

33  
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**Facultad de Ingeniería**

**ANALISIS DE COMPORTAMIENTOS DINAMICOS  
Y PROPIEDADES COMPUTACIONALES  
EN REDES NEURONALES**

**T E S I S**

**Que para obtener el Título de  
INGENIERO EN COMPUTACION**

**p r e s e n t a**

**ENRIQUE RAFAEL FILLOY GARCIA**

**Directores de la Tesis:**

**M. C. ALBERTO ARTURO HERRERA BECERRA**

**DR. FRANCISCO CERVANTES PEREZ**

**México, D. F.**

**1992**



**TESIS CON  
FALTA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

<b>Capítulo 0. Planteamiento del problema, objetivos y estructura de la tesis</b>	<b>0. 1</b>
Planteamiento del problema	0. 1
Objetivos	0. 2
Estructura de la tesis	0. 2
<b>Capítulo 1. Antecedentes</b>	<b>1. 1</b>
Introducción	1. 1
Relación entre neurocomputación y computación en máquinas tipo von Neumann	1. 1
Propiedades de las redes neuronales	1. 3
La relación entre la neurocomputación y las neurociencias	1. 3
Neurocomputación como tema de estudio	1. 5
Historia de la neurocomputación	1. 5
<b>Capítulo 2. Método de análisis</b>	<b>2. 1</b>
Modelo de red neuronal	2. 1
Teoría general—cualitativa—	2. 1
Método particular—linealidad a trazos—	2. 8
<b>Capítulo 3. Análisis y resultados</b>	<b>3. 1</b>
Caso A	3. 3
Caso B	3. 11
<b>Capítulo 4. Conclusiones</b>	<b>4. 1</b>
<b>Apéndice A. Ejemplo de tres neuronas</b>	<b>A. 1</b>

## 0. Planteamiento del problema, objetivos y estructura de la tesis

### Planteamiento del problema

El enigma del funcionamiento del cerebro (i.e., Sistema Nervioso Central) ha fascinado, por muchos siglos, a grandes estudiosos tanto de disciplinas científicas como humanísticas. La atracción generada por este problema se ha incrementado en este siglo, debido principalmente al avance en las disciplinas que se encargan del estudio de la complejidad estructural y funcional del cerebro (i.e., las Neurociencias) y al desarrollo de autómatas complejos (i.e., Máquinas de Turing o Computadoras) que pueden llevar a cabo procesamiento de información bajo un paradigma serial. Varios términos, tales como Cibernética, Teoría del Cerebro, Inteligencia Artificial, Modelado Neuronal, Redes Neuronales y Neurociencias Computacionales, han sido utilizados para definir áreas de investigación multidisciplinaria, que han surgido en respuesta al reto de identificar los posibles mecanismos del cerebro que sustentan la posibilidad de las diversas conductas que es capaz de emitir un ser vivo, para desenvolverse adecuadamente en un medio ambiente complejo. De entre estas disciplinas, la Inteligencia Artificial (IA), la Teoría del Cerebro y las Redes Neuronales comparten la preocupación por el estudio de cómo el cerebro, o un programa computacional, pueden llevar a cabo tareas que requieren de la ejecución de "conductas inteligentes". La IA, la rama de las Ciencias de la Computación que se encarga del diseño y construcción de sistemas computacionales que permitan que una máquina tipo von Neumann realice algunos aspectos de conductas globales que, cuando son llevadas a cabo por seres vivos, se acepta

que requieren de inteligencia, se preocupa principalmente del procesamiento simbólico; mientras que en la Teoría del Cerebro y las Redes Neuronales, donde los circuitos de neuronas se definen como objetos matemáticos que son abstracciones de lo que se piensa son los componentes procesadores primarios del cerebro, se intenta desarrollar arquitecturas de procesamiento (i.e., neurocomputadoras) complementarias a las de las máquinas tipo von Neumann, que funcionan bajo el paradigma de procesamiento distribuido y paralelo, esto es "al estilo del cerebro". Estos dos tipos de máquinas complementarias han sido la base de la definición de la próxima generación de computadoras; esto es, las computadoras de VI Generación estarán constituidas por una máquina tipo von Neumann y una Neurocomputadora trabajando en armonía, la primera llevando a cabo todos aquellos procesos que son ejecutados eficientemente a través del paradigma serial de procesamiento de información y la segunda siendo responsable de realizar las tareas cuya ejecución requiera de procesamiento distribuido y paralelo. El diseño y construcción de autómatas complejos para la realización de "conductas inteligentes" presenta gran complejidad, no sólo cuando se sigue este enfoque "híbrido" (i.e., con computadoras de VI Generación), sino aún cuando sólo se utiliza una de las dos alternativas. El trabajo realizado en esta tesis se ubica dentro del área de investigación de la Teoría del Cerebro y se refiere al estudio de algunos de los problemas inherentes al análisis de modelos de redes neuronales, íntimamente ligados al estudio de un sistema biológico. En particular, el trabajo que se reporta en esta tesis es una extensión del trabajo realizado en nuestro laboratorio [Cervantes-Pérez y Arbib 1990; Cervantes-Pérez, Guevara-Pozas y Herrera-Becerra 1991], donde se analizaron diferentes versiones del modelo de red neuronal de una Columna de Facilitación, el modelo completo y una versión simplificada del mismo, abstracción de datos neuroanatómicos y fisiológicos

sobre las interacciones entre elementos de diferentes estructuras del sistema visuomotor de los anfibios (i.e., la retina, el tectum óptico y el pretectum). En estos trabajos se utilizaron técnicas de análisis de la Teoría de Sistemas Dinámicos para determinar las restricciones que deben satisfacer los parámetros de conectividad de la red para que se presente un comportamiento dinámico específico que ha sido postulado como la base de un proceso conductual complejo (i.e., facilitación de la respuesta de captura de presas a estímulos visuales en los anfibios) que implica una tarea de reconocimiento de patrones visuales en movimiento.

## Objetivos

Con base en lo anterior, en este trabajo se analizan las propiedades computacionales del modelo simplificado de la Columna de Facilitación (ver Cervantes-Perez y Arbib 1990), utilizando dos modelos de función de transferencia (i.e., función escalón y función rampa con saturación) y se identifican los conjuntos de valores paramétricos de conectividad bajo los cuales se producen los diferentes comportamientos dinámicos. Para ello, se definieron los siguientes objetivos:

- Explorar la utilidad de la *Teoría de Sistemas Dinámicos*, en el estudio de las propiedades funcionales de redes neuronales con pocos elementos.
- Determinar algunas propiedades computacionales de arquitecturas de redes específicas.
- Llevar a cabo un trabajo de análisis que permita generar nuevas ideas para complementar y mejorar la eficiencia en la síntesis de modelos de redes neuronales.

## Estructura de la tesis

**1. Antecedentes.** Se hace una breve exposición de la forma en que se ha desarrollado la neurocomputación en general, destacando los acontecimientos más relevantes con respecto al enfoque de este proyecto.

**2. Métodos de estudio.** Se describe el modelo matemático utilizado para representar una neurona como elemento procesador de información, así como una extensión de aquél para representar a una red de neuronas.

También se presentan los fundamentos de la *Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales* y su aplicación al estudio de sistemas dinámicos.

Finalmente, se analizan las ventajas que presenta una aproximación lineal a trazos para el análisis cualitativo de los modelos de redes neuronales.

**3. Análisis y desarrollo.** Se analiza un modelo específico de red para mostrar las ventajas que presenta el enfoque de trabajo planteado. Esto se hace por medio de dos ejemplos concretos.

**4. Discusión y conclusiones.** En esta parte se discuten las ventajas que presenta el realizar un análisis cualitativo para la descripción de las propiedades computacionales que posee una red neuronal.

De la discusión anterior, se resaltarán los principales resultados obtenidos y las conclusiones del trabajo, así como los posibles caminos a seguir en etapas posteriores del proyecto.

## Apéndice:

**A. Ejemplo de tres neuronas.** Se incluye un ejemplo adicional, con el único propósito de

hacer evidente la importancia de la técnica de análisis introducida en este trabajo.

**Bibliografía.** Contiene las referencias incluidas en el trabajo.

## 1. Antecedentes

En este trabajo no se pretende llevar a cabo una revisión exhaustiva de la literatura conexionista, sino que se hace una presentación de la forma en que se ha ido desarrollando la neurocomputación en general, en el contexto de la Inteligencia Artificial, destacando los acontecimientos más relevantes con respecto al enfoque de este proyecto.

### Introducción

Para comenzar, haré una cita de un trabajo de Ricardo Tapia [Tapia 1983]: "Se ha dicho repetidamente, y con razón, que el entender cómo funciona el cerebro constituye la más alta y elaborada frontera del conocimiento humano. Esto se debe a que las funciones que el cerebro lleva a cabo incluyen precisamente aquéllas que hacen del hombre el más evolucionado de los seres vivos: las funciones mentales. Si el hombre puede entender los mecanismos íntimos de las funciones mentales habrá adquirido el conocimiento del órgano más diferenciado y complejo de la evolución biológica y, en este sentido, quizá habrá descubierto simultáneamente el camino para modificar de una manera predecible el curso de esta evolución, en una fase que podría llamarse evolución antropocéntrica o evolución de la conciencia."

La poderosa capacidad del cerebro para realizar diversos tipos de funciones ha inspirado a muchos científicos a intentar comprender y modelar su operación. Se podría decir que generalmente se han utilizado dos metáforas distintas para atacar el problema [Arbib 1988]: "el —cerebro del— hombre es una máquina" y "el hombre es un animal". Siguiendo la primera metáfora, resulta que el cerebro humano es el dispositivo computacional más complejo que se conozca.

El interés en los procesos cognoscitivos y la inteligencia, tanto artificiales como naturales, es casi universal. Sólo hizo falta que se dieran algunos avances, en ciertas disciplinas, para convertir el interés en investigación, dentro de la teoría de las relaciones funcionales-estructurales neurobiológicas. Varios grupos de investigadores han intentado crear un modelo computacional que reproduzca la funcionalidad cerebral, comenzando con formas muy simplificadas; a ésto se le puede llamar neurocomputación.

Muchos factores han contribuido al rápido desarrollo de esta disciplina [Levine 1989], pero tres de ellos son particularmente importantes: a) primero, aplicaciones industriales en áreas como el procesamiento del conocimiento, control en robótica, reconocimiento y clasificación de patrones, reconocimiento y síntesis de voz y visión computarizada han encontrado problemas que sobrepasan la capacidad actual del procesamiento simbólico, característico del enfoque tradicional en Inteligencia Artificial; b) segundo, han habido avances significativos en los métodos experimentales de las neurociencias, así como en la aplicación de herramientas computacionales para el análisis y simulación de datos y procesos biológicos; y c) tercero, publicaciones con amplia difusión (como [Hopfield 1982] y [Rumelhart y McClelland 1986]), han logrado motivar a investigadores de diversas disciplinas para llevar a cabo proyectos relacionados con el área de las redes neuronales.

### Relación entre neurocomputación y computación en máquinas tipo von Neumann

Formalmente, la neurocomputación es la disciplina tecnológica interesada en sistemas de procesamiento de información adaptables, paralelos y distribuidos, que, además, desarrollan la capacidad de procesar información,

en una forma determinada, como una respuesta al ser expuestos a un ambiente informativo [Hecht-Nielsen 1990].

Desde la aparición de la primera computadora electrónica digital, útil para fines prácticos, la ENIAC en 1946, hasta avanzados los años ochenta, esencialmente todas las aplicaciones de procesamiento de información utilizaban un solo enfoque: la computación en máquinas tipo von Neumann (vN) —algorítmica o declarativa—. Resolver un problema mediante el uso de este tipo de computación implica el encontrar un algoritmo y/o un conjunto de reglas para resolver el problema y después codificar ésto correctamente en software.

Pero la computación vN puede ser usada solamente en aquellos casos en los que el procesamiento a realizar puede ser descrito en términos de un procedimiento conocido o un conjunto de reglas definido. Si el procedimiento algorítmico y/o el conjunto de reglas no se conocen, entonces deberán ser desarrollados, antes de poder programar una máquina en particular para su ejecución.

La neurocomputación aparece como un nuevo enfoque en el procesamiento de información, que no requiere del desarrollo de algoritmos o reglas y que comúnmente reduce en forma significativa la cantidad de software que debe ser desarrollado. Para cierto tipo de problemas (típicamente en áreas como procesamiento sensorial, reconocimiento de patrones, análisis de datos y control), para los cuales los algoritmos o reglas no son conocidos (o, siendo conocidos, tal vez resulte muy caro el software para implantarlos, lleve demasiado tiempo o sea inconveniente implementarlo), el desarrollo autónomo de la capacidad de procesamiento de información que caracteriza a la neurocomputación resulta ser una opción muy conveniente. Estas propiedades hacen de la neurocomputación, por lo menos en las áreas donde es aplicable, una interesante alter-

nativa o, mejor dicho, un complemento de la computación vN. De hecho, las cualidades de la neurocomputación pueden ser fácilmente integradas a los sistemas tradicionales de computación existentes. Una prueba de ésto es el anuncio, por parte de los japoneses, del interés en desarrollar la "computadora de sexta generación", un sistema híbrido que conjunta, en una sola máquina, computación vN y neurocomputación.

Cabe señalar que la neurocomputación y la computación vN son enfoques fundamentalmente diferentes para el procesamiento de información. La primera se basa en transformaciones, mientras que la segunda se basa en algoritmos y reglas. La experiencia ha demostrado que estos dos tipos de procesamiento de información son operacionalmente complementarios, pero conceptualmente incompatibles. En otras palabras, comúnmente resulta imposible describir la operación de una transformación en términos de un "principio" de procesamiento de información de alto nivel (expresado como un algoritmo canónico o como un conjunto de reglas de alto nivel). En esencia, los sistemas neurocomputacionales tienden a operar sobre la información de una manera completamente diferente a como lo hacen los sistemas basados en algoritmos y reglas, con los que se está más familiarizado.

Un aspecto importante es el hecho de que toda función del cálculo de proposiciones es realizable por alguna red (de un tipo bastante simple); consecuentemente, cualquier función Turing-computable puede ser llevada a cabo por una red de neuronas. Con ésto se demuestra que una red neuronal tiene, por lo menos, el mismo poder computacional que una arquitectura tipo von Neumann.



## Propiedades de las redes neuronales

A pesar de que es posible demostrar teoremas que garantizan ciertas capacidades y propiedades de las redes neuronales (tales como la tolerancia a fallas, robustez y la habilidad de implantar una clase particular de transformaciones), estos resultados sólo aseguran que las redes neuronales pueden ser empleadas útilmente y con seguridad. Esto no responde a la pregunta, más interesante académicamente, de cómo (en términos conceptuales más elevados) la red realiza su trabajo. Todo parece indicar que respuestas a este tipo de preguntas requieren de una profunda revolución intelectual en el campo del procesamiento de la información. Otro problema, que podría ser relacionado directamente con el de corrección en computación vN, es el hecho de que, una vez que se tiene una red que realiza totalmente una función determinada, es difícil —si es que es posible— decir si solamente lleva a cabo dicha función, o en realidad también está haciendo algo más.

Las principales estructuras para el procesamiento de información de interés en la neurocomputación son las redes neuronales; sin embargo, cabe mencionar que existen otras clases de estructuras capaces de procesar información en forma adaptable, que también son consideradas, tales como los autómatas que aprenden [Barto et al 1986], sistemas de aprendizaje genético, memorias direccionables por contenido adaptables a los datos, sistemas de aleación simulada, memorias asociativas y sistemas de aprendizaje difuso.

Existe una serie de características, comúnmente compartidas por las redes neuronales, que las hacen únicas como sistemas procesadores de información; en general, tienen la capacidad de adaptarse, de aprender, de autoorganizarse, de generalizar, de ser entrenadas, de proveer de memoria asociativa y distribuf-

da y suelen ser resistentes a fallas parciales. Es por estas características que las redes neuronales son muy adecuadas para resolver problemas específicos, con propiedades muy particulares, especialmente aquellos que resultan difíciles de resolver utilizando modelos computacionales tradicionales. Típicas áreas de aplicación en donde las redes neurocomputacionales han sido utilizadas son [Hecht-Nielsen 1990]: a) síntesis y reconocimiento de voz (conversión de texto a voz y procesamiento de lenguaje natural), b) compresión de imágenes y señales, c) reconocimiento de patrones e imágenes y d) problemas de optimización (con crecimiento exponencial o NP-completos).

## La relación entre la neurocomputación y las neurociencias

Es claro que existe una relación entre la neurocomputación y las neurociencias. Estas últimas, de manera general, pueden ser definidas como las disciplinas involucradas con el entendimiento del cerebro. Se considera que el cerebro está compuesto por complejas redes de neuronas, las cuáles son mucho más complejas que los elementos procesadores utilizados en neurocomputación y sus funciones no son comprendidas en su totalidad todavía.

Como en cualquier ciencia, el progreso en las neurociencias se realiza al crear conceptos funcionales y modelos basados en resultados experimentales, para después refinar o refutar tales conceptos y modelos al llevar a cabo más experimentos. Hasta ahora, esencialmente todos los modelos que se han presentado han sido refutados o se ha demostrado que están excesivamente simplificados. Pero la producción de conceptos funcionales y modelos en las neurociencias es continua y prodigiosa. Esto provee una excelente fuente de nuevos conceptos y principios para ser utilizados en

la neurocomputación, dada la relación que existe entre ambas.

Naturalmente, dado que estos conceptos y modelos de las neurociencias no son (todavía) representaciones precisas del funcionamiento del cerebro, sistemas neurocomputacionales basados en estas ideas no pueden ser descritos como "basados en la operación del cerebro humano" (una pretensión escuchada comúnmente). Tal vez sea más conveniente decir que operan "al estilo del cerebro". Sin embargo, el beneficio que obtiene la neurocomputación a través de los conceptos y modelos desarrollados por las neurociencias es invaluable, no obstante las limitaciones que éstos puedan tener.

El fundamento de los sistemas neurocomputacionales es una arquitectura inspirada en las redes de neuronas biológicas. Generalmente, una red neurocomputacional se basa en un modelo matemático que consiste de un cierto número de unidades simples tipo neurona, llamados elementos procesadores, interconectados de alguna manera (en el siguiente capítulo se da una definición formal de red neuronal). Dado que los sistemas neurocomputacionales están abstractamente basados en lo que se conoce del funcionamiento del cerebro, existe una relajada correspondencia entre los componentes de un sistema neurofisiológico y los de un sistema neurocomputacional. En su mayoría, la estructura y principios fundamentales de los sistemas neurocomputacionales tienen su fundamento en el funcionamiento, a un nivel muy simplificado, de los componentes del proceso fisiológico del disparo de las neuronas.

De manera muy superficial, sumamente simplificada, tal proceso puede ser descrito como sigue (para una descripción más detallada, véase [Tapia 1983]). Primero, las señales de entrada inciden en la neurona, provenientes de ella misma o de otras neuronas, a través de las

sinapsis, que regulan la cantidad de información que pasa desde las terminales nerviosas incidentes hacia la neurona, pudiendo ser excitadoras o inhibitorias. Las señales son entonces pasadas al área central de activación de la neurona, donde se suman. Si este nivel total de energía de entrada supera un cierto umbral, que determina el mínimo nivel que se debe alcanzar para que la neurona dispare, entonces la neurona emite energía a través del axón (por donde es transmitida a otras sinapsis y puede ser realimentada a la sinapsis original). Pero si la suma es menor que el umbral, nada relevante sucede.

Un proceso similar ocurre dentro de cada elemento procesador de una red neurocomputacional típica. Las señales le llegan al elemento procesador a través de conexiones ponderadas, pudiendo ser positivas o negativas. Estas señales son sumadas a través de una función de adición. El resultado de esta sumatoria es suministrado como entrada a una función de transferencia, la cual determina la salida total como alguna función de la suma de las señales ponderadas. Esta salida es generada dependiendo de las condiciones de la función de transferencia, que puede ser lineal, no lineal o lineal a trazos.

Por otro lado, es interesante mencionar que comienza a haber un flujo de ideas de la neurocomputación a las neurociencias. Miembros de la comunidad de neurocomputación están constantemente desarrollando nuevas arquitecturas de redes neuronales, así como nuevos conceptos y teorías para explicar la operación de estas arquitecturas. Muchos de estos desarrollos pueden ser usados por neurocientíficos como nuevos paradigmas para la construcción de conceptos funcionales y modelos de elementos del cerebro y la mente. Estos pueden llevar a nuevas predicciones y experimentos. Entonces, la neurocomputación puede tener valiosos conocimientos que ofrecer a las neurociencias. Gracias a que cada

una de estas disciplinas puede enriquecerse del trabajo de la otra, existe un creciente nivel de comunicación efectiva entre estos grupos diferentes.

### Neurocomputación como tema de estudio

Como tema de estudio, la neurocomputación comprende tres áreas principales de actividad:

- Arquitecturas y teoría
- Implantación
- Aplicaciones

Cada una de estas áreas se describe brevemente a continuación.

**Arquitecturas y teoría.** En neurocomputación, la palabra arquitectura es usada para indicar la definición matemática formal "independiente de la máquina" de una estructura neurocomputacional (por ejemplo, una red neuronal). El área de las arquitecturas y la teoría de la neurocomputación se interesa en el estudio y desarrollo de arquitecturas neurocomputadoras (principalmente estructuras de redes neuronales) y de teorías de operación de tales arquitecturas. Aparte del desarrollo de nuevas estructuras y teorías, investigadores en esta área realizan evaluaciones experimentales de sistemas neurocomputacionales [Rumelhart y McClelland 1986]. Ha sido el estudio de la arquitectura y la teoría lo que ha hecho posible la existencia de las estructuras de redes neuronales que se utilizan hoy en día, junto con el entendimiento de la teoría de su operación, capacidad, técnicas para uso efectivo y limitaciones. Este conocimiento forma la base para las aplicaciones exitosas en el mundo real.

**Implantación.** El área de implantación en la neurocomputación implica la investigación y el desarrollo de los medios para implantar arquitecturas neurocomputacionales en hardware físico [Psaltis et al 1989]. Esto incluye trabajo en áreas tales como lenguajes de neurosoftware (lenguajes para describir arquitecturas de redes neuronales de manera independiente a la máquina a utilizar) [Weitzenfeld 1989; Kolonay y Klimasauskas 1987], diseño y desarrollo de neurocomputadoras, así como el diseño y desarrollo de interfases entre los sistemas de computación programada y los sistemas neurocomputacionales [Hecht-Nielsen 1990]. Son los resultados de la investigación y desarrollo de la implantación los que permiten que se tenga la capacidad de aplicar la neurocomputación a problemas prácticos de manera rápida y fácil.

**Aplicaciones.** Por mucho, el área con mayor actividad en neurocomputación es la de las aplicaciones. Mucha gente, con antecedentes académicos diversos, está aplicando ahora la neurocomputación a una amplia variedad de problemas. La más exitosa metodología parece ser el enfoque de la "solución en busca de problemas", en el que los expertos en algún dominio de aplicación aprenden sobre la capacidad y limitaciones de múltiples arquitecturas de redes neuronales, para después identificar en su área de conocimiento algún problema importante que pueda ser resuelto con ayuda de la neurocomputación. Existen ya numerosos casos de exitosas aplicaciones prácticas en ramas muy diversas [Yuh et al 1989; Le Cun et al 1989; Lupo 1989; Brown 1989].

### Historia de la neurocomputación

En los últimos siglos, el intento por explicar la inteligencia ha generado teorías metafísicas, especificaciones formales e incluso modelos exploratorios de funciones mentales. En

el siglo XX, los recursos intelectuales de los investigadores se enriquecieron por el desarrollo de tres sucesos: la teoría formal de la computación; el diseño de máquinas funcionales para la implantación de computaciones especificadas formalmente; y el descubrimiento de la neurona.

El primero de los intentos, en la época moderna, para identificar la naturaleza de la inteligencia fué el realizado por la corriente de la cibernética, comenzando en 1943, asociada con el trabajo de Wiener [Wiener 1948], quien sentó algunos de los fundamentos de la teoría moderna de control por realimentación. La importancia de la cibernética estriba en que sugiere que la teleología puede ser consistente con la mecanización. Se decía que el punto clave de la inteligencia era la adaptación y dado que la cibernética parecía presentar una respuesta de cómo esta adaptación podía ser explicada en términos de la realimentación de información, considerando al mismo tiempo las cuestiones teleológicas —“El propósito del gobernador es mantener la velocidad de la máquina constante”—, atrajo mucho la atención de la gente que intentaba modelar el procesamiento de información biológico. Sin embargo, la cibernética nunca se convirtió en el lenguaje de la IA, porque no tenía la riqueza ontológica para hablar de percepción y conocimiento: aún cuando tenía la noción de procesamiento de información en un sentido —tenía metas y mecanismos para alcanzarlas—, carecía de la noción de computación y formas de representación para ella.

El principio de la neurocomputación comúnmente se remite al artículo de Warren McCulloch y Walter Pitts en 1943 [McCulloch y Pitts 1943], cuyo título, “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, indica el nacimiento común de los enfoques tradicional y conexionista de la IA. Su visión de implantar el “cálculo lógico” influyó a von Neumann en el diseño de la computadora

digital e inspiró a los pioneros de la IA a intentar el modelado formal del pensamiento. Su discusión acerca de la “actividad nerviosa” contribuyó a la teoría psico-fisiológica de Donald Hebb sobre conglomerados de neuronas. En 1949, Hebb escribió un libro titulado *La Organización del Comportamiento* (The Organization of Behavior) que se dedicó a la idea de que el condicionamiento psicológico clásico es natural en animales porque es una propiedad de las neuronas individuales. Esta idea no era nueva en sí misma, pero Hebb la llevó mucho más lejos de lo que nadie antes que él lo había hecho, al proponer una ley de aprendizaje específica para las sinapsis de las neuronas. Hebb utilizó entonces esta ley de aprendizaje para construir una explicación cualitativa de algunos resultados experimentales de la psicología. Este atrevido paso sirvió de inspiración para que muchos otros investigadores se dedicaran a la misma idea, lo que sirvió para abrir el camino para el advenimiento de la neurocomputación.

Aunque hubieron muchas otras personas examinando los aspectos que rodeaban la neurocomputación en los cuarenta y principios de los cincuenta, su trabajo tuvo más el efecto de preparar el escenario para futuros desarrollos que el de realmente causar aquellos desarrollos. Típico de esta era fue la creación de la primer neurocomputadora, la Snark, por Marvin Minsky en 1951. La Snark sí operó exitosamente desde el punto de vista técnico (ajustaba sus pesos automáticamente), pero nunca efectuó alguna función de procesamiento de información particularmente interesante. Sin embargo, aportó ideas de diseño que fueron usadas después por otros investigadores.

En 1956, los pioneros de la inteligencia artificial, Marvin Minsky, John McCarthy, Nathaniel Rochester y Claude Shannon organizaron la primera conferencia en inteligencia artificial, patrocinada por la Fundación Rockefeller.

ller. En élla, investigadores de todo el mundo se reunieron para discutir el uso potencial de las computadoras en la simulación de "todo aspecto de aprendizaje o cualquier otra característica de la inteligencia." Fué en esta conferencia que los campos de las redes neuronales y la inteligencia artificial fueron introducidos como tales. Utilizando varios cientos de neuronas y conexiones simuladas, Nathaniel Rochester, del IBM Research, presentó en esa primera conferencia un modelo de red neuronal que construyó para explorar como esa red respondería a estímulos externos del ambiente. Esta fué la primera simulación por software conocida de redes neurocomputacionales.

La primer neurocomputadora exitosa, el Perceptron Mark I, fué desarrollado durante 1957 y 1958 por Frank Rosenblatt, Charles Wightman y otros. Dados sus profundos conocimientos, sus contribuciones técnicas y su moderna forma de pensar acerca de las redes neuronales, mucha gente considera a Rosenblatt como el fundador de la neurocomputación tal como se conoce hoy en día. Su principal interés fué en el reconocimiento de patrones. Aparte de inventar el perceptrón, Rosenblatt también escribió un libro, anticipado para su época, sobre neurocomputación, Principios de la Neurodinámica (Principles of Neurodynamics).

Dado que el perceptrón era un dispositivo experimental en desarrollo, tenía ciertas limitaciones. No tenía estructura de estados y era inapropiado describirlo en términos de la teoría de autómatas.

Un poco después que Rosenblatt, en 1959, pero de manera muy similar, fué Bernard Widrow quien, trabajando junto con sus estudiantes graduados, desarrolló un tipo diferente de elemento procesador para las redes neuronales llamado ADALINE, el cual estaba equipado con una nueva y poderosa ley de aprendizaje, misma que, a diferencia de la ley

de aprendizaje del perceptrón, todavía se utiliza extensivamente. Widrow y sus estudiantes aplicaron el ADALINE exitosamente en una gran cantidad de problemas y produjeron varios documentales de sus éxitos. Una aplicación notable fué el desarrollo de filtros adaptables que eliminaban el eco de las líneas telefónicas; por primera vez se utilizaba un sistema neurocomputacional en la solución de un problema del mundo real. Widrow también fundó la primer compañía de hardware neurocomputacional (la Memistor Corporation), la cual produjo neurocomputadoras y componentes neurocomputacionales para ventas comerciales a principios y mediados de los sesenta.

Aparte de Rosenblatt y Widrow, hubo un número de personas que a finales de los cincuenta y principio de los sesenta tuvieron un éxito substancial en el desarrollo de arquitecturas neurocomputacionales y conceptos de implantación. No obstante el éxito considerable de estos primeros investigadores en neurocomputación, el campo sufrió notoriamente de dos problemas obvios. Primero, la mayoría de los investigadores atacaron el tema desde un punto de vista cualitativo y experimental, más que desde un punto de vista analítico (aunque hubo notables excepciones a ésto, como el caso de Widrow). Este énfasis experimental resultó en una carencia significativa de rigor y una relajación de pensamiento que molestó a muchos científicos e ingenieros establecidos que observaban este campo. Segundo, una parte desafortunadamente grande de los investigadores en neurocomputación (y la gente de la prensa con quienes hablaban) se dejaron llevar por su entusiasmo en sus declaraciones y su escritura. Por ejemplo, hubieron predicciones ampliamente publicadas de que el desarrollo de cerebros artificiales estaba a tan sólo unos años de distancia. Este tipo de exageraciones desacreditó al campo de la neurocomputación y molestó a la gente técnica en otros campos.

Aparte de las exageraciones y la falta general de rigor, para mediados de los sesenta parecía que a los investigadores se les habían terminado las buenas ideas. Se hizo claro que para poder obtener nuevos progresos era necesario introducir ideas radicalmente nuevas — y no era aparente que éstas pudieran aparecer prontamente—. De hecho, así sucedió. Este agotamiento intelectual ocasionó que mucha de la mejor gente se alejara del campo. La mayoría de ellos se dedicaron a campos relacionados tales como el reconocimiento de patrones, procesamiento de imágenes y procesamiento de señales.

Para mediados de los sesenta, era claro que la primer era de éxitos de la neurocomputación llegaba a su fin. Aunque en realidad la neurocomputación ya era para entonces un campo en decadencia, la publicación en 1969 por Minsky y Papert del libro *Perceptrones* (*Perceptrons*) generó una fuerte polémica, de la que se desprendieron varias interpretaciones. Este libro probaba matemáticamente que un perceptrón no podía implementar la función lógica del o exclusivo (XOR) ni muchas otras funciones en forma de predicados (funciones escalares binarias de variables vectoriales binarias).

Una de las interpretaciones fué que la tesis implícita en el libro *Perceptrones* era que esencialmente todas las redes neuronales padecían del mismo "defecto fatal" que el perceptrón; es decir, la incapacidad de calcular ciertos predicados esenciales tales como el XOR. Minsky y Papert revisaron varias propuestas de mejora para el perceptrón y demostraron que tampoco éstas podían realizar las acciones adecuadamente. Esta interpretación dejaba la impresión de que la investigación en el área de las redes neuronales resultaba ser un callejón sin salida.

Otro enfoque surgido de la polémica ocasionada por el *Perceptrones* fué el intentar resol-

ver las limitaciones encontradas. Esto generó nuevas líneas de investigación —redes con múltiples capas, procedimientos para la corrección del error, memorias asociativas lineales, etc.—.

Pero la idea general de que la investigación en redes neuronales no llevaba a ninguna parte se estableció firmemente. Los investigadores en el campo de la inteligencia artificial obtuvieron todo el dinero que antes se destinaba a la investigación en redes neuronales y más. De ahí en adelante, la neurocomputación tuvo que seguir bajo tierra.

Durante el período desde 1967 hasta 1982, se realizó poca investigación explícita en neurocomputación en los Estados Unidos (la investigación en Japón, Europa y la Unión Soviética fué, de alguna manera, menos afectada por la debacle del *Perceptrones*). Sin embargo, una gran parte de la investigación en redes neuronales se llevó a cabo bajo los títulos de procesamiento adaptable de señales, reconocimiento de patrones y modelaje biológico. Un aspecto interesante de esta era de investigación silenciosa fué el gran flujo de nuevos investigadores talentosos durante los cuatro años desde 1966 hasta 1969. Ejemplos de ellos son Shun-ichi Amari, James Anderson, Kunihiko Fukushima, Stephen Grossberg, Harry Klopf, Teuvo Kohonen y David Willshaw. Esta gente, y aquellos que llegaron en los siguientes trece años, fueron los que pusieron el campo de la neurocomputación en una base sólida y prepararon el camino para el renacimiento del campo.

Para principios de los ochenta, muchos investigadores en neurocomputación se atrevieron a comenzar a realizar proposiciones para explorar el desarrollo de neurocomputadoras y aplicaciones de las redes neuronales. El primer paso se dió en la Agencia de Proyectos de Investigación Avanzados de Defensa (DARPA), donde Ira Skurnick escuchó los argu-

mentos que los investigadores en neurocomputación hicieron en favor de su trabajo. Apartándose de la tradición, Skurnick comenzó a otorgar fondos a la investigación en neurocomputación en 1983. Dado que DARPA era considerado como uno de los indicadores mundiales de la moda tecnológica, esta acción abrió las puertas a la neurocomputación en otras organizaciones destinadas a proveer de fondos para la investigación. Skurnick estuvo en el lugar indicado en el momento indicado para tomar una decisión clave que ayudara a desencadenar el renacimiento de la neurocomputación.

Otra enorme fuerza en este sentido, en los años 1983 a 1986, fué aportada por John Hopfield, un físico establecido con reputación mundial, quien se había interesado en las redes neuronales unos años atrás. Hopfield escribió dos artículos sobre redes neuronales, en 1982 y en 1984, mismos que, junto con sus conferencias en todo el mundo, persuadieron a cientos de científicos, matemáticos y tecnólogos altamente calificados a unirse al emergente campo de las redes neuronales. Uno de los grandes atractivos fué la naturaleza multidisciplinaria del campo, que permitía conjuntar resultados obtenidos en áreas diversas y planteaba retos muy interesantes, compartidos con otras disciplinas sólidamente establecidas.

De hecho, para principios de 1986, aproximadamente un tercio de la gente en el medio había sido atraída directamente por Hopfield o por alguno de sus nuevos seguidores. Hoy en día se habla de un 50-80%. El trabajo de Hopfield como reclutador fué tal vez la contribución individual más importante para el principio del crecimiento de este campo revitalizado. De hecho, en ciertos círculos, se desarrolló la confusión de que Hopfield había inventado la neurocomputación (o había por lo menos suministrado los descubrimientos clave que llevaron a la revitalización del campo). Esto generó una inconformidad significa-

tiva en muchos de los verdaderos pioneros de este campo—particularmente en aquellos que habían continuado batallando durante el período de tiempo de la investigación silenciosa en la obscuridad y que ahora esperaban recibir elogios por los trabajos acumulados (que finalmente vinieron, pero no hasta 1987)—.

La primera conferencia reciente sobre neurocomputación fué la Primera Conferencia Conjunta E.E.U.U.-Japón en Redes Neuronales de Cooperación y Competencia, en Kyoto, 1982. Para 1986, con la publicación de los "libros PDP" [Rumelhart y McClelland 1986], el campo explotó. En 1987, la primera conferencia abierta sobre redes neuronales en tiempos modernos, la Conferencia Internacional en Redes Neuronales de la IEEE (con más de 1,700 participantes), tuvo lugar en San Diego y se formó la Sociedad Internacional de Redes Neuronales (INNS). En 1988 se fundó la revista *Neural Networks of the INNS*, seguida de *Neural Computation* en 1989 y del *Transactions on Neural Networks* del IEEE en 1990 (y subsecuentemente por muchas otras). Comenzando en 1987, muchas universidades líderes anunciaron la formación de institutos de investigación y programas educacionales en neurocomputación.

## 2. Método de análisis

### Modelo de red neuronal

Existen varias formas de modelar el funcionamiento de una neurona. Para este trabajo, se considerarán dos aspectos importantes para la representación de la neurona: el potencial de membrana y la frecuencia de disparo. Para modelar la dinámica del potencial de membrana se utiliza el modelo del "integrador con fugas", contemplando las propiedades de suma espacial y temporal de la siguiente manera:

$$\tau_j \frac{d m_j(t)}{dt} = -m_j(t) + I_j(t) + m_{j,0}$$

donde  $\tau_j$  es la constante de tiempo característica de la neurona  $j$ ,  $m_j(t)$  es su potencial de membrana en el tiempo  $t$ ,  $m_{j,0}$  es su potencial de reposo e  $I_j(t)$  describe la propiedad de suma espacial como sigue:

$$I_j(t) = \sum_{i=1}^h \omega_{ij} F_i(m_i(t)) - \sum_{k=h+1}^n \omega'_{kj} F_k(m_k(t))$$

donde se representan los efectos ponderados de las  $h$  sinapsis excitadoras (primera sumatoria) y las  $(n-h)$  sinapsis de carácter inhibitorio (segunda sumatoria) que inciden en la neurona  $j$ . Las  $F(m(t))$  son funciones no lineales que describen la frecuencia con que se transmiten los potenciales de acción a las terminales axónicas. En el modelo del "integrador con fugas" generalmente se utilizan funciones discontinuas tipo escalón

$$F_i(m_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } m_i \geq \phi_{0,i} \\ 0 & \text{si } m_i < \phi_{0,i} \end{cases}$$

o tipo rampa

$$F_i(m_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } m_i \geq \phi_{2,i} \\ k_i \left( \frac{m_i - \phi_{1,i}}{\phi_{2,i} - \phi_{1,i}} \right) & \text{si } \phi_{1,i} \leq m_i < \phi_{2,i} \\ 0 & \text{si } m_i < \phi_{1,i} \end{cases}$$

para determinados valores de umbral  $\phi_{j,i}$  y la constante  $k_i$ .

De esta manera, resulta claro que es fácil extender el modelo de neurona, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, para representar una red neuronal.

### Teoría general —cualitativa—

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) puede ser utilizado como la mejor manera de modelar a muchos de los sistemas físicos que evolucionan en el tiempo [Odell 1980]. Sin embargo, no es necesario saber como derivar las fórmulas que dan la solución a un sistema de EDO —que en la mayoría de los casos ésta no existe—. En muchas de las ocasiones en las que es posible encontrar una solución exacta, o una aproximación asintótica, la forma de ésta resulta tan compleja que no permite obtener información acerca de su propia naturaleza, a menos que se haga una representación gráfica —geométrica— de la misma.

Las simulaciones numéricas resultan de gran ayuda para obtener una caracterización cuantitativa, pero casi siempre se debe hacer primero una caracterización cualitativa; de esta manera resulta mucho más fácil sintonizar los parámetros del sistema convenientemente para poder reproducir los comportamientos relevantes del mismo.

Existen varias formas de obtener una caracterización cualitativa de algún sistema dinámico. Sin embargo, el poder representar los tipos



de soluciones de manera visual, obteniendo gráficas en el contexto de una metáfora geométrica, conlleva un gran número de ventajas, especialmente para sistemas de orden menor o igual a tres.

Para esta breve exposición de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, se hará referencia a la forma canónica para los sistemas de EDO, dada por el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, \dots, y_n) & y_1(0) &= c_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, \dots, y_n) & y_2(0) &= c_2 \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, \dots, y_n) & y_n(0) &= c_n \end{aligned} \quad (1)$$

para  $0 \leq t \leq T$ , donde cada  $y_i$  representa una variable de estado del sistema y las  $c_i$  son las condiciones iniciales, para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Un sistema de EDO no autónomo de orden  $m$  es equivalente a un sistema autónomo de orden  $n = m + 1$ . Para transformar un sistema no autónomo en uno autónomo, basta hacer  $dy_n/dt = 1$ ,  $c_n = t_0 = 0$  y reemplazar a  $t$  por  $y_n$  en las  $f_i$ .

### Existencia y unicidad de las soluciones

Dado un conjunto de condiciones iniciales ( $c_1, c_2, \dots, c_n$ ), denotado por  $c^1$ , es posible que el sistema no tenga ninguna solución, que tenga una o que tenga muchas. Para poder determinar si el problema de valores iniciales (PVI)

tiene una única solución, se debe verificar si cada  $f_i$  es continuamente diferenciable respecto a cada  $y_i$ . Dicho de otra manera, si para cada  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\partial f_i / \partial y_j$  es una función continua de todas las  $y_i$ , entonces se garantiza que cuando se especifica un conjunto de condiciones iniciales  $c$ , para valores suficientemente pequeños de  $T$ , el sistema tiene una solución única.

### La metáfora geométrica: espacio de fase

Cada solución del sistema (1) es un conjunto de funciones  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  cuyos valores cambian conforme  $t$  varía. Se puede considerar a cada solución particular como una curva o trayectoria, desarrollándose en un espacio Euclideo de dimensión  $n$ ,  $R^n$ . Los puntos que conforman esta trayectoria tienen, en cada instante  $t$ , las coordenadas  $y(t)$  en  $R^n$ . Conforme  $t$  varía, estas coordenadas cambian y la curva se desarrolla en  $R^n$ . De esta manera, la totalidad del espacio  $R^n$  contiene una infinidad de trayectorias entrelazadas, donde cada una es la solución de algún PVI. De hecho, las coordenadas de cualquier punto de una trayectoria dada pueden funcionar como condiciones iniciales para esa misma trayectoria. Es decir, al redefinir  $t=0$ , cualquier punto visitado por una curva se puede tomar como condiciones iniciales que determinan a esa trayectoria, de manera única, entre la infinidad de curvas que son solución del sistema de EDO.

Se puede pensar que las funciones  $f_i(y)$  le asignan a cada punto  $(y_1, \dots, y_n)$  del espacio  $R^n$  un vector cuyos componentes son los valores de las  $f_i$  en ese lugar, el cual es tangente a la trayectoria única que pasa por ese punto

1 Se usarán letras en negrilla para representar vectores de dimensión  $n$ . Por ejemplo,  $y(t)$  denota el punto con coordenadas  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ .  $f(y)$  denota el campo de flujo cuyos componentes son  $(f_1(y), \dots, f_n(y))$ . El sistema de EDO (1) se reduce a  $dy/dt = f(y)$

(se asume que las  $f_i$  son funciones suaves). La magnitud de este vector especifica la velocidad a la que la solución pasa a través del punto al que está asignado. Se dice que las  $f_i$  ( $y$ ) especifican un flujo en el espacio  $(y_1, \dots, y_n)$ , al que se le llama **espacio de fase** para el sistema de EDO (1). La tarea de encontrar soluciones a este sistema se traduce a la de construir curvas en este espacio de fase que son siempre tangentes a los vectores del flujo. A estas curvas se les llama comúnmente trayectorias, curvas de solución, curvas integrales del flujo, etc.

La tarea de resolver un PVI particular, en la forma de (1), consiste en encontrar, entre la infinidad de trayectorias, la curva integral única del flujo,  $(f_1, \dots, f_n)$ , que pasa por el punto cuyas coordenadas son los valores de las condiciones iniciales especificadas  $(c_1, \dots, c_n)$ . Dado que existen métodos numéricos que realizan esta tarea muy fácil y rápidamente, resulta conveniente utilizar alguno de éstos programado en la computadora para resolver el PVI (1).

Utilizando esta metáfora geométrica, el entender el comportamiento cualitativo de un sistema de EDO dado como (1) se reduce, conceptualmente, a generar una representación compuesta por las curvas integrales del flujo  $f$ . A esto se le llama **representación de fase**, la cual indica todos los aspectos interesantes acerca de todas las soluciones posibles del sistema de EDO.

Para cualquier sistema dinámico, una descripción cualitativa de los distintos comportamientos dinámicos que pueda exhibir, comienza con la identificación geométrica, en el espacio de fase, de todos los atractores

posibles. Un atractor es el estado que alcanza el sistema, una vez que han transcurrido las etapas transitorias de su dinámica. Se puede hacer una clasificación general de los tipos de atractores que comúnmente se observan en los sistemas físicos — particularmente en las redes neuronales — en varias categorías: (puntos de) *equilibrio*, (ciclos) *periódicos*, *cuasiperiódicos* y (mezclados) *caóticos* [Hirsch 1989; Thompson y Stewart 1986]. En los sistemas no lineales es común encontrar multiplicidad de atractores, coexistiendo varios de ellos, aún siendo de distintos tipos. Para el análisis realizado en esta tesis, dadas las características del modelo estudiado, sólo serán de interés los sistemas con propiedades de convergencia y de oscilación.

### Puntos de equilibrio

Cuando dos o más trayectorias se intersectan en el espacio de fase en un mismo punto  $p$ , se debe cumplir que, como para cualquier otro punto,  $f$  tenga un único valor (vectorial),  $f(p)$ . Este vector único debe ser tangente a todas las trayectorias que pasan por el punto  $p$ . Si sólo se consideran los casos en que las  $f_i$  son funciones continuamente diferenciables de las  $y_i$ , la única posibilidad es que  $f(p)=0$  (lo que significa que  $f_i(p_1, \dots, p_n) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ ).

A este punto se le llama **punto de equilibrio**<sup>2</sup>, ya que si  $f(p)=0$  entonces el sistema  $dy/dt = f(y)$  tiene a  $y(t)=p$  como una solución invariable en el tiempo. Dado que para un flujo continuamente diferenciable  $f(y)$ , las trayectorias en el espacio de fase pueden intersectarse únicamente en puntos de equilibrio, el análisis cualitativo del comportamiento dinámico de un sistema de

2 También se le conoce como 'punto de estado estacionario', 'punto crítico' o 'punto singular'.

EDO debe comenzar por ubicar todos estos puntos críticos.

### Soluciones periódicas

Cuando una solución a un sistema de EDO es periódica — para alguna  $\hat{T} > 0$ ,  $y_i(t + \hat{T}) = y_i(t)$  para toda  $t$  — corresponde a una curva solución en el espacio de fase que, después de realizar un cierto recorrido, regresa al punto del que partió, formando así una trayectoria cerrada.

La aparición de atractores periódicos es muy importante, ya que las oscilaciones que producen pueden dar lugar a fenómenos relevantes, tanto en las funciones fisiológicas (ritmo cardíaco, respiración, movimiento, etc) como en sistemas mecánicos o electrónicos [Guevara et al 1983][Hirsch 1989]. Por otro lado, el forzamiento periódico de osciladores no lineales puede originar comportamientos y patrones complejos de amarramiento de fase, bifurcaciones y dinámicas aperiódicas [Guevara et al 1983].

### Comportamiento de sistemas lineales de EDO con coeficientes constantes

Existe una clasificación completa para las características presentadas por la clase más importante de sistemas de EDO, denominados sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes, que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, \dots, y_n) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, \dots, y_n) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, \dots, y_n) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \quad (2)$$

donde las  $a_{ij}$  son constantes. Este sistema es lineal, ya que si  $\vec{y}(t) = (\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t))$  y  $\hat{y}(t) = (\hat{y}_1(t), \dots, \hat{y}_n(t))$  son dos soluciones cualesquiera de (2), entonces cualquier combinación lineal de  $\vec{y}$  y  $\hat{y}$  también lo será. Es decir, para dos constantes cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $z(t) = \alpha\vec{y}(t) + \beta\hat{y}(t)$  es una solución. Es por esta propiedad que se pueden construir todas las soluciones del sistema (2) a partir de la combinación lineal de  $n$  soluciones simples. El proceso para encontrar estas soluciones se describe a continuación.

La única función cuya derivada con respecto a  $t$  es proporcional a ella misma es un múltiplo de la función exponencial  $y(t) = e^{(\lambda t)}$ . Tomando esto en consideración, es posible encontrar un conjunto de constantes ( $v_1, \dots, v_n$ ) y un exponente  $\lambda$  tales que hagan que la siguiente expresión sea una solución de (2).

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{(\lambda t)} \quad (3)$$

Cuando la ecuación (3) se substituye en (2) resulta el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas:

$$\begin{aligned}
 (a_{11}-\lambda)v_1+a_{12}v_2+\dots+a_{1n}v_n &= 0, \\
 a_{21}v_1+(a_{22}-\lambda)v_2+\dots+a_{2n}v_n &= 0, \\
 &\vdots \\
 a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)v_n &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Para que (4) tenga una solución no trivial,  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , el determinante de los coeficientes de (4) debe ser igual a cero:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

Resolviendo (5) se tiene un polinomio en  $\lambda$  de grado  $n$ , llamado **polinomio característico** del sistema (2):

$$\lambda^n + I_{n-1}\lambda^{n-1} + I_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + I_1\lambda + I_0 = 0$$

donde las  $I$  son funciones no lineales, usualmente complicadas, de  $(a_{ij})$ , llamadas **invariantes escalares** de la matriz  $(a_{ij})$ . Cuando un  $\lambda$  es uno de los  $n$  ceros posibles del polinomio característico, se le denomina un **eigenvalor** o **exponente característico** del sistema (4) y tiene asociado un conjunto de constantes  $(v_1, \dots, v_n)$  llamado **eigenvector** o **vector característico** del mismo sistema. A la solución especial de (2) en la forma (3) se le llama **eigenfunción** del sistema de EDO.

Cuando se tiene un sistema no lineal, el análisis se toma mucho más complejo. Sin embargo, para poder estudiar la estabilidad de sistemas no lineales, es posible investigar la estabilidad de un sistema lineal estacionario — $(a_{ij})$  constantes— obtenido mediante una **primera aproximación** [Elsoltz 1977] respecto al sistema original. Con ésto se garantiza que, en la vecindad del punto de equilibrio, la

teoría de sistemas lineales predice correctamente el comportamiento de las soluciones.

### Linealización alrededor de los puntos de equilibrio

Asumiendo un sistema de orden  $n=2$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2)
 \end{aligned} \tag{6}$$

se pretende conocer como se comporta  $y_1$  cerca de  $y_{1,eq}$  y  $y_2$  cerca de  $y_{2,eq}$ . Considerando a  $\mu_1$  y a  $\mu_2$  desplazamientos infinitesimales sobre el punto de equilibrio, se substituye el lado derecho de las igualdades  $y_1 = y_{1,eq} + \mu_1$  y  $y_2 = y_{2,eq} + \mu_2$  en las expresiones anteriores. Haciendo una expansión para  $f_1$  y  $f_2$  como series de Taylor cerca de  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  y despreciando los términos de orden mayor o igual a dos se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(y_{1,eq} + \mu_1) &= f_1(y_{1,eq} + \mu_1, y_{2,eq} + \mu_2) \\
 &= f_1(y_{1,eq}, y_{2,eq}) \\
 &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_{1,eq}, y_{2,eq})\mu_1 \\
 &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_{1,eq}, y_{2,eq})\mu_2 \\
 \frac{d}{dt}(y_{2,eq} + \mu_2) &= f_2(y_{1,eq} + \mu_1, y_{2,eq} + \mu_2) \\
 &= f_2(y_{1,eq}, y_{2,eq}) \\
 &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_{1,eq}, y_{2,eq})\mu_1 \\
 &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_{1,eq}, y_{2,eq})\mu_2
 \end{aligned}$$

Dada la definición de  $y_{1eq}$  y  $y_{2eq}$ , se tiene que  $f_1(y_{1eq}, y_{2eq}) = f_2(y_{1eq}, y_{2eq}) = 0$ , por lo que estas expansiones se reducen al siguiente sistema, lineal y con coeficientes constantes, de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_{1eq}, y_{2eq})$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_{1eq}, y_{2eq})$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_{1eq}, y_{2eq})$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y_{1eq}, y_{2eq})$$

Para encontrar los eigenvalores de este sistema se calcula el determinante

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Sean  $\beta = a_{11} + a_{22}$  y  $\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Los eigenvalores, obtenidos por la fórmula cuadrática, son

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

En los casos en que  $a_{12} = 0$  y/o  $a_{21} = 0$ , los eigenvalores son simplemente  $\lambda_1 = a_{11}$  y  $\lambda_2 = a_{22}$ .

De esta manera, el sistema (6) puede presentar varios tipos de comportamiento cualitativamente distintos (ver figura 1).

### Posibles comportamientos para un sistema lineal de segundo orden

Cuando  $\beta^2 - 4\gamma > 0$ , tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  son reales y  $\lambda_2 < \lambda_1$ . En este caso, la solución general para (7) es

$$y(t) = b_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + b_2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

donde  $\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$  son los eigenvectores de la matriz  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

**Puntos silla.** Si, además de tener que  $\beta^2 - 4\gamma > 0$ , se cumple que  $\gamma < 0$ , entonces, sin importar el signo de  $\beta$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signos opuestos. Esto significa que la eigenfunción asociada con el eigenvalor positivo crece exponencialmente en el tiempo, mientras que la eigenfunción asociada con el eigenvalor negativo decae exponencialmente a cero.

En este caso, al punto de equilibrio  $(0, 0)$  de (7) se le llama **punto silla**. Cuatro trayectorias se intersectan en este tipo de puntos. Las trayectorias trazadas por la eigenfunción asociada con el eigenvalor negativo conforman la llamada rama estable del punto silla, aproximándose asintóticamente al punto  $(0, 0)$  con-

forme  $t \rightarrow \infty$ . La rama inestable comprende las dos trayectorias que se acercan a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ , generadas por la eigenfunción asociada con el eigenvalor positivo.

**Nodos.** Cuando  $\beta^2 - 4\gamma > 0$  y  $\gamma > 0$ , ambos eigenvalores toman el signo de  $\beta$  y al punto de equilibrio se le llama nodo.

Si  $\beta > 0$ , todas las soluciones, distintas de cero, de (7) crecen exponencialmente en el tiempo, por lo que  $(0, 0)$  es un **nodo inestable**: cualquier pequeña perturbación hará que la solución diverja del punto de equilibrio.

Si por el contrario,  $\beta < 0$ , entonces ambos eigenvalores serán negativos y todas las soluciones de (7) decaerán exponencialmente a  $(0, 0)$ . A este punto se le llama **nodo estable**.

**Focos.** Si  $\beta^2 - 4\gamma < 0$ , entonces los eigenvalores se dan como un par complejo conjugado:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm i \sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}$$

Utilizando el teorema de de Moivre,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , se tiene que la solución general (8) se convierte en

$$y(t) = e^{\beta t/2} (b_1' \sin(\omega t) + b_2' \cos(\omega t))$$

$$\text{donde } \omega = \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}$$

Esta solución oscila con una amplitud que aumenta o disminuye, dependiendo de como

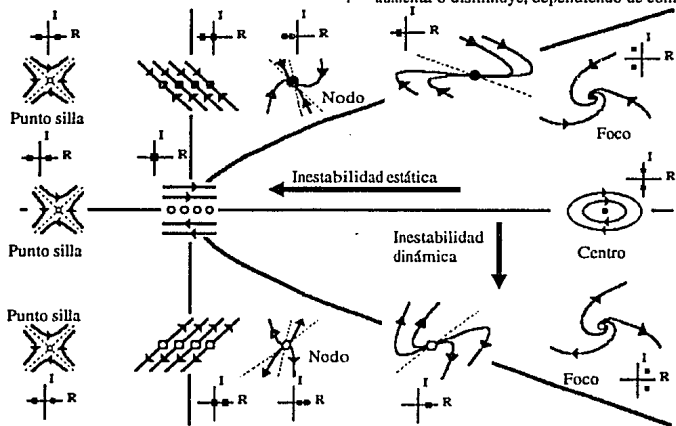


Figura 1. Posibles diagramas de fase y eigenvalores

cambie  $e^{\beta t}$ . Si  $\beta < 0$ , las trayectorias son espirales acercándose al punto de equilibrio, al cual se le denomina **foco estable** (o espiral estable). Si  $\beta > 0$ , el punto de equilibrio se conoce como **foco inestable** (o espiral inestable), ya que las trayectorias se alejan de él en forma de espiral.

Para el caso en que  $\beta = 0$ , los eigenvalores resultan ser imaginarios puros,  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$ , y la solución general de (7) es una oscilación sinusoidal sostenida,  $y(t) = b_1' \sin(\sqrt{\gamma}t) + b_2' \cos(\sqrt{\gamma}t)$ . Las trayectorias solución son elipses concéntricas con centro en  $(0, 0)$ . A este punto de equilibrio se le llama **centro** y se dice que es **neutralmente estable**, ya que las soluciones ni se alejan ni se acercan a  $(0, 0)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

### Cuencas de atracción

Una vez que los atractores, así como el tipo de cada uno de ellos, ha sido identificado, es deseable asociar a cada atractor con un entorno definido. Partiendo de cualquier punto de condiciones iniciales dentro de este entorno, las trayectorias convergen al atractor asociado con éste. Al conjunto de puntos que conforman el entorno asociado con cada atractor se le conoce como **cuenca de atracción**. Juntas, las cuencas de atracción deben constituir el espacio de fase en su totalidad [Thompson y Stewart 1986].

### Análisis de bifurcación

Cuando se conocen las expresiones que determinan la ubicación y el tipo de los atractores, es posible utilizar la información que se pueda obtener de ellas para dirigir la exploración de las capacidades dinámicas del sistema. Con ésto, y con el conocimiento que se tiene del fenómeno físico que dió origen al sistema de EDO, es posible orientar la búsqueda de aquellos parámetros que, al variar su valor gradual-

mente, ocasionen un cambio cualitativamente distinto en la dinámica del sistema: el movimiento de las trayectorias puede dejar de ser periódico para pasar a ser caótico, o un comportamiento previamente estable puede dejar de serlo y convertirse en inestable, en cuyo caso el sistema tenderá a ubicarse en otro atractor distinto; incluso el cambio puede ser más tenue, como cuando cambia el número subarmónico de un movimiento periódico estable. De cualquier modo, se habrá dado un cambio *cualitativo* en el comportamiento a largo plazo, asociado con un cambio en (o en la desaparición de) un atractor. Al conjunto de valores de los parámetros donde ocurren estos cambios cualitativos se le denomina **punto de bifurcación**.

Usualmente, un sistema de EDO contiene varios parámetros involucrados en sus coeficientes. Es posible que cualquiera de ellos, o incluso una combinación de los mismos, pueda ser elegido para analizar la dependencia del sistema respecto a un parámetro  $\mu$ . Lo que se intenta hacer es caracterizar la forma en que sucede el cambio cualitativo en el sistema, suponiendo que éste se da cuando  $\mu$  alcanza el valor  $\mu_0$ , manteniendo al resto de los parámetros sin variar. Se dice entonces que ocurre una **bifurcación** cuando  $\mu$  cruza  $\mu_0$ . A  $\mu_0$  se le llama **valor de bifurcación del parámetro de bifurcación**  $\mu$ .

Para poder entender completamente tales cambios cualitativos, es necesario conocer los cambios estructurales en la topología de la representación de fase, en el entorno de los umbrales de bifurcación.

### Método particular —linealidad a trazos—

Existen varias formas generalizadas de análisis para el estudio de sistemas no lineales. El contexto de esta tesis sugiere adoptar un enfo-

que basado en la idea de utilizar el espacio de fase como una herramienta analítica. Se pretende obtener de ésta la mayor información posible, manteniendo siempre la atención en los aspectos cualitativos de la respuesta del sistema. Para obtener soluciones cuantitativas, se recurrirá a los métodos numéricos implementados en la computadora. En particular, se utilizó para el proceso de integración una versión del método de Runge-Kutta de cuarto orden, por sus cualidades generales de velocidad y confiabilidad [Press et al 1988].

Dadas las características de las funciones de transferencia utilizadas en el modelo de neurona considerado, se origina una separación del espacio de fase en regiones lineales. Esto hace posible llevar a cabo el análisis valiéndose de las ventajas de esta separación. De manera general, se utiliza el siguiente procedimiento [Kalman 1955]:

1. Se subdivide el espacio de fase en regiones, dentro de las cuales las trayectorias de las soluciones responden a un sistema lineal. Estas regiones están determinadas por la función de transferencia elegida.

2. Se determina la colocación y naturaleza de los puntos de equilibrio para cada región; esto especificará la forma de las trayectorias dentro cada una de las regiones.

4. Se conectan las trayectorias pertenecientes a regiones adyacentes para obtener las trayectorias de la respuesta global. Cada vez que una trayectoria atraviesa la frontera entre dos regiones, se considera el punto de cruce como condiciones iniciales de la trayectoria en la nueva región.

Cabe mencionar que tanto el escalón como la rampa son funciones discontinuas. Sin embargo, ambas pueden ser aproximadas por una función continua tipo sigmoide, tal como se muestra en la figura 2.

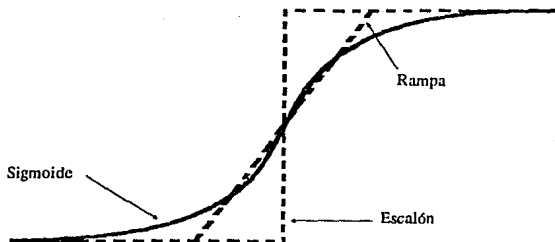
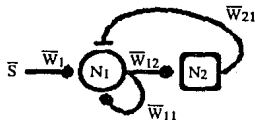


Figura 2. Funciones de transferencia



### 3. Análisis y resultados

En esta tesis se empleará una versión del modelo neuronal simplificado (MNS) [Cervantes-Pérez et al 91] del modelo de la columna tectal de facilitación (CTF) [Cervantes-Pérez y Arbib 1990], mostrado en la siguiente figura:



Como se puede observar, esta pequeña red consta de tan sólo dos neuronas ( $N_1$  y  $N_2$ ). Únicamente  $N_1$  recibe estímulos del exterior ( $S$ , con un peso  $\bar{W}_1$ );  $N_1$  tiene una salida que, ponderada por  $\bar{W}_{12}$ , excita a  $N_2$ , al mismo tiempo que la realimenta positivamente con un peso  $\bar{W}_{11}$ . A su vez,  $N_2$  tiene una conexión que inhibe a  $N_1$  con un peso  $\bar{W}_{21}$ .

La expresión matemática utilizada para la representación de este modelo está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

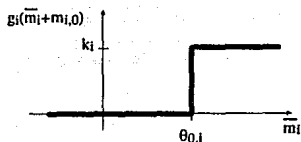
$$\dot{m}_1 = \frac{1}{\tau_1} [-m_1 + W_1 S + W_{11} F_1(m_1) - W_{21} F_2(m_2) + m_{1,0}]$$

$$\dot{m}_2 = \frac{1}{\tau_2} [-m_2 + W_{12} F_1(m_1) + m_{2,0}]$$

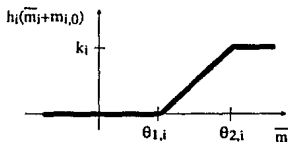
donde  $m_i$  representa la actividad de la neurona  $N_i$ , para  $i=1, 2$ .

Para las funciones de transferencia  $F_1$  y  $F_2$  se considerarán dos opciones, un escalón y una rampa con saturación, definidas de la siguiente manera:

$$g_i(m_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } m_i \geq \varphi_{0,i} \\ 0 & \text{si } m_i < \varphi_{0,i} \end{cases}$$



$$h_i(m_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } m_i \geq \varphi_{2,i} \\ k_i \left( \frac{m_i - \varphi_{1,i}}{\varphi_{2,i} - \varphi_{1,i}} \right) & \text{si } \varphi_{1,i} \leq m_i < \varphi_{2,i} \\ 0 & \text{si } m_i < \varphi_{1,i} \end{cases}$$



para  $i = 1, 2$ . Haciendo convenientemente el siguiente cambio de variable,

$$\bar{m}_i = m_i - m_{i,0} \rightarrow \bar{m}_i(t) = m_i(t) - m_{i,0}$$

para  $i = 1, 2$ , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\bar{m}_1' = \frac{1}{\tau_1} [-\bar{m}_1 + W_1 S + W_{11} F_1(\bar{m}_1 + m_{1,0}) - W_{21} F_2(\bar{m}_2 + m_{2,0})]$$

$$\bar{m}_2' = \frac{1}{\tau_2} [-\bar{m}_2 + W_{12} F_1(\bar{m}_1 + m_{1,0})]$$

$$g_i(\bar{m}_i + m_{i,0}) = \begin{cases} k_i & \text{si } \bar{m}_i + m_{i,0} \geq \varphi_{0,i} \\ 0 & \text{si } \bar{m}_i + m_{i,0} < \varphi_{0,i} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k_i & \text{si } \bar{m}_i \geq \varphi_{0,i} - m_{i,0} \\ 0 & \text{si } \bar{m}_i < \varphi_{0,i} - m_{i,0} \end{cases}$$

Trabajando con la función  $h_i$  de la misma manera y definiendo  $\theta_{j,i} = \varphi_{j,i} - m_{i,0}$  resultan las siguientes expresiones:

$$g_i(\bar{m}_i + m_{i,0}) = \begin{cases} k_i & \text{si } \bar{m}_i \geq \theta_{0,i} \\ 0 & \text{si } \bar{m}_i < \theta_{0,i} \end{cases}$$

$$h_i(\bar{m}_i + m_{i,0}) = \begin{cases} k_i & \text{si } \bar{m}_i \geq \theta_{2,i} \\ k_i \frac{(\bar{m}_i - \theta_{1,i})}{(\theta_{2,i} - \theta_{1,i})} & \text{si } \theta_{1,i} \leq \bar{m}_i < \theta_{2,i} \\ 0 & \text{si } \bar{m}_i < \theta_{1,i} \end{cases}$$

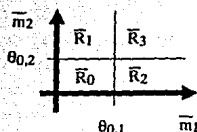
El utilizar estas dos opciones da lugar a cuatro combinaciones posibles, dependiendo de cuál función sea asignada como función de transferencia, tanto para  $F_1$  como para  $F_2$ . Aquí se estudiarán los dos casos considerados más significativos por separado, de acuerdo con la siguiente clasificación:

- Caso A:  $\begin{cases} F_1 = g_1 \\ F_2 = g_2 \end{cases}$
- Caso B:  $\begin{cases} F_1 = h_1 \\ F_2 = h_2 \end{cases}$

En cada caso, las funciones de transferencia permiten una separación del espacio que conforma el dominio en regiones lineales. Dadas las características de las funciones  $g_i(x)$  y  $h_i(x)$ , el número de regiones depende de la forma en que se combinan ambas funciones. De esta manera, en el caso A el dominio estará separado en cuatro regiones lineales y nueve en el caso B, tal como se muestra en la figura 3.

Dada la gran cantidad de parámetros del sistema, es conveniente realizar un proceso de

Caso A:



Caso B:

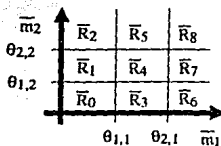


Figura 3. Separaciones del espacio de fase adimensionalización, con el propósito de reducir en lo posible la cantidad de parámetros a considerar. Dicho proceso se detalla a continuación.

Parámetros originales

$$\bar{S}; \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2; \bar{W}_1, \bar{W}_{11}, \bar{W}_{12}, \bar{W}_{21};$$

$$\theta_{0,1}, \theta_{0,2}, \theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2};$$

$$\bar{m}_{1,0}, \bar{m}_{2,0}; k_1, k_2.$$

Se hace un cambio de variables de la siguiente forma:

$$\bar{m}_i = M_i m_i$$

donde  $\bar{m}_i = \bar{m}_i(t)$  y  $m_i = m_i(\tau)$  para  $i = 1, 2$  y  $t = T\tau$ ;  $m_1, m_2$  y  $\tau$  son adimensionales. Entonces,

$$\bar{m}_i' = \frac{d\bar{m}_i}{dt} = \frac{dM_i m_i}{dt} = M_i \frac{dm_i}{dt}$$

$$\bar{m}_i' = M_i \frac{d m_i}{d \tau} \frac{d \tau}{dt} = \frac{M_i}{T} \frac{d m_i}{dt} = \frac{M_i}{T} m_i'$$

para  $i = 1, 2$

Con ésto se obtienen nuevas expresiones para los valores de las derivadas de  $m_1$  y  $m_2$ , así como una nueva definición de las regiones lineales, tal como se muestra en seguida, para cada caso.

### Caso A

El desarrollo realizado es el mismo para cada una de las regiones, por lo que sólo se expondrá en detalle en el caso de la región 0. Para las demás regiones se plantearán las expresiones relevantes, omitiendo los pasos intermedios.

#### Región 0

Partiendo de la definición original de esta región,

$$R_0 = \{ (\bar{m}_1, \bar{m}_2) \mid \bar{m}_1 < \theta_{0,1}, \bar{m}_2 < \theta_{0,2} \}$$

al hacer el siguiente cambio de variables

$$\bar{m}_1 < \theta_{0,1}; \quad M_1 m_1 < \theta_{0,1}; \quad m_1 < \frac{\theta_{0,1}}{M_1}$$

$$\bar{m}_2 < \theta_{0,2}; \quad M_2 m_2 < \theta_{0,2}; \quad m_2 < \frac{\theta_{0,2}}{M_2}$$

se obtiene la nueva definición de la región:

$$R_0 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < \frac{\theta_{0,1}}{M_1}, m_2 < \frac{\theta_{0,2}}{M_2} \}$$

Dado que

$$F_1 (\bar{m}_1 + m_1, 0) = 0 \quad y$$

$$F_2 (\bar{m}_2 + m_2, 0) = 0$$

el sistema de EDO que gobierna esta región queda de la siguiente manera:

$$\bar{m}_1' = \frac{1}{\tau_1} [ -\bar{m}_1 + W_1 S ]$$

$$\bar{m}_2' = \frac{1}{\tau_2} [ -\bar{m}_2 ]$$

nuevamente se substituyen las nuevas variables en ambas ecuaciones,

$$\frac{M_1}{T} m_1' = \frac{1}{\tau_1} [ -M_1 m_1 + W_1 S ]$$

$$\frac{M_2}{T} m_2' = \frac{1}{\tau_2} [ -M_2 m_2 ]$$

y se obtiene el siguiente sistema, que regirá a la región 0:

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} [ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} ]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} [ -m_2 ]$$

#### Región 1

$$R_1 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < \frac{\theta_{0,1}}{M_1}, m_2 \geq \frac{\theta_{0,2}}{M_2} \}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} [ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 ]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} [ -m_2 ]$$

#### Región 2

$$R_2 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \frac{\theta_{0,1}}{M_1}, m_2 < \frac{\theta_{0,2}}{M_2} \}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \right]$$

### Región 3

$$R_3 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \frac{\theta_{0,1}}{M_1}, m_2 \geq \frac{\theta_{0,2}}{M_2} \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \right]$$

### Nuevo conjunto de parámetros

$$\frac{T}{\tau_1}, \frac{T}{\tau_2}; \frac{W_{11}}{M_1} k_1, \frac{W_{21}}{M_1} k_2, \frac{W_{12}}{M_2} k_1;$$

$$\frac{W_1 S}{M_1}, \frac{\theta_{0,1}}{M_1}, \frac{\theta_{0,2}}{M_2}$$

Convenientemente se hacen las siguientes definiciones:

$$T = \bar{\tau}_2; \quad \tau_1 = \frac{T}{\tau_1} = \frac{\bar{\tau}_2}{\tau_1}$$

$$M_1 = \theta_{0,1}; \quad M_2 = \theta_{0,2}$$

$$S = \frac{W_1 S}{M_1} = \frac{W_1 S}{\theta_{0,1}}$$

$$W_{11} = \frac{W_{11}}{M_1} k_1 = \frac{W_{11}}{\theta_{0,1}} k_1$$

$$W_{12} = \frac{W_{12}}{M_2} k_1 = \frac{W_{12}}{\theta_{0,2}} k_1$$

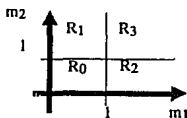
$$W_{21} = \frac{W_{21}}{M_1} k_2 = \frac{W_{21}}{\theta_{0,1}} k_2$$

Con esto se tiene que los parámetros del nuevo sistema son:

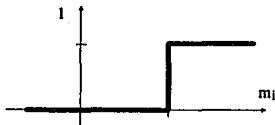
$$\tau_1, S, W_{11}, W_{12}, W_{21}$$

Como se puede ver, se partió de un sistema con 17 parámetros y se llegó a uno equivalente de tan solo 5.

Las nuevas definiciones obtenidas son utilizadas para sustituir los nuevos parámetros en las ecuaciones previas. Con las expresiones para la derivada de las variables obtenidas para cada región, se determinan las condiciones para la ubicación de los puntos de equilibrio, igualando cada una de ellas a cero. De esta manera se obtienen expresiones que definen los valores de las variables que satisfacen



las igualdades planteadas. Al mismo tiempo, el plano, fase queda dividido de la siguiente



manera:

A su vez, la función de transferencia se convierte en:

**Región 0**

$$R_0 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < 1, m_2 < 1 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S$$

$$m_{2eq} = 0$$

**Región 1**

$$R_1 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < 1, m_2 \geq 1 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S - W_{21} - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S - W_{21}$$

$$m_{2eq} = 0$$

**Región 2**

$$R_2 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq 1, m_2 < 1 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S + W_{11} - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S + W_{11}$$

$$m_{2eq} = W_{12}$$

**Región 3**

$$R_3 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq 1, m_2 \geq 1 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S + W_{11} - W_{21} - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S + W_{11} - W_{21}$$

$$m_{2eq} = W_{12}$$

Dependiendo de los valores de los parámetros la posición del punto de equilibrio puede quedar, generalmente, ya sea dentro de la misma región para la que se está definiendo —real—, o bien fuera de ella —virtual—. Dado que ambos ejes del plano fase están divididos por  $m_i=1$ , cada expresión de  $m_{i,eq}$  puede ser: a) mayor o igual a 1; o b) menor a 1. Esto da lugar a un conjunto de desigualdades, con las que se puede generar lo que de aquí en adelante se denominará *catálogo de restricciones*. Este catálogo se presenta en forma de tabla (ver tabla 1).

Se determinaron las posibles colocaciones de los puntos de equilibrio, en forma independiente para cada región, señalando las restricciones aplicadas en cada caso y se hizo una

No	Restricción	Reg
0	$S < 1$	0
1	$S \geq 1$	0
2	$S - W_{21} < 1$	1
3	$S - W_{21} \geq 1$	1
4	$S + W_{11} < 1$	2
5	$S + W_{11} \geq 1$	2
6	$W_{12} < 1$	2, 3
7	$W_{12} \geq 1$	2, 3
8	$S + W_{11} - W_{21} < 1$	3
9	$S + W_{11} - W_{21} \geq 1$	3

Tabla 1. Restricciones caso A

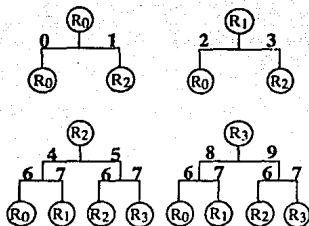


Figura 4.

clasificación, misma que se muestra en forma de diagramas de árboles (ver figura 4). La raíz indica la región para la que se está determinando la colocación del punto de equilibrio; los números que etiquetan las ramas corresponden a la restricción aplicada al seguir esa ruta; las hojas indican la región en que se localizaría el punto de equilibrio.

Se escogió esta forma de representación ya que facilita no sólo la visualización del proceso de ubicación de los puntos de equilibrio, sino que además, como se comenta más adelante, se apega a la estructura de datos conceptual utilizada en la automatización del proceso mismo.

Muchas de las posibles colocaciones de los puntos de equilibrio involucran restricciones que, consideradas globalmente en todas las regiones, son mutuamente excluyentes o incompatibles con las demás colocaciones.

En este caso, el número de colocaciones posibles es relativamente pequeño ( $4^2 \times 2^2 = 64$ ), pero en otros casos esta cantidad aumenta exponencialmente con el número de regiones. Por esta razón, se diseñó un procedimiento que determina cuáles configuraciones, dentro de todas las posibles, no contienen restricciones incompatibles entre sí.

Para la realización del programa que lleva a cabo el procedimiento se construyó una *matriz de compatibilidades*, en la que se describe, para cada restricción, con cuáles otras puede coexistir en una misma configuración de los puntos de equilibrio de todas las regiones. Utilizando esta matriz, se hace una búsqueda de configuraciones consistentes, siguiendo las rutas marcadas por las ramas de los árboles de cada región, generando una lista de todas aquellas que no presentan inconsistencias (ver tabla 2). En esta lista se incluye, para cada configuración, para cada región, la ubicación del punto de equilibrio y las restricciones aplicadas.

No.	Regiones con punto de equilibrio real	Restricciones aplicadas
0	0	0, 2, 4, 6, 8
1	0, 2	0, 2, 5, 6, 8
2	2	1, 2, 5, 6, 8
3	0	0, 2, 4, 7, 8
4	0	0, 2, 5, 7, 8
5		1, 2, 5, 7, 8
6	0, 2	0, 2, 5, 6, 9
7	2	1, 2, 5, 6, 9
8	2	1, 3, 5, 6, 9
9	0, 3	0, 2, 5, 7, 9
10	3	1, 2, 5, 7, 9
11	3	1, 3, 5, 7, 9

Tabla 2. Configuraciones caso A

Con ésto se tiene una descripción simple de cada uno de los posibles comportamientos distintos que se pueden presentar en esta red de dos neuronas, así como las relaciones que se deben cumplir entre los parámetros de la misma para conseguir tales comportamientos.

Se observa, por ejemplo, que las configuraciones 0, 2, 3, 4, 7, 8, 10 y 11 presentan casos de monoestabilidad; en las configuraciones 1, 6 y 9 se dan biestabilidades; en la configuración 5 se presenta el caso único en el que todos los puntos de equilibrio son virtuales, con la posible existencia de trayectorias cerradas periódicas —oscilaciones—.

Dado que en este caso el número de configuraciones es relativamente pequeño, fué posible establecer, uno por uno, los intervalos de los parámetros que permiten que cada configuración entre en vigor. Esto se hace tomando en cuenta todas las restricciones incluidas en cada configuración y reduciéndolas a dos o tres expresiones que representan a todo el conjunto, eliminando así las posibles redundancias. En algunos casos, se generan dos especificaciones distintas para una misma configuración, dependiendo de la relación entre dos parámetros. Esto es válido y su significado se aclara al contemplar la distribución de las configuraciones en el espacio de parámetros (ver figura 5).

A continuación se presenta el análisis realizado para cada configuración. Dado que el parámetro de interés está representado por la  $S$ , se procuró expresar los intervalos en términos de éste. (Sólo se muestran las restricciones utilizadas en la obtención de los intervalos para la primera configuración.)

#### Configuración 0

Restricciones:

- [0]  $S < 1$
- [2]  $S < 1 + W_{21}$
- [4]  $S < 1 - W_{11}$
- [8]  $S < 1 - W_{11} + W_{21}$
- [6]  $W_{12} < 1$

Intervalo:

$$A_0 \begin{cases} S < 1 - W_{11} \\ W_{12} < 1 \end{cases}$$

#### Configuración 1

$$A_1 \begin{cases} 1 - W_{11} \leq S < 1 - W_{11} + W_{21} \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} > W_{21} \end{cases}$$

$$B_1 \begin{cases} 1 - W_{11} \leq S < 1 \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} \leq W_{21} \end{cases}$$

#### Configuración 2

$$A_2 \begin{cases} 1 \leq S < 1 - W_{11} + W_{21} \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} < W_{21} \end{cases}$$

#### Configuración 3

$$A_3 \begin{cases} S < 1 - W_{11} \\ W_{12} \geq 1 \end{cases}$$

#### Configuración 4

$$A_4 \begin{cases} 1 - W_{11} \leq S < 1 - W_{11} + W_{21} \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} > W_{21} \end{cases}$$

$$B_4 \begin{cases} 1 - W_{11} \leq S < 1 \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} \leq W_{21} \end{cases}$$

Configuración 5

$$A_5 \begin{cases} 1 \leq S < 1 - W_{11} + W_{21} \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} < W_{21} \end{cases}$$

Configuración 6

$$A_6 \begin{cases} 1 - W_{11} + W_{21} \leq S < 1 \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} > W_{21} \end{cases}$$

Configuración 7

$$A_7 \begin{cases} 1 \leq S < 1 + W_{21} \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} \geq W_{21} \end{cases}$$

$$B_7 \begin{cases} 1 - W_{11} + W_{21} \leq S < 1 + W_{21} \\ W_{12} < 1 \\ W_{11} < W_{21} \end{cases}$$

Configuración 8

$$A_8 \begin{cases} S \geq 1 + W_{21} \\ W_{12} < 1 \end{cases}$$

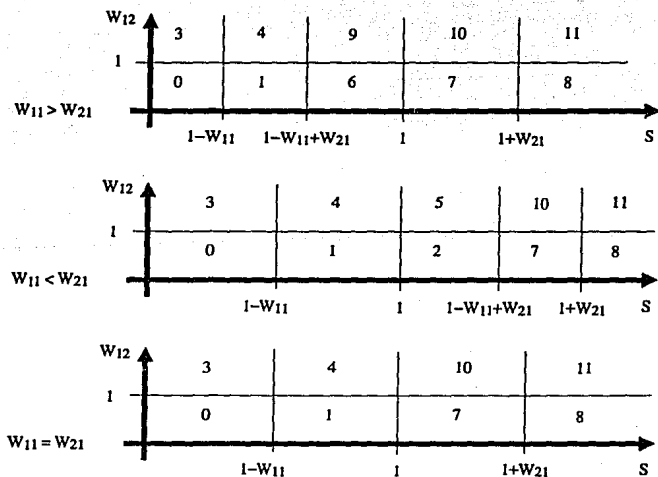


Figura 5. Distribución de configuraciones caso A



## Configuración 9

$$A_9 \begin{cases} 1 - W_{11} + W_{21} \leq S < 1 \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} > W_{21} \end{cases}$$

## Configuración 10

$$A_{10} \begin{cases} 1 \leq S < 1 + W_{21} \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} \geq W_{21} \end{cases}$$

$$B_{10} \begin{cases} 1 - W_{11} + W_{21} \leq S < 1 + W_{21} \\ W_{12} \geq 1 \\ W_{11} < W_{21} \end{cases}$$

## Configuración 11

$$A_{11} \begin{cases} S \geq 1 + W_{21} \\ W_{12} \geq 1 \end{cases}$$

En la figura 5 se muestra como quedan distribuidas todas las configuraciones en el espacio de parámetros; las gráficas muestran la estructura del plano  $(S, W_{21})$  para  $W_{11} > W_{21}$ ,  $W_{11} < W_{21}$  y  $W_{11} = W_{21}$ . Analizando estas gráficas y utilizando la información contenida en la tabla 2, se puede observar cómo cambia el comportamiento de la red en respuesta a la variación de algún parámetro relevante. Por ejemplo, si tomamos el caso en que  $W_{11} < W_{21}$ ,  $W_{12} \geq 1$  y hacemos variar a  $S$  desde un valor menor a  $(1 - W_{11})$  hasta un valor superior a  $(1 + W_{21})$ , se daría la siguiente sucesión de comportamientos:

Monoestabilidad (región 0)  $\rightarrow$  Oscilación  $\rightarrow$   
Monoestabilidad (región 3)

Para  $W_{11} = W_{21}$  y  $W_{12} < 1$ , variando a  $S$  de la misma manera, se tendría lo siguiente:

Monoestabilidad (región 0)  $\rightarrow$  Biestabilidad (regiones 0 y 2)  $\rightarrow$  Monoestabilidad (región 2).

Es importante destacar que, aún cuando las configuraciones son todas diferentes entre sí, algunas representan comportamientos dinámicos muy similares, donde la única diferencia estriba en las trayectorias transitorias. A continuación se describen los comportamientos cualitativamente distintos encontrados en esta red.

**Monoestabilidad.** Sucede cuando sólo una de las regiones presenta un punto de equilibrio real —dentro de sí misma—, mientras que para cada una de las demás regiones, sus puntos de equilibrio son virtuales —fuera de la región para la que se define—. Cuando la red está configurada de esta manera, no importan las condiciones iniciales de actividad de cada neurona, siempre terminará por alcanzar el punto de equilibrio único, después de describir una cierta trayectoria transitoria. Las gráficas mostradas en las figuras 6, 7 y 8 muestran ejemplos de tres configuraciones, 0, 7 y 10, que presentan casos de monoestabilidad, en las regiones 0, 2 y 3, respectivamente.

**Biestabilidad.** En este caso, existen dos regiones con un punto de equilibrio real cada una y

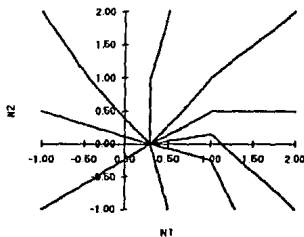


Figura 6. Monoestabilidad región 0.

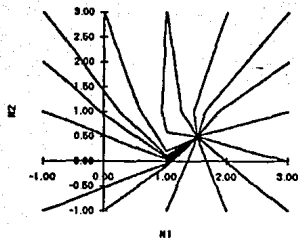


Figura 7. Monoestabilidad región 2.

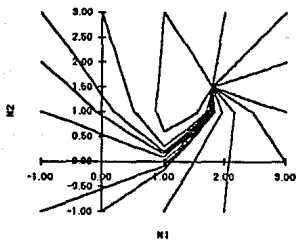


Figura 8. Monoestabilidad región 3.

dos más cuyos puntos de equilibrio son virtuales. Para este tipo de configuración, el estado que alcanza la red depende de las condiciones iniciales, pudiendo ser cualquiera de los dos puntos de equilibrio. También la parte transitoria de las trayectorias depende de las condiciones iniciales de activación de las neuronas. Las figuras 9 y 10 son ejemplos de este tipo de comportamiento para la red analizada (configuraciones 1 y 9, respectivamente).

**Oscilación.** Lo que sucede en este tipo de configuración es que todos los puntos de equilibrio son virtuales, lo que hace que toda trayectoria se dirija hacia un punto de equilibrio fuera de la región en la que se encuentra en ese

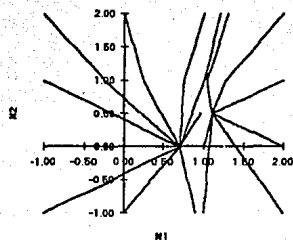


Figura 9. Biestabilidad regiones 0 y 2.

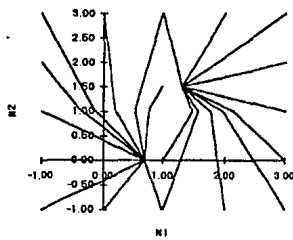


Figura 10. Biestabilidad regiones 0 y 3.

momento. Con ésto, al entrar en la nueva región, cambia la ubicación del punto de equilibrio, encontrándose nuevamente fuera de la región en la que está ubicada. Esto hace que se forme una trayectoria cerrada o ciclo límite estable, al cual llega a converger toda trayectoria, sin importar las condiciones iniciales de activación. Para este caso, sólo la configuración 5 determina este tipo de comportamiento, tal como se muestra en las figuras 11 y 12.

A continuación se muestran los diagramas de bifurcación para  $N_1$  y  $N_2$ , utilizando a  $S$  como parámetro de bifurcación, para un arreglo de parámetros en donde  $W_{12} > 1$  y  $W_{11} < W_{21}$ . Si se observa la figura 5, se nota que para tal

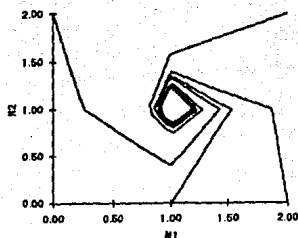


Figura 11. Oscilación estable (por fuera).

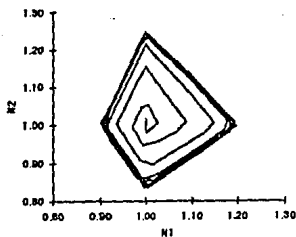


Figura 12. Oscilación estable (por dentro).

arreglo, como ya se había mencionado anteriormente, se debe observar el siguiente comportamiento:

Monoestabilidad (región 0)  $\rightarrow$  Oscilación  $\rightarrow$  Monoestabilidad (región 3)

Esto es precisamente lo que reflejan las gráficas de las figuras 13 y 14, obtenidas mediante simulaciones numéricas. Los valores de los parámetros utilizados para la elaboración de éstas fueron:  $W_{11} = 1$ ,  $W_{12} = 2$ ,  $W_{21} = 2.5$  y  $\tau_1 = 1$ .

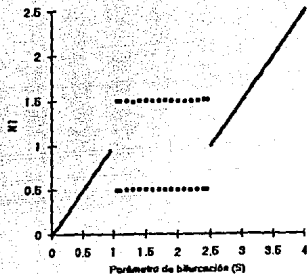


Figura 13. Bifurcación (S, N1).

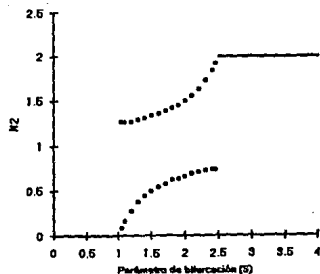


Figura 14. Bifurcación (S, N2).

### Caso B

#### Región 0

$$R_0 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 < \frac{\theta_{1,1}}{M_1}, m_2 < \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \right\}$$

$$m_1' = \frac{\tau}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_{1,1} S}{M_1} \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} [-m_2]$$

Región 1

$$R_1 = \left\{ (m_1, m_2) \left| \begin{array}{l} m_1 < \frac{\theta_{1,1}}{M_1} \\ \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \leq m_2 < \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_{1S}}{M_1} - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \left( \frac{m_2 - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}}{\frac{\theta_{2,2}}{M_2} - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}} \right) \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} [-m_2]$$

Región 2

$$R_2 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < \frac{\theta_{1,1}}{M_1}, m_2 \geq \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_{1S}}{M_1} - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} [-m_2]$$

Región 3

$$R_3 = \left\{ (m_1, m_2) \left| \begin{array}{l} \frac{\theta_{1,1}}{M_1} \leq m_1 < \frac{\theta_{2,1}}{M_1} \\ m_2 < \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_{1S}}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 - \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) \right]$$

Región 4

$$R_4 = \left\{ (m_1, m_2) \left| \begin{array}{l} \frac{\theta_{1,1}}{M_1} \leq m_1 < \frac{\theta_{2,1}}{M_1} \\ \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \leq m_2 < \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_{1S}}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \left( \frac{m_2 - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}}{\frac{\theta_{2,2}}{M_2} - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}} \right) \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) \right]$$

## Región 5

$$R_5 = \left\{ (m_1, m_2) \left| \begin{array}{l} \frac{\theta_{1,1}}{M_1} \leq m_1 < \frac{\theta_{2,1}}{M_1} \\ m_2 \geq \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \left( \frac{m_1 - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}}{\frac{\theta_{2,1}}{M_1} - \frac{\theta_{1,1}}{M_1}} \right) \right]$$

## Región 6

$$R_6 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \frac{\theta_{2,1}}{M_1}, m_2 < \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \right]$$

## Región 7

$$R_7 = \left\{ (m_1, m_2) \left| \begin{array}{l} m_1 \geq \frac{\theta_{2,1}}{M_1} \\ \frac{\theta_{1,2}}{M_2} \leq m_2 < \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \left( \frac{m_2 - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}}{\frac{\theta_{2,2}}{M_2} - \frac{\theta_{1,2}}{M_2}} \right) \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 - \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \right]$$

## Región 8

$$R_8 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \frac{\theta_{2,1}}{M_1}, m_2 \geq \frac{\theta_{2,2}}{M_2} \right\}$$

$$m_1' = \frac{T}{\tau_1} \left[ -m_1 + \frac{W_1 S}{M_1} + \frac{W_{11}}{M_1} k_1 - \frac{W_{21}}{M_1} k_2 \right]$$

$$m_2' = \frac{T}{\tau_2} \left[ -m_2 + \frac{W_{12}}{M_2} k_1 \right]$$

## Nuevo conjunto de parámetros

$$\frac{T}{\tau_1}, \frac{T}{\tau_2}; \frac{W_1 S}{M_1}, \frac{W_{11}}{M_1} k_1, \frac{W_{21}}{M_1} k_2, \frac{W_{12}}{M_2} k_1;$$

$$\frac{W_1 S}{M_1}; \frac{\theta_{1,1}}{M_1}, \frac{\theta_{2,1}}{M_1}, \frac{\theta_{1,2}}{M_2}, \frac{\theta_{2,2}}{M_2}$$

Análogamente a los casos anteriores, se hacen las siguientes definiciones, con el objeto de facilitar el análisis:

$$T = \bar{\tau}_2; \quad \tau_1 = \frac{T}{\tau_1} = \frac{\bar{\tau}_2}{\tau_1}$$

$$M_1 = \theta_{1,1}; \quad M_2 = \theta_{1,2}$$

$$S = \frac{W_1 S}{M_1} = \frac{W_1 S}{\theta_{1,1}}$$

$$W_{11} = \frac{W_{11}}{M_1} k_1 = \frac{W_{11}}{\theta_{1,1}} k_1$$

$$W_{21} = \frac{W_{21}}{M_1} k_2 = \frac{W_{21}}{\theta_{1,1}} k_2$$

$$W_{12} = \frac{W_{12}}{M_2} k_1 = \frac{W_{12}}{\theta_{1,2}} k_1$$

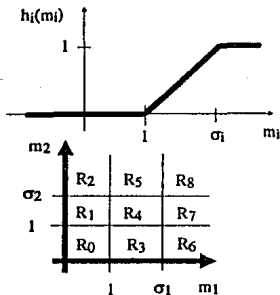
$$\sigma_1 = \frac{\theta_{2,1}}{M_1} = \frac{\theta_{2,1}}{\theta_{1,1}} > 1$$

$$\sigma_2 = \frac{\theta_{2,2}}{M_2} = \frac{\theta_{2,2}}{\theta_{1,2}} > 1$$

$$\rho_1 = \sigma_1 - 1; \quad \rho_2 = \sigma_2 - 1$$

Ahora se sustituyen en las ecuaciones previas y se obtienen las expresiones para la ubicación de los puntos de equilibrio, de acuerdo con la nueva disposición del plano fase. La función de transferencia también se transforma, quedando definida por una nueva expresión, misma que se muestra a continuación, junto con su gráfica y la de la nueva disposición del plano fase:

$$h_i(m_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \geq \sigma_1 \\ \frac{m_i - 1}{\sigma_1 - 1} & \text{si } 1 \leq m_i < \sigma_1 \\ 0 & \text{si } m_i < 1 \end{cases}$$



### Región 0

$$R_0 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < 1, m_2 < 1 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_{1,eq} = S$$

$$m_{2,eq} = 0$$

### Región 1

$$R_1 = \left\{ (m_1, m_2) \mid \begin{array}{l} m_1 < 1 \\ 1 \leq m_2 < \sigma_2 \end{array} \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S - W_{21} \left( \frac{m_2 - 1}{\rho_2} \right) - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_{1,eq} = S - W_{21} \left( \frac{m_{2,eq} - 1}{\rho_2} \right)$$

$$m_{2,eq} = 0$$

Substituyendo el valor de  $m_{2,eq}$  en la expresión para  $m_{1,eq}$  se obtiene

$$m_{1,eq} = S + \frac{W_{21}}{\rho_2}$$

### Región 2

$$R_2 = \{ (m_1, m_2) \mid m_1 < 1, m_2 \geq \sigma_2 \}$$

$$m_1' = \tau_1 [S - W_{21} - m_1] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_{1,eq} = S - W_{21}$$

$$m_{2eq} = 0$$

## Región 3

$$R_3 = \left\{ (m_1, m_2) \mid \begin{array}{l} 1 \leq m_1 < \sigma_1 \\ m_2 < 1 \end{array} \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S + W_{11} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = W_{12} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = \frac{S \rho_1 - W_{11}}{\rho_1 - W_{11}}$$

$$m_{2eq} = W_{12} \left( \frac{S - 1}{\rho_1 - W_{11}} \right)$$

## Región 4

$$R_4 = \left\{ (m_1, m_2) \mid \begin{array}{l} 1 \leq m_1 < \sigma_1 \\ 1 \leq m_2 < \sigma_2 \end{array} \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S + W_{11} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - W_{21} \left( \frac{m_2 - 1}{\rho_2} \right) - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = W_{12} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = \frac{S \rho_1 \rho_2 + W_{12} W_{21} + W_{21} \rho_1 - W_{11} \rho_2}{\rho_1 \rho_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} \rho_2}$$

$$m_{2eq} = W_{12} \left( \frac{S \rho_2 + W_{21} - \rho_2}{\rho_1 \rho_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} \rho_2} \right)$$

## Región 5

$$R_5 = \left\{ (m_1, m_2) \mid \begin{array}{l} 1 \leq m_1 < \sigma_1 \\ m_2 \geq \sigma_2 \end{array} \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S + W_{11} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - W_{21} - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = W_{12} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = \frac{S \rho_1 - W_{21} \rho_1 - W_{11}}{\rho_1 - W_{11}}$$

$$m_{2eq} = W_{12} \left( \frac{S - W_{21} - 1}{\rho_1 - W_{11}} \right)$$

## Región 6

$$R_6 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \sigma_1, m_2 < 1 \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S + W_{11} - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S + W_{11}$$

$$m_{2eq} = W_{12}$$

## Región 7

$$R_7 = \left\{ (m_1, m_2) \mid \begin{array}{l} m_1 \geq \sigma_1 \\ 1 \leq m_2 < \sigma_2 \end{array} \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S + W_{11} - W_{21} \left( \frac{m_2 - 1}{\rho_2} \right) - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S + W_{11} - W_{21} \left( \frac{W_{12} - 1}{\rho_2} \right)$$

$$m_{2eq} = W_{12}$$

## Región 8

$$R_8 = \left\{ (m_1, m_2) \mid m_1 \geq \sigma_1, m_2 \geq \sigma_2 \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 [ S + W_{11} - W_{21} - m_1 ] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_{1eq} = S + W_{11} - W_{21}$$

$$m_{2eq} = W_{12}$$

El catálogo de restricciones se muestra en la tabla 3.

Dado que las expresiones obtenidas resultan difíciles de manejar en la misma forma que las del caso anterior, el camino a seguir para el análisis de este caso deberá ser distinto. Lo que se hará a continuación es el análisis de estabilidad para las expresiones de los puntos de equilibrio definidos por cada región.

Lo que interesa saber es qué sucede cuando  $m_1$  está cerca de  $m_{1eq}$  y  $m_2$  cerca de  $m_{2eq}$ . Asumiendo

$$m_1' = \frac{d m_1}{dt} = F(m_1, m_2)$$

$$m_2' = \frac{d m_2}{dt} = G(m_1, m_2)$$

y considerando a  $\mu_1$  y a  $\mu_2$  desplazamientos infinitesimales sobre el punto de equilibrio, se substituye el lado derecho de las igualdades  $m_1 = m_{1eq} + \mu_1$  y  $m_2 = m_{2eq} + \mu_2$  en las expresiones anteriores. Haciendo una expansión para  $F$  y  $G$  como series de Taylor cerca de  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  y despreciando los términos de orden mayor o igual a dos se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_{1eq} + \mu_1) &= F(m_{1eq} + \mu_1, m_{2eq} + \mu_2) \\ &= F(m_{1eq}, m_{2eq}) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial m_1}(m_{1eq}, m_{2eq})\mu_1 \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial m_2}(m_{1eq}, m_{2eq})\mu_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_{2eq} + \mu_2) &= G(m_{1eq} + \mu_1, m_{2eq} + \mu_2) \\ &= G(m_{1eq}, m_{2eq}) \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial m_1}(m_{1eq}, m_{2eq})\mu_1 \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial m_2}(m_{1eq}, m_{2eq})\mu_2 \end{aligned}$$

Dada la definición de  $m_{1eq}$  y  $m_{2eq}$ , se tiene que  $F(m_{1eq}, m_{2eq}) = G(m_{1eq}, m_{2eq}) = 0$ , por lo que estas expansiones se reducen al siguiente sistema, lineal y con coeficientes constantes, de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d \mu_1}{dt} = a_{11} \mu_1 + a_{12} \mu_2$$

$$\frac{d \mu_2}{dt} = a_{21} \mu_1 + a_{22} \mu_2$$

donde

$$a_{11} = \frac{\partial F}{\partial m_1}(m_{1eq}, m_{2eq})$$

$$a_{12} = \frac{\partial F}{\partial m_2}(m_{1eq}, m_{2eq})$$

$$a_{21} = \frac{\partial G}{\partial m_1}(m_{1eq}, m_{2eq})$$

$$a_{22} = \frac{\partial G}{\partial m_2}(m_{1eq}, m_{2eq})$$

Para encontrar los eigenvalores de este sistema se calcula el determinante

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$



No	Restricción	Reg
0	$S < 1$	0
1	$1 \leq S < \sigma_1$	0
2	$S \geq \sigma_1$	0
3	$S + \frac{W_{21}}{P_2} < 1$	1
4	$1 \leq S + \frac{W_{21}}{P_2} < \sigma_1$	1
5	$S + \frac{W_{21}}{P_2} \geq \sigma_1$	1
6	$S - W_{21} < 1$	2
7	$1 \leq S - W_{21} < \sigma_1$	2
8	$S - W_{21} \geq \sigma_1$	2
9	$\frac{S p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} < 1$	3
10	$1 \leq \frac{S p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} < \sigma_1$	3
11	$\frac{S p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} \geq \sigma_1$	3
12	$W_{12} \left( \frac{S-1}{p_1 - W_{11}} \right) < 1$	3
13	$1 \leq W_{12} \left( \frac{S-1}{p_1 - W_{11}} \right) < \sigma_2$	3
14	$W_{12} \left( \frac{S-1}{p_1 - W_{11}} \right) \geq \sigma_2$	3
15	$\frac{S p_1 p_2 + W_{12} W_{21} + W_{21} p_1 - W_{11} p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} < 1$	4
16	$1 \leq \frac{S p_1 p_2 + W_{12} W_{21} + W_{21} p_1 - W_{11} p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} < \sigma_1$	4
17	$\frac{S p_1 p_2 + W_{12} W_{21} + W_{21} p_1 - W_{11} p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} \geq \sigma_1$	4
18	$W_{12} \left( \frac{S p_2 + W_{21} - p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} \right) < 1$	4
19	$1 \leq W_{12} \left( \frac{S p_2 + W_{21} - p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} \right) < \sigma_2$	4

No	Restricción	Reg
20	$W_{12} \left( \frac{S p_2 + W_{21} - p_2}{p_1 p_2 + W_{12} W_{21} - W_{11} p_2} \right) \geq \sigma_2$	4
21	$\frac{S p_1 - W_{21} p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} < 1$	5
22	$1 \leq \frac{S p_1 - W_{21} p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} < \sigma_1$	5
23	$\frac{S p_1 - W_{21} p_1 - W_{11}}{p_1 - W_{11}} \geq \sigma_1$	5
24	$W_{12} \left( \frac{S - W_{21} - 1}{p_1 - W_{11}} \right) < 1$	5
25	$1 \leq W_{12} \left( \frac{S - W_{21} - 1}{p_1 - W_{11}} \right) < \sigma_2$	5
26	$W_{12} \left( \frac{S - W_{21} - 1}{p_1 - W_{11}} \right) \geq \sigma_2$	5
27	$S + W_{11} < 1$	6
28	$1 \leq S + W_{11} < \sigma_1$	6
29	$S + W_{11} \geq \sigma_1$	6
30	$W_{12} < 1$	6,7,8
31	$1 \leq W_{12} < \sigma_2$	6,7,8
32	$W_{12} \geq \sigma_2$	6,7,8
33	$S + W_{11} - W_{21} \left( \frac{W_{12} - 1}{p_2} \right) < 1$	7
34	$1 \leq S + W_{11} - W_{21} \left( \frac{W_{12} - 1}{p_2} \right) < \sigma_1$	7
35	$S + W_{11} - W_{21} \left( \frac{W_{12} - 1}{p_2} \right) \geq \sigma_1$	7
36	$S + W_{11} - W_{21} < 1$	8
37	$1 \leq S + W_{11} - W_{21} < \sigma_1$	8
38	$S + W_{11} - W_{21} \geq \sigma_1$	8

Tabla 3. Restricciones caso B

Sean  $\beta = a_{11} + a_{22}$  y  $\gamma = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ . Los eigenvalores, obtenidos por la fórmula cuadrática, son

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

En los casos en que  $a_{12} = 0$  y/o  $a_{21} = 0$ , los eigenvalores son simplemente  $\lambda_1 = a_{11}$  y  $\lambda_2 = a_{22}$ .

#### Región 0

$$a_{11} = -\tau_1; a_{12} = 0; a_{21} = 0; a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \lambda_2 = -1$$

$$\beta = -\tau_1 - 1; \gamma = \tau_1$$

Dado que los eigenvalores son reales negativos ( $\beta^2 - 4\gamma > 0$ ,  $\beta < 0$  y  $\gamma > 0$ ), el punto de equilibrio para la región 0 es siempre un nodo estable.

#### Región 1

$$a_{11} = -\tau_1; a_{12} = -\tau_1 \frac{W_{21}}{\rho_2};$$

$$a_{21} = 0; a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \lambda_2 = -1$$

$$\beta = -\tau_1 - 1; \gamma = \tau_1$$

Nodo estable.

#### Región 2

$$a_{11} = -\tau_1; a_{12} = 0; a_{21} = 0; a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \lambda_2 = -1$$

$$\beta = -\tau_1 - 1; \gamma = \tau_1$$

Nodo estable.

#### Región 3

$$a_{11} = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right); a_{12} = 0;$$

$$a_{21} = \frac{W_{12}}{\rho_1}; a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right); \lambda_2 = -1$$

$$\beta = \tau_1 \frac{W_{11}}{\rho_1} - \tau_1 - 1;$$

$$\gamma = -\tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right)$$

Dado que los eigenvalores siempre son reales, pero pueden ser tanto del mismo signo como de signos opuestos ( $\lambda_1$  puede ser positivo o negativo), el punto de equilibrio en esta región puede ser de dos tipos:

Nodo estable, si  $\frac{W_{11}}{\rho_1} < 1$

Punto silla, si  $\frac{W_{11}}{\rho_1} > 1$

#### Región 4

$$a_{11} = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right); a_{12} = -\tau_1 \frac{W_{21}}{\rho_2};$$

$$a_{21} = \frac{W_{12}}{\rho_1}; \quad a_{22} = -1$$

$$\beta = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right) - 1;$$

$$\gamma = \tau_1 \left( \frac{W_{12} W_{21}}{\rho_1 \rho_2} - \frac{W_{11}}{\rho_1} + 1 \right)$$

En este caso, se pueden dar todas las combinaciones posibles para los valores de  $\beta$  y  $\gamma$ , por lo que la naturaleza del punto de equilibrio de esta región dependerá de la relación entre los parámetros involucrados en estas expresiones.

#### Región 5

$$a_{11} = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right); \quad a_{12} = 0;$$

$$a_{21} = \frac{W_{12}}{\rho_1}; \quad a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right); \quad \lambda_2 = -1$$

$$\beta = \tau_1 \frac{W_{11}}{\rho_1} - \tau_1 - 1;$$

$$\gamma = -\tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right)$$

Nodo estable, si  $\frac{W_{11}}{\rho_1} < 1$

Punto silla, si  $\frac{W_{11}}{\rho_1} > 1$

#### Región 6

$$a_{11} = -\tau_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{21} = 0; \quad a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \quad \lambda_2 = -1$$

$$\beta = -\tau_1 - 1; \quad \gamma = \tau_1$$

Nodo estable.

#### Región 7

$$a_{11} = -\tau_1; \quad a_{12} = -\tau_1 \frac{W_{21}}{\rho_2};$$

$$a_{21} = 0; \quad a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \quad \lambda_2 = -1$$

$$\beta = -\tau_1 - 1; \quad \gamma = \tau_1$$

Nodo estable.

#### Región 8

$$a_{11} = -\tau_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{21} = 0; \quad a_{22} = -1$$

$$\lambda_1 = -\tau_1; \quad \lambda_2 = -1$$

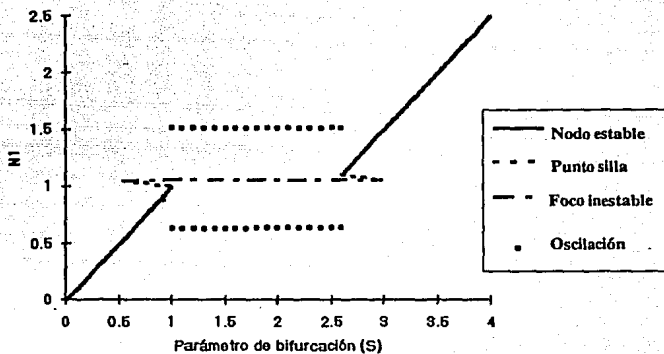
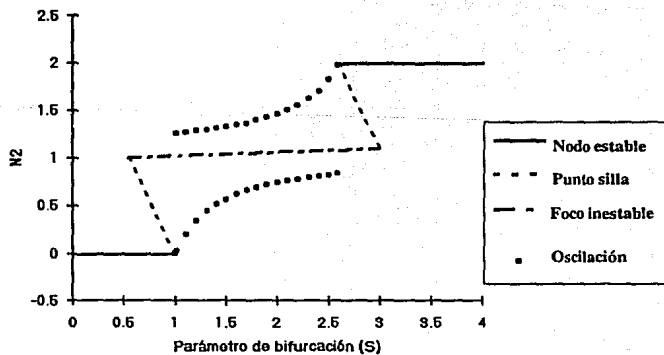
$$\beta = -\tau_1 - 1; \quad \gamma = \tau_1$$

Nodo estable.

Con la información obtenida del análisis de estabilidad se puede especular acerca de los comportamientos que es posible conseguir con esta arquitectura de red.

Un primer paso es aprovechar el análisis hecho para el caso A y suponer una pendiente suficientemente alta para las rampas, de modo que éstas se asemejen a un escalón; hecho esto se pueden esperar comportamientos similares a los encontrados en el caso A, para el caso B.

Procediendo de esta manera, se reprodujo el comportamiento donde ocurre una oscilación, expuesto en detalle anteriormente, de el caso A. En las figuras 15 y 16 se muestran los diagramas de bifurcación obtenidos para el caso B, con valores idénticos de los paráme-

Figura 15. Bifurcación para  $\sigma_1 = 1.10$ Figura 16. Bifurcación para  $\sigma_1 = 1.10$

tros comunes a ambos casos ( $W_{11}=1$ ,  $W_{12}=2$ ,  $W_{21}=2.5$  y  $\tau_1=1$ ) y haciendo  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.1$ . La semejanza es bastante obvia, a diferencia de la existencia explícita del foco inestable (y los puntos silla en el momento de la bifurcación), que sustenta la aparición de la trayectoria cerrada.

Observando las expresiones para  $\alpha$  y  $\beta$  de todas las regiones, se pueden buscar combinaciones de parámetros que produzcan comportamientos interesantes. Mediante el uso de una hoja de cálculo (MS Excel), se instrumentó una forma de determinar, para un conjunto de valores de los parámetros dado, tanto la ubicación como la naturaleza de la estabilidad de los puntos de equilibrio de cada región (ver figura 17). Con ésto, es posible *sintonizar* los valores de los parámetros de manera que provoquen un comportamiento dinámicamente —y computacionalmente— interesante.

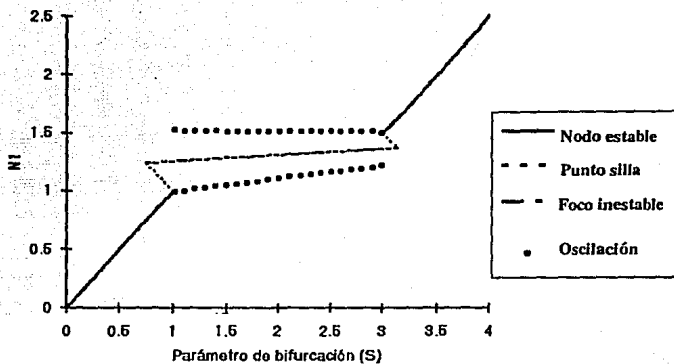
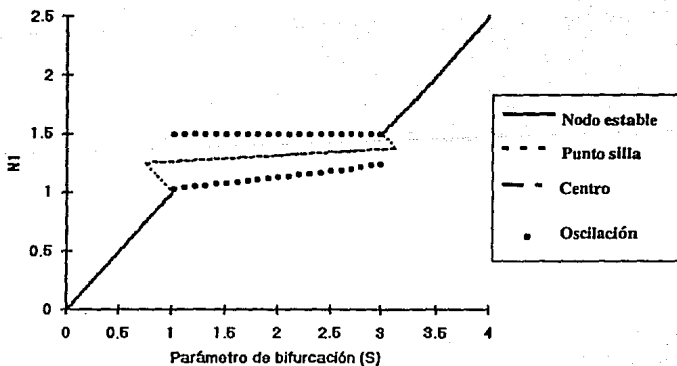
Utilizando la hoja de cálculo, se buscó una combinación de parámetros que hicieran la  $\beta$  de la región 4 igual a cero, con lo que la teoría lineal estaría prediciendo la existencia de un centro en el lugar del punto de equilibrio. Dadas las características de las expresiones, es posible conseguir ésto a partir del caso anterior, donde se presentaba una oscilación debida a un foco inestable, con sólo incrementar el valor de las sigmas. De esta manera, se mantuvieron los valores de los demás parámetros ( $W_{11}=1$ ,  $W_{12}=2$ ,  $W_{21}=2.5$  y  $\tau_1=1$ ) y se hizo  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.5$ ; nuevamente, se considera el parámetro de bifurcación.

De la figura 18 a la figura 20 se presentan los diagramas de bifurcación para valores de las sigmas alrededor de 1.50, que es donde ocurren los centros.

En estos diagramas, se puede observar que para  $\sigma_1, \sigma_2 < 1.5$  el comportamiento dinámico

S*	2.00									
W11*	1.00									
W12*	2.00									
W21*	2.50									
Tau1*	1.00									
Sigma1*	1.50									
Sigma2*	1.50									
Rho1*	0.50									
Rho2*	0.50									
		R0	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
Beta		-2.00	-2.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	-2.00	-2.00
Gamma		1.00	1.00	1.00	-1.00	19.00	-1.00	1.00	1.00	1.00
M1eq		2.00	7.00	-0.50	0.00	1.32	2.50	3.00	-2.00	0.50
M2eq		0.00	0.00	0.00	-4.00	1.26	6.00	2.00	2.00	2.00
Real		FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
P. silla		FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE
Nodo e.		TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE
Nodo i.		FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
Foco e.		FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
Foco i.		FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
Centro		FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE

Figura 17. Ubicación/estabilidad de puntos de equilibrio.

Figura 18. Bifurcación para  $\sigma_1 = 1.49$ Figura 19. Bifurcación para  $\sigma_1 = 1.50$

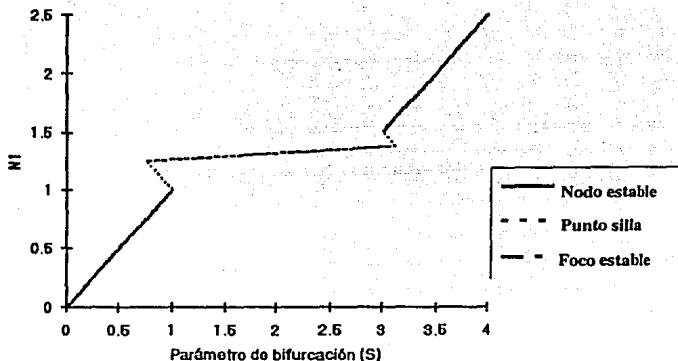


Figura 20. Bifurcación para  $\sigma_1 = 1.51$

co se mantiene sin alteraciones: hay convergencia en ambos extremos del diagrama y aparecen oscilaciones estables entre bifurcaciones silla-nodo.

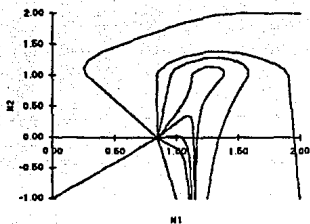
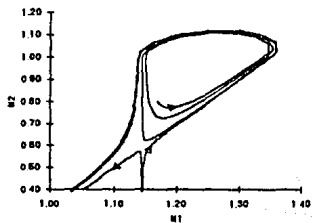
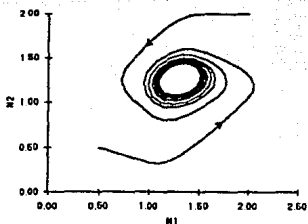
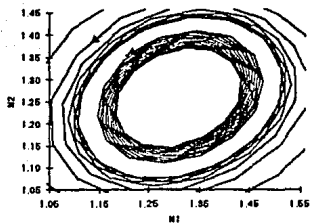
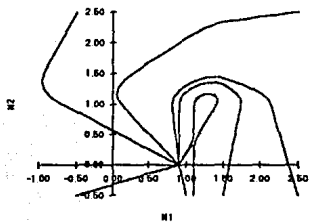
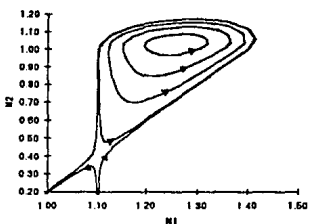
Para  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.5$ , el diagrama es muy similar al anterior, excepto que el punto de equilibrio de la región 4 pasó, de foco inestable, a centro. En el diagrama se muestra la amplitud de las oscilaciones, que son estables por fuera y neutralmente estables por dentro.

Cuando  $\sigma_1, \sigma_2 > 1.5$ , las oscilaciones desaparecen y el punto de equilibrio de la parte central del diagrama se transforma en un foco estable.

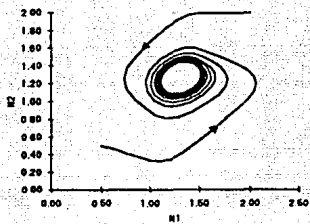
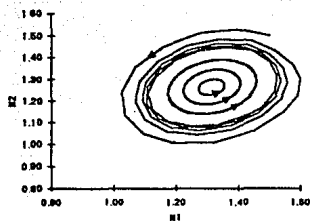
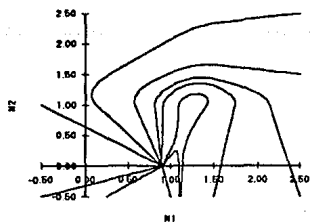
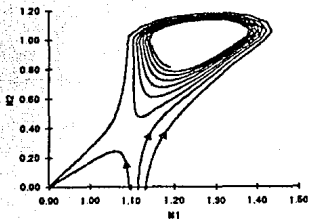
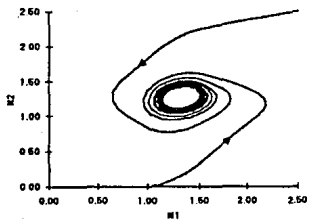
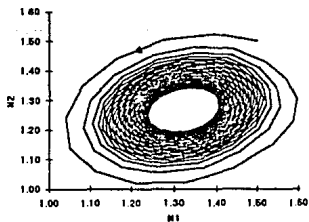
Al crear esta secuencia de diagramas de bifurcación, en realidad se están explorando las bifurcaciones en dos dimensiones, considerando también a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  como parámetros de bifurcación.

De la figura 21 a la figura 32 se muestran diferentes gráficas del plano fase, ilustradas por trayectorias obtenidas a través de simulaciones numéricas. En éstas se observan las características de la transición **foco inestable**  $\rightarrow$  **centro**  $\rightarrow$  **foco estable**, que sucede conforme varía el valor de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

De la 21 a la 24 corresponden a trayectorias, para distintos valores de  $S$ , con un valor de las sigmas de 1.49 (referirse a la figura 18). De la 25 a la 28,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.50$  (ver figura 19). Finalmente, de la 29 a la 32 se muestran las diferentes trayectorias obtenidas cuando las sigmas valen 1.51 (con referencia a la figura 20). En estas gráficas, también se puede apreciar lo peculiar que resulta la topología del plano fase cuando, para un cierto rango de valores de  $S$ , coexisten tres puntos de equilibrio (en particular, véanse las figuras 21, 25 y 29 y sus respectivas ampliaciones 22, 26 y 30).

Figura 21. Trayectorias:  $\sigma_1=1.49$ ,  $S=0.85$ Figura 22. Trayectorias:  $\sigma_1=1.49$ ,  $S=0.85$ Figura 23. Trayectorias:  $\sigma_1=1.49$ ,  $S=2.00$ Figura 24. Trayectorias:  $\sigma_1=1.49$ ,  $S=2.00$ Figura 25. Trayectorias:  $\sigma_1=1.50$ ,  $S=0.90$ Figura 26. Trayectorias:  $\sigma_1=1.50$ ,  $S=0.90$



Figura 27. Trayectorias:  $\sigma_1=1.50$ ,  $S=2.00$ Figura 28. Trayectorias:  $\sigma_1=1.50$ ,  $S=2.00$ Figura 29. Trayectorias:  $\sigma_1=1.51$ ,  $S=0.90$ Figura 30. Trayectorias:  $\sigma_1=1.51$ ,  $S=0.90$ Figura 31. Trayectorias:  $\sigma_1=1.51$ ,  $S=2.00$ Figura 32. Trayectorias:  $\sigma_1=1.51$ ,  $S=2.00$

En el caso en que el punto de equilibrio de la región 4 es un centro, es decir cuando  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.50$ , es importante ubicar la última o mayor trayectoria elíptica gobernada por este tipo de comportamiento, ya que es adyacente al ciclo límite estable al que convergen las curvas iniciadas fuera del mismo. Las figuras 33 a la 35 identifican tales trayectorias para distintos valores del parámetro  $S$ . Nótese que esta trayectoria debe estar contenida en las regiones que forman la franja central del plano de fase —3, 4 y 5—.

Un aspecto importante de los casos en los que se dan atractores periódicos u oscilaciones, es

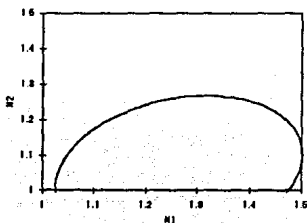


Figura 33. Máximo centro para  $S = 1.00$

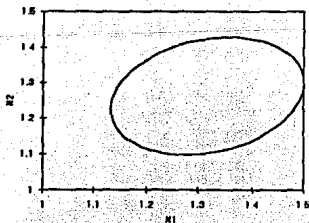


Figura 34. Máximo centro para  $S = 2.00$

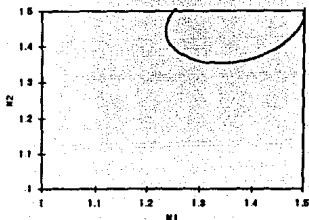


Figura 35. Máximo centro para  $S = 3.00$

la duración del período de los mismos. De la figura 36 a la 40 se muestra gráficamente la relación que guarda tal duración con el parámetro  $S$ , para distintos valores de las sigmas. Se observa que, aunque el valor mínimo de la duración del período no cambia de manera relevante, el punto en el que ocurre sí se desplaza. Además, es claro que la forma de la gráfica tiende a aplanarse en la parte inferior.

Para configuraciones de la red en la vecindad del arreglo de los valores de los parámetros donde se originan los centros, se pueden obtener características poco comunes en la respuesta ante perturbaciones transitorias a la entrada, tal como se muestra en las figuras

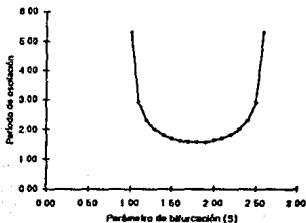
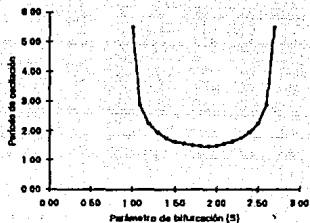
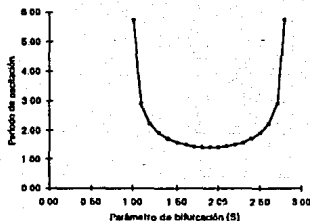
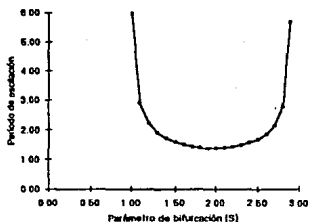
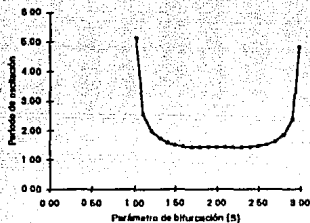


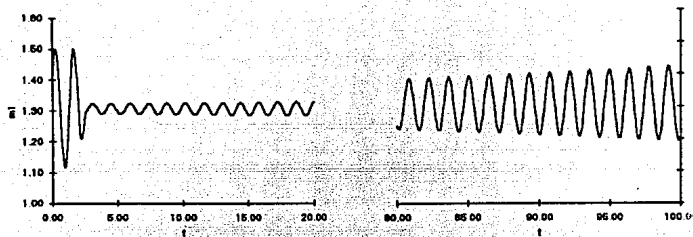
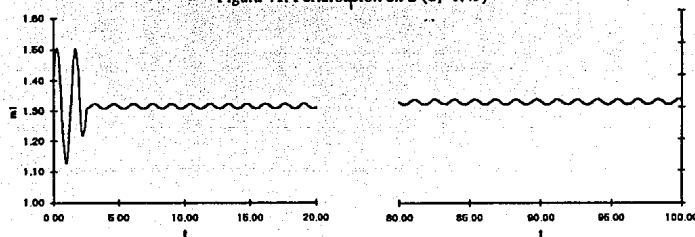
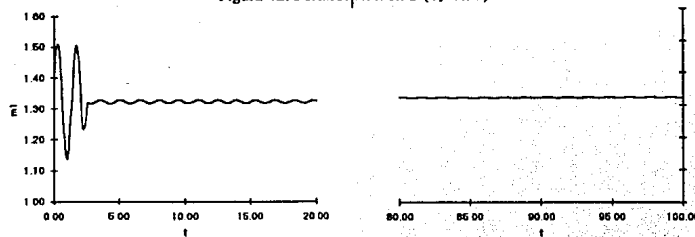
Figura 36. Período de oscilación:  $\sigma_1=1.10$

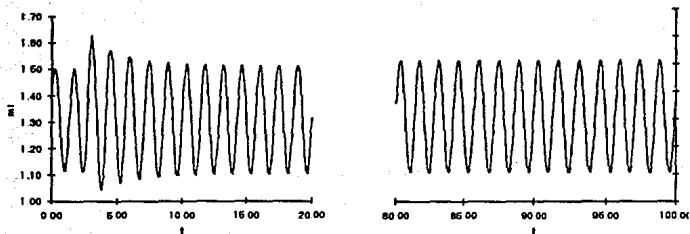
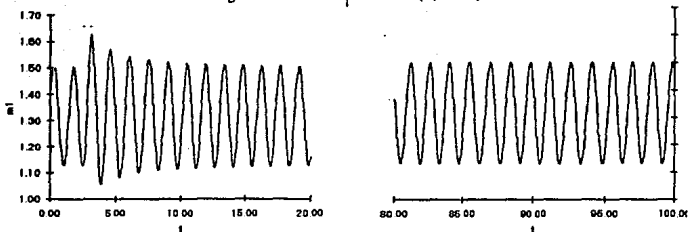
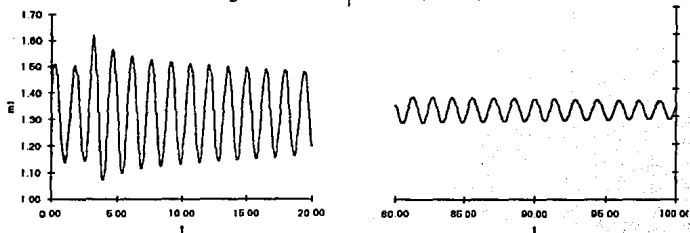
Figura 37. Período de oscilación:  $\sigma_1=1.20$ Figura 38. Período de oscilación:  $\sigma_1=1.30$ Figura 39. Período de oscilación:  $\sigma_1=1.40$ Figura 40. Período de oscilación:  $\sigma_1=1.49$ 

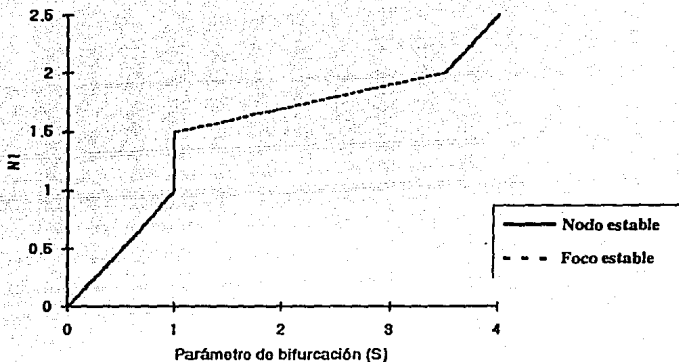
41-46. Para conseguir tales gráficas, se aplicó una perturbación pequeña  $S = 2.5$  durante 0,4 unidades de tiempo— a una entrada constante  $S = 2.0$ —; con ésto, la red entra en una etapa de comportamiento transitorio, el cual desaparece paulatinamente hasta alcanzar otro estado oscilatorio cuantitativamente distinto. Es importante señalar que las gráficas muestran las respuestas obtenidas tanto en tiempos—relativamente— cortos como en tiempos largos.

Para las respuestas obtenidas en las figuras 41, 42 y 43 se partió de condiciones iniciales muy cercanas al ciclo límite; se permitió que el sistema oscilara durante un período—aproximadamente— y entonces se aplicó la perturbación. En el caso de las figuras 44, 45 y 46 se procedió de la misma manera, excepto que la perturbación fué aplicada un poco—0.5 unidades de tiempo— más tarde.

Como se puede ver en el diagrama de bifurcación mostrado en la figura 47, otro caso interesante ocurre cuando las sigmas adquieren el valor de 2.00, ya que el punto de equilibrio para la región 3 está en transición entre un punto silla y un nodo estable. Según lo indican los diagramas de bifurcación, cuando  $S = 1$  existe una sucesión de valores, tanto para  $m_1$  como para  $m_2$ , en donde se localiza el (los)

Figura 41. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.49$ )Figura 42. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.50$ )Figura 43. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.51$ )

Figura 44. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.49$ )Figura 45. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.50$ )Figura 46. Perturbación en S ( $\sigma_1=1.51$ )

Figura 47. Bifurcación para  $\sigma_1 = 2.00$ 

punto(s) de equilibrio. Para aclarar ésto hace falta revisar las expresiones que gobiernan la región 3:

$$R_3 = \left\{ (m_1, m_2) \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq m_1 < \sigma_1 \\ m_2 < 1 \end{array} \right. \right\}$$

$$m_1' = \tau_1 \left[ S + W_{11} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_1 \right] = 0$$

$$m_2' = W_{12} \left( \frac{m_1 - 1}{\rho_1} \right) - m_2 = 0$$

Y del análisis de estabilidad se tenía que

$$\lambda_1 = \tau_1 \left( \frac{W_{11}}{\rho_1} - 1 \right)$$

$$\lambda_2 = -1$$

Substituyendo los valores de los parámetros ( $W_{11} = 1$ ,  $W_{12} = 2$ ,  $W_{21} = 2.5$  y  $\tau_1 = 1$ ) resulta:

$$m_1' = S - 1 = 0$$

$$m_2' = 2m_1 - m_2 - 2 = 0$$

De la primera igualdad se tiene que  $S=1$ , lo que corrobora lo observado en los diagramas de bifurcación. La segunda igualdad define una recta:

$$m_2 = 2m_1 - 2$$

que tiene pendiente 2 y ordenada al origen de -2. Dadas las condiciones de pertenencia de la región 3, sólo un segmento de la recta queda contenido dentro de aquélla; este segmento es el que une los puntos (1,0) y (1.5, 1).

La figura 48 muestra como este segmento es efectivamente un atractor. Esto corresponde a una clase particular de nodo, que se da cuando un eigenvalor es cero y el otro es real y negativo, tal y como sucede en este caso:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

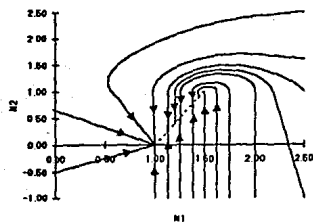


Figura 48. Trayectorias:  $\sigma_1=2.00$ ,  $S=1.00$

## 4. Conclusiones

Dado que se eligieron dos tipos de funciones de transferencia, no lineales y discontinuas, en el modelo utilizado para caracterizar a cada neurona, una parte importante del análisis desarrollado consiste en realizar una comparación entre ambos.

El comportamiento dinámico más interesante encontrado en el ejemplo A del capítulo 3 fué la aparición de oscilaciones estables, por lo que se le tomó como punto de referencia para efectuar la comparación. Asumiendo que la función tipo escalón puede ser considerada un caso especial de la función tipo rampa con saturación, en el que la pendiente de ésta es de 90 grados, era de esperarse que, por lo menos, los resultados obtenidos en el primer análisis se pudieran reproducir en el segundo, siempre y cuando se mantuviera el valor de la pendiente de la rampa cercano a los 90°. Pero de inmediato surgen las siguientes interrogantes: ¿Qué sucede cuando se disminuye la pendiente de las rampas? ¿Se obtienen acaso comportamientos diferentes cualitativa y/o cuantitativamente? Si así es, ¿qué representan tales diferencias?

Con base en la descripción realizada para los diagramas de bifurcación, el plano fase del sistema y las de la dependencia del período de las oscilaciones con respecto al parámetro  $S$ , es posible establecer ciertas distinciones entre la función tipo escalón y la función tipo rampa con saturación.

Si se mantienen constantes los valores elegidos de los parámetros del sistema y se fija el valor de la entrada externa  $S$  (particularmente:  $W_{11} = 1$ ,  $W_{12} = 2$ ,  $W_{21} = 2.5$ ,  $\tau_1 = 1$  y  $S = 1.5$ ), los diagramas de bifurcación indican que la red estaría operando en el rango en que aparecen las oscilaciones. Se pueden generar una serie de gráficas que ayuden a resaltar las

alteraciones en el comportamiento de la red conforme se va disminuyendo la pendiente de las rampas. En las figuras 49-56 se muestra el desarrollo del nivel de activación de la neurona  $N_1 - m_1 -$  en el tiempo, así como la respuesta generada por ésta.

Como se puede observar, la amplitud —pico-pico— de la oscilación va disminuyendo conforme se reduce la inclinación de las rampas. No obstante, el tiempo que la neurona ( $N_1$ ) permanece activada, en relación con la longitud del período, se incrementa, llegando incluso a estar oscilando continuamente por encima del primer umbral —siempre activa—.

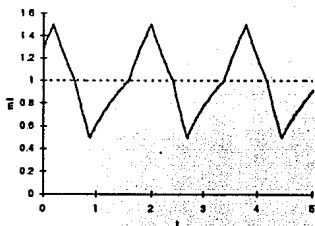


Figura 49. Oscilación (escalones)

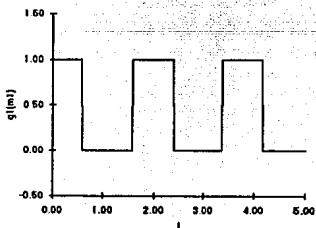
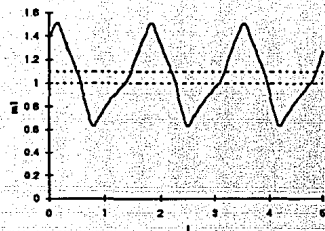
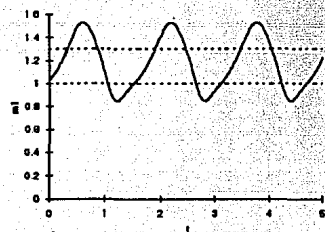
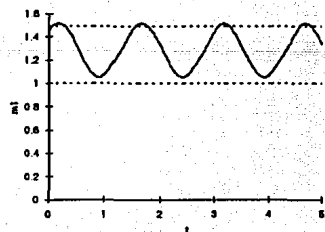
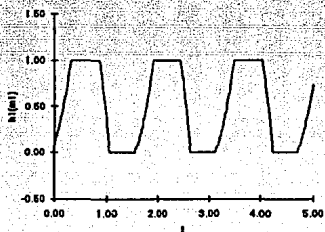
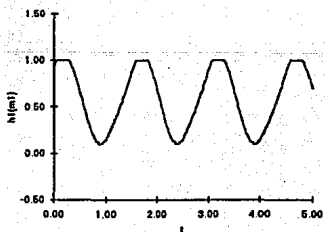


Figura 50. Forma de la respuesta (escalones)



Figura 51. Oscilación ( $\sigma_1=1.10$ )Figura 52. Oscilación ( $\sigma_1=1.30$ )Figura 53. Oscilación ( $\sigma_1=1.49$ )Figura 54. Forma de la respuesta ( $\sigma_1=1.10$ )Figura 55. Forma de la respuesta ( $\sigma_1=1.30$ )Figura 56. Forma de la respuesta ( $\sigma_1=1.49$ )

La longitud del período se ve disminuida. Sin embargo, como se hace evidente al analizar las figuras 36–40, donde se observa la relación entre la longitud del período y la entrada  $S$ , esto se debe a la manera en que cambia la forma de la gráfica al modificar la pendiente de las rampas. Podría decirse que, conforme aumenta el valor de las sigmas, tiende a crecer el intervalo de valores de  $S$  que generan oscilaciones con una longitud de período cercana al mínimo global.

Un cambio fuerte aparece en la forma de la función de respuesta. Para el caso de los escalones (figura 50), la respuesta aparece como un tren de pulsos; conforme varía la pendiente de las rampas, la forma de la respuesta cambia notablemente, ya que comienzan a suavizarse las discontinuidades (figuras 51–56).

Considerando todas las distinciones mencionadas, se podría concluir que, en lo que respecta a las oscilaciones, no se da un cambio *cualitativo* al introducir a las rampas como función de transferencia. Sin embargo, existen cambios *cuantitativos* bastante significativos, distinguiéndose a) el crecimiento de la relación entre el tiempo de actividad de la neurona y la duración del período y b) el cambio en la forma de la función de respuesta.

Al continuar reduciendo la pendiente de las rampas, dejan de existir las oscilaciones (figura 20). Esta desaparición se da vía una transición por centros (figura 19).

Lo importante del experimento numérico respecto al comportamiento de los centros es que, para perturbaciones iguales, redes configuradas en ese entorno, presentan comportamientos muy similares —para un período de observación delimitado, ya que, como se observa en la continuación de las gráficas para tiempos mucho mayores, las redes alcanzan estados distintos— (figuras 41, 42 y 43).

Sin embargo, la misma configuración puede presentar un comportamiento cuantitativamente distinto (figuras 44, 45 y 46) para una perturbación *idéntica* pero desplazada ligeramente en el tiempo —0.5 unidades de tiempo—.

Tal como se mostró en los ejemplos elaborados en el capítulo 3, el utilizar una función de transferencia tipo escalón facilitó enormemente el análisis. En ese caso —ejemplo A—, se pudo hacer una descripción cualitativa completa de los comportamientos dinámicos presentados por la red y ubicarlos en el espacio de parámetros, mediante el uso de técnicas de búsqueda para la satisfacción de restricciones.

En lo que respecta a las propiedades computacionales de esta arquitectura de red, haciendo una vinculación directa con los comportamientos dinámicos identificados en el ejemplo A, se tienen tres distintas opciones de configuración: monoestabilidad, biestabilidad y oscilación.

El caso de la monoestabilidad centra su importancia en las propiedades de convergencia que se requieren para garantizar características globales de convergencia y estabilidad.

Una red operando con una configuración biestable posee la capacidad de operar como un clasificador, pudiendo distinguir, por sí sola, entre dos categorías distintas. En otro sentido, es posible concebir a una red así como un mecanismo detector de eventos.

En el caso del ejemplo A, se mostró que la red es capaz de presentar dos configuraciones biestables distintas. Esto implica que, identificando un mecanismo adecuado para la sintonización de los valores de los parámetros, esta arquitectura podría realizar un proceso de clasificación en dos pares de categorías diferenciadas.

Como se ha mencionado anteriormente, el fenómeno de oscilación representa el comportamiento más interesante, tanto dinámica como computacionalmente. Las características relevantes en un comportamiento oscilatorio están dadas por la forma de onda, la amplitud y la frecuencia. El método de análisis mostró no sólo las relaciones que se deben cumplir entre los valores de los parámetros, sino que identificó otras características para determinar ciertas propiedades en las oscilaciones. Particularmente, se mencionó la forma en que es posible controlar, de manera específica, los aspectos más importantes de la respuesta oscilatoria de la neurona —frecuencia, amplitud y forma de onda—, mediante el ajuste de los parámetros considerados como de bifurcación — $S$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ —.

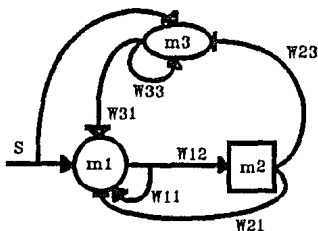
Como fué planteado en la introducción de esta tesis, la mayor parte del trabajo realizado en el área de la neurocomputación se centra en el problema de síntesis. Sin embargo, es importante considerar que el trabajo de análisis puede ser de gran utilidad para apoyar las tareas realizadas durante el proceso de síntesis. Se puede concebir, por ejemplo, un método de aprendizaje para un cierto tipo de redes neuronales que se apoye en etapas de análisis, realizadas cada determinado número de iteraciones, de tal manera que la información obtenida sirva para orientar al método en una mejor dirección.

Un método de análisis, vinculado apropiadamente a un método de síntesis, puede adquirir el carácter de una forma explicativa para este último. Es generalizada, dentro del medio conexionista, la idea de que las redes neuronales carecen de un poder explicativo de alto nivel en lo que respecta a la tarea que realizan. El trabajo de análisis aporta, en términos dinámicos, por ejemplo, una descripción del funcionamiento de una arquitectura de red específica. Pero además, es posible introducir compromisos en lo que respecta a las formas

de representación, facilitando el trabajo de la descripción de cómo funciona una red neuronal.

## A. Ejemplo de tres neuronas

En este apéndice se presenta el análisis de una red de tres neuronas. Esta es su representación gráfica:



La representación matemática utilizada para este modelo está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

### Sistema Original

$$\bar{m}_1' = 1/\tau_1 [-\bar{m}_1 + \bar{S} + \bar{W}_{11} F_1(\bar{m}_1) + \bar{W}_{31} F_3(\bar{m}_3) - \bar{W}_{21} F_2(\bar{m}_2)]$$

$$\bar{m}_2' = 1/\tau_2 [-\bar{m}_2 + \bar{W}_{12} F_1(\bar{m}_1)]$$

$$\bar{m}_3' = 1/\tau_3 [-\bar{m}_3 + \bar{S} + \bar{W}_{33} F_3(\bar{m}_3) - \bar{W}_{23} F_2(\bar{m}_2)]$$

$$F_i(m_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } m_i \geq \bar{\theta}_i \\ 0 & \text{si } m_i < \bar{\theta}_i \end{cases} \text{ para } i = 1, 2, 3$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, se llevó a cabo un proceso de adimensionalización, con el propósito de reducir en lo posible la cantidad de parámetros a considerar. Con ésto se obtuvo una nueva definición de las regiones, así como nuevas expresiones para los valores de las derivadas de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ :

### Región 0

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3] = 0$$

$$m_1 = S$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = S$$

### Región 1

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{31}] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 + W_{33}] = 0$$

$$m_1 = S + W_{31}$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = S + W_{33}$$

### Región 2

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 - W_{21}] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 - W_{23}] = 0$$

$$m_1 = S - W_{21}$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = S - W_{23}$$

### Región 3

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{31} - W_{21}] = 0$$

$$m_2' = -m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 + W_{33} - W_{23}] = 0$$

$$m_1 = S + W_{31} - W_{21}$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = S + W_{33} - W_{23}$$

#### Región 4

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{11}] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3] = 0$$

$$m_1 = S + W_{11}$$

$$m_2 = W_{12}$$

$$m_3 = S$$

#### Región 5

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{11} + W_{31}] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 + W_{33}] = 0$$

$$m_1 = S + W_{11} + W_{31}$$

$$m_2 = W_{12}$$

$$m_3 = S + W_{33}$$

#### Región 6

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{11} - W_{21}] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 - W_{23}] = 0$$

$$m_1 = S + W_{11} - W_{21}$$

$$m_2 = W_{12}$$

$$m_3 = S - W_{23}$$

#### Región 7

$$m_1' = \tau_1 [S - m_1 + W_{11} + W_{31} - W_{21}] = 0$$

$$m_2' = W_{12} - m_2 = 0$$

$$m_3' = \tau_3 [S - m_3 + W_{33} - W_{23}] = 0$$

$$m_1 = S + W_{11} + W_{31} - W_{21}$$

$$m_2 = W_{12}$$

$$m_3 = S + W_{33} - W_{23}$$

Con estas ecuaciones se genera el catálogo de restricciones:

No.	Restricción	Región
0	$S < 1$	0
1	$S \geq 1$	0
2	$S < \theta_3$	0, 4
3	$S \geq \theta_3$	0, 4
4	$S + W_{31} < 1$	1
5	$S + W_{31} \geq 1$	1
6	$S + W_{33} < \theta_3$	1, 5
7	$S + W_{33} \geq \theta_3$	1, 5
8	$S - W_{21} < 1$	2
9	$S - W_{21} \geq 1$	2
10	$S - W_{23} < \theta_3$	2, 6
11	$S - W_{23} \geq \theta_3$	2, 6
12	$S + W_{31} - W_{21} < 1$	3

No.	Restricción	Región
13	$S + W_{31} - W_{21} \geq 1$	3
14	$S + W_{33} - W_{23} < \theta_3$	3, 7
15	$S + W_{33} - W_{23} \geq \theta_3$	3, 7
16	$S + W_{11} < 1$	4
17	$S + W_{11} \geq 1$	4
18	$W_{12} < 1$	4, 5, 6, 7
19	$W_{12} \geq 1$	4, 5, 6, 7
20	$S + W_{11} + W_{31} < 1$	5
21	$S + W_{11} + W_{31} \geq 1$	5
22	$S + W_{11} - W_{21} < 1$	6
23	$S + W_{11} - W_{21} \geq 1$	6
24	$S + W_{11} + W_{31} - W_{21} < 1$	7
25	$S + W_{11} + W_{31} - W_{21} \geq 1$	7

Se determinaron las posibles colocaciones de los puntos de equilibrio, en forma independiente para cada región, señalando las restricciones aplicadas en cada caso.

En este caso, muchas de estas posibles colocaciones presentan restricciones que, consideradas globalmente en todas las regiones, son mutuamente excluyentes o incompatibles y resulta enorme la cantidad de posibles combinaciones para tales colocaciones ( $4^4 \cdot 8^4 = 1,048,576$ ).

Aplicando el método de búsqueda se obtiene una lista de configuraciones en la que, para cada configuración, para cada región, se da la ubicación del punto de equilibrio y las restricciones aplicadas.

Con esto se tiene una descripción simple de cada uno de los 240 posibles comportamientos cuantitativamente distintos que se pueden pre-

sentar en esta red de tres neuronas, así como las relaciones que se deben dar entre los parámetros de la misma para conseguir tales comportamientos.

Con el objeto de facilitar el empleo de esta lista, se utilizó un manejador de bases de datos para analizar el conjunto de las configuraciones obtenidas, logrando una clasificación simple, basada en las siguientes cuatro categorías:

- Configuraciones con un estado de equilibrio
- Configuraciones con un estado de equilibrio y posible trayectoria cerrada
- Configuraciones con múltiples estados de equilibrio
- Configuraciones sin puntos de equilibrio reales (configuraciones "periódicas")

Teniendo esta clasificación es posible realizar el estudio completo, aplicando los métodos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, de una manera más fácil.

## Bibliografía.

- Arbib, M. A. 1987, *Brains Machines, and Mathematics*, second edition, Springer-Verlag.
- Arbib, M. A. 1988, *The Metaphorical Brain 2: An Introduction to Schemas and Brain Theory*, Wiley Interscience.
- Barto, A. G., P. Anandan y C. W. Anderson, "Cooperativity in Networks of Pattern Recognizing Stochastic Learning Automata", *Adaptive and Learning Systems*, K. S. Narendra (ed), Plenum Publishing Corporation, 1986.
- Boden, M. A. (ed) 1990, *The Philosophy of Artificial Intelligence*, Oxford University Press.
- Brown, T. X. 1989, "Neural Networks for Switching", *IEEE Communications Magazine*, Noviembre.
- Carpenter, G. A. 1989, "Neural Network Models for Pattern Recognition and Associative Memory", *Neural Networks*, Vol. 2.
- Cervantes-Pérez, F. y M. A. Arbib 1990, "Stability and parameter dependency analysis of a facilitation tectal column (FTC) model", *Journal of Mathematical Biology*, 29:1-32.
- Cervantes-Pérez, F., A. D. Guevara y A. A. Herrera 1991, "Modulation of Prey-Catching Behavior in Toads: Data and Modeling", *Visual structures and integrated functions*, Arbib, M. A., J. P. Ewert (eds), Springer-Verlag.
- Cervantes-Pérez, F., A. Herrera y M. García 1992, "Modulatory Effects on Prey-Recognition in Amphibia: A Theoretical-Experimental Study", *Neuroscience: from neural networks to Artificial Intelligence*, P. Rudomín, M. A. Arbib, F. Cervantes-Pérez y R. Romo (eds), *Research Notes in Neural Computing*, Springer-Verlag, (en prensa).
- Chandrasekaran, B. 1990, "What kind of information processing is intelligence?", en [Partridge y Wilks 1990].
- Churchland, P. M. 1986, "Some Reductive Strategies in Cognitive Neurobiology", *Mind* XCV, No. 379, Julio.
- Churchland, P. M. 1990, "Representation and high-speed computation in neural networks", en [Partridge y Wilks 1990].
- Clark, A. 1990, "Connectionism, Competence, and Explanation", en [Boden 1990].
- Elsgoltz, L. 1977, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial Mir, Moscú.

- Guevara, M. R., L. Glass, M. C. Mackey y A. Shrier 1983, "Chaos in Neurobiology", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-13, No.5, Septiembre/Octubre.
- Hayashi, C. 1985, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, Princeton University Press.
- Hecht-Nielsen, R. 1990, *Neurocomputing*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Hinton, G. E., J. L. McClelland y D. E. Rumelhart 1986, "Distributed Representations", en [Rumelhart y McClelland 1986].
- Hirsch, M. W. 1989, "Convergent Activation Dynamics in Continuous Time Networks", *Neural Networks*, Vol. 2.
- Holden, A. V. y W. Winlow 1983, "Neuronal Activity as the Behavior of a Differential System", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Septiembre/Octubre.
- Hopfield, J. J. 1982, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, Vol. 79, Abril.
- Hopfield, J. J. 1984, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons", *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, Vol. 81, Mayo.
- Hopfield, J. J. y D. W. Tank 1986, "Computing with Neural Circuits: A Model", *Science*, Vol. 233, Agosto.
- Kalman, R.E. 1955, "Phase-Plane Analysis of Automatic Control Systems with Nonlinear Gain Elements", *AIEE Transactions*, Enero.
- Kolonay, M. A. y C. C. Klimasauskas 1987, "An Introduction to Neural Computing", *NeuralWorks Professional*, NeuralWare Inc.
- Le Cun, Y., L. D. Jackel, B. Boser, J. S. Denker, H. P. Graf, I. Guyon, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard 1989, "Handwritten Digit Recognition: Applications of Neural Network Chips and Automatic Learning", *IEEE Communications Magazine*, Noviembre.
- Levine, D. S. 1989, "The Third Wave in Neural Networks", *AI Expert*, Diciembre.
- Lupo, J. C. 1989, "Defense Applications of Neural Networks", *IEEE Communications Magazine*, Noviembre.
- Marr, D.C. 1977, "Artificial Intelligence - A Personal View", *Artificial Intelligence* 9.
- Odell, G. M. 1980, "Qualitative Theory of Systems of Ordinary Differential Equations, Including Phase Plane Analysis and the use of the Hopf Bifurcation Theorem", en Segel, L. A. (ed), *Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology*, Apéndice A3, Cambridge University Press.



- Partridge, D. y Y. Wilks (eds.) 1990, *The foundations of Artificial Intelligence*, Cambridge University Press.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling 1988, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
- Psaltis, D., A. A. Yamamura, K. Hsu, S. Lin, X. Gu, D. Brady 1989, "Optoelectronic Implementations of Neural Networks", *IEEE Communications Magazine*, Noviembre.
- Rumelhart, D. E. y J. L. McClelland (eds.) 1986, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, The MIT Press.
- Segel, L. E. XX, *Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology*, Cambridge University Press.
- Smolensky, P. 1990, "Connectionism and the foundations of AI", en [Partridge y Wilks 1990].
- Tapia, R. 1983, "Neurociencias", *La Biología Contemporánea, Las Ciencias en el Siglo XX*, Coordinación de la Investigación Científica, UNAM.
- Thompson, J. M. T. y H. B. Stewart 1986, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, J. Wiley.
- Weitzenfeld, A. 1989, "NSL: Neural Simulation Language", Technical Report 89-02, Brain Simulation Laboratory, Center for Neural Engineering, University of Southern California.
- Wiener, N. 1948, *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine*, Wiley.
- Wilks, Y. 1990, "Some comments on Smolensky and Fodor", en [Partridge y Wilks 1990].
- Yuhas, B. P., M. H. Goldstein, T. J. Sejnowski 1989, "Integration of Acoustic and Visual Speech Signals Using Neural Networks", *IEEE Communications Magazine*, Noviembre.