *Historia Verdadera de la Conquista de la Nueva España.* Ed. Espasa-Calpe, octava edición, España 1989.

[17] Moreno de los Arcos, Roberto, *Un caso de censura de libros en el siglo XVIII novohispano: Jorge Mas Theóphoro.* U.N.A.M., México, 1978.

[18] STK=Straβburger Keilschrifttexte, editado por C.Frank en los Schriften der Straβburger wissenshaftlichen Gesellschaft in Heilderberg, Neu Folge, Heft 9 Berlin-Leipzig 1928.

TU=Tablets d'Uruk, F. Thurean-Dangin: Musée du Louvre, departament des antiquis orientales. Textes cuneiform, T.VI Paris 1922.

CT=Cuneiform Texts from Babylonian Tables in the British Museum, London 1920.

[19] Neugebauer, O. *Beitrage zur Geschichte der babylonischen Arithmetik.* Quellen und Studien, B 1, 1930, S. 124.

[20] Waerden van der, B. L., *Science Awakening*, Dover New York 1954.

[21] Thureau-Dangin, F. *Le prime mathématique AO 8862*, Rev. dÁssyr. 29 (1932), S. 1-10.4 Tafeln. Postskriptum S. 89-90.

[22] Neugebauer, O. *Zur Geschichte der babylonischen Mathematik.* Quellen u. Studien zur Geschichte der Mathematik, B 1, 1929, S.78-80.

[23] F. li. Griffith, *Hierati Papyri From Kahuman Gurob*, London 1897 pp. 15-18.

[24] Graf Schack-Schackenburg, *Sobre el Papiro de Berlín 6619* en el Ägyptischen Zeitshrift 38 (1900) pp.13ff y 40 (1902) pp.65f.

[25] Heath, L. Thomas, *The Thirteen Book of Euclid's Elements*, Dover Publications, New York, 1956.

[26] García Bacca, Juan D., *Elementos de Geométria*, (libros I, II) U.N.A.M., México, 1944.

[26'] Alvares Laso, José, *Elementos de Geometría*, (libros III, IV y V) U.N.A.M., México, 1956.

[27] Knorr, Wilbur Richard, *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel Publishing Company, Londres 1975.

[28] Colección del I.P.N., *Cientificos Griegos*, México, (desconosco el año de impresión).

[29] Steck Max, *Proklus Diadochus, Euclid-Kommentar: Erste Deutsche Ausgabe 410-485*. Halle (Saale), 1945, pp. 458,16.

[30] Aristóteles, *Metafísica*, (Traducción del Griego) Colección Austral, Ed. Espasa-Calpe, décimosexta edición, México 1990, pp. 24-28.

[31] Waerden, B. L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983.

[32] Eves Howard, *Estudio de las Geometrias* vol. II. UTEHA, Boston, 1965.

[33] Heath L. Thomas, *Diophantus of Alexandria*, Dover, New York, U.S.A., 1964.

[34] Heath L. Thomas, *A Manual of Greek Mathematics*, Dover, New York, U.S.A., 1963.

[35] Karpinski, Louis Charles, *Contribution to the History of Science*, University of Michigan, 1930.

[36] Levey Martin, *The Algebra of Abu Kamil*, University of Wisconsin Press, 1966.

[37] Neugebauer, O. *Studien zur Geschichte der antiken Algebra I.* Quellen und Studien B 2, 1932, S. 12ff.

[38] Simon, M., *Geschichte der Mthematik im Altertum*, Berlin, 1909 pp.41-42.

[39] Hogben, Lancelot., *El Universo de los números*, Ed. Destino, Barcelona 1966.

[40] Lawlor, Robert., *Sacred Geometry*, Thames and Hudson, New York, U.S.A., 1990.

[41] Viète, François., *The Analytic Art*, The Kent State University Press, Ohio, U.S.A., 1983.

[42] Tartaglia, Niccolo., *General Trattato di Numeri et Misure*, Italia, tomos I, II 1556, tomo III 1560. (¡¡¡Estos libros existen en México!!! en la biblioteca Nacional de México, por favor cuidalos).

Las freses que se encuentran al inicio de cada capítulo se localizan en los siguientes libros.

[43] Revista *MATHESIS*, Vol. IV, No. 3, Agosto 1988, Depto. de Matemáticas, Fac de Ciencias, U.N.A.M. pp. 421.

[44] Nietzsche, Federico.,*Asi Hablaba Zaratustra*, Editores Mexicanos Unidos, México, 1987, pp. 139, 1.

[45] Colección del I.P.N., *Cientificos Griegos*, México, (desconosco el año de impresión), pp. 689.

[46] García Baccca., *La Poética de Aristóteles*, Editores Unidos Mexicanos, México, 1985, pp. 9.

FIN DE LA TESIS

A Honra y Gloria de nuestra facultad de Ciencias. Aquí se acaba el presente trabajo titulado: Hacia una historia crítica de la Matemática en México. El cual fue realizado en la Cd. de México, después de cuatro años de investigación a cargo de Carlos Cario Ramírez con la asesoría del Mat. José Chacón Castro y con el privilegio de los Doctores Roberto Moreno de los Arcos, Juan José Rivaud Morayta, Alejandro Garciadiego, el M. en C. Carlos Torres Alcaraz y el Mat. Marcos Montiel Sanchez (q.e.p.d.). Acabose a 30 días del mes de octubre del año de 1992. Año del quinto centenario del infortuito descubrimiento del Nuevo Mundo y el principio de la destrucción de una de las más grandas culturas que ha existido la Azteca

***

*