00384

2

2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias
División de Estudios de Posgrado

ACERCA DE DIMENSIONES EN CATEGORIAS DE MODULOS

TESIS
Que para recibir el grado de
DOCTOR en Ciencias (Matemáticas)

presenta
JAIME CASTRO PEREZ

México, D.F, 1992

INDICE

INTRODUCCION

Los conceptos de descomposición primaria y dimensión de Krull fueron originalmente definidos en la categoría de anillos conmutativos, posteriormente se extendieron a anillos no conmutativos y finalmente a categorías de módulos sobre anillos no conmutativos.

En este proceso, varias teorías de dimensión y descomposición han sido, creadas ver por ejemplo [12], [13], [14], [19], [20] y [25].

Una de las importantes dimensiones en categorías de módulos, es la dimensión de Gabriel. Esta dimensión se define por medio de teorías de torsión y de módulos cocríticos .

En [13], Goldman define un concepto de descomposición primaria para módulos sobre anillos arbitrarios, utilizando teorías de torsión primas en lugar de ideales primos (una teoría de torsión es prima o Goldman-prima si está cogenerada por un módulo cocrítico). Goldman muestra que en el caso de anillos conmutativos neterianos, su teoría de descomposición es equivalente a la teoría clásica.

El propósito de este trabajo, es estudiar una situación más general, si R es un anillo y *R-tors* denota al conjunto de teorías de torsión hereditarias definidas sobre la categoría *R-mod* de módulos izquierdos unitarios sobre R, tenemos que *R-tors* es un marco, es decir, una retícula completa donde la intersección distribuye uniones arbitrarias. Desde el punto de vista de la teoría de retículas, los elementos primos de *R-tors*, son las teorías de torsión irreducibles, en particular las teorías de torsión Goldman-primas son elementos irreducibles de *R-tors*, sin embargo existen muchas teorías de torsión irreducibles que no son primas.

Si $\mathcal{C}$ es una familia de teorías de torsión irreducibles definimos el concepto de $\mathcal{C}$-módulo , este resulta ser el análogo de módulo cocrítico cuando $\mathcal{C}$ es el conjunto de teorías de torsión Goldman-primas. Por medio de los $\mathcal{C}$-módulos, definimos una dimensión en R-mod que llamamos $\mathcal{C}$-dimensión y que tiene como caso partícular a la dimensión de Gabriel y a la dimensión atómica estudiada por Raggi y Ríos en [21]

Definimos también, para cada familia $\mathcal{C}$ de teorías de torsión irreducibles, una descomposición primaria que generaliza a la teoría de descomposición de Goldman y que en el caso neteriano conmutativo coincide con la teoría clásica de descomposición

Con la nueva herramienta aquí construida y utilizando diferentes familias distinguidas de teorías de torsión irreducibles, obtenemos caracterizaciones de los anillos artinianos, semiartinianos, convenientes y de los neterianos completamente acotados, obtenemos una generalización de el teorema de Krull-Akizuki y algunos teoremas sobre la estructura de la retícula R-$tors$.

Este trabajo esta dividido en siete capítulos:

En el primer capítulo se definen todos los conceptos generales que serán utilizados durante el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo consideramos a las teorías de torsión que aparecen como átomos de las retículas $gen(\tau)$, para cada $\tau \in R$-$tors$, esto nos lleva al estudio de los $\mathcal{A}$-módulos, también en este capítulo estudiamos a los módulos decisivos respecto a una teoría de torsión y encontramos la relación entre estos dos tipos de módulos.

En el tercer capítulo se desarrolla la herramienta fundamental de este trabajo. Para una familia $\mathcal{C}$ de teorías de torsión irreducibles definimos el concepto de $\mathcal{C}$-módulo que tiene como casos especiales a los módulos cocríticos y a los $\mathcal{A}$-módulos, por medio de los $\mathcal{C}$-módulos definimos una filtración en R-*tors* que llamamos la $\mathcal{C}$-filtración, estudiamos también la correspondiente dimensión ($\mathcal{C}$-dimensión). Al final de este capítulo hacemos uso de familias especiales de teorías de torsión irreducibles y obtenemos caracterizaciones de los anillos artinianos, semiartinianos, convenientes y obtenemos una generalización del teorema de Krull-Akizuki.

En el cuarto capítulo definimos el conjunto de $\mathcal{C}$- asociados a un módulo , este concepto generaliza el concepto definido por Goldman en [13]. Al final de este capítulo obtenemos otra caracterización de los anillos convenientes, estudiados previamente en el tercer capítulo y una caracterización de los anillos neterianos completamente acotados.

En el quinto capítulo estudiamos a los anillos para los cuales $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$ para todo módulo M distinto del cero y obtenemos nuevas caracterizaciones de los anillos artinianos y los anillos semiartinianos así como una caracterización de las teorías de torsión estables.

En el sexto capítulo estudimos la descomposición primaria relativa a una familia $\mathcal{C}$ de teorías de torsión irreducibles la cual es definida en terminos de los $\mathcal{C}$-asociados.

En el séptimo capítulo estudiamos otro concepto de dimensión relativo a familias de teorías de torsión irreducibles, esta dimensión la llamamos $\mathcal{C}$-K-dimensión y la comparamos con la $\mathcal{C}$-dimensión introducida en el tercer capítulo. Hacemos notar también que la $\mathcal{C}$-K-dimensión generaliza el concepto introducido por Golan en [10]. Al final de este capítulo analizamos algunos ejemplos que se mencionan en capítulos anteriores.

Quiero señalar que durante la elaboración de este trabajo he sido becario del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México en el

programa P.S.P.A, así mismo quiero expresar mi mas sincero agradecimiento al Dr. José Ríos Montes por haber dirigido este trabajo.

CAPITULO I

Conceptos Preliminares

En todo éste trabajo R denotará un anillo asociativo con uno. $R-mod$ será la categoría de los módulos izquierdos unitarios . Si $M \in R-mod$, E(M) denotará la cápsula inyectiva de M en $R-mod$.

Nuestra herramienta principal de trabajo serán las teorías de torsión que fueron definidas en los años 60 [8] [9] [13] [17].

Estamos interesados en las teorías de torsión hereditarias, a continuación daremos las definiciones y los resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. Para mayor detalle y demostración de las afirmaciones que se harán ver [11] [12] [24].

Para un anillo R, consideramos la familia de los módulos izquierdos inyectivos dando un orden como sigue:

Si $E_1, E_2 \in R-mod$, $E_1 \geq E_2$ si E_1 se sumerge en un producto directo de copias de E_2 y diremos que E_1 es equivalente a E_2 si, $E_1 \geq E_2$ y $E_2 \geq E_1$. Obsérvese que la relación ser "equivalentes" es una relación de equivalencia en la clase de los R-módulos izquierdos inyectivos

Definición 1.1.- Una Clase de Equivalencia de R-módulos izquierdos inyectivos es llamada una teoría de torsión hereditaria sobre $R-mod$. Denotaremos a éste conjunto de teorías de torsión (mas adelante se probará este hecho) como $R-tors$

Si $\tau \in R-tors$ diremos que un R-módulo M es τ-libre de torsión si $E(M) \geq E$ para algún inyectivo $E \in \tau$. Denotaremos la clase de los R-módulos libres de

τ-torsión como $\mathcal{F}_\tau$.

Nuevamente, si $\tau \in R - tors$ diremos que un R-módulo M es de τ-torsión si $Hom(M, E) = 0$ para algún $E \in \tau$. Denotaremos a la clase de los R-mòdulos de τ -torsión como $\mathcal{T}_\tau$.

Proposición 1.2.- Si $\tau \in R - tors$ entonces:

(1) $M \in \mathcal{T}_\tau$ si y solo si $Hom_R(M, E(N)) = 0$ para todo $N \in \mathcal{F}_\tau$

(2) $N \in \mathcal{F}_\tau$ si y solo si $Hom_R(M, E(N)) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}_\tau$

Proposición 1.3.- Las siguientes condiciones son equivalentes para una clase no vacía C de R-módulos.

(a) $C = \mathcal{F}_\tau$ para alguna $\tau \in R - tors$

(b) C es cerrada bajo sumódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y extensiones.

Proposición 1.4.- Las siguientes condiciones son equivalentes para una clase no vacía C de R-módulos.

(a) $C = \mathcal{T}_\tau$ para alguna $\tau \in R - tors$

(b) C es cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones.

Si $\tau \in R - tors$ y $M \in R - mod$ entonces denotaremos por $t_\tau\ (M)$ al módulo $\sum\{_RN \subset M \mid N \in \mathcal{T}_\tau\ \}$ es fácil verificar que $t_\tau\ (M)$ es el máximo submódulo de M que pertenece a $\mathcal{T}_\tau$. Nótese que $t_\tau\ (\ ) \colon R - mod \longrightarrow R - mod$ es un subfuntor del funtor identidad de R-mod.

Proposición 1.5.- Las siguientes condiciones son equivalentes para un subfuntor F de la identidad de R-mod.

(a) $F = t_\tau$ para alguna $\tau \in R - tors$

(b) F es un funtor exacto izquierdo y $F(M/F(M)) = 0$ para todo $M \in R-mod.$

Definición 1.6.- Un conjunto no vacío A, de ideales izquierdos de R es llamado filtro idempotente si cumple:

(1) Si $I \in A$ y $a \in R$ entonces $(I : a) \in A$

(2) Si $I \subset R$ es ideal izquierdo y existe $H \in A$ tal que $(I : a) \in A$ para toda $a \in H$ entonces $I \in A$

Si $\tau \in R - tors$, tenemos asociado con τ al siguiente conjunto de ideales izquierdos de R

$$\mathcal{L}_\tau = \{_R I \subset R \mid R/I \in \mathcal{T}_\tau \}$$

Proposición 1.7.- las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto no vacío A de ideales izquierdos de R.

(a) $A = \mathcal{L}_\tau$ para alguna $\tau \in R - tors$

(b) A es filtro idempotente

Nótese que de acuerdo con la proposición anterior, R-tors es un conjunto.

En R-tors definimos la siguiente relación de orden: Si $\tau, \sigma \in R - tors$ entonces $\tau \leq \sigma$ si $\mathcal{T}_\tau \subset \mathcal{T}_\sigma$.

Proposición 1.8.- Sean $\tau, \sigma \in R-tors$, las siguientes condiciones son equivalentes

(a) $\tau \leq \sigma$

(b) $\mathcal{L}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\sigma$

(c) $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$

(d) Para todo $M \in R - mod$, $t_\tau (M) \subseteq t_\sigma (M)$

El orden anterior hace de R-tors un conjunto parcialmente ordenado, más aun,

R-$tors$ tiene estructura de retícula completa donde las operaciones son:

Si $\{\tau_\alpha\} \subset R-tors$, se define $\vee\tau_\alpha \in R-tors$ como $\mathcal{F}_{\vee\tau_\alpha} = \bigcap \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$ e $\wedge\tau_\alpha \in R-tors$ como $\mathcal{T}_{\wedge\tau_\alpha} = \bigcap \mathcal{T}_{\tau_\alpha}$.

Proposición 1.9.- Sea $\tau \in R-tors$ y $\{\tau_\alpha\} \subset R-tors$ entonces:

$$\tau \wedge (\vee\tau_\alpha) = \vee(\tau \wedge \tau_\alpha)$$

Una retícula completa donde se cumple la proposición 1.9 se le llama marco. De ésta manera $(R-tors, \leq, \vee, \wedge)$ es un marco.

Si $\{M_\alpha\}$ es una familia de R-módulos, denotaremos por $\xi(\{M_\alpha\})$ al menor elemento de R-tors para el cual todos los M_α son de torsión, es decir:

$$\xi(\{M_\alpha\}) = \wedge\{\tau \in R-tors \mid \{M_\alpha\} \subset \mathcal{T}_\tau\}$$

A $\xi(\{M_\alpha\})$ se le conoce como la teoría de torsión generada por $\{M_\alpha\}$

$\chi(\{M_\alpha\})$ denotará al mayor elemento de R-tors para el cual todos los M_α son libres de torsión, es decir:

$$\chi(\{M_\alpha\}) = \vee\{\tau \in R-tors \mid \{M_\alpha\} \subset \mathcal{F}_\tau\}$$

A $\chi(\{M_\alpha\})$ se le conoce como la teoría de torsión cogenerada por $\{M_\alpha\}$

En particular, $\chi = \chi(\{0\})$ y $\xi = \xi(\{0\})$ denotarán al elemento mayor y al elemento menor de R-tors respectivamente.

Denotaremos por R-prop al conjunto $\{\tau \in R-tors \mid \tau \neq \chi\}$, R-simp será un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de módulos izquierdos simples. Si $M \in R-mod$, $soc(M) = \sum\{S \subset M \mid S \in R-simp\}$ denotará al zoclo de M.

Un elemento $\tau \in R-tors$ es de tipo simple si $\tau = \xi(D)$ con $D \subset R-simp$.

Diremos que R es un anillo semiartiniano izquierdo si para todo $0 \neq M \in R-mod$ $soc(M) \neq 0$, equivalentemente $\chi = \xi(R-simp)$

En una retícula completa con elemento mínimo m, un elemento α de la retícula se dice que es un átomo si $m < \alpha$ y $\beta < \alpha$ implica $\beta = m$.Diremos que una retícula es atómica si para todo elemento α de la retícula existe un átomo π tal que $\pi \leq \alpha$. La retícula es localmente atómica si cada elemento es unión de átomos.

Los átomos de la retícula R-tors son los elementos de la forma $\xi(S)$ donde $S \in R-simp$. R-tors es una retícula atómica

Definición 1.10.- Sea $\tau \in R-tors$, un R-módulo $M \neq 0$ es llamado τ-cocrítico si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\forall$ submódulo $0 \neq N$ de M, $M/N \in \mathcal{T}_\tau$

Un R-módulo $M \neq 0$ es cocrítico si $\exists \tau \in R-tors$ tal que M es τ -cocrítico. Facilmente se prueba que M es cocrítico si y solo si M es $\chi(M)$-cocrítico.

Proposición 1.11.- Sea $\tau \in R-tors$ y M un R-módulo izquierdo τ-cocrítico entonces:

(1) Para todo $0 \neq N \subset M$, N es τ cocrítico

(2) Si $\tau = \chi(N)$ entonces N tiene un submódulo τ-cocrítico

(3) M es uniforme

(4) El anillo de endomorfismos de M se sumerge en un anillo con división

Un anillo R es semineteriano izquierdo si $\forall \tau \in R$-tors $\exists M \in R$-mod tal que M es τ-cocrítico

Ahora introducimos en R-tors la filtración de Gabriel y definimos la dimensión respectiva

En R-tors definimos la cadena $\{\tau_i\}$ como sigue:

(1) $\tau_{-1} = \xi$

(2) Si i no es un ordinal límite

$\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M \in R - mod \mid M$ es τ_{i-1}-cocrítico $\})$

(3) Si i es ordinal límite $\tau_i = \vee_{j<i}\tau_j$

A ésta cadena se le conoce como la filtración de Gabriel. Como R-tors es un conjunto, existe un ordinal ρ tal que $\tau_\rho = \tau_{\rho+\beta}$ para todo ordinal β, para éste ordinal se denota $\tau_\rho = \mathcal{G}$

Un R-módulo M se dice que tiene dimensón de Gabriel si existe un ordinal i tal que M es de τ_i-torsión. M tiene dimensión de Gabriel igual a k si k es el mímimo ordinal tal que M es de τ_k-torsión, ésto se denotará como $G - dim(M) = k$

Un anillo R tiene dimensión de Gabriel izquierda si R como R-módulo izquierdo tiene dimensión de Gabriel. Es inmediato que $G - dim(R) = k$ si y solo si $\tau_k = \chi$ y $\tau_i < \chi$ para toda $i < k$. Para información acerca de ésto ver [11],[12],[14] y [23]

Diremos que una teoría de torsón es prima si $\tau = \chi(M)$ para algún R-módulo cocrítico M, τ es semiprima si es intersección de primas y τ es fuertemente semiprima si $\tau = \chi(\{M \in R - mod \mid M$ es τ -cocrítico $\})$ ver [11],[12],[13].

Denotaremos como R-sp al conjunto de las teorías de torsión primas.

Teorema 1.12.- Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R

(a) R tiene dimensón de Gabriel

(b) R es un anillo semineteriano izquierdo

(c) Para toda $\tau \in R - prop$, τ es fuertemente semiprima

(d) $R \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

Otro resultado interesante para anillos con dimensión de Gabriel es el siguiente: Si R tiene dimensión de Gabriel entonces, si $\tau < \sigma \leq \chi$, existe un R-módulo M que es τ-cocrítico y $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

Un R-módulo $M \neq 0$ es decisivo si $\forall \tau \in R - tors$ $M \in \mathcal{T}_\tau$ o $M \in \mathcal{F}_\tau$. Es claro que para todo $S \in R$-*simp*, S es decisivo.

Definición 1.13.- Una teoría de torsión τ es irreducible si siempre que $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \leq \tau$, entonces se tiene que $\tau \leq \sigma_1$ o $\tau \leq \sigma_2$ [para mayor detalle ver [12] pag 305] y diremos que τ es fuertemente irreducible si para cualquier subconjunto $U \subset R$-tors tal que $\wedge U \leq \tau$ entonces, existe $\sigma \in U$ tal que $\sigma \leq \tau$. Denotaremos al conjunto de teorías de torsión irreducibles como R-irr.

Definición 1.14.- Una teoría de torsión τ es fuertemente irreducible si siempre que que $\tau = \wedge \tau_i$ se tiene que $\tau = \tau_i$ para alguna i [12], def 32.7

Definición 1.15.- Un R-módulo M distinto de cero es decisivo si dada $\tau \in R$-*tors* se tiene que $M \in \mathcal{F}_\tau$ o $M \in \mathcal{T}_\tau$.

Notemos que por 32.7 de [12] una teoría de torsión τ es fuertemente irreducible si y solo si, $\tau = \chi(M)$ donde M es un módulo decisivo.

Finalmente, denotaremos por R-*spec* al conjunto de ideales primos de R, es decir $P \in R$-*spec* si P es un ideal bilateral de R, y si I, J son ideales bilaterales de R tales que $IJ \subset P$, entonces, $I \subset P$ o $J \subset P$.

CAPITULO II

$\mathcal{A}$-Módulos

Se ha notado que si $\tau \in R\text{-}tors$ la clase de los módulos M tales que $\tau \vee \xi(M)$ es un átomo de la retícula gen(τ), tienen propiedades muy interesantes; Por ejemplo, por medio de estos módulos se define una filtración que es llamada, filtración atómica, la cual induce una dimensión en R-mod, también estos módulos han servido para obtener teoremas de estructura para anillos regulares autoinyectivos (ver [22], [23], [26]). Probaremos también el hecho de que cada módulo τ-cocrítico pertenece a esta clase, así como los módulos de la forma R/P donde P es un ideal primo, los módulos decisivos y los módulos M cuyos unicos submódulos τ-puros totalmente invariantes son $\{0, M\}$. También hacemos un estudio de los módulos τ-decisivos y probamos que un módulo es $\chi(M)$ -decisivo si y solo si M es $\chi(M)$ - $\mathcal{A}$-módulo

El estudio de los $\mathcal{A}$-módulos fué iniciado por los profesores José Ríos Montes y Francisco Raggi Cárdenas, algunos de los resultados que se presentan en éste capítulo son parte de el artículo 'Sobre la Dimensón Atómica en Categorías de módulos', [21]

Definición 2.1.- Sean $\tau \in R\text{-}tors$ y $\sigma \in gen(\tau)$, diremos que σ es un τ-átomo si σ es un átomo de la retícula $gen(\tau)$ donde $gen(\tau) = \{\tau' \in R - tors \mid \tau' \geq \tau\}$.

Nótese que los ξ -átomos, son los átomos de R-tors que sabemos son de la forma $\xi(S)$ donde $S \in R$-simp.

Definición 2.2.- Sea $\tau \in$ *R-prop* y M un R-módulo diremos que M es τ-$\mathcal{A}$-módulo si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\tau \vee \xi(M)$ es un τ-átomo

Observación.-

(i) Si $M = 0$, M no es τ-$\mathcal{A}$-módulo para toda $\tau \in$ *R-tors*

(ii) Si M es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces toda suma directa de copias de M es τ-$\mathcal{A}$-módulo ya que $M^{(X)} \in \mathcal{F}_\tau$ y $\tau \vee \xi(M^{(X)}) = \tau \vee \xi(M)$.

(iii) Si $M \in$ *R-tors* y M es τ-cocrítico entonces, M es τ-$\mathcal{A}$-módulo [21], [23 lema 3.5]

(iv) Si σ es τ-átomo entonces todos los objetos de la clase $\mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau - \{0\}$ son τ-$\mathcal{A}$-módulos y $\sigma = \tau \vee \xi(M)$ para cualquier M en la clase anterior.

En efecto sea σ es un τ-átomo y $M \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau$ -$\{0\}$ entonces $M \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $\tau < \tau \vee \xi(M) \leq \sigma$ como σ es τ-átomo entonces $\tau \vee \xi(M) = \sigma$ por lo tanto M es τ-$\mathcal{A}$-módulo

(v) Si $M \in R$-mod es tal que $\tau \vee \xi(M)$ es τ-átomo entonces $\exists N \subset M$ tal que M/N es τ-$\mathcal{A}$-módulo

En efecto, si $M \notin \mathcal{F}_\tau$ tenemos que $\tau < \tau \vee \xi(M) \Rightarrow 0 \neq t_\tau(M) = N$ y $0 \neq M/N \in \mathcal{F}_\tau$ de donde $\tau < \tau \vee \xi(M/N) \leq \tau \vee \xi(M)$ por lo tanto $\tau \vee \xi(M/N) = \tau \vee \xi(M)$ y de ésta forma tenemos el resultado.

Nótese que (iii) implica que si $M \in$R-*mod* es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, para todo $0 \neq N \subset M$ N es τ-$\mathcal{A}$-módulo y para toda $N' \subset M$ tal que $0 \neq M/N' \in \mathcal{F}_\tau$, M/N' es τ-$\mathcal{A}$-módulo además $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(M/N')$

Proposición 2.3.- Sea $\tau \in$ *R-tors* y $0 \neq M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) M es τ-$\mathcal{A}$-módulo

(b) $\forall N' \subset N \subset M$ tal que si $0 \neq N/N' \in \mathcal{F}_\tau$ y $Hom_R(N/N', E) = 0$ donde E es inyectivo libre de τ-torsión entonces $Hom_R(M, E) = 0$

Demostración.- $a) \Rightarrow b)$

Sean $N' \subset N \subset M$ tales que $N/N'\mathcal{F}_\tau$, claramente tenemos $\tau < \tau \vee \xi(N/N') \leq \tau \vee \xi(N)$, como $\tau \vee \xi(N)$ en τ-átomo tenemos $\tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$. Ahora sea $E \in \mathcal{F}_\tau$ un R-módulo inyectivo tal que $Hom_R(N/N', E) = 0$ entonces $E \in \mathcal{F}_{\xi(N/N')} \Rightarrow E \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N/N')} = \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(M)} \Rightarrow E \in \mathcal{F}_{\xi(N)} \Rightarrow Hom_R(M, E) = 0$

$b) \Rightarrow a)$ Primero Probaremos que si $N' \subset N \subset M$ son tales que $0 \neq N/N' \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$, una de las desigualdades es obvia, para la otra desigualdad sea $H \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N/N')}$ entonces, $H \in \mathcal{F}_\tau \bigcap \mathcal{F}_{\xi(N/N')}$ por lo tanto $Hom_R(N/N', E(H)) = 0$; como $E(H) \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow Hom_R(M, E(H)) = 0 \Rightarrow H \in \mathcal{F}_{\xi(M)}$ por lo tanto $H \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(M)}$ de éste modo tenemos la otra desigualdad.

Ahora sea $\tau < \sigma \leq \tau \vee \xi(M)$, probaremos que $\sigma = \tau \vee \xi(M)$, ya que $\tau < \sigma$ entonces existe $K \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau$, $K \neq 0$ y como $\sigma \leq \tau \vee \xi(M) \Rightarrow K \notin \mathcal{F}_{\xi(M)}$ por lo tanto $Hom(M, E(K)) \neq 0$ de don de existen $N' \subset N \subset M$ tales que $0 \neq N/N' \hookrightarrow K \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \tau \vee \xi(N/N') \leq \sigma \leq \tau \vee \xi(M)$ de donde $\sigma = \tau \vee \xi(M)$

Corolario 2.4.- Si $\tau \in$ *R-tors* y $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces son equivalentes:

1) M es τ-$\mathcal{A}$-módulo

2) $\forall N' \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/N' \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$

3) $\forall N' \subset N \subset M$ tal que $N/N' \notin \mathcal{T}_\tau \Rightarrow \tau \vee \xi(N/N') = \tau \vee \xi(M)$

Demostración.- 1) $\Rightarrow$ 2) Se sigue de la observación de (vi)

2) $\Rightarrow$ 1) Es la segunda parte de la demostración de la proposición 2.3

1) $\Rightarrow$ 3) Claramente $\tau < \tau \vee \xi(N/N')$ por lo tanto tenemos $\tau \vee \xi(N/N') =$

$\tau \vee \xi(M)$

3) $\Rightarrow$ 2) Es obvia.

Proposición 2.5.- Sea $\tau \in$ *R-tors* y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, M es decisivo respecto a los elementos de gen(τ)

Demostración.- Sea M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\sigma \geq \tau$, sea $\alpha = [\tau \vee \xi(M)\ ] \wedge \sigma$ entonces tenemos que $\alpha = \tau \vee [\sigma \wedge \xi(M)\ ]$, como M es τ-$\mathcal{A}$-módulo tenemos que $\alpha = \tau$ o $\alpha = \tau \vee \xi(M)$.

Primer caso.- $\alpha = \tau \Rightarrow M \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \xi(M)} \ \Rightarrow M \in \mathcal{F}_{\sigma}$

Segundo caso.- $\alpha = \tau \vee \xi(M) \ \Rightarrow M \in \mathcal{T}_{[\tau \vee \xi(M)\ ] \wedge \sigma}$ de donde $M \in \mathcal{T}_{\sigma}$

Observación.- Se podría pensar que un módulo M tal que $M \in \mathcal{F}_{\tau}$ y decisivo en $gen(\tau)$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo , pero ésto es falso, considere R el anillo de los enteros, R es decisivo (es decir decisivo respecto $gen(\xi)$) pero $\xi(R)$ no es un átomo en *R-tors*

En éste punto cabe introducir la siguiente :

Definición 2.6.- Si $\tau \in$ *R-tors* un R-módulo izquierdo $M \neq 0$ se llamará τ-decisivo si $M \in \mathcal{F}_{\tau}$ y es decisivo en la retícula $gen(\tau)$. Diremos que M es módulo *Dec* si M es τ-decisivo para alguna $\tau \in$ *R-prop*.

Observación.-

i) Si M es un un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces M es τ-decisivo

ii) Si M es τ-decisivo entonces $\forall \sigma \in gen(\tau)$ y $M \in \mathcal{F}_{\sigma}$ M es σ-decisivo

iii) M es decisivo $\Leftrightarrow$ M es ξ-decisivo

Proposición 2.7.- Si $M \in R$-mod entonces M es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo $\Leftrightarrow$ M es $\chi(M)$ -decisivo.

Demostración.- $\Rightarrow$] Obvio

$\Leftarrow$] Probaramos que $\chi(M) \vee \xi(M)$ es $\chi(M)$ -átomo. Sea $\sigma \in R$-tors tal que $\chi(M) \leq \sigma \leq \chi(M) \vee \xi(M)$, como M es $\chi(M)$ -decisivo entonces $M \in \mathcal{F}_\sigma$ o $M \in \mathcal{T}_\sigma$. Si $M \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow \sigma = \chi(M)$, si $M \in \mathcal{T}_\sigma \Rightarrow \sigma = \chi(M) \vee \xi(M)$ entonces M es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo .

Corolario 2.8.- Si $\tau \in$ *R-tors* y M es τ-decisivo entonces, M es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- M τ-decisivo $\Rightarrow \chi(M) \geq \tau$ por lo tanto M es $\chi(M)$ -decisivo y así M es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo

Proposición 2.9.- Si $M \in R$-mod y $\tau \in$ *R-tors* tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces M es τ-decisivo $\Leftrightarrow$ para toda $N \subset M$; $N \neq 0$ $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$

Demostración.- $\Rightarrow$] Es obvio ya que M es τ-decisivo y $M \notin \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)}$

$\Leftarrow$] Sea $\sigma > \tau$ si $M \in \mathcal{F}_\sigma$ ya terminamos, supongamos que $t_\sigma(M) = N \neq 0$ de ésta forma $M \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N)}$, pero $\tau \vee \xi(N) \leq \sigma$ de donde $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y M es τ-decisivo.

Corolario 2.10.- Un R-módulo M es $\chi(M)$ -decisivo $\Leftrightarrow \chi(M) \vee \xi(N) = \chi(M) \vee \xi(M)$ $\forall N \subset M$; $N \neq 0$

Proposición 2.11.- Si $\tau \in$ *R-tors* y $M \in R$-mod $M \neq 0$, las siguientes condiciones son equivalentes.

1) M es τ-decisivo .

2) $M \in \mathcal{F}_\tau$ y M es decisivo en el intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$

Demostración.- $\Rightarrow$] Obvia

[$\Leftarrow$ Sea $\sigma \in gen(\tau)$, sea $\alpha = (\sigma \wedge \xi(M)) \vee \tau$ entonces $\tau \leq \alpha \leq \tau \vee \xi(M)$, como es decisivo en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ entonces $M \in \mathcal{F}_\alpha$ o $M \in \mathcal{T}_\alpha$.

Si $M \in \mathcal{T}_\alpha$ entonces $M \in \mathcal{T}_\sigma$

Si $M \in \mathcal{F}_\alpha$ entonces, afirmo que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ en efecto $t_\sigma(M) \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)} =$

$\mathcal{T}_\alpha$ por lo tanto $t_\sigma(M) = 0$ así $M \in \mathcal{F}_\sigma$

Corolario 2.12.- Un R-módulo $M \neq 0$ es decisivo $\Leftrightarrow$ M es decisivo en $[\xi, \xi(M)\ ]$.

Observación.- De acuerdo con el corolario anterior M es decisivo si $M \in \mathcal{F}_\sigma$ para toda $\sigma < \xi(M)$.

Corolario 2.13.- Sea M un R-módulo τ-decisivo entonces, M es $\tau \wedge \xi(M)$ -decisivo.

Demostración.- Como $M \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow M \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\xi(M)}$, sea $\sigma \in [\tau \wedge \xi(M)\ , \xi(M)\ ]$ entonces $\tau \leq \sigma \vee \tau \leq \tau \vee \xi(M)$, como M es τ-decisivo entonces $M \in \mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$ o $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\sigma}$. Si se da el primer caso tenemos que $M \in \mathcal{F}_\sigma$; Si se da el segundo caso tenemos que $M \in \mathcal{T}_{(\tau\vee\sigma)\wedge(\xi(M)\ \vee\sigma)} = \mathcal{T}_{\sigma\vee(\xi(M)\ \wedge\tau)} = \mathcal{T}_\sigma$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

Corolario 2.14.- Si $\tau \in$ *R-tors* , un R-módulo M es τ-decisivo $\Leftrightarrow$ M es decisivo en $[\tau \wedge \xi(M)\ , \xi(M)\ ]$ y $M \in \mathcal{F}_\tau$.

Demostración.- $\Rightarrow]$ Como M es τ-decisivo entonces M es $\tau \wedge \xi(M)$ -decisivo, de donde M es decisivo en $[\tau \wedge \xi(M)\ , \xi(M)\ ]$. Por otra parte es claro que $M \in \mathcal{F}_\tau$.

$\Leftarrow]$ Como $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $M \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\xi(M)}$ así por la proposición 2.11 M es $\tau \wedge \xi(M)$ -decisivo y como $\tau \wedge \xi(M) \leq \tau$ tenemos que M es τ-decisivo

Proposición 2.15.- Si M es un R-módulo τ-decisivo y σ-decisivo entonces, M es $\tau \wedge \sigma$-decisivo.

Demostración.- Sea $\alpha \in [\tau \wedge \sigma, (\tau \wedge \sigma) \vee \xi(M)\ ]$ en estas condiciones tenemos que $\tau \leq \alpha \vee \tau \leq \tau \vee \xi(M)$ y $\sigma \leq \sigma \vee \alpha \leq \sigma \vee \xi(M)$, entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha\vee\tau}$ o $M \in \mathcal{F}_{\alpha\vee\tau}$ y $M \in \mathcal{T}_{\alpha\vee\sigma}$ o $M \in \mathcal{F}_{\alpha\vee\sigma}$.

Si $M \in \mathcal{F}_{\alpha\vee\tau}$ o $M \in \mathcal{F}_{\alpha\vee\sigma}$ tenemos que en ambos casos $M \in \mathcal{F}_\alpha$.

Si $M \in \mathcal{T}_{\alpha\vee\tau}$ y $M \in \mathcal{T}_{\alpha\vee\sigma}$ tenemos que $M \in \mathcal{T}_{(\alpha\vee\tau)\wedge(\alpha\vee\sigma)} = \mathcal{T}_{\alpha\vee(\tau\wedge\sigma)} = \mathcal{T}_\alpha$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_\alpha$.

Proposición 2.16.- Sea $\tau \in$ *R-tors* y M , N τ-decisivos entonces $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M) \Leftrightarrow \chi(M) = \chi(N)$.

Demostración.- $\Rightarrow]$ $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M) \Rightarrow N \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(M)} \Rightarrow N \notin \mathcal{F}_{\xi(M)}$ por lo tanto $Hom(M, E(N)) \neq 0$ y $M \notin \mathcal{T}_{\chi(N)}$ y como $\tau \leq \chi(N) \Rightarrow M \in \mathcal{F}_{\chi(N)} \Rightarrow \chi(M) \geq \chi(N)$, análogamente $\chi(M) \leq \chi(N)$ por lo tanto $\chi(N) = \chi(M)$

$\Leftarrow]$ Como $\tau \leq \tau \vee \xi(N)$ y M es τ-decisivo $\Rightarrow M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(N)}$ o $M \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N)}$. Supongamos que $M \in \mathcal{F}_{\tau\vee\xi(N)}$ entonces $M \in \mathcal{F}_{\xi(N)} \Rightarrow Hom(N, E(M)) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{T}_{\chi(M)} = \mathcal{T}_{\chi(N)}$ pero ésto en imposible por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(N)}$ y así $\tau \vee \xi(M) \leq \tau \vee \xi(N)$, análogamente probamos la otra desigualdad.

Corolario 2.17.- Sea $\tau \in$ *R-tors* y M,N τ-decisivos , Si $\tau \vee \xi(N) \leq \tau \vee \xi(M)$ y $\chi(M) \leq \chi(N)$ entonces $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$ y $\chi(N) = \chi(M)$.

Demostración.- Solo basta probar que $\tau \vee \xi(N) \geq \tau \vee \xi(M)$ para tener la igualdad deseada, para ello solo tenemos que probar que $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\xi(N)}$ y ésto se sigue como en la demostración anterior.

Corolario 2.18.- $\tau \in$ *R-tors* y M es τ-decisivo entonces $\forall N \neq 0, N \subset M$ se tiene que $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$ y $\chi(N) = \chi(M)$.

Demostración.- M y N son τ-decisivos por otra parte, ya que $N \subset M$ tenemos que $\tau \vee \xi(N) \leq \tau \vee \xi(M)$ y $\chi(N) \geq \chi(M)$ y por el corolario anterior tenemos el resultado

Observación.- El corolario anterior y la proposición 32.2 de [12] nos dicen que si M es τ-decisivo entonces $\chi(M)$ es una teoría de torsión irreducible.

Proposición 2.19.- Sea M τ-decisivo entonces M es τ-$\mathcal{A}$-módulo $\Leftrightarrow \forall \sigma \in R-tors$ tal que $\tau < \sigma \leq \tau \vee \xi(M)$ se tiene que $t_\sigma(M) \neq 0$.

Demostración.- $\Rightarrow$] Claramente $\sigma = \tau \vee \xi(M)$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_\sigma$.

$\Leftarrow$] Como M es τ-decisivo y $t_\sigma(M) \neq 0 \Rightarrow M \in \mathcal{T}_\sigma$ por lo tanto $\sigma = \tau \vee \xi(M)$

Observación.- De acuerdo con las proposiciones anteriores tenemos:

i) Si $\tau \in R\text{-}tors$ y M es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, $\chi(M)$ es irreducible.

ii) Si M y N son τ-$\mathcal{A}$-módulos entonces, $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N) \Leftrightarrow \chi(M) = \chi(N)$

iii) Si M es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $0 \neq N \subset M$ entonces, $\chi(N) = \chi(M)$.

Definición 2.20.- Un R-módulo $M \neq 0$ diremos que es $\mathcal{A}$-módulo si existe $\tau \in R\text{-}tors$ tal que M es τ-$\mathcal{A}$-módulo

Observación.-

(1) Si M es un $\mathcal{A}$-módulo y $0 \neq N \subset M$ entonces N es $\mathcal{A}$-módulo y $\chi(N) = \chi(M)$

(2) Si M es un $\mathcal{A}$-módulo entonces,$\chi(M)$ es una teoría de torsión irreducible

(3) Si M es un R-módulo cocrítico entonces, M es un $\mathcal{A}$-módulo

Nota.- El inverso de (3) es falso ya que toda suma directa de copias de un cocrítico no es cocrítico , pero si es $\mathcal{A}$-módulo .

Proposición 2.21.- Si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $E_\tau(M)$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Sabemos que $E_\tau(M) \in \mathcal{F}_\tau$ bastará demostrar que $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(E_\tau(M))$, tenemos que $\tau \vee \xi(M) \leq \tau \vee \xi(E_\tau(M))$, supongamos que la desigualdad es estricta, entonces, existe $N \neq 0$ tal que $N \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(E_\tau(M))}$ y $N \in \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)}$ de donde $N \in \mathcal{F}_\tau$, $N \in \mathcal{F}_{\xi(M)}$ y $N \notin \mathcal{F}_{\xi(E_\tau(M))}$ y ésto último implica que $Hom(E_\tau(M), E(N)) \neq 0$, por otra parte , $M \in \mathcal{F}_{\xi(N)} \Rightarrow Hom(M, E(N)) = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{T}_{\chi(N)}$, además $\tau \leq \chi(N) \Rightarrow \frac{E_\tau(M)}{M} \in \mathcal{T}_{\chi(N)}$ tomando en cuenta la sucesión $0 \longrightarrow M \longrightarrow E_\tau(M) \longrightarrow E_\tau(M)/M \longrightarrow 0$, tenemos que $E_\tau(M) \in \mathcal{T}_{\chi(N)}$ por lo tanto $Hom(E_\tau(M), E(N)) = 0$ lo cual es imposible.

Observación.- Si M es un un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, existe un R-módulo K tal que.

i) $M \subset K$ y K es τ-$\mathcal{A}$-módulo

ii) K es máximo con la propiedad (i).

Demostración.- Sea $K = \sum\{H \subset E(M) \mid M \subset H$ y H es τ-$\mathcal{A}$-módulo $\}$, K claramente satisface la condición i la condición ii se cumple ya que la K es un cociente de la suma directa de los τ-$\mathcal{A}$-módulos.

Proposición 2.22.- Un R-módulo $M \neq 0$ es $\mathcal{A}$-módulo si y solo si M es $\chi(M)$ - $\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- En uno de los sentidos es claro, en el otro sentido sabemos que existe $\tau \in R - tors$ tal que M es τ-$\mathcal{A}$-módulo por tanto $\chi(M) \geq \tau$ y por el corolario 2.8 tenemos el resultado.

Definición 2.23.- Denotaremos por $\mathcal{C}_\mathcal{A} = \{\chi(M) \in R\text{-}tors \mid M$ es $\mathcal{A}$-módulo $\}$

Observación.- $R\text{-}sp \subset \mathcal{C}_\mathcal{A} \subset R\text{-}irr$ y las contenciones son propias

De acuerdo con las proposiciones anteriores las contenciones son claras, para ver que $R - sp \neq \mathcal{C}_\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}_\mathcal{A} \neq R\text{-}irr$ ver los ejemplos al final del último capítulo

Proposición 2.24.- Sea M un $\mathcal{A}$-módulo y $\tau = \chi(M)$, supongamos que existe $\sigma \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$ tal que M es σ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $\sigma = \tau$

Demostración.- Como $\sigma \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$, $\sigma = \chi(N)$ donde N es un σ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $\sigma \vee \xi(N)$ y $\sigma \vee \xi(M)$ son σ-átomos, como $\sigma \leq (\sigma \vee \xi(N)) \wedge (\sigma \vee \xi(M)) \leq \sigma \vee \xi(N)$ entonces $\sigma = (\sigma \vee \xi(N)) \wedge (\sigma \vee \xi(M))$ o $(\sigma \vee \xi(N)) \wedge (\sigma \vee \xi(M)) = \sigma \vee \xi(N)$

Primer caso.- Si $\sigma = (\sigma \vee \xi(N)\ ) \wedge (\sigma \vee \xi(M)\ )$ entonces $\sigma = \sigma \vee \xi(N)$ o $\sigma = \sigma \vee \xi(M)$ (ya que σ es irreducible) pero cualquiera de ambas cosas son imposibles ya que N y M son σ-$\mathcal{A}$-módulos.

Segundo caso.- Si $(\sigma \vee \xi(N)\ ) \wedge (\sigma \vee \xi(M)\ ) = \sigma \vee \xi(N)$ entonces $\sigma \vee \xi(M) \geq \sigma \vee \xi(N) \geq \sigma \Rightarrow \sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$ y por la proposición 2.16 tenemos $\chi(M) = \chi(N)$ de donde $\sigma = \tau$

Corolario 2.25.- Si $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y M es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces $\tau = \chi(M)$

Proposición 2.26.- Sea $\{\tau_i\} \subset$ *R-tors* un conjunto de teorías de torsión y M un τ_i-$\mathcal{A}$-módulo para toda i, supongamos que M es $\wedge\tau_i$-decisivo entonces, M es $\wedge\tau_i$-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Sea $\sigma \in R$-tors tal que $\wedge\tau_i < \sigma \leq \wedge(\tau_i) \vee \xi(M)$ entonces, para cada i tenemos que $\tau_i \leq \sigma \vee \tau_i \leq \tau_i \vee \xi(M)$ y así $\tau_i = \sigma \vee \tau_i$ o $\sigma \vee \tau_i = \tau_i \vee \xi(M)$.

Si $\sigma \vee \tau_i = \tau_i \vee \xi(M)$ para alguna i entonces tenemos que $M \in \mathcal{T}_{\sigma\vee\tau_i}$; como $M \in \mathcal{F}_{\tau_i} \Rightarrow M \notin \mathcal{F}_\sigma$ por lo tanto $t_\sigma(M) \neq 0$ y por la proposición 2.19 tenemos el resultado.

Si $\tau_i = \sigma \vee \tau_i \forall i$ entonces, tendriamos que $\sigma \leq \tau_i \forall i \Rightarrow \sigma \leq \wedge\tau_i < \sigma$ pero ésto es imposible.

Corolario 2.27.- Si M es τ-$\mathcal{A}$-módulo y σ-$\mathcal{A}$-módulo entonces M es $\tau\wedge\sigma$-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Por la proposición 2.15 M es $\tau \wedge \sigma$-decisivo y así por la proposición 2.26 tenemos el resultado.

Proposición 2.28.- Sea M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\sigma \in gen(\tau)$ tal que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces, M es σ-$\mathcal{A}$-módulo .

Demostración.- Por el corolario 2.4 basta probar que para toda $L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow \sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(M)$; pero como $\sigma \geq \tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $\tau \vee \xi(N/L) = \tau \vee \xi(M) \Rightarrow M \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N/L)}$ de donde $M \in \mathcal{T}_{\sigma \vee \xi(N/L)}$ por lo tanto $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(M)$.

Corolario 2.29.- Sea $\{\tau_\alpha\} \subset R$-tors y M $\tau_\alpha \mathcal{A}$-módulo $\forall\alpha$, entonces M es $\vee\tau_\alpha$-$\mathcal{A}$-módulo .

Demostración.- Como $M \in \mathcal{F}_{\tau_\alpha}$ $\forall\alpha$ entonce $M \in \mathcal{F}_{\vee\tau_\alpha}$ y como $\tau_\alpha \leq \vee\tau_\alpha$ por lo tant o M es $\vee\tau_\alpha$-$\mathcal{A}$-módulo .

Proposición 2.30.- Sea $\tau \in$ *R-tors* y M un τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, M es $\tau \wedge \xi(M)$ - $\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Claramente $M \in \mathcal{F}_{\tau \vee \xi(M)}$, ahora sea $L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_{\tau \wedge \xi(M)} \Rightarrow N/L \notin \mathcal{T}_\tau \Rightarrow \tau \vee \xi(N/L) = \tau \vee \xi(M)$; Ahora $[\tau \wedge \xi(M)] \vee \xi(N/L) = [\tau \vee \xi(N/L)] \wedge \xi(M) = [\tau \vee \xi(M)] \wedge \xi(M) = \xi(M)$.

Corolario 2.31.- Sea M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_\sigma$ entonces, M es $\tau \wedge \sigma$-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Claramente $\tau \wedge \xi(M) \leq \tau \wedge \sigma$ y como $M \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$ de donde M es $\tau \wedge \sigma$-$\mathcal{A}$-módulo .

Finalizamos este capítulo con los siguientes ejemplos de $\mathcal{A}$-modulos

1.- Si M es un módulo decisivo entonces M es $\mathcal{A}$-módulo . En efecto, sea $\sigma \in R$-tors tal que $\chi(M) < \sigma \leq \chi(M) \vee \xi(M)$, claramente tenemos que $t_\sigma(M) \neq 0$ y como M es decisivo entonces $M \in \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto $\sigma = \chi(M) \vee \xi(M)$.

2.- Todo módulo cocrítico es $\mathcal{A}$-módulo [23, lema 3.5]

3.- Sea R un anillo, consideremos los módulos R/P donde P es un ideal primo. Afirmamos que R/P es un $\mathcal{A}$-módulo para cada primo P.

Demostración.- Sea $0 \neq I/P \subset R/P$, solo necesitamos probar que $R/P \in \mathcal{T}_{\chi(R/P) \vee \xi(J/P)}$. Sea $\tau = \chi(R/P) \vee \xi(I/P)$ y $0 \neq J/P = t_\tau(R/P)$. Claramente tenemos $I/P \subset J/P$, por otra parte $R/J \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $R/J \in \mathcal{F}_{\chi(R/P)}$ como J no es $\chi(R/P)$ -denso en R tenemos que $J \subset P$ [corolario 59.2 de [12]] de donde tenemos que $I \subset P$ por lo tanto $I/P = 0$ lo cual es imposible.

4.-Consideremos los módulos M tales que son libres de τ-torsión y los únicos submódulos τ-puros y totalmente invariantes de M son $\{0, M\}$ entonces, M es $\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Sea $0 \neq N \subset M$ y $\sigma = \chi(M) \vee \xi(N)$, claramente tenemos que $t_\sigma(M) \neq 0$ y es totalmente invariante, como $\sigma > \chi(M) \geq \tau$ por lo tanto $t_\sigma(M)$ es τ-puro totalmente invariante de donde $t_\sigma(M) = M$.

Nota.- Podemos considerar de manera general los módulos M libres de τ-torsión para los cuales los únicos submódulos τ-puros y totalmenete invariantes de cada submódulo $N \subset M$ son $\{0, N\}$, éstos módulos son $\mathcal{A}$-módulos y cada submódulo tiene la misma propiedad.

Recordando que dada $\tau \in R\text{-}tors$, R_τ denota al anillo R localizado en τ [[11] pag. 61] tenemos el siguiente ejemplo.

5.- Sea R un anillo y M un R-módulo, si $M_{\chi(M)}$ es decisivo en $R_{\chi(M)}$ -tors entonces, M es un $\mathcal{A}$-módulo en R-mod.

Demostración.- Si demostramos $E_{\chi(M)}(M)$ es $\mathcal{A}$-módulo ya terminamos,entonces supongamos que M es $\chi(M)$ -inyectivo. Ahora sea $\sigma \in R$-tors tal que $\chi(M) < \sigma \leq \chi(M) \vee \xi(M)$ tenemos que $t_\sigma(M) \neq 0$, consideremos la siguiente sucesión.

$0 \longrightarrow t_\sigma(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t_\sigma(M) \longrightarrow 0$ en R-mod Supongamos que $t_\sigma(M) \neq 0$, tenemos que $M/t_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\chi(M)}$ de donde $t_\sigma(M)$ es $\chi(M)$ -puro y por lo tanto es absolutamente $\chi(M)$ -puro. Por otra parte tenemos $Hom_R(\frac{M}{t_\sigma(M)}, E(M)) \neq 0 \Rightarrow Hom_{R_{\chi(M)}}(\frac{M}{t_\sigma(M)}, E(M)) \neq 0 \Rightarrow M \notin \mathcal{F}_{\xi_{R_{\chi(M)}}(M/t_\sigma(M))}$ de donde $M \in \mathcal{T}_{\xi_{R_{\chi(M)}}(M/t_\sigma(M))}$ por lo tanto $\xi_{R_{\chi(M)}}(M) = \xi_{R_{\chi(M)}}(M/t_\sigma(M))$, entonces $Hom_{R_{\chi(M)}}(t_\sigma(M), E(M/t_\sigma(M))) \neq 0 \Rightarrow Hom_R(t_\sigma(M), E(M/t_\sigma(M))) \neq 0$ pero esto es imposible.

Observación.- Si en el ejemplo anterior pedimos que $\chi(M)$ sea perfecta, entonces vale el recíproco.

En efecto, sea $\sigma \in R_{\chi(M)}$ -tors, supongamos que $t_\sigma(M) \neq 0$ entonces consideremos la sucesión $0 \longrightarrow t_\sigma(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t_\sigma(M) \longrightarrow 0$ por 17.1 de [11], tenemos que $M/t_\sigma(M) \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ por lo tanto $\chi_R(t_\sigma(M)) = \chi_R(M) = \chi_R(M/t_\sigma(M))$ de donde $Hom_R(t_\sigma(M), E(M/t_\sigma(M)) \neq 0 \Rightarrow Hom_{R_{\chi(M)}}(t_\sigma(M), E(M/t_\sigma(M)) \neq 0$ lo cual es imposible.

6.- Si σ es un coátomo de $spcl(\tau)$ y $0 \neq M \in \mathcal{T}_\tau \bigcap \mathcal{F}_\sigma$ entonces, M es σ-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Tenemos que $\sigma < \sigma \vee \xi(M) \leq \tau$, como σ es coátomo tenemos que $\sigma \vee \xi(M) = \tau$, ahora si $\sigma < \alpha \leq \sigma \vee \xi(M)$ tenemos que $\alpha = \sigma \vee \xi(M)$

7.- Si M es no singular y $\chi(M)$ es un coátomo de R-$tors$, entonces M es τ_g-$\mathcal{A}$-módulo . ver [26].

CAPITULO III

$\mathcal{C}$-modulos y $\mathcal{C}$-dimensión

En este capítulo desarrollamos la teoría de los $\mathcal{C}$ -módulos que tienen como caso particular a los módulos cocríticos (Rsp-módulos) y a los $\mathcal{A}$-módulos ($\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ -módulos), también describiremos cuando un módulo M es σ-Rsp-módulo, no necesariamente debe ser cocrítico , pero hacemos notar que si M es cocrítico y σ-Rsp-módulo entonces M es σ-cocrítico , con respecto a los $\mathcal{A}$-módulos veremos que M es σ-$\mathcal{A}$-módulo si y solo si M es σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo. Definimos también una filtración en R-tors que llamaremos la $\mathcal{C}$ -filtración, que para los casos donde $\mathcal{C} = Rsp$ o $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tenemos la filtración de Gabriel y la filtración atómica respectivamente, también estudiamos la $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-filtración la cual es definida usando los módulos decisivos.

Al final de éste capítulo obtenemos caracterizaciones de anillos semiartinianos y anillos artinianos por medio del uso de las clases $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, obtenemos también una generalización del teorema de Krull-Akizuki en nuestro contexto no conmutativo.

Finalizamos este capítulo con una caracterización de los anillos convenientes estudiados por Golán en [12], en términos de los $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulos y de la $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimensión.

Definición 3.1.- Sea $\mathcal{C} \subset$ *R-irr* y$\sigma \in$ *R-prop* diremos que un R-módulo $M \neq 0$ es un σ-$\mathcal{C}$-módulo si:

i) $M \in \mathcal{F}_\sigma$ y $\forall N \subset M,\ N \neq 0\ \chi(N) = \chi(M) \in \mathcal{C}$

ii)$\forall L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow \sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$

iii) Si $N \subset M$ es módulo *Dec* entonces, $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$

En todo lo que sigue $\mathcal{C}$ denotará un subconjunto no vacio de *R-irr*.

Proposición 3.2.-

(1) Si M es un σ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, $\forall N \neq 0$ tal que $N \subset M$ tenemos que N es σ-$\mathcal{C}$-módulo

(2) La condición (ii) de la definición 2.24 es equivalente a la condición: $\forall L \subset N \subset M$ tal que $N/L \notin \mathcal{T}_\sigma \Rightarrow \sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$.

(3) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset R\text{-}irr$ y M es σ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, M es σ-$\mathcal{D}$-módulo . Más generalmente, si M es un σ-$\mathcal{C}$-módulo y $\mathcal{D} \subset R\text{-}irr$ es tal que $\chi(N) \in \mathcal{D}, \forall$ submódulo $0 \neq N \subset M$, entonces M es σ-$\mathcal{D}$-módulo

Demostración.-

(1) Como M es $\mathcal{C}$-módulo es claro que si $N \neq 0$ y $N \subset M$ N satisface las dos primeras condiciones de la definición , para la tercera condición consideremos $L \subset N$ un módulo Dec entonces, $\sigma \vee \xi(L) = \sigma \vee \xi(M)$ pero $\sigma \vee \xi(L) \leq \sigma \vee \xi(N) \leq \sigma \vee \xi(M)$ así $\sigma \vee \xi(L) = \sigma \vee \xi(N)$.

(2) En un sentido supongamos que $L \subset N \subset M$ tal que $N/L \notin \mathcal{T}_\sigma$, si $N/L \in \mathcal{F}_\sigma$ por la condición (ii) tendriamos que $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$ y habriamos terminado. Supongamos entonces que $t_\sigma(N/L) = K/L \neq 0$ entonces $0 \neq N/K \in \mathcal{F}_\sigma$ y así $\sigma \vee \xi(N/K) = \sigma \vee \xi(N)$, pero $\sigma \vee \xi(N/K) \leq \sigma \vee \xi(N/L) \leq \sigma \vee \xi(N)$ por lo tanto $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$. En el otro sentido supongamos que $L \subset N \subset M$ es tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma$ por lo tanto $N/L \notin \mathcal{T}_\sigma \Rightarrow \sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$.

(3) Si M es σ-$\mathcal{C}$-módulo es inmediato que M es σ-$\mathcal{D}$-módulo ya que la condición (i) se cumple pués $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ y las condiciones $(ii), (iii)$ son independientes de la $\mathcal{C}$

Proposición 3.3.- Sea M un σ-$\mathcal{C}$-módulo y $\tau \in R\text{-}prop$ tal que $\tau \geq \sigma$, supongamos que $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces, M es τ-$\mathcal{C}$-módulo

Demostración.- La condición (i) se cumple trivialmente. Ahora sea $L \subset N \subset M$

tal que $N/L \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $N/L \in \mathcal{F}_\sigma$ de donde $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$ pero $\sigma \vee \xi(N/L) \leq \tau \vee \xi(N/L)$ por lo tanto $N \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(N/L)}$ de donde $\tau \vee \xi(N/L) = \tau \vee \xi(N)$ de ésta manera se cumple (ii).

Supongamos ahora que $N \subset M$ es módulo Dec entonces, $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$, pero $\sigma \vee \xi(N) \leq \tau \vee \xi(N)$ por lo tanto $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$.

Definición 3.4.- Sea M un R-módulo y $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$, diremos que M es $\mathcal{C}$-módulo si $\exists \sigma \in R\text{-}prop$ tal que M es σ-$\mathcal{C}$-módulo

Proposición 3.5.- Un R-módulo M es $\mathcal{C}$-módulo $\Leftrightarrow$ M es $\chi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo

Demostración.- $\Rightarrow]$ Como M es $\mathcal{C}$-módulo $\exists \sigma \in R\text{-}prop$ tal que M es σ-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto $M \in \mathcal{F}_\sigma$ de donde $\sigma \leq \chi(M)$ y por 3.3 M es $\chi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo

$\Leftarrow]$ es obvia.

Observación.- Si M es $\mathcal{C}$-módulo entonces, $\forall N \subset M$, $N \neq 0$ N es σ-$\mathcal{C}$-módulo

Proposición 3.6.- Si M es un σ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, M es $\sigma \wedge \xi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo

Demostración.-

i) $M \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow M \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \xi(M)}$ y $\forall N \neq O, N \subset M$ tenemos que $\chi(N) \in \mathcal{C}$

ii) Sea $L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \xi(M)}$ y como $N/L \in \mathcal{T}_{\xi(M)} \Rightarrow N/L \notin \mathcal{T}_\sigma$ por lo tanto $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$.

$(\sigma \wedge \xi(M)) \vee \xi(N/L) = (\sigma \vee \xi(N/L)) \wedge \xi(M) = (\sigma \vee \xi(N)) \wedge \xi(M) = (\sigma \wedge \xi(M)) \vee \xi(N)$.

iii) Si $N \subset M$ es módulo Dec entonces, $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$; Ahora $[\sigma \wedge \xi(M)] \vee \xi(N) = [\sigma \vee \xi(N)] \wedge \xi(M) = [\sigma \vee \xi(M)] \wedge \xi(M) = (\sigma \wedge \xi(M)) \vee \xi(M)$.

Corolario 3.7.- Sea $M \neq 0$ un R-módulo y $\sigma \in R\text{-}tors$, supongamos que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces, M es σ-$\mathcal{C}$-módulo $\Leftrightarrow$ M es $\sigma \wedge \xi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo

Demostración.- $\Rightarrow$] Obvia

$\Leftarrow$] Como M es $\sigma \wedge \xi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo y $\sigma \wedge \xi(M) \leq \sigma$, y $M \in \mathcal{F}_\sigma$ tenemos que M es en σ-$\mathcal{C}$-módulo

Corolario 3.8.- Si M es σ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, $\forall \tau \in R\text{-}tors$ tal que $M \in \mathcal{T}_\tau$ se tiene que M es $(\sigma \wedge \tau)$-$\mathcal{C}$-módulo

Demostración.- Esto se sigue de $\sigma \wedge \xi(M) \leq \sigma \wedge \tau$ y $M \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$

Proposición 3.9.- Si M es cocrítico y σ-$\mathcal{C}$-módulo para alguna $\sigma \in R\text{-}tors$ entonces M es σ-cocrítico

Demostración.- Supongamos que $\exists N \neq 0, N \subset M$ tal que $0 \neq M/N \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces, $\sigma \vee \xi((M/N)) = \sigma \vee \xi(M) \Rightarrow M \notin \mathcal{F}_{\xi(M/N)}$ de donde $Hom(M/N, E(M)) \neq 0$, pero por otra parte $M/N \in \mathcal{T}_{\chi(M)}$ por lo tanto $Hom(M/N, E(M)) = 0$ pero ésto es imposible, así hemos probado que M es σ-cocrítico

Observación.- Nótese que la proposición anterior se cumple para cualquier $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$.

Corolario 3.10.- Si M es σ-Rsp-módulo entonces, $\forall N \subset M$, $N \neq 0$ N contiene un R-módulo σ-cocrítico

Demostración.- Sea $0 \neq N \subset M$ tenemos que $\chi(N) \in Rsp$ así existe un módulo cocrítico C_N tal que $\chi(C_N) = \chi(N)$ y claramente podemos suponer que $C_N \hookrightarrow N$. Como N es σ-Rsp-módulo entonces, C_N es σ-Rsp-módulo y por la proposición anterior C_N es σ-cocrítico

Observación.- El corolario anterior dice mas , en realidad podemos encontrar $L \subset_e N$ tal que L es suma directa de módulos σ-cocríticos

Recordando ahora a el conjunto $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{\chi(M) \mid M$ es $\mathcal{A}$-módulo $\}$ tenemos la siguiente:

Proposición 3.11.- Supongamos que $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces, M es σ-Rsp-módulo $\Leftrightarrow \chi(M) \in Rsp$ y $\forall L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow \exists \pi \in Rsp$ fija y un módulo π-cocrítico contenido en N/L.

Demostración.- $\Rightarrow$] Sabemos que $\chi(M) = \chi(C)$ con C un módulo cocrítico , supongamos que existe $C' \subset M$ cocrítico , como ambos son módulos Dec tenemos que $\sigma \vee \xi(C) = \sigma \vee \xi(M) = \sigma \vee \xi(C')$. Es claro que $\forall N \subset M$, $N \neq 0, \chi(N) \in Rsp$ y por lo tanto N contiene un cocrítico y así tenemos que $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(C) = \sigma \vee \xi(M)$ para cualquier cocrítico $C \subset N$ o $C \subset M$.

Ahora sea $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma$ tenemos $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(C)$ por lo tanto $N/L \notin \mathcal{F}_{\xi(C)}$ y $Hom(C, E(N/L)) \neq 0$.

Afirmación.- $N/L \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$; En efecto si, $t_{\chi(M)}(N/L) = N'/L \neq 0$ tenemos que $N'/L \in \mathcal{T}_{\chi(C)} \Rightarrow Hom(N'/L, E(C)) = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{F}_{\xi(N'/L)}$, pero como $N'/L \in \mathcal{F}_\sigma$ tenemos $\sigma \vee \xi(N'/L) = \sigma \vee \xi(N') = \sigma \vee \xi(C)$ de donde $C \notin \mathcal{F}_{\xi(N'/L)}$ y esto es imposible. De éste modo hemos probado que $N/L \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ por lo tanto $\exists C'$-cocrítico , $C' \subset C$ talque $C' \hookrightarrow N/L$ y claramente $\pi = \chi(M) = \chi(C) = \chi(C')$ es la que me sirve.

$\Leftarrow$] Como $M \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces $\exists C \subset M$ π-cocrítico por lo tanto $\chi(C) = \pi$; Afirmación.- Existe una suma directa de submódulos π-cocríticos de M que es esencial en M.

En efecto, supongamos que $\bigoplus C_i$ donde cada C_i es π-cocrítico no es esencial en M entonces, $\exists 0 \neq N \subset M$ tal que $\bigoplus C_i \bigcap N = 0$ pero $N \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow N$ contiene un π-cocrítico C' lo cual es imposible.

Por otra parte es claro que cada submódulo $N \subset M$ contiene una suma directa esencial de π-cocríticos por lo tanto $\chi(N) = \chi(C) = \chi(M) = \pi$, de donde tenemos que $\chi(N) \in Rsp\, \forall N \subset M$. Ahora sea $L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\sigma$, entonces N/L contiene un π-cocrítico C por lo tanto la suma directa de los π-cocríticos es esencial en N/L de donde $\pi = \chi(\bigoplus C) = \chi(N/L)$

Afirmación $\sigma \vee \xi(N/L) = \sigma \vee \xi(N)$; en efecto, si $N \neq \mathcal{T}_{\sigma \vee \xi(N/L)}$, sea $K = t_{\sigma \vee \xi(N/L)}(N) \neq 0$ entonces, tenemos $N/K \in \mathcal{F}_{\sigma \vee \xi(N/L)} \Rightarrow N/K \in \mathcal{F}_\sigma$ y $N/K \in \mathcal{F}_{\xi(N/L)}$ por lo tanto $Hom(N/L, E(N/K)) = 0 \Rightarrow N/L \in \mathcal{T}_{\chi(N/K)} = \mathcal{T}_\pi = \mathcal{T}_{\chi(N)} = \mathcal{T}_{\chi(N/L)}$ pero ésto es imposible. Finalmente, si $N \subset M$ es Dec entonces tenemos que $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$ ya que si $0 \neq M/K \in \mathcal{F}_{\sigma \vee \xi(N)} \Rightarrow M/K \in \mathcal{F}_{\xi(N)} \Rightarrow N \in \mathcal{T}_{\chi(M/K)} = \mathcal{T}_{\chi(M)} = \mathcal{T}_\pi = \mathcal{T}_{\chi(N)}$ pero ésto es imposible.

Proposición 3.12.- Si M es τ-$\mathcal{A}$-módulo entonces, M es τ-$\mathcal{C}_\mathcal{A}$-módulo (en particular si M es $\mathcal{A}$-módulo entonces, M es $\mathcal{C}_\mathcal{A}$-módulo)

Demostración.- i) $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\forall N \neq 0$, $N \subset M, \chi(N) = \chi(M)$ ya que M es τ-$\mathcal{A}$-módulo . Por lo tanto, $\chi(N) \in \mathcal{C}$.

ii) Sea $L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\tau$ sabemos que N/L es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\tau \vee \xi(N/L) = \tau \vee \xi(N)$.

iii) Si $N \subset M$ es Dec claramente tenemos que $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$ ya que ésto se cumple $\forall 0 \neq N \subset M$

Proposición 3.13.- Si M es $\mathcal{A}$-módulo y M es σ-$\mathcal{C}$-módulo para alguna $\sigma \in R\text{-}tors$ entonces, M es σ-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- Como M es $\mathcal{A}$-módulo sabemos que M es módulo Dec por lo tanto $\forall N \neq 0$ $N \subset M$ tenemos que N es módulo Dec así $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi(M)$.

Ahora sea $\tau \in R\text{-}tors$ tal que $\sigma < \tau \leq \sigma \vee \xi(M)$, debemos probar que $\tau = \sigma \vee \xi(M)$ para ello probaremos que $M \in \mathcal{T}_\tau$. Sea $N \neq 0$ tal que $N \in \mathcal{T}_\tau \bigcap \mathcal{F}_\sigma$

entonces, $\sigma < \sigma \vee \xi(N) \leq \tau \leq \sigma \vee \xi(M)$, como $N \in \mathcal{F}_{\sigma} \Rightarrow N \notin \mathcal{F}_{\xi(M)}$, por lo tanto $Hom(M, E(N)) \neq 0$ así existen $K \subset L \subset M$ tal que $0 \neq L/K \hookrightarrow N \in \mathcal{F}_{\sigma}$ pero M es σ-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto $\sigma \vee \xi(L/K) = \sigma \vee \xi(L) = \sigma \vee \xi(M)$ y en estas condiciones $M \in \mathcal{T}_{\sigma \vee \xi(L/K)} \subset \mathcal{T}_{\sigma \vee \xi(N)} \subset \mathcal{T}_{\tau}$ de donde $M \in \mathcal{T}_{\tau}$.

Corolario 3.14.- M es un σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo $\Leftrightarrow$ M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- $\Rightarrow$] Sea $0 \neq N \subset M$, tenemos que $\chi(N) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, por lo tanto $\chi(N) = \chi(L)$ con L un $\mathcal{A}$-módulo y así $Hom(L, E(N)) \neq 0$ de donde existen $K \subset T \subset L$ tal que $T/K \hookrightarrow N \in \mathcal{F}_{\chi(N)}$ por lo tanto T/K es $\mathcal{A}$-módulo, más aún T y T/K son $\chi(L)$ -$\mathcal{A}$-módulo así por 2.21 tenemos $\chi(T/K) = \chi(T) = \chi(L) = \chi(N)$, Sea $L_N = T/K$ entonces, $L_N \hookrightarrow N$ pero N es σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo por lo tanto L_N es σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo y así L_N es σ-$\mathcal{A}$-módulo en particular M contiene a L_N de donde $\sigma \vee \xi(L_N) = \sigma \vee \xi(M)$ y de aquí M es σ-$\mathcal{A}$-módulo

$\Leftarrow$] Es obvia.

A continuación introducimos la filtración atómica en R-tors.

En R-tors definimos una cadena $\{\alpha_i\}$ como sigue :

(1) $\alpha_{-1} = \xi$

(2) Si i no es un ordinal límite $\alpha_i = \alpha_{i-1} \vee \xi(\{M \in R-mod \mid M$ es α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo $\})$

(3) Si i es ordinal límite $\alpha_i = \vee_{j<i}\alpha_j$

A ésta cadena se le conoce como la filtracion Atómica. Nuevamente como R-tors es un conjunto existe un ordinal i tal que $\alpha_i = \alpha_{i+r}$ para todo ordinal r, para éste ordinal denotaremos $\alpha_i = a$

Definición 3.15.- Un R-módulo M diremos que tiene dimensión Atómica si existe ordinal k tal que $M \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$, M tiene dimensión Atómica igual a i, si i es el mínimo ordinal tal que $M \in \mathcal{T}\alpha_i$, ésto se denotará $A\text{-}dim(M) = i$.

Definición 3.16.- Un anillo R tiene dimensión Atómica izquierda, si R como R-módulo izquierdo tiene dimensión Atómica.

Observación.- Un anillo R tiene dimensón Atómica izquierda si y solo si M tiene dimensión Atómica para todo $M \in R$-mod

Proposición 3.17.- Sea M un R-módulo y $N \subset M$ submódulo entonces, M tiene dimensión atómica si y solo si N y M/N tienen dimensión atómica , en éste caso $A\text{-}dim(M) = sup\{A\text{-}dim(N), A\text{-}dim(M/N)\}$.

Proposición 3.18.- Un anillo R tiene dimensión atómica si y solo si para toda $\tau \in R - prop$ existe un τ-$\mathcal{A}$-módulo M.

Demostración.- $\Rightarrow]$ Supongamos que $A - dim(R) = k$ y sea $\tau < \chi$ como $\chi = \alpha_k$ entonces $\exists i$ ordinal mínimo tal que $\alpha_i \not\leq \tau$, i no es ordinal límite, por lo tanto $\alpha_{i-1} \leq \tau$, pero $\alpha_i = \alpha_{i-1} \vee \xi\{M \mid M$ es α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo $\}$ de donde existe M α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo tal que $M \notin \mathcal{T}_\tau$, pero M es α_{i-1}-decisivo y $\alpha_{i-1} \leq \tau$ por lo tanto $M \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow M$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo

$\Leftarrow]$ Supongamos que R no tiene $A - dim$ y sea $\alpha_k < \chi$ tal que $\alpha_k = \alpha_{k+1}$, pero sabemos que $\exists M$ α_k-$\mathcal{A}$-módulo y por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\alpha_{k+1}} = \mathcal{T}_{\alpha_k} \Rightarrow M \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$, pero ésto es imposible por lo tanto $\alpha_k = \chi$.

Corolario 3.19.- Si R tiene $A - dim$ entonces $\forall M \neq 0$ M contiene un $\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- $\chi(M) < \chi$ por lo tanto $\exists N$ un $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo $\Rightarrow N \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ por lo tanto $Hom(N, E(M)) \neq 0$ y así $\exists L \subset N' \subset N$ tal que $0 \neq N'/L \hookrightarrow M$ y

N'/L es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo .

Recordando la filtración de Gabriel $\{\tau_i\}$ tenemos la siguiente:

Proposición 3.20.- Sean $\{\tau_i\}$ y $\{\alpha_i\}$ las filtraciones de Gabriel y Atómica respectivamente entonces, $\tau_i \leq \alpha_i$ para todo ordinal i.

Demostración.- Por inducción transfinita, si $i = 0$ tenemos $\tau_0 = \xi = \alpha_0$. Supongamos que el resultado vale $\forall j < i$ tenemos dos casos

Caso 1.- Supongamos que i es ordinal límite entonces tenemos que $\tau_i =_{j<i} \vee \tau_j \leq \vee_{j<i} \alpha_i = \alpha_i$.

Caso 2.- Supongamos que i no es un ordinal límite y $\tau_{i-1} \leq \alpha_{i-1}$, ahora sea M un τ_{i-1}-cocrítico , como $\alpha_{i-1} \in gen(\tau_{i-1})$ entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_{i-1}}$ o $M \in \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$.

Si se da el primer caso claramente tenemos que $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ y por lo tanto $\tau_i \leq \alpha_i$.

Si $M \in \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$ y como M es τ_{i-1}-cocrítico , M es τ_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo por lo tanto M es α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo y así $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ de donde $\tau_i \leq \alpha_i$.

Corolario 3.21.- Si M es un R-módulo con dimensión de Gabriel entonces, M tiene dimensión Atómica y *G-dim*$(M) \geq$ *A-dim*(M).

Existen anillos donde R tiene dimensión Atómica y R no tiene dimensión de Gabriel como veremos en el ejemplo al final de éste trabajo.

Proposición 3.22.- Supongamos que R tiene dimensión Atómica izquierda entonces, si $\sigma < \tau \leq \chi$ existe un R-módulo M tal que M es σ-$\mathcal{A}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_\tau$.

Demostración.- Supongamos que no existe $M \neq 0$ tal que M es un σ-$\mathcal{A}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_\tau$. Sea $\{\alpha_i\}$ la filtración atómica, como $\sigma < \chi$ existe un ordinal h mínimo tal que $\alpha_h \not\leq \sigma$; h no es ordinal límite.

Afirmación.- $\alpha_i \wedge \tau \leq \sigma \forall i$ ordinal.

En efecto si $i < h$ claramente tenemos que $\alpha_i \wedge \tau \leq \sigma$. Supongamos que $\forall j < i$ tenemos que $\alpha_j \wedge \tau \leq \sigma$ entonces tenemos dos casos.

Caso 1.- Si i es ordinal límite, tenemos que $\alpha_i =_{j<i} \vee \alpha_j$ por lo tanto $\alpha_i \wedge \sigma = (\vee \alpha_j) \wedge \sigma = \vee(\alpha_j \wedge \tau) \leq \sigma$

Caso 2.- Si i no es ordinal límite, sea $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\alpha_i \wedge \tau} \bigcap \mathcal{F}_\sigma$, de donde $M \in \mathcal{F}_{\alpha_j} \forall j < i$, ya que $\alpha_j \wedge \tau \leq \sigma$, en particular $M \in \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \bigcap \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$ por la definición de la filtración atómica tenemos que $\exists N$ un α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo tal que $Hom(N, E(M)) \neq 0$ por lo tanto $\exists K \subset L \subset N$ tal que $0 \neq L/K \hookrightarrow M$ y como $M \in \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}} \Rightarrow L/K$ es α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo ; por otra parte sabemos que $M \in \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto $L/K \in \mathcal{T}_\tau \Rightarrow L/K$ es $(\alpha_{i-1} \wedge \tau)$-$\mathcal{A}$-módulo , pero como $L/K \hookrightarrow M \in \mathcal{F}_\sigma$ y $\alpha_{i-1} \wedge \tau \leq \sigma$ entonces tenemos que L/K es σ-$\mathcal{A}$-módulo y $L/K \in \mathcal{T}_\tau$ lo cual es imposible, por lo tanto $\alpha_i \wedge \tau \leq \sigma \forall i$ ordinal; en particular para el ordinal k tal que $\chi = \alpha_k$ tenemos que $\alpha_k \wedge \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \leq \sigma$ lo cual es imposible.

Proposición 3.23.- Si R es un anillo tal que para todo $0 \neq M \in R-mod$, M contiene un submódulo cocrítico entonces, $Rsp = \mathcal{C}_\mathcal{A}$. (Los anillos Definite izquierdos satisfacen esta condición, ver [12] capítulo 56)

Demostración.- Sabemos que $Rsp \subset \mathcal{C}_\mathcal{A}$, ahora sea $\tau \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$ y $\tau = \chi(M)$ con M un τ-$\mathcal{A}$-módulo por otro lado sabemos que $\exists N \subset M$ tal que N es cocrítico entonces, N es $\mathcal{A}$-módulo y por 2.24 tenemos $\chi(M) = \chi(N)$ de donde $\tau \in Rsp$

Nota.- Si R es un anillo con dimensión de Gabriel izquierda entonces, se cumple la condición de la proposición 3.23

Proposición 3.24.- Sea R un anillo con dimensión Atómica izquierda, entonces $\mathcal{C}_\mathcal{A} = R\text{-}irr - \{\chi\}$.

Demostración.- sea $\tau \in R\text{-}irr\text{-}\{\chi\}$, por la proposición 3.18 existe un τ-$\mathcal{A}$-módulo

N, por tanto $\tau \vee \xi(N)$ es τ-átomo. Sea $\sigma_1 = \tau \vee \xi(N)$

Afirmación σ_1 es el único τ-átomo. En efecto, supongamos que existe σ_2 tal que es τ-átomo y $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces $\tau = \sigma_1 \wedge \sigma_2$ como τ es irreducible entonces, $\tau = \sigma_1$ o $\tau = \sigma_2$ pero ésto claramente es imposible. Ahora supongamos $\tau = \chi(M)$ sabemos que $N \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $Hom_R(N, E(M)) \neq 0$ así existe $f \neq 0$ $f\colon N \to E(M)$ nuevamente como $M \in \mathcal{F}_\tau$ existen $K \subset L \subset N$ tal que $0 \neq L/K$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo y se sumerge en M, sea $T = L/K$ y $\sigma = \chi(T)$ entonces, $\sigma = \chi(T) \geq \chi(M) = \tau$. Afirmación $\sigma = \tau$, si no es así entonces $\sigma > \tau$ y por la proposición 3.22 existe H un τ-$\mathcal{A}$-módulo tal que $H \in \mathcal{T}_\sigma$, pero solo hay un τ-átomo por lo tanto $\sigma_1 = \tau \vee \xi(H) = \tau \vee \xi(T)$ y por la proposición 2.16 tenemos $\chi(H) = \chi(T)$ así $H \in \mathcal{F}_{\chi(T)}$ pero ésto es imposible ya que H es de σ-torsión por lo tanto $\sigma = \tau$ y como $\sigma \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$ tenemos $\tau \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$

Corolario 3.25.- Si R es un anillo con dimensión de Gabriel izquierda entonces, $R\text{-}sp = \mathcal{C}_\mathcal{A} = R\text{-}irr - \{\chi\}$

Demostración.- Se sigue de el corolario 3.21 y de la proposición 3.23

Si $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ definimos la $\mathcal{C}$-filtración $\{\mathcal{C}_i\}$ en $R\text{-}tors$ como sigue:

1) $c_{-1} = \xi$

2) Si i no es ordinal límite $c_i = c_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M$ es c_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo $\}$

3) Si i es ordinal límite $c_i = \vee_{j<i} c_j$

A la cadena anterior la llamaremos la $\mathcal{C}$-filtración ; nuevamente $\forall$ ordinal i tal que $c_i = c_{i+1}$, para éste ordinal simplemente escribimos $c_i = \alpha_c$.

De manera completamente análoga a la Dimensión de Gabriel se define la $\mathcal{C}$-dimensión para un R-módulo izquierdo y para un anillo R.

De manera más general, dada $\tau \in R\text{-}tors$ y $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$, podemos definir, la τ-$\mathcal{C}$-filtración y la correspondiente dimensión de manera natural, es decir, 1) $c_{-1} = \tau$ y 2 y 3 se definen exactamente igual que antes; en éstas condiciones, diremos que un anillo R tiene τ-$\mathcal{C}$-dimensión izquierda si y solo si R como R-modulo izquierdo tiene τ-$\mathcal{C}$-dimensión.

Lema 3.26.- Si $\tau \in R\text{-}tors$ entonces $\tau \vee \xi(\{M \mid M$ es τ-cocrítico $\} = \tau \vee \xi(\{M \mid M$ es τ-Rsp-módulo$\})$

Demostración.- Claramente si M es τ-cocrítico tenemos que M es τ-Rsp-módulo asi una desigualdad es obvia; para la otra sea M un τ-Rsp-módulo, sabemos que existe $N \subset M$ submódulo cocrítico por lo tanto N es Dec y así $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee M$ de donde tenemos la otra desigualdad.

Proposición 3.27.- Si $\mathcal{C} = Rsp$ entonces la $\mathcal{C}$-filtración es la filtración de Gabriel (por lo tanto la Rsp-dimensión es la dimensión de Gabriel)

Demostración.- Por inducción transfinita; Sea $\{\tau_i\}$ la filtración de Gabriel

1) $c_{i-1} = \xi = \tau_{-1}$

2) Supongamos ahora que i no es un ordinal límite y que $\forall j < i, c_j = \tau_j$ entonces, $\tau_i = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M$ es τ_{i-1}-cocrítico $\}) = \tau_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M$ es τ_{i-1}-Rsp-módulo $\}) = c_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M$ es c_{i-1}-Rsp-módulo $\}) = c_i$

3) Si i es un ordinal límite y $\forall j < i, c_j = \tau_j$, tenemos que $\tau_i = \vee_{j<i}\tau_j = \vee_{j<i}c_j = c_i$

Observación.- La $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-filtración es la filtración atómica.

Es claro que si M es un R-módulo y $N \subset M$ es un submódulo entonces, M tiene $\mathcal{C}$-dimensión $\Leftrightarrow$ N y M/N tienen $\mathcal{C}$-dimensión y en éste caso $\mathcal{C}\text{-}dim(M) = Sup\{\mathcal{C}$-

$dim(M/N), \mathcal{C}\text{-}dim(N)\}$.

Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ al conjunto de todas las teorías de torsión fuertemente irreducibles, tenemos ahora los siguientes resultados.

Proposición 3.28.- Si D es un módulo decisivo entonces, D es un $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo.

Demostración.- Como D es decisivo sabemos que $\chi(D) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ [12] proposición 32.7 y como D es $\chi(D)$ -$\mathcal{A}$-módulo entonces, D es $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo y así D es $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo .

Proposición 3.29.- Sea $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ M un σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo entonces $\sigma = \chi(M)$

Demostración.- Como M es σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo tenemos que M es σ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo de donde M es σ-$\mathcal{A}$-módulo por otra parte sabemos que $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y así tenemos que $\chi(M) = \sigma$.

Proposición 3.30.- M es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo si y solo si $\xi(M)$ es un átomo de R-tors.

Demostración.- $\Rightarrow$] M es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo entonces, M es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo $\Rightarrow$ M es ξ-$\mathcal{A}$-módulo de donde $\xi(N)$ es un átomo de R-tors.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\xi(M)$ es un átomo de R-tors entonces si $0 \neq N \subset M$ tenemos que $\xi(N) = \xi(M)$ de donde M es un módulo decisivo por lo tanto $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. Por otra parte sabemos que M es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo por lo tanto M es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo y tenemos el resultado deseado.

Denotaremos la $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-filtración como $\{d_i\}$, en estas condiciones tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.31.- $d_i \leq \alpha_i$ donde $\{\alpha_i\}$ es la filtración atómica.

Demostración.- Demostración por inducción transfinita.

Si $i = 0$ tenemos que $d_0 = \xi\{M \mid M$ es ξ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$\mathcal{A}$-módulo $\} = \{M \mid \xi(M)$ es átomo de R-$tors\} = \xi(R\text{-}simp) = \alpha_0$.

Supongamos que el resultado vale para toda $j < i$, debemos demostrar que el resultado vale para i.

Primer caso.- Si i es ordinal límite tenemos que $d_i = \vee_{j<i} d_j \leq \vee_{j<i}\alpha_j = \alpha_i$.

Segundo caso.- Si i no es ordinal límite tenemos que $d_i = d_{i-1} \vee \xi\{M \mid M$ es d_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo $\}$, si M es d_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo $\Rightarrow M$ es d_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo $\Rightarrow$ M es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo ;por la hipótesis de inducción tenemos que $d_{i-1} \leq \alpha_{i-1}$.

Por otra parte si $M \in \mathcal{T}_{\alpha_{i-1}}$ entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$, si $M \notin \mathcal{T}_{\alpha_{i-1}}$ como M es d_{i-1}-decisivo tenemos que $M \in \mathcal{F}_{\alpha i-1} \Rightarrow$ M es α_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo $\Rightarrow M \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ de esta forma hemos probado que $d_{i-1} \leq \alpha_i$.

Corolario 3.32.- Si R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimensión entonces R tiene dimensión atómica.

Tenemos como corolario la siguiente caracterización de los anillos semiartinianos.

Corolario 3.33.- R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimensión $= 0$ si y solo si R es anillo semiartiniano izquierdo.

Proposición 3.34.- Un anillo R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimensión si y solo si $\forall\tau \in R$-prop $\exists$ un módulo decisivo D tal que D es τ-$\mathcal{A}$-módulo

Demostración.- $\Rightarrow$] Sea $\tau \in R$-prop, sabemos que existe un ordinal mínimo no límite i tal que $d_i \not\leq \tau$, por lo tanto existe M un d_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo tal que $M \notin \mathcal{T}_\tau$ de donde tenemos que M es d_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo $\Rightarrow$ M es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo .

Por otra parte sabemos que $d_{i-1} \leq \tau \Rightarrow M \in \mathcal{F}_\tau$, por lo tanto $\chi(M) \geq \tau$ y M es τ-$\mathcal{A}$-módulo además $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ de donde existe un módulo decisivo D tal que $\chi(M) = \chi(D)$ [12] prop. 32.7 de éste modo $\chi(M) \geq \tau \Rightarrow D \in \mathcal{F}_\tau$ y existen

$L \subset N \subset M$ tal que $0 \neq N/L \hookrightarrow D \in \mathcal{F}_\tau$ de donde N/L es τ-$\mathcal{A}$-módulo de éste modo tenemos que N/L es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y es decisivo.

$\Leftarrow$] Supongamos que R no tiene $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-dimensión y que i es el ordinal tal que $d_i = d_{i+1}$. Como $d_i < \chi$ entonces, existe un módulo decisivo D tal que D es d_i-$\mathcal{A}$-módulo por lo tanto D es d_i-$\mathcal{C}_\mathcal{A}$-módulo y como $\chi(D) \in \mathcal{C}_\mathcal{D} \Rightarrow D$ es d_i-$\mathcal{C}_\mathcal{D}$-módulo $\Rightarrow D \in \mathcal{T}_{d_{i+1}}$ lo cual es imposible.

Proposición 3.35.- R tiene $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-dimensión si y solo si $\forall \tau < \sigma \leq \chi$ existe un decisivo D tal que $D \in \mathcal{T}_\sigma$ y D es τ-$\mathcal{A}$-módulo .

Demostración.- Sea h el mínimo ordinal tal que $d_h \not\leq \tau$, sabemos que h no es un ordinal límite. Supongamos que no existe decisivo D tal que $D \in \mathcal{T}_\sigma$ y D es τ-$\mathcal{A}$-módulo .

Afirmamos que $d_i \wedge \sigma \leq \tau$ para todo ordinal i. En efecto si $i < h$ sabemos que $d_i \leq \tau$ por lo tanto $d_i \wedge \sigma \leq \tau$, supongamos que el resultado vale para toda $j < i$.

Caso 1.- Si i es un ordinal límite, tenemos que $d_i = \vee_{j<i} d_j$ por lo tanto $d_i \wedge \sigma = (\vee d_j) \wedge \sigma = \vee(d_j \wedge \sigma) \leq \tau$

Caso 2.- Si i es un ordinal que no es límite, debemos probar que $d_i \wedge \sigma \leq \tau$, supongamos que existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{d_i \wedge \sigma} \bigcap \mathcal{F}_\tau$ entonces $\forall j < i$ tenemos que $M \in \mathcal{F}_{d_j}$, en particular $M \in \mathcal{F}_{d_{i-1}} \bigcap \mathcal{T}_{d_i}$, pero por la definición de la $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-filtración, existe N un $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-módulo tal que $Hom(N, E(M)) \neq 0$ de donde $\exists K \subset L \subset N$ tal que $L/K \hookrightarrow M$.

Por otra parte sabemos que N es d_{i-1}-$\mathcal{C}_\mathcal{D}$-módulo así N es d_{i-1}-$\mathcal{C}_\mathcal{A}$-módulo $\Rightarrow$ N es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo y como $M \in \mathcal{F}_{d_{i-1}} \Rightarrow L/K$ es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo ; tenemos entonces que N es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo y L/K es d_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo y como $L/K \hookrightarrow M$ tenemos que $L/K \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau \Rightarrow L/K$ es $d_{i-1} \wedge \sigma$-$\mathcal{C}_\mathcal{A}$-módulo y como $d_{i-1} \wedge \sigma \leq \tau \Rightarrow L/K$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo .

Por otra parte sabemos que $\chi(N) \in \mathcal{C}_\mathcal{D}$ por lo tanto existe un módulo decisivo

D tal que $\chi(N) = \chi(D)$ de donde $\chi(D) = \chi(N) = \chi(L/K) \geq \tau$ así $D \in \mathcal{F}_\tau$. Si ponemos $T = L/K$ tenemos que $\chi(T) = \chi(D) \Rightarrow Hom(T, E(D)) \neq 0 \Rightarrow$ que existen $S \subset W \subset T$ tal que $0 \neq W/S \hookrightarrow D \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto W/S es τ-$\mathcal{A}$-módulo y es decisivo lo cual es imposible; en estas condiciones tenemos que $d_i \wedge \sigma \leq \tau$ para todo ordinal i, así $\chi \wedge \sigma \leq \tau \Rightarrow \sigma \leq \tau$ lo cual es imposible.

Corolario 3.36.- R tiene $\mathcal{C_D}$-dim si y solo si $\forall \tau \in R$-prop, $\tau = \wedge\{\chi(M) \mid$ M es τ-$\mathcal{A}$-módulo decisivo$\}$

Demostración.- $\Rightarrow]$ Sea $\sigma = \wedge\{\chi(M) \mid$ es τ-$\mathcal{A}$-módulo y decisivo$\}$, claramente $\tau \leq \sigma$, si $\tau < \sigma$ entonces, existe un módulo decisivo D tal que D es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $D \in \mathcal{T}_\sigma$ pero esto es imposible.

$\Leftarrow]$ $\tau = \wedge\{\chi(M) \mid$ M es τ-$\mathcal{A}$-módulo y decisivo$\} \neq \chi$ por lo tanto existe M un τ-$\mathcal{A}$-módulo y M decisivo de donde R tiene $\mathcal{C_D}$-dimensión.

Tenemos también como consecuencia, el siguiente resultado sobre la estructura de la retícula *R-tors*

Corolario 3.37.- Si R tiene $\mathcal{C_D}$-dimensión entonces, todo elemento de *R-tors* es intersección de teorías de torsión fuertemente irreducibles.

Finalizamos éste capítulo dando una caracterización de los anillos semiartinianos y caracterizaciones de anillos artinianos utilizando el conjunto $\mathcal{C_D}$.

Proposición 3.38.- $\mathcal{C_D}$ no tiene cadenas con más de un elemento si y solo si para todo módulo decisivo D, existe un módulo simple S tal que $S \hookrightarrow D$.

Demostración.- $\Rightarrow]$ Sea D un módulo decisivo si D es simple ya terminamos, supongamos que D no es un simple entonces, sea $M \subset D$ un submódulo propio, como D es decisivo tenemos que $D \in \mathcal{T}_{\chi(D/M)}$ o $D \in \mathcal{F}_{\chi(D/M)}$.

Si $D \in \mathcal{T}_{\chi(D/M)}$ tenemos que $D/M \in \mathcal{T}_{\chi(D/M)} \Rightarrow D/M = 0$ de donde $D = M$ lo cual es imposible.

Si $D \in \mathcal{F}_{\chi(D/M)}$ tenemos que $\chi(D) \geq \chi(D/M)$. En éste punto podemos suponer que D es un módulo cíclico y $M \subset D$ es un submódulo máximo, por lo tanto $D/M = S$ es un módulo simple el cual es un decisivo, de donde $\chi(D) = \chi(S)$ y así $S \hookrightarrow D$.

$\Leftarrow$] Sean D y D' decisivos sabemos que existen S y S' simples tales que $S \hookrightarrow D$ y $S' \hookrightarrow D'$, como $\chi(S) = \chi(D)$ y $\chi(S') = \chi(D')$ tenemos claramente que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con más de un elemento

Si denotamos por *R-dec* a la clase de todos los módulos decisivos, entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.39.- Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

i) No hay cadenas con más de un elemento en $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y $\xi(R\text{-}dec) = \chi$

ii) R es semiartiniano izquierdo.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Afirmación $\xi(R\text{-}simp) = \xi(R\text{-}dec)$. En efecto, una desigualdad es obvia ya que cada simple es decisivo.

Ahora si D es un módulo decisivo, sabemos por la proposición anterior que existe un módulo simple S tal que $S \hookrightarrow D$ así que $D \notin \mathcal{F}_{\xi(S)} \Rightarrow D \in \mathcal{T}_{\xi(S)} \Rightarrow \xi(D) = \xi(S) \leq \xi(R\text{-}simp)$ por lo tanto $\xi(R\text{-}simp) = \xi(R\text{-}dec) = \chi$ de donde R es semiartiniano.

$ii) \Rightarrow i)$ Como R es semiartiniano todo módulo $M \neq 0$ contiene un módulo simple, en particular, si D es decisisvo existe S simple tal que $S \hookrightarrow D$ por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con más de un elemento

Por otra parte sabemos que $\xi(R\text{-}simp) = \chi$ y $\xi(R\text{-}simp) \leq \xi(R\text{-}dec)$ por lo tanto $\xi(R\text{-}dec) = \chi$.

Corolario 3.40.- Sea R un anillo tal que en $\mathcal{C}_\mathcal{D}$ no hay cadenas con más de un elemento entonces son equivalentes:

i) R es semiartiniano izquierdo.

ii) Para todo $M \neq 0$ existe un módulo decisivo D tal que $D \hookrightarrow M$.

iii) R tiene $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-dimensión izquierda.

iv) Para toda $\tau \in R\text{-}tors$, $\tau = \chi(\mathcal{C})$ para alguna $\mathcal{C} \subset R\text{-}dec$

v) Para toda $\tau \in R\text{-}tors$, $\tau = \xi(\mathcal{C})$ para alguna $\mathcal{C} \subset R\text{-}dec$

Demostración.-

$i) \Rightarrow ii)$ Claramente $\forall M \neq 0$ existe un simple S tal que $S \hookrightarrow M$ y S es decisisvo.

$ii) \Rightarrow i)$ Basta probar que $\xi(R\text{-}dec) = \chi$. Supongamos que $\xi(R\text{-}dec) < \chi$ entonces, existe $M \neq 0$ tal que $M \in \mathcal{F}_{\xi(R-dec)}$ pero, sabemos que hay un módulo decisivo D tal que $\mathcal{D} \hookrightarrow M$, pero ésto es imposible por lo tanto $\xi(R\text{-}dec) = \chi$.

$i) \Rightarrow iii)$ Si $\{d_i\}$ es la $\mathcal{C}_\mathcal{D}$ filtración, por 3.31 sabemos que $d_0 = \xi(simples)$ y como R es semiartiniano tenemos que $d_0 = \chi$ por lo tanto R tiene $\mathcal{C}_\mathcal{D}$-dimensión.

$iii) \Rightarrow i)$ Basta probar que $\xi(R\text{-}dec) = \chi$, si $\xi(R\text{-}dec) < \chi$ por 3.34 existe un decisivo D tal que D es $\xi(R\text{-}dec)$-$\mathcal{A}$-módulo pero ésto es imposible.

$iii) \Rightarrow iv)$ Por 3.36 dada $\tau \in R\text{-}prop$, $\tau = \wedge\{\chi(M) \mid$ M es τ-$\mathcal{A}$-módulo decisivo $\}$, por lo tanto $\tau = \chi\{M \mid$ M es τ-$\mathcal{A}$-módulo decisivo $\} = \chi\{D \mid D$ es decisivo y $D \in \mathcal{F}_\tau \}$.

$iv) \Rightarrow i)$ Tenemos claramente que $\forall \tau \in R\text{-}tors$, $\tau = \chi\{D \mid D$ es decisivo y $D \in \mathcal{F}_\tau \}$, ya que cada módulo decisivo contiene un módulo simple S tenemos que $\tau = \chi\{S \mid S$ es simple y $S \in \mathcal{F}_\tau \}$ en particular si $M \neq 0$ entonces existe un módulo simple S tal que $S \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ de donde $S \hookrightarrow M$ por lo tanto R es semiartiniano izquierdo.

$i) \Rightarrow v)$ Como R es semiartiniano izquierdo entonces, $\forall \tau \in$ *R-tors*, tenemos que $\tau = \xi(\mathcal{C})$ donde $\mathcal{C} \subset$ *R-simp* $\subset$ *R-dec*.

$v) \Rightarrow i)$ Sabemos que $\chi = \xi(\mathcal{C}) = \xi(R\text{-}dec)$, como $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas entoces, todo decisivo D contiene un simple y por lo tanto $\xi(R\text{-}simp) = \xi(R\text{-}dec) = \chi$.

Un teorema clásico del algebra conmutativa es el Teorema de Krull-Akizuki, que afirma que un anillo conmutativo neteriano es artiniano si y solo si cada ideal primo es un coátomo de la retícula de ideales de R.

En los siguientes resultados daremos caracterizaciones de anillos artinianos no conmutativos empleando la retícula *R-tors* en lugar de la retícula de ideales y los objetos de $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ en lugar de los ideales primos, nuestros resultados entonces pueden ser vistos como generalizaciones del Teorema Krull-Akizuki.

Proposición 3.41.- Sea R anillo neteriano izquierdo, son equivalentes:

i) R es anillo artiniano izquierdo.

ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ es el conjunto de coátomos de *R-tors*.

Demostración.- Sabemos que si R es anillo artiniano, R es anillo semiartiniano, por lo tanto los coátomos de *R-tors* son el conjunto $\{\chi(S) \mid S \text{ es simple }\}$.

Por otra parte, ya que R es semiartiniano, cada decisivo D contiene un simple, tenemos entonces que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \{\chi(D) \mid D \text{ es decisivo }\} = \{\chi(S) \mid S \text{ es simple }\}$, por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ es el conjunto de coátomos de R-tors.

$ii) \Rightarrow i)$ Como $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ es el conjunto coátomos de *R-tors* entonces, en $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no hay cadenas con más de un elemento por lo tanto todo módulo decisivo D contiene un simple S, es decir $S \hookrightarrow D$, de donde $\chi(S) = \chi(M)$, así hemos demostrado que los coátomos de *R-tors* es el conjunto $\{\chi(S) \mid S \in R\text{-}simp\}$ y como R es neteriano por proposición 13.4 [11] sabemos que toda teoría de torsión es una especialización de un coátomo entonces si $M \neq 0$ entonces existe un simple S tal que $\chi(M) \leq \chi(S)$ de donde $S \hookrightarrow M$ por lo tanto R es anillo semiartiniano y por [11] R es anillo artiniano

Tenemos otra caracterización de anillos artinianos utilizando los $\mathcal{A}$-módulos.

Proposición 3.42.- Sea R un anillo neteriano izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes.

i) R es artiniano izquierdo.

ii) Toda $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tiene un τ-$\mathcal{A}$-módulo simple.

iii) Toda $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tiene un decisivo D libre de τ-torsión y en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ no hay cadenas con más de un elemento.

Demostración.-

$i) \Rightarrow ii)$ Como R es artiniano entonces, R es semiartiniano por lo tanto para toda $M \neq 0$ M contiene un simple, en particular si $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, $\tau = \chi(M)$ con M un τ-$\mathcal{A}$-módulo tenemos que existe un módulo simple S tal que $S \hookrightarrow M$, de donde tenemos claramente que S es τ-$\mathcal{A}$-módulo simple.

$ii) \Rightarrow iii)$ Ya que todo módulo simple es decisivo tenmos claramente que toda $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tiene un decisivo libre de τ-torsión, por lo tanto si $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y S es un módulo simple tenemos por 2.25 que $\tau = \chi(S)$ de donde $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{\chi(S) \mid S \text{ es simple }\}$ y así en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ no hay cadenas con más de un elemento.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ Y D un módulo decisivo tal que $D \in \mathcal{F}_\tau$ tenemos entonces que $\chi(D) \geq \tau$ pero $\chi(D) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y sabemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ no hay cadenas con más de un elemento de donde $\chi(D) = \tau$, de ésta forma hemos demostrado que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y de aquí se sigue que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con más de un elemento y por la proposición 3.38 tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \{\chi(S) \mid S \text{ es simple }\}$.

Por otra parte como el anillo es neteriano izquierdo entonces R es semineteriano izquierdo por lo tanto cada módulo contiene un módulo cocrítico y por 3.23 tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = Rsp$ de donde $Rsp = \{\chi(S) \mid S \text{ es simple }\}$, es decir para cada $\tau \in Rsp$ existe un módulo simple S que es τ-cocrítico , el resultado se sigue de [11] proposicion 21.6.

En [12] capítulo 53, Golan define a los anillos convenientes izquierdos como aquellos anillos para los cuales cada $\tau \in$ *R-prop* es intersección de teorías de torsión primas y la función $V(\ )$: *R-tors* $\longrightarrow$ subconjuntos de *Rsp* conmuta con intersecciones arbitrarias, donde $V(\tau) = \{\chi(M) \mid M \text{ es cocrítico y } M \in \mathcal{T}_{\tau}\}$. En 53.6 [12] se demuestra que un anillo semineteriano izquierdo R, es conveniente si y solo si cada R-módulo M distinto de cero contiene un sumódulo decisivo cocrítico .

Acontinuación damos una caracterización de los anillos convenientes izquierdos utilizando la familia $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$.

Proposición 3.43.- Para un anillo semineteriano izquierdo son equivalentes:

i) R es conveniente izquierdo

ii) Todo R-módulo distinto de cero contine un módulo decisivo.

iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = Rsp$

iv) R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimenesión izquierda.

Demostración.- *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Como R es conveniente por 53.6 de [12] tenemos que todo módulo $M \neq 0$ contiene un submódulo decisivo cocrítico .

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea D un módulo decisivo como R es semiartiniano entonces existe un módulo cocrítico C tal que $C \hookrightarrow D$ por lo tanto $\chi(C) = \chi(D)$ de donde $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subset Rsp$.

Ahora sea C un módulo cocrítico por *ii)* sabemos que existe un decisivo D tal que $D \hookrightarrow C$ por lo tanto $\chi(D) = \chi(C)$ por lo tanto $\chi(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y así tenemos la igualdad deseada.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Por 53.6 [12] basta demostrar que para todo $M \neq 0$ M contiene un módulo decisivo cocrítico . Sea $M \neq 0$ como R es semineteriano M contiene un submódulo cocrítico C, pero como $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = Rsp$ entonces, existe un módulo decisisvo D tal que $\chi(C) = \chi(D)$ como C es cocrítico entonces, existe $C' \subset C$ tal que $C' \hookrightarrow D$ por lo tanto C' es un módulo decisivo cocrítico contenido en M.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Por 3.34 basta demostrar que para toda $\tau \in$ *R-prop* existe un módulo decisivo D tal que D es τ-$\mathcal{A}$-módulo . Sea $\tau \in$ *R-prop* como R es semiartiniano existe un módulo τ-cocrítico C, por lo tanto existe un módulo decisivo D tal que $\chi(C) = \chi(D)$ como C es cocrítico entonces, existe $C' \subset C$ tal que $C' \hookrightarrow D$ por lo tanto C' es τ-$\mathcal{A}$-módulo y C' es decisivo.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* Como R es semineteriano todo módulo contiene un submódulo cocrítico de donde $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subset Rsp$. Ahora sea C un módulo cocrítico como R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-dimensión entonces, por 3.34 existe un módulo decisivo D tal que D es $\chi(C)$ -$\mathcal{A}$-módulo pero por 2.25 tenemos que $\chi(D) = \chi(C)$ de donde $Rsp \subset \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y tenemos la igualdad deseada.

Ahora es el turno para la familia $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{\chi(R/P) \mid P \subset R$ es un ideal primo $\}$. Sabemos que R/P es un $\mathcal{A}$-módulo por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, considerando la $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-filtración y la respectiva $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-dimensión, tenemos la siguiente:

Proposición 3.44.- Un anillo R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-dimensión si y solo si $\forall\, \tau \in$ *R-tors* $\tau \neq \chi$ existe un τ-$\mathcal{A}$-módulo M tal que $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

Demostración.- $\Rightarrow$] Sea $\{p_i\}$ la $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-filtración y sea $\tau \in$ *R-prop*, en estas condiciones existe un órdinal mínimo tal que $\tau \not\geq p_i$ es facil ver que i no es órdinal límite por lo tanto $p_i = p_{i-1} \vee \xi\{M \mid M$ es p_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo $\}$, por lo tanto existe un módulo

M que es p_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo tal que $M \notin \mathcal{T}_\tau$, como $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ entonces, M es p_{i-1}-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo de donde M es p_{i-1}-$\mathcal{A}$-módulo así m es p_{i-1}-decisivo y como $p_{i-1} \leq \tau$ entonces, $M \in \mathcal{F}_\tau$ de donde M es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que R no tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-dimensión y sea i el ordinal tal que $p_i = p_{i+1} < \chi$, por lo tanto existe M un p_i-$\mathcal{A}$-módulo tal que $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ lo cual implica que $M \in \mathcal{T}_{p_{i+1}}$ pero ésto es imposible.

Nota.- Es claro que si $\tau \in R\text{-}tors$ entonces, R tiene τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-dimensión si y solo si para toda $\sigma \geq \tau$, $\sigma \neq \chi$ existe un σ-$\mathcal{A}$-módulo M.

CAPITULO IV

$\mathcal{C}$-ass

El conceptos de ideales primos asociados a un R-módulo M, aparece en el álgebra conmutativa, este concepto es empleado entre otras cosas para definir la descomposición primaria [4], posteriormente , este concepto es extendido al caso no conmutativo y aparece la descomposición terciaria ([15] Lesieur-Croisot), ,([24 Stentrom).

En [13] Goldman introduce una teoría de descomposición primaria para módulos neterianos sobre anillos arbitrarios, esta teoría generaliza a la teoría clásica y la de [Lesieur-Croisot], en la teoría de Goldman, el papel de ideales primos , lo juegan las teorías de torsión primas, otros resultados utilizando la teoría de descomposición de Goldman se pueden ver en [19],[25].

En este capítulo haremos uso de otros primos, es decir de ciertos subconjuntos $\mathcal{C}$ de teorías de torsión irreducibles que son, desde el punto de vista de la teoría de retículas , los elementos primos de R-$tors$. Para cada $\mathcal{C} \subset R$-irr y $M \in R$-mod, definiremos el conjunto de $\mathcal{C}$-asociados de M, en particular cuando $\mathcal{C}$ es el conjunto de teorías de torsión cogeneradas por los módulos de la forma R/P donde $P \in R$-$spec$, obtenemos por medio de esta familia una caracterización de los anillos neterianos completamente acotados. Finalmente, obtenemos, en términos del $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-$ass$, una caracterización de los anillos convenientes que previamente fueron estudiados en el capítulo III

Definición 4.1.- Si $\mathcal{C} \subset R$-irr definimos $\overline{\mathcal{C}} = \{\chi(M) \ \mid M$ es $\mathcal{C}$-módulo $\}$

Observación.-

i) $\forall \mathcal{C}$ tenemos que $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$

ii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ entonces $\overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\mathcal{C}}'$

iii) Si $\mathcal{C} = Rsp$ entonces $\overline{\mathcal{C}} = Rsp$ es decir $Rsp = \overline{Rsp}$

iv) Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ entonces $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$

v) Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ entonces $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$

Proposición 4.2.- Si M es R-módulo entonces, M es $\mathcal{C}$-módulo $\Leftrightarrow$ M es $\overline{\mathcal{C}}$-módulo

Demostración.- $\Leftarrow$] es obvia

$\Rightarrow$] Solo debemos verificar la condición (i) ya que las otras dos se cumplen gratuitamente cuando M es $\chi(M)$ -$\mathcal{C}$-módulo. Ahora sea $N \neq 0$ tal que $N \subset M$, ya que N es $\mathcal{C}$-módulo tenemos que $\chi(N) \ \in \overline{\mathcal{C}}$.

Proposición 4.3.- Si $\forall \mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tenemos que $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\overline{\mathcal{C}}}$

Demostración.- Sabemos que $\overline{\overline{\mathcal{C}}} \subset \overline{\mathcal{C}}$, sea $\tau \in \overline{\mathcal{C}}$ entonces, $\tau = \chi(M)$ con M un $\mathcal{C}$-módulo de donde M es $\overline{\mathcal{C}}$-módulo por lo tanto $\tau = \chi(M) \ \in \overline{\overline{\mathcal{C}}}$ y tenemos la igualdad deseada.

Nota.- Si $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ de acuerdo con las proposiciones anteriores podemos substituir a $\mathcal{C}$ por $\overline{\mathcal{C}}$ y podemos suponer que para cada $\tau \in \mathcal{C}$ $\exists$ un $\mathcal{C}$-módulo M tal que $\tau = \chi(M)$, en otras palabras podemos suponer que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$ y ésto será así a lo largo de lo que resta de éste trabajo a menos que se haga mención de lo contrario. $\mathcal{C} = Rsp$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ tienen la propiedad de que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$.

Definición 4.4.- Si M en un R-módulo el conjunto de $\mathcal{C}$- asociados de M es $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \exists N \subset M$ tal que N es τ-$\mathcal{C}$-módulo $\}$

Observación.- De acuerdo con las proposiciones anteriores, claramente tenemos que si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ entonces, $\mathcal{C}$-$ass(M) \subset \mathcal{C}'$-$ass(M)$ $\forall M \in R$-mod.

Proposición 4.5.- Si M es R-módulo entonces

i) Rsp-$ass(M) = ass(M)$ (en el sentido de Goldman) ver [12] cap 55.

ii)$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M) = \{\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \mid \exists N \subset M$, N τ-$\mathcal{A}$-módulo $\}$

iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$.

Demostración.- i) Sea $\tau \in ass(M) \Rightarrow \exists N \subset M$ con N τ-cocrítico por lo tanto N es τ-Rsp-módulo de donde $ass(M) \subset Rsp$-$ass(M)$. Ahora sea $\tau \in Rsp$-$ass(M)$ entonces existe $N \subset M \tau$-Rsp-módulo y por 3.10 $\exists L \subset N$ τ-cocrítico de donde tenemos que $\tau \in ass(M)$

ii) Es justamente la definición ya que N es τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo $\Leftrightarrow$ N es τ-$\mathcal{A}$-módulo

iii) Sea $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M)$, entonces existe $N \subset M$ tal que N ea τ- $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo de donde N es τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo y como $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ tenemos que $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$.

Ahora sea $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$ entonces, $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ y existe $N \subset M$ un τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo así tenemos que $\chi(N) = \tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ por lo tanto N es τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo y tenemos la igualdad deseada.

Corolario 4.6.-

i) Si M es un Rsp-módulo entonces, Rsp-$ass(M) = \{\chi(M)\}$

ii) Si M es un $\mathcal{A}$-módulo entonces, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}$

iii) Si M es un $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo entonces, $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}$

Demostración.- i) Sabemos que $\chi(M) \in Rsp$-$ass(M)$. Ahora sea $\tau \in Rsp$-$ass(M) = ass(M)$ por lo tanto $\exists N \subset M$ un τ-cocrítico y como $\tau \in Rsp$ tenemos que $\tau = \chi(N)$, por otra parte tenemos que M es $\chi(M)$ -Rsp-módulo $\Rightarrow N$ es $\chi(M)$ -Rsp-módulo de donde N es $\chi(M)$ -cocrítico pero sabemos que $\chi(M) \in Rsp$ por lo tanto $\tau = \chi(N) = \chi(M)$

ii) Nuevamente $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(M)$; Si $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(M)$ entonces $\exists N \subset M$ un τ-$\mathcal{A}$-módulo y por la proposición 2.25 tenemos que $\tau = \chi(N)$, por otra parte M es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo $\Rightarrow \chi(N) = \chi(M)$. de donde N es $\chi(M)$ -$\mathcal{A}$-módulo pero $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y así $\tau = \chi(N) = \chi(M)$.

iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \bigcap \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}_{\mathcal{D}} \bigcap \{\chi(M)\} = \{\chi(M)\}$.

Si definimos $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{\chi(R/P) \mid P \text{ es ideal primo de } R\}$, sabemos que para todo primo $P \subset R$, R/P es $\mathcal{A}$-módulo entonces, R/P es un $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo y por lo tanto $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}} = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

Denotaremos por $Ass(M)$ al conjunto de ideales primos asociados a M en el sentido definido en [24], es decir $P \in Ass(M)$ si existe $N \subset M$ tal que $P = ann(L)$ para todo $L \subset N$.

Proposición 4.7.- $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(R/P) = \{\chi(R/P)\}$.

Demostración.- Claramente $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(R/P)$. Ahora sea $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(R/P)$ entonces, existe $I/P \subset R/P$ un τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo de donde I/P es τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-módulo y como $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tenemos por 2.25 que $\tau = \chi(I/P)$. Por otra parte sabemos que R/P es $\mathcal{A}$-módulo por lo tanto $\chi(I/P) = \chi(R/P)$.

Proposición 4.8.- Sea R un anillo conmutativo y $M \in R\text{-}mod$ entonces, $\{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M)$.

Demostración.- $P \in Ass(M)$ como R es conmutativo entonces, existe un sumódulo $N \subset M$ tal que $N \simeq R/P$ [Stenstrom] por lo tanto $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(N) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M)$.

Proposición 4.9.- Si R es anillo conmutativo y M es un módulo tal que $Ass(N) \neq \phi$ para todo $N \subset M$ $N \neq 0$ entonces $\{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\} = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M)$

Demostración.- Por 4.8 una contención es clara, para la otra, sea $\tau \in \mathcal{C_P}\text{-}ass(M)$ entonces, $\exists N \subset M$ tal que N es τ-$\mathcal{C_P}$-módulo de donde N es τ-$\mathcal{C_A}$-módulo y como $\tau \in \mathcal{C_P} \subset \mathcal{C_A}$ tenemos que $\tau = \chi(N)$ pero $\tau \in \mathcal{C_P} \Rightarrow \tau = \chi(R/P)$ para algún ideal primo P. Ahora sea $H \in Ass(N)$ como R es conmutativo entonces, existe $L \subset N$ tal que $L \simeq R/H$ por lo tanto $\chi(R/H) = \chi(L)$ y como N es τ-$\mathcal{A}$-módulo $\chi(L) = \chi(N) = \tau = \chi(R/P)$, con H y P ideales primos, es decir $\chi(R/H) = \chi(R/P)$ y por 59.2 de [12] tenemos que $P = H$.

•

Corolario 4.10.- Si R es anillo conmutativo neteriano entonces, $\{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\} = \mathcal{C_P}\text{-}ass(M)\}$ para todo $M \in R$-mod.

Demostración.- Como R es neteriano por VII 1.1 de [24] tenemos que $Ass(M) \neq \phi$ para todo $M \in R\text{-}mod$ y el resultado se sigue de 4.8 y 4.9.

En general tenemos que $\{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\} \neq \mathcal{C_P}\text{-}ass(M)$

Ejemplo.- Sea R el anillo de Cozzenz [6], éste anillo es simple y por lo tanto sus únicos ideales bilaterales son 0 y R, como R es un dominio entonces, el único ideal primo es el 0, por otro lado, tenemos claramente que $Rsp = \{\chi(S), \chi(R)\}$ donde S es el único módulo simple y $\mathcal{C_P} = \{\chi(R)\}$.

Por otra parte $Ass(S) = \{0\}$ y $\mathcal{C_P}\text{-}ass(S) = \phi$ ya que si $\tau \in \mathcal{C_P}\text{-}ass(S)$ entonces existe $S' \subset S$ tal que S' es τ-$\mathcal{C_P}$-módulo pero $\tau = \chi(R)$ y como S es simple $S' = S$ de donde tendriamos que $\chi(S) = \chi(R)$ lo cual es imposible.

Proposición 4.11.- Para M un R-módulo izquierdo tenemos:

(1) $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(N) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M/N)$ para todo $N \subset M$ submódulo.

(2) $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \bigcup_i \mathcal{C}\text{-}ass(M_i)$ para toda familia $\{M_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigcup_i M_i = M$

(3) $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \bigcup_i \mathcal{C}\text{-}ass(M_i)$ para toda familia $\{M_i\}_{i\in I}$ tal que $\bigoplus_i M_i = M$

(4) $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ si $N \subset_e M$

Demostración.-

(1) Sea $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ entonces existe $L \subset N$ tal que L es τ-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$.

Sea $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ entonces existe $L \subset M$, L un τ-$\mathcal{C}$-módulo , si $N \bigcap L \neq 0$ sabemos que $N \bigcap M$ es τ-$\mathcal{C}$-módulo contenido en N y por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(N)$.

Si $N \bigcap L = 0$ entonces, $L = L/(N \bigcap L) \simeq (L+N)/N \subset M/N$ por lo tanto $(L+N)/N$ es τ-$\mathcal{C}$-módulo y así $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M/N)$.

(2) Por (1) tenemos $\bigcup_i (M_i) \subset (M)$para toda i, ahora sea $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ entonces existe $N \subset M$ un τ-$\mathcal{C}$-módulo , como $M = \bigcup_i M_i \Rightarrow$ que existe i tal que $N_i = N \bigcap M_i \neq 0$ y $N_i \subset M_i$ es τ-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M_i)$, de donde $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \bigcup_i \mathcal{C}\text{-}ass(M_i)$.

(3) Nuevamente $\bigcup_i \mathcal{C}\text{-}ass(M_i) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M)$, como $M = \bigoplus_i M_i$ entonces $M = \bigcup_{r_j} M_{r_j}$ donde los M_{r_j} son sumas finitas de los $\{M_i\}$, por (2) sabemos que el $\mathcal{C}$-$ass(M) = \bigcup_{r_j} \mathcal{C}\text{-}ass(M_{r_j})$ así solo probaremos que el resultado vale para sumas directas finitas.

Supongamos que $M = M_1 \bigoplus M_2 ...... \bigoplus M_n$ entonces $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M_i)$ para $i = 1....n$. Haremos ésta demostración por inducción sobre n.

Si $n = 1$ no hay nada que probar, si $n = 2$ $M_{r_j} = M_1 \bigoplus M_2$ y por (1) sabemos que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M_1) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M_{r_j}/M_1) = \mathcal{C}\text{-}ass(M_1) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M_2)$ y en éste caso tenemos la igualdad deseada. Ahora supongamos que el resultado vale para $n-1$ y sea $M = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus .... \bigoplus M_n$, sea N la suma de los $n-1$ primeros sumandos entonces, $M_{r_j} = N \bigoplus M_n$ y por el caso $n = 2$ tenemos que $\mathcal{C}\text{-}ass(M_{r_j}) = \mathcal{C}\text{-}ass(N) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M_n)$ y por la hipótesis de inducción tenemos el resultado deseado.

(4) $N \subset_e M$ entonces para toda $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ existe $L \subset M$ τ-$\mathcal{C}$-módulo y así $N \bigcap L \neq 0$ por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ de donde $\mathcal{C}\text{-}ass(N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M)$

Corolario 4.12.- Si N es un submódulo de un R-módulo proyectivo entonces, $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(R)$

Demostración.- Supongamos que M es un R-módulo proyectivo y $N \subset M$, como M es sumando directo de una suma directa de copias de R, entonces tenemos el resultado por la proposicion anterior.

Proposición 4.13.- Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{C}\text{-}ass(M)$ es finito para todo R-módulo cíclico M.

(b) $\mathcal{C}\text{-}ass(M)$ es finito para todo R-módulo finitamente generado M.

Demostración.- $a) \Rightarrow b)$ Sea M finitamente generado $M = Ra_1 + ... + Ra_n$, haremos demostración por inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado se sigue de (a), supongamos que vale para $n-1$ ahora sea $N = Ra_1 + ... + Ra_{n-1}$ entonces $M = N + Ra_n$, así $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(N) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M/N)$, pero $M/N \simeq Ra_n/(N \bigcap Ra_n)$ el cual es un R-módulo cíclico y por hipótesis de inducción $\mathcal{C}\text{-}ass(N)$ es finito, por lo tanto $\mathcal{C}\text{-}ass(M)$ es finito.

$b) \Rightarrow a)$ Obvia

Proposición 4.14.- Sea $M \in R\text{-}mod$ y $N \subset M$ submódulo, si L es una extensión esencial máxima de N en M entonces $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(L/N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(N)$

Demostración.- Sea H un pseudocomplemento de L en M, como L no tiene extenciones esenciales propias en M entonces, L es pseudocomplemento de H en M.

Tenemos $L \bigoplus H \subset_e M$, como $N \subset_e L$ entonces $N \bigoplus H \subset_e L \bigoplus H$ de donde $N \bigoplus H \subset_e M$ y por la proposición 4.3 $\mathcal{C}$-$ass(M) = \mathcal{C}$-$ass(N) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(H)$.

Afirmación .- $[(N+H)/N] \bigoplus L/N \subset_e M/N$. En efecto

$$[(N+H)/N] \bigcap L/N = [(N+H) \bigcap L]/N = N/N = 0$$

Ahora sea $0 \neq Y/N \subset M/N$, si $Y/N \bigcap L/N \neq 0$ no hay nada que probar . Supongamos que $Y/N \bigcap L/N = 0$ entonces $Y \bigcap L = N$, como $Y/N \neq 0$ existe $x \in Y - N$ y $x \notin L$ ya que si esto fuera cierto tendriamos $x \in L \bigcap Y = N$ lo cual es imposible, por lo tanto $L \neq L + Rx \Rightarrow (L+Y) \bigcap H \neq 0$ entonces existe $y \in Y$ tal que $(L+Ry) \bigcap H \neq 0$ y nuevamente $y \notin N$ de otra forma $(L+Ry) \subset L \Rightarrow (L+Y) \bigcap H = 0$ lo cual es imposible. En estas condiciones tenemos $\overline{y} = N + y \neq 0$ y $\overline{y} \in (Y/N) \bigcap [(N+H)/N \bigoplus L/N]$, $\overline{y} \in [(N+L)/N \bigoplus L/N]$ ya que $(L+Ry) \bigcap H \neq 0$ de donde existen $l \in L, h \in H$ tal que $l + ry = h \neq 0$ y así $ry + N = h - l + N$ que esta donde se quería. Entonces hemos probado que $(N+H)/N \bigoplus L/N \subset_e M/N$ lo cual implica que $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = \mathcal{C}$-$ass((N+H)/N) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(L/N) = \mathcal{C}$-$ass(H) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(L/N)$, entonces, $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(L/N) = \mathcal{C}$-$ass(N) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(H) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(L/N) = \mathcal{C}$-$ass(M/N) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(N)$.

Proposición 4.15.- Supongamos que para todo $\mathcal{C}$-módulo M se tiene que $\chi(M/N) = \chi(M)$ para todo $N \subset M$ tal que $M/N \in \mathcal{F}_\tau$. Si M es un $\mathcal{C}$-módulo y $\tau \in C$ es tal que M es τ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, $\tau = \chi(M)$.

Demostración.- Sabemos que $\tau = \chi(C)$ un $\mathcal{C}$-módulo C, como M es τ-$\mathcal{C}$-módulo tenemos que $\chi(M) \geq \chi(C)$. Si $C \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ entonces tenemos la igualdad deseada. Si $C \notin \mathcal{F}_{\chi(M)}$, sea $C' = t_{\chi(M)}(C)$, entonces $C/C' \in \mathcal{F}_{\chi(M)} \subset \mathcal{F}_{\chi(C)}$ por lo tanto $\chi(C/C') = \chi(C)$, pero $\chi(C/C') \geq \chi(M) \geq \chi(C)$ de donde tenemos que $\chi(M) = \chi(C) = \tau$.

Corolario 4.16.- Con las mismas hipótesis de la proposición 4.15, tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\ \}$ para todo $M \in R$-mod.

Proposición 4.17.- Sea $\mathcal{C} \subset R$-irr tal que para todo $\mathcal{C}$-módulo M se tiene que $\chi(M/N) = \chi(M)$ para todo submódulo $N \subset M$ tal que $M/N \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ Si $M \in R-mod$ y $U \subset \mathcal{C}$-$ass(M)$ entonces, existe un submódulo $N \subset M$ tal que $\mathcal{C}$-$ass(N) = \mathcal{C}$-$ass(M) - U$ y $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = U$.

Demostración.- Si $U = \phi$ tómese $N = M$. Supongamos que $U \neq \phi$, sea $A = \{H \subset M \mid H$ es submódulo y $\mathcal{C}$-$ass(H)\bigcap U = \phi\}$, $A \neq \phi$ ya que $0 \in A$. Sea $\{H_i\} \subset A$ una cadena, entonces $\bigcup H_i \in A$ ya que $\mathcal{C}$-$ass(\bigcup H_i) = \bigcup \mathcal{C}$-$ass(H_i)$ y $\mathcal{C}$-$ass(\bigcup H_i)\bigcap U = \phi$. Por el lema de Zorn A tiene elementos máximos, sea N máximo en A.

Afirmación.- $\mathcal{C}$-$ass(N) = \mathcal{C}$-$ass(M) - U$, en efecto como $\mathcal{C}$-$ass(N)\bigcap U = \phi$ y $\mathcal{C}$-$ass(N) \subset \mathcal{C}$-$ass(M) \Rightarrow \mathcal{C}$-$ass(N) \subset \mathcal{C}$-$ass(M) - U$.

Ahora sea $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M) - U$ entonces, existe $L \subset M$ tal que L es τ-$\mathcal{C}$-módulo . Si $N\bigcap L \neq 0$ entonces $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(N)$. Si $N\bigcap L = 0$ entonces $N \neq N\bigoplus L$ y $\mathcal{C}$-$ass(N\bigoplus L) = \mathcal{C}$-$ass(N)\bigcup \mathcal{C}$-$ass(L) = \mathcal{C}$-$ass(N)\bigcup\{\tau\}$, como $\tau \notin U$ tenemos $\mathcal{C}$-$ass(N\bigoplus L)\bigcap U = \phi$ pero ésto es imposible ya que N era máximo en A de donde $N\bigcap L \neq 0$ y tenemos el resultado deseado.

Afirmación.- $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = U$. Sea $\tau \in U$ y $L \subset M$ un τ-$\mathcal{C}$-módulo entonces, $N\bigcap L = 0$ ya que de otra forma $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(N)$ lo cual no es posible, en estas condiciones tenemos $L = L/(L\bigcap N) \simeq (L+N)/N \subset M/N$ por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ y así $U \subset \mathcal{C}$-$ass(M/N)$.

Sea $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ entonces existe $L/N \subset M/N$ un τ-$\mathcal{C}$-módulo sabemos que $\mathcal{C}$-$ass(L) \subset \mathcal{C}$-$ass(N)\bigcup \mathcal{C}$-$ass(L/N) = \mathcal{C}$-$ass(N)\bigcup\{\tau\}$, pero como $L/N \neq 0$ entonces, N es submódulo propio de L y por la maximalidad de N tenemos $\mathcal{C}$-

$ass(L) \bigcap U \neq \phi \Rightarrow (\mathcal{C}\text{-}ass(N) \bigcup \{\tau\}) \bigcap U \neq \phi$ por lo tanto $\tau \in U$ y así $\mathcal{C}$-$ass(M/N) \subset U$.

Observación.- Con la misma hipótesis de la proposición anterior tenemos:

i) Si M es un R-módulo y $U \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ entonces, existe $N \subset M$ submódulo tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(N) = U$ y $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M) - U$.

ii) Si $U \subset \mathcal{C}$ entonces, existe un R-módulo M tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = U$. En efecto para cada $\tau \in U$ sea M_τ un τ-$\mathcal{C}$-módulo tómese $M = \bigoplus M_\tau$ y tenemos $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = U$

Proposición 4.18.- Las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo izquierdo M.

(a) $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \neq \phi$ para todo $0 \neq N \subset M$ submódulo.

(b) M tiene un submódulo esencial de la forma $\bigoplus N_i$, donde cada $N_i \subset M$ es $\mathcal{C}$-módulo cíclico.

(c) $E(M)$ tiene un submódulo esencial de la forna $\bigoplus E(N_i)$, donde cada $N_i \subset E(M)$ es $\mathcal{C}$-módulo cíclico.

(d) $\forall N \subset M, \exists C_N \subset \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ tal que $\chi(N) = \wedge C_N$

Demostración.- $a) \Rightarrow b)$. Como $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$ entonces, existe $N \subset M$ un $\mathcal{C}$-módulo y podemos suponer que es cíclico, ya que culquier submódulo de N es $\mathcal{C}$-módulo

Sea $A = \{F \mid F$ es familia independiente de submódulos cíclicos de M que son $\mathcal{C}$-módulos $\}$, $A \neq \phi$ pues $F = \{N\}$ es un elemento de A.

Si $\{F_j\}_{j \in J}$ es una cadena en A (El orden es por contención), sea $F = \bigcup F_j$ entonces F es famlia independiente y $F \in A$. Por el lema de Zorn A tiene elementos máximos, sea $F \in A$ un máximo.

Afirmación.-

$$\bigoplus_{N_i \in F} N_i \subset_e M$$

En efecto sabemos que $\bigoplus N_i \subset M$ solo falta probar que la contención es esencial, supongamos que no es así entonces, existe $0 \neq K \subset M$ tal que $\bigoplus N_i \bigcap K = 0$, pero por (a) $\mathcal{C}\text{-}ass(K) \neq \phi$, así existe $L \subset K$ un $\mathcal{C}$-módulo cíclico por lo tanto tenemos que $\bigoplus N_i \bigcap L = 0 \Rightarrow F \bigcup \{L\} \in A$ pero ésto es imposible ya que F era máximo en A, de donde $\bigoplus N_i \subset_e M$.

$b) \Rightarrow c)$ Supongamos que $\bigoplus N_i \subset_e M$ es como en (b) entonces $\bigoplus N_i \subset_e E(M) \Rightarrow \bigoplus E(N_i) \subset_e E(M)$ y $N_i \subset E(M)$ es $\mathcal{C}$-módulo cíclico.

$c) \Rightarrow a)$ Sea $0 \neq N \subset M$ y $\{N_i\}$ tal que $\bigoplus E(N_i) \subset_e E(M)$ con $N_i \subset E(M)$ $\mathcal{C}$-módulo cíclicos, podemos suponer que $N_i \subset M$ ya que $M \subset_e E(M) \Rightarrow L_i = N_i \bigcap M \subset_e N_i \bigcap E(M) = N_i \Rightarrow \bigoplus L_i \subset_e \bigoplus N_i \subset_e \bigoplus E(N_i) \subset_e E(M)$ y $L_i \subset M$.

Tenemos que $\bigoplus N_i \subset_e E(M)$ por lo tanto $N \bigcap \bigoplus N_i \neq 0$, sea $0 \neq x \in N \bigcap \bigoplus N_i$ entonces, $x = x_1 + ... + x_n$ con $x_j \in N_j$.

Afirmación.- $\mathcal{C}\text{-}ass(Rx) \neq \phi$. En efecto como $Rx \subset N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_n$ haremos la prueba por indunción sobre n. Si $n = 1$ es obvio ya que los N_j son $\mathcal{C}$-módulos , si $n = 2$ entonces $Rx \subset N_1 \bigoplus N_2$, supongamos que $Rx \bigcap N_1 \neq 0$ entonces tenemos que $(Rx \bigcap N_1) \subset N_1$ y por lo tanto $Rx \bigcap N_1$ es un $\mathcal{C}$-módulo de donde $\mathcal{C}\text{-}ass(Rx) \neq \phi$, si $Rx \bigcap N_1 = 0$ entonces, Rx se sumerge en N_2 y nuevamente tenemos $\mathcal{C}\text{-}ass(Rx) \neq \phi$.

Supongamos que el resultado vale para $n - 1$ y sea $Rx \subset N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_n$, tomemos $H = N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_{n-1}$ entonces, $Rx \subset H \bigoplus N_n$ nuevamente si $Rx \bigcap N_n \neq 0$ tenemos $\mathcal{C}\text{-}ass(Rx) \neq \phi$, si $Rx \bigcap N_n = 0$ entonces Rx se sumerge en H y por hipótesis de inducción tenemos $\mathcal{C}\text{-}ass(Rx) \neq \phi$.

$b) \Rightarrow d)$ Si $N = 0$ Si tómese $C_N = \phi$. Supongamos que $N \neq 0$ entonces hay un submódulo $\bigoplus N_i \subset_e N$ con cada N_i un $\mathcal{C}$-módulo cíclico, por lo tanto $\wedge\chi(N_i) =$

$\chi(\bigoplus N_i) = \chi(N)$ y sabemos que $\chi(N_i) \in \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ es decir $C_N = \{\chi(N_i)\}$;

$d) \Rightarrow a)$ Sea $N \neq 0$ sabemos que $\exists C_N \subset \mathcal{C}\text{-}ass(N)$ tal que $\chi(N) = \wedge C_N$, como $N \neq 0 \Rightarrow \chi(N) \neq \chi$ entonces $C_N \neq \phi$ y tenemos el resultado deseado.

Corolario 4.19.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tal que para todo $\mathcal{C}$-módulo M se tiene que $\chi(M/N) = \chi(N)$ para todo submódulo $N \subset M$ tal que $M/N \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$. Supongamos que M es un R-módulo izquierdo tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \neq \phi$ para todo $0 \neq N \subset M$ y M tiene dimensión uniforme finita entonces, $\mathcal{C}\text{-}ass(M)$ es finito.

Demostración.- Por la proposición 4.14 existe $\bigoplus N_i \subset_e M$ con los N_i $\mathcal{C}$-módulos cíclicos, como M tiene dimensión uniforme finita entonces la suma directa es finita por lo tanto $N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_k \subset_e M$ así $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}\text{-}ass(N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_k) = \mathcal{C}\text{-}ass(N_1) \bigcup ... \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(N_k)$, por la el corolario 4.15 tenemos que $\mathcal{C}\text{-}ass(N_i) = \{\chi(N)_i\}$, por lo tanto $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\chi(N_1), ...\chi(N_k)\}$

Observación.- Sea $\tau \in R\text{-}tors$, supongamos que existe $M \in R-mod$ tal que $\tau = \chi(M)$ y M satisface las condiciones de la proposición 4.14 entonces, τ es interseccion de elementos en $\mathcal{C}$. En efecto, por 4.14(c) sabemos que existe $C_M \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ tal que $\chi(M) = \wedge C_M$.

Así como hemos definido el $\mathcal{C}\text{-}ass(M)$ podemos definir el concepto $\mathcal{C}$-soporte como sigue:

Definición 4.20.- Sea $M \in R$-mod definimos el $\mathcal{C}$-soporte de M como $\mathcal{C}\text{-}sup(M) = \{\tau \in \mathcal{C} \mid M \notin \mathcal{T}_\tau\}$

Proposición 4.21.- Para un R-módulo izquierdo M tenemos:

(1) Si $N \subset M$ es submódulo entonces $\mathcal{C}\text{-}sup(M) = \mathcal{C}\text{-}sup(N) \bigcup \mathcal{C}\text{-}sup(M/N)$

(2) Si $M = \sum M_i$ con los $M_i \subset M$ submódulos entonces $\mathcal{C}\text{-}sup(M) = \bigcup \mathcal{C}$-

$sup(M_i)$

(3) Si U es un subconjunto propio de $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset U \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_\tau$ para toda $\tau \in \mathcal{C} - U$

Demostración.- 1) Sea $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(N) \Rightarrow N \notin \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto $M \notin \mathcal{T}_\tau$. Sea $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M/N)$ entonces, $M/N \notin \mathcal{T}_\tau \Rightarrow M \notin \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M)$, así hemos probado $\mathcal{C}$-$sup(N) \bigcup \mathcal{C}$-$sup(M/N) \subset \mathcal{C}$-$sup(M)$. Ahora sea $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M)$ entonces, $M \notin \mathcal{T}_\tau \Rightarrow N \notin \mathcal{T}_\tau$ o $M/N \notin \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(N) \bigcup \mathcal{C}$-$sup(M/N)$.

2) Claramente tenemos $\bigcup \mathcal{C}$-$sup(M_i) \subset \mathcal{C}$-$sup(M)$, si $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M)$ entonces $M \notin \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto existe $M_i \notin \mathcal{T}_\tau$ de donde $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M_i)$ así $\mathcal{C}$-$sup(M) = \bigcup \mathcal{C}$-$sup(M_i)$.

3) $\Rightarrow$] Sea $\tau \in \mathcal{C} - U$ entonces $\tau \notin U$ por lo tanto $\tau \notin \mathcal{C}$-$sup(M)$ y $M \in \mathcal{T}_\tau$.

$\Leftarrow$] Sea $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M)$ entonces $M \notin \mathcal{T}_\tau \Rightarrow \tau \notin \mathcal{C} - U$ por lo tanto $\tau \in U$ y así $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset U$.

Proposición 4.22.- Si $M \in$R-mod entonces $\mathcal{C}$-$sup(M) = \bigcup \{\mathcal{C}$-$ass(M/N) \mid N$ es submódulo de $M\}$

Demostración.- Sea $N \subset M$ submódulo y $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ entonces, existe $L/N \subset M/N$ tal que L/N es τ-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto $L/N \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow M/N \notin \mathcal{T}_\tau$ de donde $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M/N) \subset \mathcal{C}$-$sup(M)$ y así $\bigcup \mathcal{C}$-$ass(M/N) \subset \mathcal{C}$-$sup(M)$.

Ahora sea $\tau \in \mathcal{C}$-$sup(M)$ entonces $M \notin \mathcal{T}_\tau$, como $\tau \in \mathcal{C}$, $\tau = \chi(L)$ con L un $\mathcal{C}$-módulo ,tenemos entonces que $Hom_R(M, E(L)) \neq 0$, sea $f\colon M \to E(L)$ un morfismo distinto de cero y N el núcleo de f, entonces M/N se sumerge en $E(L)$ por lo tanto $M/N \bigcap L \neq 0$ es un τ-$\mathcal{C}$-módulo y $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ así $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset \bigcup \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ y tenemos el resultado deseado.

Es bien conocido que en un anillo neteriano conmutativo hay una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de los módulos inyectivos inescindibles y los ideales primos de R. Para anillos neterianos arbitrarios esto no necesariamente es verdadero, en general hay mas módulos inyectivos inescindibles que ideales primos [24].

En [24] Stenstrom denota por $\mathcal{E}(R)$ al conjunto de clases de isomorfismo de módulos inyectivos inescindibles y $Spec(R)$ el conjunto de ideales primos y se define la función $\Phi : \mathcal{E}(R) \longrightarrow Spec(R)$, tal que si E en módulo inyectivo inescindible $\Phi(E) = Ass(E)$, esta función es suprayectiva ver [24] cap VII. Un anillo neteriano R es completamente acotado si la función Φ es biyectiva.

De manera mas general se ha considerado en [1] Aguilar-Arroyo-Signoret y en [3] Asencio-Torrecillas, esta función para un anillo τ-neteriano. Si $\tau \in R\text{-}tors$, R es τ-neteriano si la familias de los ideales τ-puros C_τ de R, satisface la condición ascendente de cadena es decir C_τ es una retícula neteriana. Los anillos τ-neterianos fueron considerados por primera vez por Teply en [27]. En este caso la función esta definida de el conjunto de clases de isomorfismo de inyectivos inescindibles libres de τ-torsión a el conjunto de ideales primos de R los cuales son τ-puros, es decir si Ψ es la función tenemos que:

Ψ : { Clases de isomorfismos de inyectivos inescindibles libres de τ-torsión} $\longrightarrow$ { Ideales primos de R}

En [1] se remarca que esta función es suprayectiva cuando el anillo R es τ-neteriano.

En [1] def 2 se denota por $AssC_\tau(M)$ a el conjunto de ideales primos τ-puros asociados a M, se remarca también que si R es τ-neteriano y $M \in \mathcal{F}_\tau$ se tiene que $AssC_\tau(M) = Ass(M) \neq \phi$ ([1] remark 4)

Haciendo uso de los conceptos anteriores dados en [1] y de la clase $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$ se obtiene una caracterización de los allos completamente acotados relativos a una teoría de torsión , donde $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} = \{\chi(\mathbf{R/P}) \mid \mathbf{P}$ **es ideal** τ**-puro de** $\mathbf{R}\}$; también tenemos claramente que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y por lo tanto si M es un $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$-módulo entonces M es un $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo de donde M es un $\mathcal{A}$-módulo .

Proposición 4.23.- Sea $\tau \in R\text{-}tors$ y supongamos que R es τ-neteriano entonces, $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-ass(M) para todo módulo M tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$.

Demostración.- Como $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ entonces, claramente tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M)$.

Ahora sea $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M)$ por lo tanto existe $N \subset M$ un $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo de donde tenemos que N es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{A}$-módulo por 2.25 tenemos que $\chi(N) = \chi(R/P)$, pero $M \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \chi(M) \geq \tau$, de donde tenemos que $\chi(R/P) = \chi(N) \geq \chi(M) \geq \tau$ por lo tanto $R/P \in \mathcal{F}_\tau$ y $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$ y $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}\text{-}ass(M)$.

El siguiente teorema, nos da una caracterización de los anillos completamente acotados relativos a una teoría de torsión.

Teorema 4.24.- Sea R un anillo y $\tau \in R\text{-}tors$ supongamos que R es τ-neteriano entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

i) Ψ es biyectiva.

ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M) = \{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\}$ para todo $M \in \mathcal{F}_\tau$

iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} = pgen(\tau) = \{\sigma \in Rsp \mid \sigma \geq \tau\}$

iv) R tiene τ-$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-dimensión

v) $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(M) \neq \phi$ para todo módulo M tal que $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $M \neq 0$

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}\text{-}ass(M)$, por lo tanto existe un módulo $N \subset M$ tal que N es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C}_\mathcal{P}$-módulo , como R es τ-neteriano y $N \in \mathcal{F}_\tau$ por [2] 6.1 pag 54 entonces, puedo suponer que N es un módulo cocrítico , ya que N es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C}_\mathcal{P}$-módulo tenemos que N es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{A}$-módulo y por 2.25 $\chi(R/P) = \chi(N)$ por lo tanto $Hom(N, E(R/P)) \neq 0$, por otra parte sabemos que N es cocrítico entonces, existe un submódulo $C \subset N$ tal que $C \hookrightarrow R/P$, como P es un ideal primo τ-puro por [1] remark 9 tenemos que $Ass(C) = \{P\}$, pero $Ass(C) \subset Ass(N) \subset Ass(M)$ por lo tanto $P \in Ass(M)$.

Ahora sea $P \in Ass(M)$, nuevamente como R es τ-neteriano y $M \in \mathcal{F}_\tau$ podemos suponer que existe un módulo cocrítico $C \subset M$ tal que $Ann(L) = P$ para toda $L \subset C$, como $P \in Ass(M)$ por [2] 9.1 pag 105, tenemos que P es un ideal τ-puro por lo tanto $R/P \in \mathcal{F}_\tau$ de donde R/P contiene un módulo cocrítico J/P, ya que J/P y C son τ-libres de torsión tenemos que $\Psi(E(J/P)) = Ass(E(J/P)) = Ass(J/P) = \{P\}$ y $\Psi(E(C)) = Ass(C) = \{P\}$ Remark 4,7,9 de [1], como Ψ es inyectiva tenemos que $E(J/P) \simeq E(C)$ entonces existe un módulo cocrítico $C' \subset C$ tal que $C' \hookrightarrow J/P$ y como $J/P \subset R/P$ tenemos que C' es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C}_\mathcal{P}$-módulo pero $C' \hookrightarrow C \hookrightarrow N \hookrightarrow M$ y como $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}$ entonces, tenemos que $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}$-$ass(M)$ de este modo hemos demostrado la otra contención y tenemos la igualdad deseada.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$, como R es τ-neteriano y $R/P \in \mathcal{F}_\tau$ entonces existe un módulo cocrítico C tal que $C \hookrightarrow R/P$ y como R/P es $\mathcal{A}$-módulo tenemos que $\chi(C) = \chi(R/P)$, además $\chi(R/P) \geq \tau$ de donde $\chi(R/P) \in pgen(\tau)$ por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} \subset pgen(\tau)$.

Ahora sea $\chi(C) \in pgen(\tau)$ con C un módulo cocrítico tenemos claramente que $C \in \mathcal{F}_\tau$ y como R es τ-neteriano por Remark 4 de [1] $Ass(C) \neq \phi$, como C

es uniforme $Ass(C) = \{P\}$ donde $P \subset R$ es un ideal primo, por nuestra hipótesis tenemos que $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}\text{-}ass(C)$ por lo tanto existe $C' \subset C$ tal que C' es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-módulo de donde C' es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{A}$-módulo y como $\chi(R/P) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tenemos que $\chi(R/P) = \chi(C') = \chi(C)$ por lo tanto $\chi(R/P) = \chi(C) \geq \tau$ de donde $pgen(\tau) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$ y tenemos la igualdad deseada.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Solo debemos probar que Ψ es inyectiva. Sean E y E' inyectivos inescindibles libres de τ-torsión tales que $\Psi(E) = \Psi(E')$, como R es τ-neteriano existen módulos cocríticos C y C' tales que $C \hookrightarrow E$ y $C' \hookrightarrow E'$ por lo tanto $E(C) = E$ y $E(C') = E'$ de donde tenemos que $\Psi(E(C)) = \Psi(E(C'))$. De la definición de Ψ [24] VII 2 sabemos que hay un primo P tal que $\Phi(E(C)) = \{P\}$ y $\Psi(E(C')) = \{P\}$ por lo tanto $Ass(C) = \{P\}$ y $Ass(C') = \{P\}$.

Por otra parte $\chi(C) \geq \tau$ por lo tanto $\chi(C) \in pgen(\tau)$, como $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} = pgen(\tau)$ entonces, existe un ideal primo τ-puro $H \subset R$ tal que $\chi(R/H) = \chi(C)$, ya que C es cocrítico existe $N \subset C$ tal que $N \hookrightarrow R/H$ de donde $Ass(N) = \{H\}$, pero C es uniforme por lo tanto $Ass(N) = Ass(C)$ [24] Stens VII 1.5 y tenemos que $H = P$ y así $\chi(R/P) = \chi(C)$. De manera completamenete análoga podemos demostrar que $\chi(R/P) = \chi(C')$ por lo tanto $\chi(C) = \chi(C')$, como C y C' son cocríticos tenemos que $E(C') \simeq E(C)$ de donde $E \simeq E'$ y hemos demostrado que Ψ es inyectiva.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Por 3.42 basta demostrar que para toda $\sigma \geq \tau$ existe M un σ-$\mathcal{A}$-módulo tal que $\chi(M) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

Sea $\sigma \geq \tau$, como R es τ-neteriano entonces por [2] 6.1 pag 54 y 6.6 pag 58 existe un un módulo C, σ-cocrítico por lo tanto $\chi(C) \geq \sigma \geq \tau$ de donde tenemos que $\chi(C) \in pgen(\tau)$ por la hipótesis existe un ideal primo P tal que $\chi(R/P) = \chi(C)$ como C es cocrítico entonces existe $C' \subset C$ tal que $C' \hookrightarrow R/P$, como R/P es $\mathcal{A}$-módulo tenemos que $\chi(C') = \chi(R/P)$ y como C es cocrítico $\chi(C') = \chi(C)$

por lo tanto $\chi(C) = \chi(R/P)$ así C es σ-$\mathcal{A}$-módulo y $\chi(C) \in \mathcal{C_P}$.

$iv) \Rightarrow iii)$ Como R es τ-neteriano, análogamente a la demostración de la primera parte de $(ii) \Rightarrow (iii)$ podemos probar que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} \subset pgen(\tau)$.

Ahora sea C un módulo cocrítico tal que $\chi(C) \in pgen(\tau)$, como R tiene τ-$\mathcal{C_P}$-dimensión y $\chi(C) \geq \tau$ entonces, existe M un $\chi(C)$ -$\mathcal{A}$-módulo tal que $\chi(M) \in \mathcal{C_P}$, pero como $\chi(C) \in \mathcal{C_A}$ tenemos que $\chi(M) = \chi(C) \geq \tau$ por lo tanto $\chi(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$ de donde tenemos que $pgen(\tau) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$ tenienedo la igualdad deseada.

$ii) \Rightarrow v)$ Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$ y $M \neq 0$ como R es τ-neteriano por [2] 9.1 pag 105, tenemos que $Ass(M) \neq \phi$ por lo tanto $\mathcal{C_P}$-$ass(M) \neq \phi$

$v) \Rightarrow iii)$ Como R es τ-neteriano tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau} \subset pgen(\tau)$.

Ahora sea C un módulo cocrítico tal que $\chi(C) \geq \tau$. Como $C \in \mathcal{F}_\tau$ entonces, $\mathcal{C_P}$-$ass(M) \neq \phi$ de donde existe $C' \subset C$ tal que C' es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{C_P}$-módulo por lo tanto C' es $\chi(R/P)$ -$\mathcal{A}$-módulo , como $\chi(R/P) \in \mathcal{C_A}$ tenemos que $\chi(C') = \chi(R/P)$ pero como C es cocrítico tenemos que $\chi(C) = \chi(C')$ por lo tanto $\chi(C) = \chi(R/P)$ así $\chi(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\tau}$

En seguida damos una caracterización de los anillos neterianos completamente acotados.

Corolario 4.25.- Sea R un anillo neteriano izquierdo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

i) R es completamente acotado.

ii) Rsp-$ass(M) = \{\chi(R/P) \mid P \in Ass(M)\}$ para todo módulo $M \neq 0$

iii) $\mathcal{C_P} = Rsp$

iv) R tiene $\mathcal{C_P}$-dimensión izquierda.

v) $\mathcal{C_P}$-$ass(M) \neq \phi$ para todo módulo $M \neq 0$.

Demostración.- Es inmediata de la teorema anterior, ya que en este caso R es ξ-neteriano.

Terminamos este capítulo con la siguiente caracterización de los anillos convenientes:

Proposición 4.26.- Sea R un anillo semineteriano izquierdo, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R es un anillo conveniente izquierdo

ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \neq \phi$ pra todo $M \in R$-mod, $M \neq 0$.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Por 3.43 sabemos que cada módulo M distinto de cero contiene un un módulo decisivo D por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \neq \phi$.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $M \neq 0$ entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \neq \phi$ por lo tanto existe $N \subset M$ y $\chi(\in) \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ tal que N es $\chi(D)$ -$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo por lo tanto $\chi(N) = \chi(D)$ y $Hom(N, E(D)) \neq 0$, como R es neteriano podemos suponer que N es un módulo cocrítico , de donde existe $N' \subset N$ tal que $N' \hookrightarrow D$, por lo tanto N' es un módulo decisivo contenido en M, entonces por 3.43 tenemos que R es conveniente izquierdo.

CAPITULO V

módulos y anillos $D_{\mathcal{C}}$

En [12] capítulo 56, Golan define los D-anillos izquierdos como los anillos para los cuales todo R-módulo izquierdo M distinto de cero, tiene $ass(M) \neq \phi$ [12] cap 55, que es equivalente a que todo módulo M distinto de cero contenga un submódulo cocrítico , en este capítulo generalizamos este concepto utilizando una familia $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ y entonces, definimo los $D_{\mathcal{C}}$-anillos izquierdos, que son aquellos para los cuales todo módulo M distinto de cero tiene $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$

Notamos también que la clase de todos los módulos M tales que $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \neq \phi$ para todo submódulo $N \subset M$ forman una clase de torsión que denotamos por $\mathcal{T}_{\delta(\mathcal{C})}$.

Finalmente damos una caracterización de los anillos semiartinianos , una caracterización de los anillos artinianos y una caracterización de las teorías de torsión estables, usando la familia $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$.

Definición 5.1.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ y $U \subset \mathcal{C}$ y M un R-módulo izquierdo diremos que M es un $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo si para todo $N \subset M$ submódulo propio tenemos que $\phi \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \subset U$

Observación.-

i) $\forall U \subset \mathcal{C}$, el módulo $M = 0$ es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo

ii) Si $U = \phi$ el único $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo es $M = 0$

iii) Si S es un R-módulo simple y $\chi(S) \in U$ entonces S es $D_{\mathcal{C}}$(U)-módulo

Lema 5.2.- Sea $\phi \neq U \subset \mathcal{C}$ y $M \neq 0$ un $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo entonces, para todo $0 \neq N \subset M$ tenemos $\mathcal{C}$-$ass(N) \neq \phi$.

Demostración.- Sea $0 \neq N \subset M$, si $N \subset_e M$ por 3.7 tenemos $\mathcal{C}$-$ass(N) = \mathcal{C}$-$ass(M) \neq \phi$. Si N no es esencial en M, entonces existe un pseudocomplemento de N en M, L es distinto de M ya que $N \neq 0$, por lo tanto $N \bigoplus L \subset_e M$ y N se sumerge en M/L mas aun $N \simeq (N \bigoplus L)/L \subset_e M/L$; En efecto si $0 \neq K/L \subset M/L$ entonces $L \subset K$ propiamente, entonces $K \bigcap N \neq 0$ por lo tanto $[(N \bigoplus L)/L] \bigcap K/L = [(N \bigoplus L) \bigcap K]/L = [(N \bigcap K) \bigoplus L]/L \neq 0$ de donde $\mathcal{C}$-$ass(N) = \mathcal{C}$-$ass((N \bigoplus L)/L) = \mathcal{C}$-$ass(M/L) \neq \phi$.

Teorema 5.3.- Para cada $U \subset \mathcal{C}$ existe una $\delta_{\mathcal{C}}(U) \in R$-tors tal que $\mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)} = \{M \in R-mod \mid M \text{ es } D_{\mathcal{C}}(U)\text{-módulo } \}$.

Demostración.- Sea $0 \neq M$ un $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo y $N \subset M$, si $N = M$ entonces $M/N = 0$ y M/N es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo

Si $N \neq M$ entonces $M/N \neq 0$ y debemos probar que M/N es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo . Sea $L/N \subset M/N$ tal que $0 \neq (M/N)/(L/N) \simeq M/L$ y como M es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo entonces $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(M/L) \subset U$ por lo tanto $\mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ es cerrada bajo cocientes.

Sea $N \subset M$ un submódulo ,si $N = 0$ entonces N es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo , sea $K \subset N$ tal que $0 \neq N/K \subset M/K$, como M/K es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo por el lema anterior tenemos $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(N/K) \subset \mathcal{C}$-$ass(M/K) \subset U$ por lotanto $\mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ es cerrada bajo submódulos.

Sean N y M/N $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulos y consideremos la sucesión $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ tómese $L \subset M$ submódulo propio . Si $N \subset L$ tenemos el epimorfismo $M/N \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$ y como M/N es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo entonces $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(M/L) \subset U$

Si $N \not\subset L$ entonces $0 \neq N/(N \bigcap L) \simeq (N+L)/L \subset M/L$ y como N es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(N/(N \bigcap L)) \neq \phi$ y por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(M/L) \neq \phi$.

Por otra parte sabemos que $\mathcal{C}$-$ass((N+L)/L) \subset \mathcal{C}$-$ass(M/L) \subset \mathcal{C}$-$ass((N+L)/L) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(M/(N+L))$ pero $\mathcal{C}$-$ass((N+L)/L) = \mathcal{C}$-$ass(N/(N \bigcap L)) \subset U$ y $\mathcal{C}$-$ass(M/(N+L)) \subset U$ por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(M/L) \subset U$ así hemos probado que $\mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ es cerrado bajo extensiones.

Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, sea $N \subset M$ un submódulo propio, entonces $M/N = \bigcup\{[\bigoplus_{j \in J} M_j + N]/N \mid J \subset I$ es un conjunto finito$\}$ por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = \bigcup_{J \subset I} \mathcal{C}$-$ass([\bigoplus_{j \subset J} M_j + N]/N)$ donde J es un conjunto finito. Sea $J \subset I$ un conjunto finito, probaremos que $\mathcal{C}$-$ass([\bigoplus_{j \in J} M_j + N]/N) \subset U$ por inducción sobre el número de elementos que tiene J.

Si J tiene un elemento entonces tenemos que $\mathcal{C}$-$ass((M_1 + N)/N) = \mathcal{C}$-$ass(M_1/[M_1 \bigcap N]) \subset U$. Para el caso general solo basta probarlo cundo J tiene dos elementos.

$$\mathcal{C} - ass(\frac{M_1 + M_2 + N}{N}) \subset \mathcal{C} - ass(\frac{M_1 + N}{N}) \bigcup \mathcal{C} - ass(\frac{M_1 + M_2 + N}{M_1 + N})$$

$$= \mathcal{C} - ass(\frac{M_1}{M_1 \bigcap N}) \bigcup \mathcal{C} - ass(\frac{M_2}{M_2 \bigcap [M_1 + M_2]}) \subset U$$

Entonces $\mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ es cerrada bajo sumas directas de donde es una clase de torsión.

Observación.- Si $U = \phi$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(\phi) = \xi$.

Definición 5.4.- Diremos que un R-módulo izquierdo M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo si M es $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$-módulo . Un anillo R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo si como R-módulo izquierdo es $D_{\mathcal{C}}$-módulo .

Observación.-

i) Nótese que M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo si y solo si $\mathcal{C}$-$ass(M/N) \neq \phi$ para toda $N \subset M$ submódulo propio

ii) M es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo si y solo si M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset U$ si y solo si M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_{\tau} \forall \tau \in \mathcal{C} - U$. Esto se sigue de 3.16

iii) Si $U \subset \mathcal{C}$ es tal que ${}_RR$ es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo ,entonces $U = \mathcal{C}$. En efecto, si $\pi \in \mathcal{C}$ entonces existe un π-$\mathcal{C}$-módulo cíclico M y si $0 \neq x \in M$ tenemos que $M = Rx \simeq R/(0:x)$, como R es $D_{\mathcal{C}}(U)$-módulo entonces $\pi \in \mathcal{C}$-$ass(M) = \mathcal{C}$-$ass(R/(0:x)) \subset U$, por lo tanto $\mathcal{C} = U$.

Nota.- Golan define en [11], un R-módulo izquierdo M es D-módulo (definite) si $ass(M/N) \neq \phi$ para todo $N \subset M$ submódulo propio , como sabemos Rsp-$ass(M)$ coincide con el ass(M) para cualquier R-módulo M entonces, tenemos que M es D-módulo si y solo si M es Rsp-módulo. Por otra parte tenemos que si M es D-módulo entonces M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo para toda $\mathcal{C}$ tal que $Rsp \subset \mathcal{C}$, el inverso de éste resultado es falso, al final de este trabajo tenemos el ejemplo de un anillo tal que es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-anillo izquierdo (por lo tanto $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-módulo) que no es D-anillo izquierdo (por lo tanto no es D-módulo)

Definición 5.5.- Sea $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ la familia de subconjuntos de $\mathcal{C}$, definimos la siguiente función:

$$\delta_{\mathcal{C}}: \mathcal{P}(\mathcal{C}) \to R\text{-}tors$$
$$U \longmapsto \delta_{\mathcal{C}}(U)$$

Observación.-

i) Si $U \subset U'$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(U) \leq \delta_{\mathcal{C}}(U')$

ii) Si $U, U' \subset \mathcal{C}$ son tales que $U \bigcap U' = \phi$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(U) \bigcap \delta_{\mathcal{C}}(U') = \xi$

Proposición 5.6.- Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{C}$ entonces:

1) $\delta_{\mathcal{C}}(\bigcap_i U_i) = \wedge\delta_{\mathcal{C}}(U_i)$

2) $\delta_{\mathcal{C}}(\bigcup_i U_i) \geq \vee_i\delta_{\mathcal{C}}(U_i)$

Demostración.- 1) $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(\bigcap_i U_i)} \Leftrightarrow$ M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset \bigcap_i U_i \Leftrightarrow$ M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset U_i \forall i \in I \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U_i)} \forall i \in I \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_{\wedge\delta_{\mathcal{C}}(U_i)}$.

2) Como $U_i \subset \bigcup_i U_i$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(U_i) \leq \delta_{\mathcal{C}}(\bigcup_i U_i)$ de donde $\vee_i\delta_{\mathcal{C}}(U_i) \leq \delta_{\mathcal{C}}(\bigcup_i U_i)$

Nota.- La la desigualdad en (2) puede ser estricta, en el ejemplo 7.18, tenemos un anillo R en donde $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{\xi, \chi(R)\ \}$, si tomamos $U_1 = \{\xi\}, U_2 = \{\chi(R)\ \}$ vemos que $\delta_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(U_1 \bigcup U_2) = \chi$ y $\delta_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(U_1) = \xi, \delta_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(U_2) = \xi$ así tenemos la desigualdad estricta.

Si $U \subset \mathcal{C}$ denotaremos $[U] = \{U' \subset \mathcal{C} \mid \delta_{\mathcal{C}}(U') = \delta_{\mathcal{C}}(U)\}$ y $\overline{U} = \bigcap[U]$.

Corolario 5.7.- Si $U \subset \mathcal{C}$ entonces $\overline{U} \in [U]$.

Demostración.- Es inmediata de el inciso (1).

El corolario anterior nos dice que si $\tau \in Im\delta_{\mathcal{C}}$ entonces, existe $U \subset \mathcal{C}$ elemento menor tal que $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \tau$. Con ésta misma notación si $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \delta_{\mathcal{C}}(\overline{U})$ entonces, $U = \overline{U} \bigcup \{\pi \in U \mid \delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) = \xi\}$ una de las contenciones es clara , para la otra sea $\pi \in U$ si $\delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) = \xi$ habremos terminado, si $\delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) > \xi$ entonces $\xi < \delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) \leq \delta_{\mathcal{C}}(U) = \delta_{\mathcal{C}}(\overline{U})$ de donde si $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\})}$ entonces $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\pi\} \subset \overline{U}$ por lo tanto $\pi \in \overline{U}$.

Proposición 5.8.- Sea $U \subset \mathcal{C}$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(U) \leq \wedge(\mathcal{C} - U)$.

Demostración.- si $U = \mathcal{C}$ no hay nada que probar. Supongamos que $U \neq \mathcal{C}$ y sea $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ entonces M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset U$, por 3.15 tenemos que

$M \in \mathcal{T}_\tau$ para toda $\tau \in \mathcal{C} - U$, por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{\wedge(\mathcal{C}-U)}$ y $\delta_{\mathcal{C}}(U) \leq \wedge(\mathcal{C} - U)$.

Teorema 4.9.- Para un anillo R y para $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ las siguientes condiciones son equivalentes.

a) R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo

b) $\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \chi$

c) M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo $\forall M \in R - mod$

d) $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi \quad \forall M \neq 0 \; M \in R\text{-}mod$

e) $\delta_{\mathcal{C}}$ es suprayectiva

f) $\chi \in Im\delta_{\mathcal{C}}$

g) $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \wedge(\mathcal{C} - U) \quad \forall U \subset \mathcal{C}$

Demostración.- $a) \Rightarrow b)$ Como R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo entonces ${}_RR \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ por lo tanto $\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \chi$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $M \in R\text{-}mod$, entonces $M \in \mathcal{T}_\chi = \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ por lo tanto M es $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$-módulo lo cual implica que M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo .

$c) \Rightarrow d)$ es obvia

$d) \Rightarrow a)$ Sea $I \subset R$ un ideal izquierdo propio, como $R/I \neq 0$ entonces $\mathcal{C}$-$ass(R/I) \neq \phi$ por lo tanto R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo.

$d) \Rightarrow e)$ Sea $\tau \in R\text{-}tors$ y $U = \bigcup\{\mathcal{C}\text{-}ass(M) \mid 0 \neq M \in \mathcal{T}_\tau \}$

Afirmación.- $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \tau$; En efecto sea $M \in \mathcal{T}_\tau$ y $N \subset M$ submódulo propio, sabemos que $0 \neq M/N \in \mathcal{T}_\tau$ y por lo tanto $\phi \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \subset U$ de donde $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ y $\tau \leq \delta_{\mathcal{C}}(U)$. Supongamos que $\tau < \delta_{\mathcal{C}}(U)$ entonces existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)} \bigcap \mathcal{F}_\tau$, como $M \neq 0$ $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$, entonces existe $N \subset M$ $\mathcal{C}$-módulo y $N \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $\pi = \chi(N) \geq \tau$. Por otra parte sabemos que $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ entonces $\pi \in U$ y por definición de U existe $0 \neq K \in \mathcal{T}_\tau$ π-$\mathcal{C}$-módulo , en estas condiciones tenemos $K \in \mathcal{T}_\tau \subset \mathcal{T}_\pi$ pero K es π-$\mathcal{C}$-módulo lo cual dice que $K \in \mathcal{F}_\pi \bigcap \mathcal{T}_\pi = 0$

y esto es imposible por lo tanto $\tau = \delta_{\mathcal{C}}(U)$.

$e) \Rightarrow f)$ es obvia.

$f) \Rightarrow a)$ como $\chi \in Im\delta_{\mathcal{C}}$ entonces existe $U \subset \mathcal{C}$ tal que $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \chi$ de donde ${}_RR \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ por lo tanto R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo.

$a) \Rightarrow g)$ Por la proposición 4.8 tenemos que $\delta_{\mathcal{C}}(U) \leq \wedge(\mathcal{C} - U)$, sabemos que $M \in \mathcal{T}_{\wedge(\mathcal{C}-U)} \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_{\tau}\ \forall\tau \in (\mathcal{C} - U \Leftrightarrow \mathcal{C}\text{-}sup(M) \subset U$ y como R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo tenemos que M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo por lo tanto M es $D_{\mathcal{C}}$(U)-módulo de donde $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ y así $\delta_{\mathcal{C}}(U) = \wedge(\mathcal{C} - U)$.

$g) \Rightarrow b)$ Sea $U = \mathcal{C}$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \wedge(\mathcal{C} - \mathcal{C}) = \chi$ por lo tanto R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo iquierdo.

Corolario 5.10.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\chi(M)\ \}\forall M$ $\mathcal{C}$-módulo entonces, son equivalentes

a) R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izquierdo

b) $\wedge U = \wedge\{\chi(N)\ \mid \mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset U\}\ \forall U \subset \mathcal{C}$

$a) \Rightarrow b)$ Sea $U \subset \mathcal{C}$ si $U = \phi$ tenemos el resultado.

Ahora supongamos que $U \neq \phi$ y sea $N \neq 0$ tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset U$, como R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo izqueirdo entonces por la proposición 3.12 tenemos que $\chi(N)\ = \wedge C_N$ y $\wedge\mathcal{C}\text{-}ass(N) \geq \wedge U$ por lo tanto $\chi(N)\ \geq \wedge U$, así tenemos que $\wedge\{\chi(N)\ \mid \mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset U\} \geq \wedge U$.

Pongamos $\tau = \wedge\{\chi(N)\ \mid \mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset U\}$ sea $\pi \in U$ y $\pi = \chi(N)$ con N un π-$\mathcal{C}$-módulo entonces, $\mathcal{C}\text{-}ass(N) = \{\pi\} \subset U$ de ésta forma $\chi(N)$ es un elemento del conjunto en cuestión y tenemos $\pi \geq \tau$, pero esto lo hacemos para cada $\pi \in U$ por lo tanto $\wedge U \geq \tau$ de donde $\wedge U = \tau$.

$b) \Rightarrow a)$ Tómese $U = \phi$ entonces $\chi = \wedge U = \wedge\{\chi(N)\ \mid \mathcal{C}\text{-}ass(N) \subset \phi\}$, si N es tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(N) = \phi$ entonces $\chi \leq \chi(N)\ \leq \chi$ de donde $N = 0$ así R es $D_{\mathcal{C}}$ -anillo

izquierdo.

El teorema anterior nos dice cuando la función $\delta_{\mathcal{C}}$ es suprayectiva, ahora nuestro objetivo es decir cuando $\delta_{\mathcal{C}}$ es inyectiva.

Proposición 5.11.- Sea $U \subset \mathcal{C}$ tal que $\delta_{\mathcal{C}}(U) > \xi$ entonces $U \bigcap Rsp \neq \phi$

Demostración.- Sea $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ entonces para $0 \neq m \in M$ tenemos que Rm es un $D_{\mathcal{C}}$-módulo distinto de cero, como Rm es finitamente generado existe $N \subset Rm$ submódulo máximo, por lo tanto $\chi(Rm/N) \in \mathcal{C}\text{-}ass(Rm/N) \subset U$ y así tenemos que $\chi(Rm/N) \in U$ de donde tenemos el resultado deseado.

Nótese que el resultado anterior es más fuerte ya que en realidad se está probando que si U es como en la proposición entonces, U contiene teorías de torsión cogeneradas por módulos simples.

Corolario 5.12.- Si $\pi \in \mathcal{C}$ es tal que $\delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) > \xi$ entonces π es una teoría de torsión de cogenerada por un módulo simple.

Observación.- Por el corolario anterior nos damos cuenta que si $\pi \in (\mathcal{C} - Rsp)$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(\{\pi\}) = \xi$, de donde $\delta_{\mathcal{C}}$ no puede ser inyectiva, por lo tanto una condición necesaria para que $\delta_{\mathcal{C}}$ sea inyectiva es que $\mathcal{C} = Rsp$.

Lema 5.13.- Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset R\text{-}irr$ con la propiedad que $\mathcal{C}'\text{-}ass(M) = \{\chi(M)\}$ para cada $\mathcal{C}'$ -módulo M entonces, si $\mathcal{C}'\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M)$

Demostración.- Sabemos que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}'\text{-}ass(M)$, ahora sea $\tau \in \mathcal{C}'\text{-}ass(M)$ por lo tanto existe $N \subset M$ un τ-$\mathcal{C}'$ -módulo así $\tau = \chi(N)$, por la hipótesis sabemos que $\tau \in \mathcal{C}$ y si $\leq\neq L \subset N$ tenemos que L es τ-$\mathcal{C}'$ -módulo por lo tanto $\chi(L) = \tau$ así hemos probado que para toda $L \neq 0$ $L \subset M$ $\chi(L) \in \mathcal{C}$ de donde N es τ-$\mathcal{C}$-módulo

Observación.- Por el lema anterior y como $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ satisface la condición de la proposición anterior tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-$ass(M) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$, Rsp-$ass(M) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-$ass(M)$.

Proposición 5.14.- Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset R$-$irr$ y supongamos que $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}, \mathcal{C}' - ass(M) = \{\chi(M)\}$ para todo $\mathcal{C}$-módulo M y para todo $\mathcal{C}'$ -módulo M entonces la función $\delta'_{\mathcal{C}}$ extiende a la función $\delta_{\mathcal{C}}$

Demostración.- Sea $U \subset \mathcal{C}$, debemos probar que $\delta'_{\mathcal{C}}(U) = \delta_{\mathcal{C}}(U)$. Sea $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\delta'_{\mathcal{C}}(U)}$ y $N \subset M$ submódulo propio entonces $\phi \neq \mathcal{C}'$ -$ass(M/N) \subset U \subset \mathcal{C}$, por el lema anterior tenemos que $\mathcal{C}'$ -$ass(M/N) = \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ por lo tanto para cada $M \in \mathcal{T}_{\delta'_{\mathcal{C}}(U)}$ tenemos que $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ de éste modo probamos que $\delta'_{\mathcal{C}}(U) \leq \delta_{\mathcal{C}}(U)$.

Ahora sea $M \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ y $N \subset M$ submódulo propio, nuevamente tenemos que $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(M/N) \subset U$. Afirmación, $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = \mathcal{C}'$ -$ass(M/N)$; en efecto si $\tau \in \mathcal{C}'$ -$ass(M/N)$ entonces existe $L/N \subset M/N$ un τ-$\mathcal{C}'$ -módulo, pero $L/N \in \mathcal{T}_{\delta_{\mathcal{C}}(U)}$ y por lo tanto $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(L/N) \subset U$ así existe $\pi \in \mathcal{C}$-$ass(L/N)$ y $\pi \in U$, por lo tanto existe $K/N \subset L/N$ un π-$\mathcal{C}$-módulo de donde $\pi = \chi(K/N) = \chi(L/N) = \tau$ y así tenemos $\mathcal{C}$-$ass(M/N) = \mathcal{C}' - ass(M/N)$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}\delta'_{\mathcal{C}}(U)$ y $\delta'_{\mathcal{C}}(U) = \delta_{\mathcal{C}}(U)$.

Definición 5.15.- Para $\tau \in R$-$tors$ definimos los conjuntos $P_{\mathcal{C}}(\tau) = \{\pi \in \mathcal{C} \mid \pi \geq \tau\}$ y $V_{\mathcal{C}}(\tau) = V_{\mathcal{C}}(\tau) = \mathcal{C} - P_{\mathcal{C}}(\tau)$.

Observación.-

i) $P_{\mathcal{C}}(\tau) = \{\chi(M) \mid M$ es $\mathcal{C}$-módulo y $M \in \mathcal{F}_{\tau}\}$

ii) $V_{\mathcal{C}}(\tau) = \mathcal{C} - P_{\mathcal{C}}(\tau)$

Proposición 5.16.- Sea $\tau \in R$-$tors$ $\phi \neq U \subset \mathcal{C}$ entonces:

1) $M \in \mathcal{T}_{\tau \wedge \delta_C(U)} \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_{\delta_C(U)}$ y $\mathcal{C}$-$sup \subset V_C(\tau)$

2) Si $\tau \vee \delta_C(U) = \chi$ entonces $\tau = \wedge P_C(\tau)$

Demostración.- $\Rightarrow$] $M \in \mathcal{T}_{\tau\wedge\delta_C(U)} \Rightarrow M \in \mathcal{T}_\tau \bigcap \mathcal{T}_{\delta_C(U)}$. Ahora sea $\pi \in P_C(\tau)$ por lo tanto $\pi \geq \tau$ de donde $M \in \mathcal{T}_\pi$ $\forall \pi \in P_C(\tau)$ y por la proposición 3.11 tenemos que $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset V_C(\tau)$.

$\Leftarrow$] Sea $M \in \mathcal{T}_{\delta_C(U)}$ y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset V_C(\tau)$, basta probar que $M \in \mathcal{T}_\tau$, Sup que $M \notin \mathcal{T}_\tau$ entonces $M/(t_\tau\ (M)) = N \neq 0$ es un R-módulo que tiene la propiedad de $N \in \mathcal{T}_{\delta_C(U)}$, $\mathcal{C}$-$sup(N) \subset \mathcal{C}$-$sup(M) \subset V_C(\tau)$ y $N \in \mathcal{F}_\tau$, ahora tómese $\chi(L) = \pi \in \mathcal{C}$-$ass(N)$, como $\mathcal{C}$-$ass(N) \subset \mathcal{C}$-$sup(N) \subset V_C(\tau)$ entonces $\pi \in V_C(\tau)$,por otra parte sabemos que $N \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $L \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \pi \geq \tau$ por lo tanto $\pi \in P_C(\tau)$ lo cual es imposible de donde $M \in \mathcal{T}_\tau$.

2) Sea $\sigma = \wedge P_C(\tau)$ entonces $\tau \leq \sigma$, supongamos que $\tau < \sigma$ entonces existe un R-módulo $M \neq 0$ tal que $M \in \mathcal{T}_\sigma \bigcap \mathcal{F}_\tau$ por otra parte sabemos que $M \in \mathcal{T}_{\tau\vee\delta_C(U)}$ por lo tanto $M \notin \mathcal{F}_{\delta_C(U)}$ así existe $\pi \in \mathcal{C}$-$ass(M)$ y como $M \in \mathcal{F}_\tau$ tenemos que $\pi \geq \tau \Rightarrow \pi \in P_C(\tau)$ de donde $\sigma \leq \pi$ y así tenemos que $M \in \mathcal{T}_\pi$ lo cual es imposible por lo tanto $\tau = \sigma$.

Corolario 5.17.- Si R es D_C-anillo izquierdo entonces para toda $\tau \in R$-$tors$ $\tau = \wedge P_C(\tau)$.

Demostración.- $\delta_C(\mathcal{C}) = \chi$ por lo tanto $\tau \vee \delta_C(\mathcal{C}) = \chi$

En lo sucesivo denotaremos a $\delta_C(\mathcal{C})$ como τ_{D_C}

Proposición 5.18.- Para $\tau \in R$-$tors$ las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\tau = \delta_C(V_C(\tau))$

ii) $\tau \leq \tau_{D_C}$

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Es obvia.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $M \in \mathcal{T}_\tau$ y $\pi \in P_\mathcal{C}(\tau)$ entonces $M \in \mathcal{T}_\pi$, por la proposición 3.11 tenemos que $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset V_\mathcal{C}(\tau)$; por otra parte $M \in \mathcal{T}_{\tau_{D_\mathcal{C}}}$ de donde M es un $D_\mathcal{C}$-módulo y así tenemos que $M \in \mathcal{T}_{\delta_\mathcal{C}(V_\mathcal{C}(\tau))}$, por lo tanto $\tau \leq \delta_\mathcal{C}(V_\mathcal{C}(\tau))$.

Supongamos que $\tau < \delta_\mathcal{C}(V_\mathcal{C}(\tau))$, por lo tanto existe $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\delta_\mathcal{C}(V_\mathcal{C}(\tau))} \bigcap \mathcal{F}_\tau$ de donde M es $D_\mathcal{C}$-módulo y $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset V_\mathcal{C}(\tau)$. Sea $\pi \in \mathcal{C}$-$ass(M)$, como $M \in \mathcal{F}_\tau$ entonces $\tau \leq \pi$, por lo tanto $\pi \in P_\mathcal{C}(\tau)$ y como $\mathcal{C}$-$ass(M) \subset \mathcal{C}$-$sup(M)$ de donde $\pi \in V_\mathcal{C}(\tau)$ lo cual es imposible.

Corolario 5.19.- Para la función $\delta_\mathcal{C}$ tenemos que $Im\delta_\mathcal{C} = [\xi, \tau_{D_\mathcal{C}}]$

Demostración.- $\forall U \subset \mathcal{C}$ tenemos que $\delta_\mathcal{C}(U) \leq \delta_\mathcal{C}(\mathcal{C}) = \tau_{D_\mathcal{C}}$. Si $\tau \in [\xi, \tau_{D_\mathcal{C}}]$ entonces por la proposición anterior tenemos que $\tau = \delta_\mathcal{C}(V_\mathcal{C}(\tau))$

Lema 5.20.- Sea $\tau \in R$-$tors$ tal que satisface la condición de que un R-módulo M es de τ -torsión si y solo si $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$, entonces τ es estable.

Demostración.- Sea M un R-módulo tal que $M \in \mathcal{T}_\tau$ sabemos que $\mathcal{C}$-$ass(M) = \mathcal{C}$-$ass(E(M))$ y por la hipótesis tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$ por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(E(M)) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$ de donde tenemos que $E(M) \in \mathcal{T}_\tau$ y así τ es estable.

Proposición 5.21.- Si R es anillo $D_\mathcal{C}$-izquierdo entonces $\tau \in R$-$tors$ es estable si y solo si $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M))$ para todo $M \in R$-mod.

Demostración.- $\Leftarrow]$ Por el lema anterior basta probar que $M \in \mathcal{T}_\tau \Leftrightarrow \mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$. Claramente si $M \in \mathcal{T}_\tau$ tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$. Ahora supongamos que $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \phi$, por la hipótesis tenemos que que $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = \mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M))$ por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M)) = \phi$, pero R es $D_\mathcal{C}$-anillo izquierdo de donde $M/t_\tau(M) = 0$ y así $M \in \mathcal{T}_\tau$.

$\Rightarrow$] Supongamos que τ es estable y M es un R-módulo

Sabemos que $t_\tau(M) = t_\tau(E(M)) \bigcap M$ de donde tenemos que

$$\frac{M}{t_\tau(M)} = \frac{M}{t_\tau E(M) \bigcap M} \simeq \frac{M + t_\tau(E(M))}{t_\tau(E(M))}$$

por lo tanto

$$\frac{M}{t_\tau(M)} \hookrightarrow \frac{E(M)}{t_\tau(E(M))}$$

y así

$$\mathcal{C} - assg(\frac{M}{t_\tau(M)}) \subset \mathcal{C} - assg(\frac{E(M)}{t_\tau(E(M))})$$

Como τ es estable entonces $t_\tau(E(M))$ es sumando directo de $E(M)$ por lo tanto $E(M)/t_\tau(E(M))$ es isomorfo a un submódulo de $E(M)$ es decir $\mathcal{C}$-$ass(E(M)/t_\tau(E(M)) \subset \mathcal{C}$-$ass(E(M)) = \mathcal{C}$-$ass(M)$ por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M)) \subset \mathcal{C}$-$ass(M)$ y así tenemos que:

$\mathcal{C}$-$ass(t_\tau(M)) \bigcup \mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M)) = \mathcal{C}$-$ass(M)$.

Por otra parte $\mathcal{C}$-$ass(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau) = [\mathcal{C}$-$ass(t_\tau(M) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau)] \bigcup$

$[\mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M)) \bigcap P_\mathcal{C}(\tau)] = \phi \bigcup \mathcal{C}$-$ass(M/t_\tau(M))$ así llegamos al resultado deseado.

Definición 5.22.- Si $\mathcal{C} \subset R$-irr, diremos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes libres de torsión si para cada $\tau \in R$-$tors$ y para cada τ-$\mathcal{C}$-módulo M tal que, si $L \subset N \subset M$ con $0 \neq N/L \in \mathcal{F}_\tau$ entonces N/L es τ-$\mathcal{C}$-módulo

Observación.- Ejemplos de éstas $\mathcal{C}$ son, cualquier subconjunto de $\mathcal{C}_\mathcal{A}$.

Proposición 5.23.- Sea $\mathcal{C} \subset R$-irr cerrada bajo cocientes libres de torsión, entonces no existen $\tau_{D_\mathcal{C}}$-$\mathcal{C}$-módulos.

Demostración.- Supongamos que existe $M \neq 0$ tal que M es $\tau_{D_\mathcal{C}}$-$\mathcal{C}$-módulo

Afirmación M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo ; En efecto sea $N \subset M$ submódulo propio si $M/N \in \mathcal{F}_{\tau_{D_c}}$, entonces M/N es τ_{D_c}-$\mathcal{C}$-módulo lo cual implica que $\mathcal{C}$-$ass(M/N) \neq \phi$. Si $M/N \notin \mathcal{F}_{\tau_{D_c}}$ entonces $t_{\tau_{D_c}}(M/N) \neq 0$ así $\mathcal{C}$-$ass(M/N) \neq \phi$ de donde M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo y $M \in \mathcal{T}_{D_c}$ lo cual es imposible.

Proposición 5.24.- Sea $\mathcal{C}$ cerrada bajo cocientes libres de torsión, si $\{\alpha_i\}$ es la $\mathcal{C}$-filtración y $\alpha_{\mathcal{C}}$ es la teoría de torsión tal que $\alpha_{\mathcal{C}} = \alpha_i = \alpha_{i+1}$ entonces $\alpha_{\mathcal{C}} \leq \tau_{D_c}$

Demostración.- Inducción transfinita

$\alpha_{-1} = \xi \leq \tau_{D_c}$

Sea i ordinal límite y supongamos que para toda $j < i$, $\alpha_j < \tau_{D_c}$, entonces $\alpha_i = \vee_{j<i}\alpha_j \leq \tau_{D_c}$

Sea i ordinal no límite y $\alpha_{i-1} \leq \tau_{D_c}$ debemos probar que $\alpha_i \leq \tau_{D_c}$. Supongamos que $\alpha_i \nleq \tau_{D_c}$, como $\alpha_i = \alpha_{i-1} \vee \xi(\{M \mid M$ es α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo $\}$ entonces existe M, α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo tal que $M \notin \mathcal{T}_{\tau_{D_c}}$, por lo tanto $0 \neq M/t_{\tau_{D_c}}(M) \in \mathcal{F}_{\tau_{D_c}} \subset \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$ y así L es α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo por lo tanto L es τ_{D_c}-$\mathcal{C}$-módulo lo cual es imposible.

Corolario 5.25.- Si R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-dimensión entonces R es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-anillo izquierdo.

Ahora damos una caracterización de los anillos artinianos utilizando a la familia $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ que hemos mencionado con anterioridad.

Proposición 5.26.- Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

i) R es anillo semiartiniano izquierdo

ii) R es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}}$-anillo izquierdo y $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con mas de un elemento.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Como R es anillo semiartiniano izquierdo entonces, para todo $M \neq 0$ existe un módulo simple S tal que $S \hookrightarrow M$ y como S es un módulo decisivo tenemos claramente que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \neq \phi$ por lo tanto R es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}}$-anillo

izquierdo.

Por otro lado sabemos que cada módulo decisivo contiene un simple entonces, por 3.38 tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con mas de un elemento.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $M \neq 0$ entonces, $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-$ass(M) \neq \phi$ por lo tanto existe un submódulo $N \subset M$ y $\chi(D) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ tal que N es $\chi(D)$ -$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo donde D es un módulo decisivo como $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas entonces, por 3.38 tenemos que existe un módulo simple S tal que $S \hookrightarrow D$ como D es $\mathcal{A}$-módulo tenemos que $\chi(S) = \chi(D)$ por lo tanto N es $\chi(S)$ -$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-módulo y como $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tenemos que N es $\chi(S)$ -$\mathcal{A}$-módulo y por 2.25 sabemos que $\chi(N) = \chi(S)$ por lo tanto $S \hookrightarrow N$ así $S \hookrightarrow M$ de donde R es un anillo semineteriano izquierdo.

Corolario 5.27.- Para un anillo neteriano izquierdo son equivalenetes:

i) R es artiniano izquierdo

ii) R es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}}$-anillo izquierdo y $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ no tiene cadenas con mas de un elemento.

Demostración.- *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Como cada anillo artiniano es semiartiniano entonces, el resultado se sigue de la proposición anterior.

ii) $\Rightarrow$ *i)* L condición (*ii*) implica que R es anillo semiartiniano y como tenemos por hipótesis que R es anillo neteriano entonces, por 12.8 [11] tenemos que R es anillo artiniano izquierdo.

Notemos que los anteriores resultados pueden ser facilmente generalizados al contexto de anillos τ-neterianos y τ-artinianos, los resultados mas importantes para anillos τ-artinianos han sido obtenidos por Miller y Teply en [18], resultados análogos a los presentados aquí usando elementos de Rsp, se pueden ver en Zhang [18]. Una importante fuente de información respecto a condiciones relativas a teorías de torsión , es Albu-Nastasescu [2]. Finalizamos este capítulo demostrando que si R es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-anillo izquierdo entonces $\forall I \subset R$ ideal bilateral se tiene que R/I es $D_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-anillo

izquierdo.

Lema 5.28.- Sea R un anillo y $I \subset R$ un ideal bilateral, $S = R/I$. Si N y M son S-módulos entonces ${}_SN \in \mathcal{T}_{\chi({}_SM)} \Leftrightarrow {}_RN \in \mathcal{T}_{\chi({}_RM)}$.

Demostración.- ${}_SN \in \mathcal{T}_{\chi({}_SM)} \Leftrightarrow Hom_S({}_SN, E({}_SM)) = 0 \Leftrightarrow Hom_S({}_SN',{}_SM) = 0 \forall {}_SN' \subset {}_SN$ cíclico (Pero ${}_SN'$ es cíclico si y solo si ${}_RN'$ es cíclico) $\Leftrightarrow Hom_R({}_RN',{}_RM) = 0 \forall {}_RN' \subset {}_RM$ cíclico $\Leftrightarrow Hom_R({}_RN, E({}_RM)) = 0 \Leftrightarrow {}_RN \in \mathcal{T}_{\chi({}_RM)}$.

Corolario 4.29.- Con las hipótesis de el lema anterior tenemos ${}_SN \in \mathcal{F}_{\chi({}_SM)} \Leftrightarrow {}_RN \in \mathcal{F}_{\chi({}_RM)}$.

Demostración.- $\Rightarrow]$ Si ${}_RN \notin \mathcal{F}_{\chi({}_RM)} \Rightarrow {}_RN' = t_{\chi({}_RM)}({}_RN) \neq 0$ como ${}_RN' \subset_R N$ entonces N' es S-módulo, por el lema anterior ${}_SN' \in \mathcal{T}_{\chi({}_SM)}$ por lo tanto ${}_SN \notin \mathcal{F}_{\chi({}_SM)}$ lo cual es imposible.

$\Leftarrow]$ Si ${}_SN \notin \mathcal{F}_{\chi({}_SM)}$ nuevamente ${}_SN' = t_{\chi({}_SM)}({}_SN) \neq 0$ por lo tanto ${}_RN' \in \mathcal{T}_{\chi({}_RM)}$ y así ${}_RN \notin \mathcal{F}_{\chi({}_RM)}$ lo cual es imposible.

Proposición 4.30.- Sea R anillo $D_{\mathcal{C}_\mathcal{A}}$ izquierdo, $I \subset R$ ideal bilateral entonces el anillo $S = R/I$ es anillo $D_{\mathcal{C}_\mathcal{A}}$ izquierdo.

Demostración.- Sea $N \neq 0$ un S-módulo entonces ${}_RN \neq 0$, como R es anillo $D_{\mathcal{C}_\mathcal{A}}$ anillo izquierdo tenemos que $\mathcal{C}_\mathcal{A} - ass({}_RN) \neq \phi$ de donde existe ${}_RN' \subset {}_RN$ un $\mathcal{A}$-módulo .

Sabemos que $I_RN = 0$ de donde $I_RN' = 0$ por lo tanto N' es S-módulo

Afirmación ${}_SN'$ es $\chi({}_SN')$ -$\mathcal{A}$-módulo

En efecto haciendo uso de la proposición 2.3, sean ${}_SA \subset {}_SB \subset {}_SN'$ tal que $0 \neq {}_SB/{}_SA \in \mathcal{F}_{\chi({}_SN')}$ y $Hom_S(B/A, E) = 0$ para E un S-módulo inyectivo tal que ${}_SE \in \mathcal{F}_{\chi({}_SN')}$, debemos probar que $Hom_S(N', E) = 0$.

Demostración.- Como ${}_S(B/A) \in \mathcal{F}_{\chi({}_SN')} \Leftrightarrow {}_R(B/A) \in \mathcal{F}_{\chi({}_RN')}$ y $Hom_S(B/A, E) = 0 \Leftrightarrow {}_S(B/A) \in \mathcal{T}_{\chi({}_SE)} \Leftrightarrow {}_R(B/A) \in \mathcal{T}_{\chi({}_RE)} \Leftrightarrow Hom_R(B/A, E({}_RE)) = 0$, sabemos que ${}_SE \in \mathcal{F}_{\chi({}_SN')} \Leftrightarrow {}_RE \in \mathcal{F}_{\chi({}_RN')} \Rightarrow E({}_RE) \in \mathcal{F}_{\chi({}_RN')}$. Ya que ${}_RA \subset {}_RB \subset {}_RN'$ son tales que $Hom_R(B/A, E({}_RE)) = 0$ con $E({}_RE) \in \mathcal{F}_{\chi({}_RN')}$ y como ${}_RN'$ es $\chi({}_RN')$ -$\mathcal{A}$-módulo $\Rightarrow Hom_R(N', E({}_RE)) = 0 \Leftrightarrow {}_RN' \in \mathcal{T}_{\chi({}_ER)} \Leftrightarrow {}_SN' \in \mathcal{T}_{\chi({}_SE)} \Leftrightarrow Hom_S(N', E) = 0$

CAPITULO VI

Descomposición $\mathcal{C}$-primaria

El concepto de descomposición primaria, aparece en el estudio de los anillos neterianos conmutativos, este concepto fué extendido al caso no conmutativo por Lesieur y Croisot [15] con el nombre de descomposición terciaria, posteriormente , en [13] Goldman introdujo una teoría de descomposición primaria para módulos neterianos sobre anillos arbitrarios, en esta teoría, el papel de los ideales primos lo juegan las teorías de torsión primas, en vista de que los elementos primos de R-$tors$, desde el punto de vista de la teoría de retículas, son los elementos irreducibles, nos parece natural extender la teoría de descomposición primaria de Goldman a ciertas familias de teorías de torsión irreducibles.

El resultado principal de este capítulo establece que si $M \in R$-mod, entonces todo submódulo propio de M tiene $\mathcal{C}$-descomposición primaria en M si y solo si M es $D_{\mathcal{C}}$-módulo.

Definición 6.1.- Un R-módulo M es $\mathcal{C}$-coprimario si $\mathcal{C}$-$ass(M)$ consta de una sola teoría de torsión. Si $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\tau\}$ entonces diremos que M es τ-$\mathcal{C}$-coprimario.

Observación.-

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ entonces en general si M es $\mathcal{C}$-coprimario ,esto no implica que M es $\mathcal{C}'$-coprimario. Para ver esto, sea $\mathcal{C} = Rsp$ y $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, tomemos N un módulo cocrítico y N' un $\mathcal{A}$-módulo que no contiene ningún cocrítico en el ejemplo 7.18 al final de esta tesis el único módulo simple y el anillo R cumplen lo anterior). Ahora, sea $M = N \oplus N'$. Afirmamos que M es Rsp-coprimario pero M no es $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-coprimario.

En efecto, $Rsp\text{-}ass(M) = ass(M) = ass(N) \cup ass(N') = \{\chi(N)\} \cup \phi = \{\chi(N)\}$, de donde M es Rsp-coprimario. Por otra parte, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(N) \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\text{-}ass(N') = \{\chi(N), \chi(N')\}$ y $\chi(N) \neq \chi(N')$ ya que $\chi(N') \notin Rsp$.

En algunos resultados de éste capítulo , trabajaremos con familias $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ que satisfacen la siguiente condición:

(*) $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\chi(M)\}$ para todo $\mathcal{C}$-módulo M, notemos que las familias Rsp, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ satisfacen esta condición.

Proposición 6.2.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ que satisface la condición (*). Si M es un R-módulo tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$ y M es uniforme entonces M es $\mathcal{C}$-coprimario.

Demostración.- Como $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$ entonces existe $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$. Afirmamos que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\tau\}$. En efecto, sea $\sigma \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ y $N \subset M$ un σ-$\mathcal{C}$-módulo entonces $\sigma = \chi(N)$, pero sabemos que existe $N' \subset M$ un τ-$\mathcal{C}$-módulo, de donde tenemos que $0 \neq N' \cap N$ y este módulo es τ-$\mathcal{C}$-módulo y σ-$\mathcal{C}$-módulo, por lo tanto $\tau = \chi(N \cap N') = \sigma$.

Proposición 6.3.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ que satisface la condición (*) y supongamos que M es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es $\mathcal{C}$-coprimario.

ii) $\chi(M) \in \mathcal{C}$ y $\chi(M) = \chi(N)$, para todo $0 \neq N \subset M$.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Sea $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\tau\}$ y $N \subset M$ un τ-$\mathcal{C}$-módulo, sabemos que $\tau = \chi(N) \geq \chi(M)$. Afirmamos que $M \in \mathcal{F}_{\tau}$.

En efecto, si $0 \neq L = t_{\tau}(M)$, como M es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-módulo entonces $\mathcal{C}\text{-}ass(L) \neq \phi$ y

$\mathcal{C}$-$ass(L) \subset \mathcal{C}$-$ass(M)$, de donde $\mathcal{C}$-$ass(L) = \{\tau\}$ lo cual es imposible pues $L \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto $\chi(M) \geq \tau$ de donde $\chi(M) = \tau = \chi(N)$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $\tau \in \mathcal{C}$-$ass(M)$, entonces existe un τ-$\mathcal{C}$-módulo $N \subset M$, por **(ii)** tenemos que $\tau = \chi(N) = \chi(M)$ así, $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}$ y M es $\mathcal{C}$-coprimario.

Nótese que la proposición anterior sigue siendo válida si M es un módulo tal que $\mathcal{C}$-$ass(N) \neq \phi$ para todo $0 \neq N \subset M$.

Nota.- En [11] proposición 21.21 se prueba que todo R-módulo neteriano izquierdo es $\mathcal{D}$-módulo (en nuestro contexto es $\mathcal{D}_{Rsp}$-módulo), por lo tanto es $\mathcal{D}_\mathcal{C}$-módulo para toda $\mathcal{C}$ tal que $Rsp \subset \mathcal{C}$, claramente tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(M) = Rsp$-$ass(M)$ y de acuerdo con esto tenemos la siguiente:

Observación.- Sea $\mathcal{C}$ tal que satisface la condición (*) y $Rsp \subset \mathcal{C}$.

i) Si M es neteriano izquierdo y uniforme entonces M es $\mathcal{C}$-coprimario.

ii) Si M es neteriano izquierdo entonces $\mathcal{C}$-$ass(M)$ es finito (ésto se sigue de [11] proposición 21.22).

Definición 6.4.- Sea $M \in R$-mod, un submódulo $N \subset M$ es llamado $\mathcal{C}$-primario en M si M/N es $\mathcal{C}$-coprimario. Diremos que N es τ-$\mathcal{C}$-primario si M/N es τ-$\mathcal{C}$-coprimario.

Observación.-

i) $0 \subset M$ es $\mathcal{C}$-primario en M $\Leftrightarrow$ M es $\mathcal{C}$-coprimario.

ii) M no puede ser $\mathcal{C}$-primario en M.

iii) Sea $N \subset L \subset M$ y supongamos que L/N es $\mathcal{C}$-primario en M/N, entonces L es $\mathcal{C}$-primario en M.

Proposición 6.5.- Si $\{N_1, \ldots, N_r\}$ son submódulos τ-$\mathcal{C}$-primarios de un $\mathcal{D}_\mathcal{C}$-

módulo M, entonces $N = N_1 \cap \ldots \cap N_r$ es τ-$\mathcal{C}$-primario en M.

Demostración.- Tenemos que:

$$M/N = M/(N_1 \cap \ldots \cap N_r) \hookrightarrow M/N_1 \oplus \ldots \oplus M/N_r$$

Por otra parte, sabemos que M es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-módulo y como $M/N \neq 0$ tenemos que:

$$\phi \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(\textstyle\bigoplus_{i=1}^{r} M/N_i) = \{\tau\}$$

por lo tanto, N es τ-$\mathcal{C}$-primario.

Definición 6.6.- Sea M un R-módulo izquierdo. Un submódulo $N \subset M$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M si existe un conjunto no vacío $\{N_i \mid i \in \Omega\}$ de submódulos de M tales que cumplen:

1) N_i es $\mathcal{C}$-primario en M, $\forall i \in \Omega$.

2) $N = \bigcap_{i \in \Omega} N_i$ y $N \neq \bigcap_{i \in \Omega'} N_i$, $\forall \Omega' \subset \Omega, \Omega' \neq \Omega$.

3) $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i) \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_j)$ si $i \neq j$.

4) $\mathcal{C}\text{-}ass(N_i/N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) - \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i), \forall i \in \Omega$.

5) $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N) = \bigcup_{i \in \Omega} \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i)$.

Observación.-

i) $\forall M \in R$-mod, M no tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M.

ii) Si $N \subset M, N \neq M$ y si N es $\mathcal{C}$-primario en M entonces N tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M (tómese el conjunto $\{N\}$).

Proposición 6.7.- $N \subset M$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M si y sólo si $\overline{0} \subset M/N$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M/N

Demostración.- Sea $\{N_i \mid i \in \Omega\}$ descomposición de N en M; afirmamos que $\{N_i/N \mid i \in \Omega\}$ es el conjunto que dá la descomposición de $\overline{0}$ en M/N. En efecto, tenemos que:

1) Cada $\overline{N}_i = N_i/N$ es $\mathcal{C}$-primario en $\overline{M} = M/N, \forall i \in \Omega$.

2) $\bigcap_{i\in\Omega} \overline{N}_i = \bigcap N_i/N = N/N = 0$, y si $\Omega' \subset \Omega$ con $\Omega' \neq \Omega$ entonces $\bigcap_{i\in\Omega'} \overline{N}_i = \bigcap N_i/N \neq \overline{0}$.

3) $\overline{M}/\overline{N}_i \simeq M/N_i$ de donde $\mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{N}_i) = \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i) \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_j) = \mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{N}_j), \forall i \neq j$.

4) $\overline{N}_i/\overline{0} = \overline{N}_i = N_i/N$ y $\mathcal{C}\text{-}ass(\overline{N}_i/\overline{0}) = \mathcal{C}\text{-}ass(N_i/N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M/N)\text{-}\mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i) = \mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{0})\text{-}\mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{N}_i)$.

5) $\mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{0}) = \mathcal{C}\text{-}ass(M/N) = \bigcup_{i\in\Omega} \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i) = \bigcup_{i\in\Omega} \mathcal{C}\text{-}ass(\overline{M}/\overline{N}_i)$.

Proposición 6.8.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tal que satisface la condición (*). Supongamos que $M \in R$-mod es tal que $\mathcal{C}\text{-}ass(N) \neq \phi, \forall 0 \neq N \subset M$, entonces $0 \in M$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M.

Demostración.- Sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{H} \mid \mathcal{H}$ es familia independiente de $\mathcal{C}$-módulos contenidos en M$\}$. Entonces $\mathcal{A} \neq \phi$ ya que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \phi$ implica que existe un $\mathcal{C}$-módulo $N \subset M$, por lo tanto $\mathcal{H} = \{N\} \in \mathcal{A}$.

Dando un orden en $\mathcal{A}$ como $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}'$ si y solo si $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$, entonces podemos verificar que $\mathcal{A}$ tiene elementos máximos. Sea $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$ un máximo, afirmamos que

$$M' = \bigoplus_{N\in\mathcal{H}} N \subset_e M$$

En efecto, supongamos que esto es falso, por lo tanto existe $0 \neq K \subset M$ tal que $K \cap M' \neq \phi$, pero $\mathcal{C}\text{-}ass(K) \neq \phi$ de donde existe un $\mathcal{C}$-módulo $K' \subset K$ de lo que tenemos que $\mathcal{H} \cup \{K'\} \in \mathcal{A}$, lo cual es imposible.

Por lo anterior, tenemos que $\mathcal{C}\text{-}ass(\bigoplus_{N\in\mathcal{H}} N) = \mathcal{C}\text{-}ass(M)$. Sea $\mathcal{H}_\tau = \{N \in \mathcal{H} \mid \chi(N) = \tau\}$ para cada $\tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$.Entonces $\forall \tau \in \mathcal{C}\text{-}ass(M)$ tenemos que $\mathcal{H}_\tau \neq \phi$ ya que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \mathcal{C}\text{-}ass(M') = \bigcup_{N\in\mathcal{H}} \mathcal{C}\text{-}ass(N) = \bigcup_{N\in\mathcal{H}}\{\chi(N)\}$.

Si $M_\tau = \bigoplus_{N\in\mathcal{H}_\tau} N$ entonces $\bigoplus_{\tau\in\mathcal{C}-ass(M)} M_\tau \subset_e M$. Ahora sea $K_\tau =$

$\bigoplus_{\sigma\neq\tau} M_\sigma$, podemos elegir $N_\tau \subset M$ tal que $K_\tau \hookrightarrow N_\tau$ y N_τ tenga la propiedad de que $\mathcal{C}$-$ass(N_\tau) = \mathcal{C}$-$ass(M)$-$\{\tau\}$ y $\mathcal{C}$-$ass(M/N_\tau) = \{\tau\}$ (esto es posible por la proposición 3.11).

Sea $\Omega = \mathcal{C}$-$ass(M)$, $\{N_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ tal como fueron elegidos. Afirmamos que $\{N_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ es la familia deseada. En efecto,

1) $N_\tau \subset M$ es $\mathcal{C}$-primario, $\forall \tau \in \mathcal{C}$-$ass(M)$ pues $\mathcal{C}$-$ass(M/N_\tau) = \{\tau\}$.

2) $\bigcap_{\tau\in\Omega} N_\tau = 0$, ya que $\mathcal{C}$-$ass(\bigcap_{\tau\in\Omega} N_\tau) \subset \mathcal{C}$-$ass(M)$-$\{\tau\}$, $\forall \tau \in \mathcal{C}$-$ass(M)$, por lo tanto $\mathcal{C}$-$ass(\bigcap_{\tau\in\Omega} N_\tau) = \phi$ y así $\bigcap_{\tau\in\Omega} N_\tau = 0$.

Ahora sea $\tau' \in \Omega$ y $\Omega' = \Omega$ - $\{\tau'\}$ entonces $\bigcap_{\tau\in\Omega'} N_\tau \neq 0$ ya que si $\tau \neq \tau'$ entonces $K_\tau \hookrightarrow N_\tau$ y $M_{\tau'} \subset K_\tau$ por lo tanto $M_{\tau'} \subset N_\tau, \forall \tau \neq \tau'$ y así, $0 \neq M_{\tau'} \subset \bigcap_{\tau\neq\tau'} N_\tau$.

3) $\mathcal{C}$-$ass(M/N_\tau) = \tau \neq \mathcal{C}$-$ass(M/N_{\tau'}) = \{\tau'\}$ para $\tau \neq \tau'$.

4) $\mathcal{C}$-$ass(N_\tau/0) = \mathcal{C}$-$ass(M/0)$ - $\mathcal{C}$-$ass(M/N_\tau) = \mathcal{C}$-$ass(M)$ -$\{\tau\}$.

5) $\mathcal{C}$-$ass(M/0) = \mathcal{C}$-$ass(M) = \bigcup_{\tau\in\Omega} \mathcal{C}$-$ass(M/N_\tau)$.

Teorema 6.9.- Sea $\mathcal{C} \subset R$-irr que satisface la condición (*). Sea $M \in R$-mod. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) M es $\mathcal{D}_\mathcal{C}$-módulo.

ii) $\forall N \subset M$ con $N \neq M$, N tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Si $M = 0$ se cumple por vacuidad. Supongamos que $M \neq 0$ y probaremos que $0 \subset M$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M, pero esto es claro ya que M es $\mathcal{D}_\mathcal{C}$-módulo y $\forall 0 \neq N \subset M$, tenemos que $\mathcal{C}$-$ass(N) \neq \phi$ y por la proposición anterior obtenemos el resultado. Ahora sea $0 \neq N \subset M$, con $N \neq M$ y tal que M/N es $\mathcal{D}_\mathcal{C}$-módulo, así por lo probado, tenemos que $\overline{0} \subset M/N$ tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M, por lo tanto $N \subset M$ tiene descomposición

$\mathcal{C}$-primaria en M.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $N \subset M$ con $N \neq M$. Como N tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en M entonces existe un submódulo $\mathcal{C}$-primario $N_i \subset M$ tal que $N \subset N_i$ y por la parte (5) de la definición 5.6, tenemos $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N) = \bigcup \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i)$ lo que implica que $\phi \neq \mathcal{C}\text{-}ass(M/N_i) \subset \mathcal{C}\text{-}ass(M/N)$ de donde $\mathcal{C}\text{-}ass(M/N) \neq \phi$ así M es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-módulo.

Corolario 6.10.- Sea $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tal que satisface (*).Entonces para cada $M \in R$-mod existe un único $N \subset M$ máximo tal que $\forall L \subset N$, L tiene descomposición $\mathcal{C}$-primaria en N.

Demostración.- Dado un R-módulo M, un submódulo $N \subset M$ que cumple con la propiedad de que para todo $L \subset N$ L tiene $\mathcal{C}$-descomposición primaria en M debe ser $D_{\mathcal{C}}$-módulo y el máximo sumódulo de M que tiene esta propiedad es $N = t_{\tau_{\mathcal{D}_{\mathcal{C}}}}(M)$

Observación.-

Cuando $\mathcal{C} = Rsp$, tenemos que Rsp-descomposición primaria es la descomposición de Goldman.

Corolario 6.11.- (Teorema de descomposición primaria de Goldman). Si M es un módulo neteriano no cero, entonces todo sumódulo propio de M tiene Rsp-descomposición primaria.

Observación.-

i) Si R tiene dimensión de Gabriel sabemos que $Rsp = \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ entonces, los conceptos de Rsp-descomposición primaria y $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-descomposición primaria coinciden.

ii) En vista de la proposición final del capítulo IV, cuando R es neteriano completamente acotado, tenemos que $\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = Rsp$ y en este caso la $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-descomposición primaria coincide con la descomposición terciaria de Lesieur y Croisot [24]

iii) En el caso neteriano conmutativo, la $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$-descomposición primaria coincide con la descomposición primaria clásica.

CAPITULO VII

$\mathcal{C}$-K-dimensión

La noción de dimensión de Krull ha sido una importante herramienta en el estudio de los anillos conmutativos neterianos, este concepto ha sido generalizado al caso de módulos sobre anillos arbitrarios, en [14] Gordon y Robson estudian una dimensión de Krull que fué definida inicialmente por Gabriel y Renchtler para conjuntos parcialmente ordenados y se llamó desviación del conjunto. Golan en [10] define una dimensión que puede ser vista como una generalización de la dimensión de Krull en anillos conmutativos, el concepto definido por Golan y que se llama "TTK-dimensión" (Torsión Theoretic Krull) hace uso de cadenas de teorías de torsión primas en lugar de cadenas de ideales primos.

En este capítulo, definimos una dimensión que llamamos $\mathcal{C}$-K-dimensión que será definida por medio de el uso de teorías de torsión irreducibles, entonces, la $\mathcal{C}$-K-dimensión es una generalización de la TTK-dimensión. Aqui mismo comparamos la $\mathcal{C}$-K-dimensión con la $\mathcal{C}$-dimensión estudiada en el capítulo III Finalizamos este trabajo, analizando algunos ejemplos.

Empezamos este capítulo, dando algunos resultados acerca de teorías de torsión irreducibles.

Proposición 7.1.- Si $\pi \in R\text{-}irr$ tal que cumple $\pi^{\perp} > \xi$ entonces π es elemento mínimo de $R\text{-}irr$.

Demostración.- Supongamos que $\exists \sigma \in R\text{-}irr$ tal que $\sigma < \pi$, sabemos que $\pi \wedge \pi^{\perp} = \xi \leq \sigma$ como σ es irreducible entonces $\pi^{\perp} \leq \sigma$ por lo tanto $\pi^{\perp} = \pi^{\perp} \wedge \pi = \xi$, pero esto es imposible.

Corolario 7.2.- Si M es un R-módulo simple entonces $\chi(M)^{\perp} > \xi$ y $\chi(M)$ es elemento mínimo de $R\text{-}irr$.

Demostración.- $\chi(M) \wedge \xi(M) = \xi$ por lo tanto $(\chi(M))^{\perp} > \xi(M) > \xi$.

En lo sucesivo supondremos que $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tiene elmentos mínimos.

Definición 7.3.- Si $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ definimos una cadena ascendente de subconjuntos de $\mathcal{C}$ como sigue:

1) U_0 es el conjunto de elementos mínimos de $\mathcal{C}$.

2) Si i no es ordinal límite, $U_i = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \tau > \tau' \in \mathcal{C} \Rightarrow \tau' \in U_{i-1}\}$.

3) Si i es límite, $U_i = \bigcup\{U_j \mid j < i\}$.

Observación.-

i) Como $\mathcal{C}$ tiene elementos mínimos entonces $U_0 \neq \phi$.

ii) $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_i \subset \ldots$ Esto se puede probar fácilmente por inducción transfinita.

iii) Como $\mathcal{C}$ es un conjunto entonces $\exists$ un ordinal k tal que $U_k = U_{k+1}$.

Proposición 7.4.- Para cada ordinal i y $\forall \phi \neq W \subset U_i$, W tiene mínimo.

Demostración.- Sea $\phi \neq W \subset U_i$, si $i = 0$ no hay nada que probar. Suponemos entonces que $i > 1$ y que W no tiene mínimos; sea $\tau_1 \in W$ por lo tanto, $\tau_1 \in U_i$ implica que $\exists i_1 \leq i$ mínimo con la propiedad de que $\tau_1 \in U_{i_1}$, como W no tiene mínimos $\exists \tau_2 < \tau_1$ con $\tau_2 \in W$; por definición de U_{i_1} tenemos que $\tau_2 \in U_{i_1 - 1}$ por lo tanto $\exists i_2 < i_1$ mínimo tal que $\tau_2 \in U_{i_2}$.

Obs.- Los ordinales i_1, i_2 no son ordinales límites, de otra forma no cumplen la minimalidad, es decir, $\tau_1 \in U_{i_1} = \bigcup_{j<i_1} U_j \Rightarrow \tau_1 \in U_j$ con $j < i_1$ lo cual es imposible.

Continuando así la construcción de ordinales $i_1 > i_2 \ldots > i_n \ldots$ tenemos un conjunto de ordinales que no tiene mínimo.

Otra demostración.- Para cada $\tau \in W$ sea i_τ un ordinal mínimo tal que $\tau \in U_{i_\tau}$ (nótese que i_τ no es límite, $\forall \tau$). Sea $B = \{i_\tau \text{ ordinal} \mid \tau \in W\}$. Como $W \neq \phi$ entonces $B \neq \phi$ y B es un conjunto de ordinales tenemos que B tiene elemento mínimo. Sea i_{τ_0} tal mínimo.

Afirmamos que $\tau_0 \in W$ es un elemento mínimo de W. En efecto, supongamos que $\exists \tau \in W$ tal que $\tau < \tau_0$. Entonces $\tau \in U_{i_{\tau_0}-1}$ por definición y de esta forma $i_\tau \leq i_{\tau_0} - 1 < i_{\tau_0}$ lo cual es imposible.

Proposición 7.5.- Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $U_k = \mathcal{C}$.

ii) $\mathcal{C}$ cumple la condición del mínimo, es decir, cada subconjunto no vacío de $\mathcal{C}$ tiene elementos mínimos.

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Se sigue de la proposición anterior

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que $\mathcal{C} - U_k \neq \phi$ entonces $\exists \tau \in \mathcal{C} - U_k$ elemento mínimo, ahora sea $\tau' \in \mathcal{C}$ tal que $\tau > \tau'$, por la minimalidad de τ, $\tau' \notin \mathcal{C} - U_k$ por lo tanto $\tau' \in U_k$ así estamos probando que $\tau \in U_{k+1} = U_k$ y por lo tanto $\tau \in U_k$ una contradicción.

Recordando la función $\delta_{\mathcal{C}}$ tenemos la siguiente:

Definición 7.6.- Para cada ordinal i, $\delta_{i\mathcal{C}} = \delta_{\mathcal{C}}(U_i)$ y consideramos

$$\delta_{0\mathcal{C}} \leq \delta_{1\mathcal{C}} \leq \ldots \leq \delta_{k\mathcal{C}} = \delta_{k+1\mathcal{C}}$$

en R-*tors*.

Definición 7.7.- Un R-módulo izquierdo M tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión si existe un ordinal i tal que $M \in \mathcal{T}_{\delta_{i\mathcal{C}}}$ y tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión igual a i, si i es el mínimo con la propiedad anterior. Esto se denotará como $\mathcal{C}$-K-$dim(M) = i$. Un anillo R tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión izquierda si ${}_RR$ tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión . En otras palabras, $\mathcal{C}$-K-$dim(R) = k' \Leftrightarrow \delta_{k'\mathcal{C}} = \chi$ (donde k' es el ordinal mínimo tal que $\delta_{k'\mathcal{C}} = \delta_{(k'+1)\mathcal{C}}$).

Proposición 7.8.- Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión izquierda igual a k.

ii) $U_k = \mathcal{C}$ y R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-anillo izquierdo ($k$ es mínima con la propiedad $U_k = \mathcal{C}$).

Demostración.- $i) \Rightarrow ii)$ Como $\mathcal{C}$-K-$dim(R) = k$ entonces ${}_RR \in \mathcal{T}_{\delta_{k\mathcal{C}}}$ por lo tanto $\delta_{\mathcal{C}}(U_k) = \chi$ lo que implica que $U_k = \mathcal{C}$. Si k' es tal que $U_{k'} = \mathcal{C}$ entonces $\delta_{\mathcal{C}}(U_{k'}) = \chi$ por lo tanto ${}_RR \in \mathcal{T}_{\delta_{k'\mathcal{C}}}$ pero $\mathcal{C}$-K-$dim(R) = k$ de donde $k \leq k'$ así $U_k = \mathcal{C}$ es mínimo con esa propiedad. Como $\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \chi$ entonces por el teorema 4.9, R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$- anillo izquierdo.

$ii) \Rightarrow i)$ Como R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-anillo izquierdo entonces $\delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \chi$ de donde $\delta_{\mathcal{C}}(U_k) = \chi$ lo que implica $\delta_{k\mathcal{C}} = \chi$. Ahora sea k' tal que $R \in \mathcal{T}_{\delta_{k'\mathcal{C}}}$ entonces $\delta_{k'\mathcal{C}} = \chi$ lo que implica que $\delta_{\mathcal{C}}(U_{k'}) = \chi$ y así, $U_{k'} = \mathcal{C}$, pero k es mínima de donde $k \leq k'$ y por lo tanto $\mathcal{C}$-K-$dim(R) = k$.

Nota.- Si recordamos la TTK-dimensión definida en [10], tenemos claramente que la Rsp-K-dimensión y la TTK-dimensión son iguales.

Proposición 7.9.- Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset R$-$irr$ y supongamos que $\mathcal{C}'$ tiene la propiedad de que para cada $\mathcal{C}'$-módulo M, $\mathcal{C}'$-$ass(M) = \{\chi(M)\}$. Si $\mathcal{C}$-K-$dim({}_RR) = k$ entonces $\mathcal{C}'$-K-$dim({}_RR) = k$.

Demostración.- Por la proposición anterior, sabemos que $U_k = \mathcal{C}$ y R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$- anillo izquierdo. Por otra parte sabemos que si R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-anillo izquierdo entonces R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}'}$-anillo izquierdo (ya que $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \subset \mathcal{C}'\text{-}ass(M), \forall M \in R\text{-mod}$).

Afirmamos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. En efecto, sea $\tau \in \mathcal{C}'$ entonces $\exists$ un $\mathcal{C}'$-módulo M tal que $\tau = \chi(M)$. Como R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$-anillo izquierdo entonces $\mathcal{C}\text{-}ass(M) \neq \emptyset$ y por lo tanto $\exists N \subset M$ tal que N es $\mathcal{C}$-módulo y $\chi(N) \in \mathcal{C}$. Como N es también $\mathcal{C}'$-módulo entonces $\chi(N) \in \mathcal{C}'\text{-}ass(M) = \{\chi(M)\}$ por lo tanto $\chi(N) = \chi(M) = \tau$. Así, $\tau \in \mathcal{C}'$ y el resultado es inmediato.

Corolario 7.10.- Si R tiene TTK-dimensión izquierda igual a k, entonces R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-K-dimensión izquierda igual a k.

Demostración.- $Rsp \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad de la proposición.

Observación.- La existencia de la $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-K-dimensión no implica la existencia TTK-dimensión.

En el ejemplo 7.18, tenemos que $R\text{-}tors = \{\xi, \tau = \chi(R), \chi\}$, $Rsp = \{\xi = \chi(S)\}$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{\xi, \tau = \chi(R)\}$

Ahora, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}^0} = \{\xi\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}^1} = \{\xi, \tau\}$ de donde $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$. Sabemos que R es $\mathcal{D}_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}$-anillo izquierdo, por lo tanto R tiene $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$-K-dimensión igual a 1. Por otra parte sabemos que R no es $\mathcal{D}_{Rsp}$-anillo izquierdo (pues $Rsp\text{-}ass(R) = \phi$) y por lo tanto R no tiene TTK-dimensión.

Nota.- En [10], Golan demuestra que si R es neteriano izquierdo entonces R tiene TTK-dimensión izquierda, en particular, para toda $\mathcal{C} \subset R\text{-}irr$ tal que $Rsp \subset \mathcal{C}$ con la propiedad de que si M es $\mathcal{C}$-módulo entonces $\mathcal{C}\text{-}ass(M) = \{\chi(M)\}$ entonces R tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión, más aún, si R es semiartiniano entonces $TTK\text{-}\mathcal{C}\text{-}dim({}_RR) = 0$.

Ahora estudiaremos la relación que hay entre la $\mathcal{C}$-dimensión y la $\mathcal{C}$-K-dimensión.

El siguiente lema se puede verificar fácilmente y por tal razón omitimos la prueba.

Lema 7.11.- Sea M un R-módulo izquierdo.

i) Si R tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión izquierda entonces M tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión.

ii) Si $N \subset M$ es un submódulo entonces $\mathcal{C}$-K-$dim(M) = sup\{\mathcal{C}$-K-$dim(N), \mathcal{C}$-K-$dim(M/N)\}$.

Definición 7.12.- Si consideramos la $\mathcal{C}$-filtración y la escribimos simplemente como $\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots$, definimos los siguientes conjuntos:

$G_{-1} = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \alpha_0 \not\leq \tau\} = \mathcal{C} - gen(\alpha_0)$.

$\forall i$ ordinal $G_i = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \alpha_i \leq \tau$ y $\alpha_{i+1} \not\leq \tau\} = [\mathcal{C} \cap gen(\alpha_i)]$-$gen(\alpha_{i+1})$.

Notación.- El conjunto $\mathcal{C} \cap gen(\alpha_i)$ será denotado como $\mathcal{C} - gen(\alpha_i)$, de este modo tenemos que $G_i = \mathcal{C} - gen(\alpha_i)$-$\mathcal{C} - gen(\alpha_{i+1})$.

Proposición 7.13.- Sea $\mathcal{C} \subset R$-irr cerrada bajo cocientes libres de torsión y tal que $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}, \forall\mathcal{C}$-módulo M. Si $\tau \in \mathcal{C}$ entonces $\tau \in G_i \Leftrightarrow \exists M \neq 0$ tal que M es τ-$\mathcal{C}$-módulo y M es α_i-$\mathcal{C}$-módulo.

Demostración.- $\Rightarrow]$ Sea $\tau \in G_i$ entonces $\alpha_i \leq \tau$ pero $\alpha_{i+1} \not\leq \tau$, como $\alpha_{i+1} = \alpha_i \vee \xi\{M \mid M$ es α_i-$\mathcal{C}$-módulo$\}$ entonces $\exists$ un α_i-$\mathcal{C}$-módulo M tal que $M \notin \mathcal{T}_\tau$, si $N = t_\tau(M)$ entonces $0 \neq M/N \in \mathcal{F}_\tau$ y por lo tanto $M/N \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$ y así M/N es α_i-$\mathcal{C}$-módulo, por otra parte sabemos que $\alpha_i \leq \tau$ y $M/N \in \mathcal{F}_\tau$ de donde M/N es τ-$\mathcal{C}$-módulo. De este modo tenemos el resultado.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\exists M \neq 0$ tal que M es τ-$\mathcal{C}$-módulo y M es α_i-$\mathcal{C}$-módulo, como $\tau \in \mathcal{C}$ entonces $\tau = \chi(M)$, además tenemos que M es α_i-$\mathcal{C}$-módulo de donde $\tau = \chi(M) \geq \alpha_i$. Afirmamos que $\tau \not\geq \alpha_{i+1}$. En efecto, supongamos que $\tau \geq \alpha_{i+1}$

entonces $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}$ y por lo tanto $M \in \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}$ pero M es α_i-$\mathcal{C}$-módulo y $\alpha_{i+1} = \alpha_i \vee \xi\{M \mid M$ es α_i-$\mathcal{C}$-módulo$\}$ lo que implica que $M \in \mathcal{T}_{\alpha_{i+1}}$ lo cual es imposible.

Definición 7.14.- Para cada ordinal i, sea $E_i = \bigcup_{j<i} G_j$, $i \geq 0$.

Proposición 7.15.- $E_i = \mathcal{C} - gen(\alpha_i), \forall$ ordinal i.

Demostración.- $E_0 = G_{-1} = \mathcal{C} - gen(\alpha_0)$. Si $i > 0$ entonces $E_i = \bigcup_{j<i} G_j$, y $G_j = \mathcal{C} - gen(\alpha_j)$-$\mathcal{C} - gen(\alpha_{j+1})$. Como $j < i$ entonces $j+1 \leq i$ así $\mathcal{C} - gen(\alpha_i) \subset \mathcal{C} - gen(\alpha_{j+1})$ por lo tanto $\mathcal{C} - gen(\alpha_j)$-$\mathcal{C} - gen(\alpha_{j+1}) \subset \mathcal{C} - gen(\alpha_j)$-$\mathcal{C} - gen(\alpha_i) = \mathcal{C} - gen(\alpha_j)$-$gen(\alpha_i) \subset \mathcal{C} - gen(\alpha_i)$ por lo tanto $E_i \subset \mathcal{C} - gen(\alpha_i)$. Ahora sea $\tau \in \mathcal{C} - gen(\alpha_i)$ entonces $\alpha_i \not\leq \tau$ y sea j la mínima tal que $\alpha_j \not\leq \tau$ (j no es límite, ya que en caso contrario tenemos que $\forall j' < j, \alpha_{j'} \leq \tau \Rightarrow \alpha_j = \vee \alpha_{j'<j} \alpha_{j'} \leq \tau$ lo cual es imposible).

Si $j = 0$, tenemos que $\alpha_0 \not\leq \tau$ lo que implica que $\tau \in G_{-1} \subset E_i$. Si $j > 0$ entonces $\alpha_{j-1} \leq \tau$ pero $\alpha_j \not\leq \tau$ por lo tanto $\tau \in G_{j-1}$ y $j - 1 < j \leq i$ de donde $G_{j-1} \subset E_i$ y $\tau \in E_i$. Así tenemos la igualdad $E_i = \mathcal{C} - gen(\alpha_i)$.

Proposición 7.16.- Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes libres de torsión y $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}, \forall \mathcal{C}$-módulo M. Entonces $E_i \subset U_i, \forall i \in OR$, con $i \geq 0$.

Demostración.- Por la igualdad anterior basta probar que $\mathcal{C} - gen(\alpha_i) \subset U_i$ y esto lo probaremos por inducción transfinita.

Si $i = 0$, sea $\tau \in \mathcal{C} - gen(\alpha_0)$ entonces $\tau \not\geq \alpha_0 = \xi\{M \mid M$ es ξ-$\mathcal{C}$-módulo$\}$ y como $L \in \mathcal{F}_\xi$ tenemos que L es ξ-$\mathcal{C}$-módulo de donde L es τ-$\mathcal{C}$-módulo. Por otra parte, sabemos que $\tau \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $\tau = \chi(L)$. Afirmamos que τ es elemento mínimo de $\mathcal{C}$. En efecto, sea $\sigma \in \mathcal{C}$ tal que $\sigma \leq \tau = \chi(L)$ entonces $L \in \mathcal{F}_\sigma$, por otra parte sabemos que L es ξ-$\mathcal{C}$-módulo y como $\xi \leq \sigma$ entonces L es σ-$\mathcal{C}$-módulo pero $\sigma \in \mathcal{C}$ implica que $\sigma \in \mathcal{C}$-$ass(L) = \{\chi(L)\}$ por lo tanto $\sigma = \tau$. Así hemos probado que $\tau \in U_0$.

Si i es límite, claramente tenemos que $E_i = \bigcup_{j<i} E_j \subset \bigcup_{j<i} U_j = U_i$.

Si i no es límite y suponemos que $E_{i-1} \subset U_{i-1}$, debemos probar que $E_i \subset U_i$. En efecto, claramente tenemos que $E_i = E_{i-1} \cup G_{i-1} \subset U_{i-1} \cup G_{i-1}$, como $U_{i-1} \subset U_i$, basta probar que $G_{i-1} \subset U_i$. En efecto, sea $\tau \in G_{i-1} = \mathcal{C} - gen(\alpha_{i-1})$-$\mathcal{C}-gen(\alpha_i)$ y sea $\tau' \in \mathcal{C}$ tal que $\tau > \tau'$, como $U_i = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \tau > \tau' \in \mathcal{C} \Rightarrow \tau' \in U_{i-1}\}$, entonces debemos probar que $\tau' \in U_{i-1}$. Afirmamos que $\tau' \not\geq \alpha_{i-1}$ ya que si $\tau' \geq \alpha_{i-1}$, sabemos que $\tau \in G_{i-1} \Leftrightarrow \exists M$ el cual es τ-$\mathcal{C}$-módulo y α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo. Como $\tau \in \mathcal{C}$ sabemos que $\tau = \chi(M)$ por lo tanto $M \in \mathcal{F}_{\tau'}$ y como M es α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo entonces M es τ'-$\mathcal{C}$-módulo, pero $\tau' \in \mathcal{C}$ implica $\tau' = \chi(M) = \tau$ lo cual es imposible. Por lo tanto $\tau' \not\geq \alpha_{i-1}$ de donde $\tau' \in \mathcal{C} - gen(\alpha_{i-1}) = E_{i-1}$ pero $E_{i-1} \subset U_{i-1}$ y por lo tanto $\tau' \in U_{i-1}$.

Proposición 7.17.- Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes libres de torsión y $\mathcal{C}$-$ass(M) = \{\chi(M)\}, \forall \mathcal{C}$-módulo M. Si M tiene $\mathcal{C}$-dimensión entonces M tiene $\mathcal{C}$-K-dimensión y $\mathcal{C}$-$dim(M) \geq \mathcal{C}$-K-$dim(M)$.

Demostración.- Supongamos que $\mathcal{C}$-$dim(M) = k$ entonces $M \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$ y $M \in \mathcal{T}_\tau, \forall \tau \geq \alpha_k$ de donde $M \in \mathcal{T}_\tau, \forall \tau \in \mathcal{C}$-$E_k$ (ya que $\mathcal{C}$-$E_k = \mathcal{C}$-$[\mathcal{C}$-$gen(\alpha_k)] = \mathcal{C} - gen(\alpha_k)$) y así $\mathcal{C}$-$sup(M) \subset E_k$.

Sea $N \subset M$ con $N \neq M$ y $\tau = \chi(M/N)$, como M tiene $\mathcal{C}$-dim igual a k entonces $\mathcal{C}$-$dim(M/N) \leq k$ y por lo tanto $M/N \in \mathcal{T}_{\alpha_k}$ de donde $\alpha_k \not\leq \tau = \chi(M/N)$, sea i mínimo ordinal tal que $\alpha_i \not\leq \tau$, es claro que i no es límite y por lo tanto $\alpha_i = \alpha_{i-1} \vee \xi\{L \mid L$ es α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo$\} \not\leq \tau$, así existe un α_{i-1}-$\mathcal{C}$-móduloL tal que $L \notin \mathcal{T}_\tau$. Si $L' = L/t_\tau(L) \in \mathcal{F}_\tau$ pero $\alpha_{i-1} \leq \tau$ y por lo tanto $L' \in \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}$ de donde L' es α_{i-1}-$\mathcal{C}$-módulo lo que implica que L' es τ-$\mathcal{C}$-módulo.

Tenemos $\tau = \chi(M/N)$ y $L' \in \mathcal{F}_\tau$ y por lo tanto $Hom(L', E(M/N)) \neq 0$ así existen $S \subset T \subset L'$ con $S \neq T$ tal que $T/S \hookrightarrow M/N \in \mathcal{F}_\tau$ lo que implica que T/S es τ-$\mathcal{C}$-módulo y por lo tanto $\sigma = \chi(T/S) \in \mathcal{C}$ y $\sigma \in \mathcal{C}$-$ass(M/N)$ de esta $\mathcal{C}$-$ass(M/N) \neq \phi$.

Hemos probado que $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(M/N) \subset \mathcal{C}$-$sup(M) \subset E_k \subset U_k$ y así $\phi \neq \mathcal{C}$-$ass(M/N) \subset U_K$ lo que implica que $M \in \mathcal{T}_{\delta_k \mathcal{C}}$ de donde $\mathcal{C}$-$\mathcal{K}$-$dim(M) \leq k$

Observación.- Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{C}$ satisface las condiciones del teorema 7.17, luego entonces si M tiene $\mathcal{C}$-dimensión tenemos que M tiene $\mathcal{C}$-$\mathcal{K}$-dimensión.

Finalizamos este trabajo con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7.18.-

Sea K un campo y R la K-álgebra generada por $\{x_i \mid i \in [0,1]\}$ donde el producto de R esta definido como:

$$x_i x_j = \begin{cases} x_{i+j} & \text{si } i+j < 1 \\ 0, & \text{si } i+j \geq 1 \end{cases}$$

Observación.-

1) R es un K-espacio vectorial y sus elementos tienen la forma

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{i_r} x_{i_r}$$

con $\alpha_{i_r} \in K$ y $i_r \in [0,1]$

2) $x_0 = 1$ (unidad de R) y $x_1 = 0$

3) R es anillo conmutativo

4) Un producto en R es

$$(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{i_r} x_{i_r})(\sum_{t=1}^{m} \beta_{j_t} x_{j_t}) = \sum_{r=1}^{n}(\sum_{t=1}^{m} \alpha_{i_r} \beta_{j_t} x_{i_r + j_t})$$

Descripción de las unidades de R

1) Si $u \in R$ es unidad, entonces $\forall \alpha \in K, \alpha \neq 0, \alpha u$ es unidad de R

2) Si u es unidad entonces $u + x_i$ es unidad $\forall i > 0$

3) Si u es unidad entonces $u + \alpha x_i$ es unidad $\forall i > 0$ y $\alpha \in K$

4) $u = \sum \alpha_{i_r} x_{i_r}$ es unidad $\Leftrightarrow i_1 = 0$ (podemos suponer que $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n < 1$)

5)$\forall \overline{x} \in R, \overline{x}$ es unidad o $\overline{x} = x_i u$ para $i > 0$ y u unidad

Demostración.-

1) $(\alpha u)(\alpha^{-1} u^{-1}) = \alpha \alpha^{-1} u u^{-1} = \alpha \alpha^{-1} x_0 = x_0$

2) Como $i > 0$ entonces $\exists n$ natural tal que $ni \geq 1$ de donde $(u + x_i)(u^{n-1} - u^{n-2} x_i + ... + (-1)^n x_i^{n-1}) = u^n + (-1)^n x_i{}^n = u^n + (-1)^n x_{ni} = u^n$ que es unidad

3) $u + \alpha x_i$, si $\alpha = 0$ no hay nada que probar, si $\alpha \neq 0$ entonces $\alpha(u\alpha^{-1} + x_i)$ es unidad.

4) $\Leftarrow]$ Si $i_1 = 0$ entonces $u = \alpha i_1 x_0 + \alpha_{i_2} x_{i_2} + ... + \alpha_{i_n} x_{i_n}$, pero $\alpha_{i_1} x_0$ es unidad y por (3) $\alpha_{i_1} x_0 + \alpha_{i_2} x_{i_2}$ es unidad y así u es unidad

$\Rightarrow]$ Si $i_1 > 0$, sea $u^{-1} = \sum_{t=1}^{m} \beta_{j_t} x_{j_t}$ entonces $uu^{-1} = x_0$ pero el mínimo elemento en $(\sum \alpha_{i_r} x_{i_r})(\sum \beta_{j_t} x_{j_t})$ es $\alpha_{i_1} \beta_{j_1} x_{i_1 + j_1} \Rightarrow uu^{-1} \neq x_0$ lo cual es imposible.

5) Si $\overline{x} \in R$ es unidad no hay nada que probar, si no lo es entonces $\overline{x} = \sum \alpha_{i_r} x_{i_r}$ es tal que $i_1 > 0$ por lo tanto $\overline{x} = x_{i_1}(\sum \alpha i_r x_{i_r - i_1}) = x_{i_1} u$ y como $r = 1, 2....n$ $i_1 - i_1 = 0$ tenemos que u es unidad

Descripción de los ideales de R

Sea

$$M = <\{x_i \mid i > 0\}> = \sum_{i>0} R x_i$$

Observación.-

i) $M \subset R$ propiamente ya que M no contiene unidades

ii) M es ideal máximo

iii) M es idempotente

iv) M es nil ideal

Demostración.-

ii) Sea $I \subset R$ tal que $M \subset I \subset R$, si $I \neq R$ entonces I no contiene unidades por lo tanto $\forall \overline{x} \in I$, $\overline{x} = x_i u$ con $i > 0$ y así $I \subset M$ y tenemos el resultado

iii) Sea $\overline{x} \in M, \overline{x} = x_i u$ con $i > 0$ entonces $x_{\frac{1}{2}} x_{\frac{1}{2}} u \in M^2$ por lo tanto $M \subset M^2$ y $M = M^2$

iv) Sea $\overline{x} \in M, \overline{x} = x_i u$ con $i > 0$ entonces $\exists n$ natural tal que $ni \geq 1$ por lo tanto $(\overline{x})^n = x_i^n u^n = x_{ni} u^n = 0$

Para $i \in [0,1)$ Definimos $I_i = \{x_j u \mid j > i\}$ y $\overline{I_i} = \{x_j u \mid j \geq i\}$

Observación.-

i) $I_i, \overline{I_i}$ son ideales

ii) $I_i, \overline{I_i}$ son nilpotentes

iii) Si $0 < i < i' < 1$ entonces $0 \neq I_{i'} \subset \overline{I_{i'}} \subset I_i \subset \overline{I_i} \neq R$, las contenciones son propias.

iv) $I_0 = M, \overline{I_0} = R$

Demostración.-

i) Claramente $\overline{I_i} = Rx_i$ por lo tanto es ideal.

Sea $\overline{x} \in R$ entonces $\overline{x}(x_j u) = x_r u'(x_j u) = u' u x_{r+j} \in I_i$ pués $j > i \Rightarrow r + j > i$

Sea $x_j u, x_r u' \in I_i$ entonces $x_j u + x_r u' = x_t u''$ pero $t = min\{j, r\} > i$ así I_i es un ideal

ii) Dada $i > 0$ fija sabemos que $\exists n$ natural tal que $ni \geq 1$ entonces, si $x_j u \in \overline{I_i}$ o $x_j u \in I_i$ tenemos que $j \geq i$ de donde $(x_j u)^n = x_{nj} u^n = 0$ y $I_i^n = \overline{I_i}^n = 0$

iii) Claramente $I_{i'} \neq=$, $\overline{I_i} \subset R$ y $I_i \subset \overline{I_i}$ las contenciones son propias

Solo probaremos que $\overline{I_{i'}} \subset I_i$ propiamente, sea $x_j u \in \overline{I_{i'}}$ por lo tanto $j \geq i'$ de donde $j > i$ de donde $x_j u \in I_i$, como $i < i' \Rightarrow \exists j$ tal que $i < j < i'$ por lo tanto $x_j \in I_i$ y $x_j \notin \overline{I_{i'}}$.

iv) Obvia

Afirmación.- Los ideales de R son $\{0, R, M, I_i, \overline{I_i}$ con $i > 0\}$

Demostración.- Sea $0 \neq I \subset R$ un ideal sea $i = inf\{j \mid x_j u \in I\}$

Caso 1.- Si i se alcanza entonces $I = \overline{I_i}$. En efecto, ya que i se alcanza $\exists x_i u \in I$ de donde $(x_i u)(u^{-1}) = x_i \in I \Rightarrow \overline{I_i} = Rx_i \subset I$

Sea $x_j u \in I \Rightarrow j \leq i$ por lo tanto $x_j u \in \overline{I_i}$ de donde tenemos la igualdad deseada.

Caso 2.- Si i no es alcanzado entonces $I = I_i$. En efecto sea $ux_j \in I$ como i es el ínfimo $j > i$ por lo tanto $x_j u \in I_i$

Sea $x_j u \in I_i$ nuevamente $j > i$ y como i es ínfimo $\exists r$ tal que $j > r > i$ y $x_r u' \in I$ entonces $(x_r u')(x_{j-r} u u'^{-1}) = x_j u \in I$ por lo tanto $I_i \subset I$ y tenemos la igualdad deseada.

Observación.-

i) Si $0 < i < 1$ entonces $\overline{I_i}/I_i$ es simple

ii) Si $0 < i' < i < 1$ entonces $I_{i'}/\overline{I_{i'}}$,$\overline{I_{i'}}/\overline{I_i}$ No son simples mas aun, el zoclo de ambos módulos es cero.

iii) el único ideal máximo de R es el ideal M

Demostración.- i) Supongamos que $\overline{I_i}/I_i$ no es simple entonces $\exists 0 \neq I_s/I_i \neq \overline{I_i}/I_i$ o

$0 \neq \overline{I_s}/I_i \neq \overline{I_i}/Ii$, por lo anterior sabemos que $0 < s < i$ de donde $I_i \subset I_s$ y $\overline{I_i} \subset I_s$ con ambas contenciones propias, pero esto es imposible.

ii) Como $i' < i$ entonces $\exists s$ tal que $i' < s < i$ y así $0 \neq I_s/\overline{I_i} \subset I_{i'}/\overline{I_i} \subset \overline{I_{i'}}/oIi$ y estas contenciones son propias por lo tanto $Soc(I_{i'}/oIi) = Soc(\overline{I_{i'}}/\overline{I_i}) = 0$.

iii)$\forall I \subset R$ tenemos que si $I \neq R$ y $I \neq M \Rightarrow I = I_i$ o $I = \overline{I_i}$ por lo tanto $I \subset M$ propiamente.

Afimación.- Los filtros de Gabriel de R son tres: $F_1 = \{R\}$, $F_2 = \{R, M\}$, $F_3 = \{R, M, I_i, \overline{I_i}, 0 \mid i > 0\}$

Demostración.- Sea F un filtro de Gabriel tal que $F \neq F_1$ y $F \neq F_2$ entonces $\exists I$ ideal de R tal que $I \neq R, I \neq M$ con $I \in F$ por lo tanto $I = I_i$ o $I = \overline{I_i}$ para $0 < i < 1$, como I es Ideal nilpotente, $\exists n$ natural tal que $I^n = 0$ y como un filtro de Gabriel es cerrado bajo productos, tenemos que $0 \in F$ entonces $\forall I' \subset R$ ideal tenemos que $I' \in F$ por lo tanto $F = F_3$.

Teorías de Torsíon

Sabemos que cada filtro de Gabriel nos dá una teoría de torsión entonces, tenemos tres teorías de torsión y estan son: $\xi, \xi(R/M)$, χ dadas por F_1, F_2 y F_3 respectivamente

Llamemos $\tau = \xi(R/M)$ y verificaremos que el filtro $\mathcal{L}_\tau = F_2$. En efecto $M \in \mathcal{L}_\tau$ pués $R/M \in \mathcal{T}_\tau$, ahora sea $I \subset R$ ideal tal que $I \in \mathcal{L}_\tau$ entonces $R/I \in \mathcal{T}_\tau$.

Por otra parte sabemos que $I = R, M, I_i, \overline{I_i}$ si $I = R, M$ entonces no hay nada que probar, si $I = \overline{I_i}$ sabemos que $Soc(R/\overline{I_i}) = 0$ por lo tanto éste caso es imposible por último si $I = I_i$ tenemos que cualquier cociente de R/I_i es de τ-torsión en particular $(R/I_i)/(\overline{I_i}/I_i) = R/\overline{I_i}$ pero este no contiene ningun simple, por lo tanto éste caso es imposible, de ésta forma hemos demostrado la igualdad deseada.

Observación.- Si denotamos por S el módulo simple R/M y $\tau = \xi(R/M)$ tenemos:

i) $\xi = \chi(S)$ y $\chi = \tau_g$

ii) R es τ-$\mathcal{A}$-módulo y $\tau = \chi(R)$

iii) No hay τ-cocríticos (por lo tanto no hay τ-Rsp-módulos)

Demostración.-

i) Claramente $\chi(S) \neq \chi$ y $\chi(S) \neq \xi(S)$ por lo tanto $\chi(S) = \xi$ (de éste modo ξ es prima).

Sabemos que $\tau_g = \xi(\{R/I \mid I \subset_e R\})$ por otra parte tenemos que $\forall I \subset R$ ideal no cero $I \subset_e R$ por lo tanto $F_3 \subset \mathcal{L}_{\tau_g}$ por lo tanto $\tau_g = \chi$

ii) $R \in \mathcal{F}_\tau$ ya que si $t_\tau(R) \neq 0$ entonces R contiene un ideal simple pero esto es imposible, como solo hay tres teorías de torsión tenemos que $\tau \vee \xi(R) = \chi$ por lo tanto R es τ-$\mathcal{A}$-módulo

Ahora claramente tenemos que $\chi \neq \chi(R)$, también $\xi \neq \chi(R)$ ya que de otra forma $\xi = \chi(S) = \chi(R) \Rightarrow Hom(S, E(R)) \neq 0 \Rightarrow S \hookrightarrow R$ pero ésto es imposible, de donde $\tau = \chi(R)$

iii) Supongamos que $\exists N$ un módulo τ-cocrítico entonces hay un cíclico Rx que es τ-cocrítico por lo tanto $Rx \simeq R/(0:x)$. Probaremos que R/I no es cocrítico $\forall I \subset R$ ideal. En efecto como $I \neq R$, entonces si $I = M$ tenemos que $R/I = R/M = S \in \mathcal{T}_\tau$ por lo tanto R/I no es τ-cocrítico . Si $I = I_i$ o $I = \overline{I_i}$ sabemos que R/I_i contiene un un simple que es $\overline{I_i}/I_i \simeq R/M = S$ de donde $t_\tau(R/I) \neq 0$ por lo tanto R/I no es τ-cocrítico

Si $I = \overline{I_i}$ tenemos que $R/\overline{I_i} \in \mathcal{F}_\tau$ ya que no contiene simples pero si $0 < s < i$

entonces $(R/\overline{I_i})/(\overline{I_s}/\overline{I_i}) \simeq R/\overline{I_s} \in \mathcal{F}_\tau$ por lo tanto R/I no es τ-cocrítico

Afirmación.- Para el anillo R tenemos:

1) R es $\mathcal{A}$-módulo uniforme pero no es cocrítico

2) R es $D_{\mathcal{C}_\mathcal{A}}$-anillo pero no es D-anillo

Demostración.-

1) Sabemos que R es uniforme y $\mathcal{A}$-módulo ahora supongamos que R es cocrítico entonces R es $\tau = \chi(R)$ -cocrítico pero eso es imposible.

2) Sea $I \subset R$ ideal propio, probaremos que $\mathcal{C}_\mathcal{A}$-$ass(R/I) \neq \phi$. Si $I = 0$ no hay nada que probar ya que R es τ-$\mathcal{A}$-módulo

Por otra parte tenemos que $\mathcal{C}_\mathcal{A} = \{\xi = \chi(S)\ , \tau = \chi(R)\ \}$, ahora bién, si $R/I \in \mathcal{F}_\tau$ entonces R/I es τ-$\mathcal{A}$-módulo por lo tanto $\mathcal{C}_\mathcal{A}$-$ass(R/I) \neq \phi$

Si $t_\tau R/I \neq 0 \Rightarrow S \hookrightarrow R/I$ por lo tanto $\xi = \chi(S)\ \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$-$ass(R/I)$ y así R es $D_{\mathcal{C}_\mathcal{A}}$-anillo.

R no es D-anillo ya que en éste caso $Rsp = \{\xi\}$ y si $ass(R) \neq \phi$ tendriamos que R contiene un simple lo cual es imposible.

El siguiente ejemplo nos lo comunicó el profesor Mark L. Teply

Ejemplo 7.19.-

Sea $X = [0,1] \times \{0,1\}$ con el órden lexicográfico, es decir:

$$(a,b) \leq (c,d)\ si \begin{cases} a < c,\ o \\ a = c,\ y,\ b \leq d \end{cases}$$

Observación.- Aquí $[0,1]$ denota el intervalo cerrado de números reales y $\{0,1\}$ es el conjunto cuyos elementos son 0 y 1. Con el orden anterior X es un conjunto totalmente ordenado.

Por [16] X es isomorfo a $Spec(R)$ (isomorfismo de órden), para algún anillo R de Bezout (Un anillo conmutativo R es de Bezout si cada ideal finitamente generado es un ideal principal).

Observación.-

i) Como X es linealmente ordenado, entonces $Spec(R)$ es linealmente ordenado.

ii) R tiene un único ideal máximo M, que es el que corresponde al elemento (1,1) de el conjunto X.

Afirmación 1.- R es dominio de valuación (dados dos elementos en R uno es múltiplo de el otro).

Demostración.- Sean $x, y \in R$ distintos de cero, como R es Bezout existe $d \in R$ tal que $Rx + Ry = Rd$ por lo tanto $x = ad, y = bd$ y $d = rx + sy$ de donde $d = rad + sbd = (ra + sd)d$ como R es dominio y $d \neq 0$ entonces, tenemos que $1 = ra + sd \notin M$ por lo tanto $a, b \notin M$.

Afirmación a o b es unidad de R. En efecto, supongamos que $a \notin M$, por otra parte Ra debe estar contenido en un ideal máximo pero el único ideal máximo es M y $Ra \not\subset M$ por lo tanto $Ra = R$, de donde a es unidad, así tenemos que $x = ad \Rightarrow a^{-1}x = d$ por lo tanto $Rx \subset Rx+Ry = Rd \subset Rx$ de donde $Rx+Ry = Rx$ y así tenemos que y es multiplo de x.

Afirmación 2.- Si P es un ideal primo distinto de 0 y de M entonces, P no puede ser finitamente generado.

Demostración.- Supongamos que P es finitamente generado, como R es anillo de Bezout $P = Ra$ con $a \neq 0$, como *R-spec* es lineal tenemos que $P \subset M$ y la contención es propia, por lo tanto $\exists x \in M - P$, ya que R es de valuación $a = rx$, por lo tanto $P \subset Rx \subset M$ y así tenemos que $a = sx$ para alguna $s \in R$, como P es primo y $x \notin P$ entonces, $s \in P$ de donde $s = ta$ para alguna $t \in R$ por lo tanto $a = tax$ y como R es dominio $1 = tx$ de donde $1 \in M$ lo cual es imposible.

Afirmación 3.- Si P es primo entonces, $\bigcap P^n$ es primo, mas aun, si $P^2 \neq P$ entonces, $\bigcap P^n$ es el máximo ideal primo propio contenido en P.

Demostración.- Sean $x, y \in R$ tal que $xy \in \bigcap P^n$ pongamos $\bigcap P^n = P'$ y supongamos $x, y \notin P'$, sabemos que $y = rx$ o $x = sy$ y podemos suponer que $y = rx$ entonces, $xy = xrx \in P'$ de donde $y^2 = rxrx \in P'$ y como $y \notin P'$ entonces, existe $m \geq 2$ tal que $y \in P^m$ y $y \notin P^{m+1}$, como $y^2 \in P'$ en particular $y^2 \in P^{2m+3}$ por lo tanto $y^2 = x_1 x_2 ... x_{2m+3}$ donde cada $x_i \in P$, como R anillo de Bezout podemos suponer que cada x_i es multiplo de x_1, digamos que $x_i = s_i x_1$ por lo tanto $y^2 = x_1 s_2 x_1 ... s_{2m+3} x_1 = x_1^{2m+3} \Pi s_i$.

Por otra parte tenemos que $x_1 = ty$ o $y = ux_1$.

Caso 1.- $x_1 = ty \Rightarrow y^2 = (ty)^{2m+3} \Pi s_i \Rightarrow y^2 = t^{2m+3} y^{2m+3} \Pi s_i$ y como $y \neq 0$ tenemos que $1 = t^{2m+3} y^{2m+1} z$ donde $z = \Pi s_i$, por lo tanto y es unidad, pero $xy \in P' \in xyy^{-1} \in P' \Rightarrow x \in P'$ pero habiamos supuesto que que $x \notin P'$

Caso 2.- Supongamos que $y = ux_1$, sacando los multiplos de x_1 tenemos que $y = v{x_1}^k$ y v no tiene multiplos de x_1 por lo tanto x_1 es multiplo de v digamos que $x_1 = wv$. Por otra parte como $x_1 \in P$ y $y \notin P^{m+1} \Rightarrow 1 \leq k \leq m$, por lo tanto $v^2 {x_1}^{2k} = (v{x_1}^k)^2 = y^2 = {x_1}^{2m+3} z$, cancelando tenemos que $v^2 = {x_1}^{2m-2k+3} z = {x_1}^{2m-2k+1} {x_1}^2 z$, ahora substituyendo $x_1 = wv$ tenemos que $v^2 = {x_1}^{2m-2k+1} (wv)^2 z$ si cancelamos v^2 tenemos que $1 = {x_1}^{2m-2k+1} w^2 z$ entonces x_1 es unidad, pero $x_1 \in P$ lo cual es imposible.

Ahora supongamos que $P^2 \neq P$ y sea I ideal primo tal que $I \subset P$ y la contención es propia, entonces, $P^n \not\subset I$ para toda n, ya que si ésto sucediera para alguna n tendría que $P^n \subset I$ y como existe $y \in P - I$, pero entonces $y^n \in P^n \subset I$

por lo tanto $y^n \in I$ y como I es primo entoces $y \in I$ lo cual es imposible.

Puesto que $P^n \not\subset I$ y como R es de valuación tenemos que $I \subset P^n$ para toda n por lo tanto $I \subset \bigcap P^n = P'$ por lo tanto P' es el único ideal primo máximo contenido en P.

Afirmación 4.- El ideal primo P asociado con $(r,0)$ es un ideal idempotente.

Demostración.- sea P el ideal primo asociado con $(r,0)$. Afirmación $\forall(a,b) < (r,0)$ existe (x,y) tal que $(a,b) < (x,y) < (r,0)$; en efecto $(a,b) < (r,0) \Rightarrow a < r$ por lo tanto existe x tal que $a < x < r$ de donde $(a,b) < (x,0) < (r,0)$ por lo tanto dado cualquier primo P' tal que $P' \subset P$ entonces, existe otro primo P'' tal que $P' \subset P'' \subset P$, por lo tanto $P = P^2$ ya que de otra forma el ideal $P' = \bigcap P^n$ sería un ideal primo máximo en P pero eso es imposible.

Nota.- De [15] teorema 33, las teorías de torsión propias para un anillo de valuación son del tipo σ_P, τ_P donde P es un ideal primo de R y los filtros son:

$$L_{\sigma_P} = \{I \subset R \mid P \subset I, propiamente\}$$

$$L_{\tau_P} = \{I \subset R \mid P \subset I, P^2 = P\}$$

Observación.-

i) Si P es un ideal primo idempotente, claramente tenemos que $\sigma_P < \tau_P$.

ii) R/P es σ_P-cocrítico , en efecto $R/P \in \mathcal{F}_{\sigma_P}$ y ahora sea $0 \neq I/P \subset R/P$ ya que I esta propiamente contenido en P, tenemos claramente que $R/I \in \mathcal{T}_{\sigma_P}$.

Afirmación 5.- Si P es idempotente, τ_P no tiene τ_P-cocríticos .

Demostración.- Supongamos que existe un módulo τ_P-cocrítico y podemos suponer que es cíclico, digamos R/I, por lo tanto $R/I \in \mathcal{F}_{\tau_P} \Rightarrow P \not\subset I$ por lo tanto $I \subset P$

propiamente, sea $x \in P - I$ por lo tanto $I \subset Rx \subset P$ y todas las contenciones son propias ya que P no es finitamente generado, entonces $0 \neq Rx/I \subset R/I \Rightarrow R/Rx \in \mathcal{T}_{\tau_P} \Rightarrow Rx \in L_{\tau_P} \Rightarrow P \subset Rx$ lo cual es imposible.

Observación.- Sean P_1 y P_2 dos ideales primos distintos tales que $P_1 \subset P_2$ entonces:

i) Claramente $\sigma_{P_2} < \sigma_{P_1}$

ii) Si $P_1^2 = P_1$ entonces $\sigma_{P_1} < \tau_{P_1}$ y $\sigma_{P_2} < \sigma_{P_1} < \tau_{P_1}$.

iii) Si $P_2^2 = P_2$ entonces $\tau_{P_2} < \sigma_{P_1}$, nótese que la igualdad no es posible por la afirmación 5.

iv) Si P_1 y P_2 son idempotentes entonces $\tau_{P_2} < \sigma_{P_1} < \tau_{P_1}$.

v) Como los ideales primos son linealmente ordenados, entonces *R-tors* es linealmente ordenada (con orden inverso).

vi) La reticula tiene la forma:

$$\chi = \tau_0$$

$$\tau_g = \sigma_0$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\xi = \sigma_M$$

Como *R-spec* es isomorfo a X, consideremos el primo P asociado a $(r, 0)$, sabemos que éste elemento no tiene ningun elemento (a, b) inmediatamente menor, entonces τ_P no tiene ningun elemento inmediatamente mayor, es decir τ_P no tiene τ_P-átomos.

Afirmación 6.- Si $\tau \in$ *R-tors* y $\tau_P < \tau$ entonces el intervalo $[\tau_P, \tau]$ no es booleano.

Demostración.- Supongamos que el intervalo es booleano y sea $\alpha \in R\text{-}tors$ tal que $\tau_P < \alpha < \tau$ entonces el complemento de α, $\alpha^c \in [\tau_P, \tau]$, pero como $R\text{-}tors$ es totalmente ordenada tenemos que $\alpha \leq \alpha^c$ o $\alpha^c \leq \alpha$, pero por otra parte sabemos que $\alpha \wedge \alpha^c = \tau_P$ y $\alpha \vee \alpha^c = \tau$.

Si $\alpha \leq \alpha^c$ entonces, $\alpha \wedge \alpha^c = \alpha = \tau_P$ pero ésto es imposible.

Si $\alpha^c \leq \alpha$ entonces, $\alpha \vee \alpha^c = \alpha = \tau$ lo cual es imposible.

Observación.-

i) Si P es el ideal primo que corresponde $(r, 0)$ entonces τ_P no tiene τ_P-átomos, ya que si ésto fuera cierto entonces, el elemento $(r, 0)$ tendría un elemento inmediatamente menor lo cual es imposible.

ii) Si P es el ideal primo que corresponde al elemento $(r, 0)$ entonces τ_P es σ_P-átomo. Esto se sigue de el hecho de que $\sigma_P < \tau_P$ no tiene elementos en medio.

iii) Para toda $\tau \in R\text{-}tors$ τ es irreducible, esto es claro pués el orden es lineal.

iv) Si P es el ideal primo que corresponde al elemento $(r, 0)$ entonces $\tau_P \notin \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, de otra foma existiría un τ_P-átomo lo cual es imposible.

v) R no tiene dimensión atómica.

REFERENCIAS

[1] G.P. Aguilar, M.J Arroyo and C.J.E. Signoret, "A torsión-theoretic generalization of fully bounded notherian rings". Communications in Algebra. Vol 17, no. 1. 1989 (149-164).

[2] T. Albu and C. Nastasescu "Relative finiteness in module theory", Marcel Dekker, 1984.

[3] M. J. Asencio and B. Torrecillas, "The local Gabriel correspondence", Communications in Algebra, Vol 20, no. 3, 1992 (847-866).

[4] N. Bourbaki, "Elements of Mathematics" Commutative Algebra. Springer-Verlag 1989.

[5] W.Brandal and E. Barbut, "Localizations of torsion theories" Pacific Journal of Mathematics. Vol 107 no. 1. 1983 (27-37).

[6] J. H. Cozzens, "Homological properties of the ring of differential polynomials" Bull. Amer. Math. Soc. Vol 76. 1970 (75-79).

[7] A. M. Da Rocha and J.E. Viola-Prioli "Ring whose kernel functors are linearly ordered" Pacific Journal of Mathematics. Vol 132. no. 1. 1988 (21-34).

[8] S. Dickson, "A torsion theory for abelian categories", Amer. Math. Soc. Vol 121. 1966, (223-235).

[9] P. Gabriel. "Des catégories abéliennes", Bull. Soc. Math. France. Vol 90. 1962 (323-448).

[10] J. Golan. "A Krull-Like dimension for noncommutative Rings". Israel Journal of Mathematics. Vol 19. 1974 (297-304).

[11] J. Golan. "Localization of noncommutative rings", Marcel Dekker, New York

1975.

[12] J. Golan. "Torsion theories", Longman Scientific & Technical, Harlow 1986.

[13] O. Goldman. "Rings and modules of quotients", Journal of Algebra. Vol 13. 1969 (10-47).

[14] R. Gordon. and J.C Robson. "Krull dimension" Amer. Math. Soc. Mem. # 133. 1973

[15] L. Lesieur. and R. Croisot. "Coeur d'un module", Journ. de Math. Tome XLIL Fasc. 1 1962.

[16] Lewis and Ohm. "The ordering of Spec R"

[17] J. Maranda. "Injective structures", Trans. Amer. Math. Soc. Vol 110. 1964 (98-135).

[18] R. M. Miller and M. Teply. "The descending chain condition relative to a torsion theory" Pacific Journal of Mathematics. Vol 83. no. 1. 1979 (207-219).

[19] G. Michler. "Goldman's primary decomposition", Journal of Algebra. Vol 16. 1970 (129-137).

[20] C. Nastasescu. and F. Van Oystaeyen. "Dimensions in ring theory", Reidel 1987.

[21] F. Raggi y J. Ríos "Sobre la dimensión atómica en categorías de módulos" Manuscrito.

[22] F. Raggi and J. Rios "On the structure of selfinjective regular rings", Preprint.

[23] J. Ríos "Algunos aspectos de la teoría de torsión de Goldie", Tesis doctoral. Facultad de Ciencias U.N.A.M, México 1989.

[24] B. Stenstrom. "Rings and modules of quotients", Springer-Verlag. 1975.

[25] H. Storrer. "On Goldman's primary decomposition" en Lectures on rings and modules. Lecture notes in mathematics 246, Springer-Verlag. Berlin 1972.

[26] G. Tapia. "Una teoría general de tipos para módulos inyectivos no singulares", Tesis doctoral. Facultad de Ciencias U.N.A.M, México 1991.

[27] M. Teply. "Torsion-free injective modules", Pacific Journal of Mathematics Vol 28. no. 2. 1969 (441-453).

[28] B. Zhang. "Ring having the ascending chain condition with respect to a torsion radical" Communications in Algebra. Vol 15 no. 6. 1987 (1205-1214).