

30
2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“MAQUINAS TERMOACUSTICAS Y
ALGUNAS APLICACIONES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ARTURO OROZCO SANTILLAN

Asesor: M. en C. Ricardo Ruiz Boullosa



México, D. F.

1992

FALLA EN EL DISEÑO



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCIÓN.	1
RESUMEN.	5
CAPÍTULO I: Breve historia del fenómeno termoacústico.	7
CAPÍTULO II: Teoría de las máquinas termoacústicas.	13
2.1.- Una interpretación cualitativa del fenómeno termoacústico.	13
2.1.1.- Bombeo de calor.	14
2.1.2.- Gradiente de temperatura crítico.	16
2.1.3.- Características convenientes de un refrigerador termoacústico.	17
2.1.4.- El oscilador termoacústico.	18
2.1.5.- Oscilaciones en la temperatura.	20
2.2.- Teoría general de las máquinas termoacústicas.	22
2.2.1.- Conjunto de placas de una máquina termoacústica.	22
2.2.2.- Variables acústicas.	23
2.2.3.- Oscilaciones de la velocidad del fluido.	24
2.2.4.- Oscilaciones de la temperatura en la placa.	25
2.2.5.- Oscilaciones de la temperatura en el fluido.	26
2.2.6.- Oscilaciones de la presión en el fluido.	28
2.2.7.- Flujo total de energía en la región que contiene el conjunto de placas.	30
2.2.8.- La intensidad acústica en la región que contiene el conjunto de placas.	34
2.2.9.- Consideraciones sobre el desarrollo de esta teoría.	35
2.3.- Análisis de resultados de la teoría general de las máquinas termoacústicas.	36
2.3.1.- Caso ideal.	36
2.3.2.- Despreciando la viscosidad.	45
2.3.3.- Tomando en cuenta los efectos de la viscosidad.	49
CAPÍTULO III: Efectos termoacústicos en un tubo de resonancias	53
3.1.- Objetivo.	53
3.2.- Dispositivo experimental.	54
3.3.- Discusión previa.	56
3.3.1.- Explicación del fenómeno.	56
3.3.2.- Consideraciones para el análisis teórico.	57
3.3.3.- Incertidumbre de los datos experimentales.	58
3.4.- Desarrollo y resultados experimentales.	60
3.4.1.- Efecto de la frecuencia sobre el flujo hidrodinámico de calor.	60
3.4.2.- Efecto de la presión sobre el flujo hidrodinámico de calor.	67
3.4.3.- Efecto de la amplitud de la onda sonora sobre el flujo hidrodinámico de calor.	76
3.4.4.- Efecto de la longitud de las placas sobre el flujo hidrodinámico de calor.	78
3.5.- Conclusiones.	85

CAPÍTULO IV: Dos ejemplos de máquinas termoacústicas.	86
4.1.- Oscilador Termoacústico.	86
4.1.1.- Descripción general.	86
4.1.2.- Diseño y construcción.	89
4.1.3.- Funcionamiento.	89
4.1.4.- Análisis experimental.	90
4.2.- Refrigerador Termoacústico.	106
4.2.1.- Descripción general.	106
4.2.2.- Diseño y construcción.	110
4.2.3.- Funcionamiento.	116
4.2.4.- Conclusiones.	125
CAPÍTULO V: Conclusiones y comentarios finales.	126
APÉNDICE 1: Pérdidas de energía acústica por efectos de la viscosidad y de la conducción térmica.	129
1.- Pérdidas de energía sonora debido a la viscosidad.	129
2.- Pérdidas de energía de una onda sonora armónica plana en el espacio abierto.	130
2.1.- Fluctuaciones en un fluido por una onda sonora armónica plana.	130
2.2.- Pérdidas de energía.	131
3.- Pérdidas de energía de una onda sonora armónica plana cerca de una pared.	132
3.1.- Ecuación de Navier-Stokes para un flujo laminar y para un flujo rotacional.	133
3.2.- Ecuación de onda modificada.	134
3.3.- Proceso cercanamente adiabático y la onda de propagación.	136
3.4.- Proceso cercanamente isotérmico y la onda térmica.	137
3.5.- La viscosidad y la onda de esfuerzo.	138
3.6.- Capas límite.	139
3.7.- Condiciones de frontera.	140
3.8.- Pérdidas de energía sonora debido a la conducción, térmica cerca de una pared.	144
3.9.- Pérdidas de energía sonora debido a la viscosidad, cerca de una pared.	145
APÉNDICE 2: Demostración de algunas ecuaciones.	147
REFERENCIAS.	152

de trabajo que se le aplica. Se define el *coeficiente de eficiencia del refrigerador*, como la relación del calor extraído al trabajo absorbido. Como se puede comprender, si los dos sistemas están a la misma temperatura, entonces no se requiere trabajo alguno para transportar calor de un sistema al otro y el coeficiente de eficiencia se hace infinito. Entre mayor sea la diferencia de temperatura entre el sistema caliente y el sistema frío, el coeficiente de eficiencia del refrigerador se irá reduciendo, pues se necesitará más trabajo para comunicar calor del sistema frío al caliente.

Para el caso de una bomba de calor, se pretende calentar un sistema extrayendo calor de otro sistema a una temperatura menor que el primero. Para tal fin, esta máquina debe consumir trabajo. Como un ejemplo, se puede considerar el interior de una vivienda en época de invierno como el sistema caliente, el exterior de la vivienda como sistema frío y la fuente de trabajo sería la energía eléctrica. El coeficiente de eficiencia de la bomba de calor es la relación entre el calor suministrado al sistema caliente y el trabajo utilizado.

Un caso particular de una máquina térmica, es aquella en la cual se aprovecha el calor que fluye del sistema caliente a otro frío para producir sonido; es decir, en este caso, se obtiene energía acústica que puede utilizarse para producir trabajo. Un dispositivo tal es llamado una "máquina termoacústica" o un "oscilador termoacústico". Esta máquina también puede operar en el sentido contrario con el mismo ciclo: se utiliza la energía sonora para comunicar calor de un sistema a otro con una temperatura mayor. Si la finalidad es enfriar el sistema que tiene la temperatura menor, esta máquina será llamada un "refrigerador termoacústico". Si el objetivo es calentar más el sistema caliente, la máquina será "una bomba de calor termoacústica".

Estas máquinas termoacústicas son relativamente simples: están formadas básicamente por un resonador, y por lo general, un

INTRODUCCION

El hombre está rodeado de una serie de máquinas que hacen más fáciles sus actividades y más confortable su vida. Basta observar a nuestro alrededor para encontrar muchas de ellas; por ejemplo: automóviles, aviones, ventiladores, aspiradoras, máquinas de escribir, molinos, etc.

Una máquina "térmica" es aquella cuya función útil es realizar trabajo utilizando el calor que se extrae de un sistema a temperatura alta. Una fracción de este calor se convierte en trabajo útil y la otra parte del mismo es transferido a otro sistema a temperatura más baja. Esta máquina también puede operar en sentido contrario: se extrae calor del sistema a temperatura baja, se toma trabajo de un agente externo y la suma de estas energías se comunica al sistema con temperatura alta en forma de calor. Este proceso puede ser útil de dos maneras. Si la finalidad es enfriar más el sistema frío, el dispositivo es llamado una "máquina frigorífica" o simplemente "refrigerador". Si lo que se pretende es calentar más el sistema caliente, esta máquina es una "bomba de calor". Básicamente, estas tres máquinas, son dispositivos idénticos que funcionan con los mismos principios fundamentales pero se hacen trabajar con fines diferentes.

Como es evidente, lo que se busca en una máquina térmica, es transformar la mayor cantidad del calor extraído del sistema caliente, en trabajo útil. Se define el cociente del trabajo que produce una máquina térmica al calor extraído, como el *rendimiento* de la máquina. Como puede verse, se pretende obtener máquinas térmicas con un alto rendimiento.

Para un refrigerador, lo que resulta importante es conocer el número de calorías que se extraen del sistema frío por cada unidad

conjunto de placas en su interior. Para el caso del oscilador, una parte del resonador tiene una temperatura mucho mayor al resto de él. Para un refrigerador o una bomba de calor, el trabajo es realizado por medio de una bocina que produce una onda sonora.

Las máquinas termoacústicas no tienen partes mecánicas en movimiento (a excepción de la membrana de la bocina de una bomba de calor o de un refrigerador), por lo cual las pérdidas de energía útil debido a la fricción, son muy pequeñas. Además, no tienen componentes complicados, sino que por el contrario son muy simples. Estas características de las máquinas termoacústicas, les dan varias ventajas sobre las otras máquinas térmicas: las pérdidas de energía son muy pequeñas, prácticamente no tienen desgaste de piezas, son muy sencillas, y tienen un rendimiento y un coeficiente de eficiencia relativamente más grandes.

Las primeras máquinas termoacústicas de las que se tiene noticia son los osciladores, cuyos primeros informes datan de fines del siglo XVIII. Hace menos de 10 años, se empezó con el desarrollo de los refrigeradores. Actualmente se han obtenido buenos resultados en algunos centros de investigación de los Estados Unidos y se piensa que éstos refrigeradores pueden ser una buena alternativa para substituir los actuales dispositivos comerciales de enfriamiento, debido a las ventajas que presentan y a que no utilizan clorofluorocarbonos (substancias que destruyen la capa de ozono de la atmósfera por lo que se pretende eliminar su producción para el año 2000). Actualmente también se tiene el interés de desarrollar los osciladores termoacústicos para utilizarlos como generadores de energía eléctrica.

La finalidad de este trabajo de investigación, fue empezar con el estudio de este tipo de máquinas. Debido las ventajas que presentan las hacen de gran interés, ya que alguna aplicación daría como resultado ahorro de energía y de costos. Además, la idea de poder enfriar una región por medio de sonido despierta la duda y el deseo de poder comprobar que es posible. Estos fueron los motivos

principales por los cuáles se decidió realizar este trabajo de investigación.

Debido a las limitaciones en tiempo y en recursos que se tienen para la elaboración de una tesis, se planeó que este trabajo sería una introducción para el estudio de este tipo de máquinas. La finalidad principal fue básicamente la adquisición de experiencia y conocimientos fundamentales sobre el tema más que la construcción de máquinas eficientes. Se pretendió entender el fenómeno termoacústico, estudiar la teoría que describe este fenómeno y construir un oscilador y un refrigerador termoacústicos dentro de las limitaciones económicas y técnicas que se tenían.

RESUMEN

Esta tesis consta de cinco capítulos. En el primero se hace una breve mención de los principales avances históricos obtenidos en la construcción de las máquinas termoacústicas y en el desarrollo y comprensión del fenómeno. Se presentan desde los primeros informes que se conocen de este tipo de máquinas (fines del siglo XVIII) hasta las últimas publicaciones de que se tiene noticia (enero de 1992).

El desarrollo de la teoría que describe el fenómeno termoacústico se presenta en el capítulo dos. Primeramente se describe de una manera cualitativa, utilizando el punto de vista Lagrangiano de la mecánica de fluidos, el ciclo termoacústico básico (ciclo de operación de una máquina termoacústica). Posteriormente, se obtienen algunas expresiones matemáticas que describen el fenómeno termoacústico. Estos resultados son sumamente complicados, por lo que se simplifican haciendo una serie de consideraciones para poder conocer el significado físico de sus términos.

En el capítulo tres, se describen algunos experimentos sobre el fenómeno termoacústico realizados en un tubo de resonancias. La finalidad fue comprender un poco más lo que ocurre físicamente en este fenómeno y obtener algunos resultados cualitativos para verificar la validez de la teoría desarrollada en el capítulo anterior.

Se construyeron dos máquinas termoacústicas: un oscilador y un refrigerador. Sus descripciones, diseños, construcciones y principales características se presentan en el capítulo cuatro.

En el último capítulo, aparecen las conclusiones del trabajo realizado y se hacen algunas sugerencias sobre como mejorar las máquinas construidas. Se presentan también algunas posibles aplicaciones de estas máquinas.

Se agrega también un apéndice donde se hace un análisis de las pérdidas de la energía de una onda sonora por efectos de la viscosidad y de la conducción térmica. Al final se obtienen dos ecuaciones que determinan este tipo de pérdidas cerca de una pared, (estas pérdidas son muy importantes en las máquinas termoacústicas).

CAPÍTULO I

BREVE HISTORIA DEL FENÓMENO TERMOACÚSTICO

La historia del fenómeno termoacústico ha sido larga. La referencia más antigua data de 1777, alrededor de 10 años después del descubrimiento del hidrógeno; cuando Byron Higgins colocó en el interior de un tubo largo y vertical una flama de este gas al tratar de demostrar que su combustión produce agua. El calor de la flama en el interior del tubo originó ondas sonoras.⁽¹⁾

Hace más de 100 años, un vidriero notó que cuando un bulbo de vidrio caliente era unido con un tubo largo y frío, también de vidrio, el extremo abierto algunas veces emitía sonido.⁽²⁾ En 1850, Sondhauss investigó cuantitativamente este fenómeno estableciendo algunas relaciones entre el tono del sonido emitido y las dimensiones del sistema; además, probó que la vibración del vidrio no era parte esencial del fenómeno. Sin embargo, Sondhauss no dió una explicación adecuada del por qué o cómo se producía las ondas sonoras.^(2,3) Este fenómeno es conocido actualmente como el fenómeno de Sondhauss.

En 1859 Rijke⁽⁴⁾ colocó una fina malla metálica en el interior de la parte inferior de un tubo abierto en ambos extremos y sostenido verticalmente. Calentó la malla con una flama de gas colocada bajo ésta y observó que se producía, casi inmediatamente después de quitar la flama, un sonido de una potencia considerable

que duraba algunos segundos. Rijke logró prolongar el sonido por un período indefinido, manteniendo caliente la malla por medio de una resistencia eléctrica. El tubo de Rijke, es de hecho, una extensión del trabajo de Higgins.

Posteriormente, en 1896, Lord Rayleigh⁽⁵⁾ explicó cualitativamente el fenómeno de Sondhauss. Consideró que el aire al moverse en el interior del tubo hacia el extremo cerrado, pasa de la parte fría a la parte caliente; supone que el equilibrio en la temperatura toma tiempo, así que durante la mayor condensación (cuando el aire está más cerca del extremo cerrado) el aire está más frío que las paredes del tubo y por lo tanto recibirá calor. En la fase de mayor rarefacción, (cuando el aire está más alejado del extremo cerrado) el aire pasó de la parte caliente a la fría y por lo tanto transfiere calor a las paredes del tubo. Rayleigh propuso que cuando el aire absorbe calor, aumenta su volumen y se realiza trabajo mecánico que mantiene las vibraciones.

Rayleigh consideró que para mantener las vibraciones en una columna de aire dentro de un tubo por medio del calor, es de vital importancia la fase relativa en el tiempo entre los cambios de temperatura y el movimiento del gas. La explicación cualitativa de Rayleigh, sobre cómo se mantienen las oscilaciones termoacústicas en el tubo de Sondhauss ha sido aceptada como correcta, sin embargo, no dió alguna explicación sobre cómo se iniciaron las oscilaciones ni tampoco una descripción cuantitativa del fenómeno.

Otra variante del fenómeno termoacústico ocurre en criogénia. En 1949, Taconis⁽⁶⁾ reportó haber observado oscilaciones espontáneas en un tubo utilizado para mover helio líquido, cuando la parte superior del tubo era cerrada y se mantenía a la temperatura ambiente mientras que la parte inferior abierta se sumergía en el helio líquido. La explicación cualitativa dada por Taconis, de cómo el enorme gradiente de temperatura a lo largo del tubo producía las oscilaciones, fue esencialmente la misma que la de Rayleigh.

En 1954, Clement y Gaffney hicieron observaciones sistemáticas de las oscilaciones de Taconis.⁽⁶⁾ Ellos observaron que las condiciones óptimas para que las oscilaciones aparecieran, ocurrían cuando la parte caliente estaba completamente cerrada y la parte que se sumergía en el helio líquido estaba abierta. Notaron también que un tubo completamente abierto en el extremo caliente, no podría generar oscilaciones a menos que su diámetro interior fuera menor a 1 mm. y además observaron que las oscilaciones ocurrían, ya sea que el extremo frío se mantuviera sumergido en el helio líquido o bien, que el extremo frío fuera retirado de la superficie del helio. Las oscilaciones de Taconis han sido estudiadas más recientemente, en una serie de mediciones realizadas en 1980, por Yazaki y colaboradores.⁽⁷⁾

Un desarrollo importante sobre el fenómeno termoacústico lo realizaron Carter, White y Stelle⁽⁸⁾ en 1962, cuando colocaron estructuras semejantes a un conjunto de placas dentro de un tubo de Sondhauss con las cuales obtuvieron un sonido más intenso. Ellos hicieron una serie de investigaciones experimentales sobre las oscilaciones de Sondhauss con la finalidad de determinar la posibilidad de usar este fenómeno para generar energía eléctrica alterna por medio de las oscilaciones de un fluido conductor dentro de un campo magnético. Sin embargo, su trabajo no trascendió y sólo fue un estudio descriptivo de las oscilaciones de Sondhauss que no incluyó un análisis teórico.

La idea de utilizar el oscilador de Sondhauss con el fin de generar energía eléctrica alterna fue retomada en 1964 por Carter, Feldman y McKinnon,⁽⁹⁾ quienes estudiaron el oscilador de Sondhauss en base a su similitud con la máquina de Stirling y consideraron la operación de este oscilador esencialmente igual a la operación de una máquina de Stirling. De sus investigaciones concluyeron que para lograr un generador efectivo de corrientes alternas, se debían de tener velocidades medias de por lo menos 20 m/s, pero las velocidades oscilantes que frecuentemente alcanzaron fueron más de

100 veces más pequeñas que la mínima de 20m/s. Posteriormente Feldman,⁽¹⁰⁾ realizó un extensivo estudio teórico y experimental de las oscilaciones de Sondhauss y logró producir un oscilador termoacústico que produjo 27 watts de potencia acústica a partir de 600 watts de calor, alcanzando un nivel de presión de 150 db.

El utilizar las oscilaciones acústicas, impuestas a un gas, con la finalidad de producir un flujo de calor de una parte fría a otra más caliente, tiene una historia más corta que la de los osciladores termoacústicos. Un diseño llamado "refrigerador de tubo de pulsos", fue construido en 1966 por Gifford y Longsworth,⁽¹¹⁾ quienes produjeron una refrigeración significativa (cerca de 170 °K) utilizando una frecuencia muy baja (alrededor de 1 hz) y amplitudes muy altas en la presión oscilante en un gas dentro de un tubo cilíndrico (la presión más alta era del orden de cuatro veces mayor que la presión más baja), con un extremo cerrado y el otro conectado a un tubo que contenía un conjunto de placas paralelas en su interior alineadas longitudinalmente, al cual llamaron "regenerador". El bombeo del calor se hacía a través de las paredes del tubo cilíndrico que contenía el gas (cuyo diámetro era del mismo orden de magnitud que la profundidad de penetración térmica) y de las placas del regenerador. Ellos explicaron el fenómeno diciendo que si alguna cámara cerrada es presurizada y despresurizada por la entrada y la salida de un gas a través de un punto sobre su superficie y si el flujo es esencialmente suave, entonces se produce un flujo de calor, que se aleja de ese punto sobre su superficie. Concluyeron que el flujo de calor se debía a los cambios en la temperatura producidos por los cambios de presión en el gas y a su fase en el tiempo, relativa al movimiento oscilatorio del gas.

En 1975 P. Merkli y H. Thomann⁽¹²⁾ observaron que se producía un calentamiento alrededor del antinodo de presión y un ligero enfriamiento alrededor del antinodo de velocidad cuando un gas resonaba dentro de un tubo cilíndrico simple. Las oscilaciones del gas eran producidas por un pistón que tenía un movimiento senoidal,

localizado en un extremo del tubo, mientras que el otro extremo había una pared rígida. Las frecuencias que utilizaron fueron menores a 130 Hz y los desplazamientos del pistón estaban entre 2.8 mm y 13.8 mm. Merkli y Thomann concluyeron que el calentamiento y el enfriamiento eran producidos por el flujo de calor que aumentaba si dentro del tubo se utilizaba un gas con un número de Prandtl más pequeño. Ellos también presentaron una teoría precisa para ese fenómeno.

Apartir de 1969, N. Rott comenzó a estudiar el fenómeno termoacústico con el fin de dar una explicación teórica de las oscilaciones de Taconis. Para 1976, Rott y sus colaboradores^(13,14) habían establecido una teoría fundamental que es aplicable a los osciladores como a las bombas de calor y refrigeradores termoacústicos.

P. H. Ceperley^(15,16) en 1948 y 1952 patentó, en base a los tubos de Sondhauss, una serie de generadores eléctricos, los cuales a pesar de ser muy simples, fueron muy ineficientes. Ceperley mencionó que se podría aumentar su eficiencia si en lugar de usar ondas estacionarias se utilizaban ondas viajeras. Tiempo después, en 1979, él propuso otras máquinas termoacústicas que utilizan una onda sonora viajera que pasa a través de un dispositivo, al que él llamó un regenerador, en el que existe un gradiente de temperatura. Dentro del regenerador el gas tiene un buen contacto térmico que permite el intercambio de calor. Si la onda sonora viajera se mueve de la parte fría a la parte caliente del regenerador, ésta será amplificada y se utiliza esa onda sonora amplificada para producir energía eléctrica; si la onda sonora viaja de la parte caliente a la parte fría del regenerador, la máquina funcionará en el ciclo inverso, absorbiendo energía acústica para bombear calor. Ceperley mencionó que este tipo de máquinas operan fundamentalmente con el mismo ciclo que una máquina de Stirling y dedujo teóricamente que estas máquinas termoacústicas tienen un alto rendimiento y un alto coeficiente de eficiencia, muy superiores a las máquinas mecánicas; sin embargo, no menciona que se haya construido alguna de ellas.

Las referencias más recientes sobre el fenómeno termoacústico consisten en publicaciones realizadas desde 1982 por el grupo de Materia Condensada y Física Térmica del Laboratorio Nacional de Los Alamos, Nuevo México, integrado por J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori,⁽¹⁷⁻²²⁾ quienes en base a la teoría de Rott han establecido una teoría más completa para describir el fenómeno; además, han construido una serie de osciladores y refrigeradores termoacústicos, en los que han logrando avances considerables. El mejor de los refrigeradores termoacústicos construidos por ellos, alcanza una temperatura de 200 grados kelvin con una eficiencia de alrededor del 20 % de la eficiencia de la máquina de Carnot; han construido también un generador de energía eléctrica que utiliza un oscilador termoacústico y emplea sodio líquido como substancia operante. La mayor parte del trabajo realizado en esta tesis está basado en las investigaciones realizadas por este grupo de Los Alamos en Nuevo México.

Actualmente, el grupo de Los Alamos ha establecido relaciones con otro grupo de investigación en la Escuela Naval de Posgrado en Monterey, California, para seguir con las investigaciones sobre las máquinas termoacústicas. El objetivo fundamental es construir máquinas que puedan ser utilizadas con fines prácticos. A este renglón se le está dando un gran impulso en los Estados Unidos, ya que se están creando grupos de físicos e ingenieros en la Universidad de Utah y en el Centro Nacional para la Física y la Acústica en la Universidad de Mississippi que buscan lograr ventajosas aplicaciones prácticas de este tipo de máquinas.⁽²³⁾

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE LAS MÁQUINAS TERMOACÚSTICAS.

-INTRODUCCIÓN.

Este capítulo está dividido en tres partes; en la primera, se describe en forma cualitativa, con algunas idealizaciones, el ciclo de operación de las máquinas termoacústicas y se da una explicación de lo que ocurre físicamente en él; en la segunda, se desarrolla la teoría matemática más general que describe el funcionamiento de este tipo de máquinas; y en la última, se hace un análisis de los resultados obtenidos en la sección previa realizando algunas simplificaciones en las ecuaciones obtenidas.

2.1.- UNA INTERPRETACIÓN CUALITATIVA DEL FENÓMENO TERMOACÚSTICO.

Se dará una explicación cualitativa del fenómeno termoacústico, con el fin de entender, aunque sea de una manera aproximada, lo que ocurre físicamente. Se utilizará para ello el punto de vista lagrangiano de la mecánica de fluidos.

El objetivo será entender que ocurre cuando una pequeña placa, sumamente delgada, es colocada en el interior de un resonador donde

existe una onda sonora estacionaria. En realidad, esta onda sonora es de tipo senoidal, pero por simplicidad considérese una onda cuadrada.

Supóngase la situación mostrada en la figura 2.1: una onda sonora armónica plana, formando una onda estacionaria dentro de un resonador y, con una amplitud grande en un fluido. La frecuencia es lo suficientemente baja, con lo que se puede considerar el proceso acústico como adiabático. Las partículas del fluido vibran en la dirección "x". Entre el nodo y el antinodo de presión, sobre el plano "xz", se localiza una placa rígida a la temperatura ambiente. El espesor de la placa es despreciable y su largo es mucho menor que la longitud de onda de la perturbación acústica, pero mucho mayor que el movimiento de las partículas del fluido.

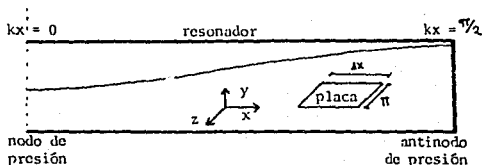


FIGURA 2.1.

- 2.1.1.- BOMBEO DE CALOR.

Considérese una partícula de fluido lo suficientemente cercana a la placa para que exista un buen contacto térmico entre ellas (figura 2.2). Esta partícula oscilará con una amplitud x_1 en sus desplazamientos como resultado de la onda sonora (en ausencia de la placa, la temperatura de la partícula oscilará adiabáticamente con una amplitud T_1). Al desplazarse la partícula en dirección del antinodo de presión disminuirá su volumen y aumentará su

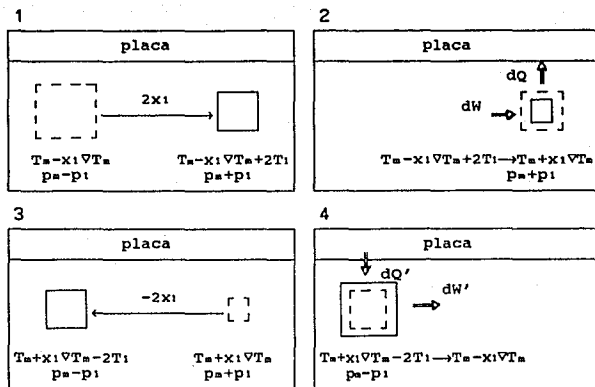


FIGURA 2.2.- Ciclo termoacústico correspondiente a una bomba de calor o a un refrigerador. El cuadrado representa una partícula de fluido sometida a dos procesos adiabáticos reversibles (1 y 3) y a dos procesos de transferencia de calor a presión constante e irreversibles (2 y 4). La placa tiene un gradiente de temperatura pequeño (∇T_1), donde el extremo derecho de la placa está más caliente que el izquierdo. x_1 es la amplitud del movimiento oscilatorio de la partícula de fluido y T_1 es el cambio en su temperatura cuando se mueve adiabáticamente del punto del equilibrio a un extremo de su movimiento.

temperatura adiabáticamente, quedando más caliente que la placa, por lo que habrá un flujo de calor de la partícula hacia ésta. Con la pérdida de calor, la partícula se enfriará disminuyendo su volumen a presión constante. Luego, será desplazada en dirección del nodo de presión (donde ésta será menor), aumentando su volumen y enfriándose adiabáticamente. Ahora su temperatura será menor que la temperatura de la placa, por lo que habrá un flujo de calor de ésta hacia la partícula, sin que la presión varíe. Al aumentar su

temperatura, la partícula se expandirá y luego será movida hacia el antinodo de presión repitiéndose el ciclo nuevamente. Se puede imaginar al fluido como un conjunto de partículas adyacentes, a lo largo de la placa, realizando el mismo ciclo.

En este caso, se puede ver que debido a la interacción del fluido con la placa, habrá un flujo neto de calor en dirección del antinodo de presión. Para que este flujo neto de calor sea el mayor posible, conviene que la partícula de fluido se desplace una distancia grande (lo que ocurre alrededor del nodo de presión) y que además, entre los extremos de su desplazamiento, la diferencia de presión sea también la mayor posible (lo que ocurre alrededor del antinodo de presión).

La partícula de fluido se expande en baja presión y se comprime en alta presión, con lo cual se hace trabajo sobre ella. Un dispositivo que utilice este ciclo, funcionará como un refrigerador o una bomba de calor, pues se hace trabajo para extraer calor de una región a una temperatura menor y depositarlo en otra región a una temperatura mayor. Para hacer el trabajo se utiliza la energía de una onda sonora. Parte de esta energía se convertirá en calor por efectos de rozamiento debido a la viscosidad del fluido.

- 2.1.2.- GRADIENTE DE TEMPERATURA CRÍTICO

El flujo neto de calor produce un gradiente de temperatura en la placa y en el fluido que tiene un buen contacto térmico con ella. Debido a este gradiente de temperatura, se producirá un flujo de calor, a través del fluido y de la placa, de la parte caliente a la fría. Se alcanzará un gradiente de temperatura en el cual, el flujo de calor hacia la zona caliente, producto de la interacción fluido-placa, sea igual al flujo en sentido contrario debido a la conducción térmica, así que no habrá un flujo neto de calor en la dirección "x".

Supóngase que la placa y el fluido tienen una conductividad térmica igual a cero en la dirección "x". En este caso el flujo neto de calor en la dirección "x" cesará cuando se alcance un gradiente de temperatura que se llamará "crítico", para el cual, al desplazarse la partícula en dirección del antinodo de presión y aumentar su temperatura, ésta será prácticamente la misma que la temperatura de la placa. Una situación análoga ocurrirá cuando la partícula se desplaza hacia el nodo de presión, así que no habrá un intercambio calorífico entre la placa y la partícula de fluido.

- 2.1.3.- CARACTERÍSTICAS CONVENIENTES DE UN REFRIGERADOR TERMOACÚSTICO.

Si se construyera un refrigerador, que utilizara un resonador y un conjunto de placas en su interior para bombear el calor por medio de la energía de una onda sonora (refrigerador termoacústico), de acuerdo a lo discutido anteriormente, conviene que tenga las siguientes características: El área transversal del resonador debe ser llenada en su totalidad por un conjunto de placas paralelas, con la distancia de separación entre ellas lo suficientemente pequeña para garantizar un buen contacto térmico, entre las placas y el aire; debe de utilizarse un fluido con una viscosidad lo más pequeña posible y la superficie del resonador y de las placas deben ser lisas para evitar pérdidas por fricción; las placas deben estar más cerca del antinodo de presión que del nodo, pues cerca del nodo la fricción será mayor (debido a que en una onda estacionaria, el nodo de presión y el antinodo de velocidad coinciden) y ésta es una causa considerable de pérdida de energía; las placas deben ser muy delgadas con un coeficiente de conducción térmica pequeño para disminuir al máximo el flujo de calor en su interior, y deben tener una capacidad calorífica grande para disminuir el gradiente de temperatura permitiendo mayor flujo de calor; y finalmente, la amplitud de la onda sonora debe ser grande para producir desplazamientos amplios del fluido y grandes

oscilaciones en la temperatura (para un proceso adiabático, los cambios en la presión de un fluido originan cambios proporcionales en su temperatura. ⁽¹⁾)

- 2.1.4.- EL OSCILADOR TERMOACÚSTICO.

El ciclo termoacústico discutido anteriormente e ilustrado en la figura 2.2 (correspondiente a una bomba de calor o a un refrigerador) también puede operar en el sentido contrario. Considérese la situación mostrada en la figura 2.3, en la que aparece un tubo cilíndrico de diámetro pequeño y cerrado en uno de sus extremos, en cuyo interior y a lo largo de su eje longitudinal, se encuentra una pequeña placa muy delgada. Esta placa tiene un gradiente de temperatura grande en la dirección "x", bastante mayor que el gradiente de temperatura crítico mencionado anteriormente. El extremo más caliente de la placa se encuentra del lado cerrado del tubo (T_c representa la temperatura del extremo frío de la placa y T_h la temperatura del extremo caliente).

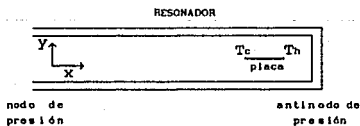


FIGURA 2.3

Bajo esta situación, cualquier movimiento del fluido (que tiene un buen contacto térmico con la placa), por pequeño que sea, origina que la temperatura del fluido sea diferente a la temperatura de la placa.

Si el movimiento inicial del fluido es en dirección del extremo cerrado del tubo, la placa tendrá una temperatura mayor a la suya por lo que absorberá calor y se expandirá moviendo aún más al fluido cercano; de tal manera que el proceso se repite con el fluido que es movido en dirección del extremo cerrado. En cambio, el fluido que es desplazado en dirección del extremo abierto, cederá calor a la placa reduciendo la expansión inicial. Esto origina que se forme una zona de alta presión en el extremo cerrado del tubo.

Si el fluido se mueve inicialmente en dirección del extremo abierto, la temperatura de la placa será menor a la suya, por lo que cederá calor a ésta disminuyendo su volumen y creando con ésta una región de baja presión, que obligará al fluido cercano a moverse hacia ella. El fluido cercano a la zona de baja presión, que se mueve en dirección del extremo cerrado, aumentará su volumen disminuyendo el gradiente de presión. En cambio, el fluido cercano a la zona de baja presión, que se mueve en dirección del extremo abierto, disminuirá su volumen originando con ello que el proceso se repita con un gradiente de presión mayor. Esto da como resultado que se forme una región de baja presión en el extremo cerrado del tubo.

Una vez que se ha generado una región de alta presión (o de baja presión) en el extremo cerrado del tubo, se inician las oscilaciones del fluido dando origen a una onda sonora, con lo cual las partículas de fluido, que tienen un buen contacto térmico con la placa, realizarán el ciclo termodinámico de la figura 2.4: Las partículas se desplazarán de la zona de alta presión hacia la de presión menor. Durante su movimiento las partículas aumentarán de volumen adiabáticamente y se enfriarán. Sin embargo como el gradiente de temperatura en la placa es grande, después de moverse, las partículas tendrán una temperatura mayor respecto a la temperatura de la placa por lo que le transmitirán calor disminuyendo su volumen, prácticamente a presión constante. El

movimiento de las partículas ocasiona que la zona donde había una presión alta quede con una presión baja, lo que provoca que éstas regresen nuevamente a ella aumentando otra vez la presión en el extremo cerrado del tubo. Las partículas al regresar lo hacen sin transferir calor (proceso adiabático), así que estarán más frías que la placa y habrá un flujo de calor hacia ellas, repitiéndose el ciclo nuevamente. De esta forma, se genera una oscilación de las partículas de fluido creando una onda sonora estacionaria dentro del tubo, con un antinodo de presión en su extremo cerrado y un nodo de presión en su extremo abierto.

La partícula de fluido se expande en alta presión al recibir calor y se comprime en baja presión al cederlo, con lo cual el fluido hace trabajo. En este caso, se utiliza un flujo de calor de una región a una temperatura alta hacia otra a una temperatura baja para producir trabajo, generando sonido. Para ello es necesario un gradiente de temperatura grande en la placa además de las propiedades geométricas y físicas de los materiales, mencionadas anteriormente para el caso del refrigerador.

Debe tenerse en cuenta que la descripción anterior sobre como se inician y se mantienen las vibraciones acústicas dentro del oscilador, sólo es una aproximación al fenómeno, que por su simplicidad, permite comprender mejor lo que ocurre físicamente.

- 2.1.5.- OSCILACIONES EN LA TEMPERATURA.

El fluido oscila a lo largo de la placa con la frecuencia acústica, lo cual origina cambios en la temperatura que son debidos en parte a la compresión y expansión adiabática del fluido por la presión sonora y el resto es una consecuencia de la temperatura local de la placa misma. El flujo de calor entre la placa y el fluido no produce cambios instantáneos en la temperatura de éste; en lugar de ello, el flujo de calor entre los dos medios crea un tiempo de espera entre el cambio de temperatura, de presión y el

movimiento. Lo anterior se aplica a partículas de fluido que tienen un contacto térmico con la placa, lo suficientemente bueno para intercambiar algo de calor; pero al mismo tiempo lo suficientemente pobre para producir un tiempo de retraso entre el movimiento y el calor transferido. Las partículas de fluido que están muy lejos de la placa para intercambiar calor con ella, simplemente se comprimen y se expanden prácticamente en forma adiabática y reversible por la onda sonora.

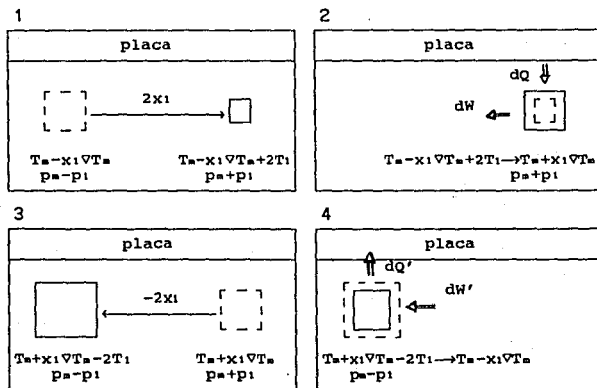


FIGURA 2.4- Ciclo termoacústico correspondiente a un oscilador. El cuadrado representa una partícula de fluido sometida a dos procesos adiabáticos reversibles (1 y 3) y a dos procesos de transferencia de calor a presión constante e irreversibles (2 y 4). La placa tiene un gradiente de temperatura bastante grande (∇T_1), mucho mayor al gradiente de temperatura crítico. El extremo derecho de la placa está más caliente que el izquierdo. x_1 es la amplitud del movimiento oscilatorio de la partícula de fluido y T_1 es el cambio en su temperatura cuando se mueve adiabáticamente del punto del equilibrio a un extremo de su movimiento.

Usualmente, el desplazamiento de una partícula de fluido es pequeño y lo mismo ocurre con la cantidad de calor transportado por éste, por lo cual, es importante para las máquinas termoacústicas, y en particular para las que operan como refrigerador, reducir al máximo las pérdidas por viscosidad. Es conveniente que exista una mala conducción térmica en la dirección "x", pero una buena conducción en la dirección "y" para producir una buena transferencia de calor del fluido a la placa y viceversa.

2.2.- TEORÍA GENERAL DE LAS MÁQUINAS TERMOACÚSTICAS.

-2.2.1.- CONJUNTO DE PLACAS DE UNA MÁQUINA TERMOACÚSTICA.

Considérese un conjunto de placas paralelas, como se muestra en la figura 2.5, dentro de un resonador donde se encuentra una onda sonora estacionaria en un fluido. Las placas se suponen totalmente rígidas de tal manera que no se deforman con la perturbación acústica. Tienen un grueso de $2l$, un largo de Δx y un ancho de Π . La separación entre una y otra es por una distancia $2y_0$ y tienen un gradiente de temperatura que se supondrá constante. Este mismo gradiente de temperatura existe en el fluido que está entre las placas.

Tómese un sistema de referencias coordenado cartesiano "xyz", localizado en la parte central del espacio entre dos placas, como lo muestra la figura 2.5b; con el plano "xz" paralelo al plano de las placas. La dirección "x" corresponde a la dirección de las vibraciones acústicas. Con las mismas características considérese otro sistema de referencias coordenado cartesiano "xy'z" desplazado en la dirección "y" de tal manera que el plano $y'=0$ esté en la parte central de la placa (ver figura 2.5b).

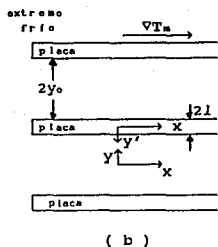
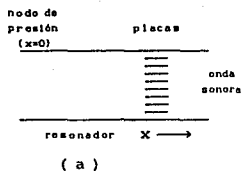


FIGURA 2.5.- Conjunto de placas en la máquina termoacústica.
 a).- Vista general del conjunto de placas dentro del resonador.
 b).- Vista detallada del conjunto de placas. Las figuras no están a escala.

- 2.2.2.- VARIABLES ACÚSTICAS.

Sea "p" la presión, "u" la velocidad del fluido, " ρ " la densidad, "T" la temperatura del fluido, " T_m " la temperatura de la placa y "s" la entropía por unidad de masa.

Considérese a las variables acústicas como la suma de su valor en condiciones ambientales (ρ_a , p_a , T_a , etc.) más el valor producido por la perturbación sonora (ρ_1 , p_1 , T_1 , etc.). Así, suponiendo que $u_a=0$, estas variables tendrán la forma

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 + p_1(x)e^{i\omega t} \\
 u &= \hat{x} u_1(x,y)e^{i\omega t} + \hat{y} u_2(x,y)e^{i\omega t} \\
 \rho &= \rho_0(x) + \rho_1(x,y)e^{i\omega t} \\
 T &= T_0(x) + T_1(x,y)e^{i\omega t} \\
 T_x &= T_x(x) + T_x(x,y)e^{i\omega t} \\
 s &= s_0(x) + s_1(x,y)e^{i\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

-2.2.3.- OSCILACIONES DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO EN LA DIRECCION "x".

Con las consideraciones de arriba, la componente "x" de la ecuación general de movimiento para un fluido compresible y viscoso, ⁽²⁾ está dada a primer orden por

$$i\omega\rho_0 u_1 e^{i\omega t} = -e^{i\omega t} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \nabla^2 u_1 e^{i\omega t} + (\mu + \eta/3) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right) e^{i\omega t}$$

donde "η" es la viscosidad dinámica y "μ" la segunda viscosidad.

El movimiento de las partículas de fluido en la dirección "y", producido por la onda sonora (que se propaga en la dirección "x"), es debido básicamente a la viscosidad del fluido. Esta sólo es importante dentro de una capa de fluido de espesor igual a la profundidad de penetración viscosa (δ_v) junto a una pared. Además, se cumple que para las perturbaciones sonoras, ∂/∂y es del orden de 1/δ_v (para más detalles ver el apéndice 1).

Para estas perturbaciones sonoras, ∂/∂x es del orden de k (el número de onda). Como δ_v << 1/k, se pueden despreciar las derivadas

de los términos en los que aparece la viscosidad en comparación con $\eta \partial^2 u_1 / \partial y^2$; así, la ecuación anterior puede escribirse, después de dividir entre $\exp(i\omega t)$, como

$$i\omega \rho_m u_1 = -\partial p_1 / \partial x + \eta \partial^2 u_1 / \partial y^2 \quad (2.2)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para u_1 con la condición de que $u_1(y_0)=0$ (en la interfase placa-fluido), se tiene como resultado

$$u_1 = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \left\{ 1 - \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_v]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_v]} \right\} \quad (2.3)$$

-2.2.4.- OSCILACIONES DE LA TEMPERATURA EN LA PLACA.

Para determinar la temperatura en la placa, se parte de la ecuación general de transferencia de calor en un fluido,⁽³⁾ la cual, después de conservar sólo los términos a primer orden, con la consideración de que dentro de la placa la velocidad es cero, queda como

$$\rho_s T_s (\partial s / \partial t) = -K_s \nabla^2 T_s \quad (2.4)$$

donde el subíndice "s" se refiere a la placa sólida.

De termodinámica $ds = (c_p/T_m)dT - (\beta/\rho_m)dp$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 8), y con la suposición de que la placa es totalmente rígida, la presión dentro de ella es constante ($dp=0$), por lo que $ds = c_p dT/T_m$. Utilizando esta expresión para ds y con la difusividad térmica de la placa $K_s = K_s / (c_p \rho_s)$, la ec. 2.4 se transforma en

$$\partial T_s / \partial t = -K_s \nabla^2 T_s$$

Dentro de la placa se usará el sistema $xy'z$ debido a las condiciones de simetría. Como $\partial/\partial x$ es del orden de k (el número de onda) y $\partial/\partial y'$ es del orden de $1/\delta_*$, donde $\delta_* = (2k_*/\omega)^{1/2}$ es la profundidad de penetración térmica de la placa y puesto que $\delta_* \ll k$, puede desprejiciarse $\partial T_*/\partial x$ en comparación con $\partial T_*/\partial y'$. Con estas consideraciones, al sustituir T_{*1} de la ec. 2.1 en la ecuación anterior y después de dividir entre $e^{i\omega t}$, se llega a

$$i\omega \partial T_{*1} / \partial t = -k_* \partial^2 T_{*1} / \partial y'^2 \quad , \quad (2.5)$$

con lo que resulta una ecuación diferencial para T_{*1} , que al resolverse con las condiciones de que $T_{*1}(1) = T_b$ y $T_{*1}(-1) = T_b$, donde T_b es la temperatura en la interface placa-fluido, aún desconocida; se llega a

$$T_{*1} = T_b \frac{\cosh[(1+i)y' / \delta_*]}{\cosh[(1+i)1 / \delta_*]} \quad . \quad (2.6)$$

- 2.2.5.- OSCILACIONES DE LA TEMPERATURA EN EL FLUIDO.

La temperatura en el fluido se obtiene, también a partir de la ecuación general de transferencia de calor (ver referencia 3), de donde desprejiciando los términos cuadráticos en la velocidad debidos a efectos viscosos, se tiene la expresión

$$\rho_* T_* [(\partial s / \partial t) + u \cdot \nabla s] = K \nabla^2 T \quad .$$

De la ecuación 8 del apéndice 2, $ds = (c_p / T_m) dT - (\beta / \rho_m) dp$, con lo cual, sustituyendo ∂s , la ecuación anterior se transforma a

$$\rho_* T_* \left[(c_p / T_m) \partial T / \partial t - (\beta / \rho_m) \partial p / \partial t + (c_p / T_m) u \cdot \nabla T - (\beta / \rho_m) u \cdot \nabla p \right] = K \nabla^2 T.$$

Haciendo consideraciones similares a las que se usaron para obtener la ec. 2.5 en los órdenes de magnitud de las derivadas

parciales, despreciando $\partial/\partial x$ respecto a $\partial/\partial y$; sustituyendo T y p por las expresiones dadas en las ecs. de 2.1 y conservando sólo los términos a primer orden; se tiene que la expresión anterior, después de dividir entre $e^{i\omega t}$, se reduce a

$$\rho = c_p [i\omega T_1 + u_1 dT_s/dx] - i\omega T_s \beta p_1 = K \partial^2 T_1 / \partial y^2 .$$

Sustituyendo u_1 utilizando la ec. 2.3 en la ecuación anterior y resolviendola para T_1 con las condiciones de frontera

$$T_1(y_0) = T_1(-y_0) = T_s(1) = T_b \quad y$$

$$K(\partial T_1 / \partial y) \Big|_{y_0} = -K(\partial T_1 / \partial y) \Big|_{-y_0} = -K_s(\partial T_{s1} / \partial y') \Big|_1 ,$$

se obtiene como resultado

$$T_1 = \frac{T_s \beta}{\rho = c_p} p_1 - \frac{1}{\rho = \omega^2} \left(1 - \frac{\sigma \cosh[(1+i)y/\delta_v]}{(\sigma-1) \cosh[(1+i)y_0/\delta_v]} \right) \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_s}{dx} - \left(\frac{T_s \beta}{\rho = c_p} p_1 + \frac{1 + c_s f_v / f_k}{(\sigma-1) \rho = \omega^2} \frac{dp_1 dT_s}{dx dx} \right) \left(\frac{\cosh[(1+i)y/\delta_k]}{(1+c_s) \cosh[(1+i)y_0/\delta_k]} \right) , \quad (2.7)$$

donde

$$f_v = \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta_v]}{(1+i)y_0/\delta_v} \quad (2.8)$$

$$f_k = \frac{\tanh[(1+i)y_0/\delta_k]}{(1+i)y_0/\delta_k} \quad (2.9)$$

$$c_s = \frac{(K \rho = c_p)^{1/2} \tanh[(1+i)y_0/\delta_k]}{(K_s \rho = c_s)^{1/2} \tanh[(1+i)l/\delta_s]} . \quad (2.10)$$

- 2.2.6.- OSCILACIONES DE LA PRESIÓN EN EL FLUIDO

Ahora, al sustituir en la ecuación de continuidad⁽⁴⁾ las expresiones de 2.1 y conservando los términos a primer orden, se obtiene después de dividir entre $e^{i\omega t}$

$$i\omega\rho_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_1) + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

Derivando la ec. 2.2 parcialmente respecto a "x" para sustituir $\partial(\rho_0 u_1)/\partial x$ en la ecuación anterior, y utilizando la ec. $\rho_1 = -\rho_0 \beta T_1 + \gamma p_1 / c^2$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 11) para expresar a ρ_1 en términos de T_1 y p_1 , se obtiene

$$\omega^2 \rho_0 \beta T_1 - (\omega^2 / c^2) \gamma p_1 - \frac{d^2 p_1}{dx^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] + i\omega \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Usando la ec. 2.3 y la ec. 2.7 para sustituir respectivamente u_1 y T_1 en la ec. 2.12, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \frac{T_0 \beta^2}{c_p} p_1 - \beta \left\{ 1 - \frac{\sigma \cosh[(1+i)y/\delta_v]}{(\sigma-1) \cosh[(1+i)y_0/\delta_v]} \right\} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_0}{dx} \\ & - \omega^2 \rho_0 \beta \left\{ \frac{T_0 \beta}{\rho_0 c_p} p_1 + \frac{1 + c_s f_v / f_k}{(\sigma-1) \rho_0 \omega^2} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_0}{dx} \right\} \left[\frac{\cosh[(1+i)y/\delta_k]}{(1+c_s) \cosh[(1+i)y_0/\delta_k]} \right] \\ & - (\omega^2 / c^2) \gamma p_1 - \frac{d^2 p_1}{dx^2} - \frac{i\eta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dx} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\cosh[(1+i)y/\delta_v]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_v]} \right) \right] \right\} \\ & + i\omega \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.13) \end{aligned}$$

Después de integrar esta última expresión respecto a "y", de 0 a y_0 , para obtener una ecuación diferencial para p_1 como una función de "x" solamente, resulta

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{T_m \beta^2}{c_p} p_1 y_0 - \beta \left(1 - \frac{\sigma}{(\sigma-1)} f_v \right) \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} y_0 - \omega^2 \frac{T_m \beta^2}{c_p} p_1 \frac{f_k}{(1+c_s)} y_0 \\ - \frac{\beta}{(\sigma-1)} \left(1 + c_s f_v / f_k \right) \frac{1}{1+c_s} f_k \frac{dp_1 dT_m}{dx dx} y_0 - \frac{\omega^2 \gamma}{c^2} p_1 y_0 - y_0 \frac{d^2 p_1}{dx^2} \\ - \frac{i \eta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) f_v y_0 (1+i)^2 / \delta v^2 = 0 \quad (2.14) \end{aligned}$$

La integral del último término de la ec. 2.13 es cero porque ω es cero en $y=0$, por las condiciones de simetría, y en la interface ($y=y_0$).

Utilizando la relación termodinámica $\beta^2 T_m / c_p = (\gamma-1) / c^2$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 6) para sustituir el primer miembro de ella en la ec. 2.14 y luego de multiplicar por $-c^2 / (\omega^2 y_0)$, sumar el primer y el quinto términos y simplificar, resulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{(\gamma-1) f_k}{(1+c_s)} \right) p_1 + \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} - \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\sigma}{(\sigma-1)} f_v \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} \\ + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\beta}{(\sigma-1)} \left(f_k + c_s f_v \right) \frac{1}{1+c_s} \frac{dp_1 dT_m}{dx dx} + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{d^2 p_1}{dx^2} \\ - \frac{c^2}{\omega^2 \rho_m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) f_v = 0 \quad (2.15) \end{aligned}$$

El coeficiente de expansión térmica está dado por $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$. y para el caso del fluido entre las placas, en ausencia de la onda sonora, $\rho = \rho_m(x)$ y $T = T_m(x)$, así que

$$\beta = -\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial T_m} \right)_p = -\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{d\rho_m}{dx} \right)_p \left(\frac{dx}{dT_m} \right)_p$$

Sustituyendo β , utilizando la expresión anterior, en el segundo término de la ecuación 2.15 y sumando este término con los términos cinco y seis, después de simplificar se obtiene finalmente

$$\left[\frac{(\gamma-1)f_k}{(1+c_s)} \right] p_1 + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{f_k + c_s f_v - \sigma f_v - \sigma c_s f_v}{(1-\sigma)(1+c_s)} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} = 0$$

(2.16)

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la amplitud compleja de la presión acústica dentro del arreglo de placas, en términos de la geometría de ese arreglo, de la distribución de la temperatura en las placas y de las propiedades físicas y térmicas del fluido y del material de las placas.

- 2.2.7.- FLUJO TOTAL DE ENERGÍA EN LA REGIÓN QUE CONTIENE EL CONJUNTO DE PLACAS.

Ahora, para determinar una ecuación que describa el flujo de energía en la dirección "x", se considera que dentro de la máquina termoacústica, en la región donde se localiza el conjunto de placas, existe un estado estacionario y que no existen flujos de calor laterales, en las direcciones "y" y "z".

Partiendo de la ecuación general de la conservación de la energía⁽⁵⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) = - \nabla \cdot \left[\rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + \omega \right) - u \cdot \Sigma' - K \nabla T \right] \quad (2.17)$$

donde "e" es la energía interna por unidad de masa, "ω" es la entalpía por unidad de masa y Σ' es tensor de tensiones de la viscosidad dado por la ecuación⁽⁶⁾

$$\Sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \mu \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \quad (2.18)$$

Los términos donde aparece el producto u^2 en la ec. 2.17 son de tercer orden y serán despreciados; además como se consideró un estado estacionario en donde el flujo neto de energía sólo existe en la dirección "x", y es constante, entonces el promedio en el tiempo de la energía total en una unidad de volumen no debe cambiar, por lo cual el primer miembro de la ecuación 2.17 debe ser cero al promediarlo en el tiempo. Por lo tanto, los términos que quedan en la ec. 2.17 son

$$\nabla \cdot \left[\overline{\rho u \omega} - \overline{u \cdot \Sigma'} - \overline{K \nabla T} \right] = 0$$

donde las barras indican que se trata de un promedio en el tiempo de la cantidad bajo ellas.

Como el flujo de energía sólo es en la dirección "x", de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{\rho u \exp(i\omega t) \omega} - \overline{(u \cdot \Sigma')}_x - \overline{K \partial T / \partial x} \right] = 0 \quad (2.19)$$

La cantidad entre los paréntesis cuadrados de la ec. 2.19 representa el flujo de energía por unidad de área, promediado en el tiempo, en la dirección "x" y debe de ser igual a una constante.

Sea \dot{H} la energía que fluye por unidad de tiempo en la dirección "x", a través de la sección transversal que tiene de ancho y_0+1 y de largo Π . Entonces, para obtener \dot{H}/Π , se integra la cantidad entre los paréntesis cuadrados de la ec. 2.19 respecto a "y" de cero a y_0+1 , con lo que resulta

$$\frac{\dot{H}}{\Pi} = \int_0^{y_0} \overline{\rho u_1 \exp(i\omega t)} \omega \, dy - K \int_0^{y_0} \overline{\frac{\partial T}{\partial x}} \, dy - K_s \int_0^1 \overline{\frac{\partial T_s}{\partial x}} \, dy' - \int_0^{y_0} \overline{(u \cdot \Sigma')_x} \, dy \quad (2.20)$$

Tomando $\rho = \rho_m + \rho_1 e^{i\omega t}$ y $\omega = \omega_m + \omega_1 e^{i\omega t}$, se cumple que

$$\overline{\rho u_1 \exp(i\omega t)} \omega = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\rho_m \omega_1 \tilde{u}_1 + \omega_m \rho_1 \tilde{u}_1 \right] \quad (2.21)$$

donde el tilde - indica conjugación compleja. El término $\rho_1 \tilde{u}_1$ se anula, porque se hizo la consideración de que el flujo de masa es cero a segundo orden al utilizar la ecuación de continuidad sólo a primer orden; al hacer ésto, se despreció el término $\rho_1 u_1$.

La entalpía por unidad de masa es equivalente a⁽⁷⁾ $\omega_1 = T_m s_1 + (1/\rho_m) p_1$ y de la ecuación 8 del apéndice 2, $s_1 = (c_p/T_m) T_1 - (\beta/\rho_m) p_1$; así que $\omega_1 = c_p T_1 + (1/\rho_m) (1 - T_m \beta) p_1$. Por lo tanto, utilizando el resultado de la ec. 2.21 y sustituyendo ω_1 , la ec. 2.20 resulta

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}}{\Pi} = & \frac{1}{2} \int_0^{y_0} \text{Re} \left(\left[\rho_m c_p T_1 + (1 - T_m \beta) p_1 \right] \tilde{u}_1 \right) dy - K \int_0^{y_0} \overline{\frac{\partial T}{\partial x}} \, dy \\ & - K_s \int_0^1 \overline{\frac{\partial T_s}{\partial x}} \, dy' - \int_0^{y_0} \overline{(u \cdot \Sigma')_x} \, dy \quad (2.22) \end{aligned}$$

El término $\overline{\frac{\partial T}{\partial x}} = dT/dx$ y análogamente $\overline{\frac{\partial T_s}{\partial x}} = dT_s/dx$. Además, utilizando argumentos similares a aquéllos para obtener la ec. 2.2 y observando la ec. 2.18, se encuentra que los términos más grandes de $(u \cdot \Sigma')_x$ son del orden de $\eta_1^2 k$, pero $\rho_m \omega_1 u_1$ es del orden

de $p_{11} = \rho_{\infty} c u^2$, con lo cual

$$(u \cdot \Sigma')_x / (\rho_{\infty} c u^2) - \eta k / (\rho_{\infty} c) = \nu k / c = (1/2) \delta v^2 k^2 \ll 1 ,$$

así que se puede despreciar el término $(u \cdot \Sigma')_x$. Utilizando la ec. 2.3 para sustituir \bar{u}_1 y la ec. 2.7 para sustituir T_1 en la ecuación 2.22, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}}{\Pi} &= \rho_{\infty} C_p \frac{1}{2} \int_0^{y_0} \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{T_{\infty} \beta}{\rho_{\infty} C_p} p_1 - \frac{1}{\rho_{\infty} \omega^2} \left(1 - \frac{\sigma \cosh[(1+i)y/\delta v]}{(\sigma-1) \cosh[(1+i)y_0/\delta v]} \right) \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_{\infty}}{dx} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{T_{\infty} \beta}{\rho_{\infty} C_p} p_1 + \frac{1 + c_* f v / f k}{(\sigma-1) \rho_{\infty} \omega^2} \frac{dp_1 dT_{\infty}}{dx dx} \right) \left(\frac{\cosh[(1+i)y/\delta k]}{(1+c_*) \cosh[(1+i)y_0/\delta k]} \right) \right] \right\} \\ &\quad \cdot \left[\frac{-i}{\omega \rho_{\infty}} \frac{d\bar{p}_1}{dx} \left(1 - \frac{\cosh[(1-i)y/\delta v]}{\cosh[(1-i)y_0/\delta v]} \right) \right] dy \\ &+ (1 - T_{\infty} \beta) \frac{1}{2} \int_0^{y_0} \operatorname{Re} \left\{ p_1 \left[\frac{-i}{\omega \rho_{\infty}} \frac{d\bar{p}_1}{dx} \left(1 - \frac{\cosh[(1-i)y/\delta v]}{\cosh[(1-i)y_0/\delta v]} \right) \right] \right\} dy \\ &+ (k y_0 + k_{s1}) \frac{dT_{\infty}}{dx} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Después de hacer las integraciones de la ecuación 2.24 y de simplificar los términos resultantes, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
\dot{H} = & \frac{\Pi y_0}{2\omega\rho_m} \operatorname{Im} \left[\frac{d\bar{p}_1}{dx} p_1 \left(1 - \bar{f}_v - \frac{T_m\beta(f_k - \bar{f}_v)}{(1+c_m)(1+\sigma)} \right) \right] \\
& + \frac{\Pi \gamma c_p}{2\omega^3\rho_m(1-\sigma)} \frac{d\bar{p}_1}{dx} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} \operatorname{Im} \left[\bar{f}_v + \frac{(f_k - \bar{f}_v)(1+c_m f_v/f_k)}{(1+c_m)(1+\sigma)} \right] \\
& - \Pi (Ky_0 + K_{*1}) \frac{dT_m}{dx} . \quad (2.25)
\end{aligned}$$

-2.2.8.- LA INTENSIDAD ACÚSTICA EN LA REGIÓN QUE CONTIENE LAS PLACAS.

El promedio en el tiempo del flujo de energía acústica (\dot{W}_e) en la dirección "x" dentro del espacio limitado por los planos $y=0$ y $y=y_0$, puede ser calculada por la siguiente expresión

$$\dot{W}_e = \dot{W}_{e(x)} = \Pi \int_0^{y_0+1} \bar{p} \bar{u} \, dy = \Pi (1/2) \operatorname{Re} \int_0^{y_0} p_1 \bar{u}_1 \, dy .$$

Usando la ec. 2.3 para sustituir el valor de \bar{u}_1 , resulta

$$\dot{W}_e = \Pi y_0 \frac{1}{2\omega\rho_m} \operatorname{Im} \left(p_1 \frac{d\bar{p}_1}{dx} (1 - \bar{f}_v) \right) . \quad (2.26)$$

Como puede verse, parte del primer término de la ec. 2.25 corresponde al flujo de la energía acústica como un componente del flujo de energía total en la dirección "x".

- 2.2.9.- CONSIDERACIONES SOBRE EL DESARROLLO DE ESTA TEORÍA.

Las ecuaciones 2.16 y 2.25 son los resultados principales de la teoría más general de las máquinas termoacústicas. Estas ecuaciones son un poco complicadas y a primera vista no es posible obtener una visión clara del significado físico de ellas. En la siguiente sección, se harán algunas suposiciones para simplificar estas dos ecuaciones y obtener algunos resultados de ellas.

Esta teoría termoacústica, a pesar de ser la más general, fue obtenida a partir de una serie de suposiciones las cuales se enumeran a continuación:

1.- Es una teoría completamente lineal, con el fin de evitar expresiones algebraicas sumamente complicadas. Así, se han despreciado efectos no lineales, los cuales no son importantes para sistemas con pequeños números de Mach.

2.- Las amplitudes acústicas se han supuesto lo suficientemente pequeñas tal que $u_0 v / \nu < 500$, para evitar los efectos de turbulencia (ν representa la viscosidad cinemática).

3.- Se ha considerado que las placas están inmóviles y son totalmente rígidas, lo cual no es muy real para presiones sumamente grandes.

4.- Se ha tomado el hecho de que la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad de penetración térmica y la profundidad de penetración viscosa, lo cual está totalmente de acuerdo para las frecuencias acústicas.

2.3.- ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA TEORÍA GENERAL DE LAS MÁQUINAS TERMOACÚSTICAS.

Para poder comprender claramente el significado físico de las ecuaciones que se obtuvieron anteriormente, y entender así los principios básicos de la máquinas termoacústicas; se harán una serie de simplificaciones. Se comenzará con un caso ideal en el cual no existen pérdidas de energía y por lo tanto, el flujo de calor en la máquina termoacústica corresponde al calor que sale de la región fría para el caso de un refrigerador o al calor que sale de la región caliente para el caso de un oscilador. Posteriormente, se adicionarán algunos otros elementos para acercarse un poco al caso real.

- 2.3.1.- CASO IDEAL.

- 2.3.1.1.- Suposiciones y consideraciones.

Primeramente, se considera que existe una onda sonora estacionaria dentro de un resonador que no es afectada por la presencia de las placas, tal que para la presión y la velocidad se tiene respectivamente

$$p = p_a + P_a \sin(kx) \cos(\omega t) = p_a + p_a \sin(kx) e^{i\omega t} = p_a + p_1 e^{i\omega t}$$

$$u = \frac{P_a}{\rho_a c} \cos(kx) \sin(\omega t) = i \frac{P_a}{\rho_a c} \cos(kx) e^{i\omega t} = u_1 e^{i\omega t} = i u_1' e^{i\omega t}$$

En este caso se harán las siguientes suposiciones:

1.- La viscosidad se tomará como cero y por lo tanto $\sigma=0$, $f_v=0$ y u_1 no depende de "y".

2.- Se supondrá que la capacidad calorífica de la placa es infinita, así que su temperatura no cambia al recibir o perder calor, en consecuencia $c_p = 0$.

3.- Las placas están separadas por una distancia mucho mayor que la profundidad de penetración térmica, por lo que $y_0/\delta_k \gg 1$ y por lo tanto $\tanh[(1+i)y_0/\delta_k] = 1$.

4.- No existe conductividad térmica en la placa ni en el fluido en la dirección "x".

5.- Las placas están lo suficientemente lejos tanto del nodo de velocidad como del nodo de presión y tienen un largo (Δx) lo suficientemente pequeño que la amplitud de la presión (p_1) y la amplitud de la velocidad (u_1) se toman como constantes sobre su superficie.

6.- Las propiedades térmicas y físicas del fluido y las placas no dependen de la temperatura.

7.- Las placas y el fluido entre ellas tienen un gradiente en su temperatura media en la dirección "x" que permanece constante. La temperatura en las placas y en el fluido no depende de la coordenada "y".

8.- Existe un estado estacionario.

- 2.3.1.2.- Oscilaciones de la temperatura en el fluido.

Con todas las simplificaciones anteriores, sigue siendo válida la ec. 2.6, sólo que u_1 es constante en la dirección "x" sobre la superficie de la placa que es donde se hace el análisis; así que

$$\rho c_p [\omega T_1 + u_1 dT_1/dx] - i\omega T_1 \beta p_1 = K \partial^2 T_1 / \partial y^2 \quad .$$

Resolviendo esta ecuación para T_1 con las condiciones de frontera de que $T_1(y_0) = T_1(-y_0) = 0$ impuesta por la placa, se tiene:

$$T_1 = \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p^{i1} - \frac{u' i}{\omega} \frac{dT_m}{dx} \right) \left(1 - \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_k]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_k]} \right) \quad (2.27)$$

Este resultado es más fácil de interpretar (debe tenerse en cuenta que T_1 representa la amplitud de las oscilaciones de la temperatura y que es función de la posición; no es la temperatura de una partícula de fluido). Fijando la atención en el primer paréntesis, el primer término se debe a la expansión y compresión adiabática del fluido y el segundo término es producto del gradiente en la temperatura media del fluido. Como el fluido oscila en la dirección "x" con una amplitud en sus desplazamientos de u'/ω , la temperatura en un punto dado del espacio oscila en una cantidad de $(dT_m/dx)u'/\omega$ si la temperatura de una partícula cualquiera de fluido permaneciera constante. Además, las compresiones y expansiones que sufre una partícula de fluido debido a la onda sonora, producen que la temperatura de esta partícula oscile con una amplitud $T_m \beta / (\rho_m c_p)$ si las placas no existieran. Por lo tanto, puede verse de la ec. 2.27, que la oscilación de la temperatura es precisamente la superposición de estos dos efectos.

- 2.3.1.3.- Gradiente de temperatura crítico.

También puede verse, de la ec. 2.27, que existe un gradiente en la temperatura media del fluido para el cual se anulan las oscilaciones en la temperatura. Para este gradiente, la amplitud de oscilaciones en la temperatura de una partícula de fluido, resultado de las expansiones y compresiones (dada por el término $T_m \beta / (\rho_m c_p)$), son iguales a la temperatura que tendría la placa en el extremo del desplazamiento de la partícula (igual a $\nabla T_m x_1 = \nabla T_m u' / \omega$), de tal manera que no habría una transferencia de calor entre la placa y el fluido. Por lo tanto, este gradiente de temperatura coincide con la idea del gradiente de temperatura crítico desarrollada en la sección 2.1.2, por lo cual será llamado

de esta manera y representado por ∇T_c . De acuerdo a la ecuación 2.27, está dado por

$$\nabla T_c = T_m \beta \omega p_1 / (\rho_m c_p u_1) \quad . \quad (2.28)$$

Para conocer el orden de magnitud de ∇T_c se observa que $p_1/u_1' = \rho_m \alpha \tan(kx)$, y para un fluido arbitrario $\gamma - 1 = T_m \beta^2 c^2 / c_p$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 6); con lo que sustituyendo estos resultados en la ec. 2.27 se llega a

$$\nabla T_c = \frac{\gamma - 1}{T_m \beta} T_m k x \tan(kx) \quad .$$

Para gases $(\gamma - 1)/(T_m \beta) \gg 1$ y tomando una posición razonable de las placas respecto a la onda estacionaria $1 < \tan(kx) < 10$, resulta que ∇T_c es del orden de $T_m k x$.

- 2.3.1.4.- Flujo hidrodinámico de calor.

Como puede verse de la ec. 2.27, la presencia de la placa origina una dependencia en las oscilaciones de la temperatura con la dirección "y" y produce también un cambio en la fase de esas oscilaciones, lo que trae como consecuencia que se produzca un flujo neto de calor en la dirección "x" como se verá a continuación.

Sea dq/dt el vector flujo de calor por unidad de área. Entonces

$$dq/dt = \partial q / \partial t + (\partial q / \partial x) u_x + (\partial q / \partial y) u_y + (\partial q / \partial z) u_z \quad ,$$

pero como se ha supuesto que $u_y = u_z = 0$, y como además no existe conducción térmica de calor en la dirección "x", entonces, la única forma en que el calor puede ser transportado a lo largo de "x" es por medio del movimiento del fluido; así que

$$dq_x/dt = (\partial q_x / \partial x) u_x = (1/\rho_m) u_x T_m ds \quad ,$$

pero $ds = (c_p/T_w)dT - (\beta/\rho_w)dp$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 8); y como $ds = s_1 e^{i\omega t}$, $u_x = u_1 e^{i\omega t}$, $dT = T_1 e^{i\omega t}$ y $dp = p_1 e^{i\omega t}$, después de sustituir estas igualdades en la expresión anterior y obtener el promedio en el tiempo, resulta

$$\overline{\dot{q}_x} = (T_w/\rho_w) (1/2) \text{Re}\{s_1 \bar{u}_1\} = (1/2) \rho_w c_p \text{Re}\{T_1 \bar{u}_1\} - (1/2) T_w \beta \text{Re}\{p_1 \bar{u}_1\}$$

pero $\text{Re}\{p_1 \bar{u}_1\} = 0$ porque $p_1 \bar{u}_1 = -i p_1 u_1'$ es un imaginario puro.

Por lo tanto, el flujo de calor total en la dirección "x" promediado en el tiempo (\dot{Q}), dentro de la región donde están las placas, limitada por los planos $y=0$ y $y=y_0$, está dada por

$$\dot{Q} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{y_0} \overline{\dot{q}_x} dy dz = \pi (1/2) \rho_w c_p u_1' \int_0^{y_0} \text{Im}(T_1) dy .$$

Utilizando la ec. 2.26 para sustituir T_1 en la ecuación anterior, y tomando la tangente hiperbólica igual a la unidad, se obtiene

$$\dot{Q} = (1/4) \pi \delta_k \rho_w c_p u_1' \left(\frac{T_w \beta}{\rho_w c_p} p_1 - \frac{u_1' \omega}{\omega} \frac{dT_w}{dx} \right) . \quad (2.29)$$

Utilizando la ec. 2.28 y tomando $\Gamma = (dT_w/dx)/(dT_{cr}/dx) = \nabla T_w/\nabla T_{cr}$, la ec. 2.29 se transforma en

$$\dot{Q} = -(1/4) \pi \delta_k T_w \beta p_1 u_1' (\Gamma - 1) . \quad (2.30)$$

Analizando este resultado, se puede observar que el flujo de calor es proporcional al área $\pi \delta_k$, es decir, al área transversal de la capa límite como era de esperarse; también es proporcional al producto $p_1 u_1'$ por lo cual el flujo de calor es máximo en el punto medio geométrico del nodo de presión y el nodo de velocidad. Observando el factor $\Gamma - 1$ y considerando que el gradiente de temperatura en la placa apunta hacia la parte positiva del eje "x", se puede ver que si $\Gamma = 1$, no existe flujo de calor, en tal caso, el

gradiente de temperatura en la placa es igual al gradiente de temperatura crítico, y como se mencionó antes, tampoco existe una oscilación en la temperatura. Para el caso de que $\nabla T_a < \nabla T_{cr}$, $\Gamma < 1$ por lo que el calor fluye hacia la zona donde la temperatura es mayor, funcionando la máquina termoacústica como un refrigerador; y si $\nabla T_a > \nabla T_{cr}$, entonces $\Gamma > 1$ por lo que el calor fluirá hacia la zona donde la temperatura es menor, funcionando la máquina como un oscilador.

La ec. 2.30 también se puede obtener a partir de la ec. 2.25; con las consideraciones indicadas arriba, tomando $dp_1/dx = \rho_m \omega u_1'$ de la ec. 2.2 y $f_k = \delta k / [(1+i)y_0]$, dicha ecuación después de simplificar se reduce a

$$\dot{H} = - (1/4) \Pi \delta k T_a \beta \rho_1 u_1' \left(-1 + \frac{C_p u_1' \rho_m \nabla T_a}{T_a \beta \rho_1 \omega} \right)$$

y utilizando la ec. 2.28 se obtiene

$$\dot{H} = - (1/4) \Pi \delta k T_a \beta \rho_1 u_1' (\Gamma - 1) \quad (2.30')$$

Como puede verse, el flujo de energía en la dirección "x", corresponde al flujo de calor que resulta del movimiento del fluido (flujo hidrodinámico de calor) La intensidad acústica es cero en la dirección "x", como era de esperarse para una onda estacionaria.

- 2.3.1.5.- Potencia acústica absorbida o emitida.

Para calcular la potencia acústica absorbida o emitida procedemos de la manera siguiente:

El trabajo por unidad de volumen está dado por la relación $dw = (1/V) p dV = -(V/\rho_m) p d\rho$, así que la potencia por unidad de volumen ($\dot{w} = dw/dt$) es igual a

$$\dot{w} = -(p/\rho_m) d\rho/dt \quad (2.31)$$

pero

$$dp/dt = \partial p/\partial t + u_x \partial p/\partial x, \quad (2.32)$$

por lo que usando $p = p_m + p_1 e^{i\omega t}$, $\rho = \rho_m + \rho_1 e^{i\omega t}$ y $u_x = u_1 e^{i\omega t}$, y sustituyendo la ec. 2.32 en la ec. 2.31, resulta después de tomar el promedio en el tiempo

$$\bar{W} = -(\omega/\rho_m)(1/2)\text{Re}[i\rho_1 \bar{p}_1] \quad (2.33)$$

Como se observa, existe un trabajo neto como resultado de que las oscilaciones en la presión y las oscilaciones en la densidad no están en fase, lo cual se debe a la presencia de la placa que cancela las oscilaciones de la temperatura sobre su superficie. Para el caso de una onda sonora en espacio abierto, la presión y la densidad oscilan con la misma fase por lo que no existe un trabajo neto.

Sustituyendo $\rho_1 = -\rho_m \beta T_1 + \rho_m k r p_1$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 11) en la ec. 2.33, después de simplificar, se obtiene

$$\bar{W} = -(1/2)\omega\beta\rho_1 \text{Im}[T_1] \quad (2.34)$$

La potencia acústica absorbida o emitida por unidad de longitud y en la dirección "x" (\dot{W}), se obtiene integrando la ec. 2.34 sobre el área limitada por los planos $y=0$ y $y=y_0$, después de sustituir T_1 usando la ec. 2.27 y de seguir un proceso similar que para la obtención de la ec. 2.30, resulta

$$\dot{W} = (1/4)\pi\omega\beta\rho_1 \delta k \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 - \frac{u'_1}{\omega} \frac{dT_m}{dx} \right)$$

y utilizando la ec. 2.28, se llega por último a

$$\dot{W} = (1/4) \Pi \delta_k \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho = C_p} p_1^2 (\Gamma - 1) \quad (2.35)$$

Como puede observarse, la potencia acústica absorbida o emitida es proporcional al área $\Pi \delta_k$ de la capa límite y al cuadrado de la amplitud de la presión acústica. Si $\Gamma < 1$, entonces la potencia será negativa, lo que indica que el fluido está haciendo trabajo y se está perdiendo energía sonora, funcionando la máquina termoacústica como un refrigerador; en el caso contrario para el cual $\Gamma > 1$, se hará trabajo sobre el fluido generándose una onda sonora (oscilador).

- 2.3.1.6.- Eficiencia y coeficiente de rendimiento.

Con las consideraciones hechas, es fácil calcular la eficiencia y el coeficiente de rendimiento de una máquina termoacústica. Como el flujo hidrodinámico de calor es constante, es precisamente este flujo el calor entregado por unidad de tiempo en la parte caliente del oscilador. Por lo tanto, la eficiencia (E) se calcula dividiendo la potencia acústica que produce (ec. 2.35) entre el flujo hidrodinámico de calor (ec. 2.30), con lo que resulta, utilizando la ec. 2.28, la siguiente expresión

$$E = \frac{\nabla T_m \cdot \Delta x}{\Gamma T_m} \approx \frac{1}{\Gamma} \frac{T_h - T_c}{T_m} \quad (2.36)$$

Como se observa en la ecuación anterior, la eficiencia será mayor si el gradiente de temperatura en la placa se aproxima al gradiente de temperatura crítico ($\Gamma > 1$) y si la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa es grande. Si la temperatura media en la placa fuera igual a la temperatura caliente, entonces la eficiencia sería $1/\Gamma$ veces la eficiencia de la máquina de Carnot.

Para determinar el coeficiente de rendimiento (COP) de un refrigerador termoacústico, se divide el calor extraído por unidad de tiempo de la región fría (flujo hidrodinámico de calor, ec. 2.30) entre la potencia acústica absorbida (ec. 2.35). Como se puede ver, es precisamente el recíproco de la eficiencia, por lo tanto

$$\text{COP} = \Gamma \frac{T_c}{T_h - T_c} \quad (2.37)$$

Así, para un refrigerador termoacústico, el coeficiente de rendimiento será mayor si la diferencia de temperaturas es pequeña entre los extremos de las placas y si el gradiente de temperatura en ellas se aproxima al gradiente de temperatura crítico ($\Gamma < 1$).

Aunque los resultados anteriores de la eficiencia y del coeficiente de rendimiento de una máquina termoacústica son aproximados, sirven para tener una idea aproximada de su valor, ya que el cálculo de su valor real resulta complicado.

- 2.3.1.7.- Conclusiones.

Se puede concluir que debido a la presencia de una placa, dentro de una región del espacio donde existe una onda sonora estacionaria, se cancelan las oscilaciones de la temperatura sobre la superficie de dicha placa, lo que origina un cambio de fase en las oscilaciones de la temperatura y la densidad respecto a las oscilaciones de la presión. Lo anterior trae como consecuencia dos hechos importantes: 1).- Se absorbe o se produce energía acústica dependiendo de la magnitud del gradiente de temperatura media y 2).- se origina un flujo neto de calor en la dirección de las vibraciones sonoras, cuyo sentido también depende de la magnitud del gradiente de temperatura media.

- 2.3.2.- DESPRECIANDO LA VISCOSIDAD.

- 2.3.2.1.-Consideraciones y simplificaciones.

En este caso se tomarán en cuenta todos los factores reales a excepción de la viscosidad con lo cual $\sigma=0$ y $f_v=0$. Se harán además las siguientes suposiciones, que no se alejan mucho de la situación real, con el fin de simplificar los resultados matemáticos obtenidos en el desarrollo de la teoría general:

1.- Se asumirá que $y_0/\delta_k > 2$ y $l/\delta_s > 2$, con lo cual $\tanh[(1+i)y_0/\delta_v]$ y $\tanh[(1+i)l/\delta_s]$ son prácticamente igual a la unidad.

2).-La diferencia en la temperatura de la región caliente menos la temperatura de la región fría, se tomará lo suficientemente pequeña para que las propiedades físicas y térmicas de las placas y el fluido no dependan apreciablemente de la temperatura media.

3).- Se supondrá que las placas tienen una longitud lo suficientemente corta que no producen cambios apreciables en la presión y en la velocidad de la onda sonora, las cuales se tomarán independientes de "x" a lo largo de las placas. Por lo tanto, se puede considerar, dentro de la región donde está el conjunto de placas que

$$p_1 = P_{sen}(kx) \quad y \quad u_1 = iP_A/(\rho_0 c) \cos(kx) [(y_0+l)/y_0] \equiv iu_1'$$

El factor $(y_0+l)/y_0$ aparece ya que el conjunto de placas reduce el área transversal por donde se mueve el fluido dentro del resonador, lo que origina que la velocidad aumente ahí debido a que el flujo, dado por el producto de la velocidad por el área, no debe de cambiar bruscamente.

- 2.3.2.2.- Oscilaciones de la presión en el fluido.

Con las consideraciones anteriores, la ec. 2.2 se simplifica a

$$dp_1/dx = \omega \rho_m u_1' \quad (2.38)$$

y la ec. 2.16 se reduce a

$$\left(1 + \frac{(\gamma-1)\delta_k}{1+c_s} \frac{1}{(1+i)y_0} \right) p_1 + \frac{c^2}{\omega^2 \rho_m} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) - \beta \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\delta_k}{(1+c_s)(1+i)y_0} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} = 0.$$

Usando la ec. 2.38 para sustituir dp_1/dx en el tercer término de la ec. anterior, se llega a

$$p_1 + \frac{c^2}{\omega^2 \rho_m} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) = \frac{(\gamma-1)\delta_k}{1+c_s} \frac{p_1}{(1+i)y_0} \left(-1 + \frac{dT_m}{dx} \frac{\rho_m c_p u_1'}{\omega \beta p_1 T_m} \frac{T_m \beta^2 c^2}{(\gamma-1)c_p} \right). \quad (2.39)$$

Pero $(\gamma-1)c_p/(\beta^2 c^2) = T_m$ (ver demostración en el apéndice 2, ec. 6); así que utilizando este resultado y la ec 2.28, resulta que la ec. 2.39 se simplifica a

$$p_1 + \frac{c^2}{\omega^2 \rho_m} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) = \frac{(\gamma-1)\delta_k}{1+c_s} \frac{p_1}{(1+i)y_0} (\Gamma-1). \quad (2.40)$$

- 2.3.2.3.- Flujo de energía.

Utilizando las mismas consideraciones que se emplearon para obtener la ec. 2.40, la ec. 2.25 se reduce a

$$\dot{H} = \frac{\Pi}{2\omega \rho_m} \operatorname{Im} \left[\omega \rho_m u_1' p_1 \left(- \frac{T_m \beta \delta_k}{1+c_s+1+i} \right) \right] + \frac{c_p \Pi}{2\omega^3 \rho_m} [\omega \rho_m u_1']^2 \frac{dT_m}{dx} \operatorname{Im} \left[\frac{\delta_k}{1+i+1+c_s} \right] - \Pi (K_{y_0} + K_{s1}) \frac{dT_m}{dx}$$

simplificando y usando la ec. 2.28, se obtiene

$$\dot{H} = - \frac{1}{4} \pi \delta_k \frac{T_m \beta}{1+c_s} p_{11} u_1' (\Gamma-1) - \pi \left(K_{y_0} + K_{s1} \right) \frac{dT_m}{dx} \quad (2.41)$$

Puede verse que el primer término de este resultado es igual a la ec. 2.30 salvo que dicho término aparece dividido por $(1+c_s)$. El segundo término de la ec. 2.41 representa la conducción ordinaria de calor debida a la conducción del fluido y de la placa en la dirección "x", producto del gradiente de temperatura; es decir, el efecto de la conductividad térmica es generar un flujo de calor adicional que trae como consecuencia una disminución en la eficiencia y en el coeficiente de rendimiento de la máquina termoacústica.

Las propiedades termofísicas de la placa y del fluido aparecen en la cantidad c_s , que en este caso es igual a $\rho_m c_p \delta_k / (\rho_s c_s \delta_s)$; donde $\rho_s c_s$ representa la capacidad calorífica por unidad de área de la placa. El tamaño de $\rho_s c_s \delta_s$ en comparación con $\rho_m c_p \delta_k$, es una medida de la capacidad calorífica de la placa y del contacto térmico entre ésta y el fluido para que en la interfase se anulen las oscilaciones de la temperatura; que como se dijo antes, es lo que se busca para lograr un buen funcionamiento de la máquina termoacústica.

El factor $1/(1+c_s)$ reduce el flujo hidrodinámico de calor que está determinado por el primer término de la ec. 2.41. Este flujo de calor es proporcional al área $\pi \delta_k$, de tal manera, que si $y_0 = \delta_k$, entonces prácticamente toda la sección transversal del fluido entre las placas está efectivamente transportando calor.

- 2.3.2.4.- Potencia acústica emitida o absorbida.

La energía no fluye en la dirección "y" o "z", así que la potencia acústica generada o absorbida por unidad de longitud en la

dirección "x", debe ser la diferencia de la intensidad acústica promedio entre los dos extremos del conjunto de placas dividida entre la longitud de éstas (Δx):

$$\dot{W} = (1/\Delta x) \cdot \Pi \int_0^{y_0} (1/2) \text{Re}[(\bar{p}_1 u_1)_{der} - (\bar{p}_1 u_1)_{izq}] dy$$

y como se supuso que u_1 y p_1 sólo dependen de "x"

$$\dot{W} = (1/\Delta x) \cdot \Pi y_0 (1/2) \text{Re} \left[\frac{d(\bar{p}_1 u_1)}{dx} \right] dx \quad (2.42)$$

Como se mencionó antes, suponiendo que Δx es suficientemente pequeña, se puede considerar $d(\bar{p}_1 u_1)/dx$ como constante dentro de la región donde están las placas; entonces la ec. 2.42 se simplifica a

$$\dot{W} = \Pi y_0 (1/2) \text{Re} [d(\bar{p}_1 u_1)/dx] \quad (2.43)$$

Ahora, $d(\bar{p}_1 u_1)/dx = \bar{p}_1 d(u_1/dx) + u_1 d(\bar{p}_1/dx)$; por lo que usando la ec. 2.38, para sustituir $d\bar{p}_1/dx$, resulta

$$\text{Re} [d(\bar{p}_1 u_1)/dx] = \text{Re} [\bar{p}_1 (du_1/dx) - i u_1' \omega \rho_m u_1'] = \text{Re} [p_1 (du_1/dx)] \quad (2.44)$$

De la ec. 2.38, $u_1 = (i/(\omega \rho_m)) dp_1/dx$; la que derivando respecto a "x" queda

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{i}{\omega} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right)$$

y sustituyendo el segundo término del primer miembro de la ec. 2.39 utilizando la expresión anterior, se obtiene

$$p_1 \left[-i \frac{c^2}{\omega} \rho_m \frac{du_1}{dx} \right] = \frac{(\gamma-1) \delta_k}{1+c_m} \frac{p_1}{(1+i)y_0} (\Gamma-1) \quad ,$$

por lo que despejando du/dx de esta última ecuación y sustituyéndola en la ec. 2.44, se llega a

$$\operatorname{Re}[d(p_{1u})/dx] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i\omega}{\rho_0 c^2} \frac{(\gamma-1)\delta k}{1+c_*} \frac{p_1^2}{(1+i)y_0} (\Gamma-1) + \frac{-i\omega}{\rho_0 c^2} p_1^2 \right\},$$

por lo tanto, la ec. 2.43 queda como

$$\dot{W} = \frac{1}{4} \frac{\pi \delta k}{\rho_0 c^2} \frac{\omega}{1+c_*} \frac{\gamma-1}{1+c_*} p_1^2 (\Gamma-1)$$

y de la ec. 6 del apéndice 2, $\gamma-1 = T_0 \beta^2 c^2 / c_p$, así que se obtiene por último

$$\dot{W} = (1/4) \pi \delta k \frac{T_0 \beta^2 \omega}{\rho_0 c_p} \frac{1}{1+c_*} p_1^2 (\Gamma-1), \quad (2.45)$$

que es exactamente la ec. 2.35 obtenida anteriormente para el caso ideal salvo por el factor $1/(1+c_*)$.

Como puede observarse, el hecho de tomar en cuenta una capacidad calorífica finita para la placa trae como consecuencia una reducción en el flujo hidrodinámico del calor y en la potencia acústica absorbida o emitida, ambos por el mismo factor, $1/(1+c_*)$.

- 2.3.3.- TOMANDO EN CUENTA LOS EFECTOS DE LA VISCOSIDAD.

- 2.3.3.1.- Consideraciones y simplificaciones.

En este caso, se tomará en cuenta a la viscosidad para determinar algunos efectos de ésta sobre el flujo de energía en la dirección "x" y sobre la energía de la onda sonora absorbida o emitida por la máquina termoacústica. Para ello, con la finalidad de poder visualizar sin tanta dificultad el significado de los

resultados matemáticos, se harán las siguientes simplificaciones:

1.- La longitud de las placas se tomará lo suficientemente pequeña con el fin de que $\partial(\rho_1 u_1)/\partial x$ pueda ser considerada como una constante sobre la superficie de las placas.

2.- Se asumirá que $y_0 > 2\delta_v$ y $l > 2\delta_s$, para que de esta manera $\tanh[(1+i)y_0]$ y $\tanh[(1+i)l]$ se consideren ambas igual a la unidad.

Como puede verse de la ec. 2.3, la velocidad depende de la coordenada "y"; ésto como consecuencia de la viscosidad. Por lo tanto, será conveniente determinar la velocidad media del fluido en la dirección "x" $\langle u_1 \rangle$

$$\langle u_1 \rangle = (1/y_0) \int_0^{y_0} u_1 dy = (1/y_0) \int_0^{y_0} \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \left[1 - \frac{\cosh[(1+i)y/\delta_v]}{\cosh[(1+i)y_0/\delta_v]} \right] dy$$

con lo cual
$$\langle u_1 \rangle = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} (1-f_v) = i \langle u_1' \rangle \quad (2.46)$$

- 2.3.3.2.- Oscilaciones de la presión en el fluido.

Reagrupando los términos de la ec. 2.16 y usando la ec. 2.28 para sustituir el gradiente de temperatura crítico y la ec. 2.46 para sustituir dp_1/dx , se obtiene

$$p_1 + \frac{c^2}{\omega^2 \rho_m} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right) = \frac{T_m \beta^2 c^2 f_k}{c_p (1+c_s)} p_1 \left(\frac{f_k + c_s f_v - \sigma f_v - \sigma c_s f_v}{f_k (1-f_v) (1+c_s)} \Gamma - 1 \right)$$

(2.47)

- 2.3.3.3.- Potencia acústica emitida o absorbida.

Procediendo como antes, para determinar la potencia acústica absorbida por unidad de longitud sobre la superficie de una placa, debido a que la energía no puede fluir más que en la dirección "x", se tiene que

$$\dot{W} = (1/\Delta x) \cdot \Pi \int_0^{y_0} (1/2) \operatorname{Re}[(\bar{p}_1 u_1)_{z=0} - (\bar{p}_1 u_1)_{z=a}] dy$$

o bien,

$$\dot{W} = (1/\Delta x) \cdot \Pi (1/2) \operatorname{Re} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{p}_1 \int_0^{y_0} u_1 dy \right) dx \right] \quad (2.48)$$

Sustituyendo la integral de u_1 respecto a "y" utilizando la ec. 2.46 y con la suposición de que Δx es suficientemente pequeño que se puede considerar $d(\bar{p}_1 \langle u_1 \rangle) / dx$ como constante dentro de la región donde están las placas; la ec. 2.48 se simplifica a

$$\dot{W} = \Pi y_0 (1/2) \operatorname{Re} [d(\bar{p}_1 \langle u_1 \rangle) / dx] dy \quad (2.49)$$

Derivando la ec. 2.46 respecto a x, resulta

$$\frac{d}{dx} \langle u_1 \rangle = \frac{i}{\omega} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-f_v}{\rho_m} \frac{dp_1}{dx} \right)$$

y sustituyendo el segundo miembro en la ec. 2.47 utilizando el resultado anterior, para luego despejar $d\langle u_1 \rangle / dx$, se obtiene

$$\frac{d}{dx} \langle u_1 \rangle = \frac{i\omega(\gamma-1)f_k}{c^2(1+\epsilon_m)\rho_m} p_1 \left\{ \frac{f_k + \epsilon_m f_v - \sigma f_v - \sigma \epsilon_m f_v}{f_k(1-f_v)(1+\epsilon_m)} \Gamma - 1 \right\} - i\omega^2 p_1 / (\rho_m c^2) \quad (2.50)$$

Pero, $d(p_1 \langle u_1 \rangle) / dx = p_1 (d\langle u_1 \rangle / dx) + \langle u_1 \rangle (dp_1 / dx)$; por lo que usando la ec. 2.50 para $d\langle u_1 \rangle / dx$ y la ec. 2.46 para dp_1 / dx , se

obtiene finalmente que la ecuación 2.49 queda como

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \Pi \gamma_0 \frac{\omega}{c^2 \rho_m} (\gamma-1) \pi^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{if_k [f_k + c_s f_v - \sigma f_v - \sigma c_s f_v]}{1 + c_s [f_k (1-f_v) (1+c_s)]} \Gamma - 1 \right\} \\ - \frac{1}{2} \Pi \gamma_0 \omega \rho_m \langle u_1' \rangle^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{-1}{1 - \bar{f}_v} \right\} . \quad (2.51)$$

Haciendo las simplificaciones mencionadas arriba, consistentes en hacer las tangentes hiperbólicas iguales a la unidad, se tiene que $f_v = \delta_v / [(1+i)\gamma_0]$, $f_k = \delta_k / [(1+i)\gamma_0]$ y $c_s = \rho_m c_p \delta_k / (\rho_s c_s \delta_s)$; con lo cual, la ec. 2.51, se reduce a

$$\dot{W} = \frac{1}{4} \Pi \delta_k \frac{\omega}{c^2 \rho_m} \frac{\gamma-1}{1+c_s} \pi^2 \left\{ \left[c_s \sqrt{\sigma} + \frac{1-\sigma \sqrt{\sigma}}{1-\sigma} \frac{1}{(1-\delta_v/\gamma_0 + \delta_v^2/(2\gamma_0^2))} \right] \Gamma - 1 \right\} \\ - \frac{1}{4} \Pi \delta_v \omega \rho_m \langle u_1' \rangle^2 \frac{1}{(1-\delta_v/\gamma_0 + \delta_v^2/(2\gamma_0^2))} . \quad (2.52)$$

Comparando este resultado con la ec. 2.45, teniendo en consideración que $\gamma-1 = T_m \beta^2 c^2 / c_p$, puede observarse que el primer término de 2.52 está asociado con la potencia acústica absorbida que produce trabajo útil para transportar calor de la parte fría a la parte caliente en el caso de que la máquina funcione como refrigerador; o bien, la potencia acústica generada cuando la máquina funciona como oscilador. Comparando el segundo término de 2.52 con la ec. 33 del apéndice 1, se puede ver que dicho término está asociado con la potencia acústica absorbida por la superficie de la placa debido a la viscosidad como resultado de los efectos de la capa límite; esta potencia acústica absorbida se transforma en energía térmica y constituye una carga adicional de calor para un refrigerador acústico.

CAPÍTULO III

EFFECTOS TERMOACÚSTICOS EN UN TUBO DE RESONANCIAS

- INTRODUCCIÓN.

Como se mencionó en el capítulo anterior, cuando una placa es colocada en una región donde existe una onda sonora estacionaria, se producen dos efectos importantes: 1).- se genera un flujo de calor en la dirección de las vibraciones acústicas y 2).- se emite o se absorbe energía acústica. En este capítulo se describen algunos experimentos realizados con el fin de estudiar el flujo hidrodinámico de calor.

En estos experimentos se colocó un conjunto de placas dentro de una onda estacionaria y se hicieron variar algunos parámetros. Con los datos obtenidos se determinó su efecto sobre el flujo de calor y se relacionaron los resultados experimentales con algunos de los resultados teóricos obtenidos en el capítulo anterior.

- 3.1.- OBJETIVO.

El objetivo fue estudiar experimentalmente el flujo hidrodinámico de calor para comprender mejor como influyen sobre

él, la longitud de las placas, su posición respecto a la onda sonora, la frecuencia y la amplitud de dicha onda. Se pretendió también comprobar la validez de la teoría desarrollada en el capítulo anterior, comparando los resultados experimentales con algunas predicciones teóricas; ésto básicamente a un nivel cualitativo, ya que hubo muchos factores que impidieron obtener una buena precisión en las medidas realizadas.

Fundamentalmente, se buscó comprender mejor el fenómeno termoacústico y obtener una referencia experimental para el diseño y construcción posterior de algunas máquinas.

- 3.2.- DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.

Cinco placas (fig. 3.1) hechas de acetato para retroproyector, de 0.10 mm de grueso ($2l$), un ancho (Π) de 2.8 cm y un largo (Δx) de 0.5 cm, se colocaron dentro de un tubo de resonancias. En la placa central, se pegaron con cinta adhesiva de plástico (de 0.05 mm de grueso) cinco termopares en serie de cromel-constantán, de 0.002 pulgadas de diámetro, con una sensibilidad total de 295 microvolts (μV) por cada grado centígrado de diferencia de temperatura entre los extremos de la placa (la sensibilidad de los termopares corresponde al valor esperado teóricamente). Las cuatro placas restantes, tenían la finalidad de reducir la conducción térmica a través del aire alrededor de la placa central. Se utilizaron trozos de madera para separar las placas una de otra a una distancia de 1.7 mm y se pegaron entre sí con resina epóxica. Se construyeron otros cuatro conjuntos de placas semejantes, con las mismas dimensiones a excepción del largo, cuyo valor fue respectivamente de 0.6, 1.1, 2.8 y 5.0 centímetros.

El tubo de resonancias consistió de un tubo de aluminio de paredes gruesas con un diámetro interior de 10 cm y un largo de 112 cm, con uno de sus extremos cerrado por una pared rígida y el otro

cerrado por una bocina de 4 pulgadas de diámetro (fig. 3.2). El conjunto de placas se unió, por medio de palillos de madera y resina epóxica, a un tubo de latón de 1 mm de diámetro interior. A la bocina se le hizo un pequeño agujero por donde atravesaba el tubo de latón, así que el conjunto de placas tenía la libertad de moverse a lo largo del tubo de resonancias.

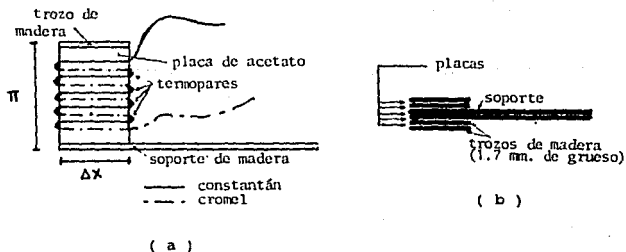


FIGURA 3.1. a).- Vista lateral del corte central del conjunto de placas. b).- Vista superior del conjunto de placas.

Para medir la presión sonora en el punto medio de la longitud de las placas, se utilizó un analizador de señales (Brüel & Kjaer, tipo 2034) y un micrófono prepolarizado (o de electreto) que se colocó junto a ellas. Con el mismo analizador, se generó una señal senoidal que después de amplificarse se hacía llegar a la bocina para producir la onda sonora.

La diferencia de potencial en los termopares, se midió con un multímetro digital (Hewlett Packard 3478A) cuya sensibilidad era una décima de microvolt.

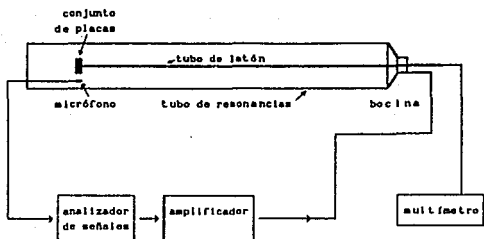


FIGURA 3.2: DIAGRAMA DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

- 3.3.- DISCUSIÓN PREVIA.

- 3.3.1.- EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO.

Al colocar el conjunto de placas en el interior del resonador y generar una onda estacionaria, el movimiento oscilatorio del aire y su interacción con la placa, originan un flujo de calor sobre la superficie de ésta en dirección del antinodo de presión más cercano (flujo hidrodinámico de calor). Esto ocasiona que un extremo de la placa se enfríe y el otro se caliente. De esta manera se forma un gradiente de temperatura en las placas y en el aire que hay entre ellas.

El gradiente de temperatura origina que el calor fluya por conducción (en las placas y en el aire), hacia la parte fría del conjunto de placas (en dirección del nodo de presión), es decir, en sentido contrario al flujo hidrodinámico. Conforme el gradiente de temperatura crece, el flujo de calor por conducción aumenta hasta igualar al flujo hidrodinámico, alcanzando un estado de equilibrio donde no existe un flujo neto de calor.

En estos experimentos se midió la diferencia de potencial en los termopares cuando se alcanzaba el estado de equilibrio. Este voltaje es proporcional a la diferencia de temperatura en los extremos de la placa central, y por lo tanto, también es proporcional al flujo hidrodinámico de calor.

- 3.3.2.- CONSIDERACIONES PARA EL ANÁLISIS TEÓRICO.

Para comparar los resultados experimentales con los teóricos, se usó la ecuación 2.23. Esta ecuación describe el flujo total de energía que se produce cuando un conjunto de placas se encuentra dentro de una onda sonora estacionaria. Sin embargo, como es muy complicada se simplificó haciendo las siguientes consideraciones:

1.- Como la separación entre las placas ($y_0 = 1.7$ mm.) es grande en comparación con la profundidad de penetración térmica y la profundidad de penetración viscosa (del orden de décimas de milímetro), las tangentes hiperbólicas: $\tanh[(1+i)y_0/\delta_v] \approx \tanh[(1+i)y_0/\delta_*] \approx \tanh[(1+i)l/\delta_*] \approx 1$.

2.- Debido a que la longitud de las placas es mucho menor que la longitud de onda de la perturbación sonora y a que su volumen es despreciable respecto al volumen del tubo de resonancias, se supondrá que no se producen modificaciones en la presión acústica y en la velocidad del fluido por la presencia de las placas.

Así, utilizando la ecuación 2.3 para determinar la velocidad promedio del fluido en la dirección "x" entre dos placas, se tiene

$$\langle u_1 \rangle = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} u_1 dy = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} (1-f_v) ,$$

despejando dp_1/dx resulta

$$\frac{dp_1}{dx} = i\omega \rho_m \langle u_1 \rangle / (1-f_v) . \quad (3.1)$$

Bajo la consideración de que la velocidad no es modificada con la presencia de las placas se tiene

$$\langle u_1 \rangle = i(P_1 / (\rho \omega c)) \cos(kx) = i \langle u_1' \rangle \quad (3.2)$$

Utilizando la ecuación 3.1 para sustituir dp_1/dx , así como las consideraciones mencionadas arriba, la ec. 2.25 se reduce a:

$$\dot{H} = - \frac{1}{4} \frac{\pi \delta k T_w \beta p_1 \langle u_1' \rangle}{(1 + \epsilon_s)(1 + \sigma)(1 - \delta v / y_0 + \delta v^2 / 2y_0^2)} \left[\frac{1 + \sqrt{\sigma} + \sigma \epsilon_s}{1 + \sqrt{\sigma}} - \left(1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta v}{y_0} \right) \right] - \pi (y_0 K + 1K_s) dT_w / dx \quad (3.3)$$

Del segundo miembro de la ecuación anterior, se tiene que el primer término describe el flujo hidrodinámico de calor, y el segundo el flujo de calor debido a la conducción.

Las ecs. 2.29 y 2.41, también describen el flujo de calor dentro del conjunto de placas y son más simples, por lo que también se tomaron en cuenta en el análisis de resultados.

- 3.3.3.- INCERTIDUMBRE DE LOS DATOS EXPERIMENTALES.

La diferencia de potencial en los termopares, medida con el multímetro, tiene una incertidumbre de $\pm 1 \mu V$, determinada por el rango máximo de variación en la lectura al tomar las medidas. Cabe mencionar que la resolución de este instrumento es de $0.1 \mu V$.

Para determinar la posición del conjunto de placas en el interior del tubo de resonancias, se consideró la parte central del largo de éstas. Los valores de esta variable tienen una incertidumbre de ± 0.3 cm (correspondiente a una estimación del error máximo que se pudo tener, debido principalmente a las deformaciones que sufría el tubo de latón delgado al cual estaba sujeto el conjunto de placas).

Para medir el nivel de presión sonora se utilizaron dos micrófonos: el de electreto (mencionado anteriormente) que se colocó junto a las placas y un micrófono de medición (de laboratorio de muy buena calidad de 1/4 de pulgada de diámetro, Brüel & Kjaer 4435) de un cuarto de pulgada de diámetro.

Los valores del nivel de presión sonora obtenidos con el micrófono de medición tienen una incertidumbre de ± 0.2 dB, que corresponde a una estimación del mayor error cometido en la calibración de ese micrófono (que fue la principal fuente de error en esas mediciones).

El micrófono de electreto no fue muy confiable debido a que es afectado por la humedad y la temperatura del medio ambiente, además de que no responde linealmente a los cambios en la presión sonora para valores superiores a 132 dB (el nivel de presión sonora se determinó comparando el valor rms de la presión a medir con el valor de 20.1 micropascales). Su comportamiento se determinó comparando, para una misma señal acústica, los valores obtenidos con este micrófono y el de medición. Lo anterior se hizo para cada una de las frecuencias que producía una onda estacionaria en el tubo de resonancias, variando la intensidad del sonido de 120 a 144 decibeles. El comportamiento del micrófono de electreto fue el siguiente: De 120 dB a 132 dB, tuvo una respuesta aproximadamente lineal para todas las frecuencias (la diferencia máxima respecto al micrófono de medición fue de ± 0.1 dB); de 132 dB a 138 dB, su comportamiento fue irregular (la diferencia máxima respecto al micrófono de medición fue de ± 2.2 dB) y, para valores superiores a 139 dB, este micrófono se satura con lo cual las medidas carecen de confiabilidad.

En base a lo anterior, las mediciones realizadas con el micrófono de electreto no son muy confiables. Este micrófono se utilizó ya que por su tamaño y su bajo costo podía manipularse fácilmente dentro del tubo de resonancias. Sirvió para obtener una idea aproximada del valor de la presión sonora que existía en el conjunto de placas.

- 3.4.- DESARROLLO Y RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Las frecuencias de resonancia del tubo fueron determinadas generando ruido aleatorio con la bocina y un generador de ruido blanco, y obteniendo un espectro de frecuencias promediado en el tiempo con el micrófono colocado junto al extremo rígido del tubo. El espectro es mostrado en la figura 3.3, donde los picos corresponden a las frecuencias en las cuales se forma una onda estacionaria. Estas son: 128 Hz, 312 Hz, 456 Hz, 598 Hz, 738 Hz, 880 Hz, respectivamente.

- 3.4.1.- EFECTO DE LA FRECUENCIA SOBRE EL FLUJO HIDRODINÁMICO DE CALOR.

- 3.4.1.1.- Procedimiento.

Se eligió como posición del conjunto de placas, el punto medio entre el nodo y el antinodo de presión. En ese lugar se produjo un nivel de presión sonora de 134.5 dB y se midió el voltaje en los termopares en el equilibrio. Se obtuvieron dos series de valores; en la primera se utilizó el conjunto de placas con longitud de 0.6 cm (tabla 1); y en la segunda, la longitud de las placas utilizadas fue proporcional a la longitud de onda de la perturbación acústica (tabla 2).

FRECUENCIA (Hz)	VOLTAJE (μV)
128	72
312	51
456	50
598	41
738	38

TABLA 1

Δx (cm)	FRECUENCIA (Hz)	VOLTAJE (μV)
2.8	128	110
1.1	312	62
0.6	456	50
0.5	598	40

TABLA 2

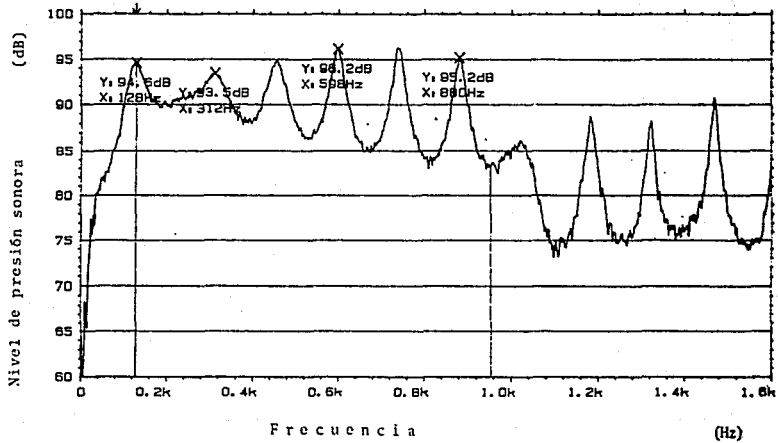


FIGURA 3.5

- 3.4.1.2.- Análisis de los resultados.

Como se puede ver de las tablas 1 y 2, el flujo hidrodinámico de calor es mayor conforme la frecuencia disminuye. Para comprobar que esta afirmación está de acuerdo con la teoría, se ha graficado en la figura 3.4 el flujo hidrodinámico de calor dado por las ecuaciones 3.3 (línea continua) y 2.29 (puntos marcados con cruces) en función de la frecuencia. En la gráfica se ha tomado un gradiente de temperatura en las placas y en el aire igual cero.

Los parámetros utilizados para la gráfica de la figura 3.4 fueron los siguientes:

$f = [25 \text{ Hz} , 1000 \text{ Hz}]$	$Tm\beta = 1$
$\Pi = 2.8 \text{ cm}$	$Pa = 213.41 \text{ Pa}$
$c = 341.2 \text{ m/s}$	$\gamma = 1.4$
$\rho_a = 1.21 \text{ kg/m}^3$	$\rho_v = 1400 \text{ kg/m}^3$
$c_p = 1004.64 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$	$c_s = 1100 \text{ J/kr}\cdot^\circ\text{C}$
$K = 0.0244 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$	$K_s = 0.20 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$
$y_o = 0.85 \text{ mm}$	$l = 0.075 \text{ mm}$
$kx = \pi/4$	$\nu = 0.151 \text{ cm}^2/\text{s}$

El valor del flujo hidrodinámico de calor puede ser calculado por la siguiente expresión (primer término del segundo miembro de la ec. 3.3):

$$\dot{Q}_h = -\frac{1}{4} \frac{\Pi \delta k T_m \beta \rho_1 \langle u_1' \rangle}{(1+c_s)(1+\sigma)(1-\delta v/y_o + \delta v^2/2y_o^2)} \left[\Gamma \frac{1+\sqrt{\sigma}+\sigma+c_s}{1+\sqrt{\sigma}} - \left(1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta v}{y_o} \right) \right] \quad (3.4)$$

y el flujo de calor debido la conducción del aire y la placa, en la región limitada por los planos $y'=1$ a $y=y_o$ (ver fig. 2.5b), se determina por la siguiente relación (segundo término del segundo miembro de la ec. 3.3, más el calor de conducción de los termopares):

$$\dot{Q}_c = -\Pi (Ky_o + K_s l) \nabla T_m - (5/2)\pi(x^2) (K_1+K_2) \nabla T_m \quad , \quad (3.5)$$

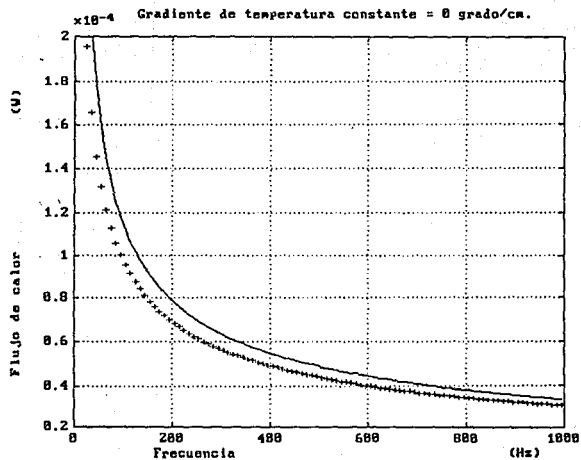


FIGURA 3.4

donde el flujo de calor debido a la conducción de los termopares, corresponde a un medio del flujo total de los diez alambres, pues la región considerada abarca mitad del grueso de la placa y la mitad del espesor del aire que hay entre dos de ellas. Se ha usado la conductividad térmica del constantán (K_1) igual a $22.66 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$ y la del cromel (K_2) igual a $17.30 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$ ⁽¹⁾. r es el radio de los alambres (0.0254 mm).

Una gráfica semejante a la anterior (flujo de calor contra frecuencia) aparece en la figura 3.5, en donde ahora el gradiente de temperatura tiene un valor de $0.282 \text{ }^\circ\text{C/cm}$ (correspondiente a un voltaje de $50 \text{ } \mu\text{V}$ en los termopares para la placa de 0.6 cm de longitud), es decir, se trata del caso de la frecuencia de 456 Hz de la tabla 1. La curva continua representa el flujo hidrodinámico de calor dado por la ec. 3.4, y los puntos marcados con cruces representan el mismo flujo de acuerdo a la ec. 2.29. El flujo total de calor (la suma del hidrodinámico y el debido a la conducción), se ha representado por círculos, y está determinado por la suma de \dot{Q}_h (ec. 3.4) más \dot{Q}_c (ec. 3.5). Se esperaba que el flujo total de calor se anulara para una frecuencia de 456 Hz según la tabla 1. Sin embargo ésto no ocurrió probablemente debido a los factores que se mencionan más abajo.

Utilizando los datos de la frecuencia y del voltaje de la tabla 1, por medio de la ec. 3.4 se calcula el flujo hidrodinámico de calor correspondiente a cada frecuencia y con la ec. 3.5 se obtiene el flujo de calor debido a la conducción, con lo que se puede comparar ambos flujos (ver tabla 3).

Se esperaba, que en el estado de equilibrio, el flujo hidrodinámico de calor se igualara con el flujo debido a la conducción, sin embargo, según se observa de la tabla 3, ésto no ocurrió. De la tabla 2 puede verse que esta diferencia aumenta si la longitud de la placa es mayor (para la misma frecuencia), pues el gradiente de temperatura tiene un valor más pequeño y por lo tanto el flujo de calor por conducción es menor.

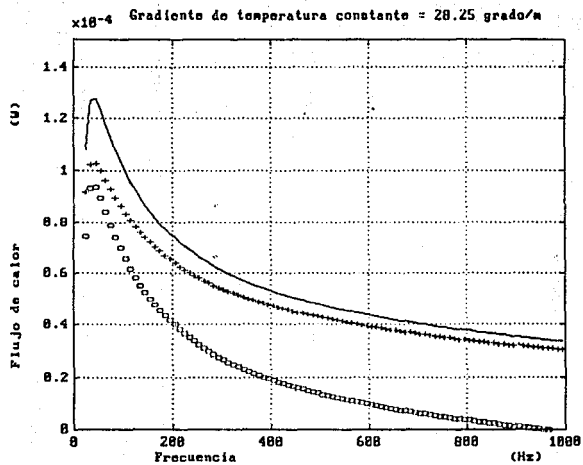


FIGURA 3.5

FRECUENCIA (Hz)	$\dot{Q}_h \times 10^{-5}$ (W)	$\dot{Q}_d \times 10^{-5}$ (W)
128	8.75	4.89
312	6.00	3.47
456	4.98	3.40
598	4.35	2.79
738	3.92	2.58

TABLA 3

- 3.4.1.3.- Posibles fuentes de error.

En orden de importancia, existieron las siguientes:

1.- Los extremos de las placas intercambiaban calor con el aire cercano, por lo cual la diferencia de temperatura entre esos extremos tuvo un valor menor al esperado. Lo anterior ocasionó que de los datos del voltaje en los termopares se obtuviera un gradiente de temperatura más pequeño al que realmente existía en la placa central y por lo tanto, un menor flujo de calor por conducción. Esta idea está basada en el hecho, de que el error porcentual entre los valores del flujo de calor hidrodinámico y el flujo de calor debido a la conducción es precisamente menor cuando la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa era más pequeño (lo que disminuía el calor que se intercambiaba entre los extremos de la placa y el aire).

2.- Las propiedades físicas de la cinta adhesiva de plástico posiblemente no son muy cercanas a las del acetato. En el análisis se supuso que eran idénticas.

3.- No se tomaron en cuenta los efectos sobre el voltaje en los termopares producido por las dos puntas conectadas a las terminales del multímetro, con lo que tal vez, la sensibilidad de fue de $295 \mu V$ por grado centígrado de diferencia de temperatura entre los extremos de la placa.

4.- El nivel de presión sonora fue medido con el micrófono de electreto, que no era muy confiable.

5.- La separación entre las placas variaba respecto al valor considerado de 1.7 mm.

6.- Las placas no eran totalmente rígidas.

7.- No se consideró el efecto del calentamiento de la bocina.

8.- La presión sonora y la velocidad del fluido no tenían un valor constante a lo largo de las placas como se supuso.

Resulta difícil estimar el orden de magnitud del error producido por estos factores, por lo cual, si se desea obtener una descripción más completa (a nivel cuantitativo) es necesario mejorar el dispositivo experimental para reducir los posibles errores, o bien, para determinar su orden de magnitud.

- 3.4.1.4.- Conclusiones:

Cualitativamente, los resultados experimentales concuerdan con la teoría, pues el flujo de calor hidrodinámico disminuye al aumentar la frecuencia (para valores superiores a 100 Hz en el caso del aire). Como el flujo de calor tuvo una magnitud pequeña, y como las fuentes de error fueron muchas, no fue posible obtener buenos resultados cuantitativos.

- 3.4.2.- EFECTO DE LA POSICIÓN SOBRE EL FLUJO HIDRODINÁMICO DE CALOR.

- 3.4.2.1.- Procedimiento.

Utilizando el conjunto de placas cuya longitud (Δx) era de 0.6 cm y una frecuencia de 312 Hz, se midió la diferencia de potencial

en los termopares variando la posición de las placas respecto a la onda estacionaria. Se hicieron dos series de mediciones, una con la presión sonora relativamente pequeña y otra con un valor más grande. La potencia pequeña de la bocina limitó la amplitud en la presión sonora, pues no se incrementó más la intensidad del sonido para evitar que la bocina se quemara. Los datos que se obtuvieron aparecen en la tabla 4, donde la posición "x" se refiere a la posición de las placas a lo largo del tubo de resonancias, considerando $x = 0$ justo sobre la pared rígida de éste.

POSICIÓN X (cm)	PRESIÓN SONORA PEQUEÑA		PRESIÓN SONORA GRANDE	
	NIVEL DE PRESIÓN (dB)	VOLTAJE (μV)	NIVEL DE PRESIÓN (dB)	VOLTAJE (μV)
1.0	131.9	0	138.9	18
5.0	131.5	10	138.9	66
9.0	130.0	13	138.6	101
13.0	129.1	15	138.2	111
17.0	126.9	14	136.8	98
21.0	123.3	10	122.8	68
25.0	116.1	4	115.3	27
29.0	107.7	-2	126.9	-19
33.0	120.7	-8	139.9	-61
37.0	125.5	-14	135.3	-95
41.0	128.0	-16	137.7	-117
45.0	130.8	-15	138.5	-115
49.0	131.2	-11	138.8	-87
53.0	131.9	-7	138.9	-41
56.4	132.0	0		
57.0	131.9	1	139.0	19
61.0	131.5	7	138.9	70
65.0	130.5	12	138.6	98
69.0			138.0	105
73.0			136.2	89
77.0			131.6	56
81.0			122.6	15

TABLA 4.

- 3.4.2.2.- Análisis de resultados.

De las ecuaciones 3.3, 2.29 y 2.41, se puede ver que el flujo hidrodinámico de calor es proporcional al producto $\rho u' v'$ si el gradiente de temperatura es pequeño. En este caso, para el sistema de referencias utilizado (donde el punto $x = 0$ corresponde a la pared rígida del tubo), dicho producto es igual a

$$\rho u' v' = P_A \cos(kx) \cdot P_A \sin(kx) = (1/2) P_A^2 \sin(2kx) \quad , \quad (3.6)$$

con lo que se espera que el mayor flujo hidrodinámico de calor se lleve a cabo justo en el punto medio entre el nodo y el antinodo de presión (que corresponde al punto donde $\sin(2kx) = 1$).

La temperatura ambiente en el momento de realizarse las mediciones de la tabla 4, fue de 23.0 grados centígrados. Con este dato se determinó la rapidez del sonido y luego la longitud de onda, para poder trazar una gráfica, calculada teóricamente, de la amplitud de la presión sonora en función de la posición a lo largo del tubo de resonancias.

En la figura 3.6 como en la 3.7 aparecen las gráficas de los datos de la tabla 4; la primera corresponde la amplitud sonora pequeña y la segunda a la amplitud sonora grande. En cada una de estas gráficas, se han dibujado en forma continua dos curvas senoidales, donde la longitud de onda de una es el doble de la longitud de onda de la otra. La curva de mayor longitud de onda corresponde al conjunto de valores calculados teóricamente para la amplitud sonora de la onda estacionaria ($\cos(kx)$). Los círculos representan los valores de la amplitud sonora obtenidos experimentalmente por medio del micrófono prepolarizado. Como se observa, estos valores tienen una buena precisión y las desviaciones seguramente se debieron a la respuesta no lineal del micrófono, como se había supuesto anteriormente. La curva senoidal de menor longitud de onda representa el conjunto de valores teóricos esperados para el flujo hidrodinámico de calor ($\sin(2kx)$) de acuerdo a lo antes mencionado en base a la ecuación 3.6. Los

puntos representados por un asterisco, son los valores experimentales del voltaje en los termopares (cuyo valor es proporcional al flujo de calor hidrodinámico); estos valores están muy próximos a la curva teórica, con lo que se comprueba que efectivamente, el flujo hidrodinámico de calor es proporcional al producto $\rho u' u'$, mostrando que este flujo es cero tanto en el nodo como en el antinodo de presión y es máximo en la posición geométrica media de esos dos puntos. En las gráficas de las figuras 3.6 y 3.7 se han normalizado los datos teóricos y los experimentales, ya que la finalidad fue obtener resultados cualitativos.

También puede verse en las figuras 3.6 y 3.7, que conforme se incrementa el valor de "x", los valores experimentales de la diferencia de potencial están recorridos hacia la derecha respecto a la curva esperada, y que además, los valores negativos son más grandes en valor absoluto que los valores análogos positivos. Esto probablemente se debe al calentamiento de la bocina que originó un gradiente de temperatura adicional en el fluido, el cual se sumaba al gradiente de temperatura en la placa para valores negativos de la diferencia de potencial y se oponía para los valores positivos.

- 3.4.2.3.- Efecto del gradiente de temperatura y el valor de Γ .

Comparando las figuras 3.6 y 3.7, se observa en esta última, que cuando el gradiente de temperatura en la placa es grande (producido por una presión sonora elevada), los puntos que representan los valores experimentales del voltaje en los termopares, están recorridos en dirección del antinodo de presión respecto a la curva de valores teóricos; lo que indica que el flujo hidrodinámico de calor ha aumentado más rápidamente alrededor del antinodo. Una posible explicación, es la siguiente:

De la ec. 2.28, el gradiente de temperatura crítico está dado por

$$\nabla T_{cr} = \frac{T_0 \beta \omega p_1}{\rho = C_p \rho_1} \quad (3.7)$$

Para el caso del aire, $T_0 \beta$ puede considerarse igual a la unidad; y tomando $x = 0$ en el extremo cerrado del resonador, resulta

$$\nabla T_{cr} = \frac{\omega c}{c_p} \frac{1}{\tan(kx)} \quad (3.8)$$

Para una frecuencia de 312 Hz y con una temperatura de 23 grados centígrados, la velocidad de propagación del sonido es $c = 345$ m/s. Como el calor específico a presión constante para el aire en condiciones ambientales normales es 0.24 cal/(gr·°C), resulta que el gradiente de temperatura crítico es igual a

$$\nabla T_{cr} = 6.73 / (\tan(kx)) \text{ } ^\circ\text{C/cm} \quad (3.9)$$

Para valores grandes del gradiente de temperatura, debe tomarse en cuenta el valor de Γ ($\Gamma = \nabla T_0 / \nabla T_{cr}$). De acuerdo a la ec. 2.41, el flujo hidrodinámico de calor es proporcional a Γ^{-1} , y para el caso de un bombeo de calor (lo que ocurre en los experimentos realizados), Γ^{-1} es menor que cero. Por lo tanto, para favorecer el flujo hidrodinámico, Γ debe ser mínimo. Observando la ec. 3.9, se obtiene que Γ tiende a cero (lo que ayuda al bombeo de calor) a medida que se toma una posición cada vez más cercana al antinodo de presión. En base a lo anterior, se puede concluir, que si el gradiente de temperatura es grande, la posición donde el flujo hidrodinámico de calor tiene un valor máximo, no corresponderá al punto medio entre el nodo y el antinodo de presión, sino que se desplazará hacia el antinodo y la curva del flujo calor en función de la posición no será una senoidal. Así que este flujo aumentará más rápido alrededor del antinodo; lo que explica las desviaciones de los puntos experimentales hacia el antinodo de presión respecto a la curva teórica en la gráfica de la figura 3.7.

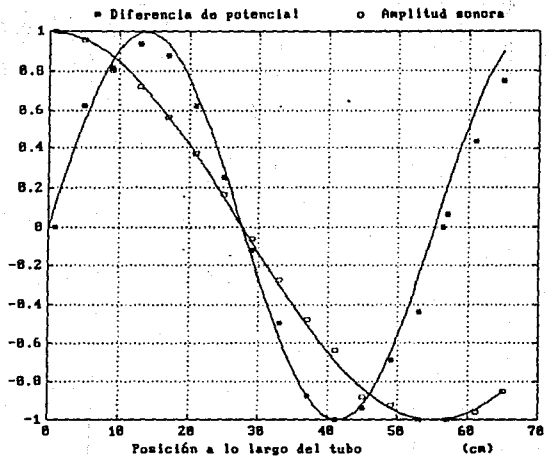


FIGURA 3.6

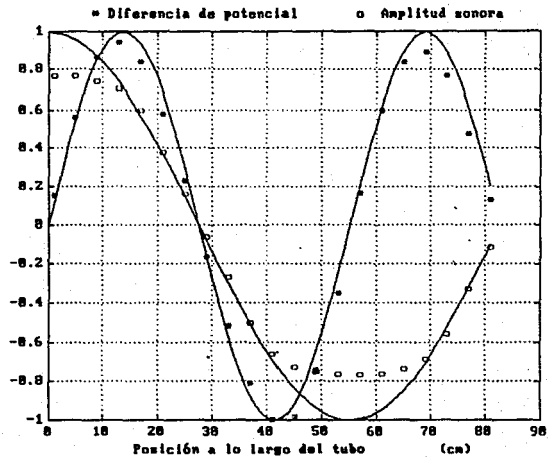


FIGURA 3.7

- 3.4.2.4.- El mismo experimento utilizando placas más largas.

Una medición similar a las anteriores, se hizo también con una frecuencia de 312 hz, pero utilizando un conjunto de placas con una longitud de 5 cm. Los datos obtenidos aparecen en la tabla 5.

POSICIÓN X (cm)	NIVEL DE PRE- SIÓN (dB)	VOLTAJE (μ V)
5.0	137.4	24
8.0	136.7	48
11.0	135.7	58
14.0	134.2	61
17.0	132.2	56
20.0	129.5	42
23.0	125.5	25
26.0	117.0	3
29.0	114.4	-22
32.0	124.6	-45
35.0	129.0	-64
38.0	131.7	-78
41.0	133.8	-87
44.0	135.4	-87
47.0	136.5	-80
50.0	137.2	-66
53.0	137.6	-47
56.0	137.7	-23
59.0	137.5	1

TABLA 5

La gráfica de los datos de la tabla 5 aparece en la figura 3.8, en donde pueden observarse, de una manera más notoria, los efectos producidos por el calentamiento de la bocina. En este caso, al aumentar la longitud de las placas, aumenta también la diferencia en la temperatura entre los extremos de éstas debido al calor radiado por la bocina. Esto justifica el hecho de que la diferencia de potencial en los termopares, sea mayor en valor absoluto cuando el flujo hidrodinámico se dirige hacia la bocina (lo que corresponde a los valores negativos), que cuando se aleja de ella.

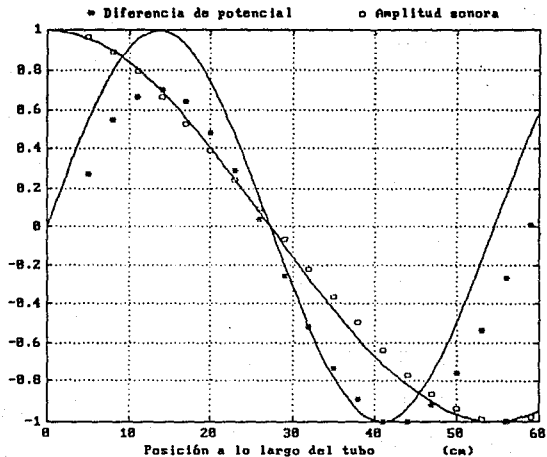


FIGURA 3.8

Otro efecto que confirma que la bocina emite calor, generando un gradiente de temperatura en el aire dentro del tubo de resonancias, es el hecho de que los valores experimentales aparecen desplazados hacia la parte positiva del eje "x", respecto a la curva continua que representa los valores teóricos esperados, y que precisamente, dicho desplazamiento es mayor conforme el conjunto de placas se acerca a la bocina.

- 3.4.3.- EFECTO DE LA AMPLITUD DE LA ONDA SONORA SOBRE EL FLUJO HIDRODINÁMICO DE CALOR.

- 3.4.3.1.- Procedimiento.

Se colocó el conjunto de placas de 0.6 cm de longitud en la posición $x = 11.5$ cm, donde el tubo de resonancias tenía un orificio para introducir el micrófono de medición, pues para estas mediciones es importante la precisión en el nivel de presión sonora. Se tomaron cuatro series de datos, cada una correspondiente a una frecuencia diferente. Estos datos son los siguientes:

f = 128 Hz		f = 312 Hz		f = 456 Hz		f = 598 Hz	
Lp (dB)	V (μV)	Lp (dB)	V (μV)	Lp (dB)	V (μV)	Lp (dB)	V (μV)
126.0	4	126.0	6	124.0	6	120.0	6
129.0	7	130.0	15	127.0	11	124.0	12
132.0	13	133.0	30	129.5	20	127.0	21
134.0	20	135.0	47	132.0	33	129.0	32
136.0	31	136.6	66	134.0	51	131.0	48
138.0	48	137.4	79	135.5	67	132.4	64
139.5	68	138.2	92	137.0	89	133.2	73
140.5	85	139.0	108	138.0	110	134.1	87
141.3	101	139.5	123	138.5	120	135.0	101
142.0	117	140.3	143	139.0	132	136.0	120
142.5	131	140.9	161	139.5	146	136.5	133
143.0	144	141.4	178	140.0	159	137.4	156
143.5	159	141.8	190	140.5	173	138.0	174

TABLA 6

- 3.4.3.2.- Resultados y análisis.

En base a la ec. 2.41 se espera que el flujo hidrodinámico de calor sea proporcional al producto $\rho u_i(\Gamma-1)$. Como la posición es fija, de acuerdo a la ec. 3.6 la diferencia de temperatura entre los extremos de las placas debe ser proporcional a $P_a^2(\Gamma-1)$. Para comprobar que este flujo de calor varía con el cuadrado de la presión sonora, se procedió de la siguiente manera: con los datos obtenidos, se calculó el gradiente de temperatura crítico por medio de la ec. 3.9 y luego se determinó el valor $1-\Gamma$; finalmente, los valores de la diferencia de potencial en los termopares, se dividieron entre este valor de $1-\Gamma$. Es de suponerse que el cociente así calculado varíe con el cuadrado de la presión acústica.

Llámesese c al cociente de la diferencia de potencial en los termopares (V) entre el factor $1-\Gamma$. Como el flujo hidrodinámico de calor (Q_h) es proporcional al producto $P_a^2(1-\Gamma)$; y a su vez, este producto es proporcional a la diferencia de potencial en los termopares, entonces c debe de variar con el cuadrado de la presión sonora.

Calculando el logaritmo de c y el logaritmo de P_a del conjunto de datos de la tabla 6, por el método de mínimos cuadrados se determinó una ecuación que relaciona a c con P_a . Esta ecuación es de la forma $c = b \cdot P_a^m$ con b y m constantes, y donde se espera que m tenga el valor de 2. Los valores obtenidos para m son los siguientes:

FRECUENCIA	VALOR DE m
128 Hz.	1.910
312 Hz.	1.973
456 Hz.	1.853
598 Hz.	1.778

TABLA 7

Las gráficas del logaritmo de c (c es proporcional al flujo de calor hidrodinámico) en función del logaritmo de P_A , pueden observarse en las figuras 3.9 a la 3.12, cada una correspondiente a una frecuencia. En ellas, se han representado con un asterisco los datos calculados de c en base a los resultados experimentales, y la línea continua es la gráfica de la función $\log(c) = \log(b) + a \cdot \log(P_A)$.

- 3.4.3.3.- Conclusiones.

De la tabla 7, puede verse que el valor de a es muy cercano a 2 como se esperaba; sin embargo, se obtuvo un valor menor debido posiblemente a dos efectos importantes que se despreciaron: El primero consiste en la conducción del calor a través de las placas y del fluido, el cual no permaneció constante, sino que aumentó al incrementar el gradiente de temperatura. El segundo consiste en los efectos de rozamiento, que aumentan conforme el conjunto de placas se acerca al nodo de presión en donde la velocidad es más grande. Como se vió en el capítulo anterior, los efectos de rozamiento disminuyen el flujo neto de calor hacia el antinodo de presión, y como la posición en "x" fue la misma al hacer las mediciones para las cuatro frecuencias analizadas, resulta que entre mayor fue el valor de la frecuencia, el conjunto de placas estuvo más cerca del nodo de presión y por lo tanto los efectos de rozamiento fueron más grandes.

- 3.4.4.- EFECTO DE LA LONGITUD DE LAS PLACAS SOBRE EL FLUJO HIDRODINÁMICO DE CALOR.

- 3.4.4.1.- Procedimiento.

Se utilizaron tres conjuntos de placas, cuya longitud era de 2.8 cm., 1.1 cm. y 0.6 cm. respectivamente. Se colocaron dentro del tubo de resonancias, con una frecuencia de 456 Hz, sometidas a la misma presión acústica, y se varió su posición dentro del tubo. Como era de esperarse, la diferencia de temperatura entre los

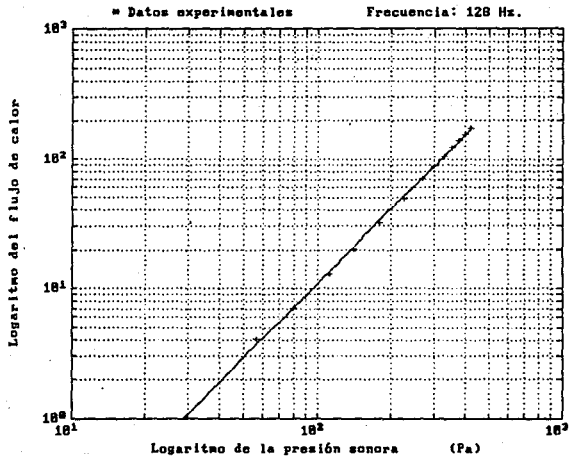


FIGURA 3.9

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

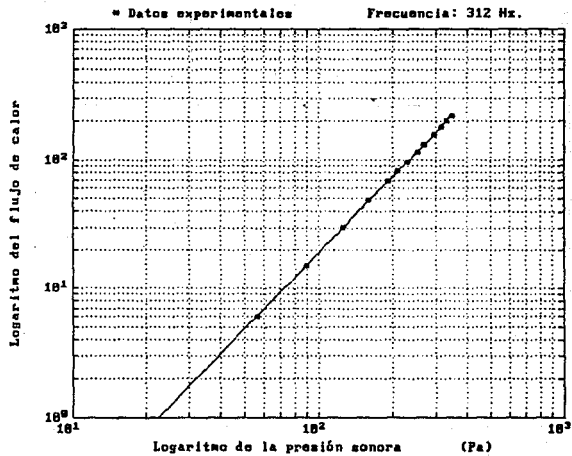


FIGURA 3.18

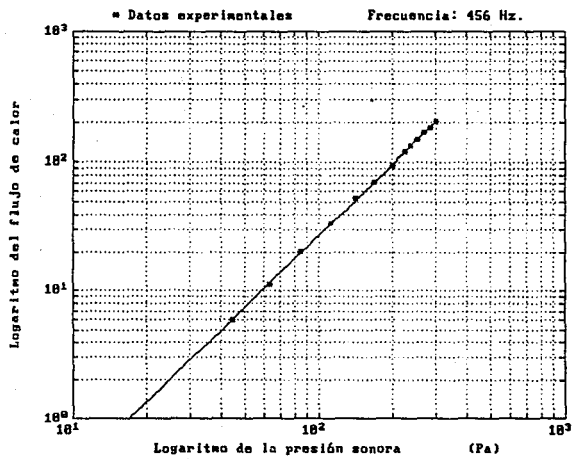


FIGURA 3.11

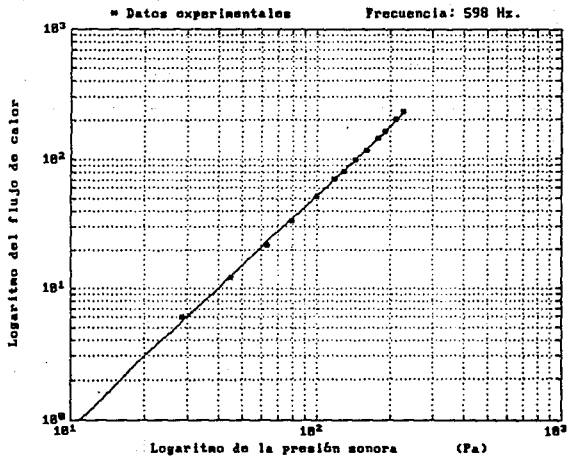


FIGURA 3.12

extremos de las placas fue mayor al aumentar la longitud de éstas, sólo que no aumentaba considerablemente. Los datos obtenidos, con cada conjunto de placas de diferente longitud, aparecen en la tabla 8.

POSICIÓN X (cm)	NIVEL DE PRESIÓN (dB rms)	$\Delta x = 0.6$ cm	$\Delta x = 1.1$ cm	$\Delta x = 2.8$ cm
		V (μV)	V (μV)	V (μV)
2.0	137.5	13	19	
5.0	137.0	33	41	43
8.0	135.7	41	50	54
9.5	134.6	42	51	56
11.0	133.2	41	49	53
14.0	129.2	28	36	39
17.0	121.7	13	14	13
20.0	114.7	-6	-11	-17
23.0	127.0	-22	-34	-43
26.0	131.8	-37	-49	-64
29.0	134.8	-43	-54	-71
32.8	136.5	-36	-47	-63
35.0	137.3	-17	-27	-43
38.0	137.6	-1	-4	-14

TABLA 8

- 3.4.4.2.- Análisis de resultados y conclusiones.

La gráfica de los datos de la tabla 8 aparece en la figura 3.13. Puede verse que cuando la longitud de las placas no es despreciable respecto a un cuarto de la longitud de la onda sonora, entonces los incrementos en su longitud influyen poco sobre el flujo hidrodinámico de calor. En la figura 3.13 también pueden observarse, los efectos mencionados anteriormente sobre los valores de la diferencia de temperatura entre los extremos de las placas, producidos por el calor radiado por la bocina, que como se indicó anteriormente, son más notorios cuando la placa es más larga.

Longitud: "x" 2.8 cm. "a" 1.1 cm. "+" 8.6 cm. Frecuencia: 456 Hz

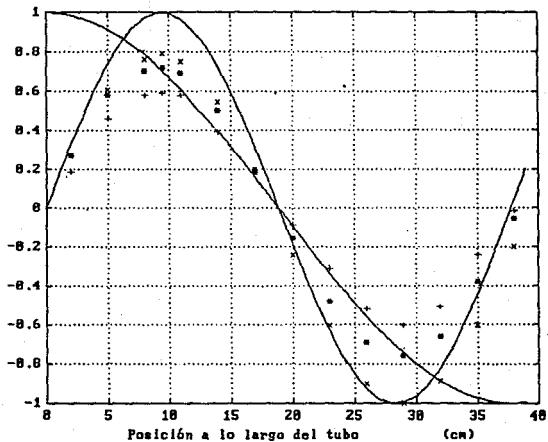


FIGURA 3.13: COMPARACION ENTRE DIFERENTES LONGITUDES DE LAS PLACAS

- 3.5.- CONCLUSIONES.

Se puede afirmar, que en términos generales los resultados experimentales concuerdan cualitativamente con la teoría. Para reducir las posibles fuentes de error y tener un sistema mejor controlado hubiera sido necesario invertir mayor esfuerzo, tiempo y recursos económicos. Como el objetivo principal de este trabajo fue la construcción de algunas máquinas termoacústicas (lo cual tiene un interés mayor), se decidió no extenderse mucho en el desarrollo de este capítulo y obtener sólo resultados cualitativos.

Estos experimentos permitieron entender el fenómeno termoacústico más ampliamente y los resultados obtenidos sirvieron de orientación para el diseño y la construcción de las máquinas termoacústicas que se describen en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV

"DOS EJEMPLOS DE MÁQUINAS TERMOACÚSTICAS"

- INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describe el diseño y la construcción de dos máquinas termoacústicas. Una es un oscilador y la otra un refrigerador. Se presenta también un análisis de las principales características de estas dos máquinas y una evaluación experimental de su funcionamiento.

- 4.1.- OSCILADOR TERMOACÚSTICO.

- 4.1.1.- DESCRIPCIÓN GENERAL.

Esta máquina termoacústica consta de dos partes que están a diferente temperatura. Utiliza el calor que fluye por sí solo de la región caliente a la fría para generar una onda sonora.

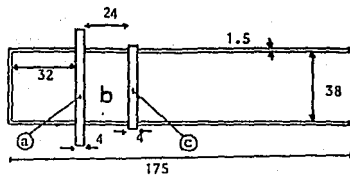
Este oscilador termoacústico (fig. 4.1) está formado por un tubo, cerrado en un extremo y abierto en el otro, que sirve como resonador para generar una onda sonora estacionaria y además, para

contener los demás elementos que forman a esta máquina. Este tubo se comporta como un resonador de un cuarto de longitud de onda, con un nodo de velocidad y un antinodo de presión en el extremo cerrado y un antinodo de velocidad y un nodo de presión en el extremo abierto.

Un conjunto de placas rígidas (fig. 4.1, parte b), alineadas longitudinalmente, están colocadas en el interior del resonador. La función de estas placas es mantener un gradiente de temperatura suficientemente grande para que se puedan generar oscilaciones acústicas como resultado de un intercambio de calor entre éstas y el aire (como se mencionó al inicio del capítulo tres). Las placas deben ser de un material que tenga una conductividad térmica pequeña y además muy delgadas para reducir el flujo de calor a través de ellas.

Como se concluyó en los capítulos anteriores, el calor debe de fluir en dirección del nodo de presión para generar una onda sonora, por lo cual la región entre el extremo cerrado del tubo y el inicio de las placas debe de estar a una temperatura mucho mayor que la región comprendida entre el término de las placas y el extremo abierto del resonador. La transición de temperatura entre la parte caliente y la parte fría del oscilador se encuentra en la región de las placas.

Para que las oscilaciones acústicas se mantengan, es necesario que el gradiente de temperatura en las placas permanezca constante, por lo que se colocan dos intercambiadores de calor (fig. 4.1, partes a y c) a ambos extremos de las placas. Estos intercambiadores consisten en una serie de láminas paralelas unidas a las paredes del resonador. Sirven para conducir el calor de las paredes del tubo hacia el interior de éste o viceversa, con la finalidad de mantener constante la temperatura a lo largo de todo el extremo de la placa. De esta forma, el intercambiador más cercano al extremo cerrado del resonador conduce el calor de las paredes del tubo a las placas, mientras que el otro intercambiador absorberá calor de éstas distribuyéndolo a toda la región fría del tubo.



Escala 1:2

Acotación: mm.

FIGURA 4.1 : OSCILADOR

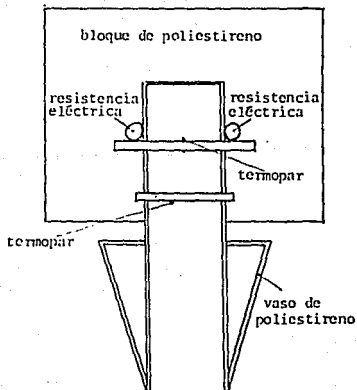


FIGURA 4.2

- 4.1.2.- DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN.

Las características físicas y geométricas de las placas son mencionadas al inicio del capítulo tres. Cubreobjetos de vidrio para muestras de microscopio reunieron las condiciones requeridas, por lo cual se utilizaron para construir el conjunto de placas. Los cubreobjetos empleados tenían un grueso de 0.20 mm, un largo de 40.0 mm y un ancho de 24.0 mm; fueron separados entre sí por una distancia de 0.40 mm y pegados con plastilina epóxica.

Como resonador se utilizó un tubo de cobre. La región que contiene el conjunto de placas, une la parte fría con la parte caliente del oscilador, por lo cual es deseable que tenga una conductividad térmica muy pequeña; así que se sustituyó el tubo de cobre en esta región por paredes de plastilina epóxica que sirvió también para pegar los cubreobjetos y mantenerlos fijos. El diagrama del oscilador que se construyó fue mostrado en la figura 4.1.

Los intercambiadores de calor deben de oponer la menor resistencia al movimiento del aire, por lo que se hicieron de lámina muy delgada pero a la vez lo suficientemente gruesa para evitar que se deformaran con facilidad. Estos dos intercambiadores fueron hechos de cobre de 0.44 mm. de espesor, separados uno de otro por una distancia también de 0.44 mm. Fueron cuidadosamente soldados a las paredes del tubo para garantizar un excelente contacto térmico. La distancia de separación entre estas láminas fue lo suficientemente pequeña para asegurar un buen intercambio de calor con el aire que pasara entre ellas.

-4.1.3.- FUNCIONAMIENTO.

Como la plastilina epóxica pierde su dureza a temperaturas superiores a los 70 grados centígrados, en lugar de calentar el extremo cerrado del tubo, se decidió mantenerlo a la temperatura ambiente y enfriar el extremo abierto. Se utilizó nitrógeno líquido para este fin.

El extremo abierto del resonador se sumergía en nitrógeno líquido hasta cerca del intercambiador de calor frío, teniendo cuidado de que el nitrógeno no lo tocara. Después de aproximadamente un minuto, se retiraba el oscilador del nitrógeno líquido y si la diferencia de temperatura entre sus dos extremos era lo suficientemente grande (alrededor de 100 grados centígrados), se generaba un sonido muy intenso. Con el calor de las manos, el extremo cerrado se mantenía cercano a la temperatura ambiente. Mientras el gradiente de temperatura en las placas se mantenía lo suficientemente grande, el sonido persistía.

- 4.1.4.- ANÁLISIS EXPERIMENTAL.

- 4.1.4.1.- Características generales.

Cuando el oscilador es retirado del nitrógeno líquido y emite sonido, conforme aumenta la temperatura de la parte fría, el sonido pierde intensidad y además aumenta su frecuencia.

Se midió el nivel de presión sonora con un sonómetro (Brüel and Kjaer tipo 2226) justo cuando el tubo comenzaba a sonar, es decir, cuando la parte fría tenía aproximadamente la temperatura del nitrógeno líquido (alrededor de -190°C) y el extremo cerrado era envuelto con las manos. Esta medición se hizo en el interior de la cámara anecoica del Centro de Instrumentos de la U.N.A.M.* obteniendo un valor de 128 dB (A) justo en la boca del tubo. La frecuencia fundamental fue inicialmente de 308 Hz, determinada con un analizador de señales (Brüel and Kjaer tipo 2034) y un micrófono de medición (Brüel and Kjaer de 1/4 de pulgada de diámetro). Como se observa, este oscilador es bastante ruidoso.

* Esta cámara no está terminada; no tiene puerta y le falta la mitad de las cuñas absorbentes del piso. Sin embargo, se eliminan en gran medida el ruido del exterior y los rebotes del sonido en sus paredes.

- 4.1.4.2.- Rendimiento.

El objetivo que se persiguió fue obtener experimentalmente un valor aproximado del rendimiento de este oscilador, determinando por lo menos el orden de magnitud. Como la construcción de este oscilador no se hizo con mucho detalle y como los materiales no fueron del todo idóneos, era de esperarse que el oscilador no fuera muy eficiente.

El rendimiento de una máquina termodinámica es la fracción del calor extraído de la región caliente que se transforma en trabajo. Por lo tanto, para conocer el rendimiento del oscilador termoacústico, se determinó la energía calorífica por unidad de tiempo que se le entregaba en la parte caliente para mantener constante la temperatura en ese extremo del tubo, y además, se calculó la potencia acústica que producía. La temperatura de la región fría también se mantuvo sin cambio. El cociente de la potencia acústica producida, entre el flujo de calor entregado en la parte caliente, da como resultado el rendimiento del oscilador.

- a).- Dispositivo experimental.

Para reunir las condiciones anteriores, el extremo cerrado del oscilador, la región que contenía las placas y los intercambiadores de calor se aislaron térmicamente del exterior utilizando un bloque de poliestireno expandido (ver figura 4.2). Alrededor del extremo cerrado y junto al intercambiador de calor caliente se puso una resistencia eléctrica con la finalidad de mantener constante la temperatura en esa parte del oscilador. Para evitar que cambiara la temperatura en el extremo abierto del resonador, se colocó un vaso de poliestireno alrededor de él, que se mantuvo lleno de nitrógeno líquido.

Variando la corriente a través de la resistencia eléctrica, se podía controlar la temperatura de la parte caliente del resonador.

Conociendo el valor del voltaje y de la corriente en esa resistencia, se determinó la cantidad de calor por unidad de tiempo que absorbía el oscilador termoacústico.

Para determinar la potencia acústica (\dot{W}_a) del oscilador, se supuso que éste se comporta como una fuente simple cuyo campo sonoro tiene una simetría esférica. Estas suposiciones fueron buenas en virtud de que el diámetro del tubo (3.8 cm) es pequeño en comparación con la longitud de la onda sonora obtenida (1.3 m). El dispositivo experimental fue colocado en el interior de la cámara anecoica del Centro de Instrumento de la U.N.A.M. con la finalidad de simular un campo libre para la propagación del sonido. Bajo estas consideraciones, se midió el nivel de presión sonora a una distancia (r) de 0.3 m de la boca del tubo. La intensidad acústica (I) se calculó con la relación⁽¹⁾

$$I = (P_{rms})^2 / (\rho_0 c) .$$

La potencia acústica del oscilador se determinó integrando el valor de la intensidad sobre un cascarón esférico de radio igual a 0.3 m, con lo que se obtuvo

$$\dot{W}_a = 4\pi r^2 I = 4\pi r^2 (P_{rms})^2 / (\rho_0 c) . \quad (4.1)$$

La temperatura en cada intercambiador de calor (que debe ser igual al respectivo extremo de las placas) se determinó por medio de dos termopares de cromel-constantán (de 0.003 pulgadas de diámetro con aislante de teflón). Cada uno de los termopares se pegó junto a cada intercambiador.

- b).- Desarrollo.

El vaso de poliestireno expandido se llenó de nitrógeno líquido y de inmediato se detectó que la temperatura del oscilador comenzó a bajar. Para mantener caliente el extremo cerrado, se incrementó

el valor de la corriente que pasaba por la resistencia eléctrica, hasta obtener un valor de alrededor de 635 mA (la corriente máxima de la fuente).

Manteniendo siempre lleno el vaso con nitrógeno líquido, se llegó a un estado de equilibrio en el cual la temperatura permanecía aproximadamente constante tanto en el intercambiador de calor frío como en el caliente. Bajo estas condiciones se midió la corriente y el voltaje en la resistencia (con dos multímetros digitales Hewlett Packard tipo 3438A), el nivel de presión sonora a 0.3 m de la boca del tubo (con un sonómetro Brüel and Kjaer tipo 2226) y el voltaje en cada uno de los termopares (con dos multímetros digitales Hewlett Packard tipo 3478A). Esto se repitió en seis ocasiones.

- c).- Datos Experimentales.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

VARIABLE	NÚMERO DE REPETICIÓN					
	1	2	3	4	5	6
$V_R \pm 0.01$ (volt)	15.50	15.50	15.46	15.35	15.46	15.30
$I_R \pm 0.001$ (ampere)	0.638	0.640	0.639	0.633	0.636	0.634
$V_{TH} \pm 0.005$ (millivolt)	-5.223	-5.220	-5.243	-5.156	-5.235	-5.220
$V_{TC} \pm 0.005$ (millivolt)	-9.602	-9.652	-9.620	-9.626	-9.640	-9.645
$L_p \pm 0.25$ (dB A)	94.5	94.0	94.0	92.0	93.0	93.0

T A B L A 9

donde V_R es el voltaje en la resistencia; I_R es la intensidad de

corriente en la resistencia; V_{TH} es el voltaje en el termopar del intercambiador de calor caliente; V_{TC} es el voltaje en el termopar del intercambiador de calor frío y L_p es el nivel de presión sonora.

La incertidumbre asociada a la medidas de la tabla 9 corresponden: a la resolución del multímetro para la corriente y el voltaje en la resistencia; a la mitad de la resolución del sonómetro para el nivel de presión sonora, y para el voltaje en los termopares, la incertidumbre es una estimación del rango máximo de variación de esa variable. La temperatura ambiental fue $T_a = 22 \pm 0.5$ grados centígrados.

Adicionalmente, se obtuvo un espectro de frecuencias promediado en el tiempo del sonido emitido por este oscilador (figura 4.3) utilizando un micrófono de medición (Brüel and Kjaer 4435 de 1/4 de pulgada de diámetro) y un analizador de señales (Brüel and Kjaer tipo 2034).

- d).- Análisis de datos.

Del nivel de presión sonora medido con el sonómetro se determinó el valor rms de la presión acústica considerando únicamente la frecuencia fundamental para eliminar la ponderación. Se hizo ésto, porque como se verá a continuación los armónicos influyen muy poco sobre el valor del nivel de presión total del sonido emitido por el oscilador (una centésima de decibel (A) para un valor de 101.64 decibeles (A) en el nivel de presión total).

Multiplicando el valor de la corriente por el voltaje en la resistencia, se obtuvo el calor por unidad de tiempo que absorbe la parte caliente del oscilador termoacústico. Con la ecuación 4.1 se determinó la potencia acústica que produjo. Al utilizar la ec. 4.1, se consideró $\rho_a = 0.89 \text{ Kg/m}^3$ (un valor aproximado para la densidad ambiental en la ciudad de México) y $c = 344.2 \text{ m/s}$.

- Influencia de los armónicos sobre el nivel de presión sonora total, del sonido emitido por el oscilador termoacústico.

Para determinar que efectivamente, los armónicos influyen muy poco sobre el nivel de presión sonora total del sonido emitido por el oscilador, de tal manera que puede considerarse que este sonido es un tono puro (con la frecuencia de la onda fundamental), se tomó como referencia el espectro de frecuencias promediado en el tiempo mostrado en la figura 4.3. En este espectro aparece la frecuencia fundamental (264 Hz) y cuatro armónicos (aunque la figura 4.3 no lo muestra, sólo existieron estos cuatro armónicos).

Utilizando los datos de la tabla 11,⁽²⁾ que contiene los factores de transformación (ΔL_{pw}) de decibeles (A) a decibeles sin ponderación para algunas frecuencias, se hizo una interpolación para determinar el factor de transformación para cada una de las frecuencias del sonido emitido por el oscilador.

Para transformar el nivel de presión sonora en decibeles (A) a decibeles sin ponderación, se tiene la siguiente relación:

$$L_p = L_p(A) + \Delta L_{pw} \quad (4.2)$$

FRECUENCIA (Hz):	250	315	500	639	800	1000	1250	1600
FACTOR DE TRANSFORMACION (dB):	8.6	6.6	3.2	1.9	0.8	0.0	-0.6	-1.0

T A B L A 1 1

La interpolación se hizo graficando los punto de la tabla 11 (factor de transformación contra frecuencia). Para determinar el factor de transformación correspondiente a una frecuencia "f", se tomó un punto de la gráfica con una frecuencia mayor a ella y otro punto con una frecuencia menor. Se determinó la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos y utilizando esta ecuación se

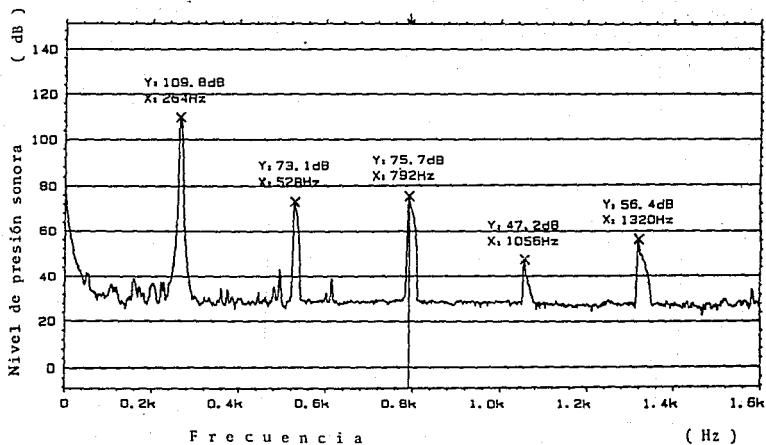


FIGURA 4.5

obtuvo el factor de transformación correspondiente a la frecuencia "f". Los resultados obtenidos son los siguientes:

FRECUENCIA (Hz):	264	528	792	1056	1320
FACTOR DE TRANSFORMACION (dB):	8.169	2.920	0.851	-0.134	-0.680

T A B L A 1 2

En nivel de presión en decibeles (A) para una sola frecuencia está dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 L_p (A) &= 10 \text{ Log}_{10} \left[W(f) (P_{rms} / P_{ref})^2 \right] \\
 &= 10 \text{ Log}_{10} (W(f)) + 10 \text{ Log}_{10} (P_{rms} / P_{ref})^2 \\
 &= \Delta L_{pw} + L_p
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

donde $W(f)$ es el factor de ponderación que depende de la frecuencia, P_{ref} es el valor de la presión de referencia (en este caso de 20.1 micropascales) y ΔL_{pw} es el factor de transformación.

El valor del nivel de presión sonora en decibeles (A), cuando existen varias frecuencias, está dado por:

$$L_p (A) = 10 \text{ Log}_{10} \sum_i \left[W(f_i) ((P_{rms})_i / P_{ref})^2 \right] \tag{4.4}$$

Con los datos de la tabla 12 y con la igualdad $\Delta L_p = 10 \text{ Log}(W(f))$ (obtenida de la ec. 4.3) se determinó el valor del factor de ponderación $W(f)$ correspondiente a cada una de las frecuencias de la tabla 12. Posteriormente, con la ec. 4.4 y la información de la figura 4.3, se calculó el valor del nivel de presión sonora en

decibeles (A) considerando la frecuencia fundamental y los cuatro armónicos. En este caso se obtuvo como resultado que el nivel de presión sonora total fue de 101.64 dB (A). Siguiendo el mismo proceso y usando los mismos datos de la figura 4.3, pero tomando únicamente la frecuencia fundamental del sonido emitido por el oscilador (es decir, despreciando los armónicos), se obtuvo que el nivel de presión sonora fue de 101.63 dB (A).

Por lo tanto, se puede concluir que prácticamente el oscilador termoacústico emite en este caso un tono puro de frecuencia igual a 264 Hz y que al hacer ésto, el error es despreciable.

- Cálculo del rendimiento del oscilador termoacústico.

El rendimiento de esta máquina termoacústica se determinó dividiendo la potencia acústica entre el calor por unidad de tiempo entregado por la resistencia. Los valores obtenidos para cada una de las seis repeticiones, son los siguientes:

RENDIMIENTO:	0.0028	0.0025	0.0025	0.0016	0.0020	0.0020
--------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

T A B L A 1 3

El promedio de estos valores es 0.0022; es decir, el rendimiento experimental del oscilador termoacústico es del 0.22 %.

El rendimiento de una máquina de Carnot (el mayor rendimiento que puede alcanzar una máquina termodinámica) está determinado por la siguiente relación:

$$1 - T_c/T_h \quad (4.5)$$

Para calcular el rendimiento que tendría una máquina de Carnot se determinó el valor de la temperatura en la parte fría y en la parte caliente del oscilador. Buscando en tablas la temperatura correspondiente a cada valor del voltaje en los termopares, se obtienen los siguientes resultados:

T_H ($^{\circ}K$):	201.0	201.0	200.5	201.5	201.0	201.0
T_C ($^{\circ}K$):	92.0	91.0	92.0	92.0	91.0	91.0

T A B L A 1 4

Aplicando la ec. 4.2 a los datos de la tabla 14 y calculando el promedio de los resultados, se obtiene que el rendimiento de una máquina de Carnot que opera entre los mismos valores de temperatura, que para el caso del oscilador termoacústico, es de 0.5448. Por lo tanto, el rendimiento del oscilador termoacústico construido es un 0.40 % del rendimiento de la máquina de Carnot.

- e).- Conclusiones.

Como era de suponerse, el rendimiento del oscilador termoacústico construido fue pequeño, pero sin embargo, fue mucho menor de lo esperado. Esto posiblemente se debió a los siguientes factores: las partes del resonador no estaban perfectamente unidas entre sí, ya que existían algunos orificios por donde fluía el aire entre el interior y el exterior; algunos de los cubreobjetos utilizados como placas se rompieron durante la construcción del oscilador; las placas estaban muy juntas entre sí por lo que había muchas pérdidas de energía sonora por fricción; las paredes de plastilina epóxica del resonador, alrededor del conjunto de placas, eran muy gruesas y conducían demasiado calor; y a que la parte del resonador que contenía el conjunto de placas tenía una sección transversal cuadrada y el resto una sección transversal circular.

Este oscilador fue un bonito ejemplo de una máquina termoacústica, pues de una manera un poco sorprendente y a pesar de que es relativamente sencillo, produce un sonido muy intenso. Fue construido fundamentalmente buscando que funcionara, sin atender las condiciones necesarias para que resultara eficiente.

- 4.1.4.3.- Estudio del desarrollo inicial de las oscilaciones.

Se pretendió investigar como era el incremento en la amplitud de las oscilaciones de la presión, cuando el oscilador termoacústico empezaba a emitir sonido.

- a).- Desarrollo

El oscilador fue introducido en el nitrógeno líquido manteniendo la parte cerrada del resonador envuelta por las manos. Una vez que la parte fría alcanzaba una temperatura cercana a la del nitrógeno, el oscilador fue retirado de este líquido y se bloqueó su extremo abierto con una placa para evitar que se produjera el sonido. Rápidamente se retiró la placa y esta máquina termoacústica empezó a emitir ondas sonoras. Por medio de un analizador de señales (Brüel and Kjaer tipo 2034) y de un micrófono de medición (Brüel and Kjaer de 1/4 de pulgada de diámetro) se obtuvo una gráfica de la presión sonora en función del tiempo, desde el inicio de estas oscilaciones hasta que se alcanzaba una amplitud constante. Lo anterior se hizo en dos ocasiones: en la primera la diferencia de temperatura era relativamente grande entre la parte fría y la parte caliente del oscilador (la gráfica aparece en la figura 4.4); y en la segunda, esta diferencia de temperatura fue relativamente pequeña (la gráfica se encuentra en la figura 4.5).

- b).- Análisis de resultados.

Comparando las gráficas de las figuras 4.4 y 4.5 se observa que el intervalo de tiempo, desde el inicio de la oscilaciones de la presión hasta que se alcanza un valor constante en la amplitud, depende de la diferencia de la temperatura entre la parte caliente y la parte fría del oscilador. Este intervalo de tiempo será mayor si la diferencia de temperatura es pequeña. En estas gráficas, el

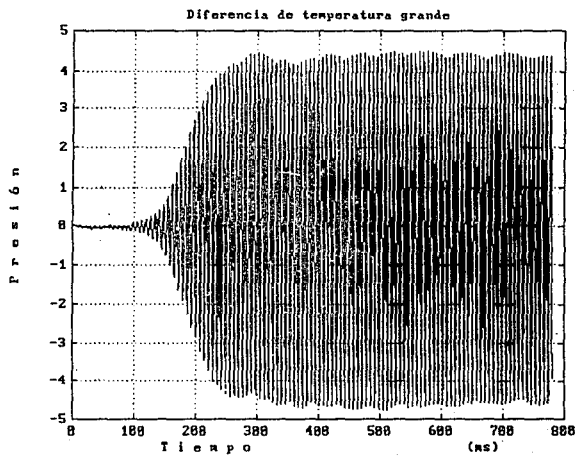


FIGURA 4.4

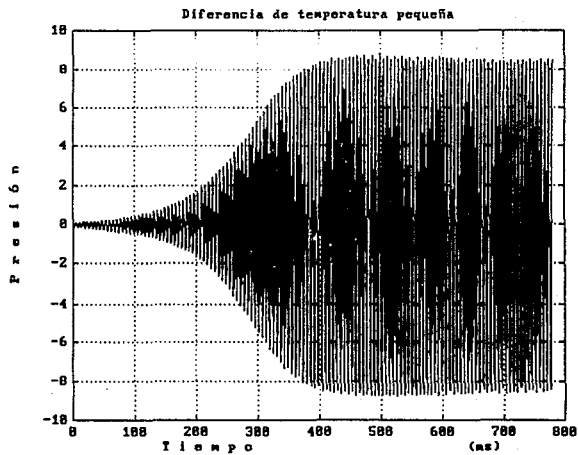


FIGURA 4.5

cero en el tiempo es arbitrario y está determinado por el nivel del "disparo" del analizador de señales.

Se tomaron los puntos máximos y los puntos mínimos comprendidos en el intervalo de 95 milisegundos a 187 milisegundos, de la gráfica de la figura 4.4. Se hizo un gráfico del logaritmo natural del valor absoluto de la presión sonora correspondiente a estos puntos contra el tiempo (figura 4.6). Por medio del método de mínimos cuadrados, se ajustaron los puntos de la gráfica a una línea recta obteniendo una ecuación de la forma $\ln(p)=A \cdot t+\ln(p_0)$ donde "A" es la pendiente de la recta, "t" el tiempo y $\ln(p_0)$ la ordenada al origen. Esta ecuación es equivalente a

$$p = p_0 \exp(At) \quad . \quad (4.6)$$

No se tomaron en cuenta para el análisis los puntos máximos y mínimos correspondientes a tiempos menores a 95 milisegundos ya que la amplitud en las oscilaciones de la presión eran muy pequeñas y por lo tanto, el porcentaje del ruido en estas señales podría ser grande. Así, para evitar posibles errores se descartaron estos puntos.

El análisis anterior se hizo también para la gráfica de la figura 4.5 tomando el intervalo de 80 milisegundos a 300 milisegundos. En este caso, la gráfica del logaritmo natural de la presión contra el tiempo aparece en la figura 4.7.

Cuando la diferencia de temperatura entre la región fría y la región caliente del oscilador termoacústico era grande (fig. 4.6), se obtuvo un valor para la constante "A" (ec. 4.5) de 0.0371 ms^{-1} ; y para el caso en el cual esta diferencia de temperatura era pequeña (fig. 4.7), el valor de "A" fue de 0.0127 ms^{-1} .

- c).- Conclusión.

Como se observa, al inicio de la oscilaciones en la presión, producidas por el oscilador termoacústico, la amplitud crece de una

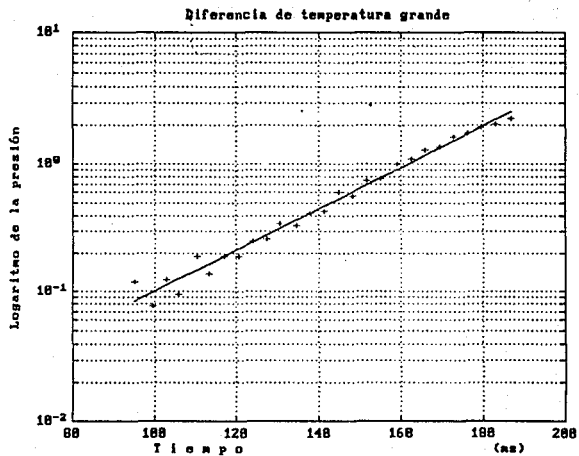


FIGURA 4.6

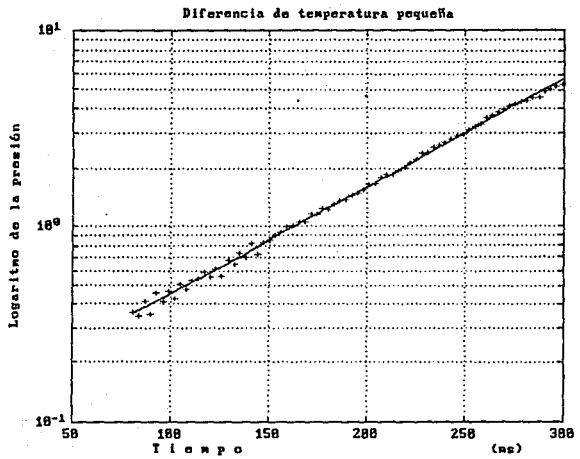


FIGURA 4.7

manera exponencial, ya que de las gráficas de las figuras 4.6 y 4.7 el conjunto de puntos obtenidos experimentalmente están muy próximos a las rectas ajustadas. También se puede concluir que la rapidez con que crece la amplitud de las oscilaciones es más grande entre mayor sea la diferencia de temperatura entre la parte fría y la parte caliente del resonador termoacústico.

- 4.2.- REFRIGERADOR TERMOACÚSTICO.

- 4.2.1.- DESCRIPCIÓN GENERAL.

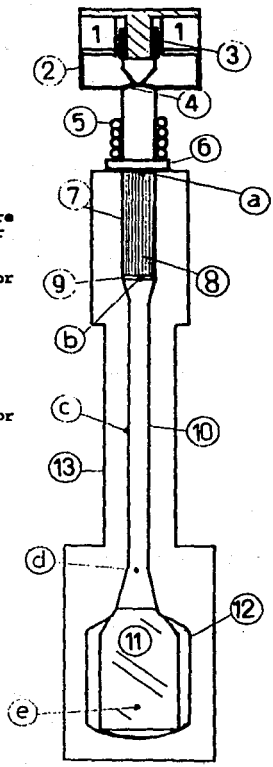
Esta máquina termoacústica utiliza el mismo principio que el oscilador anterior, sólo que funciona con el ciclo inverso, es decir, utiliza la energía de una onda sonora para producir un flujo de calor de una región fría hacia otra a una temperatura mayor.

- 4.2.1.1.- El resonador.

El refrigerador termoacústico que se construyó se muestra en la figura 4.8. Consistió de un resonador formado por tres secciones, la primera era en un tubo con un diámetro grande el cual contenía el "conjunto de placas" que interaccionaban con el aire intercambiando calor y produciendo un flujo hidrodinámico térmico hacia el antinodo de presión; posteriormente un tubo largo y delgado, y finalmente, una región de mayor diámetro que encerraba un gran volumen de fluido.

En la parte superior se localizaba una bocina cuya membrana generaba una onda sonora. La región donde se encontraba esta membrana debía de comportarse como un antinodo de presión en dirección del cual se habría de dirigir el flujo hidrodinámico de

- 1).- Imán de la bocina
- 2).- Soporte
- 3).- Bobina de la bocina
- 4).- Membrana
- 5).- Tubos de cobre para circular agua
- 6).- Intercambiador de calor caliente
- 7).- Tubo de PVC
- 8).- Espiral de acetato
- 9).- Intercambiador de calor frío
- 10).- Tubo delgado de cobre
- 11).- Lámina de cobre
- 12).- Frasco Dewar
- 13).- Bloque de poliestireno expandido.



- a).- Termopar 1
- b).- " 2
- c).- " 3
- d).- " 4
- e).- " 5

FIGURA 4.8.

calor. El otro extremo del resonador, también se comporta como un antinodo de presión ya que tiene una pared rígida que impide el movimiento de las partículas.

Como se mencionó en los capítulos anteriores, es de vital importancia eliminar las pérdidas de energía acústica (resultado de la viscosidad y de la conducción térmica hacia las paredes del resonador). Con este fin, la parte inferior del refrigerador tenía un diámetro mayor, ya que de esta manera, el aumento del volumen de fluido debía originar que el resonador se comportara de una forma parecida a un tubo abierto en el extremo inferior de la sección delgada, funcionando básicamente como un resonador de un cuarto de longitud de onda. Lo anterior resultaba muy conveniente ya que se reducía el largo del resonador sin alterar la frecuencia de resonancia, con lo cual disminuía la superficie de las paredes y por lo tanto las pérdidas de la energía sonora.

- 4.2.1.2.- El conjunto de placas.

El conjunto de placas, necesarias para producir el flujo hidrodinámico del calor, estaba colocado relativamente cerca del antinodo de presión. Esto se debió a que cerca del antinodo de presión el gradiente de temperatura crítico es más grande y por lo tanto permite un mayor flujo hidrodinámico térmico cuando la amplitud de la presión sonora es alta. Además, cerca del antinodo de presión la velocidad de partícula es menor, con lo que se reducen de esta manera las pérdidas por fricción.

Como se observa, la región que se pretendía enfriar era el interior del resonador a partir del extremo inferior del conjunto de placas. La región que contenía las placas era una zona de transición de la parte caliente a la fría. Sólo la parte del refrigerador, comprendida de la bocina al extremo superior de las placas, debía estar en contacto térmico con el medio ambiente y el resto debía aislarse térmicamente para evitar que el calor fluyera del exterior hacia la zona fría.

- 4.2.1.3.- Intercambiadores de calor.

Al igual que en el oscilador termoacústico, a ambos extremos de las placas se colocaron sendos intercambiadores de calor, formados por un conjunto de placas paralelas (de un material que fuera un buen conductor de calor) alineadas longitudinalmente dentro del resonador. El intercambiador de la parte superior tenía la función de conducir el calor hacia las paredes del resonador para luego ser entregado al medio ambiente. El intercambiador inferior servía para transportar el calor de las paredes del resonador hacia su interior, a lo largo del extremo de las placas, para ser conducido hasta la parte superior de éstas.

La separación entre las placas en el intercambiador de calor frío fue mayor que en el intercambiador caliente para reducir las pérdidas de energía por fricción, ya que éste último estaba más cerca del nodo de presión y por lo tanto la velocidad era mayor. También, el ancho de las placas del intercambiador caliente fue más grande que en el frío debido a que el calor que se habría de liberar al medio ambiente sería mayor que el calor que se extraía de la parte fría.

- 4.2.1.4.- El gradiente de temperatura en las placas.

Era importante que el gradiente de temperatura en las placas se mantuviera del menor tamaño posible para evitar que el calor fluyera por conducción hacia la parte fría, reduciendo con ello el flujo de calor que se extraería de esta región. El gradiente de temperatura en las placas podía aumentar por dos razones: la primera, debido a que la parte inferior de las placas se había enfriado (que era lo que se buscaba) y la segunda, debido a que el extremo superior de las placas se había calentado al acumularse el calor en ese sitio (lo que constituye un efecto nocivo). Para evitar que el calor se acumulara alrededor del intercambiador caliente, se colocó un pequeño tubo enrollado en espiral, alrededor

del resonador, entre la bocina y el intercambiador de calor caliente. Haciendo circular agua por el interior de este tubo delgado, se incrementaría la conducción de calor de las paredes del resonador hacia el medio ambiente.

Se redujo el diámetro del resonador a partir del intercambiador de calor frío, ya que de esta forma las pérdidas de energía por viscosidad también deberían reducirse.

- 4.2.2.- DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN.

- 4.2.2.1.- El resonador.

Un diagrama a escala del refrigerador termoacústico construido se muestra en la figura 4.8. En ella pueden observarse las dimensiones del resonador utilizado.

Un tubo de cobre de 38 mm de diámetro interior, se utilizó para la sección del resonador comprendida entre la parte superior del conjunto de placas y la bocina. A este tubo de cobre se soldaron fuertemente las láminas del intercambiador de calor caliente y además, sobre su superficie se enrolló un delgado tubo de cobre flexible que serviría para conducir y ayudar a disipar el calor.

La parte del resonador que contenía el conjunto de placas se hizo con tubo de PVC de 3.8 cm. de diámetro interior. Se usó este material con la finalidad de reducir la conducción del calor en esta parte del resonador

Para la parte inferior del resonador se utilizó un frasco Dewar para aislar térmicamente el interior. Como era necesario facilitar la conducción del calor desde el fondo del Dewar hasta el intercambiador de calor frío, se colocó una lámina de cobre de 0.17

mm de espesor dentro del Dewar y se utilizó un tubo de cobre (de 25 mm de diámetro interior) entre el Dewar y el intercambiador de calor frío. Además, las reducciones para acoplar los cambios en el diámetro del resonador fueron hechos de aluminio.

Las diferentes partes de resonador, desde el Dewar hasta el tubo al cual estaban soldadas las láminas del intercambiador de calor frío, se unieron utilizando pasta conductora térmica de silicón, con la finalidad de facilitar la conducción de calor. Estas partes del resonador fueron pegadas con resinas epóxicas para que quedaran firmemente unidas. La longitud del resonador fue determinada en base a la frecuencia de resonancias a utilizar (se discutirá más adelante).

- 4.2.2.2.- El fluido de operación.

Era conveniente que el fluido que se utilizara como substancia de operación en el refrigerador termoacústico tuviera las siguientes características: densidad baja, conductividad térmica pequeña, baja viscosidad y un pequeño número de Prandtl. El helio, por ejemplo, era un fluido adecuado para esta máquina termoacústica. Sin embargo, se utilizó aire como substancia de operación, para el refrigerador que se construyó, debido a que el uso de este gas implicaba un diseño más sencillo y evitaba complicaciones en la construcción. De haber usado otro gas, se hubiera tenido que cumplir con necesidades adicionales; por ejemplo, hubiera sido necesario construir un resonador totalmente sellado para evitar que el gas de su interior se escapara y se hubiera requerido un mecanismo para desplazar el aire y colocar el gas a utilizar en el interior del resonador.

- 4.2.2.3.- Frecuencia de resonancia.

En base a los experimentos del capítulo anterior se determinó que el flujo hidrodinámico de calor, cuando se utiliza al aire como sustancia operante, tiene un valor máximo para una frecuencia de

aproximadamente 50 Hz, y que este flujo de calor disminuye al aumentar la frecuencia. En base a lo anterior, se eligió que el largo del resonador fuera de 90 cm para que la frecuencia de resonancia de la onda sonora tuviera un valor cercano a los 100 Hz. Valores menores a los 100 Hz no eran convenientes porque implicaban longitudes grandes para el resonador y amplios desplazamientos de la membrana de la bocina.

- 4.2.2.4.- La bocina y el nivel de presión sonora.

En pruebas realizadas con un resonador similar, se alcanzó un nivel de presión sonora cercano a los 148 dB en el antinodo de presión. El diseño de este refrigerador fue pensado para utilizar una onda sonora con un nivel de presión de alrededor de 155 dB en el antinodo de presión. Para ello sería necesario utilizar una bocina realmente potente y una membrana que se pudiera adaptar al diámetro del resonador (3.8 mm) que fuera lo suficientemente resistente para soportar las altas presiones acústicas. Además, el sonido producido debería ser de alta calidad para obtener una onda senoidal, de tal manera que se pudiera formar una onda estacionaria dentro del resonador.

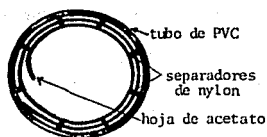
Como se observa, uno de los componentes más complicados lo constituía la bocina. Fue esto precisamente, uno de los principales problemas a resolver y uno de los que más tiempo requirieron para la construcción del refrigerador termoacústico. Para reunir las condiciones mencionadas en el párrafo anterior, se utilizó el iman (de 16 cm. de diámetro por 2 cm. de espesor) junto con el armazón metálico de una bocina marca JST de doscientos watts de potencia. Se empleó una bobina con una impedancia de 16 ohms enrollada alrededor de un tubo muy delgado de aluminio de 2 pulgadas de diámetro. El extremo del tubo de aluminio se unió a una membrana que se pegó a las paredes del resonador. Esta membrana estaba formada a su vez por tres membranas para bocina de 2 pulgadas de diámetro unidas entre sí con pegamento "Resistol 5000".

- 4.2.2.5.- Intercambiadores de calor.

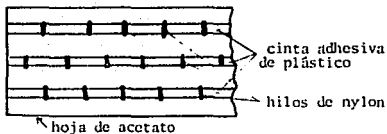
Los intercambiadores de calor, al igual que en el oscilador termoacústico, fueron hechos de láminas de cobre fuertemente soldadas a las paredes del resonador. Para el intercambiador frío las dimensiones fueron: un espesor de 0.32 mm, un largo de 3 mm considerando que la amplitud del movimiento oscilatorio de las partículas en ese punto sería de aproximadamente 2.0 mm, y una separación entre las láminas de 1.10 mm (aproximadamente 4 veces la profundidad de penetración térmica, que para este caso tendría un valor cercano a 0.25 mm). Las dimensiones del intercambiador caliente fueron: un espesor de 0.32 mm, un largo de 6 mm y una separación entre las placas 0.64 mm.

- 4.2.2.6.- El "conjunto de placas".

El "conjunto de placas" se contruyó utilizando una tira de acetato de 175 cm. de largo (II), 15.3 cm de ancho (Δx) y 0.08 mm de grueso (21), enrollada en forma de espiral. Se utilizó este material porque el flujo hidrodinámico de calor resultó mayor para este acetato, según se comprobó al realizar una serie de medidas similares a las del capítulo anterior, utilizando el tubo de resonancias y probando entre diferentes materiales. La separación entre una vuelta y otra de esta espiral fue de aproximadamente 0.6 mm, poco más del doble de la profundidad de penetración térmica (se calculó que para este caso tendría un valor de aproximadamente 0.25 mm). Esta separación fue mantenida colocando pequeñas tiras de 0.5 cm de largo de hilo de nylon, pegadas a la hoja de acetato con cinta adhesiva de plástico (ver figura 4.9). Los separadores se colocaron formando tres grupos a lo ancho de la tira de acetato, y fueron distribuidos de tal forma que por cada vuelta existieran ocho de ellos, a excepción de las vueltas más internas. Esta espiral de acetato, fue colocada en el interior de un tubo de PVC de 38 mm de diámetro interior.



(b)



(a)

FIGURA 4.9.- a) Hoja de acetato con las tres tiras de hilo de nylon. b) Una parte de la hoja de acetato enrollada dentro del tubo de PVC.

Para determinar la mejor posición, a lo largo del resonador, del conjunto de placas, se graficó la diferencia del flujo neto de calor (ec. 4.3) menos las pérdidas de energía acústica debido a la viscosidad, cerca de una pared (ec. 33 del apéndice 1) como una función de la posición dentro del resonador (esta gráfica aparece en la fig. 4.10). Para esta gráfica se consideró una onda sonora dentro de un resonador lleno de aire en condiciones ambientales; se tomó una frecuencia de 100 Hz, un gradiente de temperatura nulo en las placas y un nivel de presión sonora de 160 dB en el antinodo de presión. En esta gráfica se observa que es precisamente cerca del antinodo de presión (alrededor de $Kx = 1.2$, considerando que en el antinodo de presión $kx = \pi/2$ y en el nodo $kx = 0$) donde el flujo neto de calor, de la parte fría a la caliente, es comparativamente más grande respecto a las pérdidas de energía causadas por la viscosidad. El punto máximo de esta gráfica se escogió para colocar el centro de la longitud de las placas (para un valor de kx cercano a 1.2).

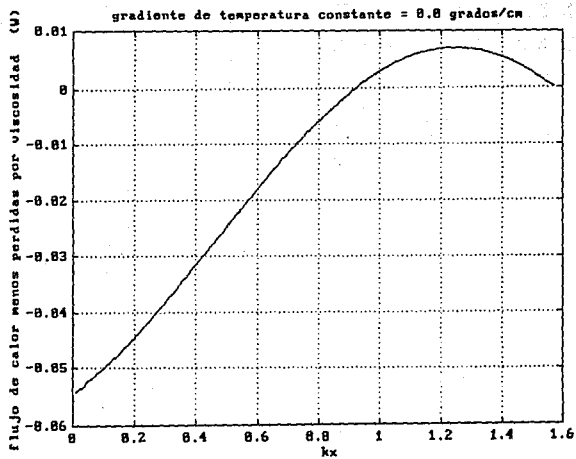


FIGURA 4.10

- 4.2.2.7.- Aislante térmico.

Como se mencionó antes, fue necesario aislar térmicamente la parte del refrigerador comprendida del frasco Dewar hasta la región que contenía "el conjunto de placas", justo por debajo del intercambiador de calor caliente. La finalidad fue evitar que el calor del medio ambiente fluyera hacia la región que se pretendía enfriar. Como aislantes se utilizaron bloques de poliestireno expandido (unicel), a los cuales se les hizo una perforación por donde se introdujo el tubo que formaba el resonador. La perforación de los bloques fue de un diámetro menor al diámetro exterior del resonador, para evitar que hubiera espacios de aire entre el tubo y el poliestireno. Los diferentes bloques fueron cuidadosamente pegados con resistol "blanco 850". En las partes donde el poliestireno era más delgado, tenía un espesor de aproximadamente 3 cm. El frasco Dewar también fue cubierto por poliestireno para prevenir cualquier transmisión de calor hacia el interior del resonador.

- 4.2.3.- FUNCIONAMIENTO.

Se pretendía probar el refrigerador termoacústico y observar su funcionamiento; y sobre todo, comprobar que efectivamente se obtenía una disminución en la temperatura del interior del resonador.

- 4.2.3.1.- Termopares para medir la temperatura en el interior del refrigerador.

Para conocer la temperatura en el refrigerador, se colocaron 5 termopares (de cromel-constantán) en diversos puntos (ver fig. 4.8): en la parte central de cada intercambiador de calor (el

termopar 1 en el intercambiador caliente y el termopar 2 en el intercambiador frío); sobre la parte exterior de la pared del tubo delgado a la mitad de su longitud (termopar 3); en el interior del resonador justo en la base del tubo delgado (termopar 4); y en el interior del frasco Dewar, cerca del fondo (termopar 5). Cuatro termopares en serie de cromel-constantán se pegaron a la hoja de acetato (que formaba el "conjunto de placas"); así que por cada grado centígrado de diferencia de temperatura, entre el extremo superior y el extremo inferior de la hoja, se obtenía un voltaje de 240 microvolts (a este grupo de cuatro termopares en serie se le llamó el "termopar 6").

- 4.2.3.2.- Desarrollo.

Una vez armadó el refrigerador, con un analizador de señales (Brüel and Kjaer tipo 2034) y un micrófono de prueba (Brüel and Kjaer tipo 4170) se determinó la frecuencia de resonancia que debía de usarse en el refrigerador. Esto se hizo colocando la punta del micrófono de prueba en el interior del resonador, justo por encima de las láminas del intercambiador de calor caliente. Se excitó la bocina con ruido blanco y se obtuvo un espectro de frecuencias promediado en el tiempo con el analizador de señales (fig 4.11). Los picos de este espectro de frecuencias indican las frecuencias de resonancia. Como puede observarse, uno de estos picos está alrededor de los 100 Hz tal como se había planeado (corresponde a 104 Hz).

Con el mismo analizador de señales, se generó una señal senoidal de 102 Hz, que después de ser amplificada llegaba a la bocina para generar la onda sonora. Se pudo determinar que la onda sonora que se obtenía de la bocina presentaba una distorsión pequeña, ya que los armónicos presentes tenían un nivel de presión sonora muy bajo. Cuando el nivel de presión sonora de la frecuencia fundamental era de 160.3 dB (encima del intercambiador de calor caliente), el armónico más alto tenía un nivel de presión sonora de

134.4 dB. En la fig. 4.12 se puede ver el espectro de frecuencias instantáneo (este espectro de frecuencias permaneció prácticamente sin cambio en el tiempo), donde se muestra la situación anterior; se puede ver el nivel de presión sonora de la frecuencia fundamental y de los primeros 6 armónicos.

Con la punta del micrófono de prueba en el interior del resonador del refrigerador, justo por encima del intercambiador de calor caliente, se incrementó el nivel de presión sonora hasta obtener un valor de 160.3 db. Se eligió este valor porque en él la bocina funcionaba muy bien, ya que la distorsión del sonido era muy pequeña y además el calentamiento de la bobina no era muy grande. Bajo estas condiciones, se midió la temperatura en cada uno de los 6 termopares a intervalos de tiempo de 5 minutos, durante la primera hora del funcionamiento del refrigerador. Cumplido este tiempo, se incrementó el nivel de presión sonora hasta llegar a 162.0 dB. Después de transcurridos otros 15 minutos (desde que se aumentó la intensidad del sonido) se volvió a medir la temperatura en los termopares ($t = 75$ min.). Posteriormente por fallas en la membrana de la bocina se decidió detener la prueba, pero se siguió midiendo la temperatura a intervalos de 4 minutos, hasta que se obtuvo prácticamente la misma temperatura en los termopares 3 y 4.

Adicionalmente, se midió la intensidad de la corriente eléctrica que circulaba por la bobina de la bocina y el voltaje que se le aplicaba, para determinar la potencia eléctrica que se administraba al refrigerador. Esto se hizo para un valor de 160.3 dB en el nivel de presión sonora medido con el micrófono de prueba.

Desafortunadamente, el termopar número 2 (colocado en el intercambiador de calor frío) no funcionó; seguramente se rompió uno de los alambres. Con los termopares restantes no hubo ningún problema.



Brüel & Kjær

Type 2034

Page No.

54

Sign.:

Meas.
Object:

Comments:

W2 AUTO SPEC CH. A [] INPUT MAIN Y: 11.4dB
Y: 14.1dB /1.00U RMS 80dB X: 102Hz
X: 0Hz + 1.6kHz LIN
SETUP W18 #A: 150 ΔY :

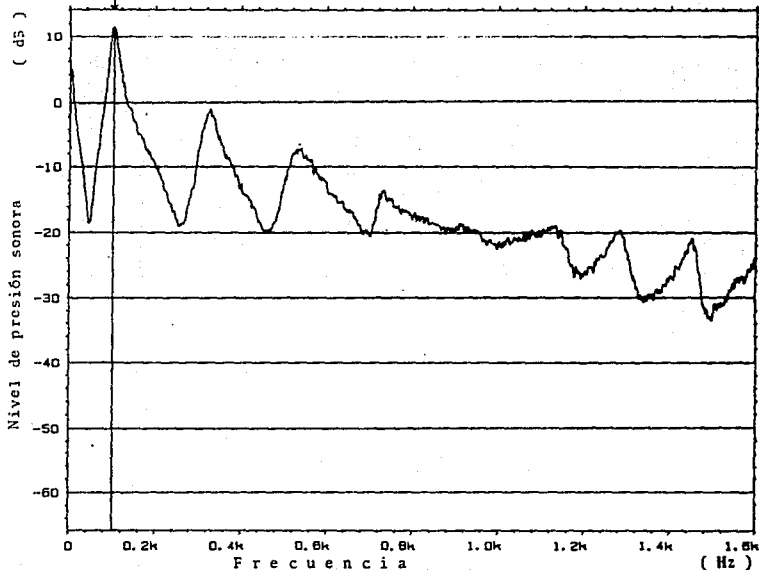


FIGURA 4.11



Brüel & Kjær

Type 2034

Page No.
55

Sign.:

Meas.
Object:

Comments:

W11 INST SPEC CH. A MAG
Y: 165.0dB /20.1µV RMS **160dB**
X: 0Hz + 800Hz LIN
SETUP W22*

MAIN Y: 160.3dB
X: 102Hz

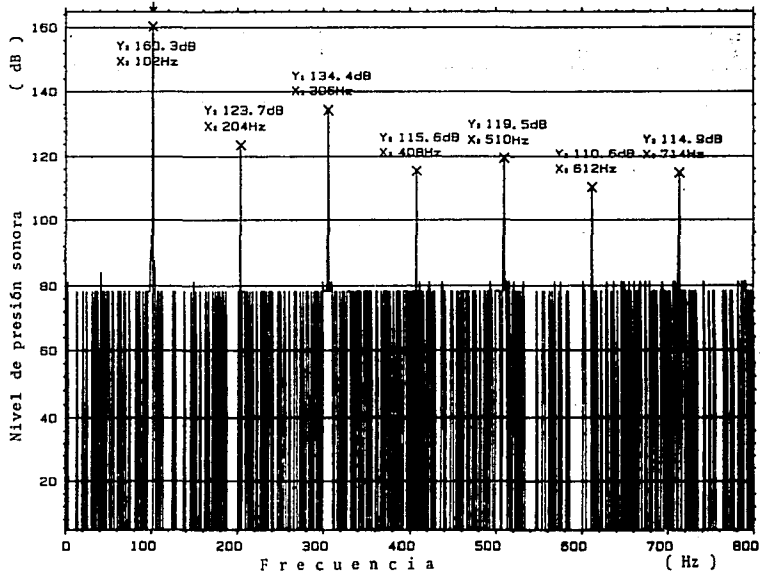


FIGURA 4.12

120

-4.2.3.3.- Resultados experimentales.

Los valores del voltaje en los termopares, obtenidos durante la primera hora de la prueba de funcionamiento del refrigerador, aparecen en la tabla siguiente:

No. DE TERMO- PAR	VOLTAJE EN LOS TERMOPARES (MICROVOLTS)											
	(5)	(10)	(15)	(20)	(25)	(30)	(35)	(40)	(45)	(50)	(55)	(60)
1	76	74	75	64	75	77	76	77	83	98	91	98
3	-87	-170	-251	-308	-334	-361	-375	-390	-391	-393	-393	-395
4	-35	-75	-130	-146	-165	-189	-186	-210	-206	-207	-216	-211
5	-20	-41	-72	-76	-82	-87	-104	-116	-110	-114	-124	-130
6	1375	1614	1808	1912	1982	2035	2075	2099	2128	2156	2172	2189

TABLA 15: Voltaje en los termopares colocados en diferentes partes del refrigerador termoacústico, a intervalos de tiempo de 5 minutos. Los números de mayor tamaño encerrados entre paréntesis, indican el tiempo en el cual se tomó la medida. El inicio de la prueba corresponde al tiempo igual a cero (en ese momento la temperatura del interior del refrigerador era la misma que la temperatura del medio ambiente). Durante los 60 minutos el nivel de presión sonora fue de 160.3 dB encima del intercambiador de calor caliente.

Con el nivel de presión sonora de 160.3 dB, se midió la corriente eléctrica que circulaba por la bobina de la bocina (I_b), y el voltaje (V_b) que se le aplicaba. Los valores obtenidos son los siguientes

$$I_b = (1.10 \pm 0.01) \text{ A} \quad V_b = (20.7 \pm 0.1) \text{ V} \quad (4.3)$$

Para conocer cual fue el consumo de energía eléctrica de la bocina, con los datos anteriores, se determinó la potencia eléctrica que se le entregaba, resultando un valor de

$$W = (22.8 \pm 0.3) \text{ watts} \quad (4.4)$$

A los 60 minutos de iniciada la prueba, se incrementó el nivel de presión sonora a 162.0 dB (encima del intercambiador de calor caliente). Después de 15 minutos de seguir funcionando (es decir, al tiempo t=75 minutos) con el nivel de presión sonora anterior (162 dB) el voltaje en los termopares fue el siguiente:

No. DEL TERMOPAR:	1	3	4	5	6
VOLTAJE EN EL TERMOPAR: (mV)	135	-462	-235	-147	2550

TABLA 16: Voltaje en los termopares colocados en el refrigerador. Nivel de presión sonora de 162.0 dB. Tiempo igual a 75 minutos.

Finalmente, transcurridos los 75 minutos, se apagó la bocina y se siguió midiendo el voltaje en los termopares. Los resultados obtenidos son los siguientes:

No. DE TERMO-PAR	VOLTAJE EN LOS TERMOPARES (MICROVOLTS)					
	(t=0)	(t=4)	(t=8)	(t=12)	(t=16)	(t=20)
1	135	-40	-56	-71	-80	-86
3	-452	-431	-409	-354	-339	-314
4	-235	-275	-301	-315	-302	-310
5	-147	-150	-178	-191	-215	-268
6	2550	1670	1212	919	800	-570

TABLA 17: Voltaje en los termopares colocados en el refrigerador. Los valores entre paréntesis corresponden al tiempo medido en minutos. El tiempo t=0 fue el momento en el cual se desconectó la bocina, cuando el nivel de presión sonora era de 163.0 dB.

Durante la prueba realizada, la temperatura del medio ambiente fue de 20.0 ± 0.5 grados centígrados.

- 4.2.3.4.- Analisis de resultados.

Con el dato de la temperatura del medio ambiente, se determinó por medio de una interpolación de los valores dados en tablas, la temperatura que existía en la punta de cada termopar para los resultados de la tabla 15. Estos valores tiene una incertidumbre de más menos medio grado centígrado, correspondiente a una estimación del mayor error cometido. Los valores obtenidos son los siguientes:

No. DE TERMO- PAR	TEMPERATURA EN LOS TERMOPARES (GRADOS CENTÍGRADOS)											
	(5)	(10)	(15)	(20)	(25)	(30)	(35)	(40)	(45)	(50)	(55)	(60)
1	21.3	21.2	21.3	21.1	21.3	21.3	21.3	21.3	21.4	21.6	21.5	21.6
3	18.5	17.2	15.8	14.9	14.4	14.0	13.7	13.5	13.5	13.4	13.4	13.4
4	19.4	18.7	17.8	17.6	17.2	16.8	16.9	16.5	16.6	16.5	16.4	16.5
5	19.7	19.3	18.8	18.7	18.6	18.5	18.3	18.1	18.2	18.1	17.9	18.2
6	5.7	6.7	7.5	8.0	8.3	8.5	8.6	8.7	8.9	9.0	9.1	9.1

TABLA 18: Temperatura en los termopares colocados en diferentes partes del refrigerador termoacústico, correspondientes a los datos de la tabla 15. La temperatura del medio ambiente fue de 20.0 ± 0.5 grados centígrados. El termopar número 6 media la diferencia de temperatura entre los extremos de la espiral de acetato (entre los extremos de "las placas").

Como puede observarse en la tabla 18, la temperatura en el interior del refrigerador efectivamente disminuyó, demostrando que es posible enfriar una región empleando una onda sonora para ello. También se puede ver que la temperatura en el intercambiador de calor caliente estuvo alrededor de 1.5 grados centígrados arriba de la temperatura ambiente. Esta diferencia es debido a que el calor fluye por conducción, a través del intercambiador, desde el interior del resonador hacia el medio ambiente.

La temperatura medida con el termopar 3 (localizado sobre la pared del tubo delgado de cobre, a la mitad de su longitud) estuvo de acuerdo con la diferencia de temperatura entre el extremo caliente y el extremo frío "de las placas"; ya que si se suma la temperatura del termopar 3 con el intervalo de temperatura del termopar 6, se obtiene un valor ligeramente mayor (alrededor de un grado centígrado) a la temperatura del termopar 1 (localizado en el intercambiador caliente). Lo anterior indica que existió un gradiente de temperatura pequeño desde la parte inferior de la espiral de acetato hasta la parte media del tubo delgado de cobre que forma al resonador. Esto muestra que la conducción del calor a través de las paredes del resonador en esa región fue muy buena.

Los valores de la temperatura en los termopares, correspondientes a la tabla 17, aparecen en la tabla siguiente:

No. DE TERMO- PAR	TEMPERATURA EN LOS TERMOPARES (GRADOS CENTÍGRADOS)					
	(t=0)	(t=4)	(t=8)	(t=12)	(t=16)	(t=20)
1	22.3	19.3	19.1	18.8	18.7	18.6
3	12.5	12.8	13.2	14.1	14.3	14.8
4	16.1	15.4	15.5	14.7	15.0	14.8
5	17.5	17.5	17.0	16.8	16.4	15.5
6	10.6	7.0	5.1	3.8	3.3	2.4

TABLA 19: Temperatura correspondiente a los valores del voltaje en los termopares de los datos de la tabla 17.

La temperatura en el frasco Dewar y en la parte inferior del tubo de cobre, disminuyó demasiado lentamente mientras estuvo presente la onda sonora, según se observa de la tabla 18. Esto posiblemente se debió a la presencia de la lámina de cobre colocada en el interior del frasco Dewar con la finalidad de que condujera

el calor desde la parte más baja del resonador hasta la parte inferior del tubo delgado de cobre. La presencia de esta lámina posiblemente originó un flujo hidrodinámico de calor que se dirigió hacia la pared inferior del resonador (el antinodo más cercano a ella) que fue mayor al flujo de calor debido a la conducción en su interior. El efecto del flujo hidrodinámico de calor fue importante en esta lámina de cobre debido a su espesor sumamente pequeño (0.17 mm) y la presión acústica tan alta que existió en el interior del resonador. Esta idea es apoyada por los datos de la tabla 19, donde se aprecia que cuando la onda sonora desapareció, entonces el frasco Dewar se enfrió más rápidamente que cuando la onda estuvo presente.

- 4.2.4.- CONCLUSIONES.

En términos generales se cumplió con el objetivo planteado originalmente: comprobar que es posible enfriar una región utilizando una onda sonora. Los valores del voltaje en los termopares son lo suficientemente grandes para poder afirmar que la diferencia de temperatura entre el interior del resonador y el exterior se deben efectivamente a una reducción de la temperatura en el interior y no a variaciones en la temperatura del medio ambiente.

En base al cuidadoso diseño de este refrigerador termoacústico y al laborioso trabajo de experimentación que lo antecedió, se puede afirmar que es necesario utilizar otro fluido como sustancia operante en lugar de aire, para obtener temperaturas menores a 15 grados centígrados, respecto a la temperatura ambiente, en el interior del resonador con un refrigerador similar. Temperaturas tales se podrían alcanzar incrementando el nivel de presión sonora; sin embargo, obtener más de 165 dB (encima del intercambiador de calor caliente) parece una tarea difícil; además, para presiones acústicas tan grandes, los efectos no lineales empezarían a ser importantes, lo que traería efectos nocivos como por ejemplo turbulencias.

CAPÍTULO V

"CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES"

Los objetivos básicos que se perseguían con el desarrollo de este trabajo, en lo general fueron cumplidos. Los resultados fueron bastante buenos si se consideran las limitaciones en tiempo y en recursos que se tienen para la elaboración de una tesis de licenciatura. Una buena cantidad del tiempo invertido se empleó en la búsqueda de materiales para la construcción de las máquinas termoacústicas. Se buscaron materiales disponibles que cumplieran con las condiciones requeridas y que no fueran costosos. Otro de los principales problemas a vencer consistió en encontrar un método adecuado para poder soldar las delgadas láminas de los intercambiadores de calor a las paredes del tubo de cobre con la separación sumamente pequeña que se requería. Conseguir una bocina adecuada, que produjera un nivel de presión sonora realmente grande (superior a los 155 dB en el antinodo de presión del resonador del refrigerador) y una onda sonora senoidal sin distorsiones significativas, fue otro de los grandes obstáculos. Ninguna de las bocinas disponibles fue adecuada, por lo que se decidió construir una. Después de varios intentos se obtuvo un resultado satisfactorio.

Lo más importante fue que se logró obtener una serie de conocimientos que sirven de base para la investigación posterior

del fenómeno termoacústico y la construcción de máquinas eficientes. Así mismo la experiencia adquirida fue bastante importante.

Las máquinas termoacústicas efectivamente ofrecen muchas ventajas sobre otras máquinas térmicas, por lo que deben de ser estudiadas más a fondo con la finalidad de darles alguna aplicación práctica. El hecho de que no requieran de partes mecánicas móviles y de que puedan trabajar con gases inertes, además de ser relativamente simples, las hacen muy atractivas como posibles sustitutos de los actuales medios de refrigeración en varias aplicaciones comerciales.

Respecto al refrigerador termoacústico construido, se le pueden hacer una serie de modificaciones con la finalidad de mejorarlo y hacerlo mucho más eficiente. Un avance considerable se lograría si se utiliza helio en lugar de aire como sustancia de trabajo. Este gas tiene una densidad mucho menor a la del aire, una conductividad térmica ligeramente mayor, y sobre todo una viscosidad sumamente pequeña (lo que reduce considerablemente las pérdidas) y además, un bajo número de Prandtl (condición necesaria para obtener una máquina termoacústica eficiente). Otra mejora consiste en el uso de ferrofluidos en la bocina que ayuden a disipar el calor generado por la bobina; ésto ayudaría a aumentar la eficiencia de la bocina, reduciendo las pérdidas de energía eléctrica y obteniendo un sonido más intenso.

El oscilador termoacústico puede utilizarse para generar energía eléctrica, como un ejemplo de una aplicación práctica. G. W. Swift⁽¹⁾ menciona que un oscilador como el mostrado en la figura 5.1, puede generar electricidad aprovechando las oscilaciones senoidales de la sustancia operante, si ésta es un conductor eléctrico. Propone el uso de sodio líquido, que tiene un número de Prandtl sumamente pequeño (alrededor de 0.02), una alta densidad, un coeficiente de expansión moderado y además una conductividad

eléctrica sumamente alta. El movimiento de este líquido conductor dentro del campo magnético da como resultado una corriente alterna.

El hecho de emplear un oscilador termoacústico como un generador de corriente eléctrica, traería varias ventajas, ya que se podría utilizar por ejemplo en zonas apartadas como en el mar, el desierto o en el espacio exterior.

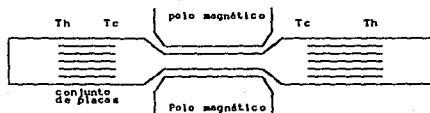


FIGURA 5.1.- Esquema de un oscilador termoacústico utilizado para generar energía eléctrica. El resonador debe de operar en su modo fundamental para que exista un antinodo de presión en cada uno de sus extremos y un antinodo de velocidad en el centro. T_h indica la temperatura mayor en el conjunto de placas y T_c la temperatura menor.

El estudio de las máquinas termoacústicas es relativamente reciente y promete obtener muchos resultados importantes sobre todo en cuanto a las aplicaciones prácticas. En los Estados Unidos se han empezado a formar grupos de trabajo, con la finalidad de estudiar este tipo de máquinas y de darles una serie de aplicaciones, en algunas universidades e institutos de investigación. Algunos de estos centros han obtenido resultados asombrosos; por ejemplo, G. W. Swift en "Los Alamos National Laboratory" y R. Radebaugh en el "Institute for Standards and Technology" en Boulder, Colorado,⁽²⁾ construyeron un refrigerador que alcanzaba una temperatura mínima de 89°K y fue capaz de bombear 5 W de calor de una temperatura fría de 120°K. Esto es una muestra del potencial de las máquinas termoacústicas.

A P É N D I C E 1

PÉRDIDAS DE ENERGÍA ACÚSTICA POR EFECTOS DE LA VISCOSIDAD Y DE LA CONDUCCIÓN TÉRMICA

Las pérdidas de energía de una onda sonora que más afectan el funcionamiento de las máquinas termoacústicas son debidas a la viscosidad y a la difusión térmica en el fluido, sobre todo cerca de una pared.

Las pérdidas de energía por la conducción del calor se deben a que las fluctuaciones de la presión en una onda sonora crean un aumento en la temperatura donde la presión se incrementa y una disminución donde la presión decrece. Tan pronto como se establece una diferencia en la temperatura del fluido, el calor fluye irreversiblemente de la región más caliente a la más fría y la onda sonora pierde energía. Las pérdidas por viscosidad se deben al rozamiento interno del fluido en movimiento.

- 1.- PÉRDIDAS DE ENERGÍA SONORA DEBIDO A LA VISCOSIDAD.

Las pérdidas de energía, por unidad de volumen de fluido, debido a la viscosidad, para una onda sonora que se mueve en el espacio libre, están dadas por la siguiente relación: ⁽¹⁾

$$D = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Sigma'_{ij} \right] = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \right]$$

(1)

donde Σ'_{ij} es el tensor de tensiones de la viscosidad⁽²⁾. Desarrollando las operaciones de la expresión anterior, ésta se transforma en la siguiente igualdad

$$D = (\mu + 4\eta/3)(\text{div}u)^2 + \eta|\text{rot}u|^2 - 4\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (2)$$

Para una onda sonora armónica plana que se propaga en la dirección "+x", $u=u(x)$, con lo que la ec. 2 se simplifica a

$$D = (\mu + 4\eta/3)|du/dx|^2 \quad (3)$$

- 2.- PÉRDIDAS DE ENERGÍA DE UNA ONDA SONORA ARMÓNICA PLANA EN EL ESPACIO ABIERTO.

- 2.1.- FLUCTUACIONES EN UN FLUIDO POR UNA ONDA SONORA ARMÓNICA PLANA.

Para el caso de una onda sonora armónica plana viajando en la dirección "+x", en un espacio sin obstáculos y fronteras, las oscilaciones en la presión y en la velocidad se describen respectivamente por $p'=P_A \cdot \exp(ikx - i\omega t)$ y $u'=p'/(\rho c)\hat{x}$. Si la conductividad térmica del fluido es pequeña al igual que la frecuencia de la onda sonora (una muy buena aproximación es para frecuencias menores a los 5000 Hz), entonces la temperatura oscilará con una amplitud (T') aproximadamente igual a $T = \beta p'/(\rho c_p)$ ⁽³⁾. Así, para este tipo de onda se tiene

$$p = p_m + P_A e^{i(kx - \omega t)} \quad (4a)$$

$$u = \hat{x} P_A / (\rho_m c) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4b)$$

$$T = T_m + T_m \beta P_A / (\rho_m c_p) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4c)$$

$$\rho = \rho_m + \rho_s e^{i(kx - \omega t)} \quad (4d)$$

$$s = s_m + s_s e^{i(kx - \omega t)} \quad (4e)$$

donde el subíndice m representa los valores de las variables en condiciones ambientales, los cuales se supondrán constantes. Como se observa, se ha considerado $u_m = 0$.

- 2.2.- PÉRDIDAS DE ENERGÍA.

Considerando un elemento de volumen, el aumento en la cantidad de calor en su interior, por unidad de volumen y de tiempo ($\rho T ds/dt$), se debe a la difusión térmica como consecuencia de un gradiente de temperatura ($\text{div}(K \text{grad}(T))$), y al calor generado por fricción viscosa (D). Así,

$$\rho T \frac{ds}{dt} = D + \text{div}(K \text{grad}(T)) = D + \frac{K}{T} |\text{grad} T|^2 + T \text{div} \left(\frac{K}{T} \text{grad} T \right) \quad (5)$$

EL incremento en la energía calorífica por unidad de volumen y de tiempo ($\rho T ds/dt$), en un fluido aislado térmicamente, en el que se mueve una onda sonora, debe de ser igual a la energía perdida por unidad de volumen y de tiempo (E_L) de esa onda. Por lo tanto, utilizando la ecuación 3 para sustituir "D", y las ecuaciones 4 para reemplazar T , ρ y s , en la ecuación 5; el promedio en el tiempo de la potencia perdida en la onda sonora por unidad de volumen, a primer orden, resulta

$$\overline{E_L} = \overline{\rho_m T_m ds/dt}$$

$$\begin{aligned} \overline{E_L} &= (\mu+4\eta/3) (1/2) |kPA / (\rho=c) |^2 + (K/T_m) [T_m\beta / (\rho=c_p)]^2 (1/2) |kPA|^2 \\ &= \left[(\mu+4\eta/3) + (K/T_m) (T_m\beta c)^2 / c_p^2 \right] (1/2) |kPA / (\rho=c) |^2 . \end{aligned}$$

La barra horizontal indica el promedio en el tiempo. El término $T\text{div}(K/T)\text{grad}T$ se anula al obtener dicho promedio.

Para ondas armónicas planas, la intensidad acústica es⁽⁴⁾

$$I = P\lambda^2 / (2\rho=c)$$

por lo que la fracción de la energía acústica perdida por unidad de longitud es

$$2\alpha \equiv \overline{E_L} / I \approx \left[(\mu+4\eta/3) + (K/T_m) (T_m\beta c / c_p)^2 \right] k^2 / (\rho=c) \quad (5')$$

donde "α" es llamado el factor de atenuación para la onda acústica.⁽⁵⁾

Para el aire en condiciones normales del medio ambiente $\eta=0.00018 \text{ gr/cm}\cdot\text{s}$, $\rho_m=1.21\times 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$, $c=34300 \text{ cm/s}$, $T_m\beta=1$, $K=2.4408\times 10^3 \text{ erg/(cm}\cdot\text{K}\cdot\text{s)}$, $c_p=1.0046\times 10^7 \text{ erg/gr}\cdot\text{K}$, $T_m=298\text{K}$. Así, para una onda sonora de 1000 Hz, α es aproximadamente igual a $1.4\times 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$; por lo que se observa que en el espacio abierto, las ondas sonoras planas pierden muy poca energía por viscosidad y por difusión térmica.

- 3.- PÉRDIDAS DE ENERGÍA DE UNA ONDA SONORA ARMÓNICA PLANA CERCA DE UNA PARED.

Las oscilaciones de la presión descritas por la ec. 4a, sólo son válidas cuando los efectos de la viscosidad y de la difusión térmica son muy pequeños. Cuando una onda sonora se mueve cerca de una pared estos efectos son importantes.

Para hacer el análisis de las pérdidas de energía de una onda sonora cerca de una pared, considérese como antes a las variables acústicas como la suma de su valor en condiciones ambientales (representado por la variable con el subíndice "m" y considerado como constante) más los cambios producidos por la perturbación sonora (representados por la variable primada). De este modo, la presión será $p = p_m + p'$. Para el caso de la velocidad de partícula del fluido, el valor ambiental se tomará como cero y las variaciones se representarán por la letra u.

- 3.1.- LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES PARA UN FLUJO LAMINAR Y PARA UN FLUJO ROTACIONAL.

A primer orden, la ecuación de continuidad está dada por:

$$\partial \rho' / \partial t + \rho_m \operatorname{div}(u) = 0 \quad (6)$$

y la ecuación de Navier-Stokes⁽⁶⁾ por

$$\rho_m \partial u / \partial t = -\nabla p' + \eta \nabla^2 u + (\mu + \eta/3) \nabla(\nabla \cdot u) \quad , \quad (7)$$

o bien, utilizando la igualdad $\nabla^2 = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla \times (\nabla \times)$

$$\rho_m \partial u / \partial t = -\nabla p' + (\mu + 4\eta/3) \nabla(\nabla \cdot u) - \mu \nabla \times (\nabla \times u) \quad . \quad (7')$$

Separando el vector velocidad en dos componentes, una asociada a un flujo laminar (u_l) y la otra asociada a un flujo rotacional (u_r), tal que $u = u_l + u_r$, $\operatorname{rot}(u_l) = 0$ y $\operatorname{div}(u_r) = 0$; se obtienen dos formas para la ecuación de Navier-Stokes, una correspondiente a u_l y la otra a u_r :

$$\rho_m \partial u_l / \partial t = -\nabla p' + (\mu + 4\eta/3) \nabla^2 u_l \quad (8a)$$

$$\rho_m \partial u_r / \partial t = -\mu \nabla \times (\nabla \times u_r) \quad . \quad (8b)$$

- 3.2.- LA ECUACIÓN DE ONDA MODIFICADA.

A partir de la termodinámica, se tienen las siguientes relaciones (ver demostraciones en el apéndice):

$$\rho' = (\partial\rho/\partial p)_T p' + (\partial\rho/\partial T)_p T' = \gamma\rho\kappa_s(p' - \alpha T') \quad (9)$$

$$s' = (\partial s/\partial T)_p T' + (\partial s/\partial p)_T p' = \frac{c_p}{T_s} \left(T' - \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} p' \right) \quad (10)$$

donde $\kappa_s = 1/(\rho\alpha c^2)$ y $\alpha = \beta/k_T$ ⁽⁷⁾ (κ_s es la compresibilidad adiabática y k_T la compresibilidad isotérmica).

El vector flujo de calor (\dot{q}) está determinado por la expresión $\dot{q} = -K \text{grad}(T)$. Integrando esta expresión sobre una superficie cerrada S_0 , resulta

$$\oint_{S_0} \dot{q} \cdot ds = \oint_{S_0} -K \nabla T \cdot ds = \oint_{V_0} -K \nabla^2 T \, dV$$

El lado izquierdo es el cambio de calor por unidad de tiempo (dQ/dt) en el interior del volumen V_0 encerrado por la superficie S_0 . Así que el cambio de calor por unidad de tiempo y de volumen es

$$\rho T ds/dt = -K \nabla^2 T$$

y tomando una expansión a primer orden, resulta

$$T_s \partial s' / \partial t = \frac{1}{\rho_s} K \nabla^2 T' \quad (11)$$

Eliminando u de las ecuaciones 6 y 8a, resulta

$$\nabla^2 p' = \left[\partial^2 / \partial t^2 - (1/\rho_s) (\mu - 4\eta/3) \nabla^2 \partial / \partial t \right] \rho'$$

y sustituyendo ρ' por la ec. 9

$$\nabla^2 p' = \gamma/c^2 \left[\partial^2 / \partial t^2 - (1/\rho_s) (\mu - 4\eta/3) \nabla^2 \partial / \partial t \right] (p' + \alpha T') \quad (12)$$

Esta última es una ecuación de onda, modificada por los efectos de la conducción térmica y la viscosidad. Si no hay conducción térmica, entonces $\gamma(p'+\alpha T')$ debería ser igual a p' y si además no hubiera viscosidad, μ y η serían cero, con lo que se obtendría la ecuación de onda simple. Si la conductividad fuera infinita, T' debería ser cero y se tendría un proceso isotérmico. Así, existe una onda que corresponde a un proceso cercanamente adiabático que cumple con la ecuación 12, en la cual, la velocidad de propagación tiene una parte real igual a c (la velocidad adiabática) y una pequeña parte imaginaria relacionada con las pérdidas de energía. Así mismo, existe otra onda que cumple con la ecuación de onda modificada, que corresponde a un proceso donde predomina la conducción térmica en la cual p' es pequeño comparado con $\alpha T'$ y la velocidad de onda es proporcional a $(i)^{1/2}$ por lo que su atenuación es rápida, como se verá más adelante.

En base a lo anterior se harán las aproximaciones primero a un proceso prácticamente adiabático y luego a un proceso prácticamente isotérmico para resolver la ecuación de onda modificada (ec. 12).

Para obtener una expresión para la velocidad del fluido relacionada con las oscilaciones de la presión de la ecuación de onda modificada, de la ecuación de continuidad (ec. 6) se despeja $\text{div}(u_i)$ y se sustituye en la ec. 8a, y además, se remplace ρ' utilizando la ec. 9, con lo que resulta

$$\rho_m \partial u_i / \partial t = - \nabla \left[p' + (\gamma A / c) \frac{\partial}{\partial t} (p' - \alpha T') \right] \quad (13)$$

donde $\lambda = (\mu + 4\eta/3) / (\rho_m c)$. (14)

Para poder resolver la ecuación de onda modificada, es necesario obtener una relación entre las variaciones de la presión y las variaciones de la temperatura; para ello se utiliza la ec. 10 para sustituir s' en la ec. 11, obteniendo

$$Bc \nabla^2 T' = \frac{\partial}{\partial t} [T' - (\gamma - 1)p' / (\alpha \gamma)] \quad (15)$$

donde $B = K / (\rho_0 c_p c) \quad (16)$

- 3.3.- PROCESO CERCANAMENTE ADIABÁTICO Y LA ONDA DE PROPAGACIÓN.

Para el caso cercanamente adiabático, se propone que p' satisfice

$$\nabla^2 p' = -k^2 p' \quad \partial p' / \partial t = -i\omega p' \quad \text{con } k \approx \omega / c$$

Entonces, sustituyendo las condiciones anteriores en la ec. 15 y utilizando una aproximación a primer orden, se tiene

$$T' \approx \frac{\gamma - 1}{\alpha \gamma} (1 - iB\omega/c) p'$$

Sustituyendo T' de la expresión anterior en 12 resulta

$$k^2 \approx (\omega/c)^2 [1 - A\omega/c + i\omega B(\gamma - 1)/c]$$

Sustituyendo los resultados anteriores para T' y k , en 13 se obtiene u en términos de p' , y en 9 se obtiene ρ' también en función de p' . De este modo se obtiene una serie de ecuaciones que relaciona a p' con las demás variables para el caso de una onda sonora prácticamente adiabática en la que se consideran las pérdidas por difusión de calor y por viscosidad; estas ecuaciones son las siguientes

$$k_p^2 \approx (\omega/c)^2 [1 - A\omega/c + i\omega B(\gamma - 1)/c]$$

$$\nabla^2 p'_p = -k_p^2 p'_p \quad \partial p'_p / \partial t = -i\omega p'_p \quad c^2 = 1 / (\rho_0 k_s)$$

$$T'_p \approx \frac{\gamma - 1}{\alpha \gamma} (1 - iB\omega/c) p'_p \quad u|_p = [1 / (i\omega \rho_0) - A / (\rho_0 c)] \nabla p'_p$$

$$\rho'_p \approx (1/c^2) [1 + i(\gamma - 1)\omega B/c] p'_p \quad (17)$$

La onda sonora que cumple con las ecuaciones 17 será llamada la "onda de propagación". La letra "p" en el subíndice, sirve para indicar que esas variables se refieren a la "onda de propagación". Para este tipo de onda, las oscilaciones en la presión tendrán la forma $p'_p = P_0 \cdot \exp(ik_p x - i\omega t)$ (con P_0 constante) y como se mencionó antes, las fluctuaciones que produce en el fluido son procesos cercanamente adiabáticos. Puede verse que su atenuación por efectos de viscosidad y por conducción calorífica son muy pequeños debido a que la parte imaginaria de k_p tiene un valor mucho menor a la unidad ($B(\gamma-1)/\lambda \ll 1$) y la parte real un valor cercano a uno (ver ecs. 14 y 16, así como el párrafo siguiente a la ec. 5').

- 3.4.- PROCESO CERCANAMENTE ISOTÉRMICO Y LA ONDA TÉRMICA.

Para el segundo tipo de onda, se considera una transferencia de calor alta por lo que el proceso es cercanamente isotérmico y en tal caso p' es pequeño comparado con $\alpha T'$.

Considerando que $\nabla^2 T' = -k^2 T'$, $\partial T' / \partial t = -i\omega T'$ y substituyendo estas relaciones en la ec. 15, resulta, a primer orden,

$$k^2 \approx i\omega / (Bc)$$

Sustituyendo esta relación en 12 se obtiene la magnitud p'

$$p' = i\alpha\omega\tau/c [B-A]T'$$

y con las dos ecuaciones anteriores se determina: u , al sustituirlas en la ec. 13 y ρ' , al sustituirlas en la ec. 9. Reuniendo los resultados anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones que relacionan las variables acústicas con T' para una onda que se propaga en forma cercanamente isotérmica:

$$k_h^2 \approx i\omega/(2c) \quad \nabla^2 T'_h = -k_h^2 T'_h \quad \partial T'_h / \partial t = -i\omega T'_h$$

$$p'_h = i(\alpha\gamma/c)(B-A)T'_h \quad u_{1h} \approx [\alpha\gamma B/(\rho_0 c)] \nabla T'_h$$

$$p'_h = (-\alpha\gamma/c^2) \left[1 - (i\gamma\omega/c)(B-A) \right] T'_h \quad (18)$$

Una onda sonora que cumple con las ecuaciones 18 será llamada la "onda térmica". La letra "h" en el subíndice sirve para indicar que esas variables se refieren a la "onda térmica", para la cual las oscilaciones de la presión son de la forma

$$p'_h = i(\alpha\gamma/c)(B-A)T_0 \cdot e^{i(k_h x - \omega t)}$$

donde T_0 es una constante. Substituyendo el valor de k_h , utilizando el resultado de 18, la ecuación anterior se transforma en

$$p_1 = i(\alpha\gamma/c)(B-A)T_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{(1+i)x(\omega/(2Bc))^{1/2}} \quad (18')$$

Se puede ver de la ec. 18', que para este tipo de onda se tiene una rápida atenuación (típica de la difusión de calor) debido a que la cantidad $\omega/(2Bc)$ es mucho mayor a la unidad (ver ec. 16 y el párrafo siguiente a la ec. 5' para obtener los valores numéricos en el caso del aire).

- 3.5.- LA VISCOSIDAD Y LA ONDA DE ESFUERZO.

El flujo rotacional, relacionado con u_r , no involucra cambios de densidad y presión (por lo menos a primera aproximación) pues $\text{div} u_r = 0$. Este flujo es importante sólo cerca de una frontera, por los efectos de rozamiento, lo cual produce movimientos perpendiculares a la superficie.

Una posible expresión para la componente en la dirección "y" de u_r (u_{ry}), que cumpla con la ec. 8b y que además $\partial(u_{ry})/\partial y = 0$ (necesario para cumplir la condición $\text{div} u_r = 0$), es la siguiente:

$$u_{ry} = A \exp(ikr - i\omega t) .$$

Insertando esta expresión en la ec. 8b, resulta que

$$k_r^2 = i\omega\rho_m/\mu , \quad (19)$$

con lo cual una posible solución para este tipo de onda, que será llamada la "Onda de esfuerzo", es

$$u_{ry} = A \exp \left[\left(\omega\rho_m/(2\eta) \right)^{1/2} (i-1)x - i\omega t \right] . \quad (20)$$

Esta onda de esfuerzo tiene también una rápida atenuación, ya que el término $(\omega\rho_m/(2\eta))^{1/2}$ tiene un valor mucho mayor a la unidad.

- 3.6.- CAPAS LÍMITE.

Cerca de una pared, las pérdidas de energía por viscosidad y por difusión térmica de una onda sonora son importantes. La "onda térmica" está relacionada con las pérdidas por transferencia de calor y la "onda de esfuerzo" tiene que ver con las pérdidas por fricción debido a la viscosidad. Estas dos ondas son despreciables, de acuerdo a las ecuaciones 18' y 20, después de que ha recorrido una distancia igual a

$$\sqrt{\frac{2Bc}{\omega}} = \sqrt{\frac{2K}{\rho_m \omega C_p}} = \sqrt{\frac{2k}{\omega}} \quad \delta_k \quad \text{para la "onda térmica"}$$

$$y \quad \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_m \omega}} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} = \delta_v \quad \text{para la "onda de esfuerzo",}$$

(21)

donde δ_k es llamada la profundidad de penetración térmica, δ_v la profundidad de penetración viscosa (también llamadas capas límite)

y k es la difusividad térmica. Estas capas límite son una medida de la capa de fluido, junto a una pared, en la cual existe una buena transferencia de calor y de momentum entre la pared y la onda sonora.

Excepto para tubos capilares o para fluidos con una alta viscosidad o con una alta conductividad térmica, la "onda de propagación" describe adecuadamente una oscilación sonora en todas las partes del fluido fuera de las capas límite, las cuales tienen generalmente un espesor de fracciones de milímetro. Dentro de estas capas límite es necesario incorporar los efectos de la "onda térmica" y de "la onda de esfuerzo" para describir las pérdidas de energía, por viscosidad y por conducción de calor, de una onda sonora.

- 3.7.- CONDICIONES DE FRONTERA.

Utilizando los tres tipos de ondas mencionadas anteriormente, se pretende satisfacer las condiciones de frontera cerca de una pared.

Considérese una onda moviéndose en la dirección "x", junto a una superficie rígida localizada en el plano "xz", confinando la onda en la región $y \geq 0$. Se propone como solución general, para la "onda de propagación", la siguiente relación

$$p'p = \psi(x)f(y)e^{(-i\omega t)} \quad , \quad (22)$$

donde se debe de cumplir

$$d^2\psi/dx^2 = -kr^2\psi \quad d^2f/dy^2 = (kr^2 - k^2)f \quad . \quad (22')$$

Despreciando la atenuación en las oscilaciones de la temperatura para la "onda de propagación", la ecuación para $T'p$ (de 17), resulta

$$T'p \approx \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} \psi(x)f(y) e^{-i\omega t} \quad (23)$$

y utilizando la ecuación de Euler a primer orden ($\rho_m \partial u / \partial t = -\nabla p$), para determinar la velocidad, se obtiene

$$u_{px} \approx \frac{-i}{\omega\rho_m} (d\psi/dx) f e^{-i\omega t} \quad u_{py} \approx \frac{-i}{\omega\rho_m} (df/dy) \psi e^{-i\omega t} \quad (23')$$

En la frontera, la velocidad del fluido en contacto con la superficie debe ser cero ($u(y=0)=0$) y además, no debe haber variaciones en la temperatura ($(\partial T/\partial t)_{y=0}=0$) suponiendo que la conductividad térmica de la pared es más grande que la del fluido. Así, se propone como solución para la "onda térmica"

$$T'h = \psi(x)F_h(y) e^{-i\omega t} \quad (24)$$

$$\text{con} \quad F_h = B e^{ik_h x} \quad (24')$$

donde k_h es el número de onda para la "onda térmica", dada por la primera ecuación de 18, y B es una constante.

Utilizando la primera relación de 18 y las ecuaciones 24 y 24' para sustituirlas en la segunda ecuación de 18, se tiene

$$\nabla^2 T'h = \left[F_h (d^2\psi/dx^2) + \psi (d^2F_h/dy^2) \right] e^{-i\omega t} = -(2i/\delta k^2) T'h$$

y usando la primera de las ecuaciones de 22', para sustituir $d^2\psi/dx^2$ en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{d^2 F_h}{dy^2} = -\frac{2i}{\delta k^2} F_h + k_r^2 F_h$$

Sin embargo k_r no puede ser más grande que $k_p = 2\pi/\lambda$ y como $\lambda \gg \delta k$, entonces $k_r^2 \ll (2/\delta k^2)$; por lo que despreciando k_r con respecto a $2/\delta k^2$, la ecuación anterior se simplifica a

$$\frac{d^2 F_h}{dy^2} = - \frac{2i}{\delta k^2} F_h \quad \text{y por lo tanto} \quad k^2 = \frac{2i}{\delta k^2} \quad (25)$$

Para determinar el valor de B de la ec. 24', se utiliza la condición de que la "onda térmica" debe cancelar las fluctuaciones de temperatura producidas por la "onda de propagación" (T'_p) en $y=0$, es decir

$$T'_p|_{(y=0)} = T'_h|_{(y=0)}$$

y en esta ecuación, sustituyendo T'_p utilizando la ec. 23 y sustituyendo T'_h utilizando la ec. 24, se obtiene

$$B = \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} f(0) \quad ,$$

con lo cual, la ec. 24' está dada por

$$F_h = - \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} f(0) e^{[(1/\delta_k)(i-1)Y]} \quad \text{y la ec. 24 queda como}$$

$$T'_h = - \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} f(0) \psi(x) e^{[(1/\delta_h)(i-1)Y]} e^{-i\omega t} \quad (26)$$

y usando la ecuación para la presión y la velocidad de 18, se tiene

$$p'_h = -(i\omega/c) (\gamma-1) (B-A) f(0) \psi(x) e^{[(1/\delta_h)(i-1)Y]} e^{-i\omega t} \quad (27)$$

$$u_{hy} = (1-i) (\gamma-1) (\omega\delta_k/[2\rho_0 c^2]) f(0) \psi(x) e^{[(1/\delta_h)(i-1)Y]} e^{-i\omega t}, \quad (27')$$

donde no se ha considerado la componente tangencial de la velocidad (u_{hx}) para la "onda térmica" debido a que $\delta_k \ll \lambda$ y a primer orden en δ_k , se pueden despreciar dicha componente, no así con la componente normal (u_{hy}), ya que el gradiente de F_h es grande, tal que $u_{hy} \gg p'_h/(\rho_0 c)$. En realidad u_{hy} es la componente en la dirección "y" para la onda térmica (h) de la velocidad laminar (u), con lo cual, la forma correcta de representar esta componente sería u_{hy} , pero se ha omitido el subíndice i para no complicar tanto la notación.

Se desea que el fluido en contacto con la pared no se mueva; para ésto, la componente en "x" de la velocidad rotacional (u_{rx}) se debe anular con la componente en "x" de la velocidad para la "onda de propagación" (u_{px}) en $y=0$, además se debe cumplir que $\text{div}(u_r)=0$. Así, una solución apropiada es

$$u_{rx} = \frac{i}{\omega\rho_m} (\partial\psi/\partial x) f_{(0)} e^{[ik_v y - i\omega t]}$$

$$u_{ry} = \frac{k_r^2}{\omega\rho_m k_v} \psi_{(x)} f_{(0)} e^{[ik_v y - i\omega t]}$$

Calculando $\nabla \times (\nabla \times u_r)$ se obtiene que es igual a $(k_v^2 + k_r^2)u_r$, que de acuerdo a la ec. 8b debe ser equivalente a $-(\rho_m/\mu)\partial u_r/\partial t$. En base a la expresión propuesta para u_r , $\partial u_r/\partial t = -i\omega u_r$, con lo cual

$$k_v^2 + k_r^2 = i\omega\rho_m/\mu = 2i/\delta_v^2$$

si $\lambda \gg \delta_v$, entonces $k_r \ll k_v$ y $k_v^2 \approx 2i/\delta_v^2$; con lo que se obtiene por último, para lá "onda de esfuerzo",

$$u_{rx} = \frac{i}{\omega\rho_m} (\partial\psi/\partial x) f_{(0)} e^{[(i-1)y/\delta_v - i\omega t]} \quad (28)$$

$$u_{ry} = (1-i) \frac{k_r^2}{2\omega\rho_m} \delta_v \psi_{(x)} f_{(0)} e^{[(i-1)y/\delta_v - i\omega t]} \quad (28')$$

Combinando las tres ondas ("de propagación", "térmica" y "de esfuerzo"), de acuerdo a la forma en que se cumplieron con las condiciones de frontera, se obtiene la serie de ecuaciones que predicen el comportamiento de una onda sonora cerca de una pared

$$p' \approx \psi_{(x)} f_{(y)} e^{(-i\omega t)} \quad d^2\psi/dx^2 = -k_r^2\psi \quad d^2f/dy^2 = [k_r^2 - (\omega/c)^2]f$$

$$T' \approx T'_p + T'_h = \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} \psi_{(x)} \left[f_{(y)} - f_{(0)} e^{[(i-1)y/\delta_k]} \right] e^{-i\omega t}$$

$$\rho' \approx \rho'_p + \rho'_h = \frac{1}{c^2} \psi_{(x)} \left[f_{(y)} - (\gamma-1) f_{(0)} e^{[(i-1)y/\delta_k]} \right] e^{-i\omega t}$$

$$u_x \approx u_{px} + u_{rx} = \frac{-i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[f(y) - f(0) e^{-(i-1)y/\delta_k} \right] e^{-i\omega t}$$

(29)

- 3.8.- PÉRDIDAS DE LA ENERGÍA, DEBIDO A LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA, CERCA DE UNA PARED.

De acuerdo con las ecuaciones de 29, dentro de las capas límite existe una compresibilidad efectiva (k_e) dada por

$$k_e = (1/\rho) (\partial \rho / \partial p) = (1/\rho_0) (\rho' / p') \approx \frac{1 + (\gamma-1) e^{-(i-1)y/\delta_k}}{\rho_0 c^2}$$

(30)

Para determinar las pérdidas de potencia de una onda sonora debido a la difusión calorífica cerca de una pared, se toma un elemento de volumen donde la energía almacenada por unidad de volumen, debido a la compresión acústica, es $(-1/V) (p_{total}) dV = (p_0 + p') (1/\rho_0) d\rho = (p_0 + p') (1/\rho_0) \rho'$. Así, la pérdida instantánea de energía por unidad de tiempo y de volumen está dada por

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p_0 + p'}{\rho_0} \rho' \right] \approx \frac{p_0 + p'}{\rho_0} \partial \rho' / \partial t = (p_0 + p') k_e \frac{\partial p'}{\partial t}$$

Sustituyendo k_e de la ec. 30 y p' de la ec. 29, en la expresión anterior y después obteniendo el promedio en el tiempo, se llega a

$$- i\omega \left[\frac{1 + (\gamma-1) e^{-(i-1)y/\delta_k}}{\rho_0 c^2} \right] (1/2) |p'|^2$$

Integrando esta ecuación sobre el eje y , en la región donde está la onda sonora, se obtiene la potencia perdida por unidad de área de la pared debido a la transferencia de calor (L_h). Pero sólo tiene

significado físico la parte real de ese resultado, así

$$L_h = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{-i\omega(\gamma-1)}{\rho a c^2} (1/2) |p'|^2 e^{(1-\gamma)y/\delta_k} dy \right\} .$$

Por lo tanto,

$$L_h = \frac{\omega}{4\rho a c^2} \delta_k (\gamma-1) |p'|^2 , \quad (31)$$

donde $|p'|$ representa la amplitud de la oscilación de la presión en la onda sonora.

Del integrando, observamos que las pérdidas de potencia por unidad de volumen debido a la difusión térmica, son cero en $y=0$, alcanzando un máximo en $y=\pi\delta_k/4$ y caen exponencialmente a cero como "y" tiende a infinito. En la integración se ha supuesto que δ_k es muy pequeño respecto a λ , por lo que p' es prácticamente independiente de "y" dentro de la capa límite, así que $|p'|^2$ puede considerarse constante sobre el eje "y".

- 3.9.-PÉRDIDAS DE LA ENERGÍA, DEBIDO A LA VISCOSIDAD, CERCA DE UNA PARED.

Las pérdidas de potencia por unidad de volumen están dadas por la función D definida en la ec. 2. En este caso, a primer orden, la velocidad tangencial a la superficie que produce un desplazamiento entre las capas del fluido es u_{rx} (ec. 28); así que $D \approx \eta (\partial u_{rx} / \partial y)^2$, y obteniendo el promedio en el tiempo $\bar{D} \approx (1/2) |\partial u_{rx} / \partial y|^2$. Por lo tanto, las pérdidas de potencia por unidad de área de la pared debido a la viscosidad (L_v) son

$$L_v = \int_0^{\infty} D dy \approx \int_0^{\infty} \mu \frac{1}{2} |\partial u_{rx} / \partial y|^2 dy$$

$$\begin{aligned}
 L_v &= \frac{1}{2} \eta \frac{1}{\rho_m^2 \omega^2} |\partial\psi/\partial x|^2 |f(0)|^2 (2/\delta^2) \int_0^\infty e^{-2y/\delta v} dy \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rho_m \omega \delta v^2 \frac{1}{\rho_m^2 \omega^2} |\partial\psi/\partial x|^2 |f(0)|^2 (2/\delta^2) (\delta v/2) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rho_m \omega \frac{1}{\rho_m^2 \omega^2} |\partial\psi/\partial x|^2 |f(0)|^2 \delta v . \quad (32)
 \end{aligned}$$

Pero $(u_{rx})(y=0) = -(u_{rx})(y=0)$, y si $\delta v \ll \lambda$, entonces $u_{rx} = (-u_{rx})(y=0)$ fuera de la capa límite; así, el cuadrado del valor rms de u_{rx} (u_r^2) es

$$u_r^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_m^2 \omega^2} |\partial\psi/\partial x|^2 |f(0)|^2 ,$$

por lo tanto, al sustituir este resultado en 32, se obtiene

$$L_v = \frac{1}{2} \rho_m \omega \delta v u_r^2 . \quad (33)$$

APÉNDICE 2

A).- DEMOSTRACIÓN DE $\beta^2 T = (\rho = c_p) = k_T - k_S$.

Considerando la ecuación de estado $V = V(p, T(p, S))$; entonces, por la regla de la cadena se tiene

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \quad (1)$$

Utilizando las relaciones

$$k_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \quad \text{y} \quad k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad (2)$$

para sustituir respectivamente el primer miembro y el primer término del segundo miembro de la ecuación 1, resulta

$$-Vk_S = -Vk_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$$

De la definición de β , se sustituye $\partial V/\partial T$ en la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$k_T - k_S = -\beta \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$$

Usando la definición de c_p para sustituir $\partial T/\partial S$ y la relación de Maxwell

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$$

para sustituir $\partial S/\partial p$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$k_T - k_S = \beta T_m / (mC_p) \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P ,$$

y utilizando la definición de β para eliminar la derivada parcial, finalmente se llega a

$$k_T - k_S = \beta^2 T_m / (\rho_m C_p) . \quad (3)$$

B).- DEMOSTRACIÓN DE $k_T / k_S = \gamma$.

Utilizando las definiciones para k_T y k_S , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{k_T}{k_S} &= \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_p}{C_v} = \gamma , \end{aligned}$$

por lo tanto $k_T / k_S = \gamma$. (4)

C).- DEMOSTRACIÓN DE $k_T - k_S = (\gamma - 1)k_S$.

$$k_T - k_S = [(k_T / k_S) - 1] k_S$$

y utilizando la ec. 4, es obvio que

$$k_T - k_S = (\gamma - 1)k_S \quad (5)$$

D).- DEMOSTRACIÓN DE $\beta^2 T_0 c^2 / c_p = \gamma - 1$.

De las ecs. 3 y 5 resulta claro que $\beta^2 T_0 / (\rho_0 c_p) = (\gamma - 1)k_S$. Se tiene que $1/k_S = c^2 \rho_0$, por lo cual, eliminando k_S de estas dos ecuaciones y dejando $\gamma - 1$ en el segundo miembro, se obtiene

$$\beta^2 T_0 c^2 / c_p = \gamma - 1 \quad (6)$$

E).- DEMOSTRACIÓN DE $dc = Tds + (p/\rho^2)dp$.

A partir de la ecuación de estado $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S, V)$ se tiene

$$d\mathcal{E} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right)_S dV = TdS - pdV \quad .$$

Además $dp = d(m/V) = -(m/V^2)dV$; así que sustituyendo dV en la expresión anterior y dividiendo el resultado entre la masa (m), se obtiene

$$dc = Tds + (p/\rho^2)dp \quad (7)$$

F).- DEMOSTRACIÓN DE

$$ds = (c_p/T_m) dT - (\beta/\rho_m) dp$$

De la ecuación de estado $S = S(T, p)$ se tiene

$$ds = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

donde se ha utilizado la relación de Maxwell

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

para sustituir $\partial S/\partial p$. Utilizando la definición de c_p y la definición de β para sustituir respectivamente $\partial S/\partial T$ y $\partial v/\partial T$ en la relación anterior, se obtiene

$$ds = (c_{pm}/T_m) dT - (\beta v) dp$$

y dividiendo esta ecuación entre la masa, resulta finalmente

$$ds = (c_p/T_m) dT - (\beta/\rho_m) dp \quad (8)$$

G).- DEMOSTRACIÓN DE $ds = \frac{c_p}{T_m} \left(dT - \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} dp \right)$ (donde $\alpha = \beta/k_T$).

De las ecs. 3 y 5 es fácil ver que $\beta T_m / (\rho_m c_p) = (\gamma-1) k_s / \beta$, y de la ec. 4 $k_s = k_T / \gamma$, con lo cual

$$\beta T_m / (\rho_m c_p) = (\gamma-1) / (\alpha\gamma)$$

y utilizando esta última expresión para sustituir β/ρ_m en la ec. 8,

después de factorizar el término c_p/T_n , se obtiene

$$ds = \frac{c_p}{T_n} \left(dT - \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma} dp \right) . \quad (9)$$

H).- DEMOSTRACIÓN DE $dp = (\gamma/c^2)dp - \beta\rho\alpha dT = \gamma\rho\alpha k_s(dp - \alpha dT) .$

A partir de la ecuación de estado $\rho = \rho(T,p)$, se obtiene

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT = \rho\alpha k_T dp - \beta\rho\alpha dT . \quad (10)$$

De la ec. 4 $k_T = \gamma k_s$ y utilizando la relación $k_s = 1/(c^2\rho\alpha)$, la ecuación anterior se simplifica a

$$d\rho = (\gamma/c^2)dp - \beta\rho\alpha dT , \quad (11)$$

La ecuación 10 es equivalente a

$$d\rho = \gamma\rho\alpha k_s \left[(k_T/(\gamma k_s))dp - (\beta k_s/\gamma)dT \right] ,$$

y utilizando la ec. 4, se obtiene finalmente

$$d\rho = \gamma\rho\alpha k_s (dp - \alpha dT) . \quad (12)$$

REFERENCIAS

- CAPÍTULO I.

- 1.- A. T. Jones. "Singing flames". J. Acoust. Soc. Am. 16 (254), 1945. Pág. 254.
- 2.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines". Am. J. Phys. 53 (2), 1985. Pág. 147.
- 3.- J. W. Strutt (Lord Rayleigh). "The Theory of Sound". Dover, New York 1945. Págs. 230-231.
- 4.- Referencia 3. Págs. 232-233.
- 5.- Referencia 3. Págs. 225-226, 228-231.
- 6.- K. T. Feldman, Jr. "Review of the literature on Sondhauss thermoacoustic phenomena". J. Sound Vib. 7 (1), 1968. Pág. 73.
- 7.- G. W. Swift. "Thermoacoustic engines". J. Acoust. Soc. Am. 84, 1988. Pág. 1149.
- 8.- Referencia 6. Págs. 76-77.
- 9.- Referencia 6. Pág. 76-78.
- 10.- Referencia 6 Págs. 78-81.
- 11.- Igual a la referencia 7.
- 12.- P. Merkli y H. Thomann. "Thermoacoustic effects in a resonance tube". J. Fluid Mech. 70 (161), 1975.
- 13.- N. Rott. "Thermally driven acoustic oscillations, part III: Second-order heat flux". Z. Angew. Math. Phys. 27, pag. 197, 1976.
- 14.- N. Rott. "Thermoacoustic heating at the closed end of an oscillating gas column". J. Fluid Mech. 145 (1), 1984.
- 15.- P. H. Ceperley. "A pistonless Stirling engine - The traveling wave heat engine". J. Acoust. Soc. Am. 66 (5), 1979.
- 16.- P. H. Ceperley. "Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine". J. Acoust. Soc. Am. 77 (3), pag. 1239, 1985.

17.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "An intrinsecally irreversible thermoacoustic heat engine". J. Acoust. Soc. Am. 74, pág. 153, 1983.

18.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "Understanding some simple phenomena in termoacoustics with applications to acoustical heat engines". Am. J. Phys. 53 (2), pág. 147, 1985.

19.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "Theory and calculations for an intrinsecally irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as primary working fluid". J. Acoust. Soc. Am. 78, pág. 767, 1985.

20.- G. W. Swift. "A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic tansducer". J. Acoust. Soc. Am. 83, pág. 350, 1988.

21.- T. Hofler. "Accurate acoustic power measurements with a high-intensity". J. Acoust. Soc. Am. 83, pág. 777, 1988.

22.- G. W. Swift. "Thermoacoustic engines". J. Acoust. Soc. Am. 84, pág. 1145, 1988.

23.- S. L. Garrett. "Thermoacoustic refrigerators". J. Acoust. Soc. Am. 91 (1), pág. 517, 1992.

- CAPÍTULO II.

1.- A. D. Pierce. Acoustics. Editorial McGraw-Hill. U.S.A. 1981. Capítulo 1, ec. 1-5.5.

2.- L. D. Landau y E. M. Lifshitz. Mecánica de fluidos. Editorial Reverté. Barcelona, España 1986. Ec. 15.6.

3.- Referencia 2. Ec. 49.4.

4.- Referencia 2. Ec. 2.15.

5.- Referencia 2. Ec. 49.2.

6.- Referencia 2. Ec. 15.3.

7.- H. B. Callen. Termodinámica. Primera versión en español. Editorial AC. España 1981. Ec. 5.40.

- CAPÍTULO III.

1.- Rohsenow and Hartnett. Handbook of heat transfer". Editorial McGraw-Hill. U.S.A. 1973.

- CAPÍTULO IV.

- 1.- L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders. Fundamentals of Acoustics. Editorial John Wiley and Sons. U.S.A. 1982. Ec. 5.39a.
- 2.- D. A. Bies y C. H. Hansen. Engineering Noise Control. Publicado por The Academy Division of Unwin Hyman Ltd. U. S. A. 1988. Tabla 3.1, pág. 53.
- 3.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines". Am. J. Phys. 53, 147 (1985).

- CAPÍTULO V.

- 1.- G. W. Swift. "Thermoacoustic engines". J. Acoust. Soc. Am. 84, 1988. Págs. 1169-1171.
- 2.- S. L. Garrett. "Thermoacoustic refrigerators". J. Acoust. Soc. Am. 91 (1), enero 1992. Pág. 518.

- APÉNDICE 1.

- 1.- P. M. Morse y K. U. Ingard. Theoretical Acoustics. Editorial McGraw-Hill. U.S.A.1968. Ec. 6.4.10.
- 2.- L. D. Landau y E. M. Lifshitz. Mecánica de fluidos. Editoria Reverté. Barcelona, España 1986. Ec. 15.3.
- 3.- A. D. Pierce. Acoustics. Editorial McGraw-Hill. U.S.A. 1981. Capítulo 1, sección 1.5.
- 4.- L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders. Fundamentals of Acoustics. Editorial John Wiley and Sons. U.S.A. 1982. Ec. 5.39A.
- 5.- Referencia 1. Ec. 6.4.14.
- 6.- L. D. Landau y E. M. Lifshitz. Mecánica de fluidos. Editoria Reverté. Barcelona, España 1986. Ec. 15.6.
- 7.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori. "Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines". Am. J. Phys. 53 (2), 1985. Pág. 153.