2
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PITAGORISMO E INCONMENSURABILIDAD EN LOS SIGLOS V Y IV A. C.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LA

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

JUAN MANUEL AMEZCUA CARDIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO GARCIADIEGO DANTAN

MEXICO, D. F. 1992

PITAGORISMO E INCONMENSURABILIDAD EN LOS SIGLOS V Y IV A.C.

por JUAN MANUEL AMEZCUA CARDIEL.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

Invierno de 1991-Primavera de 1992.

TABLA DE CONTENIDOS:

PREFACIO.

Desde el nómbre mismo de inconmensurable (irracional, se usará mas tarde), se registra implícitamente un acontecimiento trascendental en el umbral de un desarrollo extraordinario de la Filosofía y la Matemática Griega de los siglos V y IV a.c. Investigadores renombrados, desde Platón y Arístóteles hasta los contemporaneos, han incidido en la búsqueda de la restauración de esa parte de la historia de la Matemática, colocando los bloques del edificio teórico sobre el que se elevan los inconmensurables. Sin embargo, a mas de 2000 años de su hallazgo, continuan existiendo huecos e incognitas sin resolver para una reconstrucción plenamente consensada de su teorizacion en el ámbito de la razón matematica y filosófica. El propósito teórico de ésta Tesis consiste en contribuir con elementos que a mi juicio no se han considerado calibradamente dentro de las reconstrucciones existentes de la Teoría de los inconmensurables, para tratar de contribuir, modestamente, en la discusión del marco escenográfico y organico que dio cuerpo a dicha teoria. Estos elementos, a pesar de las dificultades de caracter filologico, geográfico y cronológico para la realizacion de una Tesis de esta naturaleza en este país y en estos momentos, intentarán remarcar la brecha de factores globalmente históricos en los que se habria delineado el paisaje natural del surgimiento de los Inconmensurables, trataran de cuestionar algunos supuestos matemáticos, filosóficos o históricos, en los que se fincan reconstrucciones contemporaneas, y que despiertan dudas de su validés, pero sobretodo tratarán de dar a entender el peso especifico que tuvieron el Pitagorismo y el desenvolvimiento del pensamiento filosofico del siglo V a.c.en la conformación de los Inconmensurables. Con esto, desde ya, sometería a discusión las conclusiones que de su estudio derivo.

No conforme con el tratamiento, casi Aristotélico, que diversos autores dan en las elaboraciones filosóficas y Matemáticas que propiciaron la conformacion de La Teoria de Los Inconmensurables, sin caer en una valoración apriori de supuestos ideológicos o esquemas ya cáducos en esta decada de grandes cambios mundiales, en el Capitulo I intento dar una mezcla de los factores objetivos y subjetivos del contexto histórico del pitagorismo del siglo V a.c., tratándolo de reconstruir con los fragmentos de consenso entre los historiadores mediante aproximaciones, como buscando evitar obtener conclusiones de lo no posible. En el capítulo II abordo la examinacion del concepto mismo de inconmensurabilidad y el sigzagueo de que es objeto al enfrentar los vientos de su evolución e interpretaciones, para tratar de obtener los elementos de las distintas reconstrucciones de la teoria de los inconmensurables e intentar evaluar los elementos que le reconstruyan con más viabilidad. Y en el capítulo III se expone una sintesis de la Teoria de los inconmensurables, a partir de exposiciones vigentes de autores contemporaneos, como tratando de encontrar el punto culminante de su desarrollo. Desde el desarrollo de las tres partes de esta Tesis, quien escribe toma la iniciativa de poner a discusión sus conclusiones que pudieran ser mas relevantes y/o polémicas.

Capitulo I: EL PITAGORISMO Y SU CONTEXTO.

En el primer milenio(*) antes de cristo, el Atica, región en la que se ubica Atenas, se puebla de enclaves relativamente pequeñas y comienza a configurar su organización política.Los poemas Homericos dan fe (O.a)de la existencia de Palacios y cierta civilización urbana, pero no de la Pólis. En estas primeras organizaciones existieron Hoi Arcontes y Hoi arcomenos; los que mandan y los que obedecen, provenientes de la élite o de la masa, respectivamente, pero no resultantes de la oposición entre Estado e Individuo(O.b). El Demos empieza a configurarse entre los siglos IX y VIII, en momentos en que se gestan cambios en la vida económica y militar(O.h): En el primer plano, la vida económica se transforma por el crecimiento demografico(O.g), el cual propicia un

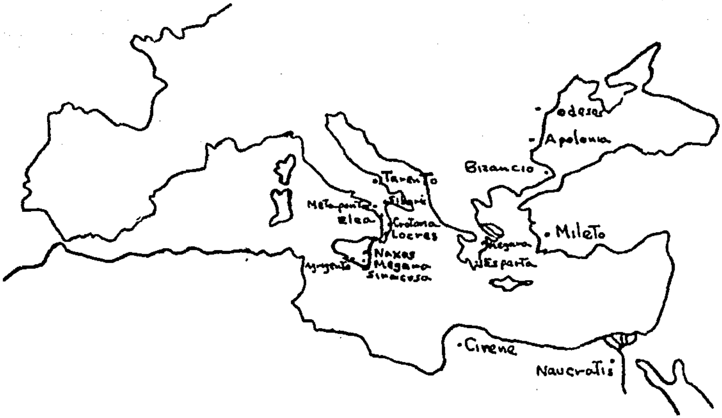
(*)Como en el texto casi todas las fechas son de antes de cristo, a.c., sólo en los casos excepcionales se escribirá d.c.

(O.a) Al respecto es muy ilustrativa la introducción general a los diálogos de Platón, por Emilio LLedo, Pag.51
(O.b)Ibid, pag 52,Emilio, LLedo, Diálogos, pag.60.
(O.h) Grecia vivió un desarrollo económico sin precedentes contemporaneos en los siglos VII y VI a.c.que alcanzo su climax despué de las guerras con Persia ,con Pericles en la segunda mitad del siglo V. V.V.Struve,Ibid. pag.311
(O.g) Desde la epoca de Solón ,la correlación de fuerzas entre la población rural y urbana crecia en favor de la última. La poblacion urbana crecia rapidamente en gran parte con los extranjeros, mótecos y libertos, sin hablar de los esclavos. V.V.Struve,Ibid. pag. 216.

excedente de producción que ya no era consumido por el Señor, así como por la ruptura de la antigua solidaridad del clan Primitivo, y por tanto una ruptura del vínculo de solidaridad con el Señor, como consecuencia de no consumir lo que se produce en ausencia aún de la moneda. Pero precisamente la ruptura de estos vínculos originaron al Demos.

Fig.1

Ciudades de Grecia



La aparición(O.c) de la moneda en el siglo VII y la liberalización de la producción permiten el surgimiento del artesanado, que al agruparse y sentir la fuerza de su independencia cristaliza el factor militar, y éste es el segundo plano para la aparición de el Demos. Habiéndose independizado del Señorío, el Demos requirió defenderse tanto de sus ataques como de la amenaza Persa(O.e), para lo que se vieron impelidos a revolucionar el arte de la guerra y formar sus propios destacamentos; Los Hoplitas (guerreros de armas pesadas), quienes defenderían los intereses de la naciente sociedad comercial, los de sus paisanos independientes que empezaban a ser dueños de las tierras, y ya no los intereses de los Señores. Esto no obstante que llegó a darse el caso de que el jefe popular de estas luchas se convirtiera en tirano. Pero en este espacio de nuevas relaciones, se engendro tambien la necesidad de un tipo de organización que enhebrara las relaciones de poder y de convivencia, de lograr una sociedad libre de la arbitrariedad e inestabilidad política que llego a extenderse en Grecia a lo largo de los siglos VII y VI, y por tanto de la necesidad de regular las relaciones entre los hombres.

(O.c)Emilio LLedo, Ibidem
(O.e)En el año de 546 Jonia cayó vencida por Los Persas, y, también por ese periodo, entre sus ciudades la de Samos y Mileto.V.V. Struve, "Historia de la antigua Grecia",Pags.229 y 234.

"Comienza aqui la búsqueda de ese estado ideal que culminará en la República y en Las Leyes, y que habrá de unir dos aspectos indisolubles del espíritu griego: un extraordinario sentido de la praxis política por un lado, y por el otro la irrefrenable inclinación hacia un estado perfecto"(O.d).
En el fragor de las heroicas proezas militares de los Hoplitas, como se discutirán detalles claves lineas abajo, junto al nacimiento del Demos y el derecho de los soldados a luchar por el botín, también estaban ganando el derecho a discutir los acontecimientos militares, a debatir , y sobretodo, a crear la verdad. Este proceso vivido en la Atica llegaría a extenderse aún a Samos, lugar de nacimiento de Pitagoras, en donde surgiría el tirano policrates, quien influiría de manera decisiva en la emigración del matematico a Italia.
Redondeando las fechas de diversos autores, partimos de que Pitagoras nació (1)en el siglo VI a.c., y alcanzo su madures en la segunda mitad de ese siglo o posiblemente en la primera mitad del siglo V.Fue originario de la isla de Samos del oriente del mar Mediterraneo, relativamente cercana y en la dirección de la región de la antigua Jonia(2), y llegó a

---

(O.d)Ibidem.pag.52,Emilio LLedo.
(1) Guthrie, en Los Filosofos Griegos, pag.171, dice que aceptando la afirmación de Aristóxeno de que abandonó Samos a los 40 años podemos ubicar su nacimiento en el 570. A.Szabo,en su tabla cronologica de The Beginings of Greek Mathematics, ubica su nacimiento "circa de 510 a.c.". Bell, en "La historia de las Matemáticas",muy discutiblemente, sostiene que nació en el 624 y murio en el 550 a.c.
(2)Ver mapa anexados de las regiones y ciudades de la Grecia antigua.

vivir hasta los ochenta años.

Pitágoras fue conocido en la antigüedad como descubridor científico, político, educador y fundador de una orden religiosa, así como taumaturgo:

"... vivió despues de Tales y Anaximándro, y el que entre su muerte y la de Sócrates no pasaron mas de cien años....En la medida que nos informan los testimonios, Pitágoras tuvo serios predecesores en el campo de las Matemáticas, no sólo en el Este, sino tambien entre los griegos de Jónia, dado que a Tales se le atribuyéron varios teoremas geométricos. Eudemo, el discipulo de Aristóteles ,cuando escribió su historia de la geometría no encontró aparéntemente dificultades para atribuirselos a un pensador anterior a Pitágoras, y hay que confesar por supuesto, que ningún conocimiento matemático del propio Pitágoras está atestiguado por autoridad alguna de tanta categoría"(3).

Policrates fue enemigo de la antigüa aristocracia oligarquica Samia y es probable que su tirania comenzara alrededor del 538a.c. Escapando de ésto Pitagoras emigró cuando trendría unos cuarenta años hacia Crotona(3.b), en el sur de Italia, que en ese entonces era colonia Aquea, en donde fundó su escuela y, al parecer, desde su llegada tuvo buena aceptación entre los viejos, participando activamente en la vida política de la ciudad. Queda registrado en la historia local como un personaje que incluso. con muchas

(3)Guthrie, pag.170
(3.b)Bell, Ibid.pag.67 a 71

probabilidades, dotaría (3.a) de una constitución política a Crotona y militó encabezando la aristocracia ligada al comercio, y asífue ampliamente conocido en la Magna Grecia. De un personaje con tal reconocimiento de su vida pública y su participación en el destino de su ciudad (los pitagoricos del siglo V llegaron a gobernar Crotona y algunas ciudades cercanas) pocas posibilidades quedan de que fuera él mismo una persona aislada y ensimismada en la meditación, como contaba el mito de los propios pitagoricos del último periodo(4) y, por tanto, tambien esto pone en duda la supuesta cerradés de los círculos pitagóricos como causa de la nula divulgación de sus conocimientos, además de que se tiene registrado que Heráclito conocio de las ideas de Pitágoras, aunque no les viera con mucho agrado(5). Existe una narración hecha por Diodoro en la cual Telis el jefe del partido popular en Sibaris convencio a los habitantes de su ciudad de que desterrara a quinientos de sus ciudadanos mas ricos para que se repartieran sus propiedades entre todos, por lo que los agraviados huyeron a Crotona en busca de refugio. En seguida Telis amenazo con la

---

(3.a) La primera constitución escrita en Atenas, y esta en particular fue escrita con sangre, se implicita en las Leyes de Dracon, caracterizada historicamente por su rigor. Solón , posteriormente, fue elegido arconte en el 594 y, a decir de Aristoteles, estaba destinado a fijar una nueva legislación.

(4)Jones, Number before Euclid, Pag.5

(5)El Pensamiento Antiguo, Ed.Lozada, Argentina, 6o ed. ,1969,Paradojamente Jaeger dice, "Heraclito lo ha desdeñado como un erudito analogo a Hesiodo, Jenofanes y Hecateo y aun ha puesto un acento especial como en todos los mencionados",La Paideia, pag.160

guerra en caso de negarse a entregarlos, y cuando la asamblea de Crotona se inclinaba a entregarlos, Pitágoras influyo decisivamente en su reconsideración para que protegieran a los refugiados y enfrentaran a Telis. De esta campaña salió triunfante Crotona al encabezarlos el pitagórico Milón, con lo que tomaron mayor prestigio los pitagóricos(6). No hay acuerdo entre los historiadores(7) acerca de las causas que le originaron, pero si en el hecho del acaecimiento de la emigración de los pitagóricos, en particular de pitágoras, de quien se cree que fue orillado a recluirse en Metaponto, donde habria muerto. Se cree (8) que las rebeliones contra los gobernantes pitagóricos comenzaron en la misma Crotona (posiblemente encabezados por Cilón, quien estaba de lado de la parte mas conservadora de la aristocrácia, y, por otro lado, por Ninón, quien propugnaba por algunas reformas democráticas, expandiéndose por el resto de las ciudades de alrededor y aconteciéndose alrededor del 454 a.c., mismo año en el cual sucedió la primera emigración pitagórica a la península griega y condujo al establecimiento de centros pitagóricos en Fliunte y Tebas. Entre los refugiados mas jovenes Aristoxeno cita a Lysis, quien mucho después se convirtio en maestro de Epaminondas en Tebas. Otro fue Filolao, mencionado en el Fedón(8.a). Incluso entonces, los pitagóricos que se

---

(6)Guthrie, Ibid, pag.174
(7)Guthrie ,Ibid, pag 176.
(8)Guthrie, Ibid, pag.177.
(8.a)El Fedón, pag.387,Porrúa.

quedaron parece que recuperaron influjo político en Italia y continuaron su vida como comunidad activa en Regio. Posteriormente, sin embargo, cuando las condiciones políticas empeoraron(8.b) se dice que todos abandonaron Italia a excepción de Arquitas de Tarento(8.c), a quien Platón encontró en el 367 a.c. No ha sido posible para los historiadores datar este éxodo final, pero Von Fritz lo sitúa alrededor del 390 a.c.(8.d). La persecusion de que fueron objeto orilló a que se dispersaran impidiendo su reconformación como agrupamiento político: sin embargo en pequeños grupos o individualmente pugnaron por evitar la muerte de la Filosofía de Pitágoras y las Matemáticas, dedicandose a hacer una recopilacion de sus ideas mediante la escritura de sus recuerdos, pero ademas extrapolando sus investigaciones a la Astronomia(8.g), la Musica, e incluso en la Medicina(8.h), prolongando la vida activa de las

---

(8.b)Jambl.251.Sobre el encuentro Arquitas-Platon, Knorr, pag 88,Ibid

(8.c)Heidel dice de Arquitas que fué amigo de PLaton y"de quien podemos decir con seguridad que hizo contribuciones notables a las Matematicas",Guthrie. pag.213.

(8.d)Guthrie. Ibid.pag .177.
(8.g)Fowler D.H.,The Mathematics of Plato's Academy. pag.127
(8.h)Hipocrates, Harvard University Press, 1957.Pag.XIII."El tratado sobre el Siete ,con sus marcadas caracteristicas pitagóricas, prueba, si verdaderamente esto es tan anticipado como Roschen debio hacernos creer, que igual antes que Hipocrates las enfermedades fueron consideradas como un disturbio en el balance de los humores, y la salud a una 'coccion'de ellas, mientras la supuesta preponderancia del siete doblemente ejercita alguna influencia sobre la tardía doctrina de los dias criticos'. Tambien de Pag.XI:se cree que Alcmeon de Crotona, considerado por algunos como pitagórico, y por otros como muy cercano a sus circulos.

sectas pitagóricas hasta el siglo IV a.c.(8.e). En este momento de dispersión es que se debieron conformar por lo menos dos tipos de pitagóricos: los Mathematikoi o Matematici, encabézados por Hípaso (de quien contaban los propios pitagóricos, en base a la carta que le envió Filolao(8.f), que había sido condenado a muerte por divulgar secretos de la secta pitagórica) y que realizaron estudios de Proporciones y de Música; y, por otro lado, la secta de los Akoustmatikoi o acustmatici, quienes cultivaron el aspecto mítico y sagrado de la Filosofía de la transmigración de las almas, adjudicáda al propio Pitágoras(9). Todavía más, en el período entre Hípaso y Platón, en el fín del siglo VI los Mathematikoi se subdividieron "entre los que siguieron doctrinas atacadas por Parménides" y los que, despues de Zenón, "representaron réplicas a Parménides y Zenón"(10). Es posible, dadas las características de esas sectas, que incluso Arquitas(11) y Eudoxio(12) estuvieran dentro de los mathematikoi.

---

llego a tener influencia considerable en la escuela de Hipócrates de Cos, considerado el padre de la Medicina.
(8.e)Guthrie, Ibid..pag178.
(8.f) Knorr, The Evolution... Pag.44

(9) Jones, The Number before Euclid, pag.5).
(10) Jones. Ibidem
(11)Knorr, Ibid, pag 212.
(12) Zsabo, The Beginings of Greek Mathematics, pag.99

A finales del siglo VI, cuando muere Policrates, el tirano de Samos, Maiandrios, su sucesor, dijo publicamente: «Policrates no tenia mi aprobacion cuando reinaba como un déspota sobre los hombres que eran sus semejantes, y ningun otro la tendrá si actua de la misma forma. Ahora bien Policrates ha seguido su destino, y yo deposito el poder en el centro y proclamo para vosotros la isonomia »(12.0) Con ésto, Maiandrios decretaba al final del pleno siglo pitagórico la realización del espacio circular en el que los guerreros colocaban en su centro el botin de sus conquistas y campañas, con ellos alrededor, para repartirlo o disputarlo, donde se realizaban confrontaciones entre los propios guerreros para competir midiendo sus fuerzas y capacidad militar, donde cada guerrero estaba a la misma distancia del centro y tenia la posibilidad de emitir su visión acerca de las proesas militares, colocando a discusión sus palabras e ideas entre el resto de los miembros del circulo, espacio instituido en el que la verdad de su palabra, la Alétehia, resultaba de esa discusion. Con esto, en el siglo VI del nacimiento y madures de Pitágoras, se vivia en Samos(12.a) un proceso en el que en la Aletéhia empezaba a conformarse socialmente mediante la libre discusión entre iguales, que a la postre le despegaria del

---

(12.0)Marcel Dettiene, "Los Maestros de La Verdad en la Antigua Grecia",pag.100.
(12.a) Guthrie, Ibid.Pag.212. Tambien:"No obstante que estaria en el espiritu del pensamiento Jonio ser menos influenciable por las asociaciones religiosas del numero y sentirse mas atraido por el enfoque puramente racional del mismo"

caracter divino que le conferian magos, adivinos, poetas y reyes. Ello muestra una Grecia en transición, que provenía de concebir socialmente la Alétehia ligada a lo màgico y religioso: La palabra del poeta, como ocurre en Píndaro y Hesíodo, encontrába inspiración y autenticidad en la Musa y la memoria al invocar a la diosa Mnemosyne cada vez que necesitaba acordarse de sus versos(14);El Rey(15) recibía los oráculos de Nereo, El Anciano del Mar, o de Glauco o el mismo Zéus, para emitir sus sentencias judiciales sobre quienes reinaba, haciendo profesión de Alétehia; una Grecia bosquejada a pinceladas en el Himno Homérico a Hermes en la que «las antiguas divinidades, enseñadas a Hermes por Apolo, son mujeres abejas que por doquier van permitiendo realizarse a todas las cosas, dotadas de un saber mantico dicen la Alétehia»(16); La Grecia del Proemio de Parménides,

---

(14)"la palabra del poeta tal y como se desarrolla en la actividad poética es solidaria con dos nociones complementárias: la musa y la memoria....otra esposa de Zeus, un nombre comun μουσα corresponde en el plano profano a la musa del panteon griego..., en su asepción no vulgar quiere decir «la palabra cantada», «la palabra rimada»".M. Detienne, Los Maestros de la Verdad en la Grecia Arcaica, Taurus, pag.23.

(15) Detienne,Los Maestros.., Pag.52. También, de Pag.41: "Entre las divinidades del tipo de Nereo, entre Forcis y Glauco, Ponto, Halios Gerón, la función mantica establece una parentéla incluso de identidad. Ahora bien el dominio de la mantica es un orden del pensamiento que concede a la Alétehia un lugar predominante. Saber y palabras afirmanse en en una determinada concepción de la «verdad»...para toda una tradición mitica, el ejemplo de la justicia es solidario de la práctica de determinadas formas de adivinación, en particular de las consultas incubatorias",

(16) Los Presocráticos; Himno Homerico a Démeter

considerado un poco mas joven que Pitágoras(16.a), en el que "Parménides se lanza a un especie del mas allá: de la noche al día, de las tinieblas a la luz, y detrás de las pesadas puertas que guarda la justicia logra tener una visión directa de la diosa que le concede la alétehia porque antes las hijas del sol le muestran el camino de la luz"(17).
En ese contexto de valores y creencias mítico religiosas maduró el pensamiento filosófico y matemático de Pitágoras y, como marcan algunos testimonios, él mismo no era ajeno a esa religiosidad del pensamiento de su epoca(18). En ese contexto en que estaba inmerso globalmente el pensamiento griego, en Pitágoras lo religioso y mágico eran parte de, y por entero, La realidad, y hacer Matemáticas en búsqueda de la realidad significaría ir en busca de la salvación del alma, en busca de lo divino. Sin embargo, esto no implicaría, sostengo, que las Matemáticas fueran el camino del alma para alcanzar a Dios, particularizándo, como implicitan las palabras de Guthrie, Aristoxeno y el mismo Jones(19), aunque no lo digan abiertamente, porque simple y

(16.a)Parménides habría nacido, según se puede desprender del diálogo platónico el Parménides ,en el 515 a.c.,Platon, "Diálogos".
(17)Detienne, Ibid.,pag.139.y Hegel, Lecciones de Historia de la Filosofía, pag.229.
(18)"La Alétehia del Anciano del Mar es« conocimiento de todas las cosas» ...Baste recordar la aventura de Epiménides: Es con Alétehia, acompañada de Diké,con quien conversa este mago durante sus años de retiro en el interior de la gruta de Zéus Diktaios, donde Minos consultaba a Zéus y Pitágoras se internába a su vez",Detienne, Pag.56.
(19)Sobre la afirmación de Guthrie, pag.195.Ibid:sobre Aristoxeno, Guthrie, Ibid, pag.205;sobre Jones, Number before Euclid, articulo pag.6

llanamente para el espíritu griego Dios estaba repartido en Los Dioses, y, como mostramos, su idea de Dios tenia un significado más amplio. La concepción de Pitágoras se complementa con su Filosofía, llegando a conformar Matemáticas y Filosofía la base de su modo de vida, a partir del cual puede explicarse su misticismo hacia el número y las figuras geométricas, registrado por algunos pitagóricos del período postmortum de Pitágoras, así como una posible vida ascetica y llena de mitos y tradiciones de los Akusmatikois o Acustmatici(21), aunque aqui es necesario decir que no hay datos que precisen la autoría de Pitágoras de la abstinéncia de comer carne(22)cultivada por una parte de los pitagóricos, ademas de que algunas tradiciones, como la de no comer habas, provenían de antiguas tradiciones griegas. Analogamente, no obstante que entre los pitagóricos se cultivó la música, como registra Aristóxeno, no se tienen testimonios que determinen la autoría de Pitágoras de textos musicales, ni, por tanto, de que su concepto de número fuéra extraído de los acordes musicales(23).

Matemáticas, Filososofía y Religión dieron forma a la imagen que del mundo se hicieron los Pitagóricos, creándose una cosmogonía como visión global del mundo, de un Kòsmos en el

---

(21)Guthrie, Ibid, pag.181.

(22)Guthrie, Ibid.pag.188.

(23)Guthrie, Ibid.,pag.215.

que «toda la naturaleza esta emparentada»(24).
En resumen, el mundo era para los Pitagóricos un Kòsmos (Κόσμος), palabra cuya creación algunas versiones filológicas atribuyen al propio Pitàgoras(25), en el que todo esta relacionado guardando una Harmonia y un orden regulado por la razón, relaciones numéricas y la Divinidad(26). Asi, el dedicarse a estudiar y seguir ese orden nos llevaria hacia la divinidad.
En el diálogo el Timeo, narrado por un viejo sabio llegado del antiguo Egipto, Platón, mostrando sus inclinaciones Pitagóricas, dice que Los Dioses nos diéron la vista, posibilitándo la Filosofia «...a fin de que pudiéramos observar los circuitos de la inteligéncia en el cielo y aprovecharnos de ellos para las rotaciones de nuestro propio pensamiento, por que son semejantes, por mas que las nuestras sean objeto de perturbación y las de ellos carezcan de perturbación alguna ,y a fin de que, aprendiéndo a conocerlas y adquiriéndo la capacidad de calcularlas correctamente, según su naturaleza, podamos reproducir las

(24)El Menón, Diálogos de Platón, pag.215

(25)Pag. 203, Guthrie, Ibid.

(26)Hay un pasaje muy revelador de La Republica de Platon que dice:"Contemplando cosas que se hallan debidamente concatenádas y son inmutábles que ni cometen ni sufren injusticia, sino que están completamente en orden (Kósmos) y gobernádas por la razón, él reflexionára sobre ellas, y, en la medida de lo posible ,acabara asimilándose a ellas.¿Tu no piensas que es inevitable que un hombre acábe pareciéndose a aquello con lo que le agrada estar unido?.Por ello el filosofo, mediante la union con lo que es divino y ordenádo(Kosmios) se convierte en divino y ordenado(Kósmios) en la medida en que a un hombre le es posible". Ver también la Metafisica, Aristóteles, pag.34, Ed. Gredos..

rotaciones perfectaménte infalibles de la divinidad y reducir al orden establecido los errabundos movimientos que tenemos en nosotros mismos».

En cuanto al número propiamente, se atribuye a Pitágoras el descubrimiento de que las razones 1:2,2:3 y 3:4 se "impusieron sobre la disposición caótica del sonido" formándose mediante esos priméros cuatro números, 1, 2, 3 y 4, que al sumarse resultan diez, el cual, según Aristóteles «èra algo perfecto y contenia en su seno la naturaléza total del mundo»(28). Este número lo representában con la figura de la Tetractys, una pirámide formada por cuatro puntos en su base, tres en su segundo piso, dos en el tercéro y uno en la cúspide, y al rendirle culto los pitagóricos decian: «Por él que nos legó la Tetractys, fuente y raiz de la naturaléza eterna»(29). Consideraban que el número uno, representado por un punto, originaba a los números, pero que él mismo no era un número. No obstante, la unidad era, por tanto, el principio de todas las cosas, el Archè(31). Esta unidad, considerada como par e impar, limitada e ilimitada (32), parecidamente a viejas tradiciones de otros pueblos (33), la representában por un punto sin magnitud. Al reunir una

(28)Aristóteles, La Metafisica, pag 34

(29) Guthrie lo cita de Jámblico,pag 218.Ibid. También en Aristóteles. La Metafisica, pag.34.

(31)Guthrie, Ibid,.pag.235.
(32)Guthrie, Ibid, pag.232.

(33)Guthrie, 1975, pag.234.Aquí este autor se apoya en Cornford y Burnet.

coleccion de dos puntos representában al número dos, colecciones de tres puntos al número tres, de cuatro al cuatro, de cinco al cinco, etc...formando figuras geométricas; una recta, un tríangulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc...respectivamente. Así,a partir del punto sin magnitud formaban figuras con magnitud, y de éstas los cuerpos sólidos. Al respecto hay una cita muy ilustrativa: «Alejandro en la Sucesión de Filósofos dice que él encontró en las memorias pitagóricas esos pensamientos también.
El Princípio de todas las cosas es la mónada; elevándo desde la mónada, la indeterminada dyad actua como materia para la mónada, la cual es causa; desde la mónada y la indeterminada dyad se elevan los números; desde los números, puntos; desde ellos líneas, de las cuales se elevan figuras planas; desde planos figuras sólidas; desde ésos, cuerpos sensibles»(33.a). Guthrie sugiere que los Pitagóricos representaban los números mediante rectángulos o cuadrados formados por gnómones(34), trasplantándo el ángulo récto de la escuadra de un carpintéro, en base a la siguiente afirmación de Aristóteles referída a los pitagóricos(35):«Ellos dicen, además, que lo ilimitado es lo par, porque cuando éste se encuentra encerrado y limitado por lo impar proporciona el elemento ilimitado de las cosas existentes. Lo ejemplifican con lo que acontece cuando se

(33.a)Citado por Jones, Number before euclid, pag.13

(34)Guthrie, pag.234,cita 148,Ibid.
(35)Guthrie. pag.233, Ibid

colocan gnómones alrededor de los números: cuando se colocan alrededor del uno, y sin el uno, en este caso, la figura producída varía sin cesar, mientras que en el otro caso, es siempre la misma. Platón, por su parte, considero lo ilimitado como una dualidad, lo grande y lo pequeño»

Así 16, según Guthrie, sería representádo por

```
* * * *
* * * *
* * * *
* * * *
```

,mientras que el 20 por

```
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
```

Fig.2

e interpréta la frase de la siguiente manera: " cuando la serie de números impares se coloca alrededor de la unidad formando gnómones, la figura resultante es siempre un ángulo recto (permanéce «la misma »); cuando los números pares se colocan lo mismo, la relación entre los lados de las figuras formadas ofrece infinitas variaciones..."(36)

Lo cual no aporta gran idea, ya que al agregar al gnomon en forma de escuadra, siempre mantendrá el ángulo récto.

Por otro lado, si hacemos un seguimiento literal de esas palabras de Aristóteles, encontramos que "cuando encerramos y limitamos lo par por lo impar" obtenemos siempre cuadrados como la figuras resultantes de construir un número,

(36)Guthrie, pag.235,Ibid.

donde el gnomon tiene un número impar de puntos

```
                                          * * * * * *
           * * *           * * * *        * * * * * *
* *   ,    * * * ,         * * * * ,      * * * * * *
* *        * * *           * * * *        * * * * * *  ,...etc.
                           * * * *        * * * * * *
                                          * * * * * *
```

Fig.3

Así, por ejemplo, el 36 estaría formado por gnomones de 3, 5, 7, 9 y 11 puntos (números) respectivamente, las cuales rodean a la unidad, considerada par (aunque también sea impar).

En cambio cuando se representa al resto de los números,

```
       *        * *       * * *     * * *
* * ,  * * ,  * * *  ,  * * *  ,  * * * *,...
```

Fig.4

etc.,la "la figura varía sin cesar ...,mientras que en el otro caso, es siémpre la misma "

De esta manera parece claro que la interpretación de Guthrie no corresponde con las palabras de Aristóteles. Mas bien, me parece, Aristóteles pretendía explicar que los pitagóricos ejemplificaban que lo par era ilimitado porque cuando colocaban números en forma de gnomones alrededor del uno (lo par) la figura era siempre la misma, el cuadrado; mientras que cuando se colocaban números gnomones alrededor de otros números (ver los ejemplos para 6,7,8,10) la figura varía sin cesar.

De esto, según Aristóteles,"lo ilimitado es lo par, porque cuando éste se encuentra encerrado y limitado por lo impar (como los gnómones de números impares que rodean a la unidad en el cuadrado, diría yo) proporcionan el elemento ilimitado de las cosas", refiriéndose ,en mi opinión, a la infinidad que constituyen los números cuadrados.

Mas aún, partiendo de que «las cosas son números» y de que «las cosas tienen los mismos principios que los números», los pitagóricos debieron deducir que los cuerpos sólidos que ellos derivaban a partir de las figuras geométricas no todos eran cuadriláteros, y en forma análoga, no todas las figuras geométricas podían ser cuadriláteros. Por tanto, deberíamos quedarnos con la idea de que los números eran representados por figuras geométricas formadas por agrupaciones de puntos, no necesariamente formando cuadriláteros.

Por si fuera poco, menos aún parece viable la afirmación contigua al parrafo de Guthrie discutido anteriormente, que sostiene que "...la frase de Aristóteles no excluye, como acontecería si fuera una definición, la posibilidad de gnómones oblongos", refiriéndose literalmente a cuadrados que tendrían en sus lados un número irracional de puntos números, ya que jamás podria representarse un número de puntos no entero en un gnomon y ni mucho menos un número "oblongo" de puntos formando un cuadrilátero, por la sencilla razón de que para los pitagóricos el punto era indivisible.

Algunos pitagóricos hicieron una columna, de la cual también refiere Aristóteles, en la cual colocan diez pares de categorías contradictorias de las que supuestamente se forma la substáncia:

Cuadrado----Oblongo

Límite------Ilimitado

Par----------Impar

Uno----------Pluralidad

Derecho-----Izquierdo

Masculino---Femenino

En Reposo---En Movimiento

Recto-------Curvo

Bueno-------Malo

Luz---------Obscuridad

Guthrie indica, relacionando las parejas; "Advertimos(37) que en la lista pitagórica de los términos límite e ilimitado aparece cuadrado y oblongo, respectivamente". Por mi parte recalcaría, tomando en cuenta la anterior cita de Aristóteles, la asociación que hacían los pitagóricos entre la unidad y el infinito, para tratar de interpretarla. En las construcciones de los cuadrados formados por puntos, el punto unidad generaba el resto del número porque al colocar gnómones alrededor se iba formando la figura. Pero al ser una infinidad el conjunto de cuadrados que podían formarse así, el punto unidad origina entonces al infinito. Pero, por otro lado, como el uno es el punto de partida en el conteo y puede tomarse para contar al resto de los números, porque está definido previamente, entonces es finito, aunque no sea un número. Así se reuniría en la unidad al infinito con lo finito, como pensaban los pitagóricos. Tal vez por ahí estaría la explicación que daban los pitagóricos de esa síntesis entre finito e infinito en la unidad, pero las siguientes consideraciones acerca de su apreciación acerca de las magnitudes y el número nos darán una idea más completa.

(37)Guthrie, Ibid.Pags.235 y 237

Parece correcta la hilación lógica que propone Jones(38) acerca del desarrollo del concepto de número en los pitagóricos: Si los pitagóricos partian de que el principio de las cosas era el principio de los números, debieron tener la inclinación de ordenar las cosas acorde con el orden y propiedades de los números. Pero para ordenarles era necesario que distinguieran una cosa de otra, estableciendo la identidad de una cosa consigo misma, "ésta es una cosa" y "ésta es otra cosa","ésta tiene un objeto" y "ésta tiene más de un objeto", posibilitando con ello la asignacion de la «etiqueta» de la unidad en tantas veces como el objeto contenga elementos; una unidad para el conjunto que tiene un elemento, dos unidades para el que tiene dos, tres para el de tres, etc...formando colecciones contadas de objetos, con lo que asociaban al número de un conjunto de cosas con el conjunto mismo. Sin embargo, en tanto con la unidad contaban, comparaban al resto de conjuntos y además generàban al resto de los números, con esa unidad no podían contar a la unidad misma, y por tanto la unidad no podria ser ella misma un número. Con lo anterior "el fenOmeno de conteo precede al número. Y el conteo requiere identificar las unidades individuales que deben permanecer la misma a traves de su propio procedimiento. Por lo tanto,"...la noción natural de Arithmos...enfatiza que Número siémpre significa número de cosas...Esta noción permanece intacta en

(38) Jones, Number before...,Pags.8,9 y 10

la aritmética prePlatónica", por lo que con ella los pitagóricos colocaron la base para el ulterior desarrollo de esta ciencia, no obstante que en esa concepción misma aparece una falta de madurés de abstracción oue permitiera despegar al número de la colección de objetos de que surgía, como ya se mostro anteriormente en la cita de Diógenes adjudicada a Alejandro. Jones mismo menciona que "parece que el pitagórico Ecfanto(39) originó un sistema de atomismo numérico, en el cual el mundo era hecho de átomos en movimiento y el vacio", parecídamente a la sugerencia de Knorr en relación a Ecfanto de que "él fue el primero en afirmar que las unidades pitagóricas eran corporeas".(39.b) Por nuestra parte, no sabemos con precisión que tanta relación mantuvieron los pitagóricos con Demócrito, pero si que Demócrito nació alrededor del 460 a.c. y que hizo un libro que tituló «Sobre las Lineas y Los Solidos Irracionales»(39.a). Sin embargo, parece claro que esa concepción señalada por Ecfanto es muy similar con el atomismo filosófico de Demócrito. Por ésta misma podemos enfatizar cierta similitud con la Escuela Jónica de la Filosofía griega: Así como Tales explicába el Cosmos a partir del agua, Anaximenes a partir del aire y Anaximandro de el fuego , en fín, a partir de elementos de la naturaleza, los pitagóricos explicaban el origen del

(39)Pag.11,Jones ,Ibid..
(39.b)Knorr, Ibid, pag.43.
(39.a)Knorr,Ibid,Pag.38,Knorr, Ibid.

universo a partir de un principio, el «Arche», que ellos consideraban material y parte del universo mismo; el punto unidad, la unidad átomo(39.c). En esto coincido con Guthrie y Cornford(40), aunque, por otro lado, en cuanto al orden ligado a cierta moralidad, como se muestra en la lista de las diez categorías de la substancia, mantenida por pitagóricos del último período, éstos se diferenciaban de la Escuela Jonica.

Volviendo con Jones; Al pensar los pitagóricos que las cosas eran formadas por números, estaban aceptando implícitamente que ellas estaban formadas por puntos, y por tanto de colecciones de unidades que al ser contadas determinaban el número asociado al objeto. Asi,la cuantificación de la extensión de las cosas estaba determinada por la contabilidad de sus unidades, y luego entonces la mesurabilidad de un objeto estaba determinada por esa contabilidad, y por tanto, en general, la magnitud del objeto sería su número de unidades en el objeto. Con esto, los pitagóricos concebían la identidad Magnitud=Número. Esta identificación traería serias controversias a la postre entre los propios pitagóricos, y aún entre otros filosofos y matemáticos que no eran de esa escuela. Cuando los

---

(39.c)"...Se le atribuyen a él(Pitágoras) Los Mathemata,'Los Estudios',que abrazaban la doctrina de los números y los elementos de la geometría, los primeros fundamentos de ,la acústica y la doctrina de la música y el conocimiento de los tiempos de los movimientos de las estrellas, por donde puede también atribuirse a Pitagoras el conocimiento de la Filosofía natural milesia...",La Paideia, pag.161.
(40)Guthrie, Pag.241,Ibid

Pitagóricos descubrieron las magnitudes inconmensurables debieron toparse, en términos generales, con la siguiente paradoja: Dos lineas son inconmensurables cuando no se pueden medir ambas con la misma unidad. Teniendo dos lineas inconmensurables, una de ellas medirá un número entero de veces la unidad, pero la otra medirá un número entero de veces la unidad más una porción de esta misma unidad. Pero como los pitagóricos considerában la unidad indivisible, esto último no podría ocurrir, y por tanto esta última linea sería inmedible por la unidad, no sería producida por un cierto número entero de veces la unidad. Por tanto hay cosas que no son generadas por la unidad, y luego entonces no ocurre que "Las cosas son Números"...!, con lo que se pone en cuestionamiento el fundamento de su doctrina filosófica entera.(40.a). Al parecer Platón, se habría percatado intuitivamente de esa identificacción pitagórica entre número y magnitud, y posteriormente Aristóteles les separaría, y mostraría después Euclides en Los Elementos(40.z).

Szabó(40.c) hace una síntesis del estadío en que se encontrába la investigación acerca de La Teoría de los Inconmensurables en 1978 (año de publicación de su conocido texto The Beginings of Greek Matematics) en el siguiente párrafo basado en Van der Waerden y Hasse y H.Scholz :

(40.a) Jones, pag.14, Ibid y Knorr, 1975 pag.42.

(40.z) Jones, Ibid. Pag.10

(40.c) Szabó, The Beginings of Greek Mathematics, pag.94.

"Los más tempranos Pitagóricos pudiera decirse que tenían un 'culto numérico'. Para ellos los números eran 'La piedra de toque del universo entero', el mundo había sido formado 'por imitación de los números' y los cielos fueron 'armonía y número'. Acorde a Aristóteles (La Metafísica A5), ellos arribaron a este punto de vista porque ellos estuvieron muy ocupados con las Matemáticas. La más vieja enseñanza, sin embargo, se supone que ha sido sacudida por el descubrimiento de que el lado y la diagonal de un cuadrado eran inconmensurables. Que la diagonal de un cuadrado no tenía medida común con sus lados significaba que si la longitud de los lados es tomada como la unidad, entonces la longitud de la diagonal no podía ser medida, i.e. esto no puede ser expresado ya sea como un todo o como una fracción. Por tanto algo lo cual era 'un no número' sino justamente un αeenτον (algo el cual no podía ser expresado) había sido descubierto. Es sostenido que éste desconcertante descubrimiento condujo a lo que se usó para ser llamado una crisis en los fundamentos de las Matemáticas griegas".

Y poco más adelánte sostiene que no obstante que los más nuevos libros de texto no mencionan esa crisis de fundamento, la interpretación histórica basada sobre tal crisis (o al menos sobre un 'crítico punto de cambio') sobrevive en autores como Van der Waerden, quien dice que las Matemáticas Griegas cambiaron desde los números con el descubrimiento de la inconmensurabilidad(40.b). Szabó se

(40.b) Szabó, Ibid, Pag.95

opone a la existencia de ésta crisis cuando discute el fragmento del Menón referido a la duplicación del área de un cuadrado, argumentando que "...si el lado del cuadrado es elegido como la unidad de longitud, es equivocado decir que la diagonal es realmente 'un no número'...". Punto que nosotros trataremos con más detalle adelante(40.d). Sin embargo, me parece preciso adelantar esta reflexión:
Sí se registra un cambio de punto de vista en el concepto de número proveniente del Pitagorísmo, pero de una manera externa; en la intuición que hace platon de la identidad erronea entre número y magnitud, así como en su conceptualización del número como colecciones contadas de objetos, y como una idea que formaba parte del nivel más alto del alma humana, alcanzado con las Matemáticas. Si bien Platón no era precisamente un Pitagórico, él, con mucha plausibilidad, aprendió las Matemáticas de Arquitas (recordemos que éste sí fué considerado Pitagórico), se percató del problema que representaba en las Matemáticas el descubrimiento de la inconmensurabilidad e instó a sus alumnos a estudiarle (como se refleja en el diálogo que lleva el nombre de su alumno más prominente en las Matemáticas; Teetetos), y con ello a hacer unas Matemáticas que incluyeran los inconmensurables sin que chocaran con el concepto de número. Esto se confirma en la visión que Aristóteles tenía del número (y recordemos también que él fue alumno de Platón), manejada tambien por Euclides, así

(40.d) Szabó, Ibid, Pag. 94

como la existencia del Libro X de Euclides dedicado exclusivamente al estudio de los "irracionales".
Estos estudios de la inconmensurabilidad, en mi opinión, testifican un cambio en las Matemáticas Griegas, privilegiando a la geometría por encima de la aritmética, como se discutirá más ampliamemte en el capitulo III de ésta misma Tesis. Pero ello no significaría una "crisis de fundamento de las Matemáticas", ya que lo que estaba en cuestionamiento era la Tesis central del Pitagorismo, y si bien éste tuvo un papel preponderánte en el desarrollo de las Matemáticas Griegas del siglo V, no puede extenderse a una crisis en la Matemáticas enteras de su tiempo. En última instancia, la crisis, de haberse dado tal, sólo debió haber sido del Pitagorismo y su cosmogonía, y si acáso pudo parecer en la antigüedad griega como una crisis en las Matemáticas debió haber sido porque las Matemáticas, en particular el Número, eran la base de esa cosmogonía Pitagórica. Una crisis dialéctica en la que dentro del propio Pitagorismo se superan sus contradicciones emergidas con el hallazgo de la inconmensurabilidad: ellos descubren los inconmensurables, su hallazgo choca con la Tesis central de su doctrina, el Pitagorismo por entero entra en crisis, se estudia a ésta misma, y se crea un nuevo tipo de Matemáticas, la que incluye en su cuerpo a los "irracionales", sin ser ella algo no Racional. Así, no pudo haber ocurido una crisis de fundamento en las Matemáticas, pero si un cambio trascendental en el desarrollo de las

Matemáticas Griegas. Y ahí discrepo con Van der Waerden en el primer punto, pero tambien con Szabó en el segundo.
Por fuera del Pitagorismo, las más famosas paradojas en relación a la identidad Número=Magnitud fueron enunciadas por Zenón. A continuación analizarémos en este contexto la siguiente, una de las más famosas,(41): «El argumento es llamado Aquiles, porque en él se ocupa de Aquiles, quien según dice el arguménto, no puede dar alcánce a la tortuga que persigue...Supóngase que se trata de un Estadio. Una tortuga avanza a partir de la mitad del Estadio, y Aquiles avanza diez veces más en el mismo tiempo. Aquiles desde el comienzo del estadio, inicia la persecusión de la tortuga y avanza medio Estadio, de modo que llega a la mitad del mismo, de donde partió la tortuga. Pero ésta avanzo ya la décima parte de la mitad restante del estadio. Aquiles recorre entonces la décima parte de esta mitad del Estadio; pero la tortuga avanzó la décima parte de la décima parte de la mitad restante. Y mientras quede una décima parte de cualquier distancia, y ella tenga a su vez una décima parte, la tortuga estará siempre adelante de Aquiles, y jamas ninguno de los dos podra recorrer la totalidad del estadio». En el contexto de las Matemáticas de Zenón ya se manejaba el concepto de razon(41.a), aunque se representaran

---

(41)Egger Lans, Los Presocraticos, tomo II, pag.51

(41.a)"otra clase de secuencia numéricas es: 'mitad, tercio, cuarto, quinto, ...etc',...pero yo referire a ellos por su nombre griego como la serie de partes (meros o morion, plural, meñe, o morai)...ellos deberian ser pensados por:una mitad, un tercio, un cuarto, un quinto....y no son diferéntemente a la manera como ocurre actualmente, y por tanto podemos establecer sintéticamene las siguientes consideraciones. Si Zenón hubiera pensado la relación entre el recorrido de Aquiles y la tortuga según el sentido común, y aún el sentido comun de su contexto griego, hubiera facilmente concluido que en el primer moménto del recorrido mencionádo Aquiles habría llegado a la mitad del estadio, L/2, mientras que la tortuga a la ubicación L/2 + L/20. Y en el segundo moménto de recorrido, cuando había pasado el doble del tiempo primero, suponiendo que ambos mantienen su velocidad constante, Aquiles habría recorrido L/2 +L/2 =L, la totalidad del estadio (aqui usamos la representación actual de la representación de las razones para abreviar el texto, así cuando tengamos a/b, significará a:b de usanza griega.Esto naturalmente, no cámbia el sentido del texto original), mientras que la tortuga habría recorrrido L/20+L/200 por lo que su ubicación en este momento sería L/2 + L/20 +L/200, lo cual sería menor que L, y ya entonces habría rebasado a la tortuga, contradiciendo la conclusion central de la paradoja.

Sin embargo, es evidente que Zenón ,siguiendo a su maestro Parménides, no se atuvo al sentido común. Nosotros haremos una tabla que representa las relaciones entre sus distancias recorridas para tratar de entender la problemática que, más

---

escritos por 1/2,1/3,1/4,1/5,etc".Fowler, The Mathematics of Plato's Academy, pag.14

allá del sentido común, planteaba originalmente Zenón:

MOMENTO	UBICACION DE LA TORTUGA	UBICACION DE AQUILES
M0	$L/2$	0
M1	$L/2+L/2(10)$	$L/2$
M2	$L/2+L/(2)(10)+L/2(10)^2$	$L/2+L/2(10)$
...etc.	etc...	etc...
Mn	$L/2+L/(2)(10)+...L/2(10)^n$	$L/2+L/2(10)+...L/2(10)n-1$

Con lo que siémpre habría una diferéncia donde la ubicación de la tortuga sera mayor por $L/(2)(10)^n$ en el n-simo momento.

Es claro que en su razonamiento excluye la relación distancia-tiempo, y por tanto sólo queda pensar que Zenón hizo una división reiterada de la distancia entre Aquiles y la tortuga, considerándola como una magnitud formada por cierta cantidad de puntos, pero encontró que entre un punto y otro siempre habia un tercero, contabilizando infinitas aproximaciones y creyendo que estaba contando la extensión entre Aquiles y la tortuga, la magnitud de la distancia, y así nunca la alcanzaría. Aqui está presente la identidad número=magnitud, y, en mi opinión, ella fue la causa que originó esta paradoja, no la idea de la inconmensurabilidad. Al parecer, Hegel, a decir de sus alumnos de Historia de la Filosofía, registra algo acerca de la manera como Aristóteles contemplaba estas «paradojas»; "Esta prueba representa la misma división hasta el infinito, pero es falsa, pues el cuerpo mas rapido acabara necesariamente dando alcánze al mas lento, siempre y cuando que se le permite rebasar el límite"(42).

No obstante los cuestionamientos a este texto, creo que en esta ocación coincide con lo acontecido, pues en efecto Aristóteles llegó a criticar fuertemente a quien creía que de las paradojas de Zenón surgía la idea de lainconmensurabilidad. El procedimiento de Zenón se parece mas bien al seguido para determinar que es posible encontrar los terminos reducidos de dos números considerados conmensurables, como se verá adelante.

(42)Hegel, Lecciones Sobre La Historia de la Filosofía, pag.252

CAPITULO II: LOS INCONMENSURABLES.

A)SU PRIMER HALLAZGO.

Entre los griegos existía el término "irracional" pero no en el sentido en que se le denota actualmente. Dos magnitudes son conmensurables con respecto a alguna otra, si ellas tienen una medida común la cual divide a cada una en un número entero positivo de veces (no hay indicios de que los griegos manejaran el concepto de negatividad en su sistema numérico). Si ellas no tienen una medida común se les llama inconmensurables(1). De el diálogo platónico El Teetetos(O), podemos encontrar datos confiables acerca de la conceptualización griega de los irracionales: Definida la unidad, la cual era llamada"la racional", aquellas lineas conmensurables en longitud con ella eran llamadas 'racionales' (entai). Mientras aquellas otras lineas que solamente al cuadrado son conmensurables con la unidad pero no en longitud, eran llamadas "irracionales"(alogoi).
Este concepto era tambien extendido a las áreas: El cuadrado de la unidad era tambien llamado el 'rracional', y por tanto las areas conmensurables con el cuadrado de la unidad eran tambien llamadas 'racionales', mientras que aquellas que sólo eran conmensurables al cubo con la unidad de área pero no lo eran al cuadrado ,se llamaban 'irracionales'.

---

(1)Knorr. The Evolution of ... Pags.15 y 16.
(0)Diálogos de Platón, El Teetetos.

De esta manera el conjunto de números conocidos (aqui quedaba excluido el número uno como una parte de la herencia pitagórica al concepto de número del período clasico) en el contexto platónico era clasificado en esas dos modalidades: un número era racional, conmensurable; o irracional, inconmensurable. Y de esta clasificación surge lo que Knorr llama los teoremas I y II de Teetetos(1.a).

No obstante que algunos han conjeturado acerca de las fechas y la manera en que se encontraron los inconmensurables, no se tienen testimonios que precisen esto. Acerca de esta cuestión, H.Vogt datá el descubrimiento de los inconmensurables antes del 410, y sostiene que emergieron a partir de la inconmensurabilidad de los lados y la diagonal del cuadrado(2). K.Gaiser sostiene que los griegos conocieron de la existencia de las "raciones inconmensurables" desde la mitad del siglo 5º, con lo cual al parecer Szabó se queda, al no contradecirlo. A decir de Knorr, Vojt y Junge datan el descubrimiento en el 410 "porque es inconcebible que un largo intervalo separará el descubrimiento de su inmediata extensión" (haciendo alusión al tratamiento de los inconmensurables por Teodoro de Cirene en el Teetetos), sin embargo esto no es correcto, porque no aparenta ser inmediata extensión desde el sólo descubrimiento. No hay razón para explicar qué cantidad de

(1.a)Knorr. The Evolution, Pags.213 y 214

(2)Szabó,The Beginings..pag.35

tiempo debiera extenderse entre su descubrimiento y su aplicación primera.

Willbur Knorr se apoya en los avances de la teoría realizada por Teodoro y la atribución a Demócrito de un trabajo que por su título mismo es relacionado con los inconmensurables, para sostener que : " el descubrimiento fue primero hecho y diseminádo algun tiempo durante el período del 430 al 410; y Teodoro y Demócrito estuvieron por tanto investigando problemas asociados con la inconmensurabilidad, que fue relativamente nueva en su tiempo"(3).

El argumento de Knorr para llegar a esta conclusión es que, por un lado, Teodoro extendió su carrera geométrica entre 410 y 390 y "durante su tiempo él introdujo la primera extensión del conocimiento de la inconmensurabilidad".Por otro lado se apoya en que entre las varias referencias en los fragmentos fuentes relativos a lo «inconmensurable» y lo «irracional», distintas a la de Hipaso y Teodoro, "la única que parece envolver un sentido matemático del término, es una alusión al título de un trabajo de Demócrito, "Sobre las Lineas y Los Sólidos Irracionales ". Considerando que Demócrito nació en el 460 a.c. estima que en el 430 o mas tarde éste filosofo se vió envuelto en el estudio de los irracionales.

(3)Knorr, Ibid, pag.40

Esto hace pensar que alrededor de los 30 años de Demócrito, se habría enterado de alguna manera no determinada aún de la existencia de los inconmensurables, y unos 30 o 31 años después, en el 399, Sócrates se habría percatado de ello, cuando la carrera de Teodoro llevaría unos 10 años de recorrido, mismo año que Knorr asigna a la realización del dialogo(5), el cual sería escrito por Platón en el 369, otros veinte años despues. No hay acuerdo en la manera cómo Platón conoció de los inconmensurables, algunos autores como Jones creen que fue a partir del primer encuentro del filósofo ateniense con Arquitas de Tarento en el 390(6). Sin embargo, debemos observar que tan sólo a partir de la fecha del nacimiento de Demócrito, en el 460, knorr considera que a los 30 años de éste, o poco despues, ya conoceria a los inconmensurables, pero Knorr mismo no aporta testimonios que testifiquen esta afirmación. ¿No podria Demócrito haberlos conocido a sus 40, 50 o 60 años?, ¿Cuándo hizo su libro?...

(5)Jones, Ibid, Number before..., pag.25. Jones afirma ,supuestamente refiriéndose a The Evolution of Euclidean Elements de Knorr, que Platón se encontró por primera vez con los pitagóricos en Italia, aprendiendo posiblemente de Arquitas sus Matemáticas. Pero Knorr, en las paginas referidas de su libro, 88 y 89,sostiene que es poco probable que de ese encuentro con Arquitas, que el ubica entre el 367 y 361, halla aprendido sus Matemáticas. Knorr atribuirá mas adelante a Teodoro la enseñanza de estos temas a Platón.
(6)Knorr fecha la realización del dialogo del Teetetos en el 399 a.c.,pag.86 The Evolution, y la escritura del mismo en el 369 a.c., pag78,Ibid. En la edición de los Dialogos ,dirigida por Emilio LLedo, parte introductoria del dialogo el Parménides se establece que éste y el Teetetos fueron escritos por 368-369.Ed.Gredos, 1988.

Por otro lado, si Knorr mismo sostiene que el diálogo que suscitó al Teetetos ocurrió en el 399, debería aceptar que Teodoro expandió unos 10 años más su carrera , y no la debería limitar hasta el 390. Pero esto llevaría a que en el momento de la realización del diálogo sería un viejo con una carrera como matemático de unos 90 años, que aunados a los años anteriores a su carrera de matemático harían de él un personaje que habría vivido mas de cien años. Esto muestra un pequeño desajuste entre la fecha límite que da Knorr para la carrera de Teodoro y la realización del diálogo del Teetetos.Mas aún, si tomamos en cuenta que las fechas de la muerte(7) de Pitágoras oscilan alrededor del 504 (pues alo sumo,"segun la antigüedad",alcanzo a vivir entre 80 y 104 años, y nacio en el 570,en la 49o o 50o olimpiada), del supuesto de Knorr se desprendería que no pudo haber sido éste el descubridor de los inconmensurables.

Con lo anterior, de haber sido algún pitagórico el descubridor, habría sido alguno de las primeras generaciones y por tanto un pitagórico que habría vivido entre la epoca en que gobernaron" algunas de las ciudades de Italia" y su expulsión. De haber sido así éste personaje bien pudo haber sido parte de la secta de los Mathematikoi, los más ligados a las Matemáticas, o pudo haber sido alguno delos que llegaron a gobernar alguna de las ciudades Italianas o estuvo cercano al poder, o tal vez fue alguno que habiendo

(7)Hegel, Lecciones de Historia de la Filosofía, pag.189

huido de la persecusión de que fueron objeto los pitagóricos se recluyó en el anonimato, guardando sus conocimientos o trasmitiendolos sólo a sus más confiables allegados.
Si tomamos en cuenta que las persecusiones contra los pitagóricos comenzaron por el 504, mismo año en que murió Pitágoras, de quien incluso una de las versiones sostiene que murió en la rebelíon de Cilón, y duraron hasta el 490, ¡casi un siglo de persecusión !...,en todos esos anteriores casos, ¿ no habría motivos para no divulgar la profana idea de los inconmensurables?, ¿quien se animaría a divulgar un conocimiento que ellos mismos habrían encontrado, al parecer, y que contradecía su Filosofía, y por tanto su religión, y posiblemente incluso socavaría la base de su prestigio social?, ¿no podría propiciar la debacle política, en caso de que mantuvieran el poder?, ¿no propiciaría un mayor rechaso social, incrementado por sus enemigos políticos, que atentara aún sobre sus vidas ,en caso de encontrarse en el exilio?. Bajo estas circunstancias es claro que había razones de sobra para que los pitagóricos no divulgaran inmediatamente la existencia de los inconmensurables y se reservara a «los iniciados». Con la ruptura política de las comunidades pitagóricas que les llevaron desde Italia a Thebas, que tambíen registra Knorr, se acentuaban mas las razones para no divulgar ese acontecimiento. No podemos pensar a los pitagóricos como personas aisladas que vieran sólo por la publicacion de sus conocimientos con el único objeto de incrementar la ciencia.

Ahora bien, por fuera del pitagorismo, dentro de los pocos datos que se tienen destaca que Hipócrates (quien vivió,según algunas versiones(10) vivió entre el 420 y 390 y/o, nació entre el 450 y 430, según otras(10.x)) escribió el libro "Sobre la cudratura de las Lunulas",quien a decir de Knorr "utiliza el teorema de Pitágoras y otras herramientas", pero no hay mayores evidencias(10). Sin embargo, debemos preguntarnos ¿que tantas posibilidades habría de que se descubriérna al margen del pitagorismo?, ¿que tipo de razones habría para que no se divulgara la existencia de los inconmensurables, si el descubridor no fuera pitagórico?. Resulta complicado encontrar la respuesta correcta de estos cuestionamientos, máxime que no hay testimonios documentales que nos auxilien.Sin embargo, tal vez podriamos acercarnos a su respuesta a traves de esta pregunta mas específica: ¿salvo por alguna pérdida o destrucción de los escritos originales del descubrimiento de los inconmensurables por algun suceso histórico, del tipo del incendio de la biblioteca de la academia Platónica, por ejemplo, qué otra causa podría existir para que no se conociera en la antigüedad al autor y fecha del descubrimiento de los inconmensurables?. A mi me parece que no existía en la antigüedad griega del siglo V ningún

---

(10)Knorr, Ibid, pag.40.Sin embargo, algunos autores ,como Bell cita en Historia de las Matematicas, pag.67 (apoyandose en Werke, 2o edición, Leipzig, 1892), sostienen que Hipócrtates nacio en el 470.
(10.x) Heath, Euclid's Elements, Vol.1,Pag.413
(9))Knorr, pag.40,Ibid.

personaje ni agrupación intelectual, mas allá del pitagorismo, que pudiera causar alguna complicación a gobernantes, clases o sectores sociales, o individuos, con el descubrimiento y manejo de una teoria como la de los inconmensurables. Hipócrates no parece haber pasado como un personaje con alguna participación política o social en su tiempo, ni haber influido en el contexto de los acontecimientos históricos de su tiempo, mas allá de su posible influencia intelectual como matemático.

Demócrito nace en el 460 y de él se conocieron trabajos acerca de las lineas irracionales, pero siendo conocida en esencia sus tesis atomistas y partes de su pensamiento matematico, tan conocido por intelectuales y pensadores como Hipocrates de Cos, el fundador de la Medicina, del cual incluso eran contemporaneos, ¿no hubiera razonado igualmente de manera atomista una tesis tan trascendental como la de los inconmensurables?, ¿no hubiera marcado su posible descubrimiento a su teoría atomista de una manera que se trasluciéra en ella?.

En mi opinión, en tanto el pitagorismo, aún con toda su cerrades, constituyo la escuela filosófica mas trascendental en el plano social de la antigüedad griega del siglo V, como puede atestiguarse a partir de la relativamente gran cantidad de adherentes al pitagorismo, la permanencia de su doctrina-aún con sus contradicciones-, durante casi un siglo, así como sus residuos de pensamiento que llegaron a impregnar hasta Platón. Y así serian los únicos que pudieron haberlo descubierto y ocultado por causas no fortuitas. Ahora bien, cual haya sido la fecha del descubrimiento de los inconmensurables, esto no pudo haber sido hasta la existencia de Parménides y Zenón como pensadores ni posteriormente, pues del modo contrario se hubiera notado en sus reflexiones sobre las paradojas y difícilmente hubiesen llegado a las conclusiones escritas en ellas. Pero elllo no ocurre, y en esto parece correcta la apreciación de Knorr. Sin embargo aqui precisamente surge un problema: en el Diálogo El Parménides, realizado por el tiempo en que se realizó El Teetetos, 369-368,en el cual se narra un encuentro entre el por ese entonces joven Sócrates y la pareja Parménides- Zenón (que Tenneman data por la 80oolimpiada, entre el 460 y 467), se establece ;«Zenón y Parménides llegaron cierta vez a Atenas para las grandes Panateneas. Parménides era ya un hombre muy viejo, con todo el pelo blanco, bello de figura, contaría aproximádamente sesenta y cinco años y zenón unos cuarenta...Sócrates por entonces era muy joven». Sócrates, según Diogenes, habría nacído en el 470- 469 y tendría por tanto unos 20 años en el momento del diálogo. La conversación habría ocurrido en el 450, año en que se celebraban las grandes fiestas de las Paneteneas mencionadas en el diálogo como el marco en que se dio la reunion, y por tanto Parménides habría nacido en el 515 y Zenón en el 490 a.c. Pero entonces Parménides habría nacido 85 años antes que el supuesto descubrimiento de los inconmensurables datado por Knorr en el 430, y ,mas aún, Zenón unos 60 años en ese momento, edad que viablemente pudo alcanzar este filósofo eleata. Sin embargo, según coincidíamos con Knorr anteriormente, el descubrimiento de los inconmensurables no podría coincidir con la existencia intelectual de Parménides y Zenón. Por tanto, creo que los inconmensurables se habrían descubierto poco después del 430 que propone Knorr, unos 10 años mas tal vez, pero seguramente tras la muerte de Parménides y Zenón.

Por el tipo de concepciones mitico religiosas, ya mostradas anteriormente, que manejaba Parménides en su Proemio, así como por su crítica a las concepciones filosoficas de Heráclito, fue un personaje que vivió plenamente el siglo V. Desde mi punto de vista, Parménides escribió el Proemio en el siglo VI (si las cifras de su nacimiento no fueran fieles) o a lo más en la primera mitad del siglo V, por la reverencia mostrada a la diosa y porque las concepciones de Heraclito, quien florecería por el 500 y culminaria su actividad intelectual en el 480 a.c(11), debieron haber estado lo suficiéntemente frescas para que representaran una preocupación filosófica el contradecirlas en su Proemio, en donde "parte del lenguaje utilizado por Parménides sólo puede explicarse desde el supuesto de que esta repitiendo, deliberádamente, frases de Heráclito con espíritu de crítica"(11.x)

Parménides, tal vez sin percatarse por entero de la

(11)Guthrie. Ibid, pag.385
(11.x) Mondolfo. Heráclito, Textos..., de su Introducción.

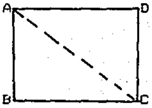
importancia que eso tendría, al criticar a Heraclito y establecer que las cosas no pueden no ser, establecia de una manera abstracta, además de poética, una forma primitiva del Principio lógico de Identidad, lo cual requiriría un nivel de abstraccion similar o tal vez mayor que el de los propios pitagoricos, quienes aún no despegaban el concepto de número abstracto de los objetos de que provenian(recordemos su atomismo numérico). Esto muestra que Parménides vivio un período aproximado en el que estaban frescas las ideas de Heráclito y aún de la Escuela Milesia con la que éste mantenía afinidades, en el que ya había un desarrollo matemático y filosófico que maduró la capacidad de abstracción , el concepto de Alétehia empezaba a separarse de sus connotaciones miticoreligiosas (recordemos la declaración de Maiandrios sobre la instauración de la Isonomia, apuntada anteriormente), pero sobre todo comenzaba a superarse la explicación del origen del cosmos a partir de la naturaleza sensible, como tambien muestran los pitagóricos. Desde esta perspectiva, Parménides estaba cultivando el terreno para la separación del pensamiento desde su conceptualización del Kòsmos a partir de la naturaleza sensible, para abordar su conceptualización meramente abstracta, proveniente de lo concreto de la naturaleza pero fijada en el pensamiento, como algo petrificado y generalizable, y en ese sentido racionalizado. Pero mas aun; Zenón al adaptar la posición de su maestro a las Matemáticas, estaba sirviendo de umbral al pensamiento matemático para despegarle de la concepción corporea del número rígidamente entero, y abrirle la puerta para su conceptualización fraccionaria, implícita en la paradoja de la tortuga. Esto fue fundamental, ya que despues de todo un inconmensurable medía un número entero de veces la unidad más una fracción.

B)ACERCA DE COMO SURGIERON LOS INCONMENSURABLES

En el libro X de los Elementos de Euclides, 117,e, aparece como apéndice una demostración de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado, que al parecer fue un conocimiento común entre los escritores del siglo IV y que contrastaba con la idea de Jámblico, quien asociaba los irracionales con el dodecaedro y las lineas en extrema y media razón. Esta demostración fue aparentemente expuesta por Aristóteles como un ejemplo de la técnica de razonamiento per impossibile(14) y su idea general es como sigue:

Supóngase que AC y AB son conmensurables.

Fig.5



(14)Knorr, Ibid, pags.23 y 24,Ibid.

Como AB=BC, entonces $AC^2=2AB^2$.

Luego AC:AB=ef:g, los menores términos en esta ración.Por tanto ef es desigual a 1 (porque si ef=1, y ef:g=AC:AB y AC>AB, entonces ef>g y por tanto ef>1...!.Así ef es desigual a 1).Y como AC:AB=ef:g, entonces $AC^2:AB^2=ef^2:g^2$,pero como $AC^2=2AB^2$,entonces ef^2 es par (porque si ef fuera impar entonces ef^2 sería impar, porque si un número impar de términos es sumado, el todo es impar), y por tanto ef es par (porque si fuera impar, ef^2 sería impar). Sea h tal que h divide en mitad a ef. Puesto que ef y g son los menores términos de aquellos que tienen la misma razón, ellos son primos relativos, y como ef es par, entonces g es impar. Pero como ef=2h, entonces $ef^2=4h^2$. Luego $ef^2=2g^2$ y por tanto $2g^2=4h^2$, y $g^2=2h^2$,y por tanto g es par...!.Así, AC y AB no pueden ser conmensurables.

Knorr, en síntesis, argumenta que en ella se utiliza como método de demostración una reductio ad absurdum de corte aristotélica que difícilmente podrían haberla realizado los pitagóricos, en la que se utiliza como contradicción la afirmación de que los impares son pares, excluyendo el caso de la unidad, la cual era considerada por los pitagóricos como par e impar.

K.Von Fritz y S.Heller(15) proponen una reconstrucción de demostración del hallazgo de los inconmensurables cuya idea general es la siguiente:

Supóngase que se tiene un pentágono regular. Trazando sus diagonales se forma la estrella del pentagráma en la que la diagonal AB esta en razón extrema y media con BC.

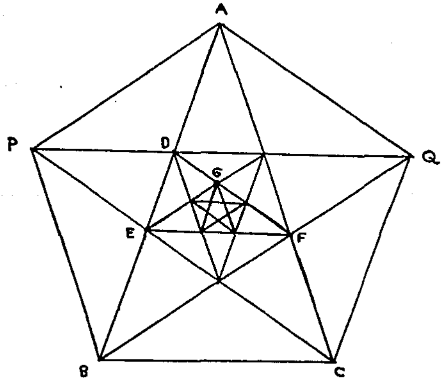


Fig.6. La estrella del Pentagrama

(15)Knorr. Ibid, pag29.

Luego, como DB=BC(porque PDB~BFC) entonces AB-BC=AB-DB=AD. Trazamos otra estrella con las diagonales del pentágono inscrito en la primera estrella. Luego, como ADF~DFQ, entonces AD=DF, donde DF es diagonal y está en razón extrema y media con DE, y ademas DE=DG. Luego AD-DE=DF-DG, y así continúa el proceso ad infinitum.

Si AB y BC iniciales fueran conmensurables, entonces el proceso terminaria cuando se encontrara la maxima medida común, el maximo común divisor entre ellos; pero como continúa al infinito entonces AB y BC son inconmensurables.

Para apoyar esta reconstrucción Von Fritz subraya la importancia del pentagrama dentro de la sociedad pitagórica. Mas aún ,"...él nota la importancia de la razón extrema y media para la construcción del dodecaedro regular el cual , en compañía de la primera publicación del irracionnal, ha sido asociado con la fatal desgracia de Hípaso en los reportes preservados por Jamblico"(14.a).

Knorrr(16) argumenta contra ellos considerando que:(a) La división de una linea dentro de segmentos en razón extrema y media requiere del teorema pitagórico sobre triángulos rectángulos y la construcción formal del pentagono regular vía II.11 ('Para cortar una linea recta tal que el rectángulo contenido por el todo y uno de los segmentos es igual al cuadrado sobre el segmento remanente') y IV.10 requiriria un gran hallazgo mucho más elaborado que el

(14.a)Knorr, Ibid.Pag.30
(16)Knorr, Ibid, pags.30-31.

planteamiento del lado y la diagonal del cuadrado.
(b) No aparece en la literatura griega ningún uso del método de Anthyphairesis para probar la inconmensurabilidad de líneas en razón extrema y media. También utiliza el procedimiento, parecido al presentado en el tratado peripatético de Lineis Insecalibus, utilizado en sus artículos "Stetige Teilung" y "Theodorus-Stelle" argumentando en favor del procedimiento de Anthyphairesis en extrema y media como la base del hallazgo en cuestión, "pero en otros artículos propone un argumento relacionado perteneciente al diámetro y el lado del cuadrado", basandose en Tron de Smirna y proclo, pitagóricos del último periodo. Aunado a los incisos (a) y (b) anteriores, El argumento de Heller, como el de Von Fritz, "transforma la Anthyphairesis en una sorprendente progresión geométrica. Apoyando esta afirmación esta el hecho de que la forma del algoritmo hace virtualmente inconcebible que ésto no se eleve desde la experiencia con la expansión anthyphairética de la racion del lado y el diámetro del cuadrado. Pero igualmente concediendo esto, él debe reconocer que una tal investigación de esta razón implica ya mas bien una avanzada competencia teórica en el manejo de este subterraneo procedimiento algorítmico, nivel dificilmente atañido a los geómetras del siglo IV, en parte estimulados por un interés en el estudio de las lineas inconmensurables. Mas aún una consideración clave es si una regla aritmética como la de 'números lado y diametro' pudo haber sido tomada

como una prueba geométrica de la inconmensurabilidad de su razón"(17.a). De ello, Knorr desprende que lo que Proclo y otros (Heller en este caso) esclarecieron, fue que los números Lado y Diámetro fueron un algoritmo diseñado "para aproximar el lado geométrico y el diámetro",o bien que "los matemáticos griegos fueron familiarizados con la anthyphairesis como un medio de aproximación de ciertas razones de lineas inconmensurables"(18)
Investigaciones de Fowler coinciden con las apreciaciones de Knorr acerca de la anthyphairesis: "Esas palabras (anthyphairetic y anthyphairesis) son derivadas desde el verbo griego anthuphairein usadas en los Elementos II.1,VII.2,X.2 y X.3 para describir esta operación de recíproca substracción. La única razón explícita de Euclides para introducir el proceso es para encontrar la más grande medida común y, en X.2, como un criterio para inconmensurabilidad el cual él entonces nunca uso explícitamente..."(18.a). Esta proposición X.2 de Los Elementos dice:"Si, cuando el menor de dos desiguales magnitudes es continuamente substraída en turno desde la más grande, ésta la cual nunca se deja medir la anterior a ésta, las magnitudes serán inconmensurables".

(17.a)Knorr, Ibi, pag.33
(18)Knorr, Ibid, pag.36.
(18.a)Fowler, The Mathematics of Plato's Academy, 1987,pag.31.

Por su parte, Szabó realiza una reconstrucción en la que argumenta que el surgimiento de los inconmensurables estuvo ligado a la aparición de los términos 'tetragonismos' y 'dynamis' en el lenguaje Griego. Szabó tambien pone en duda el supuesto de Heath(21) (y por tanto de Knorr) de que el descubrimiento de los inconmensurables fue sugerido por la diagonal de un cuadrado, asi como la tesis de K. Von Fritz de que fueron descubiertos en la consideracion del dodecaedro y la del pentagrama, tratadas anteriormente. Asi mismo se opone a aceptar la reconstrucción de las cuatro edades de la historia temprana de las Matematicas, propuesta por Becker(21.b), por suponer éste que " Teodoro descubrió la irracionalidad de las raices cuadradas en general y probó esto por la generalización de los métodos de los pitagóricos", y porque "Teetetos pone los fundamentos de una teoría de cuadrados de irracionales y les clasificó..." Szabó, contradiciéndo esas versiones construye la propia a partir de un estudio filológico del desenvolvimiento de los términos 'dynamis' y 'tetragonismos'en la literatúra griega, pero sobretodo en el Teetetos y Los Elementos de Euclides. Resumo su teoría de la manera siguiente: Parecidamente a Knorr, sostiene(22)que el término δύναμις(dynamis)se ha traducido frecuentemente de manera equivocada como "potencia", pero esa noción tan general era inexistente entre los griegos presocraticos, y sólo en el tiempo de

(21)Knorr, The Beginings of Greek Mathematics.,pag.33
(21.b) Szabó, The Beguinings...,Pag.25
(22)Szabó,Ibid, pag.38

Platón el término αvçn era cercano a ese concepto, pero sólo para las "potencias" de dos y tres. Así,en el contexto del Teetetos, Szabó traduce Σuvασθαi como "cuadrado". El término Σuvασθαi, que traduce como "para tener el valor"o "para ser valioso", sostiene Szabó, sólo es usado en conexión con el" cuadrado" y por tanto en Matemáticas la palabra Σuvασθαi "fue usada originalmente acerca de transformaciones de superficies en el plano"(23). Así, utilizando estas traducciones; "Un rectángulo era transformado en un cuadrado de la misma area y el lado del cuadrado resultante era descrito como;`esta línea recta (ΣuθΕΐα) cuando cuadrada tiene el mismo valor (ïσovΣuvατi) como los rectángulos previos(τwτΕeiΕxoμΕvwuτo)´. Debe ser puntualizado que este verbo sólo puede ser usado sobre las transformaciones de un rectángulo dentro de un cuadrado de la misma area y en este contexto ésto indicó el valor del área y de ahí concluye que el término Σuvασθαi (que proviene del mundo de las finanzas) se convirtió en Matemáticas con el significado; `el valor de un rectángulo cuando se cuadra', para luego dar lugar al término Σuvαμç que en Geometría significo `el valor del cuadrado de un rectángulo' y luego el de `el valor del cuadrado' y finalmente `cuadrado'.Por ello Szabo traduce el primer párrafo del Teetetos como:

"Teodoro estaba manejando algunos cuadrados(πΕeiΣuvαμΕwv) para demostrarnos que las longitudes de los lados de aquellos que tenian una Área de tres o cinco pies cuadrados

---

(23)Szabó,pags.38-39,ibid.

no son conmensurables con la longitud de los lados de una unidad cuadrada"(24). De cuya interpretación sostiene que el punto central del diálogo es el contrastar la enumeración de casos particulares con una comprehensiva definición del mismo fenomeno. En la elaboración de su cronología del término 'Dynamis' sostiéne que éste aparece en el texto de Hipócrates de Quios, sobre el cuadrado de las lineas, transmitido por Simplício, quien comiénza; 'El preparó una fundamentación por él mismo y erigió sobre esto una primera proposición la cual sirvió a su propósito, nominalmente que segmentos similares de circulo tienen la misma razón a cada otra como los cuadrados de sus bases. Así nos muestra que el uso del término fue comun en las Matematicas preplatónicas, pero en Euclides, δυνασθαι "en el sentido de 'tener el valor cuando cuadrado'no ocurre", y así por ejemplo en el Libro X, proposición 9,que trata con los "cuadrados sobre lineas inconmensurables en longitud", tiene la traducción ταατό τwvμnxEi ασμμΕτewv ΕvΘΕiwv τΕτeαgwvα....etc. (Los cuadrados sobre lineas rectas conmensurables en longitud tienen algun otra la razón la cual un número cuadrado tiene a un número cuadrado; y cuadrados los cuales tienen algun otro la razón la cual un número cuadrado tiene a otro número cuadrado tendrán también sus lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados sobre lineas rectas inconmensurables en longitud no tienen a algun otro la razon la cual un numero cuadrado tiene a un numero cuadrado; y los cuadrados los

(24)Szabó,Ibid.pags.40 a la 43.

cuales no tienen a algún otro la razón la cual un número cuadrado tiene a un número cuadrado no tendrán sus lados conmensurables en longitud ni uno ni otro')(24.a)...,sin aparecer la palabra ξυναμιςηιξυνασθαι (paralelogramo), y en su lugar Euclides habla de τετραγωνον, "esforzandose por la más grandemente posible generalidad", en lugar de "cuadrado", un caso particular del paralelogramo. Sin embargo, el término técnico para la transformación de un rectángulo en un cuadrado de la misma área era expresado en Grecia por τετραγωνιςειν o bien τετραγωνισμός. Y a partir de la frase de Aristóteles(25) que dice: 'Que es τετραgνιςειν?. Es el encontrar una media proporcional'

, que en otro lugar explica como :'Las definiciones son usualmente como conclusiones. Por ejemplo, que es tetragonismos?.La construcción de un cuadrado igual en area a un rectángulo (ετερομηκες). Esta clase de definición es una conclusión. Pero quien mantenga que tetragonismos es encontrar una media proporcional tambien especifíca las razones detras de esto'.

Szabó retoma la afirmación de Heiberg(26) de que "la construcción geométrica de una media proporcional (prop.VI.13) fué completamente familiar a Arquitas y los pitagóricos, y debió haberle sido conocida a Hipócrates", para explayarse a explicar en qué consisten los

---

(24.a)Szabó,Ibid, pag.46,y Heath, Euclid's Elements, vol.3,pag.28.
(25)Szabó,Ibid.pags.47 y 48
(26)Szabó,Ibid.Pag.50.

tetragonismos. Literalmente, La proposición VI.13 dice "Dadas dos líneas para encontrar una media proporcional"(26.z)

Aquí es necesario decir que Heiberg(26.a) cita como procedente de Aristóteles un comentario acerca de la proposición II.14 de Los Elementos, que " el cuadrado es mejor definido encontrándo la media" (proporcional) que como "haciendo un rectángulo equilátero igual a uno oblongo dado", porque la definición establece la causa, mejor que la conclusión. Heiberg, con esto pensaba que esta proposición, que establece 'Para construir un cuadrado igual a una figura rectilinea dada', era resuelta mediante la media proporcional en los libros que manejaba Aristóteles.

La explicación de Szabó de ésa concepción parte de la proposición VIII.18 de Los Elementos, que dice :

'Existe un número media proporcional entre cualquiera dos números similares planos',

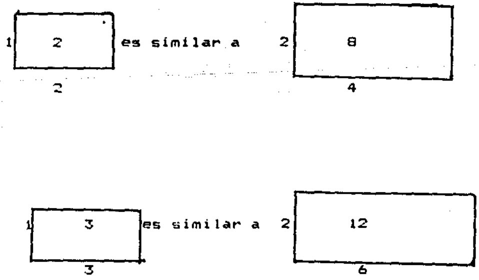
y la proposición VIII.20, que establece que :

'Si existe un número media proporcional entre dos números, entonces esos dos números son similares planos'

(26.z) Heath, Euclid's Elements, Vol.II, Pag.216
(26.a) Heath, Euclid's Elements, Pag.410.

Para entender el término de número similar plano, podemos revisar las proposiciones VIII.16 y VIII.22. La primera establece que si (a)(b)=c, entonces c es un número plano, donde a y b son sus lados. La definicion VIII.22 establece que números similares planos son aquellos cuyos lados estan en la misma razón, y pueden representarse geométricamente como rectángulos similares. Por ejemplo:

Fig.7



Así,entre 3 y 12 existe una media proporcional, que es seis, porque 3:6=6:12. Esto se determinaba en la antigüedad griega de esta manera(27): 'los números eran primero divididos en los factores los cuales tenían conducidos ellos a ser clasificádos como números similares planos en primer lugar (aquí 3=(1)(3) y 12=(2)(6), donde por supuesto si 12 fuera dividido por otros factores distintos que 2 y 6, ese número no sería similar), y luego la media proporcional era obtenida por multiplicar dos diferéntes lados (factores) los cuales no eran similares juntos (esto es(3)(2)=6=(1)(6)). Esto actualmente se calcularía obteniendo la raiz cuadrada del producto de los números similares planos: $\sqrt{(3)(12)} = \sqrt{36} = 6$.

Con ese ejemplo, el rectángulo (número plano 36) cuyos lados (3 y 12) son números similares planos, puede transformarse en un número cuyo cuadrado es el area del rectángulo dado: Area del rectángulo de lados 3 y 12= $(3)(12) = (6)^2$ = área del cuadrado de lado 6. Esa transformación, en general, del área de un rectángulo en el área de un cuadrado de la misma área, era 'Tetragonísmos'. Hay que recalcar que con las proposiciones VIII.18 y VIII.20 este procedimiento se limitaba para rectángulos cuyos lados fueran similares planos. Pero en la VI.13, que Szabó y Heiberg sostienen que es posterior a éstas dos últimas proposiciones, se establece y prueba un procedimiento para encontrar por métodos

(27)Szabó,Ibid.pag.52

geométricos una media proporcional entre dos segmentos de linea cualesquiera, y por tanto entre dos lados de un rectángulo cualquiera, y así cualquier rectángulo podía transformarse en el área de un cuadrado. Con esto, según Szabó,"tan pronto como la posibilidad de esta construcción llego a ser conocida, la cuestión de qué eran exactamente los lados de tales cuadrados...,debió también haber sido elevada", y puesto que por VIII.20 un número media proporcional sólo existía entre números similares planos,"el nuevo descubrimiento hizo que una media proporcional también existiéra entre dos números los cuales no fueran números similares planos, y ello sólo podía reconciliarse con la proposición II.20 introduciéndo la noción de inconmensurabilidad lineal"(28).

De esta manera, según Szabo,el problema de transformar un rectángulo en un cuadrado de la misma area (tetragonismos), que en su forma mas general es equivalente al problema de encontrar una media proporcional entre dos segmentos de linea cualesquiera, condujo al problema de la inconmensurabilidad lineal, y concluye;"Mi conjetura es que el descubrimiento de cómo construir una media proporcional entre cualesquiera dos segmentos de linea también empujó a la introducción del nuevo concepto matematico de dynamis. Por supuesto que no puedo producir ninguna evidencia documental para apoyar esta conjetura, porque ningún texto matemático ha sobrevivido desde los tiempos presocraticos

(28) Szabó, Ibid.,pag.53

durante el cual el concepto se originó(29)". Con esto Szabó revierte el problema relativo al cómo se hallaron los inconmensurables a un problema filológico y de los historiadores.

Sobre ésta versión, creo necesario observar lo siguiente:

1o. En la proposición 14 del Libro II de Los Elementos se establece un procedimiento para construir un cuadrado igual a una figura rectilinea dada en el que no se usan las medias proporcionales y junto con I.47, II.12 y II.13 completa la Teoría de Transformación de areas sin el uso de proporciones. I.42, I.44 y I.45 habilita para construir un paralelográmo teniendo un lado dado y un ángulo, e igual a alguna figura rectilinea dada. El paralelogramo puede tambien ser transformado en un triángulo igual con el mismo lado dado y ángulo haciendo el otro lado lado sobre el angulo dos veces la longitud. Por tanto, es posible, como un caso particular, construir un rectángulo sobre una base dada igual a un cuadrado dado.(29.a). Pero quedaba sin resolver el problema de transformar algun rectángulo (como representando una área igual a la de alguna figura rectilinea). La solución de éste problema dada por II.14, era equivalente a la resolución(29.b) de encontrar un valor x que cumpliera que $x^2=(a)(b)$, donde a y b son lados de un rectángulo dado, es decir estaba ligado al problema de encontrar la 'media geometrica' entre a y b, lo cual

(29) Szabo, Ibid, pag.54.
(29.a) Heath, Euclid's Elements, Pag.410
(29.b) Heath, Ibidem

Eudemo(29.c) atribuye a Teetetos su autoría, como discutiremos más ampliamente, pero ello fue una realización posterior al diálogo que lleva su nombre.

Por tanto, no necesariamente se utilizaron, como en VI. 13, los conceptos de la teoría de proporciones en la resolución del problema de tetragonizar, ya que de II.14 puede inferirse un procedimiento antecesor al de VI.13 por fuera de la teoría de proporciones, la cual fue establecida fundamentalmente por Eudoxo en la decada del 370. Así, la reconstrucción de Szabó quedaría históricamente ubicada después del tratamiento platónico de la inconmensurabilidad mostrado en el Teetetos, es decir, después de la primera mención del hallazgo de los inconmensurables...!

2.-Szabó estudia fundamentalmente el término tetragonismos en la manera como lo maneja Euclides en Los Elementos, pero éste no usa el término 'cuadrados', por lo que esta estudiando un término manejado en el siglo IV, como lo manejaba tambien Aristóteles, casi un siglo después de Pitágoras y los mas tempranos pitagóricos. Esto coloca a Szabó en un contexto que no es el propio del surgimiento de los inconmensurables, y esto es debido a que él acepta implicitamente que su hallazgo se realizó posteriormente al pitagorismo, por el tipo de material que utiliza en su reconstrucción.

3o. De VIII.18 y VIII.20 deriva que un número media proporcional existe entre dos números si y sólo si éstos son

(29.c) Knorr, "La Croix des Mathematiciens...". Pag.43

números similares planos, pero al descubrirse VI.13, que permite construir por medios geométricos una media proporcional entre los lados de un rectángulo cualquiera, éste llevaría a que los lados del cuadrado encontrado no serían números, y que ello sólo podría ocurrir introduciendo la noción de inconmensurabilidad. Sin embargo, el descubrimiento de VI.13 seguramente puso en entredicho la doble implicación existente entre VIII.18 y VIII.20, porque podría construirse la media proporcional no sólo para números sinmilares planos, pero de ahí, no necesariamente, no únicamente, pudo haber surgido la idea de los inconmensurables. ¿No podría haber ocurrido que VIII.18 y VIII.20 siguieran manteniéndose para los numeros (y en el contexto presocrático esto se limitaba a los números enteros positivos, exepto la unidad), mientras que VI.13, planteada en términos geométricos, para las magnitudes o lados de los rectángulos?, y que por lo tanto, al probarse VI.13, empezaran a entender los matematicos presocráticos la separación entre magnitudes y números?.

En mi opinión, la incompatibilidad de VII.18 y VIII.20 con VI.13 no conduce inmediatamente a la existencia de los inconmensurables. Si se mantuvieran VIII.18 y VIII.20 en un contexto limitado a los números y VI.13 para las magnitudes, suponiendo que quienes probaron VI.13 tenían noción de la separacion entre numeros y magnitudes, bien podrian ser compatibles las tres proposiciones, ya que cada una tendria validés en su contexto. Pero esto sólo podría ocurrir si estos descubridores fueran contemporaneos de Platón o posteriores, ya que los testimonios históricos nos muestran a Platón y aristóteles como los que mas antiguamente se percataron de la separación real entre números y magnitudes. Pero si esto ocurriera, entonces primero se habría realizádo el diálogo del Teetétos, y por tanto el planteamiento de los tetragonísmos para cualquier tipo de lados del rectángulo no sería el contexto en el que surgieron los inconmensurables, sino el de el lado y la diagonal del cuadrado, como ilustra el Teetetos. Ahora bien, si el descubridor fuera alguien que no hubiese concebido la separación número-magnitud, colocaría en contradicción VIII.18-VIII.20 con VI.13, de lo cual Euclides se hubiera percatado con muchas probabilidades, y difícilmente les habría incluido. Creo, mas bien, que ésta contradicción pudo contribuir en poner al descubierto la separacion número-magnitud, que los pitagóricos, contrariamente, mantenían como identidad, y que apenas percibía intuitivamente Platón.

4o. Continúa existiendo el punto debil relativo a la ausencia de pruebas documentales que apoyen su tesis, y en su lugar propone un desarrollo aparentemente lógico del término 'tetragonísmos', pero no realiza un analisis historico del desenvolvimiento del término, en relacion a las fechas y sucesos históricos del contexto del hallazgo de los inconmensurables. No se dice cuando aparecen estas palabras, y el uso del término por Szabó a partir de Euclides borra un desenvolvimiento anterior de la misma palabra.

5o. ¿Porqué Euclides habría colocado VI.13 antes de VIII.18 y VIII.20, si en verdad se pensara en el momento de la compilación de Los Elementos de Euclides que había una contradicción?, ¿no iba esto en contra de toda la axiomática de Los Elementos?, ¿No creería Euclides que VI.13 se limitaba a las magnitudes, mientras que VIII.18-VIII.20 eran para los números enteros?.

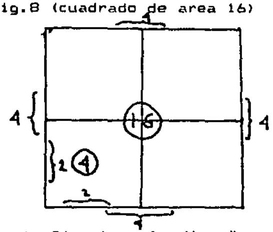
Estoy más de acuerdo con Knorr, cuando plantea que en el diálogo del Menón, Sócrates "sugiere en el acto que el lado y el diâmetro son inconmensurables cuando él advierte al muchacho para puntualizar el lado del doble cuadrado si no puede contarlo", y por tanto estoy de acuerdo que en éste contexto, del lado y diagonal del cuadrado, es en el que aparece el primer hallazgo de los inconmensurables. A continuación insertaré textualmente este fragmento del dialogo del Menón, para despúes abordar su análisis(30): "...Sócrates.-Ya te díje Menón que eres muy astuto. En el acto mismo en que sostengo que no se aprende nada y que no se hace mas que acordarse, me preguntas si puedo enseñarte una cosa, para hacer que inmediatamente me ponga así en contradicción. Menón.-En verdad Sócrates, no lo he dicho con esa intención, sino por puro hábito. Sin embargo, si puedes demostrarme que la cosa es tal como dices, demuéstramela. Sócrates.-Eso no es facil, pero en tu obsequio, haré lo que me sea posible. LLama alguno de los muchachos esclavos que están a tu servicio, el que quieras, para que te demuestre en él lo que deseas. Menón llama al esclavo, y después de cerciorarse que habla el griego, le pregunta: Sócrates.- ¿Díme joven, sabes que esto es un cuadrado?. Esclavo.- Si. Sócrates.-No puede haber un espacio semejante mas grande o mas pequeño?. Esclavo.- Sin duda. Sócrates.-Sí éste lado fuese de dos piés y éste otro tambien de dos piés, cuantos

(30)Platon, Dialogos, Ed.UNAM, Vol.3,pags.356 a 368,y Platón, Diálogos pag.215,Ed.Porrua.

piés tendría el todo?. Considéralo antes de esta manera. Si este lado fuese de dos pies, y éste de un pie sólo , ¿no es cierto que el espacio tendria una vez dos pies?. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿Luego el espacio tiene dos pies?. Esclavo.-Si. Socrates.-Pero como este otro lado es igualmente de dos pies, ¿no tendrá el espacio dos veces dos?. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿Luego el espacio tiene dos veces dos pies?. Esclavo.-Si.Sócrates.-¿Cuántos son dos veces dos pies?: Dímelo después de haberlos contado. Esclavo.-Cuatro, Sócrates. Sócrates.-¿No podría formarse un espacio doble que éste y del todo semejante, teniendo como él todas sus lineas iguales?. Esclavo.-Si.Sócrates.-¿Cuantos pies tendría?. Esclavo.-ocho. Socrates.-Vamos, procura decirme cual es la longitud de cada linea de este otro cuadrado. Las de éste son de dos pies. ¿De cuanto serán las del cuadrado doble?. Esclavo.-Es evidente Sócrates, que serán dobles. Sócrates.-Ya vés, Menón que yo no le enseño nada de todo esto y no hago mas que interrogarle. El imagina ahora saber cual es la linea con que debe formarse el espacio de ocho pies. ¿No te parece así?. Menón.-Si. Sócrates.-¿Lo sabe?. Menón.- No, seguramente. Sócrates.- ¿Cree que se forma con una linea doble?. Menon.-Si. Sócrates.- Obsérvale a medida que el va recordando. Respondeme tú. ¿No dices que el espacio doble se forma con una línea doble?. Por esto no entiendo un espacio largo por esta parte y estrecho por aquella, sino que es preciso que sea igual en todos sentidos, como éste, y que sea doble, es decir de ócho pies. Mira si crees aún que se forma con una línea doble. Esclavo.- Sí. Sócrates.-Si añadimos a esta linea otra linea tan larga como ella, ¿no será la nueva línea doble que la primera?. Esclavo.-Sin duda. Sócrates.-Con esta línea, dices, se formará un espacio doble, si se tiran cuatro semejantes. Esclavo.-Sí. Sócrates.-Tiremos cuatro semejantes a ésta, ¿No será éste el que llaman espacio de ocho pies?. Esclavo.-Seguramente. Sócrates.-En este cuadrado, ¿no se encuentran cuatro, iguales a éste que es de cuatro pies?. Esclavo.-Sí.Sócrates.-¿De qué magnitud es?, ¿no es cuatro veces mas grande?. Esclavo.-Sin duda. Sócrates.-Pero, ¿lo que es cuatro veces mas grande, es doble?. Esclavo.-No, ¡Por Zeus!. Sócrates.-¿Pues qué es?. Esclavo.-Cuadruplo. Sócrates.-De esta manera joven, como, con una linea doble no se forma un espacio doble, sino cuadruplo. Esclavo.-Es la verdad. Sócrates.-Porque cuatro veces cuatro hacen diesiseis, ¿no es así?. Esclavo.- Sí. Sócrates.-¿ Con que linea se forma, pues, el espacio de ocho pies? El espacio cuadruplo, ¿ no se forma con ésta?. Esclavo.-Convengo en ello. Sócrates.-Y el espacio de cuatro pies, ¿no se forma con esta linea, que es la mitad de la otra?. Esclavo.-Sí. Sócrates.-Sea así. El espacio de ocho pies ¿no es doble que éste y la mitad de aquel?. Esclavo.-Sin duda. Sócrates.-Se formará con una linea mas grande que ésta y mas pequeña que aquella, ¿no es así?. Esclavo.-Me parece que si. Sócrates.-Muy bien, responde siémpre lo que pienses. Díme ¿no era ésta linea de dos piés y ésta otra de cuatro?. Esclavo.-Si.Sócrates.-Es preciso por consiguiente que la linea del espacio de ocho piés sea más grande que la de dos pies, y mas pequeña que la de cuatro. Esclavo.-Así es preciso. Sócrates.-Dime de cuánto debe ser. Esclavo.-De tres pies. Sócrates.-Sí es de tres pies, no tenemos mas que añadir a esta línea la mitad de ella misma, y será de tres pies. Porque he aqui dos pies y aquí uno. De éste otro lado, en igual forma, he aquí dos pies y aquí uno, y resulta formado el espacio de que hablas. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿Pero si el espacio tiene tres piés de este lado y tres pies de este otro lado, no es tres veces tres?. Esclavo.-Evidentemente.Sócrates.-¿Cuantos son tres veces tres?. Esclavo.-Nueve.Sócrates.-¿Y de cuántos piés debe ser el espacio doble?. Esclavo.-De ocho.Sócrates.-El espacio de ocho piés no se forma entonces tampoco con la linea de tres pies. Esclavo.-No verdaderamente. Sócrates.-¿Con que linea se forma?. Procura decírnoslo exactamente, y si no quieres calcularla muéstranosla. Esclavo.-¡Por Zeus!,no sé Sócrates!..". Y despúes de insistirle a Menón en su argumentación de que sólo ha hecho recordar al esclavo lo que ya sabía, Sócrates continúa: "Tú esclavo, dime: ¿este espacio no es de cuatro pies?, ¿comprendes?. Esclavo.-Si, Sócrates.-No puedes añadirle este otro espacio que es igual?. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿Y éste tercero igual a los otros dos?. Esclavo.-Si. Sócrates.-Para completar el cuadrado, ¿no podrémos, en fin, colocar éste otro en éste ángulo?. Esclavo.-Sin duda. Socrates.-¿No resultan así cuatro espacios iguales entre sí?. Esclavo.-Si. Sócrates.-Pero, ¿que es ése espacio respecto de éste otro?. Esclavo.-Es cuadruplo. Sócrates.-Pero lo que necesitábamos era formar uno doble, ¿no te acuerdas?. Esclavo.-Sí.Sócrates.-Ésta línea, que va de un ángulo a otro, ¿no corta en dos cada uno de estos espacios?. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿No vés cuatro lineas iguales que encierran este espacio?. Esclavo.-Es cierto. Sócrates.-Mira cual es la magnitud de este espacio. Esclavo.-Yo no lo veo. Sócrates.-¿No ha separado cada linea de las antes dichas por mitad cada uno de estos cuatro espacios? ¿No es así?. Esclavo.-Si. Sócrates.-¿Cuántos espacios semejantes aparecen en éste?. Esclavo.-Cuatro. Sócrates.-¿Y en aquel?. Esclavo.-Dos. Sócrates.-¿En que relación está cuatro con dos?. Esclavo.-Es doble. Sócrates.-¿Cuántos piés tiene este espacio?. Esclavo.-Ocho piés. Sócrates.-¿Con que linea está formado?. Esclavo.-Con ésta. Sócrates.-¿Con la linea que va de uno a otro ángulo del espacio de cuatro pies?. Esclavo.-Si.Socrates.-Los Sofistas llaman a esta línea diámetro. Y así, suponiendo que sea este su nómbre, el espacio doble, esclavo de Menón, se formara como dices, con el diámetro. Esclavo.-Verdaderamente sí Sócrates..."

Desglosemos su contenido: Sócrates pregunta al esclavo si sería posible construir un cuadrado que tenga un espacio (área) que sea doble del espacio de un cuadrado dado de lados 2 cada uno; es decir, el nuevo cuadrado tendría un espacio de 8 pies. Al asentir el esclavo, le pide Sócrates que le diga de cuántos pies de longitud serían los lados del nuevo cuadrado. Primeramente el esclavo sostiene que sus lados medirán el doble de los del primero, cuatro;a lo que Sócrates le muestra que eso ocurriría para un cuadrado que sería el cuadruplo del primero(porque el cuadrado al que alude el esclavo tendría un espacio de 16).

Fig.8 (cuadrado de area 16)



Luego, al insistir Sócrates, le dice "es preciso por consiguiente, que la linea del espacio de 8 pies sea más grande que la de 2 pies y más pequeña que la de 4".

y al requerirle al esclavo cuánto mediría el lado buscado, el esclavo contesta que sería entonces de 3 (observemos nosotros que da un número entero entre 2 y 4).

En ese caso Sócrates le muestra que si así ocurriera, el espacio formado mediría 9 pies, que es mayor que 8, el espacio buscado, y ahí Sócrates insiste:'Con que línea se forma?.Procura decirnoslo exactamente, y si no quieres calcularla, muéstranosla'(30), a lo que contesta sorprendido el esclavo:'¡Por Zeus! No sé Sócrates'

Sócrates discute con Menón acerca de que si el conocimiento es o no el recordar, para ,inmediatamente despues, volver con el esclavo. Retoma el cuadrado de lado 2 ubicándolo en una esquina de el de lado 16, y pregunta:'esta linea, que va de un ángulo a otro, ¿no corta en dos cada uno de estos espacios?'

, como si en ese momento Sócrates estuviera cortando el espacio del cuadrado original en dos partes iguales, formando el espacio de los dos triangulos formados al trazar una diagonal en el cuadrado.

Luego, construye Sócrates otro cuadrado encima de la "diagonal" del cuadrado original como colocando 4 triangulos encima de ella (como construyó previamente el cuadrado cuadruplo agregando de uno en uno los cuadrados de area 4)

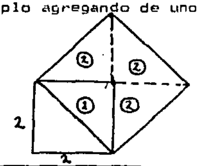


Fig. 9

(30)platón, Diálogos, pag.215.Porrua.

Así le muestra Sócrates al esclavo que si en el cuadrado original de 4 pies se forman, al trazar la diagonal, dos triángulos de espacio 2 cada uno, en el nuevo cuadrado que construye encima de la diagonal del cuadrado original hay cuatro triángulos tambien de espacio 2 cada uno ,con lo que al sumarse sus espacios producen el espacio 8 buscado para el nuevo cuadrado, y tendrá por tanto el doble del espacio del cuadrado original.

Sócrates culmina;'Los Sofistas llaman a esta linea diámetro. Y así,' suponiendo que sea este su nombre, el espacio doble, esclavo de Menón, se formarán, como dices con el diámetro'con lo que le concluye Sócrates a Menón que 'Conocer es recordar lo que ya sabemos'.

De este desglosamiento podemos hacer las siguientes onservaciones: a) Cuando el esclavo dice no saber qué medida tienen los lados del cuadrado cuyo espacio es de 8 pies, llega a esa aceptación porque percibe que esos lados no miden 2, ni 4, ni 3, que son los únicos números enteros que producen cuadrados de un espacio entre 4 y 16 piés cuadrados. En el contexto de la aritmética griega era común la concepción del número como números enteros positivos; si el esclavo no veía que esos tres números, lados del cuadrado doble buscado, formaban los lados del cuadrado, es porque debía serle completamente habitual afirmar que no había tales medidas de los lados del cuadrado. ¿ no indicaría esto una inercia socialmente natural a aceptar la existencia del cuadrado de espacio 8. cuyos lados no seran enteros entre 2 y 4 (¡y por tanto no serán números ,en el contexto griego presocrático!)?

b) Sin embargo, cuando Sócrates concluye en ese mismo diálogo, después de encontrar el cuadrado doble, con Menón que "...el esclavo no ha dado una respuesta que sea suya", y que esos pensamientos " estaban" en el esclavo, siguiendo la argumentación global del diálogo, podríamos concluir que la idea de la inconmensurabilidad estaba en el esclavo, pero entonces también lo estaba en el contexto cultural griego, como se confirma cuando hace alusión a que los sofistas le llamaban "diámetro" al lado del cuadrado doble, y por tanto seguramente ya estaban descubiertos los inconmensurables en el momento del contexto del diálogo del Menón.

c)Si el esclavo hubiera pensado acorde con la argumentación de Szabó sobre la teoría de la media proporcional y los tetragonismos, tomando en cuenta VIII.18 y VIII.20, posiblemente hubiera planteado, de saber las Matemáticas de su tiempo por supuesto (el comillado se lo agrego para darle a su contestación forma de dialogo): "Existe una media proporcional entre los dos números similares planos 4 y 16, porque 2:2=1=4:4.

Luego, existe un número media proporcional entre 4 (el espacio del cuadrado original) y 16 (el cuadruplo del primero); éste es 8, porque 4:8=8:16.

Luego entonces, existe el cuadrado de espacio 8."

Pero ,¿cuanto miden sus lados?,habría de requerirle Sócrates al esclavo, a lo que con más sorpresa que en el diálogo original contestaría:¡Por Zéus! No sé Socrates".

Y después, lo que es más importante, Socrates no seguiría el mismo proceder registrado en el diálogo ¡¿no debiera haber hecho alguna alusión mínima a VI.13, para construir el cuadrado de espacio 8, como propone Szabo se allanó el camino hacia los inconmensurables?

Pero no ocurrió así, y el fragmento nos muestra, con todo y su demostración 'heurística', que con los tetragonismos no podría el esclavo construir el cuadrado de espacio duplo al original, ya que hubiera requerido de la geometría del lado y el diámetro del cuadrado.

En cambio, debemos notar que en el dialogo Platon toma el concepto de cuadrado como figura geométrica, no como 'potencia' porque aqui no se utiliza este concepto, y construye el cuadrado doble al original por encima de la diagonal del cuadrado de lado dos, colocando cuatro triángulos, cada uno de un espacio igual al creado por la bisección del espacio del cuadrado original por la diagonal. Y en este procedimiento sólo intervienen figuras geométricas, demostrándonos Sócrates la existencia del cuadrado de espacio 8, y mostrándonos la existencia de un inconmensurable, la diagonal del cuadrado de lado 2, que es inconmensurable con respecto al lado del mismo cuadrado.

Con esto podemos dar un contra ejemplo documentado a Szabó, en el que se determina un cuadrado con lados inconmensurables en cuya construcción no fue necesario el uso de tetragonismos, sino simples figuras geométricas Platón escribió el diálogo del Menón y en su descripción sólo incluye procedimientos geométricos. Si, como dice Szabó , el hallazgo de los inconmensurables se hubiera enmarcado en el terreno de los tetragonismos, la discusión entre Sócrates y el esclavo hubiera registrado más caractéres aritméticos que geométricos, pero claramente esto no ocurre, como muestra nuestro desglose del parrafo del diálogo. Y esto sin tomar en cuenta que el diálogo se realizó en el siglo IV.

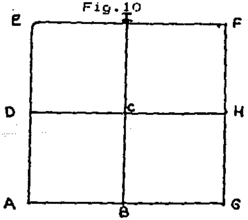
Knorr(31) extiende sus deducciones desde la figura resultante para probar la inconmensurbilidad del lado y el diámetro del cuadrado, a modo de reconstruccción de la manera como posiblemente se realizó el hallazgo de los inconmensurables. Su demostración es por reducción al absurdo:

Parte de suponer que DB y DH (el lado y la diagonal del cuadrado) son conmensurables. Luego, cada uno de esos lados debe poderse representar por un número, el número de veces la unidad con la que son mesurables. Pero además, se requiere que esos números estén reducidos al mínimo numero, en el sentido de que no ambos sean pares.

(31) Knorr, ibid., pag.26

Como AGFE (ver Fig.10 abajo), el cuadrado que primeramente formo el esclavo, es el cuadruplo de ABCD, entonces el número cuadrado AGFE es par, y por tanto en particular su lado AG es par también, así como lo es DH, por propiedades de los números pares. Ahora, como el cuadrado DBHI es el doble de ABCD, entonces DBHI representa un número par, y por lo tanto su lado DB es par. Por tanto DH y DB son pares!, lo que es una contradicción ,porque habíamos partido de que no lo eran. Por tanto, no es posible que sean conmensurables y, así,el lado y la diagonal del cuadrado DBHI son inconmensurables.

Fig.10



Siguiendo fundamentalmente la idea de la demostración de Knorr, nosotros probaremos el paso aludido anteriormente acerca de la existencia del último término de los lados DB y DH, porque no parece muy clara la demostración que presenta Knorr(31.a).

(31.a)Knorr, The Evolution...Pag.27

Supongamos que DB y DH sean ambos pares y no se pueden reducir al último término. Al ser DH par, el cuadrado AGFE sería par y por tanto tambien sería par su mitad, DBHI. Luego, sería par ABCD, y por tanto DC, uno cualquiera de sus lados, sería par, con lo que ABCD podría dividirse o separarse en cuatro cuadrados, cada uno de los cuales sería par, y así el proceso continuaría hasta encontrar el cuadrado de lado uno, y este sería par, aunque tambien impar para los pitagóricos. Aqui se presentan dos casos:

a)Consideremos que la unidad es no divisible.
Esto ocurriría en el contexto presocrático de las Matemáticas, particularmente durante el pitagorismo. En éste caso la demostración quedaría concluida porque llegaríamos a que la unidad es divisible e indivisible simultaneamente, lo cual era imposible en ese contexto, al concebirse indivisible.

b)Que la unidad sea divisible.
Esto sólo ocurriría en el contexto de la Matemáticas postplatónicas, las que conciben la unidad como Aristóteles:'

'indivisible absolútamente si ésta es la medida de un número, pero relativamente si ésta es la unidad de medida de una magnitud'.(32)

(32)Jonnes.Number before Euclid.,pag.44

De la primer manera no podría concebirle porque no se está trabajando con números. Sólo quedaría la segunda asepción, como magnitud: Pero si ésto ocurriera, quien estuviera ejecutando el tipo de demostración que presenta Knorr y considerara la unidad como divisible, debía ser un personaje contemporaneo a Aristóteles, mucho tiempo despues de la presentación del Teetetos y el Menón, y se conduciría hasta una partición infinita de la unidad, y como el infinito es inalcanzable, entonces ello debiera conducirlo a un imposible. Por tanto no podría ocurrir que los lados DB y DH fueran ambos pares, l.q.q.d.

No me parece clara la demostración que presenta Knorr, cuando después de mostrar el proceso de formar infinitamente cuadrados pares cada ves mas chicos, dice "Pero si AGFE representa un numero finito, esta sucesiva división en mitad debe eventualmente terminar. En este camino, la inicial afirmación de que ámbos AG y DB representan números conduce a una imposibilidad"(33).

Creo que no es suficientemente claro porque dependiendo como se tome la unidad, como divisible o no, así se verá si el proceso de división "debe eventualmente terminar" o no.

(33)Knorr, Ibid, pag.27

Además, la contradicción surge de suponer que AG y DB representan números pares, no solamente porque "AG y DB representan números" (aunque aqui posiblemente hay un error de imprenta o mecanografiado del libro).

Pero en lo esencial parece correcta la demostración de Knorr.

Y en efecto, como también plantea Knorr, el proceso de regreso tambien nos llevaría a mostrar que la elección de términos reducidos es siémpre posible.

En el tratado peripatético 'De Lineis Insecálibus'se da un procedimiento con el que, haciendo algunos añadidos, como hace Knorr, conduce a probar la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado, de lo que Knorrr mismo concluye que "...nuestro argumento de regreso es mucho del tipo de tratamiento el cual debio adecuarse al propósito del autor de este tratado".

En él, el autor parte de un cuadrado ABCD, y dice:

"El lado iguala en cuadrado la perpendicular y el semidiámetro, por tanto el lado no es mínimo"(34)

Esto es $(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2$

(34)Knorr, Ibid.,pag.28

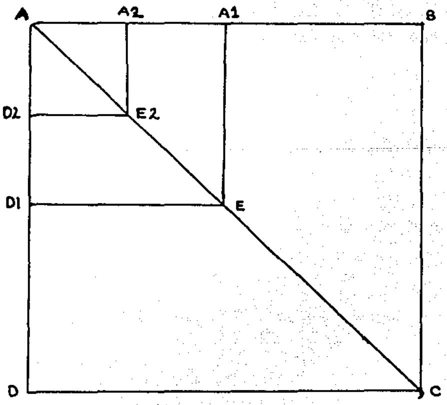
Pero aqui evita el hecho de que AC sea divisible. A mi parecer éste autor creía que se podían ir construyendo triángulos rectángulos, donde se cumpliera la anterior igualdad, infinitamente hasta llegar a una imposibilidad.

Así $(AE)^2 = (AA1)^2 + (A1E)^2$

$(AA1)^2 = (AE1)^2 + (EA1)^2$

$(AA2)^2 = (AE1)^2 + (E1A2)^2$ ...etc, etc...y así "el lado no es mínimo"(la imposibilidad).

Fig.11



Sin embargo aqui elude que la diagonal y el lado son ambos pares, como nosotros supusimos en el argumento de regreso para demostrar la existencia del "menor término" en que se representan.

Acorde con Knorr, las condiciones del autor deben conducir a que AB debe representar un número par. Así AB podría ser bisectado por A1 y trazar el cuadrado AA1ED1. Como AB es par entonces $(AB)^2$ es par, y por tanto el cuadrado ABCD es el cuadruplo del cuadrado AD1EA1, y por tanto AD1EA1 es par y A1E (así como D1E) es par. Luego, si AA1 es par, se puede bisectar por A2E2, y por tanto el cuadrado AD1EA1 sería el cuadruplo de AD2E2A2 y por tanto AD2E2A2 es par, y por tanto AA2 y A2E2 son pares y, $(AE2)^2=(A2E2)^2+(AA2)^2$ es par; y así se iría el proceso hasta el infinito. llegando a una imposibilidad. Por tanto este procedimiento "establece la inconmensurabilidad de AB y AC y también la inadmisibilidad de la afirmación de la menor magnitud", como dice Knorr, de lo cual adicionalmente concluye :"Nosotros podemos afirmar que este tratamiento del lado y el diámetro del cuadrado, en ambas formas dadas arriba, fue familiar a los escritores del siglo V. Estos principios no incluyen nada mas allá que los objetos de una simple geometría métrica, ciertamente avalable a los griegos del siglo IV. Más aún, el problema de la inconmensurabilidad pudo bien ser elevado a una inanticipada consecuencia de un tal estudio métrico del cuadrado"(35). El fragmento presentado del menón, a partir

(35)Knorr, Ibid, pag.28

del cual se hace toda la discusion anterior, representa hasta ahora el testimonio más antiguo en el que se ilustra el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado, el cual algunas fuentes conectan con la prueba matemática de origen pitagórico acerca de que el lado y la diagonal del cuadrado son inconmensurables, presentada en Los Elementos (El apéndice del cual se habla anteriormente)(36). Pero no todos le han tomado en el sentido de la interpretación de Knorr. Szabó, señala algunas observaciones que en éste contexto, bien pueden ser tomadas como críticas a la interpretación de Knorr, aunque no parezcan ser dirigídas directamente hacia ella(37):

a) Szabó señala que es conocido que el problema de la duplicación del cubo ocupo durante mucho tiempo a los matemáticos griegos(38), y que de ello Hipócrates de Quíos formuló una imagimativa propuesta que, sin embargo, no resolvió el problema. Posteriormente, Arquitas de Taras le abordó, para encontrar "la primer solución a éste problema" (Szabó no proporciona aquí las fuentes que apoyen esta afirmación), y después otros matemáticos le resolvieron pero sin ocupar la de Arquitas. De ahí. Szabo da un salto, extrapolando: "Por tanto puede ser conjeturado con alguna plausibilidad que en un más temprano tiempo (por supuesto un tiempo antes de Hipócrates de Quíos) la duplicación del cuadrado fue justamente un interesante problema para los

(36) Szabo, The Beginings...,Pag.93
(37)Szabo, Ibid., Pag.95
(38) Szabo, Ibid. Pag.91

matemáticos como la duplicación del cubo llego a ser más tarde en el desarrollo de las Matemáticas", basandose en la idea de Becker de que el pasaje del Menón es un "retrato vivo de una lección en geometría elemental, como ésta pudo haber sido enseñada en su tiempo"(39).

Sin embargo, en la Historia de las Matemáticas queda registrado un período entre el descubrimiento de los inconmensurables y su divulgación en los diálogos platónicos, en el cual, los matemáticos griegos se habrían ocupado de tres problemas importantes de la geometría: La Cuadratura del círculo (donde se ubica el trabajo de Hipócrates de las Cudraturas de las Lúnulas), La trisección de cualquier ángulo (Hipias de Elis y su curva, posteriormente conocida como la cuadatrix), y la duplicación del cubo (reducido pòr Hipócrates al problema de encontrar dos medias proporcionales en continuada proporción entre dos líneas rectas dadas). Este último problema consistia de fondo en encontrar geométricamente la raíz cubica de 2, pero no hay indicios de que se extendiera la investigación de su raíz cuadrada. Pero debemos tomar en cuenta que Hipias nació(42) probablemente alrededor del 460 e Hipócrates, tambien probablemente, entre 450 y 430, y de ser así, ellos atenderían esos tres problemas alrededor del último cuarto del siglo V. Si éste hubiera tratado la duplicación del cuadrado como lo sugiere Szabó, no debería ello también

(39) Szabó, Ibid.Pag.92
(42) Heath, Euclid's Elements, Vol.1, Pag. 413

haberse enunciado de manera que se conociera como problema resuelto?, ¿porqué habría entonces pasado tanto tiempo entre un supuesto trato de los inconmensurables por Hipócrates mediante la duplicación del cuadrado y su primera divulgación en El Menón?, ¿el tratamiento de la duplicación del cuadrado no habría acortado el lapso entre el hallazgo de los incoonmensurables y ésa divulgación?. Una cosa es clara para mi: Si como dice Szabó que " la inconmensurabilidad lineal, así como la realización de que lineas rectas inconmensurables fueran conmensurables al cuadrado, fueron llevados a traves del intento de encontrar una media proporcional entre dos lineas rectas (magnitudes)" y ,además, "...por tanto parece que el problema de la irracionalidad se originó en la Teoria de Proporciones", si ello ocurriera, entonces el hallazgo de los inconmensurables quedaria en un contexto después de la existencia de Teetetos, cuando Eudoxo trabajaba en la Academia de Platón, y por tanto mucho después del diálogo El Menón y sobre todo de la existencia de Hipócrates, quien supone Szabó haría un tratamiento de los inconmensurables por la vía de la duplicación del cuadrado. Esto contradice al mismo Szabó.

Además, en el diálogo del Menón, en la manera como nosotros lo desglosamos acorde con la traducción tomada, también cabe la posibilidad de que se hable del cuadrado de área doble tan sólo como el número 8 es el doble de 4, sin involucrar ningún procedimiento que implique el uso de las medias proporcionales, como cree Szabó.

b) Szabó reconoce que el problema de la duplicación del cuadrado conduce al problema de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado, y desde allí al problema de la inconmensurabilidad lineal.

Pero a partir de la idea de Hipocrates, el cual según Becker transformó el problema de la duplicación del cubo en el problema de encontrar una media proporcional X y Y entre A (la orilla del cubo) y 2A, (40) (de donde obtiene que X cubica= 2(A cúbica)), a partir de ello Szabó conjetura que por "analogía" Hipocrates debió hacer una demostración similar para concluir que el problema de la duplicación del cuadrado y el de encontrar una media proporcional entre un número y su doble son sinónimos, y por tanto en última instancia es sinónimo de la idea de los tetragonismos. Y: "Este discernimiento sugiere la conjetura de que el descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal, así como la realización de que líneas rectas inconmensurables fueran conmensurables al cuadrado, fue llevado sobre los intentos para encontrar una media proporcional entre dos líneas rectas (magnitudes)...Por tanto ésto aparenta que el

---

(40) Szabó, Ibid. Pag.97

problema de la irracionalidad se originó en la teoría de proporciones."(41)

Sobre estas observaciones, yo le contestaría con estas modestas reflexiones:

La extrapolación que hace desde el método de Hipócrates para el caso cúbico no puede ser realizada sin antes mostrar testimonios que el problema de la duplicación del cuadrado también representó un problema que ocupó largamente a los matemáticos griegos. Además, en la interpretación del fragmento del menón , como nosotros la desglosamos, también cabe la posibilidad de que la duplicación del cuadrado de área 4, sea tomada de la manera como si se tratára de la cantidad 8 como el doble de la cantidad 4, para lo cual siguiendo el procedimiento señalado (de imaginar los triangulos de area 2,como formando otro cuadrado, el de área 8, por encima de la diagonal del cuadrado de área 4). Todo ello sin considerar para nada la media proporcional, como hace Knorr. Por tanto, no es aparente que el problema de la irracionalidad se haya originado en la Teoría de Proporciones. Como ya apuntábamos cuando tratábamos el contexto del pitagorismo.

(41) Szabó, Ibid. Pag.98

CAPITULO III: LA TEORIA DE LOS INCONMENSURABLES.

En base a las diferéntes versiones, en esta parte haré un resumen de la manera como pudo haberse desarrollado el estudio de los irracionales en la antigüedad de la Grecia clásica, conformando lo que es llamado como La Teoría de Los Inconmensurables.

Heath ya había establecido que el contexto del surgimiento de los inconmensurables fue el estudio de la diagonal y el lado del cuadrado(O.a) a traves de los pitagóricos, quienes aparecen(O.b) como los autores de su descubrimiento en la Scholia del original del Libro X de Los Elementos.

Su traducción del fragmento aludida dice(O.c):

"...Platón nos dice que Teodoro de Cyrene escribió sobre raíces cuadradas (dynameis), probando que las raíces cuadradas de tres piés cuadrados y cinco piés cuadrados no son conmensurables con la de un pie cuadrado, y asi, seleccionando cada una de tales raíces hasta la de 17 pies cuadrados, en la cual por alguna razón se detuvo", y en la cual también hace la observación de que no aparece $\sqrt{(2)}$, porque "seguramente había sido descubierta antes".

(O.a) Heath, the Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol.1,Pag.1, 1956
(O.b) Heath. 1956. pag 1.

Es muy notoria la inclusión del término "raíces" en ésta interpretación, del cual Knor, como veremos adelante, discrepa y traduce como "potencias". Heath llegó incluso a atribuir a Pitagoras la invención de un fórmula para encontrar triángulos rectangulos en números racionales, y en conexión con esto fue inevitable que los pitagóricos investigaran las relaciones entre los lados y la diagonal de otros triángulos rectángulos."...Ellos debieron naturalmente dar especial atención a los triángulos rectangulos isósceles; ellos debieron probar a medir la diagonal, que pudiera arribar en sucesivas aproximaciones, en fracciones racionales a el valor de raiz de 2, y debieron encontrar que sucesivos esfuerzos para obtener una exacta expresión para esto fallaron". Heath argumenta que el método por el cual los pitagóricos demostraron la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ fue el expuesto por Aristoteles en The Prior Analitics, ya analizado en el capítulo anterior, y que aparece en Los Elementos X.117. Pero, continua, este método se limita a esa raíz o si acaso para probar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado, pero para probar la inconmensurabilidad de los lados de cuadrados(O.c) , uno de los cuales tiene tres veces el area de otro, un procedimiento enteramente diferente es necesario, y nosotros encontramos en efecto que, igualmente un siglo después del tiempo de pitagoras, fue sencillamente necesario usar pruebas separadas (como muestra el pasaje del Teetetos que

(O.c) Heath, Ibid. pag. 2

Teodoro hízo) para establecer la inconmensurabilidad con la unidad de √(3), √(5),...hasta √(17). Heath, como hará knorr, adjudíca a Teetetes la autoría del teorema X.9 de los Elementos, el cual literalmente dice;"Los cuadrados los cuales no tienen a algún otro la razón de un número cuadrado a otro número cuadrado tienen sus lados inconmensurables en longitud", al cual, según lo anterior no se habría llegado de manera inmediata, síno a partir de la demostración de casos separados. Este al parecer, según muestra el diálogo platónico, no habría sido conocido por Teodoro, y en él se muestra la manera como Teetétos lo intuyó, para luego abordar a su demostración. Ademas, de la antigüedad tambien provienen testimonios de la fructifera labor de Teetetes en la continuación del estudio de los inconmensurables, como el de la traducción arabiga del Libro X descubierta por Woepcke(o.e), en la cual se confirma que la teoria de los inconmensurables tiene sus origenes en los pitagóricos, y que Teetetes con sus dotes encontro una "distinción de las raíces cuadradas conmensurables en longitud desde aquellas las cuales son inconmensurables, y tenía divididas las bien conocidas especies de líneas irracionales trás las diferentes medias, asignando la medial a la geometría, la binomial a la aritmética, y la apotema a la armónica, como es establecido por Eudemo el Peripatético(o.d)". Pero además, dice el documento,"Trás de los estudios de Teetetos,

(o.e) Heath, Ibid,pag. 3
(o.d) Heath, Ibid, pag. 3

Apolonio investigaría los inconmensurables, de donde surgiría el texto del cual solo se conoce su titulo, Dos Libros sobre lineas Irracionales y Sólidos".

Desde mi punto de vista, Knorr se apega en su reconstrucción a Heath más que a ningún otro investigador de la teoria de los inconmensurables, y haciéndole criticas necesarias, le profundiza y da continuidad. Tambien, como hace Heath, parte de la aceptación del contexto del estudio del lado y el cuadrado como el originario en el surgimiento de los inconmensurables, retoma en gran parte la interpretación de "la parte matemática del Teetétes" desde Heath, sustituyéndo el término "raíces"por "potencias"y adecuandolo a éste, y descarta implicitamente el término "tetragonismos"de Szabo por ser un caso particular de las dynameis(o.f), para luego incidir en el estudio de la manera como Teodoro pudo haber hecho la demostración de la inconmensurabilidad para el cuadrado de area 3, 5,...hasta 17, donde Teodoro habria encontrádo las dificultades aludidas.

Luego, siguiendo con el contenido del dialogo y coincidiendo con Heath, analiza la labor de continuación de Teetétes, y añade su extension para los inconmensurables en la aritmética y la geometría estudiados por Arquitas y Eudoxio.

(o.f) Bergreen, History of Greek Mathematics: A suyvey of recent researchs.

Apolonio investigaría los inconmensurables, de donde surgiría el texto del cual solo se conoce su titulo, Dos Libros sobre lineas Irracionales y Sólidos".

Desde mi punto de vista, Knorr se apega en su reconstrucción a Heath más que a ningún otro investigador de la teoría de los inconmensurables, y haciéndole críticas necesarias, le profundiza y da continuidad. Tambien, como hace Heath, parte de la aceptación del contexto del estudio del lado y el cuadrado como el originario en el surgimiento de los inconmensurables, retoma en gran parte la interpretación de "la parte matemática del Teetétes" desde Heath, sustituyéndo el término "raíces"por "potencias"y adecuándolo a éste, y descarta implicitamente el término "tetragonismos"de Szabo por ser un caso particular de las dynameis(o.f), para luego incidir en el estudio de la manera cómo Teodoro pudo haber hecho la demostración de la inconmensurabilidad para el cuadrado de area 3, 5,...hasta 17, donde Teodoro habría encontrádo las dificultades aludidas.

Luego, siguiendo con el contenido del dialogo y coincidiendo con Heath, analiza la labor de continuación de Teetétes, y añade su extensión para los inconmensurables en la aritmética y la geometría estudiados por Arquitas y Eudoxio.

(o.f) Bergreen, History of Greek Mathematics: A suyvey of recent researchs.

Es novedosa la manera como la reconstrucción de Knorr se adecúa en efecto con el problema de que el tipo de demostraciones que supuestamente realizó teodoro en el Teetetos se topan en el caso de la potencia 17, lo cual le da una nota de gran credibilidad. A continuación haremos un recuento de la reconstrucción de Knorr, con el objeto de azhirnos a mayores elementos para la obtención de nuestras propias conclusiones.

Con el método de representación puntual de números de los pitagóricos, para los teoremas de pares e impares, o mediante procedimientos meramente aritméticos, para el resto , Knorr demuestra de manera lozana proposiciones aritméticas(O), que aquí damos la categoría de Teoremas a efectos de nominación, para números pares e impares, para números figurados y para números triples (números A, B y C tales que $A^2+B^2=C^2$), que habrían servido a Teodoro como base matemática para sus demostraciones geométricas de inconmensurabilidad.

Para Números Pares e Impares:

TeoV.1.-(a) La suma de una multitud de números pares es par (IX.21) ;(b) La suma de una multitud par de números impares es par(X.22);(c) La suma de una multitud impar de números impares es impar (IX.23).

Teo.V.2.-(a) En substracción, la diferencia entre dos números de la misma paridad es par (IX, 24, 26) ;(b) La diferencia de dos números de opuesta paridad es impar (IX, 25, 27).

Teo.V.3.-(a) El producto de un número por un número par es par (IX.28);) b) El producto de un número impar por un número impar es impar (IX.29).

Corolario(a) El cuadrado de un número par es par;(b) El cuadrado de un número impar es impar.

Para Números Figurados:

Teo.V.4.-Números cuadrados(como en la definición 5) son el producto de factores iguales.

Teo.V.5.-Números Heterométricos son el producto de dos factores los cuales difieren de cada otro por una unidad singular.

Teo.V.6.-Cualquier número Heterométrico es el doble de un número triangular

Teo.V.7.-Un número cuadrado es divisible dentro de cuatro partes iguales.

Teo.V.8.-Cualquier cuadrado impar, cuando es disminuido por una unidad, se convierte divisible en cuatro partes iguales.

Teo.V.9.Un número cuadrado es divisible por tres; o llega a serlo cuando una unidad es substraída

Teo.V.10.Cualquier número cuadrado impar, cuando es disminuido en una unidad, llege a ser el ocho-múltiplo de un número triangular.

Para Números Triples:

Teo.V.11.Sea cualquier número impar elegido. Un segundo más grande número es formado por el cuadrado del primero, substrayendo la unidad, y obteniendo la mitad de la diferencia. Un tercer número es formado por adicionar una unidad al segundo. Entonces los tres números forman un número pitagórico triple. Esto es, si N es un número impar arbitrariamente escogido, entonces N, $(N^2-1)/2$, $(N^2+1)/2$ satisfacen la condición pitagórica.

Teo.V.12. Sea cualquier número par elegido. Un segundo número es formado por la mitad del primero, cuadrando esta mitad y substrayendo una unidad. Un tercer número es formado por adicionar dos a el segundo. Entonces los tres números son un pitagorico triple. Esto es, sea M cualquier número par:entonces M, $(M/2)^2-1$, $(M/2)^2+1$ satisfacen la condición pitagórica.

Teo.V.13.Dado el pitagórico triple A, B, C, si dos de los términos son pares, el tercero es tambien par.

Teo.V.13.a.Dado el pitagórico triple A, B, C, si uno de los términos es impar, entonces en efecto dos son impares y uno es par

Teo.V.14.Si en un número pitagorico triple el más grande número C es par ,entonces todos los términos son pares

Teo.V.14.a. Dado un pitagórico triple A, B, C, si uno de los términos es impar, entonces el más grande término C es impar , y de los números A y B, uno es impar y el otro par.

Corolario: Si el más grande término C es divisible por cuatro, entonces así son A y B.

Teo. 15. Dado el pitagórico triple A, B, C, en el cual no todos los tres términos son divisibles por cuatro, entonces A o bien B debe ser divisible por cuatro, y éste es el único término asi divisible.

Teo. 16. Dado un pitagórico triple A, B, C, si el más grande término C es divisible por 3, entonces así son A y B. Mas aún, si no todos los tres términos son divisibles por tres, exactamente uno de los mas pequeños términos A o B es un múltiplo de 3.

Luego demuestra "El teorema de Pitágoras(1)", el cual difícilmente puede adjudicarsele a Pitagoras mismo, ya que alrededor del 2000 a.c. Herón hace una demostración meramente geométrica del" teorema", y ésta es la que aparece en Los Elementos. En esa demostración parte de un contexto aritmético en el cual encuentra tres números triples A, B y C, tales que $(A)^2+(B)^2=(C)^2$. Complementa con su conversa, dada en I.48, dados números triples A, B y C, y como en la demostración no utiliza números que representen los lados del triángulo, Knorr generaliza el resultado para un contexto geométrico. Así establece lo que el llama teorema3: Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados del triángulo rectangulo.

---

(0) Knorr, Ibid, pags. 140 a la 14C.
(1) Knorr, Ibid, pags. 175 a 177.

Esta prueba no es como la de I.47 de los Elementos, de Euclides, en la que se forman paralelogramos sobre los lados del triángulo, sino que esta basada en un procedimiento de disección de K. Bretschneider, el cual era bien conocído, según Knorr, por la tradición pitagórica. Su geometrización era empleada por Herón y es"perfectamente compatible con las aproximaciones de los Elementos II(II.4 y II.8), y el caso especial para el triángulo isósceles(2) aparece en el Menón analizádo por Knorr , que es tambien preservado desde las tablas cuneiformes de los antiguos babilonios. Knorr argumenta que este procedimiento no aparece en los Elementos(3) porque en I.47 aparece un procedimiento de II.2, ("este es un resultado enderezado sobre la subdivisión de un cuadrado dentro de dos rectángulos con una altitud común"), lo cual es un "defecto"ante el objetivo de Euclides de ordenar las proposiciones. Y luego plantea que este teorema en su forma geométrica debió tener un corolario para el caso de los triángulos rectángulos isósceles, que llevaría al problema de que el lado sería inconmensurable con la hipotenúsa: $2(B)^2=(A)^2$ es lo mismo que $(B)^2+(B)^2=(A)^2$, donde A y B son enteros (suponiendo que A y B no son la unidad, por no ser ésta un número en el contexto original); si A es par, entonces A/2 y B/2(por V.14) son pares. Si A es impar, entonces B es impar(por V.14.a) , y luego B sería par e impar (por teo.13.a), y distinto de la unidad,...!!

(2) Knorr, Ibid, pag. 178.
(3) Knorr, Ibid, pag. 179.

Si $(A)(A)=2$, $B=1$, entonces $1<A<2$ y A es entero !

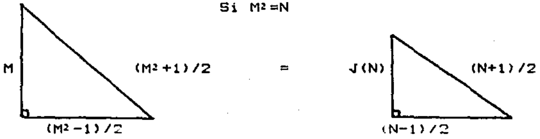
Luego, Knorr retoma el primer parrafo del Teetetos para argumentarnos con mayor detalle cómo Teodoro pudo haber trabajado los cuadrados con áreas 3, 5...hasta 17:

> 'Teodoro estaba probando para nosotros vía diagramas algo sobre potencias, en particular sobre la potencia de 3 pies cuadrados y 5 pies cuadrados-demostrando que esas no son conmensurables en longitud con la unidad cuadrada-y seleccionándo cada potencia individualmente en este camino hasta la de 17 piés cuadrados; pero en ésta por alguna razon él encontró dificultades'.

Y retomando el teorema V.11, que dice que para cualquier número impar M puede obtenerse $(M^2-1)/2$ y $(M^2+1)/2$ formando juntos un número triple, esto es que:

$((M^2-1)/2)^2+M^2=((M^2+1)/2)^2$;hace que que $M^2=N$ impar, con lo que por el" teorema de Pitágoras"se obtiene que existe un triángulo de catetos $(N-1)/2$ y $\sqrt{(N)}$, e hipotenúsa$(N+1)/2$ cuya area es N.

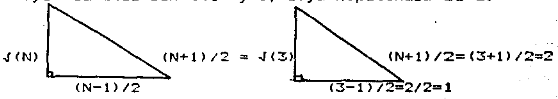
Si $M^2=N$



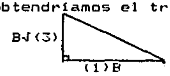
De aqui establece el teorema que llama de "Construcción de Teodoro", 6 de Knorr, y VI.6 en Los Elementos; "Dado un número impar N, el lado del cuadrado de N unidades en área es construído como el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenúsa es (N+1)/2 unidades en longitud y cuyo otro cateto es(N-1)/2 unidades". Con éste podrían construirse raíces de números pares si se piensa que en el triángulo anterior se duplican lados e hipotenúsa, con lo que la raíz de un número par N sería la mitad del cateto que tiene hipotenúsa N+1 y el otro cateto como N-1.Lo cual constituye su planteamiento del teorema VI.7

Apoyándose en VI.6 muestra como pudo haber demostrado Teodoro la inconmensurabilidad de lado cuya área es 3. La idea general de la demostración es como sigue:

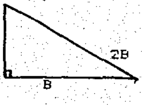
Por el teorema de Construcción, existe el triángulo de área 3, cuyos catetos son √(3) y 1, cuya hipotenusa es 2.



Luego, suponiéndo que la raíz √3 es conmensurable con la unidad, la razon A:B será igual a la razón √(3) : 1 , con lo que A estará determinado por B veces √(3) y obtendríamos el triángulo:



2B que sería equivalente a A



con A y B son enteros.

Donde estamos suponiendo que la razón A:B es puesta en términos reducidos (no ambos son pares), lo cual es posible porque si siémpre fueran pares sus términos, podrían bisectarse ad-infinitum contradiciendo la naturaleza entera de A y B.

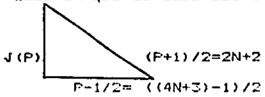
Ahora bien en el triánglo anterior se tendría que $A^2+B^2=(2B)^2$ en el cual se analizarían dos casos:

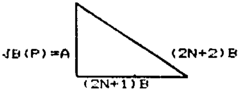
i) Si B es par entonces A y B serían pares (por el teorema V.14), pero esto contradice el hecho de que la razón A:B estaba en términos reducidos.

ii) Si B es impar, entonces tambien la hipotenúsa 2B sería impar, por el teorema V.14.a, pero al mismo tiempo sería par, por el teorema V.I.b..!

Por tanto(Teorema 8 en Knorr) :"El lado del cuadrado de área 3 es inconmensurable con la unidad de longitud".

De ahí generalíza (previa justificación del uso del término algebráico 4N+3Y formando el equimúltiplo del cuadado) para el caso en que el cuadrado tenga área P=4N+3(Teorema 9):





= 2N+1 donde A:B está en términos reducidos

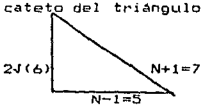
i) La hipotenúsa siempre es par, entonces A y (2N+1)B serían pares, por V.14, y entonces A y B serían pares, por V.3, lo cual contradice que A:B estan en términos reducidos...!

Y así resulta que los cuadrados con áreas 3, 7, 11, 15 y 19, etc. que se ajustan a 4N+3, tienen lados y diagonal inconmensurables.

Con el mismo procedimiento del teorema de construcción de Teodoro prueba para cuando el cuadrado tiene área 5, y su caso genaralizádo, cuando tiene area 8N+5=Q(Teoremas 10 y 11 en Knorr, y VI.10 y VI.11 en Los Elementos).

El caso para cuando el área vale 6 se hace partiendo del teorema para encontrar raíces pares(Teorema VI.7):

√(6) sería la mitad del cateto del triángulo con hipotenúsa 7 y lado 5.

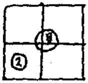


Suponiendo conmensurable el lado y apoyándose en los teoremas de números pares e impares, así como de los de los triples, se llega a una contradicción.

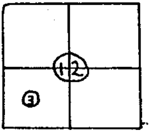
Con eso se plantea el caso general (Teorema 13) para cuando el área del cuadrado es 2(2N+1) y así se obtiene el caso para las areas 6, 10, 14 y 18.

El caso para 8 y 12 se resuelve en el teorema VI.14, que establece que el cuadrado cuya área es S=4N, tiene lados inconmensurables con la unidad si y solo si el cuadrado de area S/4 tiene lado inconmensurable.

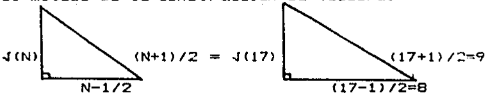
Si el cuadrado original tiene área 8, cada cuadrado de área S/4 tendrá área 2 y éste tendrá lado inconmemsurable y por tanto también lo tendrá el primero.

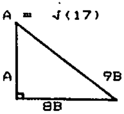


Si el primer cuadrado tiene área 12, los de área 5/4 tendrán área 3, ya analizado, y por tanto ambos tendrán lado inconmensurable.



Y así llega al caso de √(17), donde encuentra que aquí falla el método de la construcción de Teodoro:





A:B en términos reducidos

Si B es par , entonces 9B es par y 8B es par, y entonces A es par...!!Por tanto solo puede quedar que B sea impar. Luego 9B es impar. Y como 8 es par y B es impar entonces 8B es par y entonces A es impar.Pero como 8B es divisible por 4, entonces A no lo es, y... no hay contradicción! .

Knorr argumenta que la razón de la falla se entiende mejor si enunciamos el teorema general correspondiente al anterior, el cual sería el propio para un cuadrado de área T=8N+1, que evidéntemente es falso porque si T=9, 25, 49...etc.(un número cuadrado) no se cumple que sus lados sean inconmensurables, de lo cual desprende que habría que añadir esta exclusión en las hipótesis."Dos avenidas son posibles para extender los teoremas ya obtenidos. Nosotros podemos buscar una clase modular en la cual 17 caiga, pero la cual no contenga números cuadrados, y entonces esperar encontrar alguna menor revisión del método ya aplicado el cual se prestó para esta clase...O bien, deberíamos buscar un diferénte método ya aplicado con el que haga central la distinción de cuadrado y no cuadrado. Desde el texto de Platón aprendimos que Teetetos escogió la última aproximación (éste camino), por tanto teniendo éxito en el acoplamiento del estudio comenzado por Teodoro"(4). "Teodoro podría adoptar construcciones alternativas para ésta raíz en la esperánza de que una de esas pudiera producir la necesaria contradicción, o el podría buscar extensiones de el mismo método, como por la introducción de un criterio de dibisibilidad por otros primos"(5)

(4) Knorr, Ibid, pag. 192.
(5) Knorr, Ibid, pag. 194.

Con todo esto Knorr muestra que en efecto, todos estos teoremas, excepto(6) los teoremas generales se hallan incluidos como Teoremas en el libro II de Los Elementos, y que en base a la ligazon con Hipócrates de Quios referida por Proclo(7), así como por el estilo del libro II semejante al referido por Platón en el Teetétos, Knorr deduce que el más indicado geómetra de la antigua Grecia que pudo haber hecho el libro II es el mismo Teodoro(8), no obstante que maás adelante dice que " muchos de esos resultados pudieron no haber sido descubiertos por Teodoro, sino que él puso resultados manejables desde la mas temprana aritmética y tradiciones métricas en una forma geométrica para los propósitos de sus cuestionamientos". Y con ello Knorr proporciona su respuesta al fenómeno que originó la geometrización del álgebra: "En los estudios de Teodoro, la construcción del álgebra geométrica fue de interés en que esa podría producir adicionales magnitudes inconmensurables. Pero los métodos del álgebra y Teoría de Proporciones no fueron admisibles en sus formas aritméticas dentro de una misma teoría consistente de lineas inconmensurables. Por tanto las construcciones e identidades necesarias para esta teoría fueron desarrolladas en un camino que fue sencillamente válido para las líneas inconmensurables, esto es es, en un aspecto geométrico. Es interesante observar que el más temprano contexto de esas mismas tecnicas del álgebra

(6) Knorr, Ibid. pag. 194
(7) Knorr, Ibid. pag. 193
(8) Knorr, Ibid. pag. 199

geometrizáda, nominalmente dentro de los estudios babilonios de ecuaciones cuadráticas, fue la solución de problemas sobre la medición de rectángulos; esto es, en un contexto geométrico; pero los Babilonios redujeron esos problemas geométricos a relaciones aritméticas. De ahí, nosotros podemos observar que el libro II no fue tanto una'geometrizacion del algebra', sino que éste fue una 'regeometrización de una geometría algebrizáda'. Pero esto es suficiente para reconocer que el formato geométrico en el libro II es enteramente apropiado a su propósito: La construcción y examinación de lineas inconmensurables. Verémos mas tarde que esto retenido es util igualmente para los mas avanzados estudios por Teetetos, Eudoxio y sus seguidores"(9).

Van der Waerden escribió que los Griegos "cambiaron lejos desde los números" en el curso de su desarrollo matemático, justamente porque de el descubrimiento de la inconmensurabilidad tomó lugar una geometrización de las Matematicas. En sus propias palabras(9, x): "En el dominio de los números, la ecuación $X^2=2$ no puede ser resuelta, igualmente no en el de las raciones de números. Pero esto es soluble en el dominio de los segmentos; verdaderamente la diagonal del cuadrado unitario es la solución. Consecuentemente, para obtener soluciones exactas de ecuaciones cuadráticas, nosotros tenemos que pasar desde el

(9) Knorr, Ibid. pag. 199
(9, x) Szabó, The Beginings...Pag. 95

dominio de los números a el de las magnitudes geométricas"(9.y).
Esto, llevaría a una revisión de la antigua doctrina de los Pitagóricos ("Todas las cosas son números "), como apuntábamos con anterioridad, y a que el descubrimiento de la inconmensurabilidad llevará a los griegos a favorecer la geometría a expensas de la aritmética la cual hasta entonces había sido estimada mas grandemente.
Con éstas conclusiones de Van der Waerden coincide, en mi opinión, Knorr desde lo expuesto en su reconstrucción.
Pero en ambas conclusiones Szabó está en contra. Y argumenta respectivamente :
a)"...si el lado de el cuadrado es elegido como la unidad de longitud, es equivocado decir que la diagonal es realmente 'no un número'. Acorde con el Menón, los Griegos originalmente buscaron el segmento de línea el cual pudiera habilitarlos a ellos a doblar el área de un cuadrado dado (cuyos lados se les había asignado un valor numérico).Por tanto el problema el cual llevó al descubrimiento de la inconmensurabilidad fue uno geométrico. Ellos pudieron solo establecer que el segmento de línea que había sido buscado era 'no mesurable en longitud'(i.e. que su longitud era 'no un número'), después ellos se habrían dado cuenta que ésta era la diagonal del cuadrado original".(9.a)

(9.y) Szabó, Ibidem.
(9.a) Szabó, Ibidem.

Para Szabó, la diagonal del cuadrado fue reconocida para ser linealmente inconmensurable al mismo tiempo como ésta fue reconocida para ser conmensurable al cuadrado y, concluye, por tanto es desparecido que esta magnitud pasara como indeterminada numéricamente. Así la doctrina pitagórica no habría sido tambaleada por el descubrimiento de la inconmensurabilidad lineal.

En tanto que ésas observaciones pueden referirse también a conclusiones manejadas por mí, me parece necesario señalar lo siguiente:

Cuando los Pitagóricos encontraron los inconmensurables, plausiblemente en el problema discutido en el Menón, nosotros señalábamos que habían encontrado segmentos de línea, magnitudes, cosas que eran parte de este mundo, las cuales no eran números, y por tanto había cosas de este mundo que no eran números. A partir de ello puede advertirse la creación de la antítesis del propio pitagorismo. Y para nada se necesitaba la consideración de que se tomara al lado de la diagonal como unidad de longitud. Es claro que por ahí no podría concluirse que la diagonal no sería un número, porque se están comparando magnitudes, y en efecto lo único que puede concluirse es que la diagonal es inconmensurable con el lado del cuadrado respectivo. Por tanto, insisto, si puede provenir de esa antítesis la caida de la tésis de que "Las cosas son Números".

b)Szabó no está de acuerdo en la geometrización de las Matemáticas (la aritmética, era lo favorecido previamente a la aparición de la inconmensurabilidad), aunque está de acuerdo en que algunos matemáticos cambiaron partes de las Matemáticas, como el concepto de ración, logos, la cual hasta entonces solo había sido aplicada a números, y pudo ser redefinida para incluir tambien magnitudes inconmensurables."Pero la interpretación delineada arriba solo podría ser garantizáda si uno pudiera probar que el no problema geométrico de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ ocurrió a los griegos antes que la solución geométrica a ése mismo problema hiciera su aparición". Pues precisamente, en el Teetetos, Teodoro se brinca el caso de raíz de dos, porque en su contexto, como Knorr y Szabó mismo aceptan, era del conocimiento comun. La mas antigua tradición señala que los Babilonios ya conocian el calculo de $\sqrt{2}$ desde hacia unos mil años años antes de Platón mismo(9.b) .

Al parecer Teodoro opto por buscar otro camino para producir lineas inconmensurables, realizando un esfuerzo que llevaria a resultados del estilo del libro II de Euclides. Y aqui es donde cabe II.14,la construcción de un cuadrado con la misma área que una figura rectilinea dada, asi como la division de un segmento en extrema y media (esto es la division de una línea tal que el cuadrado del más grande segmento iguala al

(9.b) Knorr, The Euclidean Theory of Irrational Lines, Pag.42 .

rectángulo contenido por el todo y el menor segmento). De ésta última noción surge el teorema 15 en Knorr(cap.II); Si una línea es dividida en extrema y media sección, entonces los segmentos producidos son cada uno inconmensurables con la línea dada y con cada otra.(10).

Este tipo de construcciones, según Knorr, estarían dentro de los esfuerzos para construir líneas inconmensurables, y son muy similares a las pruebas del libro XIII.6 y 11" y en todo el scholia en el cual se prueba la inconmensurabilidad de líneas en extrema y media razón", pero no constituye, también según Knorr, un esfuerzo de demostrar el surgimiento de la inconmensurabilidad por medio de la anthyphairesis via la división extrema y media, ya que de ésto no se tienen referéncias documentales(11), además que en este contexto de la aplicación del lado y la diagonal del cuadrado (Teo.II.10 y II.11), la anthyphairesis se utiliza mas como un procedimiento para encontrar la máxima medida común, y por tanto como una asistencia en el descubrimiento de aproximaciones(12). Posteriormente, Teetetos adoptaría éste procedimiento como el fundamento de sus estudios de inconmensurabilidad(13). Teetetos continua el analisis de los inconmensurables en dos terrenos, el aritmético y el geométrico.

---
(10) Knorr, ibid. pag. 144
(11) Knorr, ibid, pag. 195

(12) Knorr, Ibid. pag. 200
(13) Knorr, Ibid. pag. 202 y 245

Por alrededor del año 400, Arquitas de Tarento(13.a) estudio también los inconmensurables y manejó resultados que posiblemente hayan sido incorporados y primeramente enunciados por Teetetos en los inicios del siglo IV. Desde el diálogo El Teetetos, a partir del fragmento que dice: "...Tales líneas como cuadrado el equilátero y números planos fueron definidos como 'longitud', pero tales como cuadrados el número oblongo como 'potencias', porque ésos no son conmensurables con los formados respecto en longitud, sino mas bien respecto de los planos los cuales ellos producen. Y parecídamente los otros sólidos tales cosas pertenecen", ha llegado a establecerse en el contexto de los Elementos de Euclides como: "Los cuadrados sobre líneas conmensurables en longitud tienen a cada otra la razón la cual un numero cuadrado tiene a otro numero cuadrado; y (conversamente), los cuadrados teniendo a cada otro la ración la cual un número cuadrado tiene a un número cuadrado también tendrán los lados conmensurables en longitud..." Del fragmento de Platón, en su última línea, parece claro que la condición para la conmensurabilidad de líneas formadas como raíces cúbicas de términos enteros o racionales era bien conocida en su tiempo. Los principios por los cuales Euclides efectúa el caso plano aparecen en los Libros VI, VII y XI de Los Elementos, así que nosotros podemos(13.b) asumir que en la antigüedad Griega conocían la

(13.b) Knorr, Euclidean Theory, Pag. 42
(13.b)Knorr, Euclidean Theory...,Pág. 43

extensión para el caso de los sólidos, pero no así para mayores potencias, ya que dificultaba la cuestión la falta de su representación geométrica. Sin embargo, analizándo esta formulación Euclideana, debemos notar que ella no constituye un criterio completo para la conmensurabilidad en longitud o para la segunda potencia, porque ella no establece cómo una ración de enteros puede igualar o desigualar una ración de enteros cuadrados(13.c). Euclides parece resarcir este hueco al establecer en el Libro X el lema que sostiene esa propiedad exclusivamente para los números similares planos: "Los números similares planos, y solo ellos, tendrán la ración de un número cuadrado a un numero cuadrado", pero Heath(13.d) ha sostenido que ésta fue una adición post-Euclideana(13.c).

En tanto que hasta este momento de nuestro análisis de las reconstrucciones de la Teoría de los Inconmensurables en la mayoría de las versiones hemos encontrado puntos muy criticables y, en tanto que la versión de Knorr ha sido la mejor librada, a continuación haré un resumen del trabajo que realizaría Tetetos con arquitas y Eudoxio, exclusivamente basandome en Knorr y Heath, para finalizar con una critica a ella.

(13.c) Knorr, Ibidem
(13.d) Heath, Euclid's Elements, Vol.3 Pag. 31
(13.c) Knorr, Ibidem

Al parecer de Knorr(13.x), Teetetos procedió de la siguiente manera: "Comenzó desde dos líneas tomadas como conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, el formo desde ello en cambio sus medias geométrica, aritmética y armónica y mostró cada uno de esos resultados en una línea irracional", donde las dos primeras se obtendrían con los procedimientos establecidos en Los Elementos. Así obtendría los siguientes resultados:

i) Supóngase que a y b son líneas dadas tales que $a:b$ no es una razón de enteros, pero si lo es $a^2:b^2$. Se define g, su media geométrica, como $g^2=ab$. Entonces g es irracional (i.e. g^2 es inconmensurable con el cuadrado de cualquier línea racional).

Esto es así porque $g^2:a^2$ (o bien $g^2:b^2$) no pueden ser igual a una razon de enteros, ya que si lo fueran, podría ocurrir que $g^2:a^2=(a)(b):a^2=b:a$, de donde se obtendrian que las lineas a y b son conmensurables en longitud, contrariamente a lo supuesto.

ii) Si se define la media aritmética de dos líneas a y b, (dos lineas inconmensurables en longitud) como $e=1/2\ (a+b)$, se sigue que e es una línea irracional.

Esto ocurre porque si no fuera así se seguiría que $(a+b)^2:a^2$ es una razon de enteros, puesto que $(a+b)^2:a^2=a^2+b^2+2(a)(b):a^2$, dado que b^2 es conmensurable con a^2, se sigue que 2ab es conmensurable con a^2, o b es conmensurable con a, contrariamente a lo supuesto.

(13.x) Knorr. "La Croix des...". Pag.44

iii) La media armónica se define mediante la relación $a-h:h-b=a:b$, lo cual es equivalente a la relación $h=2(a)(b)/a+b$, ésto es $h:b=a/e$, para e la media aritmética. Entonces si h fuera racional, $h^2:b^2$ sería igual a una razón de enteros, y por tanto e debería ser racional, contradiciendo lo supuesto.

Desde ésto podríamos observar otra relación:
sean $h:a-b=2(a)(b):a^2-b^2$. Desde ésto, podríamos referir resultados a h u otros tratados con a-b: "En la Teoría Euclideana, la apotema irracional es definída como a-b, y su irracionalidad es probada vía la consideración de la razón $(a-b)^2:a^2$, paralela a la manera dada arriba para la media arirmética. De esto por tanto ocurre que Euclides trató la apotema independientemente de la binomial y relegó a una postdata la propiedad de que cualquier binomial (a+b) y su apotema asociada (a-b) tienen un producto racional (esto es a^2-b^2). Por contraste, lo análogo de esta propiedad debería ser el instrumento rector para reducir la armónica al caso aritmético dentro de la Teoría de medias de Teetetos"(13.d). De todo ésto debe observarse que Teetetos no pudo haber adquirido ningún resultado de la irracionalidad sin haber usado la condición de la conmensurabilidad cuadrada como es establecida en la Teoría Euclideana. Así, por ejemplo Pappus observa que raíz de 8 y raíz de 18, inconmensurables con una unidad supuesta, pueden ser reconocidos conmensurables a

(13.d) Knorr, 1982, Pag. 44

traves de la formulación Euclideana(13.e).

Comentando el libro X de Euclides, Pappus(19) dice:
"Teetétos ...dividió las más generalmente conocidas líneas irracionales acorde a las diferéntes medias, asignando la línea media a la geometría, la binomial a la aritmética, y la apotema a la harmónica", como es establecido por Eudemo el peripatético.

desde el diálogo Platónico que lleva su nombre, Knorr(19.x) asigna los teoremas A y B del siguiente listado a Teetetos, cuyo conjunto supuestamente trabajó Teetetos en su Teoria de la clasificación de lineas:

Teo.A.- Si un entero dado es no cuadrado, su raíz cuadrada es irracional.

Teo.B.-Si un entero dado es no cúbico, su raíz cúbica es irracional.

Teo.C.-Si un número racional tiene la forma (N+1)/N en sus más bajos términos, para un entero N, su raíz cuadrada es irracional, como lo es su raíz cúbica.

Teo.D.-Si un número racional tiene en sus más bajos términos, la forma N^2/M^2, donde N y M son enteros, entonces su raíz cuadrada es racional, de otro modo es irracional.

Knorr asigna el teorema C a arquitas mediante la autoridad de Boetius, y de el Teorema D sostiene que hay buenos indicios de que haya sido también de Teetetos.

(13.e) Knorr, Ibidem
(19) Knorr, Ibid. pag. 235
(19.x) Knorr, Ibid. Pag.212

Los teoremas A, B y D, planteados en un contexto aritmético, por que se refieren a números, serían equivalentes en un contexto geométrico a los siguientes:

Teo.5.-Si un cuadrado contiene un número entero de unidad de areas, y si este número es un cuadrado entero, entonces el lado del cuadrado será conmensurable con la línea unidad, pero si este número es un no cuadrado, entonces el lado será inconmensurable con la unidad.

Teo.6.-Si un cubo contiene N unidades de volumen, para N un número cúbico entero, entonces el lado del cubo es inconmensurable con la unidad; pero si N es un entero no cúbico, el lado será inconmensurable con la unidad.

Teo.7.-Dos lineas son conmensurables en longitud si y solo si los cuadrados construidos sobre ellas tienen la razón la cual un entero cuadrado tiene a otro entero cuadrado.

El último teorema aparece en Los Elementos(19.y) como la proposición X.9

(19.y) Heath, Euclid's Elements, Vol.III,Pag.28

Knorr nos hace llegar este comentario sobre la labor de Arquitas :"...Los teoremas A y D (aqui usamos la notación de los teoremas como los usa Knorr mismo) requirieron una mayor fundamentacion que las bases puestas por los pitagóricos del siglo V. Arquitas hizo un comienzo en el área de la aritmética estableciendo el teorema C sobre las bases de proporciones numéricas continuadas, pero falló en su demostración, dejando una brecha, pero aún así él mismo estableció otro teorema que aparece en VIII.8 de los Elementos que era una reducción de aquel. Sin embargo a Arquitas se debe el descubrimiento del teorema sobre razones epimóricas, de la forma (N+1)/N del teorema C anterior, y sus aplicaciones al estudio de la irracionalidad en la teoría musical, y la relación de ambos a los teoremas sobre enteros cuadrados y medias proporcionales geométricas. Tambien la organización del libro VIII de Los Elementos y la sección Canonis es el trabajo de Arquitas y sus seguidores"(20).

Luego, Teetétos, contemporaneo de Arquitas, creó un cuerpo de pruebas sobre proporciones de enteros y las propiedades de relatividad de primos enteros, con lo que probó sus teoremas A, B, y D.

De Teetétos y Arquitas ,Proclo llego a decir: "...por ellos los teoremas fueron incrementados y puestos dentro de un mas cientifico arreglo". Con ese esfuerzo Teetetos estaba poniendo las bases para la Teoria de Números incluida en los

(20) Knorr, Ibid. pag. 226

Knorr nos hace llegar este comentario sobre la labor de Arquitas :"...Los teoremas A y D (aqui usamos la notación de los teoremas como los usa Knorr mismo) requirieron una mayor fundamentación que las bases puestas por los pitagóricos del siglo V. Arquitas hizo un comienzo en el área de la aritmética estableciendo el teorema C sobre las bases de proporciones numéricas continuadas, pero falló en su demostración, dejando una brecha, pero aún así él mismo estableció otro teorema que aparece en VIII.8 de los Elementos que era una reducción de aquel. Sin embargo a Arquitas se debe el descubrimiento del teorema sobre razones epimóricas, de la forma (N+1)/N del teorema C anterior, y sus aplicaciones al estudio de la irracionalidad en la teoría musical, y la relación de ambos a los teoremas sobre enteros cuadrados y medias proporcionales geométricas. Tambien la organización del libro VIII de Los Elementos y la sección Canonis es el trabajo de Arquitas y sus seguidores"(20).

Luego, Teetétos, contemporaneo de Arquitas, creó un cuerpo de pruebas sobre proporciones de enteros y las propiedades de relatividad de primos enteros, con lo que probó sus teoremas A, B, y D.

De Teetétos y Arquitas ,Proclo llego a decir: "...por ellos los teoremas fueron incrementados y puestos dentro de un mas cientifico arreglo". Con ese esfuerzo Teetetos estaba poniendo las bases para la Teoría de Números incluida en los

(20) Knorr, Ibid. pag. 226

Libros VII y VIII, por lo cual la mayoría de los historiadores de las Matemáticas lo ven como el autor de la inicial compilación del libro VIII (21), Teoría que según Knorr debio haber tenido la más libre estructura, mayormente cercana al tratamiento neo-pitagórico que al Euclideano(22), y posiblemente realizada poco antes del 400, ya que Teetetos murió en el 369 (23), y fue en gran parte alentada por Platón dentro de su academia entre el 380 y 370. Así el propósito del libro VII habría sido el servir como una herramienta para la teoría de la inconmensurabilidad(24).

En el aspecto geométrico, la anthyphairesis aparece usada en el contexto Eudoxiano como una definición de proporción, como atestigua Aristóteles:

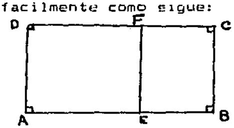
'...no es facilmente probado por ejemplo que la línea paralela a el lado y cortando la figura plana divide similarmente la base y la area. Pero al menos la definición es establecida, lo dicho parece inmediatamente claro. Porque las areas y las bases tienen la misma antanairesis. Tal es la definición de la misma razón'(25).

Teorema que se demuestra facilmente como sigue:

EF es paralelo a BC,

EF corta a ABCD, entonces

AE:EB=AEFD:EBCF.



(21) Knorr, Ibid,pag. 239
(22) Knorr, Ibid. pag. 240
(23) Knorr, Ibid. pag. 301
(24) Knorr, Ibid. pag. 242
(25) Knorr, Ibid. pag. 257

Usada así, la anthyphairesis pudo haber sido tomada como el inicio de una teoría de figuras similares planas(28), con lo cual se ocuparía en el mas alto nivel de la teoría de los inconmensurables, pero ello no significa que halla sido utilizada en la fundamentacion de las magnitudes inconmensurables, ya que no hay pruebas documentales de esto(29).

Este teorema, a decir de Knorr(26), aparece explicitamente en 47 de los 96 teoremas sobre lineas irracionales (Libro X de Los Elementos, proposiciones 19 a la 114), y es inferible en otros 12, lo cual se debe a que; "...para identificar una línea como racional uno debe referir a la conmensurabilidad de cuadrados asociados; y conversamente, para identificar una area como racional uno debería referir a la racionalidad de lineas asociadas". Es importante notar que algunas líneas inconmensurables son sin embargo racionales(27).

Parecidamente a lo ocurrido con la aritmética, al parecer fue Teetétos quien probo una serie de teoremas que a la póstre utilizaría para cimentar una teoria de proporciones que pudiera ocupar para el estudio de las magnitudes (lineas, en este caso) inconmensurables. Mencionemos algunos:

Teo.III.4.-Dados tres segmentos de linea A, B y C, entonces A:B=AC:BC (Elementos VI.1:VII.17 y VII.18)

---

(28) Knorr, Ibid. pag. 261
(29) Knorr, Ibid. pag. 300
(26) Knorr, Ibid. pag. 259
(27) Knorr, Ibid. pag. 260

Teo.III.5.-Si cuatro magnitudes A, B, C y D del mismo tipo, les ocurre que A:B=C:D, entonces A:C=B:D (Elementos V.16 y VII.13)

Teo.III.6.-si en tres magnitudes A, B y C ocurre que A:C=B:C, entonces A=B (Elementos V.9)

Teo.III.7.-Dadas cuatro lineas A, B, C y D, A:B=C:D si y solo si AD=BC(Elementos VII.16 y VII.19)

Corolario.Dadas tres lineas A, B y C;A:B=B:C si y solo si $AC=B^2$ (Elementos VI:17)

Teorema III.9.-Dadas magnitudes A, B, C, D, A:B=C:D si y solo si

$A^2:B^2=C^2:D^2$ (Elementos VI, 22, ella es muy simila a X, 9)

Teoremas notables porque, según Knorr,"sobre la fundamentación de sólo tres teoremas de figuras similares (teoremas 4, 7 y 9) y un poco de lemas auxiliares de proporcionalidad de magnitudes (un subconjunto de teoremas del libro V), la totalidad remanente del libro X puede ser producida". El teorema 4 fue citado por Aristóteles como un ejemplo del uso de la anthyphairesis dentro de la teoría de figuras similares y fue conocido como un lema aplicado en cada paso dentro de la teoría de los inconmensurables(28). Con ese esfuerzo realizado en la Teoría de Proporciones(28.z):

(28) Knorr, Ibid. pag. 270
(28.z) Knorr, Ibid. Pag.273

i) " Teetetos aprovisionó de una estructura formal a la teoría de los números, prefigurando los Elementos VII, desde los cuales los teoremas sobre primos relativos pudieron ser manejados para establecer el criterio aritmético de inconmensurabilidad.

ii) Generalizando a la geometría el procedimiento aritmético de la anthyphairésis, Teetetos fue habilitado para desarrollar los teoremas sobre proporciones de líneas, planos rectanguláres y sólidos, los cuales el requirió para construcciones de lineas inconmensurables.

iii) Desde las definiciones de medias (geométricas ,aritméticas y armónicas) él formuló tres clases de líneas irracionales, correspondiendo a la medial euclídeana, binomial y apotema, y comenzó a la investigación de sus propiedades

iv) Realizo la construcción de los cinco sólidos regulares.

Pero también aqui Teetétos tuvo un sucesor; Eudoxio, quien a decir de Proclo;"..., habiendose convertido un asociado en el círculo de Platón; (1).- fue el primero en incrementar el número de los tan llamados teoremas generales. (2).- él añadió a las tres proporciones otras tres, y, (3).- por medio del análisis él incrementó en número los teoremas sobre la seccion el cual toma su inicio desde Platón"(30) , donde los teoremas generales mencionados por Proclo no pueden ser sino los teoremas sobre proporciones del libro V

(30) Knorr, Ibid. pag. 240

de los Elementos (de ellos el V.16 es llamado "enallax"por Ariostóteles).
Además del libro XIII, cuatro construcciones "son consideradas con respecto a la irracionalidad de las líneas obtenidas...Dos de esas aplican las definiciones y resultados los cuales fueron bien establecidos dentro de la teoría de Teetetos de los tres irracionales fundamentales:
(a) si una línea racional es seccionada en extrema y media, sus segmentos serán cada uno apotema(XIII.6)
(b) si un dodecaedro es inscrito en una esfera de radio racional, su cateto es apotema (XIII.17).(c) Si un pentágono regular es inscrito en un círculo de radio racional, su lado es un menor irrracional (XIII.11);y (d) Si un icosaédro es inscrito en una esfera de radio racional, su cateto es un irracional menor (XIII.16) (donde la diagonal A es el mayor irracional y el lado B es el menor irracional).

La Teoría Euclideana de los números se basa en el procedimiento de Anthyphairesis, es decir, en el método Euclideano, "algoritmo", para calcular la máxima medida común. Se cree que esta técnica fue descubierta por Tetetos en la década del año 370, y ella fue la base de una Teoría de proporciones para magnitudes conmensurables compilada en el Libro VII de Los Elementos(30.a).
Esto es un elemento que muestra de nueva cuenta cómo ni la anthyhairesis ni la Teoria de las proporciones estuvieron

(30.a) Knorr. De Exhaución:primeras etapas..., Pag.10

ligadas en el descubrimiento de los inconmensurables, ya que a Teetetes se le presentarían los inconmensurables como un problema existente, como muestra el mismo diálogo, y con esto, creo, se cae la suposición de Szabó de que "...parece que el problema de la irracionalidad se originó en la Teoría de proporciones"(30.b).

Sin embargo, estas bases puestas por Teetetes en la Teoría de proporciones planteaban problemas técnicos que él no alcanzó a resolver, en parte debido a su pronto fallecimiento, como fue el caso de que el Teorema X.9 de Los Elementos se limitába a números similares planos.

Sin embargo, Eudoxo de Cnidos siguió un camino distinto(30.c). Sus investigaciones acerca de la medición del círculo, la esfera, la pirámide y el cono lo llevaron a una técnica de prueba llamada el "método de exhaución", que utilizaba de manera indirecta los limites y se basaba en el razonamiento indirecto, en la construcción de figuras auxiliares mediante la bisección continua y la manipulación de desigualdades, técnica que se transformaría para aplicarse a las magnitudes inconmensurables, como mostraron Pappo y Arquimedes con ejemplos, para desembocar un tanto modificadas en el Libro V de Los Elementos, donde las desigualdades de Eudoxo entre las razones de magnitudes conmensurables e inconmensurables se convierten en las desigualdades Euclideanas entre equimúltiplos de

(30.b) Szabó, The beginings...,Pag.98
(30.c) Knorr, De Exhaución...Pag.10

determinadas magnitudes,(30.d) tarea que al parecer se debió a los discípulos de Eudoxo.

Resumo ahora la versión de la Teoría de los Inconmensurables de Knorr en las siguienttes líneas(31):
Teetetos habría muerto en el 369, cuando tendría 45 años o poco menos. Poco después Eudoxo ingresó a la Academia como asociado, cuando tendría unos 30 año, y lo más natural fue que él retomára la Teoría de los Irracionales donde Teetetos la dejó, e inició la Teoría de Proporciones, alcanzando los máximos logros alrededor del 350. Aristóteles ingresa a La Academia de Platón en el mismo año que Eudoxio (367) y permaneció en ella hasta la muerte de Platón, en el 347, y en el último período de su estancia en ella dirigíd la Escuela peripatética, del 335 al 323, manteniendo comunicación con discípulos de Eudoxio. Aristóteles fue quien introdujo la Teoría Anthyphairetica, la cual caracterizó el trabajo en la teoria Teetetiana de Proporciones e Irracionales que se realizaba en el momento de su ingreso a la Academia. Así, en La Física él discute las dos formas de comparabilidad (V, def.4 y X.1), la cual representa el encuentro de las concepciones Anthyphairetica y Eudoxiana de proporción. Todo ello representaría un período transicional de La Teoría de los Inconmensurables,

(30.d) Knorr, De Exhaución...Pag.11
(31) Knorr, Ibid. pag. 285

la cual sólo habría alcanzado su forma completa como se establece en el Libro X de Los Elemetos hasta el 330, lo cual atestigua el comentario de Eudemo sobre las definiciones de Eudemo de los irracionales y los remarques en De Lineis Insecalibus .

El Libro X apuntaría hacia el Libro XII, para desarrollar la Teoría de los mas grandes Irracionales, como se maneja desde la Teoría de las figuras similares planas (partes del Libro VI) y desde la llamada Algebra Geométrica (LIbro II) y requirió de las técnicas de la Teoría de aplicación de Areas (VI, 26-29), al menos en la forma desarrollable por los medios del Libro II. El Libro X contiene la Teoría geométrica de irracionales, y ello implica la existencia de una Teoría Aritmética que utilizaría la totalidad de la Teoría de los Números del Libro VII, y por tanto,

"... exceptuando los materiales topológicos contenidos en los Libros I, III, VI y XI, virtualmente la totalidad de los Elementos pueden ser entendidos como el producto del esfuerzo de Euclides para presentar la entera Teoría formal de Irracionales dentro de una misma suficiente compilación de tratados"(32).

Acerca de ésta última afirmación, yo haría una sola objeción , y la centraría alrededor de su última afirmación, sobre la cual quisiera esbosar las siguientes reflexiones:

Como Knorr mismo señala, hay Libros de los Elementos en los cuales se establecen proposiciones que no refieren

(32) Knorr, Ibid. pag. 28?

exclusivamente a los irracionales, además de los Libros I, III, VI y XI mencionados por Knorr mismo, y ello permite hablar paralelemente del tratamiento de una Teoría de Transformación de áreas, una Teoría de Sólidos o una Teoría de Numeros Primos, o incluso una Teoría de Proporciones, las cuales si bien algunas estuvieron relacionadas con la Teoría de Los Irracionales, no me parece claro que Euclides las haya incluído en Los Elementos para "presentar la entera Teoría formal de Irracionales", porque bien pudieran haberse desarrollado independientemente de los irracionales en su tiempo. Esto es, si bien contemplan proposiciones sobre irracionales no son su único objeto de estudio.

Si Euclides hubiera tenido como finalidad presentar una Teoría de Irracionales como finalidad, ¿no hubiera sido más lógico que él presentara los temas y/o proposiciones conforme habrían sido desarrollados cronológicamente o conforme a algún orden en que se desenvolvió la Teoría de los Irracionales?, ¿porque habría dejado los huecos que presentaria ésta Teoría en los Libros I, III, VI y XI? Además, desde la antigüedad no hay alguna referencia, por lo menos no la ha presentado ningún autor, a un tratamiento de una "Teoría de Irracionales", por lo menos no usando el término "teoría" con que se nomina actualmente, sino sólo un tratamiento de los inconmensurables o irracionales como un elemento cuyo hallazgo se dio en el seno de la matemática, y en particular, segun lo discutido, en la Geometría.¿hicieron los Griegos realmente una Teoría de Irracionales?, ¿podemos hablar, análogamente, que formularon una teoría de Proporciones, otra de Números Primos, de Sólidos, etc?, ¿no estaremos fragmentando el conocimiento matemático con estas categorías conforme a esquemas actuales de pensamiento que dividen el trabajo humano?

Es claro que Euclides hace una compilación de elementos que muestran un estudio de los irracionales, pero también del estudio de las proporciones, las lineas, los planos, los solidos, y en fín de los elementos manejados en los diversos ámbitos de la geometría Griega que arrojó un caudal de conocimientos en los siglos V y IV. Sin embargo, dentro de la hilazón con el resto de nuestro discurso presentado en las reconstruccciones de los inconmensurables, por lo menos la del propio Knorr, me pareco que la conclusión que puede obtenerse no es que Eucides tenia el objetivo de "presentar una Teoría de Irracionales", sino más bien el presentar a la geometría como un todo matemático, coherente con la razon misma, en el que era posible incluir a los inconmensurables o iracionales sin que el corpus matematico (el resto de los conocimientos de proporciones, sólidos, etc.) cayera en contradicciones, en lo irracional diriamos ahora, y que lejos de hundir a las Matemáticas en una supuesta "crisis", la desplegaba a los más amplio vuelos, completando a la geometria, que le transportarían a la creación de la base de la geometria de nuestro tiempo.

Por otro lado, cerca de la reconstrucción de Knorr de la Teoría de Los inconmensurables, me parece preciso hacer las siguientes observaciones provenientes de otras autores:
Las primeras objeciones que consideraremos provienen de la crítica que hace Szabó a las interpretaciones de Van der Waerden y Vogt, quienes en algunos aspectos coinciden con la de Knorr, los cuales critica precisamente Szabó.

a) Szabó considera que Teodoro no realizó ninguna demostración rigurosa de las proposiciones manejadas por él en el diálogo del Teetetos, no obstante que los términos 'dynameis' y'demostración'aparecen literalmente, y que dichas pruebas no parecen haber interesado a sus dos alumnos porque éstos " inmediatamente comenzaron algo completamente diferente, usando los resultados los cuales habian sido obtenidos"(36).

Aquí hay que precisar que, Szabó no duda que teodoro estaba habilitado para hacer las demostraciones referidas, pero sostiene que Teodoro no pudo haber demostrado rigurósamente la proposición contenida en el parrafo:

"...teodoro estaba manejando algunas dynameis para demostrarnos que las longitudes de los lados de aquellas que tenian una area de tres o cinco piés cuadrados, no eran conmensurables con la longitud de los lados de una unidad cuadrada. Él discutió el caso de cada dynameis individualmente hasta que él alcanzo el caso de un cuadrado con area de diesiciete pies cuadrados..."

(36) Szabó, The Beginings...,pag. 61

Porque para ello debía previamente haber demostrado las proposiciones VI.17, VIII.18 y VIII.20, que Szabó mismo utilíza como hipótesis en su reconstrucción(37).
A mi me parece que Szabó está aceptando con esto que Teodoro solo pudo haber demostrado rigurózamente el teorema si el proceder de éste hubiera coincidido con su propia reconstrucción del hallazgo de los inconmensurables.
Y está aceptando, tambien, que a Teodoro solo puede adjudicársele la demostración de un teorema a partir del diálogo el Teetetos, solo si Teodoro hubiera realizado una demostración con el formato del tipo predominante en la matemática contemporanea, o con el de las demostraciones de los Eleáticos, de los cuales supone Szabó que la matemática Griega estuvo subordinada, como si la Filosofía de estos hubiera transferido su método deductivo a las Matemáticas(43)
Sin embargo, en cuanto a lo primero, si nosotros partiéramos de que Teodoro no siguió el procedimiento que utiliza los tetragonísmos, que es lo que sostengo, creo que Teodoro no tenía porque partir de las proposiciones VI.17, VIII.18 y VIII.20, sino de otras suposiciones, como por ejemplo los teoremas relativos a los números pares e impares que utiliza Knorr en su reconstrucción.
En cuanto a lo segundo, si bien es cierto que en el diálogo el Teetetos no se señala literalmente a Teodoro como el

(37) Szabó, Ibid., Pag. 60
(43) Knorr, On The Early History ...,Pag.145

autor de el teorema mencionado, ese diálogo sí retrata a Teodoro demostrándolo, como dice Knorr. Y mas aún, con los elementos dados en el propio dialogo Teodoro pudo haber demostrado el teorema de manera más libre, al estilo de los métodos propios de la geometria presocrática(42), siguiendo el tipo de demostraciones con figuras y/o narraciones (como tambien se muestra en El menón) que caracterizáron el grado de desarrollo del persamiento geométrico griego del siglo V.

b) Sobre la base del texto del diálogo, Szabó no atribuye a Teetetos ningún nuevo descubrimiento matematico que no sea también atribuído a Teodoro. Y por tanto, concluye, no puede adjudicársele el Teorema de la clasificación de las dynameis (como hace Frank), ya que para que ello hubiera ocurrido . Teetetos debió haber inventado previamente los conceptos de 'conmensurable en longitud' y 'conmensurable en cuadrado'. Pero como Szabó los encuentra a ambos términos en el diálogo El Político(39), entonces, concluye él, éstos debieron existir antes del tiempo de Platón y Teetetos.

"Por tanto la enumeración de dynameis individuales y algunos detalles de pruebas dadas por teodoro parecen ser una preparación para la comprehensiva clasificación la cual fue entonces dada por Teetetos y su amigo..."(38)

(42) Knorr, On The Early History of Axiomatics. Pag. 150
(39) Szabo, Ibid., Pag. 61
(38) Szabo, Ibid. Pag. 62

Creo que es necesario decir que El diálogo El Político(38.a) es uno de los cuales se duda que provenga de Platon (lo cual hicimos referencia cuando hablamos de El Parménides), y con ello se viene abajo la validés de la argumentación de Szabó, porque bien pudo haber sido hecho posteriormente después de la existencia de Platon y Teetetos.

Ahora bien, esto no implica que yo sostenga que Teetetos haya sido el autor del o los teoremas que le atribuye Knorr, ni de los de Teodoro, sobretodo si hay indicios de que las fuentes provenientes de la antigüedad no dudosas, como esas dos que señala Szabó y que Knorr acepta implicitamente. Sin embargo, creo que bien pueden mantenerse como hipótesis esas autorías, hasta que se encuentre, si es que ocurre, al verdadero autor, o se derrumbe la reconstrucción de Knorr.

c) Las dos principales fuentes provenientes de la antigüedad que acreditan a Teetetos nuevos conocimientos matemáticos, según Szabó, tienen credibilidad dudosa. Estas son el Scholium a la proposición 9 en el libro X de los Elementos y un reporte contra el comentario de Pappus al Libro X, que sobrevive sólo en su traducción Arábiga.

El Scholium dice: " Este teorema es un descubrimiento de Teetetos. Esto es también mencionado por Platón en el diálogo Teetetos, excepto que solo un caso especial esta estableciendo esto, como opuesto a la formulación general dada aquí"(40).

(38.a) Emilio LLedo I., Diálogos de Platon, de la Introducción.
(40) Szabó, Ibid. Pag. 76

El reporte dice:"...la teoria de magnitudes irracionales tiene su origen en la escuela de Pitágoras. Ésta fue considerablemente desarrollada por Teetetos el ateniense, quien dio prueba, en esta parte de las Matemáticas, como en otras, de la habilidad de la cual había sido justamente admirado. El fue uno de los hombres mas felizmente dotados, y dado sobre él mismo, con un fino entusiasmo a la investigación de las verdades contenidas en esas ciencias , como Platón produce testimonios para él en el trabajo el cual el llamó después por su nombre. Como para la exacta distinción de las magnitudes mencionadas arriba y las rigurosas demostraciones para las cuales ésta teoría se elevó, yo pienso que ellos fueron dirigidamente establecidas por estos matemátiucos, y más tarde, el gran Apolonio, cuyo genio tocó los más grandes puntos de excelencia en Matematicas, añadió a ésos descubrimientos un número de teorías sobresalientes despues de muchos esfuerzos y trabajo. Porque Teetetos había distinguido raíces cuadradas conmensurables en longitud desde aquellas las cuales son inconmensurables, y había dividido las bien conocidas especies de líneas irracionales tras diferentes medios, asignando la 'medial'a la geometría, la 'binomial' a la arirmética, y la 'apotema' a la armonica, como es establecido por Eudemo el Peripatético, etc...."(41)
A ambas citas les ataca Szabó porque en lo esencial se basan en el propio diálogo del teetetos.

(41) Szabó,Ibid., Pag. 78

Sin embargo, Knorr en un escrito posterior(44) comenta:

"Interpretando este pasaje deberíamos tomar en consideración que el informante, Eudemo, fue un discípulo de Aristóteles, por tanto ubicado entre los tiempos de Teetetos y Euclides. Los términos 'medial', 'binomial' y 'apotéma'son básicos dentro de la clasificación Euclideana de las lineas irracionales, pero nosotros aprendimos desde otro tratado Aristotélico que esos nombres fueron 'sólo recientemente' introducidos. Por tanto, nosotros podemos inferir desde el reporte de Eudemo no que Teetetos había establecido una correlación entre las clases Euclideanas y las medias, sino mas bien que Teetetos formó sus propias clases de iracionales como las medias de líneas dadas. La correlacion con las clases Euclideanas es por tanto la manera de Eudemo de caracterizar lo que Teetetos hizo en términos más familiares para los estudiantes de esta última teoría..."

Con lo que Knorr insiste en adjudicar a Teetetos la clasificación la cual se menciona en el diálogo que lleva su nombre y por supuesto en su confiabilidad.

Yo no sostengo que Teetetos haya sido el autor del o los Teoremas que Knorr adjudica a Tetetos o Teodoro, máxime si existen serias objeciones a esas fuentes de la antigüedad. Sin embargo, tampoco creo que Szabó niegue solidamente que Teetetos y Teodoro fueron esos los autores, pues no dice quienes fueron los autores fidedignos. Creo, por tanto, que

(44) Knorr, Euclidean Theory...,Pag. 43.

es posible mantener la autoría de estos Griegos, mientras la Teoría de Knorr no sea derrrumbada.

CONCLUSIONES.

I.El papel del Pitagorismo, en el desarrollo del pensamiento.

En mi opinión, el contexto filosófico del siglo V del nacimiento del pitagorismo, es eminéntemente el del ascenso y caída de la Escuela Filosófica Jónica, y el pitagorismo se vio impregnado de su interpretación del mundo partir de la naturaleza sensible, no obstante que formalmente Pitágoras estuviera por fuera dicha Escuela. La Tesis de que las cosas son números y su subsecuente concepcion atomista, habla de una identificación entre la naturaleza y la abstración. Si las cosas son números, el universo es de números y relaciones entre ellos, con lo cual lo abstracto se funde con lo concreto en un orden en el que el Kòsmos se expresa por su devenir, y en ése terreno las cosas son y no son, como entendía Heráclito, filosoficamente cercano a Los Jónicos (aunque de origen Efésio), el mundo es explicado por su indeterminacion, como sostenía Anaximandro, y con una tonalidad similar, pitagórica, el número crea cosas que no son números: Los Inconmensurables, que sin embargo provienen de números, números enteros, sensibles, y de un mundo, su mundo, donde todo es número. Estas magnitudes serían la indeterminación pitagórica, podría haber dicho Anaximandro de conocerlos; el ser y el no ser número, se jactaría Heráclito y posiblemente pondría en duda la sabiduria de Pitagoras, porque su eventual descubrimiento sólo confirmaría lo que el Efesio profetizaba. En ese paisaje amalgamado con el fragor de las proezas guerreras y la Alètheia de su palabra, donde la razón y la verdad guardaban aún un tinte mágico de su antecesor engendro, donde lo abstracto no abandonába del todo lo concreto, ahí lo 'racional', conmensurable, engendró lo'irracional', inconmensurable, alcanzando con esta gestación el climax del ascenso de las expresiones Jónicas de la Filosofía, la cúspide de la unión de los elementos contradictorios; pero in sítu estaba creándose el punto de partida para su superación, la tumba del propio pitagorísmo, y con ello el fín de la última expresión Jónica de la Filosofía.

Más ésta creación, conformaría un elemento adicional dentro de los factores que colocarían al pensamiento griego antiguo en el umbral de la evasión de las contradicciones, ya sembrada por Parménides, y la necesidad de la fundamentacion de las ideas por la vía de la demostracion, expresada en una superación de las demostraciones heurísticas de la geometría de los primeros pitagoricos por Teodoro, y un ascenso del pensamiento demostrativo en Hipócrates y Democrito (a quienes, aún cuando pocas referencias se tengan de ellos, la antigüedad les adjudica la realización de demostraciones de proposiciones Matematicas), y más adelante por Teetetos, Platón y su escuela, como una heréncia dejada al Aristotelismo: labor que de manera global redituaría legados en dos grandes vertientes: La Matemática y La Filosofía.

Así, el pitagorísmo habría colocado, aún con todos sus elementos subjetivos, religiosos, y aparéntemente irracionales, desde la crítica Aristotélica, la piedra de toque para la construcción de la abstración pura y la demostración matemática: Vernunft wird unsinn...! (Razón que deviene sin razón...!)

II.Repercusiones en la Matemática y la Filosofía.

a) La 'Crisis de las Matemáticas'y Los Elementos.

En mi opinión,'la crisis de las Matemáticas' aludida por los autores del siglo XIX, con cuya ocurrencia está en desacuerdo Knorr(33) y Szabó, sólo puede ser entendida como crisis del pitagorismo. Desde el hecho de que para el pitagorismo hacer Matemáticas era lo mismo que hacer Filosofía, porque su actividad entera tenía confines deidales y porque aún no se marcaban las fronteras de la división social del trabajo, y de el hecho de que el surgimiento de los inconmensurables ponía en contradicción su Tesis fundamental de que las cosas son números; la contradicción que ésto representaba en su Filosofía era también una contradicción en su matemática, y en particular en su concepto de número. Pero como el pitagorismo representaba la escuela matemática y filosófica que dejo mayor trascendencia social en el siglo V, no debiera extrañarnos que su crisis apareciera a la postre como crisis de las Matemáticas, aún cuando no se mencionara literalmente entre los griegos la palabra 'crisis'.

Pero esta "Crisis",debio haber sido una crisis dialéctica,

(33) Knorr, Ibid, pag. 307

que se manifestó en diversas vertientes, mostradas en el desarrollo de esta Tesis: (i) Un esfuerzo del pensamiento matemático por superar los métodos 'heurísticos'de las demostraciones del pitagorismo del siglo V en el terreno de la aritmética, conformando la regeometrización de la Aritmética Geometrizada a la que alude Knorr en sus conclusiones; (ii) La atención misma que prestaron al estudio de los inconmensurables unas de las partes más lúcidas y representativas de las corrientes postmilesias del pensamiento antiguo griego, encarnadas en Hipócrates de Quíos, Demócrito (atomista), Teetetos, Platón (que guardaba cierto legado pitagórico), Arquitas Y Eudoxio (matemáticos de lo mas sobresaliente) y Aristóteles...quienes debieron haber percibido la importancia de los inconmensurables para el desarrollo del pensamiento matemático, y el desanudamiento de las Matemáticas del pitagorismo para el desarrollo de la razón (recordemos la importancia que se les daba a las Matemáticas en la formación de los griegos).
(iii) La búsqueda del rigor de la demostración que aparece entre los siglos V y IV a.c., a cuyas muestras pertenecen los alientos de Platon a sus alumnos, dentro de los cuales estaba Aristóteles, como una especie de principio que mantendrá el pensamiento matemático y filosófico.
Con esas mismas muestras, que maneja Knorr, me parece, si se puede percibir una 'crisis en las Matemáticas'. pero no una crisis en la que se hallan hundido o paralizado, ni en la que de manera mecánica surge una fundamentación y

estructuración de las Matemáticas vía una supuesta axiomática Euclideana, sino una crisis en la que se recogen los supuestos basicos de la matemática pitagórica, se superan sus contradicciones (cuyo ejemplo más claro es la superación antes mencionada del concepto pitagórico de número, intuitivamente en Platón, y decisivamente en Euclides y Aristóteles), se le alienta a basarse en el rigor de pensamiento, y se abre paso a una nueva manera de hacer Matemáticas teniendo como base la demostración y una concepción ampliada del universo matemático que incluye a las magnitudes inconmensurables. Cimientos que en mi opinión se mantendrán hasta nuestra matemática actual.

b) El declive de la dialéctica Jónica y El ascenso de la razón Aristotélica.

Más notoria que en la Matemática, en la Filosofía se cimbra mas claramente el pensamiento con la crisis aludida en el inciso anterior.

Al derrumbarse en el plano de la razón la tesis fundamental del pitagorísmo, se caía la última expresión de la escuela filosófica Jónica, y se estaba derrumbando también la concepción dialéctica que ella sostenía implicitamente en su explicación del mundo a partir de la naturaleza sensible y el reconocinmiento de la contradicción como la razón del devenir del Kòsmos. Declinaban, pues, las primeras concepciones de la dialéctica, entendida desde la óptica Hegeliana(34). Pero, no se les entierra en definitiva, sino

(34) G. W. F. Hegel, Ibid, pag. 258

que aportan los elementos, el Ser y el No Ser, para el entendimiento de sus partes por separado en el pensamiento , como instantes diferenciados, abonando el terreno para el surgimiento de la abstracción pura anunciada por Parménides y Zenón, y coronada por el surgimiento de la Lógica Aristotélica. He ahí dos momentos fundamentales en el desarrollo de la historia de la Hilosofía, como una especie de desembocadura a la que arrojarían el pitagorismo, el surgimiento de los inconmensurables, el desarrollo de la ejecución del razonamiento y la madures de la abstracción matemática del siglo V obtenida de ésta, y el grado de desarrollo del contexto del siglo V, como algunas de las corrientes internas del caudal del río de sucesos que desarrollaron al pensamiento filosófico que procrearían al Platonismo y el Aristotelismo.

III.-Los Inconmensurables y su Teoría.

No obstante que los antiguos hayan realizado estudios y tratados sobre estas magnitudes, debieron producirse separadamente por diversos autores, como muestran los diversos estilos de las demostraciones relativas a ellas, y solo alcanzaron su compilación en Los Elementos, cuando ya estaban demostrados. Pero ello no indica que los griegos manejaran la categoria de "Teoría", como manejan los autores contemporaneos, ni que hubieran conformado alguna rama de las Matematicas o de la Geometría, como suponen Knorr, porque su tratamiento fue atacado con herramientas de la

Aritmética, en el caso de Teodoro, con herramientas de la Geometría, en el caso de Teetetos, Arquitas y Eudoxio, pero además incluso con herramientas del Algebra, como muestran proposiciones del Libro X. Pero también porque no todos los Libros de Los Elementos ni todas sus proposiciones tratan con los irracionales, estableciendo estudios matemáticos de la Geometría como un todo en el cual se insertan los irracionales.

Mas bien, me parece, los griegos que trataron los inconmensurables en la antigüedad se empecinaban con sus estudios en abrir espacios para que la Matemática, en particular la Geometría, aceptara dentro de su marco a los inconmensurables, y de ahí que trataran de explicarlos y de obtener propiedades relacionadas con ellos, como buscando hacer Matemáticas con eso que parecia algo fuera de las Matemáticas, haciendo de ellas un todo Racional que incluia objetos, los inconmensurables, que en un inicio eran considerados "irracionales".

IV.- Sin embargo, me parece correcta en lo general la reconstrucción propuesta por Knorr del estudio de los inconmensurables por los griegos, quien en mi opinión corrige la interpretación filológica, para luego darle continuidad, al planteamiento general de Heath. Así, el contexto del surgimiento de los inconmensurables fue el del estudio del lado y la diagonal del cuadrado, con muchas posibilidades realizado por los pitagóricos, se produce un impacto en las Matemáticas y la Filosofia, y años después son atacados por Hipócrates, Demócrito y Teodoro, y por conducto de éste último y Arquitas, Platón se habría enterado del problema de fundamentar la existencia de esas magnitudes y de abrir el espacio para que, superando la contradiccion pitagórica de su concepto de número, se creara una Matemática compatible con la existencia de los inconmensurables. Ésta labor sería encomendada a sus condiscipulos mas sobresalientes, Teetétos, Arquitas y Eudoxio.

Es muy ingeniosa y documentada desde el punto de vista filológico, pero sobre todo novedosa, la manera como Knorr interpreta el diálogo platónico del Teetetos, para proponer una serie de demostraciones adecuadas al marco del diálogo de la inconmensurabilidad de los lados y sus respectivas diagonales de los cuadrados de área 3, 5, 7...hasta 17, mostrando aquí el tipo de dificultades que detendrían a Teodoro, hecho que Heath solo indica. Sin embargo, como hemos tratado de mostrar con la exposición de las diversas reconstrucciones, Knorr recoge muchos de los elementos de Heath, y poco menos de autores, pero Knorr ahonda su exposición en el tratamiento de los irracionales por los alumnos de Platón. Esta reconstrucción, creo, es la máxima superación que ha alcanzado el estudio de la 'Teoría de Los Inconmensurables , en tanto que surge de una critica a la totalidad de las interpretaciones, de Heath, Tannery, Szabó, Van Der Harden, etc., pero sobre todo porque ubica el hallazgo y demostración de las magnitudes inconmensurables en un contexto de lo más natural para el mundo griego del siglo V, incluyendo ahí sus factores históricos, filológicos, filosóficos y matemáticos, como ningún otro autor combina. De ahí que incluso algunos autores, como Van Der Waerden(35), se han convencido de ella. Sin embargo, la discusión solo acabará hasta encontrarse las piezas documentales que reafirmen los supuestos de la reconstruccion , o en su caso su readecuación. Mientras tanto, será deber de los filósofos y matemáticos sumergirnos en su reflexión e investigación.

V) Desde el anális y la crítica de las reconstrucciones de los inconmensurables, yo la resumiría así:

La Fecha y la manera del halllazgo de los inconmensurables continua siendo una cuestión obscura, pero ya se han dado aproximaciones. A mi parecer no pudieron haberse descubierto en el año propuesto por Knorr, sino unos diez o más años después del 430, trás la muerte de Parménides y Zenón, quienes no tocarían éste punto no obstante su papel relevante . El contexto en que surgen, en efecto es el del lado y la diagonal del cuadrado, como muestra el diálogo El Menon, pero no, a su vez, dentro de una Teoría de proporciones, y por tanto no en el terreno de la duplicación del cuadrado por vía las medias proporcionales ni la anthyphairesis, como sugiere Szabo, porque éstas son herramientas utilizadas en la Teoria de Los Irracionales

---

(35) Bergren, History of Greek Mathematics:A Survey of Recent Research., pag. 401.

durante el periodo en que Aristóteles dirigió la academia de Platón. Mas bien, Los Pitagóricos del siglo V descubrieron, y fueron los mas probables de hacerlo, los inconmensurables, durante un tiempo se ocultaron por las dificultades que producirían dentro y fuera del mismo Pitagorismo, y de una manera indirecta se transmitiría ese conocimiento a los matemáticos del siglo IV, dentro de los cuales posiblemente estaría Hipócrates antes que los alumnos de Platón. Teodoro y Arquitas enseñarían las Matemáticas del más alto nivel a Platón, quien se percataría intuitivamente de la identidad entre magnitud y número, pero sobre todo de la existencia de los inconmensurables, como después se mostraría en el diálogo el Teetetes. Invitaria a sus mejores alumnos a estudiar el problema de la fundamentación de los inconmensurablespor por la vía de la rigurosidad de la demostración matemática y a hacer de las Matemáticas un todo que incluyera ése tipo de magnitudes. Teetetos primero, luego, trás su muerte, Eudoxo realizarian ese arduo papel durante el siglo IV que se reflejaría en Los LIbros II, V, VII, X, y XII , fudamentalmente, en el que las Matemáticas se nuestran como un todo en el que es posible tratar las magnitudes inconmensurables por métodos geométrico o aritméticos, haciendo de las Matemáticas un todo racional en el que intervienen objetos 'alogoi'," irracionales", que se ubican dentro de ése todo de manera Racional, coherente, y que se mantendrían en ella para siémpre...

BIBLIOGRAFIA:

- Aristoteles, La Metafísica, España, Gredos.1982 (co. Biblioteca Hispánica de Filosofía). 2º ed.rev.

- Arpàd Szabó, The Beginings of Greek Mathematics. Reidel Publishing company & Akademiai Kiado, 1978, Budapest Hungary.

- E. T. Bell, Historia de las Matemáticas, Ed. F. C. E., 2ºed ed.en esp., 1985, México

-Bergreen. History of Greek Mathematics. Canadá. Simon Fraser University. 1984 (col. Historia matemática II)

- Euclides, Los Elementos, Ed.Gredos, 1991,España

- Eggers Lan Conrado, Los Filósofos Presocráticos, 3 tomos, Ed. Gredos, 1986, Madrid España.

-D. H. Fowler, The Mathematics of Plato´s Academy, Oxford University Press, 1987.

- T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclid´s Elements, 3 vols, 2ºed., Ed. Dover Publications Inc., 1956, New York, USA.

-W. K. C. Guthrie, Historia de la Filosofía Griega, 3 tomos, Ed. Gredos & Cambridge University Press, 1986, España.

-Hipócrates (de Coss), Translated to english by W. H. S. Jones. Ed. Harvard University Press, 1957.

-G. W. F. Hegel. Lecciones sobre la Historia de la Filosofía, 3 tomos, Ed. F. C. E. 1983, México.

-Jones Charles V. Number before Euclid

-Jones Charle V. La influencia de Aristóteles en el fundamento de los Elementos de Euclides. México. 1981. Revista Mathesis.

-Jones Charles V. Las Paradojas de Zenón y los Primeros Fundamentos de las Matemáticas. México, 1985 (ponencia presentada en el 1º Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas).

Knorr Wilbur Richard, The Evolution of Euclidean Elements, Ed. D. Reidel Publishing Company, 1975, Holland.

-Knorr Wilbur Richard. " La Croix des Mathematicians" The Euclidean Theory of Irrational Lines". USA. Buletin of The American Mathematical Society. 1982

-Knorr Wilbur Richard. On The Early History of Axiomatics: The Interaction of Mathematics and Philisophy in Greek Antiquity. Holland. D. Reidel Publishing Company, 1980

-Knorr, Wilbur Richard, De Exhaución a Cortaduras. Méx. 1992. Revista Mathesis.

-Marcel Detienne, los Maestros de la Verdad en la Grecia arcaica, Ed. taurus, 1981, España.

-Platón, Diàlogos, Ed. Gredos, 4 tomos, 1982, España.

-Platón , Diàlogos, Ed. UNAM, tomo 3, 1922, Mexico

-R. Mondolfo, El Pensamiento Antiguo, tomo 1, 3ºed. Ed. Lozada, 1969, Argentina.

-V. V. Struve, Historia de la Antigua Grecia. 4ºed. Akal Editores, 1974, España.

-Werner Jaeger, Paideia;Los ideales de la cultura griega, Ed. F. C. E., 1974, México.