UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE LA MORTALIDAD EN EL SECTOR ASEGURADOR MEXICANO DURANTE EL PERIODO 1982-1990

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

ROSA MARIA ALATORRE SALGADO

México, D. F. 1992

CONTENIDO

PROLEGOMENOS. 4

I EL SEGURO COMO EVENTO ALEATORIO.

Concepto y definición de seguro. 8

El Riesgo y sus clases. 10

Fundamentos del Seguro. 13

Clases de Seguros. 14

El Seguro como evento aleatorio. 15

Concepto de "Matemática de Seguro". 22

La Ley de los Grandes Números. 23

Teorema del Límite Central. 29

II EL SEGURO DE VIDA.

Desarrollo del Seguro. 32

Elementos de Matemática Actuarial. 37

Función de Supervivencia 38

La Fuerza de Mortalidad 40

III TABLAS DE MORTALIDAD.

Series Estadístico-actuariales. 43

Tablas de Población. 50

Tablas de Mortalidad de Compañías de Seguros. 53

Principales Tablas de Mortalidad: Historia. 56
Tablas de Mortalidad en México. 64
Antecedentes Legales. 64
Situación Actual. 67

IV CONSTRUCCION DE TABLAS DE MORTALIDAD.

Introducción. 70
Expuestos al riesgo. 72
Método del Censo. 78
Tasa Cruda de Mortalidad. 83
Graduación. 84
Suavizamiento y Fidelidad. 88
El Método Gráfico. 89
El Método de Interpolación. 91
Método de Ecuaciones Diferenciales. 98
Margen de Seguridad. 103
Graduación por Fórmulas Matemáticas. 105
Las fórmulas de Gompertz Makeham. 107
Las constantes de Makeham. 108
Tabla de Mortalidad 1982-1989
Tasas Modificadas. 111
Tasas Básicas. 113

CONCLUSIONES. 115

BIBLIOGRAFIA. 118

PROLEGOMENOS

Los últimos 20 años, sin lugar a dudas, ha significado un período de maduración para el sector asegurador mexicano, puesto que ha tenido que enfrentar situaciones difíciles, tal es el caso de épocas de alta inflación, que en particular es un elemento adverso para el seguro de vida.

La forma en que las compañías de seguros enfrentaron esta situación es por demás interesante de comentar, ya que hubo la necesidad de implementar nuevos esquemas de aseguramiento, que permitieron mantener la penetración de mercado, sacrificando en forma relativa la productividad financiera en beneficio de los asegurados, a través de dividendos financieros, con esta medida los planes de seguro de vida pudieron competir con otros instrumentos de inversión.

Esto fue posible gracias a las reservas constituidas, las cuales mantuvieron la solidez de las empresas de seguro sin sacrificios inútiles, ya que su inversión en instrumentos de alta capitalización, permitió participar al asegurado de la rentabilidad obtenida. No obstante para el asegurado la constitución de reservas excesivas, probablemente no le compense de manera equitativa el beneficio recibido.

Pues si bien es cierto que para las empresas aseguradoras las reservas son un elemento importante de rentabilidad, al estar constituidas en base a una tabla de mortalidad, que por necesidad técnica debe mantener su validez en el largo plazo, conforme las condiciones de salud de la mutualidad mejoran en el tiempo y las medidas de selección de las empresas se optimizan, la diferencia entre la mortalidad esperada y la real son cada día mayores.

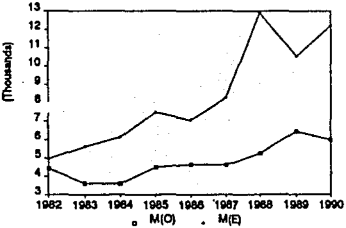
Como consecuencia se generan reservas excesivas, que desde el punto de vista económico, se vuelve una carga innecesaria e inequitativa para el asegurado.

Hasta 1991, la Tabla de Mortalidad legal vigente en el mercado asegurador mexicano, para el cálculo de reservas matemáticas ha sido la Tabla de Mortalidad denominada "Experiencia Mexicana 1962-1967".

Cabe mencionar que esta tabla fue la primera que se construyó en México para ser utilizada en el cálculo de primas y reservas en el sector asegurador mexicano. Elaborada por Actuarios mexicanos de reconocido prestigio, con base en la información proporcionada por algunas Compañías de seguros durante el período que se indica.

Sin embargo a más de veinte años de uso, su aplicación ha traído como consecuencia grandes diferenciales por mortalidad, ya que la realmente ocurrida, ha sido menor que la esperada. Situación que puede observarse, en los datos adjuntos, que muestran el comportamiento de la mortalidad durante el período 1982 a 1990.

	MORTALIDAD		
AÑO	OCURRIDA	ESPERADA	%
1982	4,426	4,961	12.09
1983	3,607	5,594	55.09
1985	4,483	7,462	66.45
1986	4,633	7,041	51.97
1987	4,619	8,277	79.19
1988	5,234	12,917	146.79
1989	6,429	10,557	64.21
1990	5,960	12,224	105.10



Esto se debe fundamentalmente a las variaciones en las condiciones de vida y su influencia en la mortalidad humana, que en los últimos 20 años ha sido por demás significativa, si tomamos en cuenta el constante estudio sobre diversas enfermedades, que hace dos décadas eran mortales y por supuesto investigaciones para su oportuna detección y cura.

Esta situación pone de manifiesto la necesidad de realizar periódicamente estudios que permitan una validación adecuada de este factor, por demás importante en las operaciones de seguro de vida.

En esas condiciones, es preciso que el Actuario cuente con elementos que le permitan realizar esta labor. Sin lugar a dudas el campo de las matemáticas ofrece suficiente material para tal efecto, por lo que no es mi intención aparentar se esta aportando nuevas técnicas, antes bien valga un reconocimiento a los grandes estudiosos del pasado, en cuyas teorías me he apoyado para la realización de este trabajo.

Teorías y conceptos que sirven de base a la matemática actuarial, herramienta fundamental para el análisis que se pretende y que me permito citar para dar formalidad al estudio realizado.

El objetivo principal del presente trabajo, es hacer un análisis de la mortalidad en el seguro de vida, ocurrida en el sector asegurador mexicano durante los últimos 10 años, como elemento de juicio para proponer una nueva tabla de mortalidad para el cálculo de primas y reservas en la operación del Seguro de Vida Individual, en el mercado asegurador mexicano.

En primer término se presentan algunos elementos básicos de seguro, como fundamento de la matemática actuarial.

En el segundo capítulo, se define el seguro de vida como operación fuente de la materia que se analiza, es decir la mortalidad en compañías de seguro, así como los conceptos fundamentales que le dan origen.

El capítulo tres, contiene los principios matemáticos básicos que sirven de fundamento a la tabla de mortalidad. Se trata el tema de tablas de mortalidad como serie estadistico-actuarial y de manera especial la diferencia entre tablas de población y de compañías de seguros, concluyendo con una breve referencia de su historia, en forma especial en el caso de México, se hace mención de los principios jurídicos que respaldan la tabla de mortalidad como base demográfica legal. Asimismo, se menciona la situación actual del mercado proponiendo se actualice la mencionada base demográfica.

Para finalizar se presenta la metodología para construir una tabla de mortalidad utilizando, a manera de ejemplo, el caso de la Tabla denominada "Experiencia Mexicana 1982-1989".

CAPITULO I

CONCEPTO Y DEFINICION DE SEGURO.

Dentro de la literatura especializada existe un gran número de definiciones de seguro, cuyo contenido y finalidad tratan de encuadrarlo dentro de una materia en particular. Sin embargo, dado lo complejo de sus fundamentos es casi imposible definirlo como un todo, puesto que su examen debe contemplar varios aspectos, a cual más de importantes, entre ellos y sin pretender agotar los aspectos que involucra, se puede mencionar algunos, que desde mi particular punto de vista deben sustentar cualquier definición de seguro, a saber:

> El Matemático, toda vez que las ciencias de probabilidades y estadística dan origen a la Matemática Actuarial, mediante la cual se determina la posibilidad de realización del riesgo, y en consecuencia la estimación de su costo.
>
> El Económico, puesto que el seguro satisface una necesidad económica, que surge al transformarse la amenaza potencial de peligro (riesgo), en un hecho real.
>
> El Jurídico, porque da lugar a una forma contractual que regula los derechos y obligaciones de las partes que intervienen y que nacen de su operación, lo que origina el ejercicio de una actividad reglamentada por el Estado, en garantía de las partes que intervienen, a saber asegurados, beneficiarios y aseguradores.
>
> El Técnico y Administrativo, ya que requiere del estudio y selección de los riesgos que le dan origen y que de aceptarse produce el pago de un siniestro, en caso de realizarse el evento.
>
> Las técnicas de administración de transferencia del riesgo dan origen al seguro como actividad comercial.

Como puede observarse, es difícil tratar de dar una definición única de seguro, sin embargo, haciendo referencia a Alfredo Manes, se puede decir que:

> *"El seguro es un recurso por medio del cual un gran número de existencias económicas amenazadas por peligros análogos, se organizan para atender mutuamente a posibles necesidades tasables y fortuitas de dinero".*

En ese contexto, el seguro puede interpretarse como un mecanismo reductor de pérdida para el asegurado, ante la incertidumbre de realización de un riesgo, mediante su transferencia al asegurador, quien se compromete a indemnizarlo por las pérdidas que sufra a consecuencia del mismo.

A su vez, el asegurador diluye entre los elementos que constituyen el grupo asegurado (mutualidad), el daño económico y las necesidades monetarias que pueden experimentar algunos de ellos a causa del suceso fortuito, a cuyas consecuencias estaban todos igualmente expuestos y contra las cuales se protegen de esta manera.

Por tal motivo, el seguro como transferencia del riesgo, está sustentado en una base legal que respalda su operación, en beneficio de los intereses tanto del asegurado como del asegurador.

Por su naturaleza y complejidad la operación de seguros, se convierte en un servicio público, motivo por el cual, se hace necesario que la administración pública responsabilice a las aseguradoras de su conducta para con los asegurados, dentro de un marco de seguridad, racionalidad y honestidad.

Hasta ahora se ha hecho mención del riesgo, como elemento central del seguro, sin embargo, es necesario identificar propiamente lo que se entiende por riesgo como fundamento de la actividad aseguradora.

EL RIESGO Y SUS CLASES.

Desde un punto de vista subjetivo, el ser humano está expuesto a una serie de acontecimientos e incidentes que pueden considerarse como peligros. Si adicionalmente, se toma en cuenta el azar, se crea un ambiente en el cual la posibilidad de realización de estos eventos se ve incrementada, hasta poder tener la cuasi-certeza de su ocurrencia, dentro de un ambiente propicio.

Si tales eventos, probabilísticamente son sustancialmente medibles, y su realización crea en el individuo la posibilidad de una pérdida, nos encontramos propiamente ante un riesgo objetivo, materia pura sobre la que se sustenta la operación de seguros.

En esas condiciones se puede decir que el riesgo es la responsabilidad que debe asumir el asegurador ante la posible ocurrencia de una eventualidad, capaz de producir un daño de tipo económico.

Esta eventualidad puede ser cierta, pero sin poder precisar su realización en el tiempo, o incierta, pero susceptible de ocurrir.

Los riesgos pueden clasificarse, de acuerdo con la naturaleza de los intereses que afectan en:

PERSONALES.- Aquéllos que amenazan la integridad física o corporal de las personas o menoscaban su capacidad de trabajo.

REALES.- Los que afectan los bienes o cosas corporales, sean muebles o inmuebles, así como los derechos radicados en ellos.

PATRIMONIALES.- Aquéllos que implican un detrimento económico y no propiamente físico.

De la misma manera, en función a la mutabilidad del peligro que representan, los riesgos se pueden clasificar en:

CONSTANTES.- Aquellos en los cuales, la amenaza se manifiesta con la misma intensidad a través del tiempo, pudiendo ser, ocasionalmente, mayor o menor durante periodos cortos de tiempo.

PROGRESIVOS.- En los que con el correr del tiempo se incrementa la posibilidad de realización del evento.

DECRECIENTES.- Si a medida que avanza el tiempo, disminuye la amenaza de realización.

En atención a tales consideraciones, se puede definir como riesgo toda eventualidad incierta en su realización y en el momento de ocurrencia, que puede significar algún suceso desfavorable para la persona.

RIESGO ASEGURABLE.

Como puede observarse, son innumerables los riesgos que pesan sobre el hombre, sus actividades y sus bienes, sin embargo, no todos pueden constituir materia de seguro. En términos generales, se puede decir que un hecho puede ser objeto de seguro sólo si reúne ciertas características, entre las cuales se pueden citar las siguientes:

Por cuanto a la objetividad o naturaleza aleatoria del hecho, no obedecer a ninguna ley conocida en un período inmediato, ni presentar relación alguna, aun cuando sea individual, de causalidad aparente y ser independiente en su realización, de la voluntad del hombre.

Es decir el hecho debe provenir de una causa externa y no ser influido por la voluntad de quien directa o indirectamente haya de percibir un beneficio económico del seguro.

En atención a la amplitud de su acción, debe amenazar de igual manera a todos los integrantes de la mutualidad, pero sus efectos no deben alcanzar a la totalidad del grupo asegurado

El número de eventos posibles debe ser lo suficientemente grande, para lograr un equilibrio técnico adecuado y poder considerar consistentes las estadísticas que de ellos se obtengan, asimismo los eventos desfavorables deben presentarse con relativa periodicidad, de tal forma que se puedan determinar frecuencias o probabilidades de ocurrencia en el tiempo.

Debe haber independencia en la realización de los riesgos, es decir, que la realización de uno no implique la del otro, o bien que éste no contribuya o dependa en mayor o menor grado de su realización.

Sin embargo, es necesario tomar en cuenta que no es posible aplicar totalmente esta característica, toda vez que existen circunstancias que pueden influir simultáneamente en la realización del acto, tal es el caso por ejemplo de los riesgos catastróficos, entre los cuales podemos citar, aquéllos que originan un siniestro complejo, integrado por varios siniestros simples, que obedecen a causas normales, pero que ocasionan simultáneamente varias víctimas que tienen su origen en una causa excepcional, como puede ser el caso de un sismo.

No obstante, estos hechos catastróficos, aún cuando no ofrecen homogeneidad ni representan masa suficiente a partir de la cual se puedan obtener leyes de tendencia futura, y aún cuando, en algunos casos, admitan la intervención de la voluntad humana, como finalidad sustantiva para la realización del siniestro, representan otras que ofrecen un denominador común con los hechos asegurables, y es la aleatoriedad formal y el de producir necesidades económicas.

Desde el punto de vista económico, representar para la entidad asegurada una necesidad económica pero fundamentalmente, que no represente una finalidad de lucro, sino únicamente un medio para reparar el deterioro económico derivado de la realización del riesgo. Asimismo que tal necesidad económica no sea jurídica y si efectivamente resarcible.

FUNDAMENTOS DEL SEGURO.

Por lo expuesto, se puede decir que las Operaciones de Seguros se basan, fundamentalmente en los siguientes conceptos:

Riesgo Asegurable. Esto es, aquel evento ajeno a la voluntad del asegurado, que puede representar para él un daño y cuya ocurrencia es independiente en su realización del conjunto de riesgos asegurados.

Interés Asegurable. Es decir para que exista el seguro debe darse una situación especial para el asegurado, respecto a un determinado bien, que lo hace susceptible de sufrir un daño antes de producirse el evento, además es necesario que el asegurado tenga interés en ser resarcido por las consecuencias económicas del presunto daño.

Satisfacción de una necesidad económica, surgida al transformarse la amenaza potencial de peligro, riesgo, en un hecho real cuya finalidad mediata viene precedida de su objetivo inmediato. Sin embargo, para que esta necesidad económica se satisfaga plenamente, es necesario se ejerza a través de un ente empresarial (Organización Empresarial).

CLASES DE SEGUROS.

Por la brevedad de espacio, no considero prudente entrar en una descripción detallada de los diferentes seguros que se operan actualmente, sin embargo para dar continuidad a este trabajo, sí es necesario mencionar, aunque brevemente, las distintas clases que existen, a fin de ubicar en ese contexto las operaciones objeto de análisis.

De acuerdo al objetivo social que persiguen, los seguros se pueden clasificar de la siguiente manera:

SEGUROS SOCIALES. Se trata de un mecanismo mediante el cual, se atienden las necesidades de la clase trabajadora, es por tanto un ente técnico-económico-jurídico, que mediante aportaciones obligatorias a cargo del Estado, Patrón y Trabajador, procura al asalariado una vida fisiológica y económica adecuada, sin recurrir a ninguna selección.

La protección que brinda se refiere a: El Seguro de Pensiones, que incluye los riesgos de invalidez, vejez, cesantía y muerte; y el de Enfermedad y Maternidad.

SEGUROS PRIVADOS. En estricto orden, el seguro privado es aquel administrado por el sector empresarial, sin que el estado tenga participación como tal, por lo que para efectos de esta división se considera al estado como un ente empresarial.

En atención a la naturaleza de los riesgos que cubre, el seguro privado puede subdividirse en:

Seguros de Personas. Aquéllos que tienen como base eventualidades que afectan la integridad física del individuo, a consecuencia de circunstancias fortuitas, ajenas a su voluntad. Entre éstos se encuentran los Seguros de Vida, de Accidentes y de Enfermedades.

Seguros de Daños. Estos se refieren a aquéllos que afectan a las personas en sus bienes materiales y/o patrimoniales, tal es el caso de los seguros de Automóviles, Incendio, Transporte, Agrícola, Responsabilidad Civil y Riesgos Patrimoniales, Crédito y Diversos.

EL SEGURO COMO EVENTO ALEATORIO.

Al estudiar el seguro desde los puntos de vista económico y jurídico, resultan una serie de teorías de ambas naturalezas, que por el carácter que presentan los hechos que les sirven de base, quedan enlazados por un común denominador, es decir la naturaleza *aleatoria* de los eventos que le dan origen, es decir el concepto de valor probable que los sustenta. Sin embargo, dentro de esa analogía existen diferencias que se aprecian al amparo del desarrollo del concepto matemático del seguro, que tiene como fundamento principal la teoría de probabilidades.

En ese contexto es necesario mencionar, aunque en forma por demás breve, algunos conceptos, que permitan visualizar al seguro dentro de un marco eminentemente matemático.

Por principio, consideremos un conjunto S, *finito o infinito, numerable o no, de* η *puntos*. Cada uno de estos puntos representa la situación de un cierto sistema. Por consiguiente, S representa el conjunto de situaciones posibles bajo ciertas hipótesis, esto es lo que se llama ***espacio representativo***.

Es el caso específico de la mortalidad humana, cada persona puede morir o no, estos eventos significan los dos puntos a considerar como constitutivos de S, i.e. $\eta = 2$.

Por ejemplo, en el evento dejar de ser válido o activo para el trabajo, S está constituido por las siguientes situaciones posibles: morir en estado de validez o actividad, invalidarse, o sobrevivir como tal, válido o activo, lo que significa tres puntos ($\eta = 3$).

Ahora bien, dentro del estado de invalidez se pueden distinguir las siguientes situaciones: seguir viviendo como inválido, morir como inválido o retornar al estado de validez, bien sea por recuperación propiamente dicha o merced a la rehabilitación profesional ($\eta = 3$).

Así podemos proseguir nuestra aplicación del concepto de espacio representativo a las diferentes clases de eventos que son considerados objeto de seguro, teniéndose en consecuencia los respectivos valores que resulten para η.

Por lo que se refiere a los fenómenos aleatorios, éstos pueden ser de dos clases:

a) Acontecimientos colectivos o hechos observados en masa, reducidos a grupos homogéneos e interpretados mediante la inducción matemática.

b) Procesos de repetición, consistentes en un gran número de pruebas sucesivas (observaciones), de las cuales, cada una da lugar a un resultado, caracterizado, a su vez, por un número o grupo de números que se presentan en sucesión irregular.

Es obvio que en ambos casos, existe un proceso de repetición, sin embargo mientras en el primero es simultáneo, en el segundo es sucesivo.

En esas condiciones, de una manera general, se puede decir que una serie

$$\{ x_i \} = x_1, x_2, \ldots x_n ;$$

sucesión de resultados de observaciones efectuadas sobre el sistema considerado, o sucesión de puntos *S*, que satisface ciertas condiciones, ***es un colectivo***.

Refiriéndonos, por ejemplo, a la mortalidad observada en un grupo de personas de la misma edad y demás condiciones y circunstancias, cada individuo constituye una interpretación de la ley no aparente del fenómeno mortalidad, la repetición de casos expresada por el número de elementos, integran el grupo inicial, que apreciada con simultaneidad, constituye el conjunto *S* de *n* puntos (que en el caso de la mortalidad, como ya se ha visto, son dos,).

Ahora bien al observar una sucesión *n* de variables aleatorias, se obtendrá una serie de resultados «0» ó «1», es decir:

$$\{x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)}\} ,$$

en los que los «0» y «1» figurarán en un determinado orden de colocación, dependiendo del resultado observado. Esta sucesión es lo que se llama *configuración de longitud n* y se puede representar como:

$$(x^1 x^2 \ldots x^n),$$

o bien de manera abreviada, por:

$$u_i^n = (x^1 x^2 \ldots x^n) ,$$

donde, de una manera igualmente simbólica y nemotécnica, se puede relacionar i con las x y sus exponentes, en términos de notación binómica:

$$i = x^n + 2\,x^{n-1} + 4\,x^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}\,x\,.$$

Consideremos ahora, una serie infinita de términos, cada uno de ellos iguales a «0» ó «1»:

$$x = x^1\,x^2\,x^3 \ldots x^n \ldots$$

La configuración u_i^n figurará en x en el lugar i, si se verifican las siguientes n igualdades :

$$x^1 = x^i, \quad x^2 = x^{i+1}, \quad \ldots, \quad x^n = x^{i+n-1}. \qquad \text{(I.1)}$$

Definamos ahora el número y^i (donde i es un índice) como:

$$y^i = \prod_{j=i}^{n} (1 - |x^{i+j-1} - x^j|)$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$

en el que y^i no puede tomar más que los valores «0» ó «1», y las n igualdades de (I.1), son equivalentes a:

$$y^i = 1$$

En esas condiciones, se puede decir que la diferencia entre los colectivos de repetición simultánea y los de sucesiva, radica en que para los primeros la configuración es única y su forma indiferente. Esta circunstancia nos conduce al llamado método axiomático del cálculo de probabilidades, como el marco apropiado para fundamentar **el seguro como evento aleatorio.**

La repetición *r* de cada configuración de la forma u_i^n en los n primeros lugares de x, es el número de órdenes distintos, inferiores o iguales a n-m+1 (con n >m), con que u_i^m , figura en x ; es decir el número de veces que encontramos u_i^m al examinar los n primeros términos de x.

Como una repetición de casos no nos dice nada por sí misma si no se la relaciona con la base experimental de donde procede, la configuración u_i^m en la serie de los *n* primeros términos de x es, por definición, la razón $^r/_n$.

Ahora bien de la definición de y^i , tenemos:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-m+1} y^i$$

Cuando n aumenta indefinidamente la frecuencia tenderá hacia un límite que será, por definición, la frecuencia total según la expresión de Borel, es decir, la frecuencia de la configuración u_i^m en la serie x, coincide con el concepto natural de que cuanto mayor es el número de observaciones, más preciso es el resultado.

Esta *frecuencia relativa* en las condiciones expresadas en virtud del *postulado empírico o ley empírica*, es lo que constituye la *probabilidad a posteriori o estadística clásica* , y tiene todo su valor objetivo en las conjeturas sobre experiencias futuras.

No obstante la importancia que representa operar con colectivos infinitamente grandes, lo cual sería ideal, prácticamente es imposible, por lo que tenemos que circunscribir nuestro campo de acción reduciendo los colectivos sobre los que operamos, los que constituyen verdaderas «muestras», sobre la base de que no se alteran teóricamente ciertas condiciones fundamentales que son precisas al aplicar las reglas generales que establece la teoría estadística de las «muestras».

Esto es de una serie dada de observaciones se puede extraer otra serie parcial por «selección», si establecemos un procedimiento que decida la pertenencia o no de la enésima observación (n = 1, 2, 3, ...) a la serie parcial, independientemente del resultado de esta observación («1» ó «0»), siempre que, cuando menos, se conozcan los resultados de las observaciones precedentes y se cumplan las dos siguientes condiciones:

1ª. Que si entre las n primeras observaciones, n_0 han proporcionado el resultado «0» y n_1 el resultado «1» , se den los dos límites siguientes:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_0}{n} = p \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_1}{n} = q \tag{1.2}$$

es decir es condición que se cumplan tales igualdades para que las frecuencias relativas, puedan ser consideradas como probabilidad estadística.

2ª. Si se extrae de la serie total, una parcial por "selección", los límites correspondientes deben conservar los mismos valores (I.2).

Es claro que cada riesgo objeto de seguro, ofrece una probabilidad directa y otra contraria, absoluta o empírica, y que cuanto mayor es el número de ensayos u observaciones, tanto más precisos serán los resultados, por lo que la probabilidad puede definirse como el valor hacia el cual se espera converge la frecuencia.

Es decir la probabilidad de un acontecimiento, en una categoría de ensayos, es una constante física que depende del acontecimiento y de la categoría de las pruebas.

Por lo que se refiere a seguros cada fenómeno, en atención al riesgo que lo produce, da lugar a un espacio representativo S, de puntos η, con frecuencia relativa.

Los núcleos de observación que pueden reunirse, por grandes que sean, son de orden finito dentro del espacio representativo al cual pertenecen y constituyen una "selección" con un margen de error aceptable. Además, cualquiera que sea la cantidad relativa, las frecuencias permanecen constantes dentro de las mismas condiciones y circunstancias que les dio origen.

CONCEPTO DE "MATEMATICA DE SEGURO"

El seguro es sin duda el sector económico que descansa en mayor medida en cálculos matemáticos, tanto al evaluar la frecuencia de siniestralidad, que sirve de base en la determinación de las primas, como en la administración de su cartera, en esas condiciones, se puede generalizar que el seguro tiene como fundamento teorías matemáticas de gran importancia.

Al mismo tiempo, es importante recordar que el seguro moderno surge como tal, en el momento en que se considera en el cálculo de primas la teoría matemática, puesto que con anterioridad a esta circunstancia, se trataba únicamente de un juego de azar, es en ese momento que surge una nueva disciplina, *LA CIENCIA ACTUARIAL*.

Las técnicas actuariales parece ser surgen originalmente en Francia. Los matemáticos franceses interesados en maximizar las ganancias en los juegos de azar, desarrollaron la Teoría de Probabilidades en forma clásica.

Efectivamente, Blaise Pascal y Fermat, en la correspondencia que mantuvieron durante 1650, establecieron los teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades al describir todas las alternativas posibles en situaciones equiprobables. Otros estudiosos del tema mejoraron estos trabajos, de tal suerte que las doctrinas quedaron perfeccionadas antes de finalizar el siglo XVII.

Otro elemento que por su importancia se puede considerar piedra angular del seguro, es el principio de mutualidad, a través del cual se dispersa el riesgo. Bajo este principio se recoge el concepto matemático de colectividades, es decir cuanto mayor es el número de riesgos asegurados, los cálculos resultantes serán mas exactos, como consecuencia, entre más grande es el numero de mutualistas, menor es la carga para el asegurador, toda vez que la aleatoriedad del seguro se va reduciendo hasta llegar a ser mínima.

Este principio, base fundamental del seguro es conocido como *Ley de Los Grandes Números*, y tiene su origen en la teoría de probabilidades, o como algunos autores afirman es, en términos más exactos, la base que sustenta a las probabilidades mismas. Como tal, tiene un fundamento matemático perfectamente definido, el cual se plantea brevemente a continuación.

LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS.

La experiencia demuestra que los fenómenos que tienen una probabilidad extremadamente cercana a la unidad, casi es seguro ocurrirán; contrariamente, eventos en los que la probabilidad de ocurrencia es muy pequeña, es decir cercana a cero, ocurren con muy poca frecuencia.

Esta circunstancia juega un papel básico en todas las conclusiones practicas de la teoría de probabilidades. Para hechos experimentales, nos permite suponer que los eventos considerados como sumamente improbables, son prácticamente imposibles en su ocurrencia y los que tienen probabilidad cercana a uno, son eventos que se pueden asumir como ciertos.

Sin embargo, también la propia experiencia juega un papel importante, toda vez que el conocimiento de la naturaleza del evento y de las características inherentes al mismo, permite darle un valor relativo de gran importancia, al considerar un evento como imposible (o prácticamente cierto).

Al mismo tiempo es de fundamental importancia, hacer notar que cualquier evento tiene una probabilidad positiva de ocurrencia, no importa cuan pequeña sea, de tal forma que si el número de pruebas en las cuales puede ocurrir con una misma probabilidad es muy grande, entonces la posibilidad de que ocurra al menos una sola vez, puede ser arbitrariamente cercana a la unidad.

Sin embargo, si la probabilidad de algún evento es muy pequeña, es sumamente incierto esperar su ocurrencia en alguna prueba especifica de antemano.

Por lo anterior, es claro que en la actividad práctica y en general en problemas teóricamente buenos, los eventos con probabilidad cercana a la unidad o a cero son de gran importancia.

De tal forma que uno de los principales problemas de la teoría de probabilidades debe ser el establecimiento de leyes que suponen eventos cuya ocurrencia es sumamente cercana a la unidad.

De ahí que una regla de particular importancia, es aquélla que representa la conveniencia de sobreponer un gran número de factores independientes o aleatoriamente dependientes, la cual es conocida como **La Ley de los Grandes Números**, y dentro de la teoría de probabilidades una de las más importantes.

La ley de los grandes números se puede considerar como la representación del total de teorías, que afirman que la probabilidad arbitrariamente cercana a la unidad de que algún evento ocurra, depende de un incremento ilimitado de eventos aleatorios, cada uno de los cuales ejerce por si mismo, únicamente un efecto insignificante.

El soporte científico de la ley de los grandes números, se debe fundamentalmente a las investigaciones de Chebyshev, Markov y otros investigadores en la materia, quienes detectan la estabilidad empírica de medias, así como a Kolmogorov, Borell y Cantelli, entre otros, cuyos estudios definitivos fundamentan la condición general que satisface, definitivamente, la estabilidad estadística de medias.

FUNDAMENTO MATEMATICO

Como ya se mencionó, la noción intuitiva de probabilidad se basa en la suposición de que si en n ensayos idénticos, A ocurre r veces, y si el valor de n es muy grande, entonces r/n se aproxima a la probabilidad p de A.

Es claro que una teoría matemática formal en sus procesos de generalización, nunca se identifica directamente con la vida real, pero se puede convenir que por lo menos proporciona la contrapartida teórica de los fenómenos que trata de explicar. En consecuencia se puede precisar la idea expuesta en forma de teorema.

Por principio, consideremos el término "ensayos idénticos" como "ensayos de Bernoulli" con probabilidad p de éxito. En esos términos, la relación entre los ensayos de Bernoulli y la teoría de variables aleatorias, es clara si consideramos la dependencia que existe entre el número total de éxitos S , y el de ensayos efectuados X .

Es decir, bajo el supuesto de que la variable X es igual a uno, si el ensayo resulta un éxito y cero si es un fracaso, cada ensayo S se incrementa en «1» o en «0», según se trate, S_n puede definirse como:

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n , \qquad (I.3)$$

donde las X son variables, mutuamente independientes, con una distribución arbitraria. Luego entonces, para una n suficientemente grande, es probable que la proporción promedio de éxitos, S_n / n se aproxime a p , es decir:

$$\frac{S_n}{n} \to p \tag{1.4}$$

Ahora bien, un significado más preciso de esta afirmación nos lleva a considerar, por ejemplo, la probabilidad de que n S_n/n exceda de p en ε, *donde* $\varepsilon > 0$ *, es un número arbitrariamente pequeño , pero fijo.*

En este caso la probabilidad estará dada por:

$$P\left\{ \frac{S_n}{n} > (p+\varepsilon) \right\}$$

es claro que cuando n se incrementa,

$$P\left\{ \frac{S_n}{n} > (P+\varepsilon) \right\} \to 0,$$

de la misma manera, observamos que

$$P\left\{ \frac{S_n}{n} > (P-\varepsilon) \right\} \to 0,$$

Por tanto:

$$P\left\{ \left| \frac{S_n}{n} > (P-\varepsilon) \right| \right\} \to 0. \tag{1.5}$$

En palabras, cuando n crece, la probabilidad de que un número promedio de éxitos se desvíe de p en más de cualquier cantidad ε asignada previamente, tiende a cero.

Esta es una forma de la ley de los Grandes Números conocida como Ley Débil y sirve de base a la noción intuitiva de probabilidad, como medida de la frecuencia relativa.

Sin embargo, esta definición de la ley clásica de los Grandes Números, tiene un interés muy limitado, fundamentalmente, debido a que la noción intuitiva de probabilidad se basa en la creencia de que (I.4) es válida para cualquier sucesión, lo cual en la teoría abstracta, puede no satisfacer cualquier sucesión de ensayos.

En efecto, nuestro espacio muestral contiene un punto que representa la probabilidad conceptual de una sucesión infinita de éxitos ininterrumpidos en él, $(S_n / n) = p$, esto da lugar a una ley de mayor precisión y utilidad, la Ley Fuerte de los Grandes Números.

No obstante se puede demostrar que (I.5) se cumple con probabilidad uno, lo cual es una afirmación más fuerte que la ley débil de los grandes números. La Ley Fuerte de los Grandes Números, dice que para cualquier n suficientemente grande y fija, el promedio S_n /n permanecerá, necesariamente, cercano a p si se incrementa el número de ensayos. De esta manera, queda abierta la posibilidad de que en n ensayos adicionales ocurra por lo menos uno de los eventos:

$$\frac{S_k}{k} < p - \varepsilon$$

con $n < k \leq 2n$.

Esta probabilidad, es la suma de un número grande de probabilidades, de las cuales sólo sabemos son pequeñas individualmente, es decir, que si $(S_n /n - p)$ se hace pequeño, hay probabilidad uno de que así permanezca.

En esas condiciones la Ley Fuerte de los Grandes Números, define:

Para toda $\varepsilon < o$, hay probabilidad 1 de que ocurra solamente un número finito de los eventos, esto es:

$$\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \tag{1.6}$$

Esto implica que (I.4) se cumple con probabilidad uno.

En términos de espacios muestrales finitos, se afirma que a toda $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ les corresponde una r tal que para toda n, la probabilidad de realización simultánea de las ν desigualdades

$$\left| \frac{S_{r+k}}{n} \right| < \varepsilon$$

$$k = 1, 2, \ldots, \nu$$

es mayor que $1 - \delta$.

Esta ley fuerte de los grandes números fue formulada por primera vez por Cantelli (1917), después de que Borel y Hausdorff habían explicado algunos casos especiales. Como sucedía con la ley débil, ésta es sólo un caso muy especial de un teorema general de variables aleatorias.

Si se toma junto con el teorema de la imposibilidad de los sistemas de apuestas, la ley de los grandes números implica la existencia del límite (I.4) no sólo en la sucesión original de ensayos, sino también en todas las subsucesiones que se obtienen. De este modo los dos teoremas describen juntos las propiedades fundamentales de la aleatoriedad, las cuales son inherentes a la idea intuitiva de probabilidad.

No obstante, en la práctica es necesario contar con un estimador más preciso de la probabilidad en el miembro izquierdo de (I.4) , este estimador se puede deducir mediante la aproximación de la función normal a la distribución binomial.

Los teoremas de límites para ensayos de Bernoulli, antes mencionados, son casos especiales de teoremas de límites más generales, que no se tratarán en este trabajo por no ser objeto del mismo; sin embargo es necesario mencionar uno que por su importancia se ha generalizado y es sumamente útil en trabajos prácticos de análisis de cartera de compañía de seguros, me refiero al Teorema del Límite Central.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

El Teorema del Límite Central, es uno de las proposiciones mas importante de la Estadística y de las mas notables en la teoría de las Matemáticas. Representa el esfuerzo realizado en el estudio de la función de densidad normal, como antecedente encontramos el modelo desarrollado inicialmente por Khintchine, no obstante existir demostraciones mas antiguas en las que se introdujo la restricción de que la varianza Var (X) también fuera finita.

Si se considera, bajo un esquema de Bernoulli, la dependencia que hay entre el número S de éxitos y el número n de ensayos, S_n definido como la suma de n variables aleatorias, mutuamente independientes, cada una de las cuales toma el valor « 0 » o « 1 », con probabilidad respectiva p y q. , para cada ensayo se incrementa a su vez en « 0 » o en « 1 ». Además bajo el supuesto de la ley débil de los grandes números, se establece que para n grande es probable que la proporción promedio de éxitos S_n/n se aproxime a p , lo cual viene a ser un caso especial de:

$$P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\mu\right|\right\} \to 0 \qquad \text{(I.8)}$$

Es decir, la probabilidad de que el promedio S_n/n difiera de la esperanza en menos que una ε dada, arbitrariamente pequeña, tiende a uno.

Sin embargo, existe un resultado mucho más preciso que generaliza el teorema de límite de DeMoivre-Laplace a ensayos de Bernoulli conocido própiamente como Teorema del Límite Central, el cual establece:

Sea { X } una sucesión de variables aleatorias mutuamente independientes con la misma distribución. Supongamos, que existen $\mu = E(X_k)$ y $\sigma^2 = Var(X_k)$, y sea $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Entonces para β fija:

$$P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \beta\right\} \to N(\beta) \qquad \text{(I.9)}$$

En otras palabras, el Teorema del Límite Central representa el comportamiento probabilístico asintótico de una suma de n variables aleatorias independientes que no poseen, necesariamente, todas la misma distribución.

Es decir, si cada v.a. X_i, posee respectivamente una media μ_i y una desviación cuadrática σ_i, en condiciones poco restrictivas, es decir, que todas las *v.a.* tengan el mismo orden de magnitud, la suma S_n, es asintóticamente $N(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Por tanto:

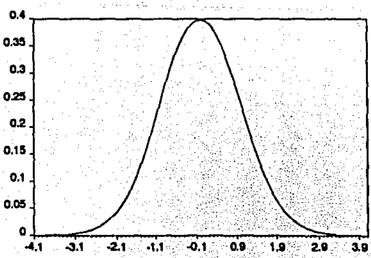
$$\lim_{n->\infty} P\left\{\frac{Sn-\mu}{\sigma}\right\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{dx}$$

Donde:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma 2\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

es la función de frecuencia de la distribución normal o de Laplace- Gauss.

Una variable aleatoria, cuya función de frecuencia es de este tipo se denomina "normal, μ , σ , se denota como N (μ , σ) y gráficamente se representa de la siguiente manera:



CAPITULO II

EL SEGURO DE VIDA.

DESARROLLO DEL SEGURO.

Se puede afirmar, en base a lo expuesto, que el Seguro por antonomasia es una mutualidad en sentido riguroso, en esa virtud, la historia del seguro está estrechamente vinculada con los acontecimientos sociales y económicos experimentados por el hombre, desde que éste apareció en la tierra.

En el desarrollo social que la humanidad experimenta se puede identificar el germen de lo actualmente se conoce como seguro, sin embargo, en un principio es propiamente un sentimiento de SOLIDARIDAD, ASISTENCIA y en alto grado de PREVISION.

Sin embargo, esta forma de mutualidad no corresponde, en estricto orden, al concepto racional actual, ya que éste, como tal, surge conforme se fueron dando supuestos económicos y sociales que la convierten de una institución con fines asistenciales, a una con características de institución de seguros, como se conoce actualmente. No obstante, el Seguro no es un concepto creado por negociantes, sino que corresponde a exigencias socio-económicas.

Además, la figura jurídica del seguro requiere de un esquema económico, por lo que mientras éste no se da no puede decirse que dicha figura exista. De donde, según el tratadista Halperin "Los pueblos de la antigüedad desconocieron la institución del seguro, ya que no son suficientes las escasas barreras levantadas contra los riesgos por la previsión y la asistencia, ni basta tampoco el principio de mutualidad", para que éste se de como tal.

Bajo este principio, por tanto, se puede decir que no hubo seguro en la antigüedad, ya que durante este período no se superó el estado de asistencia y sólo se dieron algunas formas de mutualismo.

Por lo que se refiere al Seguro de Vida, no obstante que algunos autores encuentran en la Biblia y otros documentos históricos de tipo religioso antecedentes que lo identifican, su origen propiamente como medida de previsión, se remonta a los últimos días del Imperio Romano.

Al respecto, se tienen noticias que durante el tiempo que se prolongaba la expedición militar, se les retenía a los soldados una parte de su salario, el cual le era liquidado a su regreso, si estaban con vida, o bien se creaba un fondo que era pagado cuando se retiraba, y en caso de fallecimiento se entregaba a la familia.

Posteriormente, durante la Edad Media era usual retirarse a vivir a un monasterio, sin embargo, al ingresar era necesario aportar una cantidad que garantizara los medios de subsistencia durante toda la vida. Este pago, generalmente se hacía como una donación al monasterio (dote), en cuyo caso haciendo la similitud con la figura de un seguro rudimentario, en el que la contraprestación corresponde a un pago en especie, es decir la aportación es un elemento que permite garantizar al individuo una subsistencia digna. Esta figura en términos modernos se puede identificar como un plan de pensiones.

Asimismo, durante este período, algunas Guildas Medievales imponían una cuota especial a sus miembros, y el monto reunido era pagado a los dependientes de los que habían muerto durante el año anterior. La suma reunida generalmente era de un monto modesto, y el principal objetivo al parecer era procurar un funeral decente a los miembros que fallecían.

No obstante, ninguna de estas formas de previsión puede decirse que es propiamente un seguro de vida. Según Donati, la institución jurídica del seguro surge hasta el siglo XIV. Hasta esa fecha los gérmenes de seguro se identifican en la asociación de varias personas con la finalidad de repartir el riesgo, el cual en algunos casos se da incluso de una persona a otra.

Durante el siglo XVI, el Gobierno inglés, respalda sus préstamos, a través de la venta de anualidades vitalicias (pensiones). Por las condiciones especiales que el Gobierno establecía, era común que algunos préstamos fueran puestos en circulación sin ningún plan de redención, esto significa que el tomador del préstamo, realmente estaba comprando una perpetuidad, sin posibilidad de redención, considerando que el pago de anualidades cesara únicamente a la muerte del prestador.

Esta situación brindó a los científicos del siglo XVII un tema sobre el cual reflexionar y tratar de resolver, para esto hubo quienes se especializaron en la nueva materia conocida como "aritmética política". No obstante no fue una tarea fácil determinar la magnitud del pago, bajo la perspectiva de una anualidad vitalicia, es decir bajo una anualidad a perpetuidad.

A partir de ese momento el cálculo y análisis de la estadística de mortalidad fue un tema de estudio muy popular, sin embargo no es totalmente clara la forma en que ésta se relacionó al precio de la anualidad vitalicia.

Hay un gran número de ejemplos en los cuales la venta de anualidades emitidas representó un costo extraordinariamente alto como préstamo de dinero. Algunas veces fueron vendidas anualidades vitalicias a un precio fijo, independientemente de la edad del comprador.

El problema teórico fue resuelto por Jan de Witt, quien argumentó que el precio pagado por un contrato anual debe ser igual al valor presente de los pagos esperados. Esto llegó a conocerse como el **"Principio de Equivalencia"**, y representa el fundamento del cálculo actuarial moderno.

De Witt presentó sus conclusiones en 1671 en un reporte (De Vardye van de Lif-rented). Los resultados de De Witt llegan rápidamente a círculos interesados, pero el original de su reporte según parece se perdió. Posteriormente (1865), Leibnitz prueba reiteradamente hasta tener una copia del reporte de De Witt. Según Neuburger (1974) De Witt argumentó que el precio de una anualidad vitalicia de un niño de tres años debe ser 16 o 18 veces el pago anual. Sin embargo, no obstante sus resultados, el valor de la anualidad se fijó, de manera arbitraria en 14 veces, por el Gobierno, por considerar que éste era "el valor justo para las anualidades".

Una forma especial de préstamos Gubernamentales fue la venta de "tontinas", nombradas así por Lorenzo Tonti, quien propuso el esquema al Cardenal Mazarín, Primer Ministro de Luis XIV. Mediante una tontina, venden un gran número de bonos, en grupos de edades. Mediante este procedimiento el Gobierno paga los intereses acordados sobre el monto reunido por cada grupo, y el monto pagado es dividido entre los miembros supervivientes del grupo. Cuando todos los miembros de cada grupo habían muerto, se detenían los pagos y el débito propio de cada grupo se consideraba liquidado.

Las tontinas aportaron un elemento de especulación a la compra de anualidades de vida, lo cual según parece fue sumamente apreciado por inversionistas y prestamistas en ese tiempo. Recientemente se hizo un reconocimiento de las tontinas en Francia, el país donde se originaron, éste fue hecho por Jennings y Trout (1982). Las tontinas tuvieron cierto éxito en algunos paises fuera de Francia hasta bien entrado el siglo XIX, entre los que destaca Estados Unidos.

En los siglos XVII y XVIII se formaron algunas mutualistas o "sociedades de amigos", en algunos paises Europeos para ofrecer seguros de vida por sumas modestas, bajo principios similares a aquéllos utilizados por las Guildas medievales. Las bases técnicas de cálculo, en su mayor parte, fueron dudosas y sólo algunas de ellas sobrevivieron durante poco tiempo.

En general, se considera que el seguro de vida moderno empieza en 1762 con la formación de la "Equitable Society" en Londres. Esta sociedad todavía en operación utiliza en esos momentos métodos científicos para el cálculo de las primas.

En la siguiente década, en diversos paises se establecieron sociedades de seguro de vida, pero su desarrollo fue sumamente lento. Los fundadores de estas sociedades fueron, generalmente, científicos idealistas que deseaban, a través de las matemáticas, crear un ambiente de confianza y transparencia para el seguro de vida, en provecho de aquéllos que lo demandaban.

Propiamente, la venta activa del seguro de vida empieza a mediados del siglo XIX, esto según parece, propicia el surgimiento de grandes asociaciones de seguro de vida.

Sin embargo, aparentemente el seguro de vida no tuvo una gran aceptación, lo que originó la máxima que *"el seguro de vida se vende, no se compra"*. No es fácil explicar porque se da esta situación, además de que este no es el medio para especular sobre su subjetividad, baste tan sólo dejarlo de manifiesto.

ELEMENTOS DE MATEMATICA ACTUARIAL.

El fundamento de la Matemática Actuarial, como se ha comentado, es el **"principio de equivalencia"**, el cual puede remontarse al reporte de Jan de Witt en 1671. El cálculo del valor presente de la esperanza de los pagos de acuerdo con un contrato de seguros, es necesario suponerlo dependiente de tasas de mortalidad e interés futuras. El pronóstico de las tasas de interés es de gran importancia, sin embargo, no es posible analizarlo en este trabajo, por tratarse de un tema que por sí mismo puede ser objeto de tesis.

Por lo que se refiere al pronóstico de muerte, generalmente se determina mediante una ley de mortalidad que tradicionalmente se expresa como q_x y representa la probabilidad que una persona de edad (x) muera antes de alcanzar la edad $(x+1)$[1]. Las tasas de muerte son estimadas a partir de observaciones y graduadas mediante procedimientos matemáticos[2].

A partir de las tasas de muerte se calcula la tabla de mortalidad, formada a su vez por las funciones l_x de supervivencia y d_x de mortalidad, sin embargo antes de iniciar el estudio formal de tablas de mortalidad, es conveniente hacer notar que, no obstante que las funciones de la tabla se considera tienen un comportamiento anual, lo que las identifica con funciones de tipo discreto, éstas se fundamentan en funciones matemáticas continuas, entre las cuales se encuentran las siguientes.

1 En la simbología actuarial, universalmente aceptada, es usual utilizar (x), para designar a una persona de edad exacta x.

2 El proceso de graduación de tablas será tratado en el capítulo IV de este trabajo.

Función De Supervivencia.

La función de supervivencia se define generalmente como S(x) y representa la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a la edad x. En estas condiciones S(x) es una función que depende del tiempo de vida del individuo. Matemáticamente, se trata de una función continua y derivable; estrictamente monótona decreciente, es decir $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ cuyo dominio está en los números reales no negativos, y que satisface las condiciones:

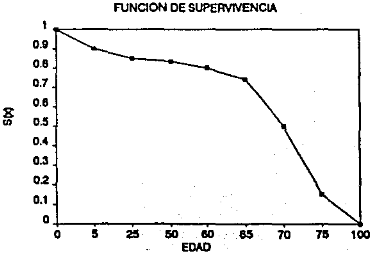
$$y \begin{cases} S(0) = 1 \\ S(\omega) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.1)}$$

donde:

$$\omega = \min\{x \in \mathbf{R}^+ \mid S(x) = 0\}$$

es el número máximo de años que puede vivir la última persona del grupo, antes de que éste se extinga, la gráfica adjunta se ha considerado como la representación ideal de la función S(X).

Sin embargo, no es fácil encontrar una función matemática simple, determinada mediante un número limitado de parámetros que se ajuste perfectamente a la realidad. Razón por la que se debe considerar S(x) con al menos dos



puntos de inflexión, cercanos a la edad cero y a la edad máxima ω, la cual no depende, únicamente de la variable tiempo, sino de factores socio económicos externos.

Ahora bien, toda vez que la función de supervivencia S(x) representa la probabilidad de que un recién nacido llegue con vida a la edad x, el número esperado de sobrevivientes a esa edad estará definido por la función l_x, la cual estará dada por:

$$l_x = l_0 \ S(x), \tag{II.2}$$

donde l_0 corresponde al número inicial de elementos del grupo, conocido como rádix de la tabla.

De donde se puede definir la función d_x , como el número de muertes a la edad x, ocurridas en el transcurso del año, es decir aquéllos que habiendo cumplido la edad x, no sobrevivieron a la $x+1$, es decir:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{II.3}$$

En los mismos términos, se define q_x como la probabilidad de que una persona de edad x, muera antes de alcanzar la edad $x+1$ y matemáticamente queda expresada como:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

y por tanto :

$$p_x = 1 - q_x \tag{II.5}$$

Conforme a lo expuesto anteriormente, es fácil definir la probabilidad condicional $_nq_x$ como la probabilidad de que una persona alcance la edad x y muera antes de cumplir la edad $x+n$, como:

$$_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{(II.6)}$$

función que depende tanto de la edad como de la amplitud del intervalo n.

Cabe hacer mención que, no obstante que las funciones antes mencionadas se determinaron a partir de la función de supervivencia, en la práctica se calculan tomando como base una tabla de mortalidad conocida, de donde los valores se determinan, considerando un rádix específico, a partir de la probabilidad de muerte.

La Fuerza de Mortalidad

Es importante tener presente que aún cuando la función S(X) existe y es continua y derivable, no es fácil de determinar, por tanto se hace necesario bajo estos supuestos, definir una de las funciones más importantes utilizadas en el cálculo actuarial, la Fuerza de Mortalidad.

Para esto supóngase que l_x y $l_{x+1/m}$, es el número de personas vivas a la edad x y $x+1/m$, respectivamente y que $(l_x - l_{x+1/m})$, es el número de muertos en el primer intervalo 1/m del año, entonces la probabilidad que una persona de edad x muera en ese intervalo está dada por:

$$_{1/m}q_x = \frac{l_x - l_{x+1/m}}{l_x} \qquad (II.7)$$

Si esta probabilidad se multiplica por m, se tiene una tasa nominal anual de mortalidad, bajo el supuesto que la probabilidad de muerte es la misma en cada intervalo m. Esta tasa nominal esta dada por:

$$q_x^{(m)} = \frac{l_x - l_{x+1/m}}{\frac{1}{m} l_x} \qquad (II.8)$$

Ahora bien, si el número de intervalos en el cual se ha dividido el año, se hace infinitamente grande, de tal forma que el límite de $^1/m$ tienda a cero, el valor del límite de esta expresión, estará dado por:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{l_x - l_{x+1/m}}{l_x} = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{d\mathrm{Log}_e\, l_x}{dx} \qquad (II.9)$$

Es decir la derivada de l_x respecto a x, representa la variación instantánea de esta función debida a un cambio unitario en x. Esta función es conocida como ***Fuerza de Mortalidad o Tasa Instantánea de Mortalidad***, se denota por μ_x, y se define como:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d\,l_x}{dx} \qquad (II.10)$$

La fuerza de mortalidad μ_x es, por tanto una medida de variación relativa anual de la curva l_x y representa la tasa anual de mortalidad que se basa únicamente en el comportamiento de l_x en un momento determinado, y toda vez que l_x es una función decreciente, su derivada es, por tanto, no positiva, de donde μ_x será siempre una función positiva o nula.

Ahora bien, de (II.10), se puede definir:

$-\mathrm{d}\, l_x = l_x \mu_x \; \mathrm{dx},$ como el número de muertes ocurridas exactamente a la edad x;

$-\frac{\mathrm{d}l_x}{l_x} = \mu_x \; \mathrm{dx},$ será por tanto la probabilidad que una persona de edad exacta x, muera en ese momento.

Similarmente $l_{x+t}\ \mu_{x+t}$, será el total de muertes ocurridas en el momento $x+t$, de donde integrando dicha función entre cero y uno, tendremos el total de muertes en el transcurso del año, es decir:

$$d_x = \int_0^1 l_x \mu_x \; \mathrm{dx} \tag{II.12}$$

y

$$q_x = \frac{1}{l_x} \int_0^1 l_x \mu_x \; \mathrm{dx} \tag{II.13}$$

$$= \int_0^1 {}_tp_x \; \mu_x \; \mathrm{dx} \tag{II.14}$$

CAPITULO III

TABLAS DE MORTALIDAD.

SERIES ESTADISTICO-ACTUARIALES.

DIFERENTES CLASES DE SERIES Y SERIACIONES.

Al considerar diferentes eventos probables en su ocurrencia sujetos al azar, resultan sucesiones de valores que no son otra cosa que series y seriaciones estadísticas, las cuales es necesario estudiar en sus propiedades y relaciones orientadas al objetivo de este trabajo.

Antes, es de advertir que dada la dificultad que se presenta al distinguir una serie de una seriación, y dado que el propósito de este trabajo no es puramente matemático, sino esencialmente de índole estadístico, no se distinguirá entre series y seriaciones, las cuales en un momento dado pueden tratarse en forma indistinta, ya que ofrecen características similares.

Todas ellas significan la distribución de un fenómeno colectivo conjuntamente en el tiempo y constituyen el conjunto de valores que alcanza dicho fenómeno en tiempos distintos y en el espacio según la amplitud del territorio a que se refiere el radio de observación, de acuerdo a sus modalidades cuantitativas y cualitativas.

De ahí que reúnan características *históricas*, por el tiempo; *estáticas*, según que expongan el fenómeno en su aspecto cuantitativo referido a un momento determinado, tal es el caso, por ejemplo de la clasificación por edades de un núcleo de población en una fecha determinada.

Dinámicas, cuando expresan un movimiento en el tiempo en el que se centran; de *frecuencia* o *ponderada*, puesto que las series representan el número de realizaciones del hecho considerado, de entre los que están o se suponen expuestos a él.

Desde este punto de vista se puede decir que las series son *homógradas*, si se refieren a fenómenos que no pueden manifestarse más que con un solo grado de intensidad, tal es el caso de la muerte.

Heterógradas, cuando el hecho puede producirse con una intensidad variable, como el incendio, el robo, etc.

También se presentan series de hechos *complementarios*, como son las formadas por los supervivientes activos a cada edad, procedentes de un grupo inicial, por los fallecidos como activos, procedentes de ese mismo grupo.

Cuando todas estas series proceden de una misma base experimental, se dice que tienen el *mismo peso*; pero si proceden de bases distintas, se dicen de *peso distinto* y no se pueden combinar entre sí en números absolutos, sino únicamente en relativos, es decir desde el punto de vista probabilístico.

FUENTES DE OBSERVACION

Los datos estadísticos que integran las series, pueden provenir de dos orígenes:

a) Las estadísticas de carácter general.

b) Las observaciones particulares. Como puede ser el caso de las propias entidades aseguradoras.

Al respecto, cabe hacer hincapié en que esta segunda fuente de información debe tener características que ofrezcan garantía de los datos que se obtienen de ella, ya que la bondad de la investigación estadística dependerá de que éstos tengan como fundamento criterios estadísticos confiables. Modificados, en su caso, por los más puros conceptos técnicos propios de cada caso, expresión de un conocimiento exacto de la operación de que se trate.

Sin embargo, es frecuente el caso de nuevos seguros, y por tanto, no existir experiencia específica de su comportamiento, por lo que no habrá más remedio que acudir a las estadísticas de orden general; pero al tomar sus datos habrá que adoptarlos con las rectificaciones necesarias si existen elementos suficientes para fundamentarlos, y en su caso con las reservas del caso para que nunca puedan resultar sorpresas por no haber considerado el criterio estadístico general en el marco preciso de la técnica.

También puede darse el caso de un hecho acerca del cual se carezca de estadísticas generales. Entonces, tendremos que apoyarnos en la intuición, de una manera por demás prudente y siempre en función del empirismo, desarrollado dentro del marco de la técnica del seguro y al amparo de las características peculiares del caso.

Por sus características especificas, la observación puede ser:

a) Interna, si se verifica en la conciencia, es decir, constituye el estado de ánimo que da lugar a la apreciación *subjetiva* y sirve de base a la intuición y al empirismo.

b) Externa, si para ello se hace uso de los sentidos corporales y constituye la apreciación objetiva del hecho.

c) Natural, si el fenómeno se examina en el estado que real y espontáneamente ofrece, únicamente con el auxilio de los sentidos.

d) Metódica, cuando se emplean medios o instrumentos auxiliares para determinar concretamente el hecho de que se trate.

e) Directa, cuando recoge los hechos, por sí mismos, en el momento en que se realizan, este tipo de observaciones representan la estadística propiamente dicha.

f) Indirecta, la que basándose en las propiedades de un determinado hecho o grupo reducido de hechos, por deducción se intuye en consecuencia las de otros que le son análogos.

En tales condiciones, la observación directa es la que tiene un valor eminentemente científico, y que puede a su vez clasificarse como:

a) Continua, cuando los hechos se recogen tal y como van ocurriendo, de una manera automática, tal es el caso de las observaciones efectuada sobre la base de la experiencia de las propias entidades aseguradoras.

b) Periódica o intermitente, cuando los sucesos se observan a intervalos de tiempo más o menos regulares, como por ejemplo los censos de población.

c) Circunstancial, la que se refiere hechos que se presentan con irregularidad, o cuando se trata de eventos originados por circunstancias especiales.

Si se toma en consideración la manera como han de captarse los datos estadísticos, se debe, ante todo, hacer notar que la diversidad entre la observación continua y la periódica se traduce, también en el modo diferente de reunir los datos.

En el primer caso es *automática*, es decir, los datos se van anotando en los correspondientes registros, listas, o relaciones, a medida que ocurren. Por ejemplo: los registros de riesgos de las instituciones aseguradoras, creados a medida que se emiten las pólizas y van ocurriendo los siniestros.

Cuando la observación es *periódica*, se recogen los datos de una manera *reflexiva*; esto es, se requiere información acerca de los datos que se pretenden a los que pueden o deben facilitarlos, valiéndose para ello de interrogatorios verbales o escritos, como cuando se practica una encuesta.

Estos interrogatorios se formulan mediante hojas, cuadros, o bien mediante los llamados cuestionarios de encuesta, en los que figuran los detalles que se desea conocer y el lugar apropiado para contestar según corresponda.

La estadística técnica es la indicada para establecer los detalles que deben pedir o contener estos documentos con objeto de que reúnan las características necesarias, para responder al objetivo a que son destinados, en relación a la técnica específica de la modalidad de seguro de que se trate.

Tal es el caso de los formatos establecidos para la captación de datos relativos a pólizas en vigor y siniestros ocurridos en las compañías de seguros.

RIESGOS PERSONALES.

Si se toma como materia de estudio al propio hombre, como objeto de observación, éste es susceptible de ser analizado desde varios puntos de vista, según las cualidades propias de los diferentes estados, que dan lugar las diversas consideraciones y consecuencias de las circunstancias en que se encuentre y puedan afectar su existencia.

Tales circunstancias dan lugar propiamente al estudio de la población como objeto de una ciencia, la *Demografía*, que Block definió como:

> < <*La ciencia del hombre viviendo en sociedad, en cuanto puede ser expresada por cifras, de manera que abarcaría el estudio de las relaciones fisiológicas, morales, intelectuales, sociales y políticas de las poblaciones*> >.

Rümelin identifica en la demografía la estadística de la población, la economía y la cultura, reservando a la "*Staatenkunde*", ciencia del Estado, el estudio de la vida política del hombre.

Algunos tratadistas, como Guillard, que introdujo la palabra *demografía*, identifican así a la descripción pura de los hechos referentes a uno o más estados y lo llaman *Demología*, misma que fué definida por Quetelet como *Física social*.

De tal forma que particulariza así el criterio de Engel, quien definió este concepto, como la elevación de los hechos particulares a generales, esto es, de lo concreto variable a las relaciones relativamente constantes y por ende, a las normas *estadísticas*, que pretenden formular las leyes de la población en general.

Ahora bien, de acuerdo con el criterio del Dr. Pou y Ordinas, es decir, <<prescindiendo de la dificultad de encerrar en vocablos, formados con palabras de lenguas antiguas, conceptos que han nacido del desarrollo moderno de la ciencias>>, lo más sencillo para nuestro objeto será circunscribir lo que se tenga que decir acerca de este asunto bajo el nombre genérico de *estadística de población* .

La población presenta dos caracteres: uno estático, o modo de ser en un momento determinado, y otro dinámico, esto es, en las mutaciones sucesivas que experimenta de tiempo en tiempo.

Atendiendo a su aspecto estático la población puede ser *absoluta*, como es el caso de la que resulta de un censo, considerado simplemente en su escueta expresión numérica general.

Relativa cuando se le tiene en relación con el territorio, por ejemplo el número de habitantes por kilómetro cuadrado, y *específica*, si se la considera en función a caracteres especiales, como puede ser el sexo, edad, validez para el trabajo, es decir la ausencia de un estado de invalidez o enfermedad.

Asimismo, el dinamismo de la población puede ser *intrínseco*, como es el caso de la mortalidad, invalidación, morbilidad, y *extrínseco* representado por los *fenómenos migratorios*.

Atendiendo al dinamismo que presenta, la población puede ser *estacionaria, creciente, decreciente o mixta*.

Finalmente, suele clasificarse en población de *derecho* la constituida por todos los residentes habituales en la localidad, estén presentes o no al efectuar el Censo, y de *hecho*, formada por todos los presentes, tengan o no su residencia habitual en el término. Con respecto a este particular, se distinguen cuatro categorías de habitantes o grupos de población:

a) Individuos residentes y presentes en el lugar donde son censados.

b) Individuos residentes, pero momentáneamente ausentes.

c) Individuos presentes, pero no residentes (huéspedes de paso, viajeros, etc.).

d) Poblaciones colectivas, como son las incluidas en cuarteles, etc.

En la población de derecho puede efectuarse una nueva clasificación si se distingue la población *urbana*, cuando se refiere a la agrupada en los grandes núcleos y cascos de población, y *rural*, si se encuentra diseminada en caseríos y núcleos muy pequeños.

Para el caso particular de seguros, interesa el estudio de la población en un doble aspecto: estático y dinámico, tanto si nos limitamos a considerar simplemente los fenómenos naturales de aspecto más amplio o general, como son la muerte y la supervivencia ordinarias, como si estudiamos la población general ateniéndonos a su estado físico, la que puede clasificarse en válidos e inválidos; según el estado de salud en sanos y enfermos; con respecto a la actividad para el trabajo en activos y pasivos. A su vez, dentro de cada uno de los grupos mencionados pueden ser clasificados según el sexo de que se trate.

TABLAS DE POBLACION

El resultado del censo de población, en lo que respecta a la exposición del número de habitantes procedentes del recuento o número de habitantes de un cierto territorio y en un momento dado, clasificados por edades y sexo, se conoce como *Tabla de Población.*

Una tabla de población es, por tanto, una serie de valores de la forma:

$$L_x, L_{x+1}, L_{x+2}, \ldots, L_{x+n},$$

en la que cada uno de estos términos de la serie representa el número de personas que, respectivamente, se encuentran entre las edades (x) y $(x+1)$; $(x+1)$ y $(x+2)$; etc.

Cada uno de los números L_x está integrado por las personas que tienen exactamente la edad x y los de las que tienen edades $x+h$, $x+2h$, ..., $x+(1-h)$. El valor de L_x es, por tanto, representativo de todas las personas de edades comprendidas entre x y x+1, sin incluir aquellas que tienen esta última edad.

Por cuanto a las *tablas de supervivencia y mortalidad*, son las que nos presentan los números de supervivientes a cada edad, procedentes de un cierto número de individuos de una determinada edad inicial.

Estos también se pueden representar, partiendo de la edad inicial x, mediante la expresión, antes señalada, es decir:

$$L_x, L_{x+1}, ..., L_{x+n}.$$

Por tanto, la diferencia entre dos consecutivos $(L_x - L_{x+1}) = d_x$, representará el número de individuos que teniendo la edad x, no alcanzaron a cumplir la edad x+1, por tanto el número d_x representa el número de fallecidos a la edad x.

Existe una diferencia conceptual, entre los valores representados por los símbolos L_x y l_x ya que mientras el primero se refiere a personas de edades fraccionarias, comprendidas, como quedó establecido, entre x y x+1, el segundo expresa, los que tienen exactamente la edad x.

Ahora bien, para la obtención del número l_x, no se toman realmente las personas que en un determinado día del año tienen exactamente la edad x, ya que esto sería prácticamente imposible y por tanto nulo desde el punto de vista matemático, por lo que se considera, compensando los errores en más con los de menos, que tienen exactamente la edad x, todas aquellas personas cuya verdadera edad está comprendida entre x-1/2 y x+1/2.

Es decir, se consideran de edad exactamente x en el momento de transición del 31 de diciembre de un año al 1° de enero del siguiente, por ejemplo, todas aquellas personas cuya fecha de nacimiento está comprendida entre el 1° de julio del año que termina y 30 de junio del año que empieza.

Esto no podría efectuarse, más que partiendo de la hipótesis de que los nacimientos y las defunciones están distribuidos a intervalos iguales durante el año en que tienen lugar. Hipótesis carente de todo rigor de exactitud, pero en la cual el error cometido no afecta en nada a los resultados prácticos.

La justificación matemática de este principio, se puede deducir mediante:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\ dx$$

$$= \int_0^1 (l_x - t d_x)\ dx$$

$$= l_x - \tfrac{1}{2} d_x$$

$$= l_x + 1/2$$

$$= \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) \qquad \text{(III.1)}$$

De donde se tiene que el número Lx puede ser considerado como el número que en una tabla actuarial estaría representado por $l_{x+1/2}$, o sea:

$$L_x \approx l_{x+½} \approx ½(l_x + l_{x+1})$$

Es claro, que en toda tabla de mortalidad debe suceder:

$$l_x - l_{x+1} = d_x,$$

$$l_{x+1} - l_{x+2} = d_{x+1},$$

$$l_{x+2} - l_{x+3} = d_{x+2}, \ldots$$

$$l_{\omega-1} - l_{\omega} = d_{\omega-1},$$

donde ω es la edad máxima de la tabla, para la cual $l_{\omega} = 0$,

$$l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{x+\omega-1}$$

TABLAS DE MORTALIDAD DE COMPAÑIAS DE SEGUROS.

Una tabla de mortalidad se refiere, por tanto a un registro de la experiencia pasada y su uso, como base de cálculo de primas y reservas en el seguro de vida, significa la esperanza de que la experiencia pasada se repita en el futuro de acuerdo con las frecuencias establecidas en la propia tabla.

Sin embargo es ampliamente conocido el incremento observado en la duración promedio de vida, merced a los diferentes avances médicos y fundamentalmente a la calidad de vida, en esas condiciones, la mortalidad futura será por tanto, menor que la observada en el pasado.

No obstante cuando se involucran grandes números, la experiencia futura puede ser estimada con bastante aproximación ya que los cambios en las tasas de mortalidad no se dan con tanta rapidez en el tiempo, lo que permite que las predicciones hechas en base a ellas sean sumamente estables

En esa virtud, no es necesario que las tasas de mortalidad sean precisamente exactas, lo cual por demás esta decirlo es poco probable, pero si que no sean subestimadas, de tal forma que representen un peligro de ruina para la empresa de seguros.

DIFERENTES CLASES DE TABLAS.

Cuando las tablas de mortalidad se construyen en base a la experiencia de las instituciones de seguros, se debe tener en cuenta la selección cuantitativa de los riesgos que éstas hacen para las diferentes modalidades de seguros en caso de muerte.

Con objeto de evitar la antiselección que reperesentaría el prospecto de seguro, si sólo se asegurase aquellos que se supiesen malos riesgos o predispuestos a muerte prematura, se relizan pruebas llamadas de selección, que como su nombre lo indica, permite eliminar del grupo de asegurados los que por sus características representarían una carga financiera para la mutualidad.

Esta selección provoca dos actitudes, una, de rechazo de todos aquellos casos que ofrecen una mayor exposición a la muerte de la considerada como normal, y la otra, la aceptación de ellos considerandolos, no obstante como anormales, equivalentes o equiparables a otros clasificados como normales, y que por sus características de variabilidad como puede ser la edad, se estima representan una mortalidad similar.

De tal manera que los riesgos considerados como anormales, subnormales o tarados, merced a circunstancias objetivas, que representen, pueden suponerse como normales, dentro de nuevas normas o circunstancias, que para el efecto se estimen convenientes, si satisfacen parámetros generales de aceptación, los cuales les calificarán con un grado mayor de exposición al riesgo.

En esas condiciones una primera clasificación de tablas de mortalidad de asegurados, es en función de la mortalidad, a saber de:

Riesgos normales, o de selección.

Riesgos anormales.

Riesgos sin selección o mortalidad de población general.

Desde ese punto de vista se pueden presentar riesgos asegurados que tengan la misma edad, o sean estimados como semejantes, si algunos acaban de ser seleccionados como riesgos asegurables y otros fueron aceptados hace tiempo.

La exposición al riesgo de muerte será menor en los primeros que en estos últimos, debido a que biológicamente éstos habrán presentado cambios en su estado de salud que puedan presentarlos como una vida menos normal, que los primeros.

De acuerdo con las observaciones médico-estadísticas los efectos de la selección médica resultan nulas o casi nulas después de cierto número de años, estimados en términos generales como cinco años, aunque podemos encontrar períodos de hasta siete o diez años como máximo, y desde un punto de vista conservador, de tres como mínimo.

En esas condiciones las tablas de mortalidad determinadas en función de esta característica pueden ser:

Tablas por edad de entrada, aquellas cuyas tasas se determinan en función de las observaciones hechas según la edad de contratación del seguro.

Tablas selectas, aquellas cuyas tasas se determinan en función de las observaciones hechas por edad de entrada al seguro, diferenciadas según la antigüedad en el mismo, es decir se convierte en un tronco escalonado, con varias ramas, según la antigüedad manifiesta.

Tabla últimas, aquéllas en las cuales se considera extinguido el efecto de la selección en el grupo.

Tablas agregadas o conjuntas, aquéllas en las que no se hace ninguna diferencia entre edades de entrada al seguro y años de antigüedad en el mismo.

PRINCIPALES TABLAS DE MORTALIDAD: HISTORIA.

Poco se sabe si en la antigüedad se tuvieron o no en cuenta los fallecimientos. Por causa de la destrucción de las bibliotecas de Efeso y Alejandría no han quedado noticias al respecto, en relación con los Asirios, Hebreos, Egipcios y Fenicios. Lo único que se sabe es que los Griegos anotaban las muertes ocurridas en guerra, no ciertamente para efectos estadísticos, sino para socorrer a las viudas y huérfanos de los que morían en campaña.

Fue en Roma que por vez primera (578 a. C.), se comenzó a registrar los nacimientos y las muertes, por los impuestos que sobre ellos fueron establecidos por Servio Tulio, y que debían pagarse, respectivamente, en las épocas de Giunona Lucina y de Libitina.

En el año 170 d. C. fue construida por Ulpiano una primera tabla de mortalidad, con resultados, no obstante, poco confiables, a causa de la imperfección del trabajo, que era natural en una primera tentativa.

El primer intento de calcular la probabilidad de vida humana , como ya se mencionó, lo llevó a cabo el holandés De Witt, en unión de Van Hudden, en el año 1671.

Años después se construía, por Petti, en Inglaterra, otra tabla de mortalidad basada en observaciones hechas en las ciudades de Londres y Dublín, pero que, por no haberse tenido en cuenta las edades de los fallecidos, no eran de aplicación al seguro.

Por la misma época, el Dr. Neumann, de Breslau, hacía un estudio de la mortalidad basado en los registros de dicha ciudad, siendo ésta la primera tabla a la que se puede atribuir algún valor.

En el año 1693, el Dr. Halley publicó la que por su rigor y por el número de observaciones tomadas de los registros de la misma ciudad de Breslau podía llamarse verdaderamente de mortalidad, ésta se refería a 6,193 nacimientos y 5,869 defunciones, registrados durante el periodo de 1687 a 1691.

Siguieron los trabajos de Kerseboom, en 1738; de Struyk, en 1740; de Süssmilch, en 1741, y Simpson, en 1742, ampliando los trabajos de Halley.

Dadson, a su vez, amplió los trabajos de Simpson, construyendo una tabla de mortalidad basada en el registro de mortalidad de la ciudad de Londres, de los años 1728 a 1750.

Desparcieux publicó en 1746, su "Essai sur la probabilité de la vie humaine", refiriéndose a observaciones que comenzaban en el año 1689, al mismo tiempo dió a conocer varias otras tablas de mortalidad, basadas en las tontinas francesas y en los registros de distintas casas religiosas.

Después, fue estudiada por Dupré de Saint Maure la mortalidad de París.

Sin embargo, la primera tabla de mortalidad empleada para calcular cantídades referentes al seguro de vida, fue construída en 1783, por el Dr. Price, con los datos de nacimientos y defunciones, de los habitantes de Northampon, de 1735 hasta 1780. Asimismo, Midne publicó su tabla en 1787, la cual es conocida como Tabla Carlisle.

El Médico Duvillard, en 1806, construyó una tabla de mortalidad, con objeto de demostrar la influencia de la viruela, que gozó de gran popularidad durante mucho tiempo. En 1829 fue publicada la que Finlaison había construido por encargo del Gobierno inglés. Dumontferrand propone una en 1832 y Mr. Edmonds, la suya de mortalidad media.

En 1834 se construye la primera tabla basada sobre experiencia aseguradora propiamente con base del archivo de la "Equitable Life Office", inglesa, por el Actuario Mr. Arthur Morgan, abarcando un período de experiencia comprendido entre 1762 y 1828.

Esta fue perfeccionada en 1843 con la publicación de la tabla llamada de las "Diecisiete Compañías Inglesas" (Combined Experience), basada en el estudio de unas 84,000 pólizas, abarcando el período de 1762 a 1837 y construida por un Comité compuesto de los principales Actuarios de la época. En 1852, Hubbard formó otra tabla para las Sociedades de Socorros Mutuos.

En el año 1859 se publicó una tabla preparada por el Dr. Farr, referida al período 1849-1854, recogiendo los datos de sesenta y tres distritos de Inglaterra y el País de Gales, que fue seguida de otra que abarcó el período 1881 a 1890 y se extendió a doscientos sesenta distritos, y una tercera relativa al 1891-1900, sobre doscientos sesenta y tres distritos.

Cada una de estas últimas investigaciones acusó un mayor grado de salud que su inmediata anterior. Estas tablas se conocen con el nombre de "Healthy English Life Tables".

En 1860, bajo los auspicios de las Tres Compañías francesas, L'Union, Nationale y Assurances Generales, fue construída la conocida como la del "Comité de las tres Compañías", y en 1869 la de Beauvisage.

En este mismo año el Instituto de Actuarios de Londres y la Facultad de Actuarios de Escocia publicaron unas tablas basadas en la experiencia de diez compañías inglesas y otras diez escocesas relativas a un período de veinticinco años.

Fueron cuatro tablas: la de "Healthy Males" (H^m); la de "Health Females" (H^f); la de "Diseased Males and Females" (D.M.F.) y una correspondiente a los riesgos especiales, producto del clima, profesión, etc. Son las llamadas de las "Veinte Compañías Inglesas" y consideradas como unas de las mejores.

Desde 1868, año en que se constituyó el Colegio de Actuarios de Berlín, una Comisión se avocó a la construcción de una tabla de mortalidad, la cual fue publicada en 1883, con el nombre de "Tafel der deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften", que contemplaba los siguientes casos:

a) Riesgos normales, con reconocimiento médico.

b) Riesgos tarados, con reconocimiento médico.

c) Riesgos asegurados, con reconocimiento médico.

d) Riesgos asegurados, sin reconocimiento médico.

En 1874, el Actuario De Kertanguy publicó otra tabla, construida con base de la experiencia de la Compagnie d'Assurances Générales. M.M. Achard y Charlon publicaron, en 1879, una formada con base de los pensionistas del Estado Francés.

Las tablas C.R. (de la Caise Nationale de Retraites pour la vieilleisse) fueron construidas por Fontaine en 1887. También debemos citar las "Allgemeinen Deutschen Sterbetafeln" sobre datos de los años 1891-1900.

Las tablas A.F. (assurés francais) y R.F. (rentiers francais), fueron publicadas por vez primera en 1887, ajustadas por el método de Woolhouse, y de nuevo en 1895 ajustadas por el método de Makeham. En su sesión del 24 de marzo de 1899, el Comité de las Tres Compañías francesas decidió que sus Actuarios estableciesen una nueva tabla de mortalidad por edades de entrada, con base en las observaciones relativas a los rentistas y asegurados en caso de vida de las tres compañías, abarcando un período de observación del 1o. de julio de 1819 (año de fundación de la Compañía más antigua de las tres) al 30 de junio de 1898, con un total de 46,933 hombres y 71,907 mujeres, que respectivamente representaban 24,355 y 31,396 fallecidos. Se publicó en 1900, con el nombre de "Tablas del Comité de las Tres Compañías".

En el año 1903 se publicaron otras, "The British Offices Life Tables, 1893", que abarcaron la experiencia británica hasta ese año, comprendiendo los datos de sesenta compañías de seguros sobre la vida, entre ellos los de rentas vitalicias de cuarenta compañías. Se distinguieron ambos sexos, "O^{m}" y "O^{f}". Se conocen con el nombre de "Select Tables" y fueron construídas por el Instituto de Actuarios de Londres.

TABLAS DE MORTALIDAD EN AMERICA.

En 1861 Mr. Levi W. Meech dirigió la primera compilación de experiencias combinadas de compañías estadounidenses, tomando por base la experiencia de treinta compañías; pero a pesar de haber sido bastante amplias las observaciones, nunca fue adoptada en la práctica. Se le conoce con el nombre de "Thirty American Offices Tables".

En 1868, Shephard Homan, Actuario de la Mutual Life Insurance Company, con resultados de los dieciséis primeros años de existencia de la Compañía, que se fundó en 1843, construyó la tabla conocida por "American Experience Table", que fue la primera tabla de experiencia americana, calculada en función de la experiencia observada de la mutualidad asegurada.

No obstante la declaración hecha por su constructor, de que no era una representación fidedigna de la mortalidad de su Compañía, sino que, teniéndola en cuenta, la había construido para determinar el porcentaje de mortalidad entre asegurados vivos residentes en distritos salubres después de haber pasado por la selección médica, fue adoptada por el Estado de New York como "tipo" para las exigencias legales de cálculos de primas y reservas, siendo calificada como una de las mejores existentes, y utilizada para el cálculo de primas y reservas hasta 1947.

Cabe señalar que durante el tiempo en que fue utilizada, la mortalidad calculada en base a las tasas señaladas fue sustancialmente mayor que la ocurrida, lo que dio lugar a un "ajuste" en el costo del seguro, mediante el otorgamiento de "dividendos" sobre las primas, ya que éstas en general eran mayores que las necesarias.

En esas condiciones se vio la necesidad de una nueva tabla, que reflejare de una manera más adecuada la experiencia real de siniestralidad en el seguro de vida.

Lo cual ocurrió hasta 1947, año en que apareció la Tabla de Mortalidad conocida como Commissioners Standard Ordinary 1941, preparada por el Comité Guertin, quien fue encargado en 1938 de analizar la mortalidad ocurrida en los seguros de vida, para lo cual se tomó como base la experiencia observada de 1930 a 1940 en las principales compañías de seguros.

Esta tabla se utilizó aproximadamente de 1947 a 1960, por la mayoría Estados de la Unión, para lo cual fue necesario modificar las leyes estatales en la materia, a fin de que ésta fuera el mínimo legal para el cálculo de reservas y valores garantizados de pólizas.

No obstante en las pruebas de seguimiento se observó, casi inmediatamente que la mortalidad real seguía siendo menor que la esperada y que con toda seguridad seguiría disminuyendo, como había ocurrido en el pasado. En esas condiciones se vio la necesidad de realizar estudios que permitieran en el corto plazo la sustitución de esta tabla, por otra más realista.

Además existía en algunos estados la obligatoriedad de constituir "reservas de deficiencia". Esta reserva era obligatoria para aquellas empresas de seguros que cobraban primas menores que las calculadas con la tabla usada para el cálculo de reservas, con el fin de cubrirse contra la posible insuficiencia de primas, lo que representaba una reserva para posibles pérdidas por probables desviaciones en la siniestralidad.

Por tales razones, en 1958 se preparó una nueva tabla que recogió la experiencia observada en todos los estados durante el período de 1950 a 1954, la cual es conocida como Comissioners Standard Ordinary 1958 (C.S.O. 58).

La Tabla C.S.O. 58 es una tabla de mortalidad de hombres, ya que, no obstante que entre sus componentes se consideró también la experiencia del sexo femenino, el número fue muy pequeño, por lo que simplemente se supuso que la mortalidad entre mujeres era equivalente a la de los hombres considerando una diferencia de edades de tres años menos en las mujeres, y que esta diferencia de tres años entre la mortalidad de hombres y mujeres era suficientemente representativa y razonable para adoptarse en la práctica.

Sin embargo, la experiencia ha demostrado que esta diferencia no es suficientemente precisa y en consecuencia no es representativa de la mortalidad de mujeres.

A partir de su adopción como tabla legal, la diferencia entre la mortalidad real y la esperada se estabilizó y minimizó, de tal forma que su uso se prolongado durante aproximadamente 20 años. Sin embargo, se ha observado que la mortalidad real ha seguido disminuyendo en forma sustancial, según la experiencia de las compañías de seguros de vida, y como resultado, se producen reservas mayores en el seguro de vida y en consecuencia valores en efectivo mínimos, lo cual afecta el costo del seguro.

Además de que las compañías estaban soportando reservas deficitarias mayores que la que deben constituir en términos reales, situación que se pretende corregir con una tabla actualizada.

En esas condiciones, se encargo a un Comité desarrollar una nueva tabla de mortalidad para ser adoptada como base mínima legal, para el cálculo de reservas y valores garantizados.

Para tal efecto, el mencionado Comité decidió utilizar como período de exposición la experiencia observada de 1970 a 1975, este período se seleccionó por ser el más reciente de experiencia disponible en el cual no se han presentado epidemias, ni ningún otro evento extraordinario que pudiera afectar la mortalidad, ya que se está excluyendo la experiencia de mortalidad de guerra.

Se decidió adoptar un período de cinco años, en lugar de los cuatro utilizados en la C.S.O. 58, para obtener un mayor volumen de datos, especialmente para la experiencia de mujeres. Se consideraron además los seguros con y sin examen médico. Estos últimos se tomaron por la tendencia observada en la industria, y fundamentalmente debido a que la experiencia de los seguros sin examen médico representaba un volumen significativo, sobre todo para mujeres.

Se consideraron además, únicamente pólizas con antigüedad mayor a seis años, es decir se eliminaron todas aquellas pólizas con antigüedad de uno a cinco años, obteniendo como resultado de estos estudios la Tabla de Mortalidad Commissioners Standar Ordinary 1980 (C.S.O. 80), tabla legal actualmente en uso en los Estados Unidos de Norteamérica.

Por lo que se refiere a América latina, cabe señalar el caso de Colombia, por ser la primera tabla que se desarrollo en América Latina. Esta tabla de determino tomando como base la experiencia de 5 compañía que representaron 556,973 expuestos y 3,186 muertos, durante un período de observacion de 14 años esto es de 1940 a 1954, publicada en 1957 y aun vigente como tabla legal para el calculo de primas y reservas, en este país,

TABLAS DE MORTALIDAD EN MEXICO

Antecedentes Legales.

En nuestro país, el primer intento de Legislación, sobre la Base Demográfica que las Instituciones de Seguros pueden utilizar en el cálculo de Reservas Matemáticas de

Primas, lo encontramos en la Ley relativa a La Organización de las Compañías de Seguros sobre la Vida, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 25 de mayo de 1910. Al respecto, la Ley indica:

> " ... Las Reservas Matemáticas de Primas y Las Reservas de Reaseguro de las Compañías Extranjeras, podrán calcularse de acuerdo con las tablas y tipo de interés, usados por las compañías en su propio país, ... ".

Sin embargo, en el Reglamento de la Ley de Compañías de Seguros sobre la Vida, publicado el 24 de agosto del mismo año, se establece:

> "...como Tabla Legal la denominada "Experiencia Americana", mientras se forma la Tabla Mexicana de Mortalidad".

Tal disposición, tiene como fundamento las características propias de las Operaciones de Vida, las cuales son definidas en la Exposición de Motivos de la referida Ley, como negocios esencialmente técnicos, que tienen como fundamento elementos matemáticos que permiten evaluar adecuadamente la obligación. En esa virtud, no se consideró prudente dejar de imponer la obligación de constituir reservas suficientes que garantizaran el cumplimiento de tales obligaciones.

Dicho precepto, se mantuvo en la Ley General de Instituciones de Seguros, publicada el 29 de enero de 1935, adicionando únicamente la posibilidad de calcular dichas reservas con cualquier otra Tabla de Mortalidad siempre y cuando se obtuvieran valores iguales o mayores que los calculados con la mencionada Tabla de Experiencia Americana.

Para el año de 1971, el hecho de utilizar la citada Tabla de Mortalidad en el cálculo de las primas netas, trajo como consecuencia primas de alto costo, además las compañías, confiadas en el amplio margen de mortalidad que se presentaba respecto a la mortalidad real, ofrecían concesiones extraordinarias tales como disminución de primas, dividendos garantizados, etc., que propiciaron situaciones anárquicas en el mercado.

Ante tal situación, se vio la necesidad de cambiar la tabla en uso por otra que reflejara la siniestralidad real del mercado.

Para esto se integró un comité de Actuarios para revisar la propuesta de tabla elaborada en base a la experiencia de mortalidad observada por las compañías mexicanas de seguros durante el período 1962-1967.

En ese contexto, previo acuerdo de la Autoridades competentes, se establecio la denominada Tabla de Mortalidad Mexicana 1962-1967, como base demográfica legal, para los seguros de vida individual.

Por lo que se refiere al Seguro de Grupo, éste se rige conforme a la ley, en su propio reglamento, el cual data de 1962.

Conforme a dicha disposición legal el Seguro de Grupo opera con base en períodos anuales o menores, por lo que la prima corresponde exclusivamente al riesgo puro, de acuerdo a la edad del asegurado.

De acuerdo a las modificaciones de la entonces Ley General de Instituciones de Seguro, ocurridas en 1981, el reglamento del Artículo 47 establecía como base demográfica legal, para este tipo seguros la Tabla de Mortalidad "Comissioners Standard Group 1960".

Sin embargo a raíz de la adopción de la la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1962-1967, como base demográfica del Seguro de Vida Individual, la autoridades previeron la necesidad de contar con elementos que permitieran conocer el comportamiento de la mortalidad ocurrida en el mercado asegurador mexicano.

Para el año de 1984, los resultados altamente satisfactorios, en la operación de este seguro, permitían otorgar dividendos del orden del 30% de la prima.

Dicha situación evidenció la necesidad de modificar la base demográfica tomando como base datos representativos del mercado mexicano; para el efecto, se realizó el estudio correspondiente, considerando la experiencia de mortalidad ocurrida, respecto a los certificados en vigor durante el período 1973 a 1983, para las Operaciones de Seguro de Grupo.

Situción Actual

Los resultados observados hasta el año de 1991, indican que tanto en las Operaciones de Seguro de Vida Individual, como en el de Seguro de Grupo, la mortalidad ocurrida es inferior a la esperada.

En esas condiciones, las compañías apoyadas en el diferencial que se presenta entre la mortalidad ocurrida y la esperada, otorgan concesiones extraordinarias, en las contrataciones de seguros, fundamentalmente en el Seguro de Grupo.

No obstante, cabe mencionar que esta situación, ha sido un apoyo importante en el desarrollo de los seguros de capitalización del Seguro de Vida Individual, toda vez que la base de operación de dichos seguros es el dividendo por rendimiento de las reservas matemáticas, y en la medida en que la base demográfica legal vigente, obliga a las Aseguradoras a constituir reservas mayores, como base de inversión permite obtener altos rendimientos.

Además de que existen Aseguradoras que como medida de competencia, han implementado dentro de sus bases de operación, un reconocimiento implícito en la participación del diferencial por mortalidad, al considerar en el cálculo de sus primas, tasas de mortalidad equivalentes a la mortalidad real.

Por otro lado, las condiciones de desregulación actuales, orientan las operaciones de seguro hacia sistemas de competencia, fundamentalmente basados en precios equitativos para el asegurado, además las medidas relativas al Capital Mínimo de Garantía, permiten a las empresas operar dentro de un márgen de solvencia, por lo que no es necesaria la constitución de Reservas Matemáticas del orden de las que actualmente se tienen y que implican un alto costo.

La situación actual, muestra la conveniencia de adoptar una base demográfica de uso general, sustentada en estudios fundamentados en datos representativos del mercado mexicano.

Por otro lado, han pasado mas de 20 años, desde la creación de la tabla de mortalidad denominada Experiencia Mexicana 1962-1967, período durante el cual las condiciones de salud han cambiado, así como los requerimientos de selección entre las compañías de seguros.

Como consecuencia, atendiendo a la problemática detectada, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, se abocó a realizar el estudio relativo a la mortalidad ocurrida en el Sector, durante el período 1982 a 1989, tanto de las Operaciones de Seguro de Vida Individual, como del Seguro de Grupo, con el propósito de contar con Tablas de Mortalidad actualizadas.

Como resultado de este estudio se obtuvieron tasas de mortalidad, que representan una disminución respecto a las que estaban en uso desde 1970, para el Seguro de Vida Individual. Por lo que se consideró adecuado proponer una nueva Tabla de

Mortalidad de Vida Individual, como base demografica para cálculo de Reservas Matemáticas y primas netas.

Los resultados obtenidos, fueron presentados al sector asegurador, previa aprobación de las autoridades competentes, con el nombre de Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989. Dicha tabla a partir del 1° de mayo del presente año, constituye la base Demográfica Legal para el cálculo de primas y reservas para el seguro de vida individual.

Para la realización de este trabajo se utilizó, como ya se mencionó, la experiencia observada en el sector durante el período 1982 a 1989.

En tal virtud, con objeto de ejemplificar el presente trabajo se desarrollará la metodología utilizada en el cálculo de las tasas que forman la mencionada tabla.

El presente trabajo esta apoyado en estudios y técnicas ya desarrolladas por estudiosos en la materia, simplemente a manera de continuidad para este trabajo, menciono aquéllas, que entre las existentes se adaptaban mejor a las características de los datos para la graduación de la tabla.

CAPITULO IV

CONSTRUCCION DE UNA TABLA DE MORTALIDAD.

INTRODUCCION.

La tabla de mortalidad, es la base de cálculo de primas y reservas en el seguro de vida y muestra un registro de "Tasas de Mortalidad", que representan la probabilidad que tiene una persona de determinada edad de morir en el transcurso del año.

Su utilización supone, que la experiencia que sirvió de base para su realización, se repetirá en el futuro; sin embargo debido al aumento progresivo de la duración promedio de vida en el ser humano, la mortalidad tiende a disminuir en el tiempo, fundamentalmente como consecuencia de las nuevas condiciones de vida y demás adelantos médicos y tecnológicos.

A pesar de que las tablas de mortalidad se basan en un gran volumen de información y que las tasas representativas son relativamente estables, debido a los cambios mencionados en la mortalidad es necesario revisarlas periódicamente. Con esto se evita que las tasas representadas no sean subestimadas en el cálculo de primas, ni sobrestimadas en el caso de anualidades.

El análisis del problema de la mortalidad es complejo, puesto que involucra diversas variables, tales como sexo, edad, ocupación, nivel de vida,etc.

En su elaboración, en primer término se debe tener en cuenta el propósito para el que serán utilizadas, con objeto de establecer el período de tiempo durante el cual será observado el grupo, así como las características del mismo.

En lo que a tablas de mortalidad para seguros de vida se refiere, las observaciones representan a un grupo específico de la población, el cual generalmente será de clase económicamente alta, que tiene posibilidades de recibir una mejor atención médica y que además, son clasificados con una salud satisfactoria en el momento de contratación del seguro. En consecuencia, las tasas de mortalidad resultantes serán sustancialmente más bajas que las de la población general.

Dentro de las tablas específicas para seguros de vida, existen diferencias sustanciales, toda vez que la experiencia de siniestralidad entre asegurados que pertenecen a colectividades, y que generalmente contratan coberturas anuales, es diferente de la mortalidad de personas aseguradas con pólizas a largo plazo que adquieren pólizas de manera individual.

De tal forma que una tabla de mortalidad determinada en función de pólizas de seguro de vida individual, puede ser totalmente inadecuada para ser utilizada en pólizas anuales de seguro de grupo . Asimismo los seguros de muerte y de supervivencia, a pesar de ser complementarios, deben calcularse con tablas diferentes, cada una representativa de la experiencia de muerte o supervivencia, según se trate

CONSIDERACIONES PRELIMINARES.

En la construcción de una Tabla de mortalidad, un número de asegurados individuales, expuestos al riesgo de muerte son observados durante un período de tiempo. Tales observaciones pueden referirse tanto a pólizas como a montos de seguro, según corresponda.

La construcción de una tabla de mortalidad comprende dos fases fundamentales. Primero se construye una *tabla de tasas crudas*, que se refiere la probabilidad que tiene un individuo de edad x, de morir antes de alcanzar la edad x+1, de acuerdo a los datos observados, se denominan crudas, porque representan una forma totalmente imperfecta de los niveles de estabilización buscados.

El grado de imperfección, es por tanto diferente para cada edad, ya que depende directamente del volumen de la información observada, el cual no necesariamente es el mismo para toda la gama de edades, motivo por el cual la serie presenta un aspecto irregular.

La segunda fase, es el ajuste de la curva, el cual tiene como objetivo, precisamente eliminar tales irregularidades, sustituyendo la serie original por una regular que se estima existe, es decir se supone que la serie irregular solo es una representación grosera de la serie real, que refleja el comportamiento de ésta.

En primer término, los datos son reunidos y clasificados en una tabla que representa los muertos reales y los expuestos al riesgo, por edad y en algunas ocasiones por grupos de edades.

A continuación, cuando se han obtenido las tasas de mortalidad, esta tabla es graduada, mediante procedimientos que, por los elementos que los fundamentan, pueden ser gráficos y analíticos o matemáticos, que permiten obtener una curva suave y fiel a los datos observados.

EXPUESTOS AL RIESGO.

Para definir el concepto de Expuesto al Riesgo, consideremos un período de observación de un año y supongamos que la población, de la cual se pretende medir la mortalidad, está formada por varios grupos, cada uno de ellos integrado por ${}^{0}L_x$ personas vivas, de la misma edad al principio del año.

Supongase, además que cada uno de ellos es un «grupo cerrado», es decir que no son afectados, durante el año, por ningún movimiento diferente al de la muerte, es decir, entradas o salidas del grupo.

Definamos θ_x como el total de muertes ocurridas en el grupo, durante un intervalo anual:

$$\theta_x = \int_0^1 L_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

es decir, las muertes que ocurren en el intervalo infinitesimal de tiempo dt, entre las edades (x+t) y (x+t+dt) estarán dadas por $L_{x+t}\mu_{x+t}$.

Bajo este principio, se cumple:

$${}^{0}L_x = {}^{1}L_{x+1} + \theta_x \ ,$$

donde ${}^{1}L_{x+1}$, corresponde al total de vivos al final del año de observación, con edad cumplida x+1.

No obstante, en la realidad son pocos los grupos que presentan la característica de ser «cerrados», por el contrario, lo más común es encontrar grupos abiertos, es decir, que en el transcurso del año se ven afectados por entradas y salidas, diferentes a la muerte;

en las operaciones de seguro podemos citar emisión de nuevos contratos, rehabilitaciones, rescates y vencimientos, entre otros.

Al mismo tiempo, cabe mencionar que en nuestro país las compañías de seguros reportan al cierre del ejercicio fiscal, el 31 de diciembre; el total de pólizas y para el caso de seguros de grupo el total de certificados en vigor a la fecha de valuación.

En tales condiciones, para determinar las tasas crudas de mortalidad, es necesario un ajuste previo, que permita estimar el número de expuestos al principio del año.

Para tal efecto, consideremos el grupo inicial ${}^{0}P_x$, al principio de año, en el momento $t = 0$, acreditando a cada uno de ellos un tiempo de exposición al riesgo igual a uno, esto es el año durante el cual estarán en observación.

Asimismo, supóngase que el número de individuos de edad x, que entran al grupo de observación, entre t y t+dt, ($t < 1$) es $c_x(t)$; y que el número de individuos de edad x, que salen del grupo por causas distintas a la muerte entre t y t+dt, puede expresarse como $s_x(t)$; en esas condiciones Γ_x definido de manera general, es el tiempo total de exposición al riesgo de muerte durante el año de observación, para todos los individuos con edad x al principio del año.

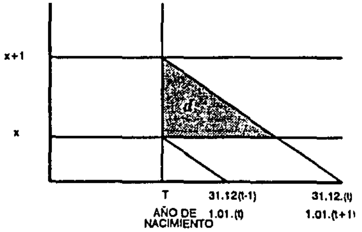
Para calcular Γ_x se debe, por tanto acreditar a cada uno de los entrantes un tiempo de exposición igual a ($1 - t$) y compensar a cada uno de los que salen, el mismo tiempo, de donde:

$$\Gamma_x = {}^{0}P_x + \int_0^1 (c_x(t) - s_x(t))\,(1-t)\,dt$$

Donde ${}^{0}P_x$ estará determinado como la suma de las pólizas en vigor al final del año en observación a edad cumplida x+1, más las muertes ocurridas en el transcurso del mismo, es decir:

$$ {}^{0}P_x = {}^{1}P_{x+1} + \theta_x $$

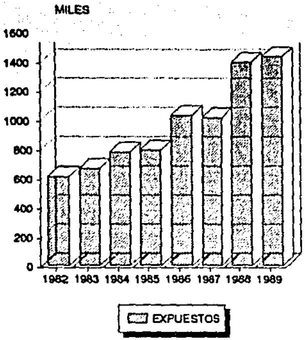
Situación que se puede demostrar mediante un diagrama de Lexis, el cual nos permite identificar en el tiempo las lineas de vida de los individuos desde su nacimiento hasta su muerte, es decir un sistema de ejes rectangulares en los que el tiempo es la absisa y la edad la ordenada, que nos muestra el total de pólizas de edad x+1, en vigor al 31 de diciembre, que corresponden a las de edad x, al principio del año, previa deducción de las muertes ocurridas en el transcurso del año, area sombreada.

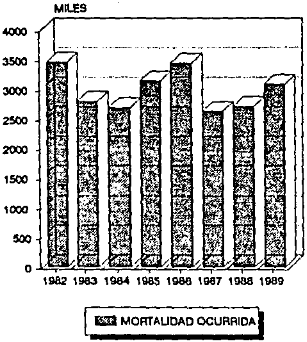


Para el caso de la mortalidad del sector asegurador mexicano, se reunió la experiencia de las instituciones de seguros durante el período 1982 a 1989, oteniendo un total de 6'688,024 expuestos al riesgo y 23,943 siniestros.

AÑO	EXPUESTOS AL RIESGO	MORTALIDAD OCURRIDA
1982	608,553	3,457
1983	666,064	2,797
1984	778,383	2,688
1985	792,915	3,139
1986	1,026,354	3,439
1987	1,011,928	2,626
1988	1,392,514	2,714
1989	1,431,178	3,083

A manera de referencia, cabe mencionar que para la tabla de mortalidad "Experiencia Mexicana 1962-1967", se tomaron como base en los estudios correspondientes 649,463 expuestos y 6,320 muertes ocurridas





Sin embargo, es difícil tener con precisión los valores de $c_x(t)$ y $s_x(t)$, ya que en términos generales, únicamente se conoce el total de entradas y salidas en el curso del período de observación.

De tal forma que si suponemos que estos movimientos se distribuyen uniformemente en el período y se definen C_x y S_x como el total observado en el año, Γ_x será:

$$\Gamma_x = {}^0P_x + (C_x - S_x)\int_0^1 (1-t)\,dt$$

$$\approx {}^0P_x + {}^1\!/_2(C_x - S_x)$$

De donde, los expuestos se pueden definir como:

$$E_x = {}^0P_x + {}^1\!/_2(C_x - S_x),$$

además se tiene que:

$$^{1}P_{x+1} = {}^{0}P_x + C_x - S_x - \theta_x ,$$

es decir:

$$E_x = {}^{1}/_{2}({}^{0}P_x + {}^{1}P_{x+1} + \theta_x)$$

$$= {}^{1}P_{x+1} + \theta_x$$

método conocido como ***Año Calendario Modificado.***

Ahora bien, es claro que el grupo que representa las nuevas entradas al grupo, también se ve modificado por el efecto de la mortalidad, de donde es razonable que debamos determinar la exposición para los vivos adicionales de tal manera que la tasa de mortalidad resultante no se altere.

Un factor de ajuste para las muertes entre las nuevas entradas, suponiendo una distribución uniforme puede ser:

$$\frac{c_x(t)\, q_x\, (1-t)}{1-tq_x} .$$

Por lo que se refiere a los retiros, también se considera el efecto equivalente y por tanto se debe determinar la función en la fracción 1-h para cada s_x retiros. Esta puede, entre otras formas determinarse como:

$$\frac{s_x(t)}{1-tq_x} ,$$

de tal manera que se generen exactamente los vivos de edad exacta x, que se necesitan para proporcionar s_x supervivientes.

El objetivo es, por tanto, determinar un término tal que en el caso ideal no produzca errores aleatorios y la tasa de mortalidad del grupo original permanezca inalterable, con la inclusión de nuevas entradas. Sin embargo la realidad es que este ideal nunca se consigue.

Además, para nuestro caso en particular no se tuvieron los datos relativos a entradas y salidas, por edad, sino únicamente valores agregados del total de cartera.

Del análisis efectuado, respecto a los movimientos observados durante el período 1982 a 1989, se determinó que el efecto de entradas y salidas del grupo, representaban aproximadamente una desviación de 0.00008, en las tasas brutas.

En estas condiciones, considerando además que el objetivo fundamental de incluir tales movimientos en el cálculo de los expuestos es, incrementar el número de datos con vista a reducir el tamaño del error aleatorio en los valores crudos de q_x, se estimó que tales errores, derivados de esta omisión se eliminan durante el proceso de ajuste, toda vez que estimarlos a partir de la información disponible, se convertía en una mera especulación, con un mayor riesgo de desviación, desde el punto de vista estadístico.

METODO DEL CENSO

Se dice que una tabla de mortalidad representa "la marcha a través de la vida, de un grupo de personas", sin embargo sería imposible hacer el seguimiento del grupo, desde su nacimiento hasta su extinción total.

En esas circunstancias, es necesario recurrir a métodos estadísticos que permitan inferir principios generales de comportamiento, para ser aplicados a una población con características similares. En tal sentido valga citar el principio fundamental de Ackland, que establece:

> "Toda persona de edad x, en observación durante t unidades de tiempo, en el intervalo de investigación que se considere, equivale, de acuerdo a los efectos de la formación de las clases de edades, a t personas de edades x, x+1, x+2, ..., x+t-1, puestas todas en observación durante una sola unidad de tiempo"

Con base en tal principio, se procedió a determinar el total de expuesto al riesgo, considerando el período de observación de 1982 a 1989.

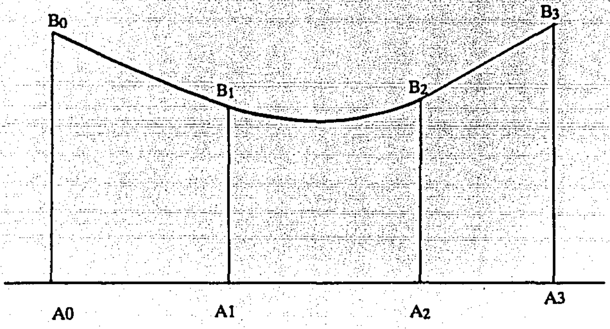
Para el cálculo de expuestos al riesgo existen diversos métodos, entre ellos cabe mencionar el conocido como Método del Censo.

Si consideramos, el total de expuestos al principio del período de observación P_x, el total de vivos entre las edades x y x+1 en el momento t, estará dado por ${}^tP_x$, si suponemos, además que el período cubre un número n de años, tenemos que el total de expuestos estará dado por:

$$E_x = \int_0^n {}^tP_x dt$$

A primera vista, este método para obtener Ex, no parece útil, dado que ${}^tP_x$, normalmente no puede ser expresado como una función de t, y por tanto no es fácil de integrar, por lo que es necesario recurrir a un método de aproximación, que en la práctica resulta de gran utilidad.

Consideremos el siguiente diagrama, que representa un período de observación de tres años.



La linea A_0A_3, representa el tiempo de observación del grupo, que se inicia en el momento A_0; Las ordenadas representan los valores de ${}^tP_x$, al hacer variar t, de 0 a 3, de tal forma que $B_0B_1B_2B_3$ es la gráfica de la función. El área bajo la curva, representa por tanto el tiempo total de exposición al riesgo del grupo, o de otra manera, el número total de vivos de edades entre x y x+1 al principio y al final de cada año completo.

Es decir, ${}^tE_x$ esta representado por el área $A_0A_3B_3B_0$, área que puede ser estimada con considerable exactitud. El numero de valores requerido, por supuesto depende de la extensión y naturaleza de los datos, es decir de la forma de la curva $B_0B_1B_2B_3$.

Para el período de un año, podemos suponer, en ausencia de cualquier información en contra, que sobre este período de observación la población a cualquier edad tiene incrementos y decrementos uniformes. De donde se observa que la gráfica de ${}^tP_x$ es una linea recta. Por tanto, el área $A_0A_1B_1B_0$ será un cuadrilátero de base unitaria y por tanto el área bajo la curva será la media de los valores inicial y final de las ordenada, es decir:

$$^1E_x = \int_0^1 {}^1P_x \, dt = {}^1\!/\!_2({}^0P_x + {}^1P_x)$$

Para un período de tres años, se tendrá:

$$Ex = {}^1\!/\!_2({}^0P_x) + {}^1P_x + {}^2P_x + {}^1\!/\!_2({}^3P_x)$$

y para un período de investigación de n años:

$$Ex = {}^1\!/\!_2({}^0P_x) + {}^1P_x + {}^2P_x + ... + {}^1\!/\!_2({}^nP_x)$$

$$= \tfrac{1}{2}({}^0P_x) + \sum_{t=1}^{n-1} {}^tP_x + \tfrac{1}{2}({}^nP_x)$$

$$= \tfrac{1}{2}({}^0P_x + {}^nP_x) + \sum_{t=1}^{n-1} {}^tP_x$$

Esta fórmula que expresa E_x en términos de valores ${}^tP_x$, es decir, del resultado anual de expuestos, se conoce como **Método del Censo.**

Para el caso práctico que se analiza, se consideró como período de observación de 1982 a 1989, de donde:

$$E_x = \tfrac{1}{2}({}^{82}P_x + {}^{89}P_x) + \sum_{t=83}^{88} {}^tP_x$$

y

$$\theta_x = \sum_{t=82}^{89} {}^t dx$$

En el caso de la tabla de mortalidad que se analiza, los resultados obtenidos, se muestran en el siguiente cudro:

EXPUESTOS Y MORTALIDAD OCURRIDA

edad	exptos	mort. o.	edad	exptos	mort. o.	edad	exptos.	mort. o.
12	9,203.0	16	42	211,408.5	509	72	12,116.5	786
13	7,001.0	2	43	201,843.0	574	73	10,888.0	260
14	16,768.0	3	44	188,313.5	630	74	9,822.5	277
15	10,445.0	4	45	174,223.0	591	75	8,752.5	227
16	9,654.0	0	46	162,347.5	617	76	7,762.5	188
17	16,102.5	7	47	151,459.5	623	77	6,973.5	171
18	18,442.0	9	48	141,042.5	626	78	6,392.0	194
19	20,408.0	15	49	128,595.5	581	79	5,440.0	177
20	25,173.0	14	50	117,505.5	562	80	4,758.5	127
21	33,359.5	23	51	106,745.5	629	81	4,286.5	166
22	50,374.5	27	52	98,154.0	535	82	3,799.0	113
23	74,561.0	37	53	87,818.0	647	83	3,222.0	108
24	99,480.5	80	54	79,525.0	617	84	2,588.0	109
25	122,342.5	106	55	72,288.0	562	85	5,841.5	88
26	147,954.5	108	56	65,234.5	513	86	1,259.5	156
27	165,651.0	183	57	59,083.5	542	87	913.5	52
28	184,425.5	182	58	52,445.0	530	88	775.0	37
29	201,460.0	233	59	48,508.0	540	89	635.5	42
30	218,085.5	265	60	44,817.5	563	90	618.0	32
31	231,340.5	276	61	40,417.0	473	91	448.0	17
32	242,170.0	277	62	36,168.0	423	92	337.5	15
33	249,538.5	312	63	32,128.5	492	93	291.0	21
34	254,078.5	318	64	28,208.5	380	94	186.5	15
35	261,217.0	347	65	24,342.0	379	95	160.0	10
36	260,378.0	364	66	20,805.0	373	96	101.0	5
37	258,114.5	388	67	18,746.5	310	97	60.5	9
38	250,332.5	443	68	17,329.0	315	98	64.5	3
39	242,261.5	446	69	15,277.5	329	99	35.5	5
40	231,921.0	517	70	13,819.0	277	100	17.5	25
41	224,367.0	456	71	14,268.5	308			

TASAS CRUDAS DE MORTALIDAD

La *tasa cruda de mortalidad* , se puede definir, por tanto como :

$$m_x = \frac{\theta_x}{E_x}$$

La cual se asimila en todas sus características a la ***Tasa Central de Mortalidad*** , por tanto, haciendo $E_x = L_x$, de (III.1) se tiene:

$$m_x = \frac{\theta_x}{l_x-(\frac{1}{2})d_x}$$

En esas condiciones, a partir de los datos observados, se determinan tasas centrales de mortalidad, sin embargo para fines prácticos, es necesario que la curva ajustada que se obtenga se refiera a tasas anuales de mortalidad, de donde se hace necesario efectuar la conversión, antes de iniciar el trabajo de ajuste de la curva.

En el caso de la tabla de mortalidad, objeto de análisis, se tienen las siguientes *tasas crudas* de mortalidad:

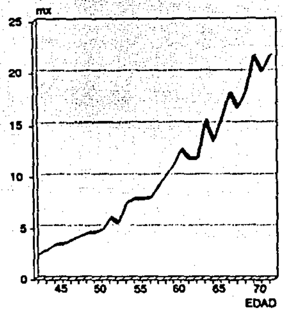
TASA CENTRAL DE MORTALIDAD CRUDA

EDAD	1000[mx]	EDAD	1000[mx]	EDAD	1000[mx]
12	1.73856	42	2.40766	72	64.87022
13	0.28567	43	2.84379	73	23.87950
14	0.17891	44	3.34549	74	28.20056
15	0.38296	45	3.39220	75	25.93545
16	0.00000	46	3.80049	76	24.21900
17	0.43472	47	4.11331	77	24.52140
18	0.48802	48	4.43838	78	30.35044
19	0.73501	49	4.51804	79	32.53676
20	0.55615	50	4.78275	80	26.68908
21	0.68946	51	5.89252	81	38.72623
22	0.53599	52	5.45062	82	29.74467
23	0.49624	53	7.36751	83	33.51955
24	0.80418	54	7.75857	84	42.11747
25	0.86642	55	7.77446	85	15.06462
26	0.72995	56	7.86394	86	123.85867
27	1.10473	57	9.17346	87	56.92392
28	0.98685	58	10.10583	88	47.4194
29	1.15656	59	11.13218	89	66.08969
30	1.21512	60	12.56206	90	51.77994
31	1.19305	61	11.70300	91	37.94643
32	1.14382	62	11.69542	92	44.44444
33	1.25031	63	15.31351	93	72.16495
34	1.25158	64	13.47112	94	80.42895
35	1.32840	65	15.56980	95	62.50000
36	1.39797	66	17.92838	96	49.50495
37	1.50321	67	16.53642	97	148.76033
38	1.76965	68	18.17762	98	46.51163
39	1.84099	69	21.53494	99	140.84507
40	2.22921	70	20.04487	100	1428.57143
41	2.03238	71	21.58601		

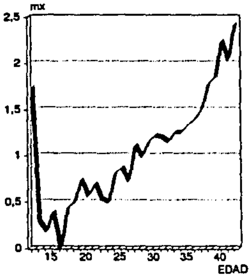
GRADUACION

En la construcción de tablas de mortalidad surge la necesidad de la graduación, debido a que la serie de tasas de mortalidad observadas presenta irregularidades, razón por la que se considera no son una representación adecuada de las verdaderas tasas de mortalidad.

Es claro que no existe ninguna ley de mortalidad, en el sentido de ley física, que permita conocer a priori y por tanto asegurar con certeza, cuál es el patrón básico de la mortalidad, por tanto es necesario hacer un análisis de las observaciones obtenidas de las tasas de mortalidad reales que se han experimentado y determinar una función que represente su tendencia.



Por principio se debe considerar que todos los vivos observados tienen el mismo patrón básico de mortalidad, ya que la inclusión de elementos no homogéneos puede invalidar el resultado como consecuencia de variaciones espurias.



No obstante al tratar con una materia tan compleja como la mortalidad humana, que varía según el sexo, la ocupación, los hábitos, la nacionalidad, el estado civil y fundamentalmente la edad, no es posible encontrar una verdadera homogeneidad en los datos sin reducir su volumen.

En consecuencia, desde el punto de vista práctico la homogeneidad de la información debe ser aceptada *per se.* No obstante para que los resultados sean fidedignos, es importante que los datos sean homogéneos hasta donde la práctica y las irregularidades observadas no sean atribuibles en gran medida a los defectos inherentes al material observado.

Dentro de lo posible, se supondrá que los datos son sustancialmente homogéneos, ya que esto se considerará para efectos de la graduación, pero los errores de los reportes, tales como la presencia sistemática por encima de lo establecido de edades muy altas presentes en el material de población, deberán ser corregidos.

A pesar de la eliminación de factores que pueden en sí mismos introducir irregularidades, una serie de tasas de mortalidad observadas siempre seguirá presentando irregularidades.

Este hecho puede demostrarse mediante la evaluación de la serie y de sus diferencias. Si los valores observados son trazados y unidos por segmentos de lineas rectas, la progresión de las tasas de mortalidad se fundirán de alguna manera, neutralizando las característica irregulares de tales observaciones.

Las series irregulares de valores observados que presentan variaciones continuas, como es el caso de las tasas de mortalidad, se deben someten a un proceso de graduación .

Como quedó establecido previamente, la curva fundamental de mortalidad se supone suave, regular y continua, por tanto, la graduación puede definirse como el proceso para obtener de una serie irregular de valores observados de una variable continua, una serie regular de valores consistentes, de manera general, con la serie de valores observados.

Esta serie suave o serie de valores graduados, una vez terminado el proceso, se toma como una representación de la ley fundamental que dio origen a la serie de valores observados.

Así, una serie de tasas de mortalidad observadas, mediante el proceso de graduación se sustituye por tasas de mortalidad graduadas, cercanas a los valores crudos pero mayores en algunas edades y menores en otras.

Estas tasas graduadas se obtienen modificando cada tasa observada con respecto a otra tasa observada, de modo que la nueva serie será suave, pero al mismo tiempo mostrará la tendencia indicada por la serie observada.

Una serie de valores observados F_x, se considera tiene dos componentes. El primero que existe una serie suave y regular a la cual se le puede asociar (G_x), independientemente de las fluctuaciones características de los datos observados.

El segundo es una superposición a la serie irregular, consistente de un arreglo casual de términos positivos y negativos que influirán en las irregularidades que se presentan en los datos observados ε_x, de tal manera que F_x, queda definido como:

$$F_x = G_x + \varepsilon_x ,$$

y si φ es un proceso de graduación aplicado a F_x para obtener la serie graduada Φ_x, tenemos simbólicamente:

$$\varphi\ (F_x) = \varphi\ (G_x) + \varphi\ (E)_x = \Phi_x ,$$

En cualquier proceso de graduación, ambos operadores G_x y E_x, deben ser tales que su aplicación produzca una redistribución y reducción de la serie ε_x, permitiendo errores positivos y negativos que se compensen unos con otros, y a la vez permita que la serie G_x sea sustancialmente uniforme.

Sin embargo, es mucho anticipar que la graduación saldrá completamente bien, eliminando el error de los componentes de la serie observada.

En consecuencia, se debe suponer que la serie graduada contendrá un elemento de error recidual y debe por tanto ser considerado como una representación de las tasas fundamentales antes que como la propia ley.

SUAVIZAMIENTO Y FIDELIDAD

Una buena graduación se caracteriza por dos cualidades esenciales, la Suavidad y la Fidelidad, o consistencia con los valores observados, esto significa que la serie graduada debe ser suave en comparación con la serie no graduada, pero al mismo tiempo, consistente con sus características propias.

No obstante la suavidad y fidelidad no son independientes una de la otra, ya que el suavizamiento de una serie observada de valores debe cambiar con los nuevos valores de la serie observada.

Generalmente un incremento en la suavidad da como resultado una reducción en la fidelidad. Contrariamente, cuando la serie graduada se dibuja cercana a la serie observada, mejora la fidelidad, pero la suavidad se ve modificada. La fidelidad óptima será, por tanto, la reproducción exacta de la serie observada, sin embargo, ésta no será completamente suave, es decir, no hay una graduación completa.

Las dos características son, por tanto, básicamente inconsistentes en el sentido que la suavidad puede no mejorarse más allá de un cierto punto, sin el sacrificio de la cerradura de la fidelidad y viceversa.

Como resultado, cualquier serie graduada debe mantenerse en un justo medio entre la fidelidad y la suavidad óptimas; esto debe representar el resultado de un compromiso entre ambas. En la práctica, generalmente un método de graduación debe permitir al graduador alguna libertad al escoger el peso relativo, conveniente tanto respecto a la suavidad, como a fidelidad de la serie graduada.

Ningún método puede presentar al mismo tiempo un máximo de ambos factores. Todos los métodos controlan o permiten el control del peso relativo conveniente en suavidad y fidelidad, aunque a través de cada método se encontrará de manera diferente. En la práctica, serán las características propias del problema quienes dicten la naturaleza y significación de uno con respecto al otro.

La graduación es propiamente un problema de índole matemático mediante el cual se hace una estimación de la serie de tasas verdaderas de mortalidad que, se supone, están asociadas a la serie irregular de probabilidades observadas.

Estudiosos en la materia, han desarrollado diversos modelos de graduación para series de datos observados. Entre los más comunes, encontramos los siguientes.

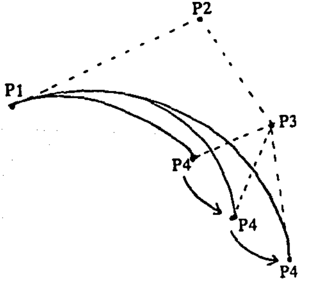
EL METODO GRAFICO.

El método gráfico surge naturalmente de la presentación diagramática de datos, fue el primero que se utilizó y se le atribuye a Joshua Milne, Actuario de la Sun Life Office de Londres, quién lo aplicó en la graduación de una de las primeras tablas de mortalidad, la "Tabla de Mortalidad Carlisle" publicada en 1815.

En el método gráfico, los valores observados son trazados convenientemente y sobre ellos se dibuja una curva suave y continua como base de la serie graduada.

El surgimiento de procedimientos matemáticos más exactos, hicieron que el método gráfico cayera aparentemente en desuso, sin embargo durante el proceso de graduación, invariablemente se hace necesario graficar tanto los datos observados, como los obtenidos a través del procedimiento que para tal efecto se ha elegido, mediante este procedimiento es posible observar el comportamiento de las curvas generadas y proceder, en su caso, a los ajustes necesarios.

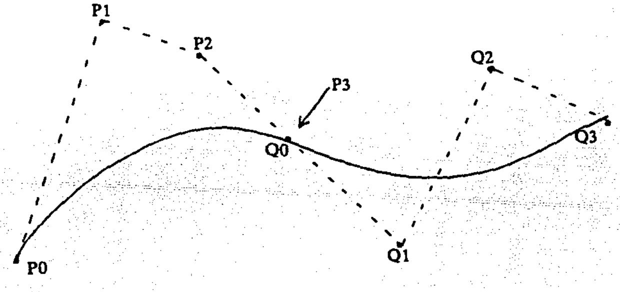
Además, el desarrollo de los sistemas de cómputo actuales, entre los que se tienen excelentes graficadores, brinda un extraordinario apoyo durante el proceso. Al mismo tiempo de que se han creado sistemas gráficos de ajuste de curvas que permiten observar el comportamiento de los datos y ajustarlos de manera precisa.



Entre estos cabe destacar el conocido como ajuste gráfico de Curvas de Bezier. Una curva de Bezier se asocia con los "vértices" de un polígono que define en forma única la forma de la curva. Sólo el primero y el último vértice del polígono realmente quedan sobre la curva, sin embargo, los otros vertices definen las derivadas, orden y forma de la curva. Asi la curva se define como poligono abierto, como se muestra en la gráfica. Puesto que la forma de la curva tendera a seguir la forma de poligono, cambiando los vertices de este poligono permite de manera intuitiva modificar el poligono hasta alcanzar la forma deseada.

En muchos casos se logran excelentes resultados con estos metodos, sin embargo existen serios inconvenientes que los convierten en inefectivos para el diseño de curvas interactivas "ab initio". Esto se debe al hecho de que el control de la forma de la curva mediante especificaciones numericas en ambas direcciones y magnitud no siempre proporcionan el suficiente sentimiento intuitivo requerido para el diseño de la curva.

Ademas conforme, se van "moviendo" los puntos pivote, previamente determinados, hasta obtener una curva "teóricamente" ajustada a la curva real de los datos, para eliminar las irregularidades que presentan los datos observados, se hace necesario para aumentar la flexibilidad agregar mas puntos hasta que la curva corresponda a la forma deseada.



LOS METODOS DE INTERPOLACION.

El método de interpolación fue el primer procedimiento de graduación de curvas, desarrollado con una base matemática que surgió después del método gráfico. Es utilizado fundamentalmente en estadísticas de población, donde su uso ha sido extensivo. Sin embargo, no obstante que ha estado circunscrito a material poblacional puede ser utilizado para tablas de mortalidad de seguros y otro tipo de datos.

Mediante el método de interpolación la serie graduada se obtiene interpolando entre puntos previamente determinados, conocidos como puntos pivote, considerados como representativos del grupo de edades entre las cuales se combinan los datos.

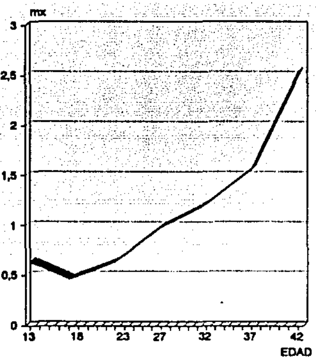
Toda vez que la graduación implica el reemplazo de una serie observada irregular.por una serie suave, regular y consistente con la tendencia de los valores observados, es necesario en primer término hacer un análisis del comportamiento de los datos, a fin de agruparlos de la mejor manera posible y poder tener la mejor tendencia de ellos.

A continuación se calculan los puntos representativos de la serie para posteriormente proceder a la interpolación, mediante el procedimiento matemático que se considere más adecuado.

AGRUPACION DE DATOS.

En esos términos, el primer paso previo a la interpolación, es la combinación de los datos en grupos, adecuados en tamaño y número, combinándolos por edades individuales.

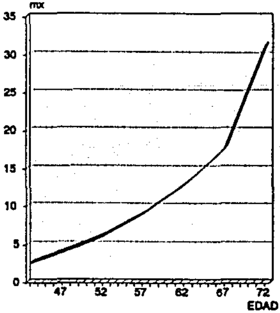
En el caso de poblaciones estadísticas, los datos usualmente son muy extensos de modo que la agrupación sirve para reducir los errores de observación. Sin embargo, es conveniente señalar que existen errores atribuíbles al reporte de la información, en ocasiones evidentes en un número considerable de datos a edades específicas, tales errores son diferentes a los errores de observación y tienden a introducir sesgos sistemáticos.



En esas condiciones es conveniente agrupar los datos con la esperanza de que distribuyéndolos entre las edades vecinas, los efectos de estos errores se eliminen o reduzcan su efecto sustancialmente. De tal manera que una buena selección en el agrupamiento de los datos, tiende a minimizar los errores detectados, compensando su efecto, una consecuencia inmediata se observa además en el aumento del volumen de información, lo que repercute de manera significativa en la confiabilidad de los resultados.

Para el caso particular que se analiza, como se mencionó anteriormente, se tenía un total de 6'688,024 expuestos y 23,943 muertes ocurridas, distribuidos por edades, de tal forma que un primer agrupamiento permitió un alto grado de confianza respecto a la eliminación de los posibles errores observados, este agrupamiento se hizo considerando rangos de cinco edades.

Es decir se agrupo por quinquenios, tomando 17 años como edad inicial, fundamentalmente con el propósito de eliminar la influencia de las edades menores que fueron detectadas en los reportes.



TASA CENTRAL DE MORTALIDAD

QUINQUENAL

edad	exptos	mort. o.	1000[mx]	edad	exptos	mort. o.	1000[mx]
13	32,972.0	21.0	0.63690	57	297,559.0	2,687.0	9.03014
17	75,051.5	35.0	0.46635	62	181,739.5	2,331.0	12.82605
22	282,948.5	181.0	0.63969	67	96,500.0	1,706.0	17.67876
27	821,833.5	812.0	0.98803	72	60,914.5	1,908.0	31.32259
32	1,195,213.0	1,448.0	1.21150	77	35,320.5	957.0	27.09475
37	1,272,303.5	1,988.0	1.56252	82	18,654.0	623.0	33.39766
42	1,057,853.0	2,686.0	2.53911	87	9,425.0	375.0	39.78780
47	757,668.0	3,038.0	4.00967	92	1,881.0	100.0	53.16321
52	489,748.0	2,990.0	6.10518	97	421.5	32.0	75.91934

PUNTOS PIVOTE.

El segundo paso en la aplicación del método es calcular los puntos especiales de interpolación, referidos como puntos pivote, sobre los que la interpolación se basa propiamente.

Toda vez que la interpolación depende de estos puntos pivote, es de gran importancia para los resultados del método que éstos sean representativos de los respectivos grupos y al mismo tiempo generen una serie suave.

Como el segmento de curva interpolada está sujeto a pasar sobre los puntos pivote o, en el método de interpolación modificada a pasar cerca de ellos, la serie entera tendrá el mismo modelo general de regularidad como la serie de puntos interpolados.

El método simple para obtener los puntos pivote supone que la proporción de muertos a expuestos es la tasa de mortalidad para la edad central del grupo.

Otro método utilizado es la fórmula de King, el cual proporciona un medio para calcular los valores pivote, U_x, a partir de tres de las cinco sumas quinquenales circunvecinas, W_x, en las cuales están agrupados los datos.

La fórmula basada en la suma de tres quinquenios, W_{x-5}, W_x y W_{x+5} y la corrección de la tercera diferencia, es:

$$U_x = 0.2W_x - 0.008(W_{x-5} - 2W_x + W_{x+5}). \qquad (IV.2)$$

TABLA A

EDAD	PUNTO PIVOTE	EDAD	PUNTO PIVOTE
13	0.00000	57	9.13101
17	0.00000	62	12.97257
22	0.59916	67	17.70026
27	0.97990	72	32.29158
32	1.20279	77	26.66560
37	1.54341	82	33.75153
42	2.54394	87	40.18979
47	4.03767	92	56.00811
52	6.16413	97	0.00000

La fórmula para quintas diferencias, involucra: W_{x-10}, W_{x-5}, W_x, W_{x+5} y W_{x+10}, y proporciona el método para calcular el valor pivote U_x de las sumas quinquenales que agrupan los datos.

$$U_x = 0.2W_x - 0.008(W_{x-5} - 2W_x + W_{x+5}) + 0.000896(W_{x-10} - 4W_{x-5} + 6W_x - 4W_{x+5} + W_{x+10})$$

Las fórmulas de King deben aplicarse por separado a expuestos y muertos. Los valores pivote de las tasas de mortalidad se obtendrán como el cociente de los pivotes de expuestos y muertos.

TABLA B

EDAD	PUNTO PIVOTE	EDAD	PUNTO PIVOTE
13	0.00000	57	9.13101
17	0.00000	62	12.97257
22	0.00000	67	17.70026
27	0.97983	72	32.29158
32	1.20332	77	26.66560
37	1.53916	82	33.75153
42	2.54696	87	40.18979
47	4.04134	92	56.00811
52	6.16852	97	0.00000

El método de King generalmente no dará puntos pivote satisfactorios a menos que los datos agrupados sean comparables con una serie suave. En algunos eventos, si la serie de puntos pivote no parece ser suave, entonces su suavidad puede incrementarse graduando los valores pivote gráficamente, antes de proceder con la interpolación.

Los puntos pivote resultantes del análisis de la serie que nos ocupa, calculados por ambos métodos se muestran en los cuadros A y B anteriores, para lo cual se consideró la suma de tres y cinco quinquenios, respectivamente. Para el proceso de graduación de la tabla se consideraron como puntos pivote los obtenidos a partir de cinco valores, por considerar que tenían, en general, una mayor representatividad de los valores observados.

LA INTERPOLACION.

El tercer paso en el procedimiento de graduación es la interpolación basada en los puntos pivote. Los valores intermedios pueden ser considerados como un segmento que surge de la curva de interpolación determinada por los puntos pivote, los cuales se supondrán numerados consecutivamente por intervalos quinquenales.

La necesidad de la interpolación surge del deseo de incrementar la suavidad de las series de valores interpolados. Para este proceso, pueden utilizarse las fórmulas de diferencias centrales de Gauss con buenos resultados.

Para interpolar las tasas de la tabla en comentario, se utilizó la denominada "Gauss hacia adelante", mediante la cual se determinan los valores interpolados aplicando la fórmula:

$$U_x = U_0 + x\Delta U_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 U_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta^3 U_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\Delta^4 U_{-2} + \dots$$

Ahora bien para encontrar los valores por edad se interpolaron los valores quinquenales. Para esto, partiendo del supuesto que si δU_x denota la primera diferencia para intervalos unitarios y ΔU_x la correspondiente a intervalos quinquenales, se tiene que U_{x+5}, puede expresarse como $(1+\delta)^5 U_x$ o como $(1+\Delta)U_x$, además como:

$$(1+\delta)^5 \equiv (1+\Delta)$$

$$\delta \equiv (1+\Delta)^{1/5} - 1,$$

se pueden encontrar facilmente las tasas por intervalos unitarios.

$$\delta U_x = (0.2\Delta - 0.08\Delta^2 + 0.048\Delta^3 - \ldots)\, U_x$$

$$\delta^2 U_x = (0.2\Delta - 0.08\Delta^2 + 0.048\Delta^3 - \ldots)^2\, U_x$$

$$= (0.04\,\Delta^2 - 0.032\,\Delta^3 + \ldots)\, U_x$$

$$\delta^3 U_x = (0.008\Delta^3 - \ldots)\, U_x$$

donde δ es la primera diferencia de los valores unitarios y Δ de los quinquenales.

La interpolación osculatoria, propuesta por el Dr. T.B. Sprage, también es utilizada con bastante amplitud para este proceso; las fórmulas de interpolación osculatoria, requieren dos arcos adyacentes para encontrar sus puntos pivote comunes, de tal manera que una o más de las derivadas sucesivas de la función de la curva de interpolación sean iguales.

Las fórmulas de interpolación producidas de esta manera resultan en valores interpolados que difieren de manera individual ligeramente de los valores dados por las fórmulas ordinarias de diferencias centrales, pero en conjunto generan una serie suave de un intervalo próximo.

La fórmula más simple de este tipo, basada en cuatro puntos pivote, es la llamada fórmula de Karup-King :

$$U_{x+s} = s\,U_{x+1} - \tfrac{1}{2}s^2(1-s)\delta^2 U_{x+1} + s'\,U_x - \tfrac{1}{2}s'^2(1-s')\delta^2 U_x$$

Sin embargo, para el caso real que se analiza, los valores obtenidos utilizando este procedimiento no mantenían una adecuada fidelidad con los puntos pivote, por lo que se optó por el método de Gauss, antes mencionado, ya que para edades mayores a 35 años el ajuste iba perdiendo efectividad, de tal forma que a mayores de 60 años definitivamente la desvición observada era significativamente alta. En esas condiciones se procedió al ajuste de la curva mediante un procedimiento analítico.

METODO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

El Profesor E. T. Whittaker de la Universidad de Edimburgo, fue el primero que enunció los principios del Método de Ecuaciones Diferenciales, en un documento publicado en 1919. Posteriormente, Roberto Henderson desarrolló un proceso práctico para emplear el método y aplicarlo a graduaciones numéricas.

Bases del Método

El método se fundamenta en la formulación de una expresión analítica que mide la combinación de suavidad y fidelidad.

La suavidad es medida mediante la suma de los mínimos cuadrados de la segundas diferencias de los valores graduados:

$$S = \sum(\Delta^2 q_x)^2 = \sum(q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x)^2;$$

La cerradura de fidelidad se mide a través de los mínimos de:

$$F = \sum(q_x - q_x")^2$$

La combinación de suavidad y fidelidad puede expresarse y medirse mediante:

$$F + h^*S,$$

donde h es un número positivo fijado por el peso relativo asignado a la suavidad y fidelidad. El mínimo de F+h*S para un valor dado h, será por tanto la graduación adecuada.

Diferentes valores de h producirán diferentes graduaciones. El valor seleccionado, controla las relaciones entre suavidad y fidelidad. Si h es pequeño, los valores graduados darán valores regularmente cercanos a los valores no graduados; cuando h se incrementa, la divergencia también crece hasta que el suavizamiento es favorable a la fidelidad.

El valor final de la escala $h = 0$, corresponde a los valores no graduados, toda la serie graduada será idéntica a la serie no graduada. Asimismo al final de la escala, $h = \infty$, resulta una línea recta de valores graduados, uno de los cuales debe estar ajustado a las q_x por el método de mínimos cuadrados.

La mejor graduación, de acuerdo con los supuestos establecidos, resultará cuando $F + h^*S$ sea lo más pequeño posible, es decir se observe un mínimo.

La ecuación diferencial se basa en el hecho de que cada $w+1$ valores de q_x graduadas pueden considerarse como una variable independiente, los valores de q_x no graduadas será un conjunto de constantes dadas.

La condición necesaria para que exista un mínimo consiste en hacer igual a cero cada derivada parcial de $F + h^*S$ con respecto a una variable independiente.

Sea q_x un caso particular q. Toda vez que estas son variables independientes, y si q_y es uno de los otros valores de q,

$$\frac{\partial q_y}{\partial q_x} = 0 ,$$

y toda vez que únicamente uno de los términos de F involucra a q_x, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial q_x} = \frac{\partial(q_x - q_x")}{\partial q_x} = 2(q_x - q_x")$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_x} = 2\,\delta^4 q_x$$

Resolviendo el sistema, el mínimo está dado por:

$$(q_x - q_x'') + h\,\delta^4 q_x = 0 \ ,$$

de donde:

$$q_x'' = q_x + h\,\delta^4 q_x$$

Esta relación es llamada una Ecuación Diferencial Lineal de cuarto orden. Las fórmulas de graduación basadas en este tipo de ecuaciones, son conocidas como fórmulas de graduación de Whittaken-Henderson Tipo A.

La metodologia para obtener la curva graduada es, en forma resumida, la siguientes:

1. Elegir un valor para la constante "a".

2. Se pueden obtener los valores de U^*_0 y U^*_1, en forma aproximada, graficando los primeros cuatro o cinco valores observados de U" y uniendolos mediante una linea recta o bien utilizando un procedimiento matematico de interpolacion, que permita conocer tales valores.

3. Calcular los valores iniciales U'_{-2} y U'_{-1}, a partir de:

$$U'_{-2} = U^*_0 - (a+2)\,\Delta U^*_0$$

$$U'_{-1} = U^*_1 - (a+2)\,\Delta U^*_0$$

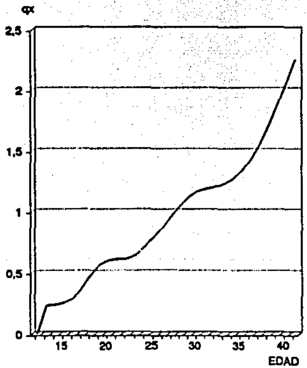
4. Calcular los valores estimados U'_0 y U'_1 a partir de :

$$U'_x = \left[\frac{2a}{(a+1)}\right] U'_{x-1} - \left[\frac{a}{(a+2)}\right] U'_x + \left[\frac{2}{(a+1)(a+2)}\right] U'^{x}$$

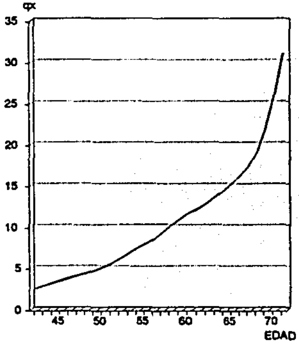
$$U_x = \left[\frac{2a}{(a+1)}\right] U_{x-1} - \left[\frac{a}{(a+2)}\right] U_x + \left[\frac{2}{(a+1)(a+2)}\right] U'^{x}$$

$$U_{\omega-1} = U'_{\omega-1} + a\,\Delta\, U'_{\omega-1}$$

$$U_{\omega} = U'_{\omega} + a\,\Delta\, U'_{\omega-1}$$



Para nuestro ejemplo, de acuerdo con los principios antes señalados, se consideró importante mantener la fidelidad de los datos, razón por la que se optó por el proceso derivado, para el valor "a = 1", obteniendo así una curva suave y continua de **Tasas Brutas de Mortalidad.**



Las tasas obtenidas, se recargaron, con una márgen de seguridad y se graduaron para obtener las tasas básicas representativas de la mortalidad ocurrida en el sector asegurador, durante el período 1982-1989.

TASAS BRUTAS

EDAD	1000[qx]	EDAD	1000[qx]	EDAD	1000[qx]
13	0.23	43	2.83	73	33.39
14	0.23	44	3.16	74	30.37
15	0.25	45	3.47	75	27.75
16	0.28	46	3.76	76	26.39
17	0.38	47	4.05	77	26.59
18	0.48	48	4.33	78	27.91
19	0.57	49	4.64	79	29.21
20	0.60	50	5.04	80	30.17
21	0.61	51	5.56	81	31.59
22	0.61	52	6.13	82	33.09
23	0.64	53	6.79	83	36.70
24	0.72	54	7.37	84	43.29
25	0.80	55	7.88	85	52.71
26	0.88	56	8.46	86	64.41
27	0.98	57	9.23	87	65.27
28	1.05	58	10.09	88	62.02
29	1.12	59	10.94	89	58.57
30	1.16	60	11.66	90	54.11
31	1.18	61	12.21	91	50.30
32	1.20	62	12.85	92	48.05
33	1.23	63	13.69	93	44.13
34	1.27	64	14.41	94	34.12
35	1.33	65	15.28	95	22.96
36	1.42	66	16.22	96	31.00
37	1.55	67	17.27	97	91.79
38	1.70	68	19.04	98	245.04
39	1.87	69	21.88	99	549.45
40	2.05	70	25.88	100	665.57
41	2.24	71	30.97		
42	2.51	72	35.18		

MARGEN DE SEGURIDAD

Uno de los objetivos que se persigue al realizar estudios de esta naturaleza, como ya se mencionó, es que pueda aplicarse durante un período relativamente largo, fundamentalmente considerando que en el caso de los seguros de vida individual, será utilizada para el cálculo de primas y reservas.

En ese sentido se hace necesario preveer posibles desviaciones que pudieren presentarse en el tiempo, para este efecto se determina una función que permita recargar las tasas de manera previa al ajuste, y obtener de esta manera una curva elevada sobre los datos originales.

La función debe exhibir una suavidad y continuidad progresiva de término en término. Las pruebas de suavidad, por lo tanto, se acostumbra aplicarlas a las tasas de mortalidad graduadas.

La tasas de mortalidad apara adultos jóvenes, entre los 20 a 35 años, generalmente presentan fuertes variaciones. Algunas veces pueden exhibir una leve elevación seguida de un declive, el cual aparece como un escollo en la tabla de mortalidad.

Las curvas de Gompertz y Makeham tienen un mínimo y un máximo o puntos de inflexión y no son adaptables sin modificar sus peculiaridades como las que se presentan a edades jóvenes.

El márgen previsto para la tabla de mortalidad que se analiza, se determinó a partir de la curva:

$$\rho\, \mathring{e}_x = a + bx + cx^2 ,$$

Esto es :

$$\rho = \frac{a + bx + cx^2}{\mathring{e}_x}.$$

Donde $\mathring{e}_x$, es la *Esperanza de Vida Completa*, definida como:

$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, dt$$

Por las características de la información, fue necesario segmentar la tabla en tres intervalos, de 12 a 32 años, de 33 a 71 y de 72 en adelante; cabe señalar que los límites de cada uno de los intervalos se determinó en función de la continuidad de la curva, esto es, se evitó que al aplicar cada una una de las curvas resultantes en sus respectivos intervalos, dieran un "brinco", que significara pérdida de suavidad o fidelidad de la curva graduada.

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultantes, se obtuvieron los siguientes valores:

CONSTANTES

RANGO DE EDAD	a	b	c
12 - 32	0.034	0.00015	0.00002
33 - 71	0.035	0.00015	0.0000095
mas de 72	0.10	0.0	0.0

GRADUACION POR FORMULAS MATEMATICAS

La graduación por fórmulas matemáticas, o curvas ajustadas, para distinguirlas de otros métodos de graduación, fue desarrollada primeramente fuera del campo del Actuario. Existe una gran variedad de curvas que pueden ser usadas en representación de diferentes tipos de datos estadísticos, éstas van desde la simple linea recta hasta la familia de curvas de frecuencia desarrolladas por Karl Pearson y el sistema de curvas de Gram-Charlier, Poisson y Fourier.

Las curvas comunmente usadas y de interés máximo para el Actuario en el tratamiento de tablas de mortalidad son las curvas de Gompertz y de Makeham, y fueron desarrolladas buscando una ley de mortalidad.

Su uso tiene la ventaja de permitir la aplicación del principio de envejecimiento uniforme, de modo que hay una gran simplificación de cálculo para funciones de Vida Conjunta, Anualidades, Primas y Reservas.

La serie graduada mediante este método de graduación está representada por una curva matemática ajustada a los datos.

La aplicación del método implica dos pasos:

- La elección de la forma de la curva que representa la serie graduada.
- La determinación de las constantes.

Las curvas matemáticas elegidas para este propósito son suaves, continuas, diferenciables y generalmente dependen de pocos parámetros. La parábola, la curva de probabilidades Normal, y la curva de Gompertz- Makeham son ejemplos de tales curvas. Mientras las pruebas aplicables a los datos son relativamente fáciles, la selección de un tipo apropiado de curva requiere de mayor experiencia por parte del actuario que realiza la graduación.

La curva ajustada, esto es la determinación de las constantes de la curva, generalmente se hace por el método de momentos de mínimos cuadrados o mediante la modificación de ellos. Se acostumbra que los valores graduados y no graduados concuerden en su totalidad, al menos en su primer momento.

Las tasas graduadas de mortalidad pueden obtenerse mediante la graduación de expuestos y muertos por separado. Sin embargo como éstos no son independientes, mediante tal procedimiento no se puede tener conocimiento de la conexión existente entre expuestos y muertos a la misma edad.

LAS FORMULAS DE GOMPERTZ Y MAKEHAM

Las fórmulas de Gompertz y Makeham han sido empleadas frecuentemente para graduar curvas de mortalidad. Estas se obtienen de manera regular sobre un rango relativamente extenso de edades de alrededor de veinte edades hasta el límite de la tabla.

Las fórmulas son expresadas de diferentes maneras: en términos de los vivos, l_x; la fuerza de mortalidad, μ_x ; y el cologaritmo de la probabilidad de vida, colog p_x .

El modelo de Gompertz-Makeham realmente trata de dos modelos, conocidos como "Ley de Gompertz" y "Ley de Makeham", respectivamente. La primera se basa en el supuesto que el riesgo de muerte, esto es la Fuerza de Mortalidad, se incrementa en forma geométrica, y se expresa en términos matemáticos como:

$$\mu_x = B\,c^x$$

En tanto que el modelo de Makeham, modifica la fórmula de Gompetz, al considerar que la fuerza de mortalidad está determinada por dos elementos, uno constante que se refiere a las fuerzas externas que dan origen a la muerte y el otro que se incrementa de manera geométrica en el curso de la vida y que se refiere a la pérdida natural del vigor en el ser humano.

En atención a tal razonamiento, el modelo de Gompertz, fue prácticamente abandonado y sustituido por el de Makeham. Las principales funciones biométricas quedan, por tanto definidas como:

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$

$$\mu_x = A + B c^x$$

LAS CONSTANTES DE MAKEHAM

Un método para determinar las constantes de makeham, distingue dos posibilidades. En la primera, una curva es fiel a los datos ya suaves, que presumiblemente ya fueron graduados por algún otro medio. En la segunda, la fórmula de Makeham se basa directamente sobre los datos observados.

En el primer caso, puede obtenerse una fidelidad satisfactoria con mayor seguridad escogiendo cuatro puntos equidistante de l_x y resolviendo el conjunto de ecuaciones simultáneas resultantes, esto es:

$$\text{Log}_e\, l_x = \text{Log}_e\, k + x\,\text{Log}_e\, s + c^x\,\text{Log}_e\, g$$

$$\text{Log}_e\, l_{x+t} = \text{Log}_e\, k + (x+t)\,\text{Log}_e\, s + c^{x+t}\,\text{Log}_e\, g$$

$$\text{Log}_e\, l_{x+2t} = \text{Log}_e\, k + (x+2t)\,\text{Log}_e\, s + c^{x+2t}\,\text{Log}_e\, g$$

$$\text{Log}_e\, l_{x+3t} = \text{Log}_e\, k + (x+3t)\,\text{Log}_e\, s + c^{x+3t}\,\text{Log}_e\, g$$

Para la seguna posibilidad, no es aconsejable determinar los valores numéricos de las constantes utilizando puntos aislados. Debido a las irregularidades de las series observadas, los diferentes conjuntos de puntos pueden producir variaciones completas de los valores.

Entonces no es posible elegir cuatro puntos de antemano con la seguridad de obtener una representación adecuada de los datos. Por esta razón, cuando la graduación se basa directamente en los datos observados, la serie debe graduarse de antemano a fin de tener una curva suave. Esto implica el uso de todos o de gran parte de los datos y consecuentemente habrá una mayor fidelidad a la serie subyacente.

Método de King-Hardy para el cálculo de los valores

El valor de las constantes se puede determinar, utilizando el procedimiento propuesto por G.F.Hardy, quíen sugirió agrupar los valores quinquenales calculados de los datos, y aplicar la fórmula de King a los valores agrupados.

Ahora bien, recordemos que hasta ahora hemos aplicado el proceso de graduación a tasas centrales de mortalidad, por lo que es preciso, antes de proceder al ajuste de la curva, determinar la probabilidad de muerte q_x, a partir de la definición:

$$q_x = \frac{2\,m_x}{2+m_x}$$

Además como :

$$p_x = 1 - q_x,$$

y

$${}_tp_x = \prod_{i=1}^{n-1} p_{x+i} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Se tiene:

$$\text{Log}_e\, lx = \text{Log}_e k + x\, \text{Log}_e s + c^x\, \text{Log}_e g\,,$$

$$\text{Log}_e\, {}_tp_x = t\, \text{Log}_e s + c^x\,(c^t - 1)\, \text{Log}_e g$$

Ahora bien, tomando cuatro grupos de edades equidistantes y tomando primeras diferencias, se tiene:

$$\Delta\ \text{Log}_e\, {}_tp_x = c^x\,(c^t-1)^2\, \text{Log}_e g$$

$$c^t = \frac{\Delta\ \text{Log}_e\, {}_tp_{(x+t)}}{\Delta\ \text{Log}_e\, {}_tp_x}$$

$$\text{Log}_e g = \frac{\Delta \text{Log}_e\, {}_tp_x}{c^x(c^t-1)^2}$$

$$\text{Log}_e s = 1/t\, \{\ Log_e\, {}_tp_x - c^x(c^t-1)\, Log_e g\, \}$$

$$\text{Log}_e c = 1/t\, \{\ \Delta\, Log_e\, {}_tp_{x+t} - \Delta\, Log_e\, {}_tp_x\ \}$$

Es claro que los valores de las constantes de Makeham se obtienen a partir de:

$$c = Antilog_e\, \{\, 1/t\ [\ \ \Delta\, Log_e\, {}_tp_{x+t} - \Delta\, Log_e\, {}_tp_x\ ]\, \}$$

$$A = -\mathrm{Log}_e\, s$$

$$B = -(Log_e\, c)(Log_e\, g)$$

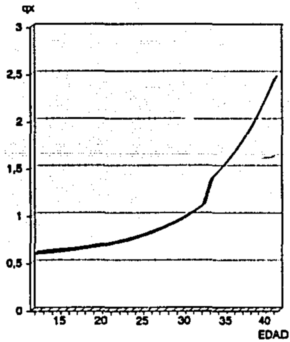
El valor de la constante c, debe ser tal que $\log_{10} c$ generalmente se encuentre entre 0.035 y 0.045. Por tanto los valores de A y B, estarán en el intervalo:

$$0.001 < A < 0.003$$

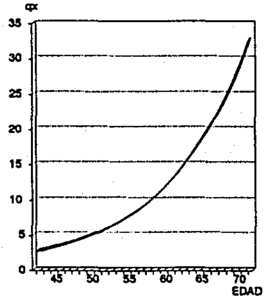
$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1.08 < c < 1.12$$

TABLA DE MORTALIDAD MODIFICADA



A partir de los valores obtenidos, se obtienen las tasas de probabilidad, que forman la tabla de mortalidad, toda vez que éstas tienen un recargo para cubrir posibles



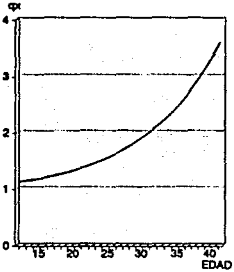
desviaciones se conocen como **tasas modificadas**. Del trabajo desarrollado a partir de los datos del mercado mexicano se obtuvieron los siguientes valores, que representan la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989, para ea el Seguro de Vida Individual.

TASAS MODIFICADAS

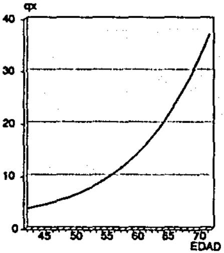
EDAD	1000(qx)	EDAD	1000(qx)	EDAD	1000(qx)
12	1.12	42	3.84	72	40.24
13	1.14	43	4.11	73	43.75
14	1.16	44	4.40	74	47.55
15	1.19	45	4.72	75	51.69
16	1.21	46	5.07	76	56.18
17	1.24	47	5.45	77	61.05
18	1.27	48	5.86	78	66.34
19	1.30	49	6.31	79	72.08
20	1.34	50	6.80	80	78.29
21	1.38	51	7.33	81	85.03
22	1.42	52	7.91	82	92.32
23	1.47	53	8.55	83	100.21
24	1.52	54	9.24	84	108.74
25	1.57	55	10.00	85	117.96
26	1.64	56	10.82	86	127.90
27	1.70	57	11.72	87	138.62
28	1.77	58	12.69	88	150.17
29	1.85	59	13.76	89	162.59
30	1.94	60	14.92	90	175.93
31	2.03	61	16.19	91	190.25
32	2.14	62	17.57	92	205.58
33	2.25	63	19.07	93	221.98
34	2.37	64	20.70	94	239.48
35	2.50	65	22.49	95	258.13
36	2.65	66	24.43	96	277.95
37	2.81	67	26.54	97	298.98
38	2.98	68	28.84	98	321.21
39	3.17	69	31.34	99	1000.00
40	3.38	70	34.06		
41	3.60	71	37.02		

TABLA DE MORTALIDAD BASICA

Por último a partir de los valores ajustados se determinan los valores básicos, deduciendo a estos los márgenes de seguridad con los que fueron recargadas las tasas brutas, de donde se obtiene la Tabla de Mortalidad Básica.



Los valores correspondientes a la Tabla de Mortalidad Mexicana se muestran en el siguiente cuadro:



TASAS BASICAS

EDAD	1000[qx]	EDAD	1000[qx]	EDAD	1000[qx]
12	0.60	42	2.65	72	34.33
13	0.61	43	2.87	73	37.68
14	0.61	44	3.11	74	41.29
15	0.62	45	3.38	75	45.20
16	0.63	46	3.67	76	49.43
17	0.64	47	3.99	77	54.02
18	0.65	48	4.35	78	58.99
19	0.67	49	4.73	79	64.39
20	0.68	50	5.15	80	70.22
21	0.70	51	5.62	81	76.54
22	0.72	52	6.12	82	83.37
23	0.74	53	6.68	83	90.76
24	0.77	54	7.29	84	98.77
25	0.79	55	7.96	85	107.50
26	0.82	56	8.69	86	117.01
27	0.86	57	9.49	87	127.25
28	0.90	58	10.36	88	138.17
29	0.94	59	11.32	89	149.81
30	0.99	60	12.37	90	162.13
31	1.04	61	13.51	91	175.10
32	1.10	62	14.76	92	188.66
33	1.38	63	16.13	93	202.59
34	1.47	64	17.62	94	239.48
35	1.58	65	19.24	95	258.13
36	1.69	66	21.02	96	277.95
37	1.81	67	22.96	97	298.98
38	1.95	68	25.07	98	321.21
39	2.10	69	27.39	99	1000.00
40	2.27	70	29.92		
41	2.45	71	32.70		

CONCLUSIONES

Tal y como ha quedado definido, la graduación es un procedimiento mediante el cual se obtiene de una serie irregular de valores observados, una regular y continua compatible y representativa de dichas observaciones, no obstante la graduación debe perseguir además, conseguir esta regularidad sin distorsionar la información, de manera que el trabajo realizado debe llevarse a cabo con un alto grado de profesionalismo, eliminando todo interés personal y manteniendo única y exclusivamente el de la mutualidad para el cual va dirigido.

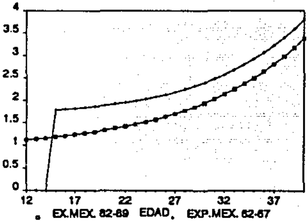
La selección del método de graduación de cualquier manera representa un reto para el actuario que la realiza, ya que depende en cierta forma de características de los datos que se pretenden graduar, adquiriendo al mismo tiempo el compromiso de mantener uniformidad y ajuste, cuidando que la curva resultante no sea inconsistente con la ley de mortalidad fundamental.

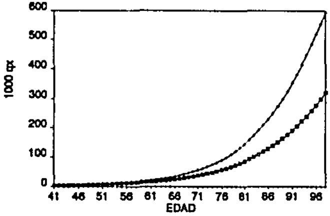
El presente trabajo, realizado con base en la experiencia de la mortalidad ocurrida en el sector asegurador mexicano, durante el período de 1982 a 1989 pretende proporcionar una base demográfica actualizada para el cálculo de primas y reservas, representativa de la mutualidad asegurada, que permita un sano desarrollo del sector y un elemento de competencia ante la posible apertura de éste a mercados internacionales.

Como resultado del estudio efectuado, se obtuvo la tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982- 1989, la que a partir del 1° de mayo del presente año, es la Base Demográfica Legal para el cálculo de Primas y Reservas en el Sector Asegurador Mexicano. Labor por demás significativa si se toma en cuenta la importancia que este elemento tiene para el desarrollo del seguro.

Las tasas de mortalidad resultantes significan una reducción, respecto a la utilizada desde 1970 de aproximadamente el 27% en promedio, como puede observarse en los cuadros adjuntos.

EDAD	EXPERIENCIA MEXICANA 1982-1989	1962-1967	DIFERENCIA	%
12	1.120	0	1.120	0.000
13	1.140	0	1.140	0.000
14	1.160	0	1.160	0.000
15	1.190	1.781	-0.591	-0.332
16	1.210	1.799	-0.589	-0.327
17	1.240	1.819	-0.579	-0.318
18	1.270	1.841	-0.571	-0.310
19	1.300	1.866	-0.566	-0.303
20	1.340	1.893	-0.553	-0.292
21	1.380	1.923	-0.543	-0.282
22	1.420	1.957	-0.537	-0.274
23	1.470	1.994	-0.524	-0.263
24	1.520	2.035	-0.515	-0.253
25	1.570	2.080	-0.510	-0.245
26	1.640	2.131	-0.491	-0.230
27	1.700	2.187	-0.487	-0.223
28	1.770	2.249	-0.479	-0.213
29	1.850	2.318	-0.468	-0.202
30	1.940	2.395	-0.455	-0.190
31	2.030	2.480	-0.450	-0.181
32	2.140	2.574	-0.434	-0.169
33	2.250	2.679	-0.429	-0.160
34	2.370	2.795	-0.425	-0.152
35	2.500	2.923	-0.423	-0.145
36	2.650	3.066	-0.416	-0.136
37	2.810	3.224	-0.414	-0.128
38	2.980	3.399	-0.419	-0.123
39	3.170	3.594	-0.424	-0.118
40	3.380	3.809	-0.429	-0.113





EDAD	EXPERIENCIA MEXICANA 1982-1989	1962-1967	DIFERENCIA	%
41	3.600	4.048	-0.448	-0.111
42	3.840	4.314	-0.474	-0.110
43	4.110	4.608	-0.498	-0.108
44	4.400	4.934	-0.534	-0.108
45	4.720	5.295	-0.575	-0.109
46	5.070	5.696	-0.626	-0.110
47	5.450	6.141	-0.691	-0.113
48	5.860	6.634	-0.774	-0.117
49	6.310	7.180	-0.870	-0.121
50	6.800	7.786	-0.986	-0.127
51	7.330	8.457	-1.127	-0.133
52	7.910	9.201	-1.291	-0.140
53	8.550	10.026	-1.476	-0.147
54	9.240	10.940	-1.700	-0.155
55	10.000	11.954	-1.954	-0.163
56	10.820	13.076	-2.256	-0.173
57	11.720	14.320	-2.600	-0.182
58	12.690	15.697	-3.007	-0.192
59	13.760	17.223	-3.463	-0.201
60	14.920	18.912	-3.992	-0.211
61	16.190	20.783	-4.593	-0.221
62	17.570	22.854	-5.284	-0.231
63	19.070	25.146	-6.076	-0.242
64	20.700	27.682	-6.982	-0.252
65	22.490	30.488	-7.998	-0.262
66	24.430	33.590	-9.160	-0.273
67	26.540	37.019	-10.479	-0.283

En otro órden de ideas, dado que el contenido de este trabajo es por sí mismo de gran interés para el trabajo del Actuario, considero que los temas tratados no han sido agotados, antes bien para su profundidad, se han presentado en forma por demás breve, dado el espacio de que se dispone.

Asimismo, quiero dejar patente el anhelo, aún cuando aparentemente suene pretencioso, de que el presente trabajo despierte en quien lo lea un deseo de profundizar en los temas tratados, desde un punto de vista científico ya que el abordarlos y estudiarlos de manera sitemática, brinda una extraordinaria oportunidad de desarrollo profesional.

En lo personal, nunca he pretendido apropiarme de los estudios mencionados que son de todos conocidos, en todo caso el mérito, será la aplicación práctica, así como la investigación y estudio, el cual traté de hacer de la manera más profunda de que fuí capaz, dada la enorme responsabilidad que implicaba una tarea de esta naturaleza.

Sin lugar a dudas, como toda obra humana es perfectible, y en el breve plazo tal vez surjan trabajos similares abordados desde otro punto de vista o mediante técnicas diferentes, o de manera optimista, que de ninguna manera dudo, con técnicas totalmente nuevas, resultado de estudios de investigación de Actuarios Mexicanos, lo cual por si mismo será una enorme satisfación.

Pra finalizar, cabe hacer una mención especial a la invaluable oportunidad que la vida me brindó al disponer de la información reunida a través de los años, que analizada y depurada convenientemente, ha servido de base para el presente estudio, y que representó la gran responsabilidad de obtener resultados confiables y dignos de la Institución a la que me precio pertenecer, y que en lo personal significó para mi la mayor experiencia profesional que pude haber tenido, que me obligó a un estudio constante que me ha permitido adquirir una gran experiencia profesional.

BIBIBLIOGRAFIA

ACTUARIAL MATHEMATICS.

Harry Freeman, M.A., F.I.A.

ACTUARIAL STATISTICS.

H. Tettley, M.A., F.I.A.

Volumen I.

CONSTRUCTION OF MORTALITY AND OTHER TABLES.

J. L. Anderson, B. A., F.I.A.,

J.B. Down, M.A., F.F.A.

ELEMENTOS DE CALCULO ACTUARIAL.

José González Galé.

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA.

Elmer B. Mode.

ELEMENTS OF GRADUATION.

Morton D. Miller.

EL SEGURO DE VIDA.

John H. Magee.

IINTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTADISTICA

Alexander M. Mood.

Franklin A. Graybill.

INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

William Feller

LIFE CONTINGENCIES.

Ch. W. Jordan.

LIFE CONTINGENCIES.

E.F. Spurgeon, F.I.A.

MATEMATICA DEL SEGURO.

Antonio Lasheras Sanz.

MATEMATICA DEL SEGURO.

Heinrich Türler .

STATISTICS AND GRADUATION

H. Tettley, M.A., F.I.A.

Volumen II

THE THEORY OF PROBABILITY

B. V. Gnedenko.