

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

“ARAGON”

31  
2ej

**Interpretación de las Zonas Cásticas  
en el Cálculo Numérico de la  
Refracción del Oleaje**

**T E S I S**

Que para obtener el Título de:

**INGENIERO CIVIL**

Presenta:

**FELIPE ORTA SALINAS**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

San Juan de Aragón, Edo. de México 1992



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	Pág.
<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. TEORIAS DE OLAJE.</b>	
1.1    Introducción.	1
1.2    Definiciones.	2
1.3    Clasificación de las ondas.	4
1.4    Teorias de oleaje.	9
1.4.1    Teoria del oleaje de Amplitud Pequeña o Teoria Lineal.	9
1.4.1.1.2    Celeridad, longitud y período de la onda.	11
1.4.1.1.3    Perfil de la onda Sinusoidal.	16
1.4.1.1.4    Velocidad y aceleración local de un fluido.	17
1.4.1.1.5    Desplazamiento de una partícula de agua.	20
1.4.1.1.6    Celeridad de grupo.	26
1.4.1.1.7    Energía y potencia de la onda.	27
1.4.2    Ondas de Amplitud Finita. (Segunda aproximación de Stokes)	30
1.4.2.1    Celeridad de la onda, longitud y perfil de la superficie libre del agua.	31
1.4.2.2    Velocidades y desplazamientos de las partículas de agua.	33
1.4.2.3    Velocidad del transporte de masa.	35

## INDICE

1.4.2.4	Máxima inclinación de las ondas progresivas.	37
1.4.3	Ondas Cnoidales.	39
<b>Capítulo II. LEY DESNELL Y SUS APLICACIONES EN LA INGENIERIA DE COSTAS.</b>		
2.1	Ley de Snell.	52
2.1.1	Ondas, frentes de ondas y rayos.	52
2.1.2	Refracción de oleaje.	53
2.1.3	Refracción del oleaje por cambios batimétricos.	59
2.1.4	Refracción del oleaje irregular.	68
2.1.4.1	Coefficiente de refracción del oleaje irregular.	68
<b>Capítulo III. METODOS ANALITICOS Y GRAFICOS PARA EL CALCULO DE LA REFRACCION DE OLEAJE.</b>		
3.1	Introduccion.	76
3.2	Construcción de los diagramas de refracción por el método de los frentes de ola.	77
3.3	Método de las ortogonales o rayos de ola.	82
3.4	Métodos analíticos para el cálculo de la refracción del oleaje.	92
3.4.1	Método de las ortogonales.	92

3.4.2 Ley de Snell.	107
<b>Capítulo IV. EFECTOS DE LA DIFRACCION EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE.</b>	
4.1 Difracción del oleaje.	112
4.2 Combinación de refracción y difracción.	117
<b>Capítulo V. IDENTIFICACION Y TRATAMIENTO DE LAS ZONAS CAUSTICAS.</b>	
5.1 Generalidades.	121
5.2 Teoría de Rayos.	122
5.3 Refracción por flujo cortante.	130
5.4 Identificación de las zonas caústicas.	137
5.5 Reflexión perfecta debida a la refracción del oleaje.	142
<b>Capítulo VI. APLICACION DE UN MODELO NUMERICO A UN CASO ESPECIFICO.</b>	
6.1 Generalidades.	144
6.2 Recopilación de información.	146
6.3 Algoritmo utilizado.	149
6.4 Aplicación al proyecto del Desarrollo Náutico en Cancún, Quintana Roo.	158
6.5 Resultados obtenidos.	188
6.6 Aplicación del Método Gráfico de los frentes de oleaje.	189

## INDICE

Capítulo VII. CONCLUSIONES.	195
APENDICE A.	201
BIBLIOGRAFIA.	240

## INTRODUCCION.

El diseño de una obra marítima requiere del conocimiento de diversos aspectos como son: forma y dimensiones, ubicación, orientación, sollicitaciones, azolvamiento y erosión; los cuales estarán en función del oleaje a que estará sujeta la estructura.

Las aguas del mar están animadas de movimientos de distinta naturaleza. Los agentes que pueden provocar movimientos o desplazamientos son muy numerosos al ser el medio acuoso muy fácilmente deformable por su escasa cohesión intermolecular.

El viento, los astros, las variaciones de temperatura, etc., son una muestra de dichos agentes del movimiento.

La descripción matemática del fenómeno del oleaje presenta numerosas dificultades debido a sus acusadas características de aleatoriedad e irregularidad, además de desarrollarse en tres dimensiones.

El aspecto real del oleaje en el mar es muy diverso. Mientras las olas se encuentran en el área donde sopla el viento que las genera, su disposición y movimiento es caótico. Se pueden observar olas de diferentes tamaños que se mueven en diferentes direcciones pasando las más rápidas sobre las más lentas con total ausencia de ritmo y orden. Posteriormente, fuera del área de influencia del viento, se produce una ordenación progresiva con la aparición de crestas largas bien definidas, con un ritmo más notable, pudiendo propagarse de éste modo grandes distancias. A su llegada a las proximidades de las costas y al alcanzar profundidades finitas su energía se disipa, bien internamente, bien por interacción con el aire o bien por turbulencia por efecto del fondo.

El oleaje al irse propagando por la superficie del mar va encontrando en su camino limitaciones impuestas por condiciones de borde o de fondo que originan una modificación en su estructura. Estos son los casos de la influencia de la variación batimétrica que dará origen al fenómeno de la refracción del oleaje.

## INTRODUCCION

Siendo el objetivo del presente trabajo el estudio e interpretación de las zonas cústicas que se originan en el estudio de la refracción del oleaje; se han integrado los siguientes capítulos a saber:

En el capítulo I se analizan diversas teorías del oleaje que tratan de dar una descripción matemática de dicho fenómeno, así mismo se dan algunas clasificaciones que se les dan a las ondas del mar.

En el capítulo II se trata el uso de la Ley de Snell de la óptica geométrica aplicada a el fenómeno de la refracción del oleaje.

En el capítulo III se presentan algunos métodos gráficos y analíticos para obtener los planos de oleaje o diagramas de refracción.

En el capítulo IV se tratan de una manera superficial los efectos que tiene la difracción del oleaje - la cuál se da cuando un tren de oleaje se ve interrumpido por la presencia de algún rompeolas o una isla - en el cálculo de la refracción del oleaje.

En el capítulo V se trata un problema que merece especial atención, siendo este cuando los diagramas de refracción o planos de oleaje se realizan por medio de programas computacionales, los cuales originan en algunos casos particulares la formación de las zonas cústicas; es decir, zonas del plano de oleaje en donde existe una intersección de las ortogonales.

En el capítulo VI y VII se realiza una aplicación de la teoría de la refracción del oleaje para el proyecto ejecutivo denominado "Cancún Náutico", ubicado en las costas de Quintana Roo, presentándose finalmente las conclusiones y recomendaciones resultantes del presente trabajo respectivamente.

# ***CAPITULO I.***

## CAPITULO I.

### TEORIAS DE OLEAJE.

#### 1.1 INTRODUCCION.

Al considerar todas las ondas que se presentan sobre la superficie del mar, éstas son tratadas como fenómeno único, aunque su forma, propiedades y características se modifiquen debido al efecto de la profundidad del agua sobre la que se mueven.

Actualmente no se dispone de una solución matemática única que permita obtener las características principales del oleaje, como son, la forma de la superficie libre, movimiento de sus partículas, distribución de presiones, etc., en función del período, altura de la onda y profundidad del agua.

Existen diversas teorías que permiten obtener respuestas adecuadas dentro de ciertos rangos acotados de aplicación, como son la Teoría Lineal, la Teoría de Stokes, y la Cnoidal, por mencionar algunas.

A continuación se definen algunos términos que comúnmente se emplean en Hidráulica Marítima en cuanto a los elementos o propiedades de una ola, clasificación de las mismas, así como algunas de las diversas teorías para las diferentes zonas en las que se divide el océano; las cuales dan resultados satisfactorios en cuanto a la obtención de las características principales del oleaje como son: altura, longitud y período de la onda; las cuales son necesarias para realizar un estudio de refracción de oleaje.

## 1.2 DEFINICIONES.

• **Cresta de la onda.**

Es el punto donde el perfil de la onda tiene la mayor altura, también se define como la zona del perfil por arriba del nivel medio del agua.

• **Valle de la onda.**

Es el punto donde el perfil del oleaje tiene el nivel más bajo, o también se entiende como la zona del perfil debajo del nivel medio del agua.

• **Altura de la onda ( H ).**

Es la distancia vertical medida entre la cresta y el valle de la onda.

• **Altura del perfil (  $\eta$  ).**

Desnivel entre cualquier punto de la superficie de la onda y el nivel de reposo de la superficie libre del agua.

• **Longitud de la onda ( L ).**

Es la distancia horizontal entre dos crestas o valles consecutivos.

• **Período de la onda ( T ).**

Tiempo que transcurre para que pasen dos crestas o dos valles por una misma sección.

• **Frecuencia de la onda ( f ).**

Es el recíproco del período.

- Celeridad o velocidad de propagación de la onda.

Es la velocidad con que se desplaza la onda a través de la superficie del agua:

$$C = \frac{L}{T}$$

- Tren de ondas.

Es un conjunto de ondas cuyo período es constante, no así su altura.

- Aguas profundas.

Se presenta esta condición cuando la celeridad de la onda no se ve afectada por la profundidad y solo depende del período.

- Aguas intermedias .

Es la condición que se presenta entre aguas profundas y someras, en éste caso la celeridad depende del período de la onda y de la profundidad del agua.

- Aguas someras o poco profundas.

En éste caso la celeridad depende únicamente de la profundidad y por lo tanto es independiente del período de la onda.

- Nivel medio de la onda.

Es el nivel que establece que el área de la onda arriba de él sea igual al área del valle bajo ese mismo nivel .

- Nivel estático o de reposo.

Nivel de la superficie del agua antes de que pase una onda que perturbe su superficie libre, este nivel se define a partir de la marea astronómica.

### 1.3 CLASIFICACION DE LAS ONDAS.

Una adecuada descripción física de una onda de agua envuelve la forma de su superficie y el movimiento del fluido debajo de la onda. Una onda la cuál puede ser descrita en términos matemáticos sencillos es llamada ONDA SIMPLE. Las ondas que presentan dificultad para ser descritas en cuanto a su forma y movimiento son conocidas como ONDAS COMPLEJAS.

La onda armónica simple o sinusoidal es un ejemplo de una onda simple, dado que el perfil de su superficie puede ser descrito por una función sencilla de seno o coseno; lo cuál no ocurre con las ondas complejas ya que para su descripción se necesita emplear varios términos y componentes complicados.

Una onda puede ser periódica si su movimiento y el perfil de su superficie se repiten en intervalos de tiempo iguales. La forma de una onda la cuál se mueve relativamente con el fluido es conocida como onda progresiva, y la dirección en la cuál se mueve se le llama dirección de propagación.

Si la forma de la onda solo se mueve hacia arriba y hacia abajo en una posición fija, la onda es estacionaria o CLAPOTIS.

Las ondas se consideran oscilatorias, si una de sus partículas de agua en movimiento describe una trayectoria circular o elíptica.

Es importante distinguir en forma precisa los tipos de ondas que pueden ser generadas y propagadas. Una manera de clasificarlas puede ser por su período "T". La clasificación que más se acepta es la de Klnsman (1965) la cuál se resume en la siguiente tabla.

TABLA 1.1

## CLASIFICACION DE LAS ONDAS SEGUN KINSMAN.

Nombre de la onda	Período (seg)	Fuerza más importante que la genera	Fuerza más importante que la amortigua
Capilar.	0-0.1	Viento.	Tensión superficial, gravedad.
De ultragravedad.	0.1-1.0	Viento.	Gravedad, Tensión superficial.
De gravedad	1.0-30	Viento.	Gravedad.
De infragravedad.	30-300	Viento.	Gravedad, Coriolis.
De período largo.	300 - 1440	Viento, maremotos, tormenta, atracción del sol y la luna.	Coriolis, gravedad.
De transmarea.	mayor de 1440	Atracción del sol y la luna.	Coriolis.

A continuación se hará una breve descripción de cada uno de estos tipos de onda.

1.) Ondas capilares.

Se presentan en forma de pequeñas ondulaciones sobre la superficie del agua, son producidas por vientos cuya velocidad oscila entre 0.25 y 1.0 m/s. Su período es menor de 0.1 seg y su longitud no excede de 1.73 cm.

2.) Ondas de gravedad.

Son ondas controladas por fuerzas gravitacionales y su longitud de onda es mayor de 1.73 cm.

2.1) Ondas de ultragravedad.

Son generadas por vientos cuya velocidad oscila entre 1.0 y 5.0 m/s.

2.2) Ondas de gravedad propiamente dichas.

Son generadas por vientos con velocidades mayores a los 6.5 ó 7.0 m/s. Su período varía entre 1 y 30 segundos. Este tipo de ondas son las que generalmente son observadas en la superficie del mar.

2.3) Ondas de infragravedad.

Son ondas de gravedad cuyo período varía entre los 30 segundos y 5 minutos, causan oscilaciones notorias en la superficie del mar y son producidas por tormentas y huracanes.

3.) Ondas de período largo.

En este tipo de onda su longitud es mucho mayor que la profundidad, es decir que  $(d/L) \ll 1$ . Cuando esto ocurre, la curvatura de la superficie libre es muy pequeña y no se puede apreciar a simple vista. Por otro lado las componentes verticales del movimiento no afectan la distribución de la presión, la cuál, en cualquier lugar es igual a la presión hidrostática.

En la naturaleza podemos distinguir dos tipos comunes de ondas de período largo. La primera de ellas es generada por desplazamientos de tierra submarinos y reciben en nombre de TSUNAMIS; aunque en aguas profundas pueden tener una altura pequeña, al acercarse a la costa y disminuir su celeridad en el frente de la onda, se llega a formar una ola de varios metros de altura.

El segundo tipo de onda de período largo son conocidas como MAREAS con períodos aproximados de 12 y 24 hrs las cuales son generadas principalmente por las fuerzas de atracción del sol y la luna.

#### 4.) Ondas de transmarea.

Este tipo de onda también es generado por las fuerzas de atracción del sol y la luna sobre la masa de agua de los océanos y presentan períodos mayores de 24 hrs.

Las ondas también las podemos clasificar conforme a su altura en:

- 1.) Ondas de amplitud pequeña.
- 2.) Ondas de amplitud finita.

Las primeras se caracterizan porque su altura es pequeña en comparación con su longitud. Dichas ondas se estudian en la teoría del mismo nombre la cuál también es llamada Teoría Lineal, la cuál considera que los desplazamientos que sufre la superficie libre del agua son despreciables.

Por el contrario, la Teoría para las ondas de amplitud finita no desprecia dichos desplazamientos, y por tanto, se considera más precisa que la Teoría Lineal ó Teoría de ondas de amplitud pequeña.

Las ondas también pueden clasificarse en cuanto a su profundidad relativa. Está clasificación puede considerarse como una de las más importantes desde el punto de vista teórico así como también del práctico. Según la relación que haya entre la profundidad  $^{\circ} d ^{\circ}$  y la longitud de la onda  $^{\circ} L ^{\circ}$ , las ondas se pueden dividir en:

- a) Ondas de aguas profundas.
- b) Ondas de aguas intermedias.
- c) Ondas de aguas someras o poco profundas.

**VALORES DE LA PROFUNDIDAD RELATIVA  
COMUNMENTE ACEPTADOS PARA DEFINIR LAS DIFERENTES  
ZONAS EN LAS QUE SE PUEDEN LOCALIZAR LAS ONDAS.**

TIPO DE ONDA.	RELACION TEORICA.	RELACION PRACTICA.
En aguas profundas	$d/L > 1.0$	$d/L > 0.5$
En aguas intermedias	$d/L > 0.005$	$0.5 > d/L > 0.05$
En aguas someras	$d/L < 0.005$	$d/L < 0.05$

Conforme al tiempo de aplicación de la fuerza perturbadora, las ondas pueden ser libres o forzadas.

Las ondas libres son las que se generan por la aplicación instantánea de una fuerza, esta onda es libre de desplazarse y su traslación no depende de la fuerza aplicada.

Las ondas forzadas son producidas por la acción de una fuerza constante, este tipo de onda depende de dicha fuerza, con modificaciones impuestas por el líquido y la profundidad.

Las ondas de gravedad en el mar se pueden dividir también en ondas u olas en la zona de generación (oleaje SEA), que son las que se forman en el lugar donde sopla el viento y éste les transmite la energía; y ondas u olas en la zona de decaimiento (oleaje SWELL), que son aquellas que han salido de la zona de generación y al trasladarse libremente no reciben energía del viento.

## 1.4 TEORIAS DE OLAJE.

### 1.4.1 TEORIA DEL OLAJE DE AMPLITUD PEQUEÑA O TEORIA LINEAL.

La descripción más simple de una onda oscilatoria sinusoidal está dada por su longitud (  $L$  ), altura de la onda (  $H$  ), período (  $T$  ), y profundidad del agua (  $d$  ).

La figura 1.1 muestra en dos dimensiones una onda progresiva simple, propagándose en la dirección positiva  $X$ . Los símbolos utilizados aquí son mostrados en dicha figura.

El símbolo (  $\eta$  ) denota el desplazamiento relativo de la superficie del agua con el nivel del agua en reposo correspondiendo al nivel medio del mar (swl), dicho desplazamiento es una función de la coordenada horizontal "X" y del tiempo.

En la cresta de la onda, (  $\eta$  ) es igual a la amplitud de la onda (  $a$  ), o a un medio de su altura (  $H$  ).

La teoría del oleaje de amplitud pequeña y algunas teorías del oleaje de amplitud finita fueron desarrolladas por medio de la introducción de la velocidad potencial

$\phi$  (  $x, z, t$  ). Las componentes horizontal y vertical de la velocidad en una partícula de agua serán definidas en un punto (  $x, z$  ) en el fluido como:

$$U = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

La cuál es la componente horizontal y

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Que representa a la componente vertical

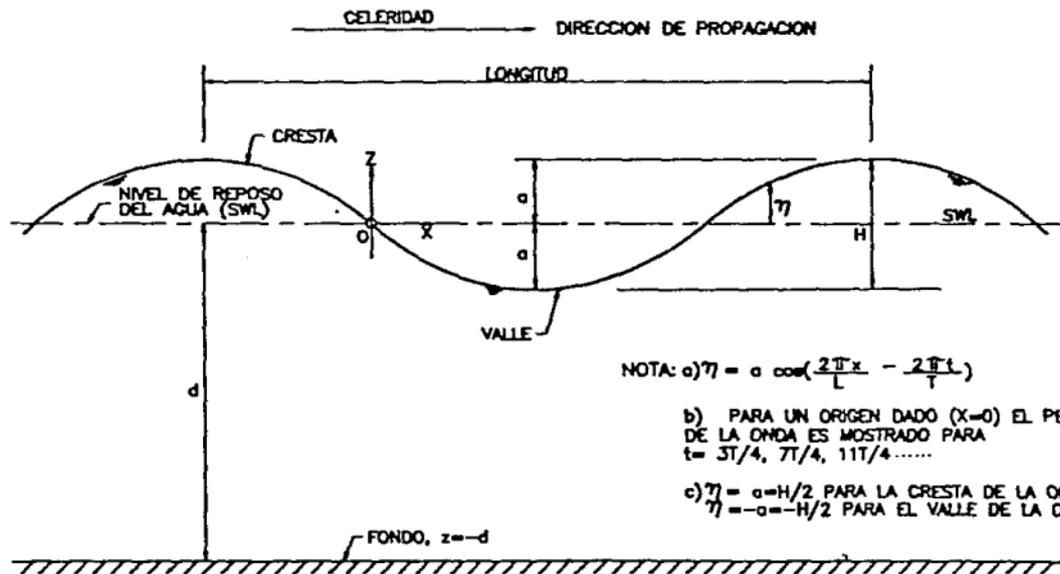


FIG. 1.1 DEFINICION DE LAS COMPONENTES DE  
UNA ONDA PROGRESIVA SINUSOIDAL

La velocidad potencial, la ecuación de Laplace, y la ecuación dinámica de Bernoulli junto con la información necesaria de las condiciones de comportamiento y frontera, han derivado las expresiones de las ondas de amplitud pequeña a saber.

#### 1.4.1.2 CELERIDAD, LONGITUD Y PERIODO DE LA ONDA.

La rapidez con que una onda se propaga es función de la velocidad o celeridad de la onda.

Puesto que la distancia recorrida por una onda durante su período es igual a su longitud, la celeridad de la ola puede ser relacionada en base a el período y longitud de dicha ola por la siguiente ecuación:

$$C = \frac{L}{T} \quad (1.1)$$

Donde:

C = Celeridad de la ola. (m/seg)

L = Longitud de la ola. (m)

T = Período de la ola. (seg)

Una expresión que relaciona la celeridad de la onda con su longitud y la profundidad del agua está dada por:

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \quad (1.2)$$

Donde:

C = Celeridad (m/seg).

g = Aceleración de la gravedad (9,81 m/seg<sup>2</sup>).

d = Profundidad del agua (m).

L = Longitud de la onda (m).

De la ecuación 1.1 y 1.2 podemos escribir:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (1.3)$$

Los valores de  $2\pi/L$  y  $2\pi/T$  son llamados el número de onda el cuál se denota con la letra "k" y la frecuencia angular de la onda "ω" respectivamente. De las ecuaciones 1.1 y 1.3 podemos obtener una expresión para la longitud de la onda en función de la profundidad y el período de la misma.

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (1.4)$$

El uso de la ecuación 1.4 envuelve algunas dificultades, dado que la longitud de la onda ( $L$ ) no es conocida, además de que dicha ecuación tiene implícita a la longitud. Los valores tabulados en el apéndice A pueden ser usados para simplificar la solución de la ecuación 1.4.

Como se mencionó anteriormente, las ondas de gravedad pueden ser clasificadas en función de la profundidad del agua en la cuál se desplazan. La clasificación fue hecha para la magnitud de la profundidad relativa  $d/L$ , los valores límites están dados por la función  $\tanh(2\pi d/L)$ .

Dicha clasificación está dada por:

ZONA	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh(2\pi d/L)$
Aguas profundas	$> 1/2$	$> \pi$	aprox. 1.0
Aguas intermedias	$1/25$ a $1/2$	$1/4$ a $\pi$	$\tanh(2\pi d/L)$
Aguas someras	$< 1/25$	$> 1/4$	aprox. $2\pi d/L$

Para una profundidad relativa de  $1/2$  (esto es cuando la profundidad relativa es igual a un medio de la longitud de la onda) la  $\tanh(2\pi d/L) = 0.9964$ .

Por lo tanto, para fines prácticos la  $\tanh(2\pi d/L)$  se considera igual a la unidad para la zona de aguas profundas por lo que las ecuaciones 1.2 y 1.3 se reducen a:

$$C_0 = \sqrt{\frac{gL_0}{2\pi}} = \frac{L_0}{T} \quad y$$

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi} \quad (1.5)$$

Donde:

$C_0$  = Celeridad de la ola en aguas profundas.

$L_0$  = Longitud de la ola en aguas profundas.

$g$  = Aceleración de la gravedad.

$T$  = Período de la ola.

Así cuando la profundidad relativa  $d/L$  sea mayor de  $1/2$ , las características de la onda serán virtualmente independientes de la profundidad. Las condiciones de aguas profundas de aquí en adelante se especificarán con el subíndice "o" en  $C_0$  y  $L_0$ .

El período ( $T$ ), independiente de la profundidad para ondas oscilatorias será omitido el subíndice. Utilizando el sistema métrico decimal la constante  $\frac{g}{2\pi}$  es igual a  $1.56 \text{ m/seg}^2$  y

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi} = 1.56T \quad (\text{m/seg}) \quad (1.7)$$

y

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1.56T^2 \quad (\text{dada en m.}) \quad (1.8)$$

Es evidente que para profundidades relativas de  $0.5$  el comportamiento es satisfactorio separando las ondas de la zona de aguas profundas de la zona de aguas de transición. Si una onda está viajando en aguas intermedias o de transición, las ecuaciones 1.2 y 1.3 pueden ser usadas sin simplificación.

Debe tenerse cuidado en el uso de las ecuaciones 1.2 y 1.3 cuando éstas sean necesarias, esto es, cuando la profundidad relativa oscile entre 0.50 y 0.25. Cuando la profundidad relativa del agua pasa a ser pequeña,  $\frac{2\pi d}{L} < 0.25$  ó  $\frac{d}{L} < 0.25$ , la ecuación 1.2 puede ser simplificada a:

$$C = (gd)^2 \quad (1.9)$$

Donde:

C = Celeridad de la onda (m/seg).

g = aceleración de la gravedad (m/seg<sup>2</sup>).

d = Profundidad del agua (m).

Así cuando una onda viaja en aguas bajas o someras su celeridad depende solamente de la profundidad del agua.

## 1.4.1.3 PERFIL DE LA ONDA SINUSOIDAL.

La ecuación que describe la superficie libre del agua es una función del tiempo (t), y la distancia horizontal (x) para una onda simple sinusoidal, el cuál puede ser descrito por:

$$\eta = a \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (1.10)$$

Donde:

( $\eta$ ) , es la elevación relativa de la superficie del agua para el nivel en reposo.

H/2 ; es un medio de la altura de la onda y que es igual a la amplitud de la onda "a".

Está expresión representa una onda progresiva, sinusoidal, periódica viajando en la dirección positiva "x". Para una onda moviéndose en la dirección negativa "x", se reemplaza el signo negativo antes del término  $\frac{2\pi t}{T}$  por un signo positivo.

Cuando  $\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right)$  es igual a cero,  $\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$ , los correspondientes

valores de ( $\eta$ ) serán H/2, cero, -H/2 y cero respectivamente.

## 1.4.1.4 VELOCIDAD Y ACELERACION LOCAL DEL FLUIDO

En el estudio de la fuerza de una onda muchas veces es deseable el conocimiento de la aceleración y velocidad local del fluido para varios valores "z" y "t" durante el paso de la onda. La componente horizontal "u" y la componente vertical "w" de la velocidad local del fluido están dadas respectivamente por:

$$u = \frac{H g T}{2 L} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{(2\pi d)}{L}} \right) \cos \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.11)$$

$$w = \frac{H g t}{2 L} \left( \frac{\sinh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{(2\pi d)}{L}} \right) \sin \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.12)$$

Estas ecuaciones expresan las componentes de la velocidad local del fluido a cualquier distancia (z+d) arriba del fondo. Las velocidades serán armónicas en "X" y en "t".

Para un valor dado de la fase del ángulo  $\theta = \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T}$  las

funciones hiperbólicas cosh y sinh como funciones de "z", resultan en una aproximación exponencial en decadencia, de la magnitud de las componentes de la velocidad con un incremento de la distancia bajo la superficie libre.

La máxima velocidad horizontal positiva ocurre cuando  $\theta=0,2\pi$ , etc, mientras que la máxima velocidad horizontal en la dirección negativa ocurre cuando  $\theta=\pi,3\pi$ , etc.

En las otras direcciones la máxima velocidad positiva vertical ocurre cuando  $\theta=\pi/2,5\pi/2$ , etc., y la máxima velocidad vertical en la dirección negativa ocurre cuando  $\theta=3\pi/2,7\pi/2$ , etc. (ver figura 1.2).

Las aceleraciones locales de una partícula del fluido serán obtenidas de las ecuaciones 1.11 y 1.12 por diferenciación para cada ecuación con respecto a "t", así tenemos que:

$$\alpha_x = \frac{g\pi H}{L} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.13)$$

$$\alpha_z = -\frac{g\pi H}{L} \left( \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.14)$$

Valores negativos y positivos de la aceleración horizontal y vertical en el fluido para varios valores de  $\theta = \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T}$  son mostrados en la figura 1.2.

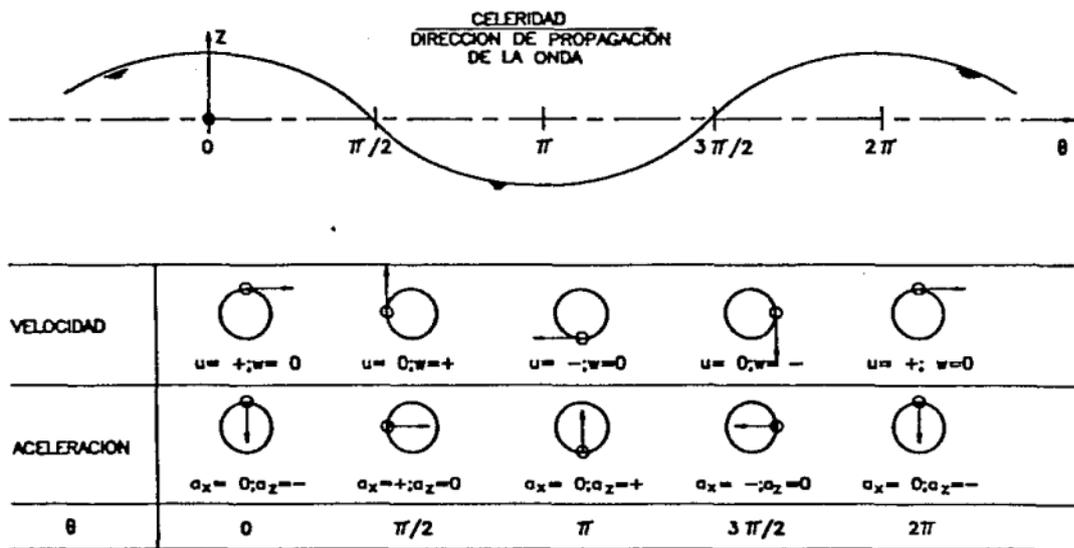


FIG. 1.2 VELOCIDADES Y ACELERACIONES LOCALES EN UN FLUIDO

## 1.4.1.5 DESPLAZAMIENTO DE UNA PARTICULA DE AGUA.

Algunos aspectos importantes en la mecánica de la Teoría Lineal tratan con el desplazamiento de una partícula individual de agua dentro de la onda. Generalmente las partículas de agua se mueven en trayectorias elípticas en las zonas de aguas someras y aguas intermedias, mientras que en aguas profundas éstas se mueven en trayectorias circulares.

Si la posición media de la partícula es considerada como el centro de una elipse o círculo, el desplazamiento vertical de la partícula con respecto al centro de la posición no puede exceder de un medio de la altura de la onda. Así, dado que la altura de la onda se considera pequeña, el desplazamiento de cualquier partícula del fluido en el centro de la posición resulta pequeño. La integración de las ecuaciones 1.11 y 1.12 dan los desplazamientos horizontal y vertical de la partícula en la posición media respectivamente.

Así tenemos que el desplazamiento horizontal está dado por la siguiente expresión:

$$\xi = -\frac{H_R T^2}{4\pi L} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.15)$$

Y el desplazamiento vertical será:

$$\zeta = \frac{HgT^2}{4\pi L} \left( \frac{\sinh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \cos \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.16)$$

Las expresiones pueden ser simplificadas por el uso de la relación:

$$\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{2\pi g}{T} \tanh \left( \frac{2\pi d}{L} \right)$$

Así el desplazamiento horizontal es:

$$\xi = -\frac{H}{2} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\sinh \frac{2\pi d}{L}} \right) \sin \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.17)$$

Y para el desplazamiento vertical tenemos:

$$\zeta = \frac{H}{2} \left( \frac{\sinh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\sinh \frac{2\pi d}{L}} \right) \cos \left( \frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (1.18)$$

Escribiendo las ecuaciones 1.17 y 1.18 en la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \left(\frac{\xi}{a} \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}}{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}\right)^2 \quad \text{Y}$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi X}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \left(\frac{\zeta}{a} \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}}{\operatorname{senh} \frac{2\pi(z+d)}{L}}\right)^2$$

obtenemos:

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\zeta^2}{B^2} = 1 \quad (1.19)$$

en la cuál

$$A = \frac{H}{2} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}} \right) \quad (1.20)$$

$$B = \frac{H}{2} \left( \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}} \right) \quad (1.21)$$

La ecuación 1.19 es la ecuación de una elipse en la cuál la mayor semiabscisa (horizontal) es igual al parámetro " A " y la menor semiabscisa (vertical) es igual al parámetro " B ". Las longitudes de A y B serán medidas de los desplazamientos horizontal y vertical de las partículas del agua. Así, los movimientos de las partículas de agua tenderán a ser órbitas cerradas; cada partícula rejaromará a su posición inicial después de cada ciclo de onda.

De las ecuaciones 1.20 y 1.21 tenemos que para aguas profundas las condiciones A y B serán iguales y las trayectorias de las partículas serán circulares. La ecuación puede expresarse como:

$$A = B = \frac{H}{2} \exp \frac{2\pi z}{L} \quad \text{para } d/L \text{ mayor que } 1/2$$

Para condiciones de aguas someras las ecuaciones serán:

$$A = \frac{H}{2} \frac{L}{2\pi d} \quad Y$$

$$B = \frac{H}{2} \frac{z+d}{d} \quad \text{para } d/L \text{ menor que } 1/25$$

Así, en aguas profundas las órbitas de las partículas serán circulares, y en aguas reducidas las ondas serán elípticas.

La amplitud de los desplazamientos de las partículas de agua decrece exponencialmente con la profundidad y en regiones de aguas profundas puede hacerse relativamente pequeño para una altura de onda en la profundidad igual a un medio de la longitud de la onda bajo la superficie libre, cuando  $z = -\frac{L}{2}$ .

Esto se ilustra en la figura 1.3. Para regiones bajas, el desplazamiento horizontal de la partícula puede ser largo. En realidad esto ocurre aparentemente fuera de la zona de rompientes donde la acción de la onda y la turbulencia levanta sedimentos del fondo y los pone en suspensión.

Los desplazamientos verticales de las partículas de agua varían de un mínimo de cero en el fondo a un máximo igual a un medio de la altura de la onda en la superficie.

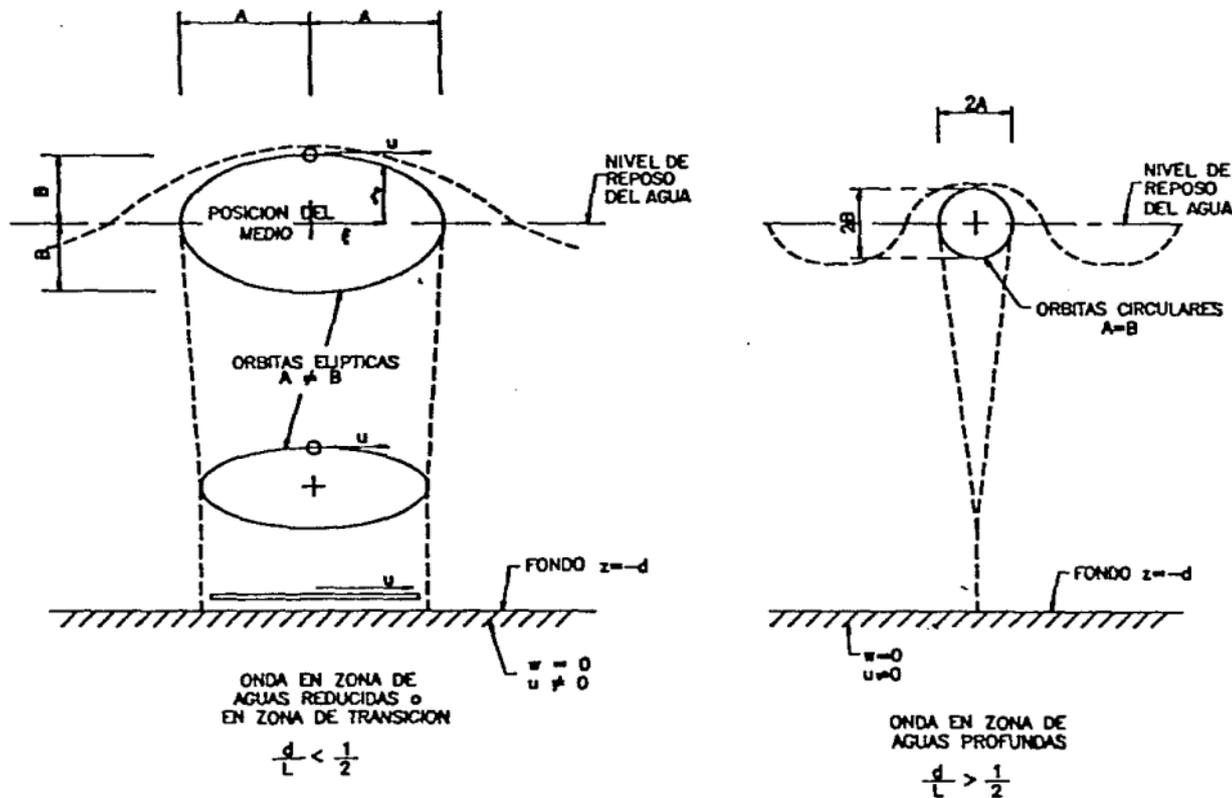


FIG. 1.3 DESPLAZAMIENTOS DE UNA PARTICULA PARA  
 LA ZONA DE AGUAS PROFUNDAS Y AGUAS REDUCIDAS

## 1.4.1.6 CELERIDAD DE GRUPO.

La rapidez con la cuál un grupo de ondas o un tren de ondas viaja no es por lo general idéntica a la rapidez o velocidad de una onda individual dentro del grupo que viaja. La rapidez del grupo es denominada velocidad o celeridad de grupo, la cuál se denota por "  $C_g$  ".

La rapidez individual de la onda es la fase de celeridad o velocidad de la onda dadas por las ecuaciones 1.2 y 1.3. Para ondas que se propagan en aguas profundas o intermedias, con la gravedad como la fuerza primaria restauradora, la celeridad de grupo puede ser menor.

El concepto de celeridad de grupo puede ser descrito considerando la interacción de dos trenes de ondas sinusoidales moviéndose en la misma dirección con escasas diferencias de longitudes de onda y períodos; para está condición la ecuación de la superficie del agua está dada por:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_1} - \frac{2\pi t}{T_1}\right) + \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_2} + \frac{2\pi t}{T_2}\right) \quad (1.22)$$

donde  $\eta_1$  y  $\eta_2$  será la contribución de cada una de las dos componentes.

Por simplicidad, las alturas de ambas componentes de onda pueden ser asumidas iguales.

Como las longitudes de onda de las dos componentes de onda,  $L_1$  y  $L_2$ , pueden ser asumidas escasamente diferentes, para algunos valores de " $x$ " para un tiempo dado, las dos componentes pueden estar en fase y la altura de la onda observada puede ser  $2H$ .

Para algunos otros valores de " $x$ ", las ondas pueden estar completamente fuera de fase y la altura de la onda resultante puede ser cero.

El perfil de la superficie se describe por arriba de la suma de las dos ondas sinusoidales que son dadas por la ecuación 1.22, y que es mostrada en la figura 1.4.

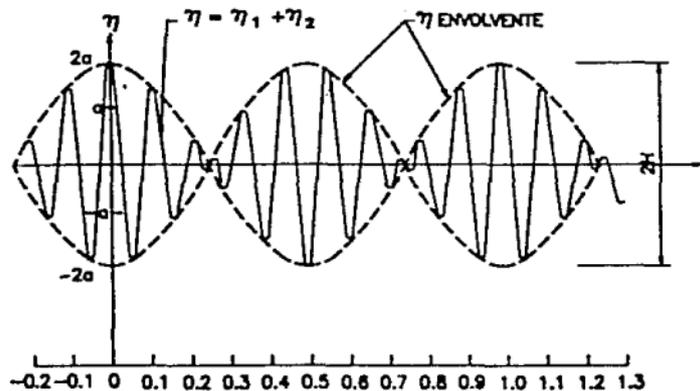
#### 1.4.1.7 ENERGIA Y POTENCIA DE LA ONDA.

La energía total de un sistema de ondas es la suma de su energía cinética y su energía potencial. La energía cinética es la parte de la energía total debida a la velocidad de las partículas del agua asociada con el movimiento de la onda. La energía potencial es la parte de la energía restante de la masa del fluido.

De acuerdo a la Teoría de Airy, si la energía potencial es determinada para el nivel medio del mar, y todas las ondas son propagadas en la misma dirección, las componentes de la energía cinética y potencial serán iguales, y la energía de la onda total en una longitud de onda por unidad de ancho de cresta está dada por la siguiente expresión:

$$E = E_k + E_p = \frac{\rho g^2 L}{16} + \frac{\rho g H^2 L}{16} = \frac{\rho g H^2 L}{8} \quad (1.23)$$

Los subíndices " $k$ " y " $p$ " se refieren a las energías cinética y potencial respectivamente.



$$\frac{x}{2} \left( \frac{L_2 - L_1}{L_2 L_1} \right) - \frac{t}{2} \left( \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1} \right)$$

FIG. 1.4 FORMACION DE ONDAS DE GRUPO POR LA ADICION  
DE DOS SINUSOIDES DE PERIODO DIFERENTE

La energía promedio de la onda por unidad de superficie de área, es denominada ENERGIA ESPECIFICA O DENSIDAD DE ENERGIA, y está dada por:

$$\bar{E} = \frac{E}{L} = \frac{\rho g H^2 L}{8} \quad (1.24)$$

El flujo de energía es la relación para la cuál la energía es transmitida en la dirección de propagación de la onda a través de un plano vertical perpendicular a la dirección de avance de la onda.

El promedio de energía por unidad de ancho de cresta transmitida al avance de la onda es:

$$\bar{P} = \bar{E} n C = \bar{E} C_g \quad (1.25)$$

El flujo de energía " $\bar{P}$ " es frecuentemente denominada potencia de la onda y el factor "n" (factor de grupo) se expresa por:

$$n = 0.5 \left( 1 + \frac{\frac{4\pi d}{L}}{\sinh \frac{4\pi d}{L}} \right)$$

Para aguas profundas y reducidas, la ecuación 1.25 puede escribirse de la siguiente forma:

$$\bar{P}_0 = 0.5 \bar{E}_0 C_0 \quad (\text{aguas profundas}) \quad (1.26)$$

$$\bar{P} = \bar{E} C_g = \bar{E} C \quad (\text{aguas reducidas}) \quad (1.27)$$

### 1.4.2 ONDAS DE AMPLITUD FINITA. SEGUNDA APROXIMACION DE STOKES

Las expresiones para las ondas presentadas en la Teoría Lineal están basadas en la suposición de que el movimiento de la superficie libres será pequeño, el cuál puede ser descrito por medio de la ecuación:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{H}{2} \cos\theta \quad (1.28)$$

Más específicamente, esto es una suposición para las ondas de amplitud pequeña. Una expresión más general es:

$$\eta = a \cos\theta + a^2 B_2(L, d) \cos 2\theta + a^3 B_3(L, d) \cos 3\theta + a^4 B_4(L, d) \cos 4\theta$$

$$(1.29)$$

Donde:

$a = H/2$ , para el primer y segundo orden.

$a < H/2$ , para ordenes superiores que el segundo.

$B_2, B_3, B_4$ , serán funciones específicas de la longitud de la onda "L", y la profundidad "d".

La Teoría Lineal solo considera el primer término de la izquierda de la ecuación 1.29. Para considerar los términos adicionales representados en un orden superior de aproximación del perfil de la superficie libre del agua, el orden de aproximación es determinado por el orden de los términos de la serie considerada.

Así, la ordenada de la superficie libre para el tercer orden es definida por los tres primeros términos de la ecuación 1.29.

Cuando el uso de las Teorías de orden superior sea justificado, tablas de ondas semejantes a las preparadas por Skjelbreia (1959), y Skjelbreia y Hendrickson (1962), serán usadas para reducir la posibilidad de errores en el uso de las ecuaciones. Aunque Stokes (1880) desarrolló las primeras ecuaciones para ondas de amplitud finita, las ecuaciones presentadas aquí serán las de Michel (1944).

#### 1.4.2.1 CELERIDAD DE LA ONDA, LONGITUD Y PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE DEL AGUA.

Pueden ser mostradas para Teorías de segundo orden, expresiones para la celeridad y longitud de la onda idénticas a las obtenidas por la Teoría Lineal. Por lo tanto:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (1.30)$$

Y

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (1.31)$$

Las ecuaciones correctas para el tercer orden están dadas por:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \left\{ 1 + \frac{(\pi H)^2}{L} \left( \frac{5 + 2 \cosh \frac{4\pi d}{L} + 2 \cosh^2 \frac{4\pi d}{L}}{8 \operatorname{senh}^4 \frac{2\pi d}{L}} \right) \right\}$$

(1.32)

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \left\{ 1 + \frac{(\pi H)^2}{L} \left( \frac{5 + 2 \cosh \frac{4\pi d}{L} + 2 \cosh^2 \frac{4\pi d}{L}}{8 \operatorname{senh}^4 \frac{2\pi d}{L}} \right) \right\}$$

(1.33)

La ecuación de la superficie libre para la Teoría de segundo orden es:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) + \left[ \frac{\pi H^2}{8L} \right] \left( \frac{\cosh \frac{2\pi d}{L}}{\operatorname{senh}^3 \frac{2\pi d}{L}} \right) \left( 2 + \cosh \frac{4\pi d}{L} \right) \cos \left( \frac{4\pi x}{L} - \frac{4\pi t}{T} \right)$$

(1.34)

Para aguas profundas la ecuación 1.34 quedaría:

$$\eta = \frac{H_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_0} - \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\pi H_0^2}{4L_0} \cos\left(\frac{4\pi x}{L_0} - \frac{4\pi t}{T}\right) \quad (1.35)$$

#### 1.4.2.2 VELOCIDADES Y DESPLAZAMIENTOS DE LAS PARTICULAS DE AGUA.

La componente periódica "x" y "z" de las velocidades de las partículas de agua, de segundo orden están dadas por:

$$u = \frac{HgT}{2L} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{3(\pi H)^2}{4L} \cos\left(\frac{4\pi(z+d)}{L}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi x}{L} - \frac{4\pi t}{T}\right)$$

(1.36)

$$w = \frac{\pi H}{L} C \left( \frac{\operatorname{senh} \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) + \frac{3}{4} \frac{(\pi H)^2}{L} C \left( \frac{\operatorname{senh} \frac{4\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh}^2 \frac{2\pi d}{L}} \right) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi x}{L} - \frac{4\pi t}{T} \right)$$

(1.36a)

Las ecuaciones de segundo orden para los desplazamientos de las partículas para la misma posición de una onda serán:

$$\xi = \frac{HgT^2}{4\pi L} \left( \frac{\cosh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) + \left( \frac{\pi H^2}{8L} \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \frac{2\pi d}{L}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\cosh \frac{4\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh}^2 \frac{2\pi d}{L}} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi x}{L} - \frac{4\pi t}{T} \right) + \frac{(\pi H)^2}{L} \frac{Ct}{2} \left( \frac{\cosh \frac{4\pi(z+d)}{L}}{\operatorname{senh}^2 \frac{2\pi d}{L}} \right)$$

(1.37)

y

$$\zeta = \frac{HgT^2}{4\pi L} \left( \frac{\sinh \frac{2\pi(z+d)}{L}}{\cosh \frac{2\pi d}{L}} \right) \cos \left( \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) + \frac{3}{16} \left( \frac{\pi H^2}{L} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{\sinh \frac{4\pi(z+d)}{L}}{\sinh^2 \frac{2\pi d}{L}} \right) \cos \left( \frac{4\pi x}{L} - \frac{4\pi t}{T} \right)$$

(1.38)

### 1.4.2.3 VELOCIDAD DEL TRANSPORTE DE MASA.

El último término de la ecuación 1.37, es de particular interés, pues éste no es periódico, pero es producto del tiempo y depende del período y profundidad de una onda dada.

El término que a continuación se presenta, incrementa el desplazamiento neto de la partícula en la dirección de propagación de la onda. La distancia que es desplazada una partícula durante el período de una onda, cuando es dividida por el período de dicha onda y un medio de la velocidad del flujo, es llamada VELOCIDAD DE TRANSPORTE DE MASA, y se denota como  $U_m$ .

Así tenemos que dicha velocidad es:

$$U_{(z)} = \frac{\pi H C^2}{L} \frac{1}{2} \left( \frac{\cosh \frac{4\pi(z+d)}{L}}{\sinh^2 \frac{2\pi d}{L}} \right) \quad (1.39)$$

Si el transporte de masa, indicado en la ecuación 1.39 lleva a un acumulación de masa en cualquier región, la superficie libre debe de ascender generando así un gradiente de presiones. Una corriente formada en respuesta a este gradiente de presiones, reestablece la distribución de la masa.

## 1.4.2.4 MAXIMA INCLINACION DE LAS ONDAS PROGRESIVAS.

Una onda progresiva está físicamente limitada en altura por la profundidad y la longitud de la onda.

El límite superior o altura de la ola rompiente en aguas profundas es una función de la longitud de onda, y en la zona de aguas someras (o reducidas) y aguas intermedias (o de transición) es función de la profundidad del fondo y de la longitud de la onda.

La pendiente de la onda es la relación de su altura y su longitud. Michell en 1893 encontró que la máxima relación de esbeltez en aguas profundas está expresada como:

$$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_{\text{máx}} = 0.142 = \frac{1}{7} \quad (1.40)$$

Para una onda progresiva en aguas someras, Michell propuso en 1944 la siguiente relación:

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\text{máx}} = 0.142 \tanh(kd) \quad (1.42)$$

Y para una onda estacionaria también ubicada en la zona de aguas someras propuso:

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\text{mlr}} = 0.218 \tanh(kd) \quad (1.42)$$

Lo anterior indica que la relación H/L no puede sobrepasar los valores indicados por las ecuaciones 1.41, 1.42 y 1.43. Cuando hay tendencia de que la relación H/L sea mayor, la onda es inestable y empieza a romper con formación de espuma en su cresta. Esta disipación de energía hace que la altura de la onda disminuya y con ello la relación H/L.

## 1.4.3 ONDAS CNOIDALES.

Las ondas de amplitud finita de forma de propagación permanente en aguas someras o reducidas serán frecuentemente descritas por la Teoría de la Onda Cnoidal. La existencia en aguas reducidas de ondas largas de forma permanente puede tener su primer reconocimiento por Boussinesq (1877).

El término Cnoidal es usado siempre que el perfil de la onda está dado por la función Jacobiana coseno elíptico, usualmente designada como "cn".

El rango de aproximación de validez de la Teoría de la Onda Cnoidal es determinado por LAITONE (1963), el cual está dado por la siguiente relación:

$$d/L < 1/8$$

Y el parámetro de Ursell

$$\frac{L^2 H}{d^3} > 26$$

(ver figura 1.5)

La descripción de la velocidad de las partículas locales, aceleración, energía de la onda y potencia para ondas cnoidales es muy difícil.

Las características de las ondas son descritas en forma paramétrica en términos de los módulos "k" de las integrales elípticas.

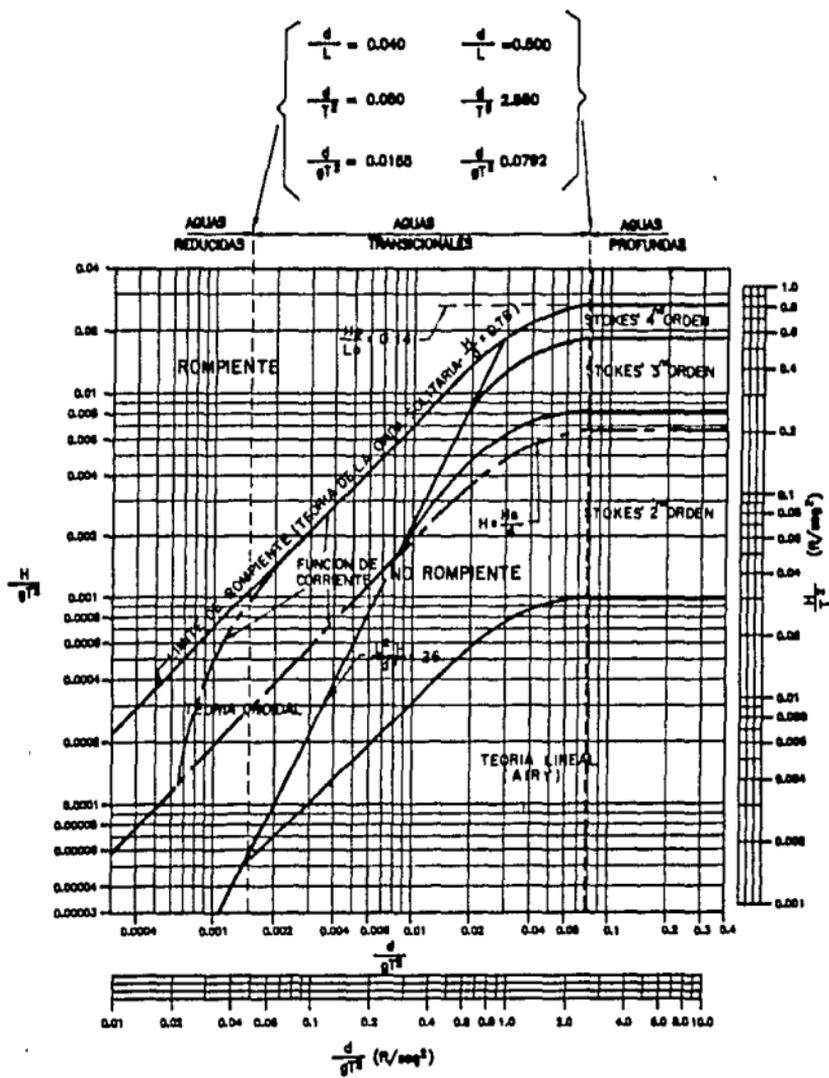


FIG. 1.5 REGIONES DE VALIDEZ

PARA LAS DIVERSAS TEORIAS

La ordenada de la superficie del agua "Y," medida arriba del fondo está dada por:

$$Y_s = Y_t + Hcn^2\left(2K(k)\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right), k\right) \quad (1.43)$$

Donde:

$Y_t$  ; es la distancia del fondo al seno de la onda.

$cn$  ; es la función coseno elíptico.

$K(k)$  ; es el complemento de la integral elíptica de la primera clase.

$k$  ; es el módulo de las integrales elípticas.

El coseno elíptico es una función periódica donde:

$$cn^2\left(2K(k) - \frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)$$

es la amplitud máxima e igual a la unidad. El módulo "k" es definido sobre un rango entre 0 y 1. Cuando  $k=0$ , el perfil de la onda puede ser un senoide en la Teoría Lineal; y cuando  $k=1$ , el perfil de la onda está dado por una onda solitaria.

La distancia del fondo al seno de la onda, " $Y_t$ " es usada en la ecuación 1.43, y está dada por:

$$\frac{Y_t}{d} = \frac{Y_c}{d} - \frac{H}{d} = \frac{16d^2}{3L^2} K(k)(K(k) - E(k)) + 1 - \frac{H}{d} \quad (1.44)$$

Donde:

$Y_1$  ; es la distancia de el fondo de la cresta.

$E(k)$  ; es el complemento de la integral elíptica de segundo orden.

La longitud de la onda está dada por:

$$L = \sqrt{\frac{16d^3}{3H}} kK(k) \quad (1.45)$$

El período de la onda está expresado por la siguiente ecuación:

$$T = \sqrt{\frac{g}{d}} \sqrt{\frac{16Y_1}{3H} \left\{ Y_1 \left[ 1 + \frac{H}{Y_1^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \right] \right\}} \quad (1.46)$$

La presión bajo una onda cnoidal en cualquier elevación "Y", desde el fondo, depende de la velocidad local del fluido. No obstante esto puede ser aproximado en una forma hidrostática como:

$$P = \rho g(Y_1 - Y) \quad (1.47)$$

Esto es, la distribución de presiones puede ser asumida para una forma de variación lineal  $pgY$ , partiendo de cero en la superficie.

Las figuras 1.6 y 1.7 muestran las menores dimensiones para el perfil de la superficie de la onda cnoidal para varios valores y el cuadrado del módulo de la integral elíptica " $k^2$ ", mientras que las figuras 1.8 a 1.12 presentan las menores dimensiones dibujadas de los parámetros que caracterizan las ondas cnoidales.

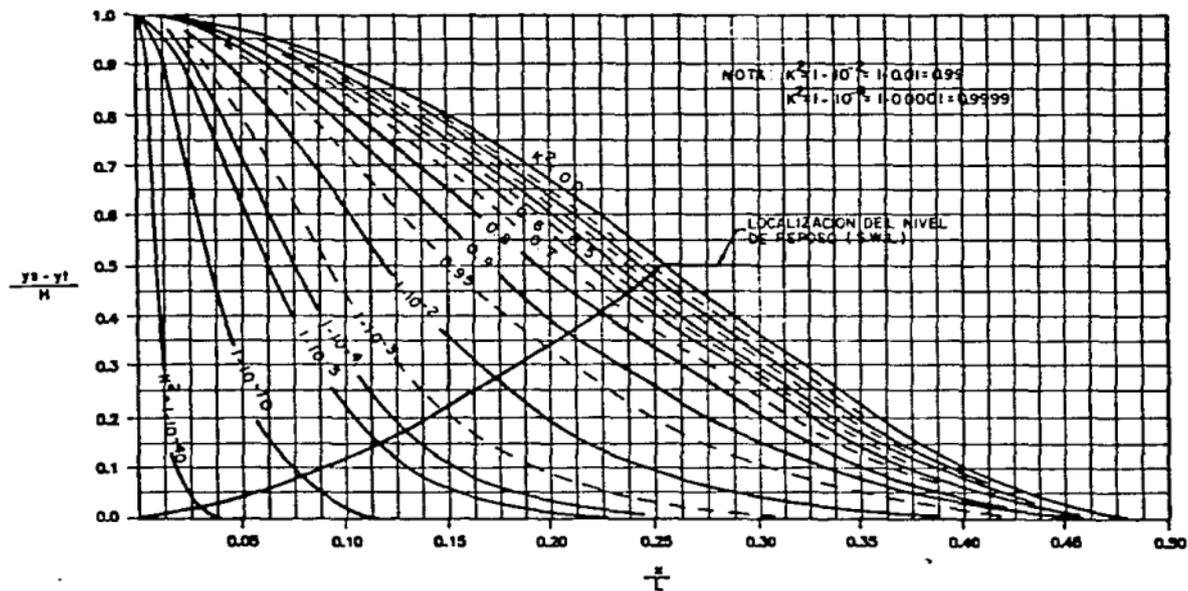


FIG. 1.6 PERFILES DE LA SUPERFICIE DE LA ONDA CNOIDAL  
COMO UNA FUNCION DE  $K^2$

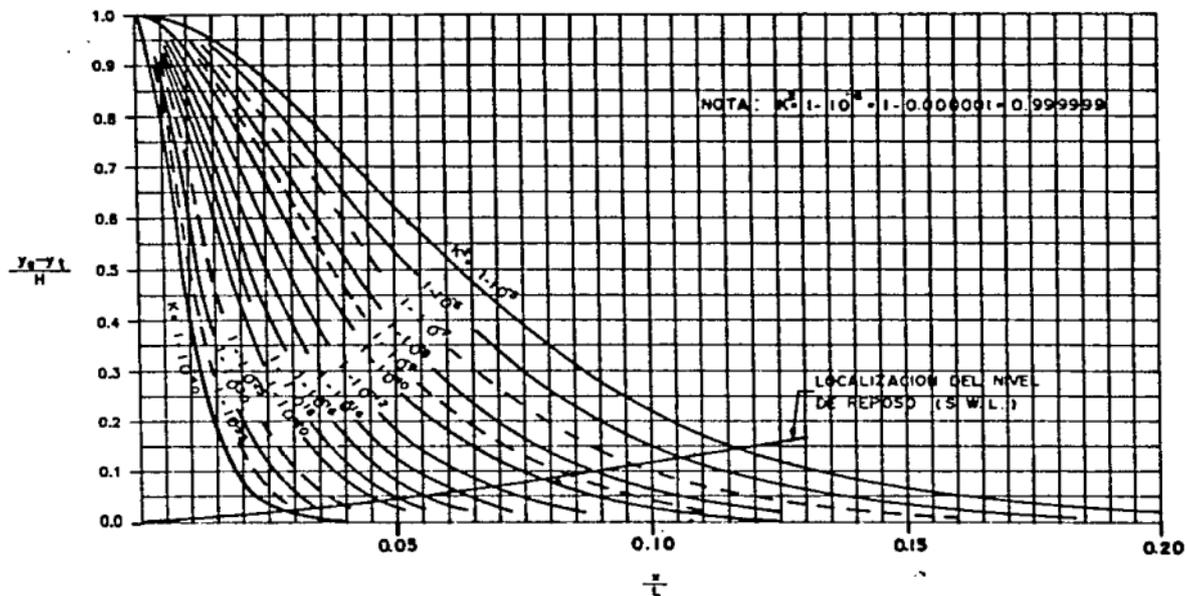


FIG. 1.7 PERFILES DE LA SUPERFICIE DE LA ONDA CNOIDAL  
COMO UNA FUNCION DE  $K^2$

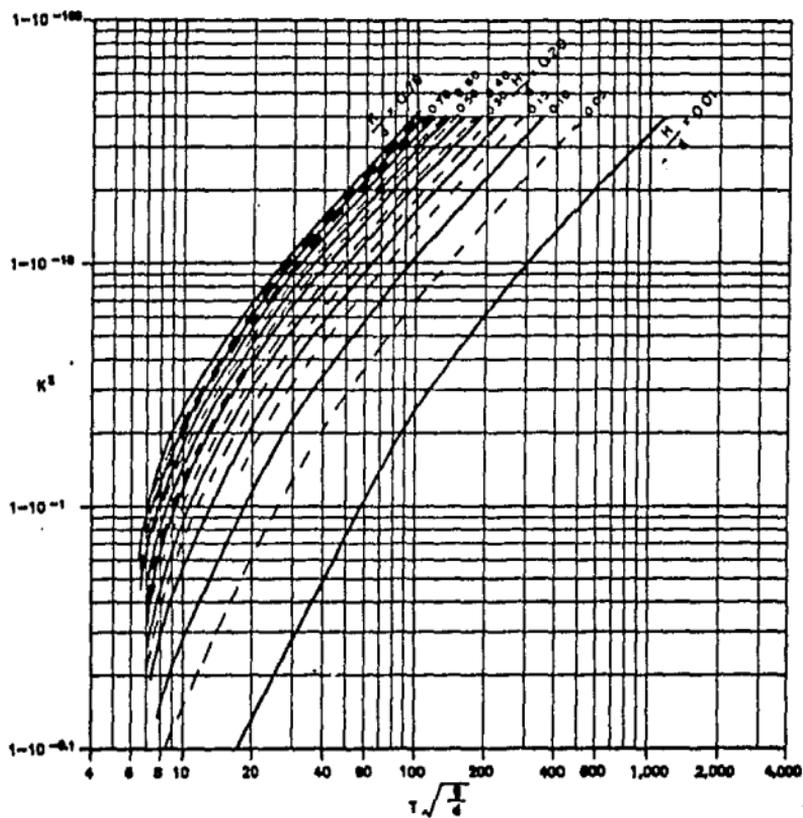


FIG. 1.8 RELACION ENTRE  $K^2$ ,  $H/d$  Y  $T\sqrt{g/d}$

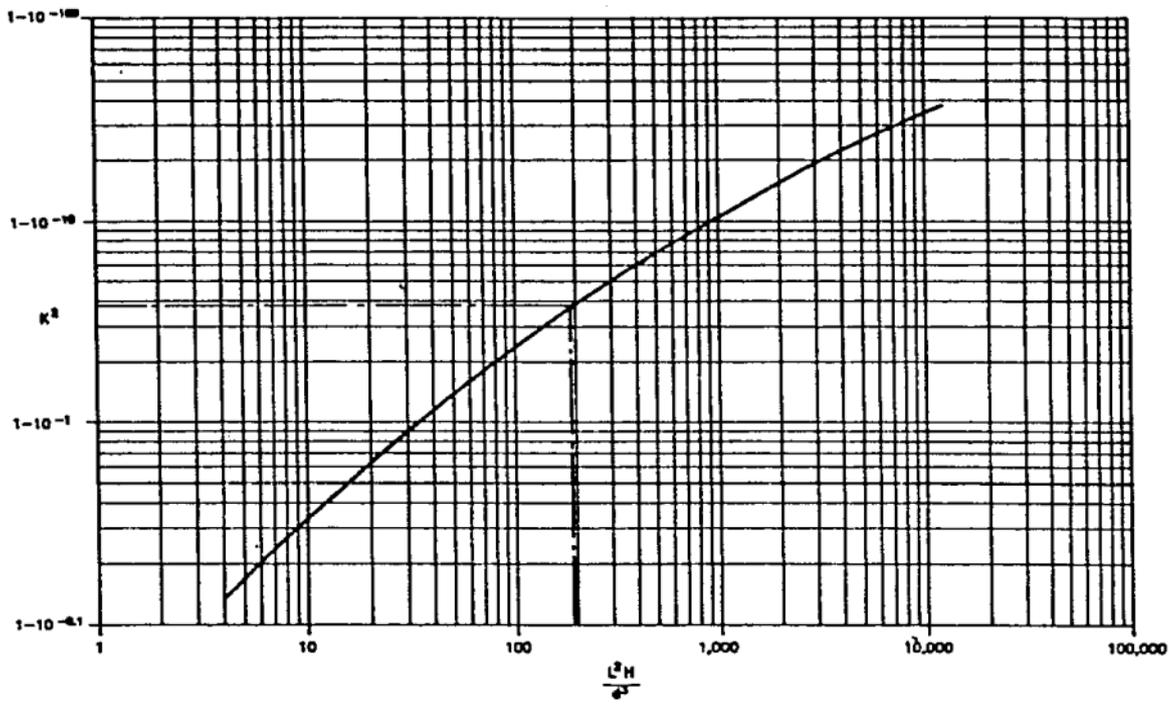


FIG. 1.9 RELACION ENTRE  $K^2$  Y  $\frac{L^2 H}{d^3}$

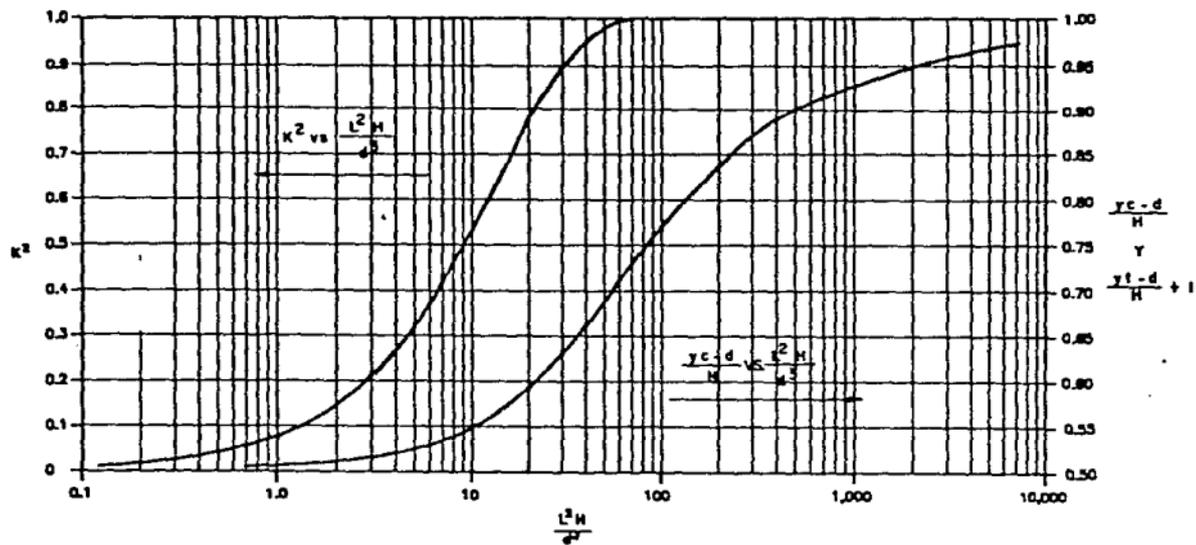


FIG. 1.10 RELACION ENTRE  $K^2 Y \frac{L^2 H}{d^3}$   
Y ENTRE  $(y_c - d)/H; (y_1 - d)/H + 1$  Y  $\frac{L^2 H}{d^3}$

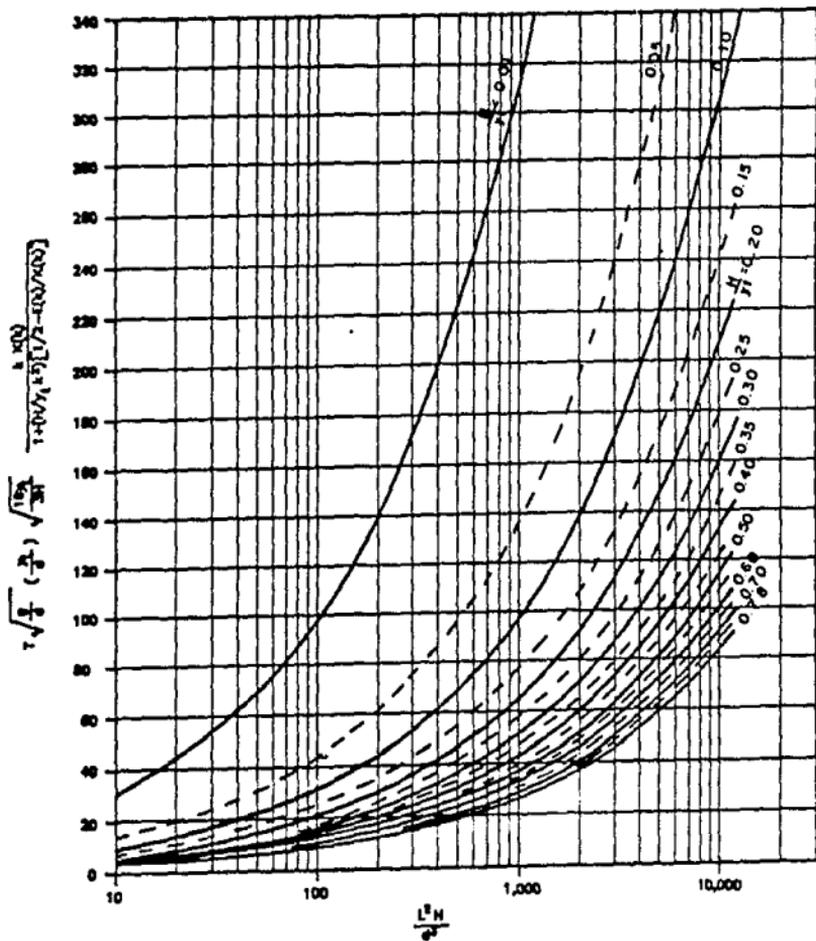


FIG. 1.11 RELACION ENTRE  $\tau \sqrt{g/d}$  yt/d,  $H/yt$  Y  $L^2 H/d^3$

$$\frac{C}{\sqrt{M}} = 1 + \frac{M}{K} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} \right)$$

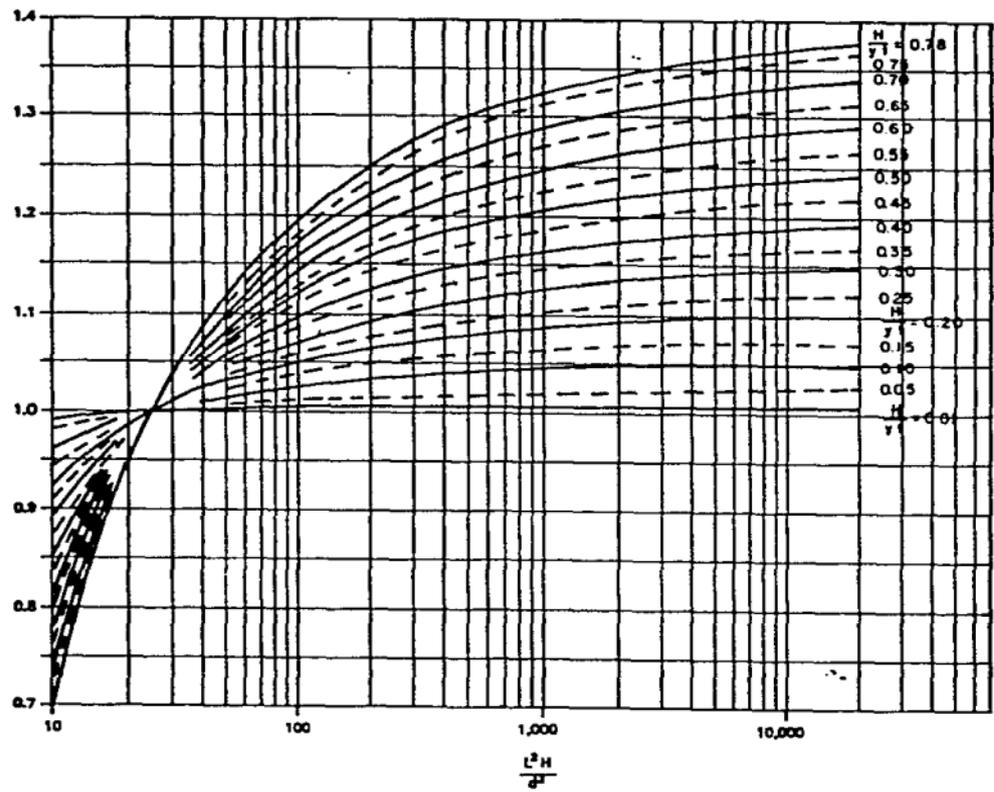


FIG.1.12 RELACION ENTRE  $C/\sqrt{gy_t}$ ,  $H/y_t$  Y  $L^2 H/d^3$

## **CAPITULO II.**

## CAPITULO II

### LEY DE SNELL Y SUS APLICACIONES EN LA INGENIERIA DE COSTAS.

#### 2.1 Ley de Snell.

##### 2.1.1 Ondas, frentes de ondas y rayos.

Es conveniente representar una onda de cualquier tipo mediante frentes de onda. Se define como FRENTE DE ONDA al lugar geométrico de todos los puntos en los que la fase de la vibración de una cantidad física es la misma. Así, en el caso de las ondas sonoras que se propagan en todas direcciones desde una fuente puntual, cualquier superficie esférica concéntrica con la fuente es un posible frente de onda. Algunas de estas superficies esféricas son el lugar geométrico de los puntos donde la presión es un máximo, otras donde es un mínimo, etc.; pero la fase de las variaciones de presión es la misma en cualquier superficie esférica. Suelen dibujarse solo algunos frentes de onda, en general aquellos que pasan por los máximos y mínimos de la perturbación.

En algunos casos, especialmente en la óptica geométrica, es conveniente representar una onda por rayos en vez de por frentes de onda. Desde el punto de vista ondulatorio, un rayo es una línea imaginaria trazada en la dirección de propagación de la onda.

Así, en la figura 2.1(a) los rayos son líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda, y en la figura 2.1(b) son radios de los frentes de onda esféricos.

## 2.1.2 REFRACCION DE OLAJE.

Muchos fenómenos ópticos conocidos implican el comportamiento de una onda que incide en la superficie que separa dos medios ópticos. Cuando la superficie de separación es suave, es decir, cuando sus irregularidades son pequeñas comparadas con la longitud de la onda, la onda suele ser en parte reflejada y en parte transmitida al segundo medio, como ilustra la figura 2.2(a).

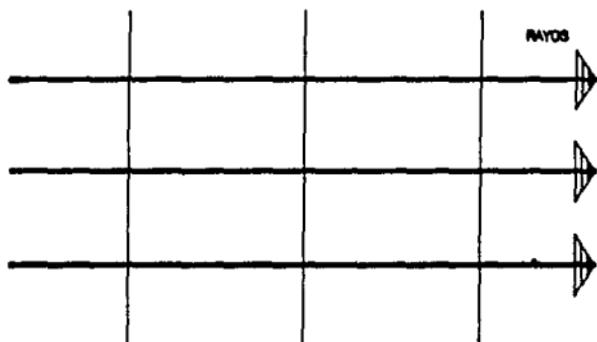
Los segmentos de las ondas planas en la figura 2.2 se representan por un pincel de rayos que forman haces de luz (figura 2.2(b)); para simplificar la explicación de los diversos ángulos, suele considerarse solo un rayo de cada haz, como en la figura 2.2(c).

Las direcciones de los haces de luz incidente, reflejado y refractado se expresan en función de los ángulos que forman con la normal de la superficie en el punto de incidencia. Para ello es suficiente indicar un rayo, como en la figura 2.2(c). Estudios experimentales de los haces incidente, reflejado y refractado conducen a los siguientes resultados :

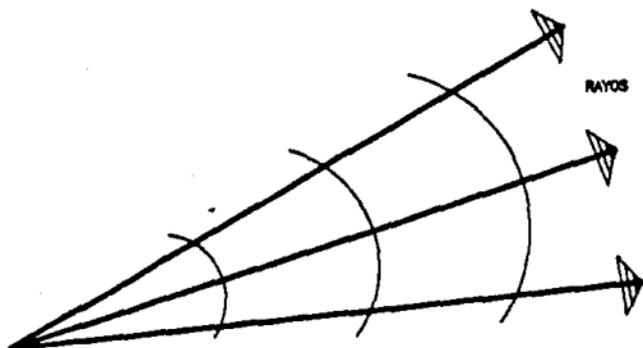
1.- Los rayos incidentes, reflejado y refractado y la normal a la superficie, se encuentran en el mismo plano del diagrama, y la superficie de separación es perpendicular a este plano, los planos reflejado y refractado están en el plano del diagrama.

2.- El ángulo de reflexión  $\phi_r$  es igual al ángulo de incidencia  $\phi_i$  para cualquier par de medios.

3.- Para la luz monocromática y un par de medios dados, "a" y "b", situados en los lados opuestos de la superficie de separación, la razón del



a) FRENTES DE ONDA



b) FRENTES DE ONDA

FIG. 2.1 FRENTES DE ONDA

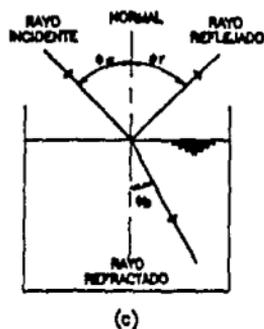
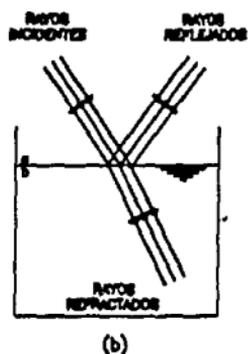
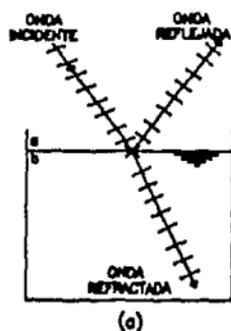


FIG. 2.2 (a) UNA ONDA PLANA ES EN PARTE REFLEJADA Y EN PARTE REFRACTADA EN LA SUPERFICIE DE SEPARACION DE DOS MEDIOS. (b) LAS ONDAS DE (a) ESTAN REPRESENTADAS POR RAYOS. (c) POR SENCILLEZ SOLO SE ILUSTR A UN RAYO INCIDENTE, REFLEJADO Y REFRACTADO.

ángulo  $\phi_a$  (entre el rayo y el medio "a" y la normal) y el seno del ángulo  $\phi_b$  (entre el rayo del medio "b" y la normal) es una constante.

Por lo tanto:

$$\frac{\text{sen}\phi_a}{\text{sen}\phi_b} = \text{constante} \quad (2.1)$$

Este resultado experimental, junto con el hecho de que los rayos incidente y refractado y la normal a la superficie estén en el mismo plano, se le conoce como LEY DE REFRACCION O LEY DE SNELL.

En la refracción del oleaje el decremento de la celeridad de la onda con la disminución de la profundidad del agua puede ser considerada en una analogía al decremento de la velocidad de la luz con el incremento del índice de refracción del medio de transmisión. Usando esta analogía O'Brien (1942) sugirió el uso de la Ley de Snell de la óptica geométrica para resolver el problema de la refracción del oleaje por cambio en la profundidad.

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left[\frac{2\pi d}{L}\right]} \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 muestra que la celeridad de la onda depende de la profundidad del agua en la cuál se propaga. Si la celeridad de la onda decrece con la profundidad, la longitud de la onda debe decrecer proporcionalmente. La variación de la celeridad de la onda ocurre a lo largo de la cresta en movimiento en un ángulo por debajo del contorno del agua, porque esa parte de la onda en aguas profundas se desplaza más rápidamente que en la zona de aguas someras. Esta variación causa en la cresta de la onda una curvatura que tiende a alinearse con la batimetría. Este efecto de curvatura o refracción, depende de la relación de la profundidad del agua con la longitud de la onda.

En la practica, la refracción del oleaje es importante por varias razones, entre las que se pueden mencionar las siguientes:

1.- Mediante la refracción del oleaje es posible determinar las alturas de las olas de un sitio o zona en particular, usando para tal efecto las condiciones de dicho oleaje en la zona de aguas profundas (esto es: altura, período y dirección). La refracción por lo tanto tiene una influencia significativa en la distribución de la energía del oleaje a lo largo de la costa.

2.- El cambio de dirección del oleaje ocasiona convergencia o divergencia en su energía, y materialmente afecta a la fuerza ejercida por la onda sobre las estructuras.

3.- La refracción contribuye a la alteración o cambio de la batimetría por los efectos de erosión y depósito de sedimentos en la playa.

4.- Una descripción general de la batimetría de un área cercana a la costa puede ser a veces obtenida por medio de un análisis de fotografía aérea de los patrones de refracción de oleaje.

En adición a las variaciones causadas por la refracción del oleaje en la batimetría, las ondas pueden ser refractadas por corrientes o por algún otro fenómeno.

La refracción por una corriente ocurre cuando las ondas intersectan a la corriente con un ángulo dado.

El grado en el cuál la corriente refracta al oleaje incidente depende del ángulo inicial entre las crestas de la onda de la dirección del flujo y fuerza de la corriente, y de las características del oleaje incidente.

En al menos estas dos situaciones, la refracción del oleaje por corrientes puede ser de importancia practica.

En accesos de marea, la corriente de marea puede ser contraria al oleaje incidente y consecuentemente incrementar la altura y la incidencia de la onda.

Actualmente existen dos técnicas básicas para el análisis de la refracción de oleaje a saber:

a) La gráfica.

b) La numérica.

Fundamentalmente las técnicas de análisis de refracción del oleaje mencionadas anteriormente están basadas en la Ley de Snell.

Las suposiciones en las que se desarrollan ambas técnicas son:

- 1.- La energía de la onda entre los rayos u ortogonales permanece constante (las ortogonales serán líneas dibujadas perpendicularmente a los frentes del oleaje, y extendidas en la dirección del avance de la ola).
- 2.- La dirección de avance de la ola es perpendicular a la cresta de la ola, en la dirección de las ortogonales.
- 3.- La celeridad de una onda dado el período en un lugar en particular, depende solamente de la profundidad del sitio.
- 4.- Los cambios en la batimetría deben ser graduales.
- 5.- Las olas u ondas serán de cresta larga, período constante, amplitud pequeña y monocromática.
- 6.- Los efectos de las corrientes, viento y reflexión de playas, no son considerados.

## 2.1.3 REFRACCION DEL OLEAJE POR CAMBIOS BATIMETRICOS.

En aguas profundas para un medio de la longitud de la onda la función " $\tanh(2\pi d/L)$ " de la ecuación 2.2 es aproximadamente igual a la unidad y dicha ecuación se reduce a la siguiente expresión:

$$C_0^2 = \frac{gL}{2\pi} \quad (2.3)$$

En esta ecuación, la celeridad  $C_0$  no depende de la profundidad, por lo tanto en regiones profundas para un medio de la longitud de la onda la refracción por batimetría no es significativa.

Cuando la profundidad del agua oscila entre  $1/2$  y  $1/25$  de la longitud de la onda, que corresponde a la zona de aguas bajas o someras, los efectos de la refracción por batimetría pueden ser significativos.

En aguas intermedias, la celeridad de la onda puede ser calculada por la ecuación 2.2; en aguas someras o bajas la  $\tanh(2\pi d/L)$  puede hacerse aproximadamente igual a  $(2\pi d/L)$  y la ecuación 2.2 se reduce a:

$$C^2 = gd$$

ó

$$C = \sqrt{gd} \quad (2.4)$$

Ambas ecuaciones (2.2 y 2.4) muestran la dependencia de la celeridad de la onda en la profundidad. Para una primera aproximación, la energía de la onda por unidad de ancho de cresta puede expresarse como:

$$E = \frac{\rho g H^2 L}{8} \quad (2.5)$$

En aguas profundas, la energía de la onda que se transmite en un plano perpendicular a dos ortogonales contiguas, da como resultado un flujo promedio de la energía del oleaje, pudiéndose expresar este mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2} b_0 \bar{E}_0 C_0 \quad (2.6)$$

Donde:

$b_0$  ; es la distancia de las ortogonales seleccionadas en aguas profundas.

El subíndice "0" (cero) siempre se refiere a las condiciones de aguas profundas.

El flujo de energía o potencia de la energía del oleaje puede igualar a la energía que se transmite entre las dos mismas ortogonales en aguas bajas o someras, resultando en esta zona:

$$\bar{P} = nb \bar{E} C \quad (2.7)$$

Donde:

$b$  ; es la distancia de las ortogonales en aguas reducidas.

Tomando en consideración lo anterior resulta:

$$\frac{1}{2} b_0 \bar{E}_0 C_0 = nb \bar{E} C$$

6

$$\frac{\bar{E}}{\bar{E}_0} = \frac{1}{2} \frac{b_0}{n} \frac{C_0}{C} \quad (2.8)$$

y si hacemos

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{E}{E_0}} \quad (2.9)$$

Y combinando las ecuaciones 2.8 y 2.9 tenemos:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{C_0}{n C}} \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (2.10)$$

El término

$$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{C_0}{n C}}$$

es conocido como COEFICIENTE DE FONDO "ks" ó "H/H<sub>0</sub>". Este coeficiente de fondo es función de la longitud de la onda y de la profundidad del agua.

La ecuación 2.10 facilita la determinación de la altura de la ola en aguas intermedias o en aguas bajas, conociendo la profundidad del agua y la altura de la onda cuando el espaciamento relativo de las ortogonales pueda ser determinado.

La raíz cuadrada de este espaciamento relativo (b<sub>0</sub>/b) expresado en la ecuación 2.10, es conocido como COEFICIENTE DE REFRACCION "kr".

El cambio de dirección de una ortogonal a medida que pasa una batimetría relativamente simple puede ser aproximada por la Ley de Snell con la siguiente expresión:

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{C_2}{C_1} \text{sen } \alpha_1 \quad (2.11)$$

Donde:

$\alpha_1$  ; es el ángulo de la cresta de la onda (el perpendicular a una ortogonal) originado por la batimetría sobre el paso de la onda.

$\alpha_2$  ; es un ángulo similar medido hasta la cresta de la onda ( u ortogonal) pasando sobre el próximo contorno batimétrico.

$C_1$  ; es la celeridad de la onda (ecuación 2.2) en la profundidad del primer contorno.

$C_2$  ; es la celeridad de la onda en la profundidad del segundo contorno o línea batimétrica.

Para está ecuación, una plantilla puede ser construida, la cuál nos muestra el cambio angular en  $\alpha$  , esto ocurre cuando una ortogonal pasa sobre un intervalo de contorno en particular, en donde puede ser trazada una ortogonal afectada por el cambio y dirección de la curva batimétrica anterior.

La refracción puede ser tratada analíticamente en una condición de batimetría paralela mediante el uso directo de la Ley de Snell dada por la siguiente expresión:

$$\text{sen } \alpha = \frac{C}{C_0} \text{sen } \alpha_0 \quad (2.12)$$

Donde:

$\alpha$  ; es el ángulo de la cresta de la onda refractada.

$\alpha_0$  ; es el ángulo de la cresta de la onda incidente en la zona de aguas profundas.

La figura 2.3 muestra la relación entre  $\alpha_0$ , período, profundidad y coeficiente de refracción ( $kr$ ) en forma gráfica.

La figura 2.4 muestra una línea de costa hipotética y los contornos de la batimetría cerca de la playa. Un tren de olas u oleaje con longitud de onda en aguas profundas " $L_0$ ", está acercándose a la costa con una orientación de cresta en aguas profundas, está es paralela en promedio con la localización de la línea de la playa.

Los contornos batimétricos en las profundidades serán dados relativamente por la longitud de la onda en aguas profundas.

La porción de cresta de la onda entra en la región donde  $d/L_0 < 0.5$ , y por lo tanto la longitud de la onda y la celeridad decrecen.

Si construimos líneas ortogonales a la misma distancia a lo largo de las crestas de la onda en aguas profundas y extendemos éstas hacia la costa, estando seguros de que siempre sean normales a la cresta de la onda, podemos observar la distribución del patrón de energía en un punto a lo largo de la cresta de la onda.

Donde las ortogonales convergen la energía se incrementa por unidad de longitud.

La convergencia o divergencia de las ortogonales a lo largo de la costa y los efectos de la línea de playa, originan que la altura de la onda varíe de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{L_0}{2nL}} \sqrt{\frac{B_0}{B}} = \frac{H}{H_0} \sqrt{\frac{B_0}{B}} \quad (2.13)$$

Donde  $H/H_0$  es el coeficiente de la línea de la costa que depende solamente de la profundidad relativa  $d/L$  ó  $d/L_0$  como se muestra en la figura 2.5.

La relación del espaciamiento de las ortogonales  $B_0/B$  para el punto de interés se determina mediante un diagrama de refracción como el que se muestra en la figura 2.4.

Hay que notar en esta figura que la refracción origina una convergencia en las ortogonales sobre la intersección sumergida (punto I), resultando en alturas de ola muy grandes que rompen antes de llegar a la línea de la playa.

Sobre el seno del oleaje (punto 2), se generan alturas de ola inferiores las cuales tienden a romper sobre la línea de la playa.

Para propósitos ingenieriles, los diagramas de refracción deben estar trazados para cubrir los diferentes períodos y direcciones del oleaje esperado en el lugar de estudio.

Un diagrama de refracción puede ser trazado en un plano similar al de la figura 2.4 la cuál nos da el coeficiente de refracción " $K_r$ " en el sitio de interés, para un rango de direcciones y períodos del oleaje. Dada la altura de la onda en aguas profundas, se puede determinar la altura de la onda más crítica esperada en el sitio de estudio.

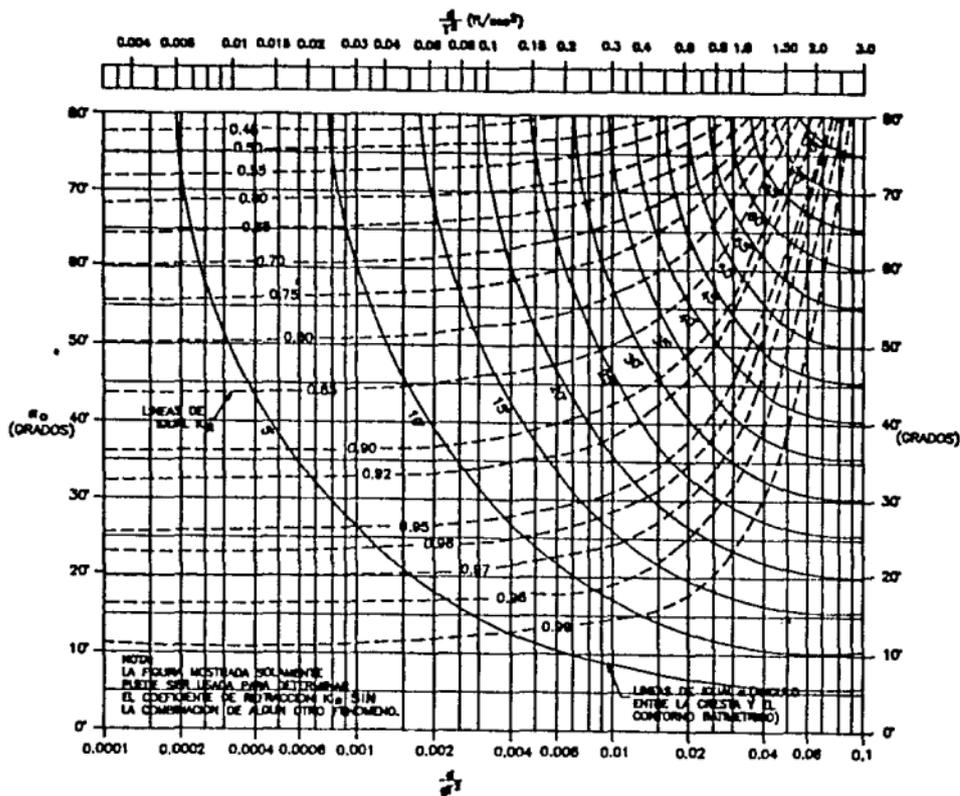


FIG. 2.3 CAMBIOS EN LA DIRECCION Y ALTURA DE LAS OLAS DEBIDO  
A LA REFRACCION EN PENDIENTE RECTA CON BATIMETRIA PARALELA

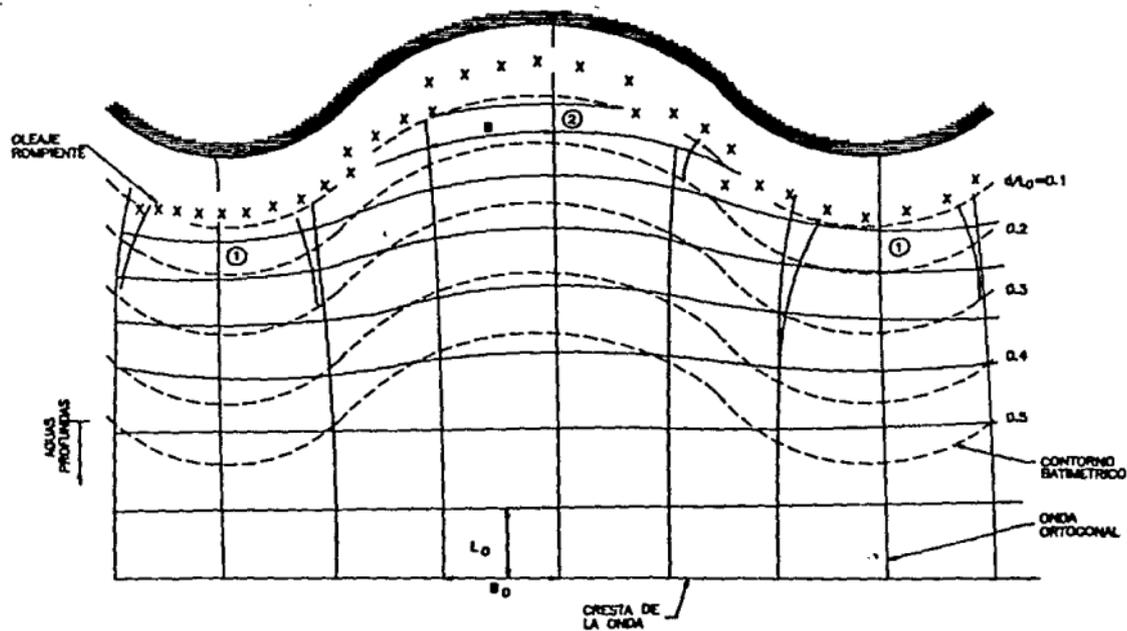


FIG. 2.4 PLANO TÍPICO DE REFRACCION DE OLAJE

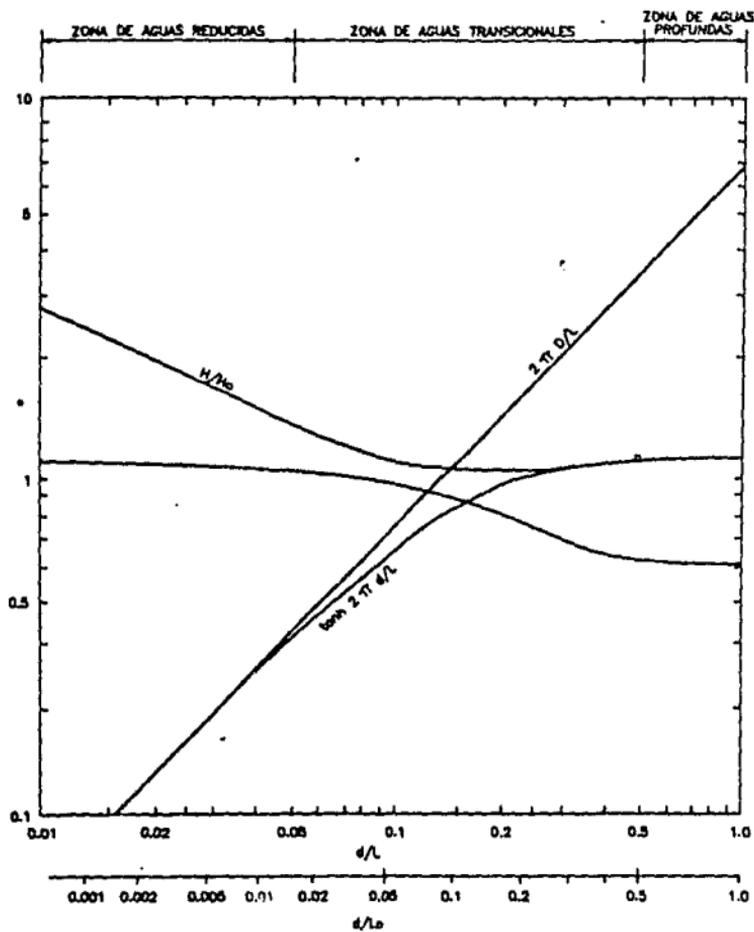


FIG. 2.5 VARIACION DE LOS PARAMETROS DEL OLEAJE COMO UNA FUNCION DE LA PROFUNDIDAD RELATIVA DEL AGUA

## 2.1.4 REFRACCION DEL OLAJE IRREGULAR.

### 2.1.4.1 Coeficiente de refracción del oleaje irregular.

En un área donde la profundidad del agua es mayor que un medio de la longitud del oleaje (en la región de aguas profundas), las ondas que se propagan en esta zona no se ven afectadas por las irregularidades del fondo, pero al entrar el oleaje en la región de aguas reducidas o someras, la dirección de propagación de éste cambia gradualmente y las crestas del oleaje tenderán a adquirir un patrón que corresponde con las profundidades de los contornos del fondo marino.

El coeficiente de refracción para oleaje regular considera un período constante y una sola dirección de propagación. La variación de las alturas del oleaje real debida a la refracción no se puede representar correctamente por un coeficiente de refracción "kr" como para el oleaje regular.

Las ondas reales en el mar están compuestas por un número infinito de componentes con diferentes frecuencias y direcciones, por consiguiente, la variación en las alturas de las ondas en el mar está determinada por la contribución de todas sus componentes, en donde cada componente de onda experimenta el proceso de refracción individualmente.

La ecuación fundamental para estimar el coeficiente de refracción del oleaje irregular está dada por:

$$(kr)_{irr} = \sqrt{\frac{1}{m_{90}} \int_0^{\theta_{max}} \int_0^{\theta_{min}} S(f, \theta) k_z^2(f) k_r^2(f, \theta) d\theta df} \quad 2.14$$

Donde:

$$m_{\text{eff}} = \int_0^{\theta_{\text{max}}} \int_0^{\theta_{\text{min}}} S(f, \theta) k^2(f) d\theta df \quad (2.15)$$

El subíndice "eff", debe entenderse como la condición efectiva y es utilizado para denotar las cantidades relativas del oleaje irregular.

$S(f, \theta)$  denota el espectro direccional del oleaje irregular, el término  $k^2(f)$  es el coeficiente de fondo,  $k(f, \theta)$  es el coeficiente de refracción de una componente de onda ( igual que en el oleaje regular ) con frecuencia " $f$ " y dirección " $\theta$ ".

Un camino sencillo para realizar una estimación aproximada del coeficiente de refracción para oleaje irregular es mediante la siguiente ecuación:

$$(k\tau)_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\Delta E)_{ij} (k\tau)_{ij}^2} \quad (2.16)$$

Para la cuál se supone que el efecto del fondo es despreciable.

El término  $(\Delta E)_{ij}$  en la ecuación anterior denota la energía relativa de las componentes del oleaje con una frecuencia " $i$ " y una dirección " $j$ "; cuando el rango de frecuencias del oleaje irregular se divide en segmentos que van de  $i=1$  a  $M$  y la frecuencia direccional se divide en " $j$ " segmentos que van de  $j=1$  a  $N$ , esto es:

$$(\Delta E)_{ij} = \frac{1}{m_0} \int_{f_i}^{f_i + \Delta f_i} \int_{\theta_j}^{\theta_j + \Delta \theta_j} S(f, \theta) d\theta df \quad (2.17)$$

En la cuál:

$$m_0 = \int_0^{B_{\max}} \int_{\theta_{\min}} S(f, \theta) d\theta df \quad (2.18)$$

En estos cálculos, las frecuencias representativas y direcciones de las componentes del oleaje deben ser seleccionadas. Si el espectro frecuencial se expresa mediante la ecuación de Bretschneider-Mitsuyasu dada por la siguiente expresión:

$$S(f) = 0.257 H_{1/3} T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \text{EXP}[-1.03 (T_{1/3} f)^{-4}] \quad (2.19)$$

Donde:

$H_{1/3}$ ; Es la altura de la ola significativa.

$T_{1/3}$ ; Es el período significativo.

La división del rango de frecuencias se puede realizar igualando la energía de la onda en cada intervalo de frecuencia (hay que notar que la ecuación 2.19 es integrable en forma cerrada con respecto a la frecuencia). Tal división reduce el tiempo de cálculo para el coeficiente de refracción de oleaje irregular. La frecuencia representativa en cada intervalo se determina mejor con el significado del segundo momento espectral de cada intervalo, estimando con un mínimo de error la variación del período del oleaje por la refracción (debido a que el significado del período está

dado en  $\bar{T} = \sqrt{m_0 / m_2}$ ; donde  $m_2 = \int_0^{\infty} f^2 S(f) df$ , incluido dicho significado en el

segundo momento del espectro frecuencial). La ecuación para la frecuencia representativa del segundo momento espectral de cada intervalo es:

$$f_i = \frac{1}{0.9 T_{1/3}} \left( 2.912 M \left[ \Phi \left\{ \sqrt{2L\pi \frac{M}{i-1}} \right\} - \Phi \left\{ \sqrt{2L\pi \frac{M}{i}} \right\} \right] \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

En la cual  $\Phi(t)$  es la función de error definida por:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \text{EXP}^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.21)$$

Las frecuencias representativas de la ecuación 2.20 han sido convertidas para los períodos listados en la tabla 2.1.

TABLA 2.1

PERIODOS REPRESENTATIVOS DE LAS COMPONENTES DE ONDAS  
POR ANALISIS DE REFRACCION.

$T_1 / T_{10}$ .

Número de componentes de ondas.	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	l=6	l=7
3	1.16	0.90	0.54	—	—	—	—
4	1.20	0.98	0.81	0.50	—	—	—
5	1.23	1.04	0.90	0.76	0.47	—	—
7	1.28	1.11	1.00	0.90	0.81	0.69	0.43

Para un cálculo rápido, la frecuencia media ( la frecuencia que bisecta el área del espectro del oleaje en cada intervalo ) a emplear, está dada por la siguiente expresión:

$$f_i = \frac{1}{0.90T_{1/3}} \left\{ \frac{0.675}{L_n \left[ \frac{2M}{2^{i-1}} \right]} \right\}^{1/4} = \frac{1.007}{T_{1/3}} \left\{ L_n \left[ \frac{2M}{2^{i-1}} \right] \right\}^{1/4} \quad (2.22)$$

Cuando las frecuencias representativas se seleccionan por uno de los dos métodos anteriormente señalados, la energía relativa de las componentes de onda pueden ser aproximadas con la siguiente expresión:

$$(\Delta E)_{ij} = \frac{1}{M} D_j \quad (2.23)$$

La cantidad  $D_j$  representa la relación de la energía de la onda en cada dirección a la energía total. Para una división direccional con 16 ó 8 puntos de referencia, valores de  $D_j$  se han preparado en la lista de la tabla 2.2. Si el rango de las componentes direccionales de la onda se limita para valores menores de  $\pm 90^\circ$ , debido a las condiciones topográficas para el sitio de interés, los valores de  $D_j$  pueden ser linealmente incrementados obteniéndose que la sumatoria en el rango de las posibles incidencias del oleaje dará la unidad.

Cuando la división de la frecuencia de un espectro de oleaje es diferente de lo listado en la tabla 2.1, la relación de la energía  $(\Delta E)_{ij}$  se debe calcular mediante integración del espectro frecuencial y por la evaluación de la relación de la energía de la onda en cada intervalo de la frecuencia.

TABLA 2.2

RELACION DE LA ENERGIA DEL OLAJE EN CADA DIRECCION  
PARA LA ENERGIA TOTAL.

Dirección de las componentes de onda.	16 puntos de referencia $S_{m16}$			8 puntos de referencia $S_{m8}$		
	10	25	75	10	25	75
67.5°	0.05	0.02	0.00	—	—	—
45.0°	0.11	0.06	0.02	0.26	0.17	0.06
22.5°	0.21	0.23	0.18	—	—	—
0.0°	0.26	0.38	0.60	0.48	0.66	0.88
-22.5°	0.21	0.23	0.18	—	—	—
-45.0°	0.11	0.06	0.02	0.26	0.17	0.06
-67.5°	0.05	0.02	0.00	—	—	—
Total	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Como un ejemplo explicativo, el coeficiente de refracción para el punto "A" en la figura 2.6 puede ser calculado para el oleaje irregular, por el empleo de tres divisiones en el rango de la frecuencia.

De la tabla 2.1 los períodos de las componentes del oleaje son  $T_1=14$  seg,  $T_2=11$  seg y  $T_3=6.5$  seg para un período significativo  $T_{1/3}=12$  seg.

Las direcciones de las componentes del oleaje son seleccionadas de 16 puntos del rango de  $\pm 90^\circ$  alrededor de la dirección principal SSE. Los oleajes se consideran distantes (swell) con esbeltez grande, tomando el parámetro " $S_{m16}$ " el valor de 25.

La etapa inicial del proceso de estimación es el trazo de los diagramas de refracción para el punto "A" de todas las 21 componentes del oleaje (3 períodos y 7 direcciones). Los resultados se listan en la segunda y cuarta columnas de la tabla 2.3.

El segundo paso es el cálculo de la sumatoria  $\sum_{i=1}^M kr^2$ , los cuales están listados en la quinta columna de la tabla 2.3.

La relación de la energía de la onda  $D_i$ , se lee de la tabla 3.2 para  $S_{max}=25$  y se lista en la sexta columna de la tabla 2.3.

Así los productos de la quinta y sexta columnas divididas por  $M=3$  se escriben en la séptima columna. Sumando los resultados de la séptima columna y obteniendo su raíz cuadrada, se obtiene el coeficiente de refracción del oleaje irregular para el presente ejemplo, el cuál resulta con un valor de  $(kr)_{irr} = 0.94$ .

TABLA 2.3  
ANALISIS DE REFRACCION PARA OLEAJE IRREGULAR.

Dirección de las componentes de onda.	14 s	11 s	6.5 s	$\sum K_r^2$	$D_i$	$\frac{D_i}{M} \sum K_r^2$
E	0.69	0.60	0.65	1.259	0.02	0.008
ESE	0.90	0.77	0.76	1.981	0.06	0.040
SE	1.07	1.11	0.95	3.280	0.23	0.251
SSE	1.11	0.86	0.95	2.874	0.38	0.364
S	0.64	0.78	0.99	1.998	0.23	0.153
SSW	0.84	0.95	1.02	2.649	0.06	0.053
SW	0.72	0.62	0.76	1.480	0.02	0.010

$$\sum \frac{D_i}{M} \sum K_r^2 = 0.879, \quad (K_r)_{irr} = 0.938.$$

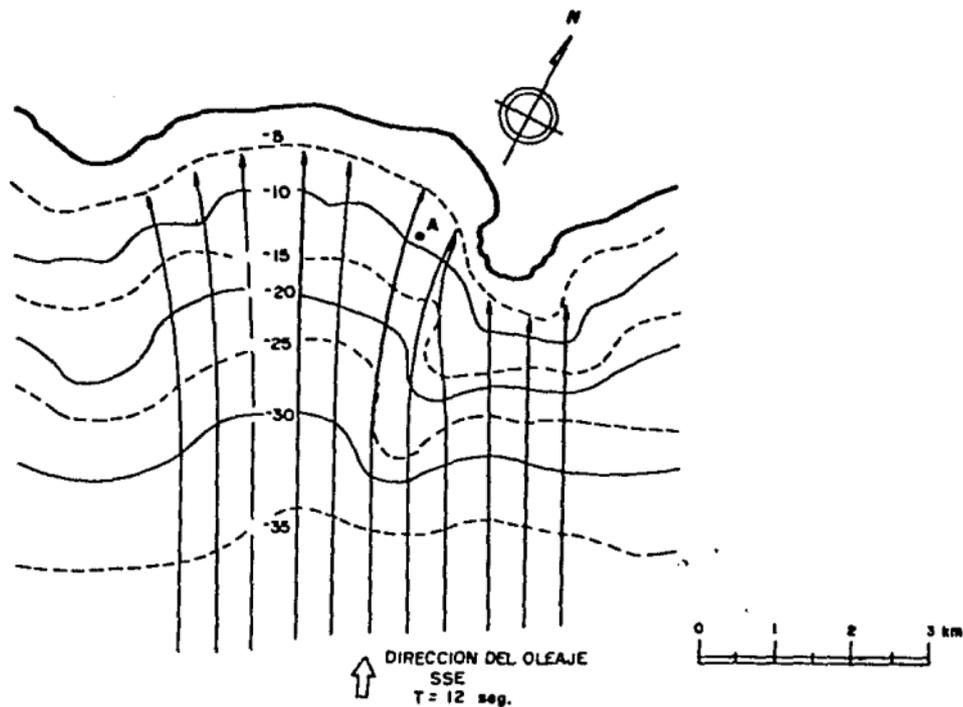


FIG. 2.6 DIAGRAMA DE REFRACCION PARA OLAJE IRREGULAR.

## **CAPITULO III.**

# METODOS ANALITICOS Y GRAFICOS PARA EL CALCULO DE LA REFRACCION DE OLEAJE.

### 3.1 INTRODUCCION.

Conforme el oleaje se traslada de aguas profundas hacia aguas someras, el cambio de profundidad origina una disminución de la celeridad y como consecuencia la longitud de la onda disminuye, aumentando su altura y reorientando la dirección del oleaje conforme a la batimetría del sitio en estudio.

Para el diseño y construcción de las obras marítimas generalmente se necesita conocer las alturas, períodos y direcciones del oleaje; para determinar estos parámetros se requiere tomar en cuenta los efectos de refracción.

Los cambios del oleaje debidos a éste fenómeno se estiman mediante el trazo de los diagramas de refracción en forma gráfica, aunque en la actualidad existen métodos aereofotográficos.

Dentro de los métodos gráficos se pueden mencionar los siguientes:

- 1.- El método de los frentes de ola.
- 2.- El método de las ortogonales.

El primero consiste en obtener las posiciones sucesivas de las crestas conforme el oleaje se desplaza hacia la costa. Una vez determinadas las posiciones sucesivas de la cresta de una ola, se trazan líneas perpendiculares que unen una cresta con otra las cuales reciben el nombre de ortogonales. A la figura resultante en que se muestran las ortogonales y los frentes de ola se le llama DIAGRAMA DE REFRACCIÓN O PLANO DE OLEAJE.

En el método de las ortogonales por el contrario, las ortogonales son dibujadas directamente sobre el plano, las cuales son trazadas independientemente de las restantes.

Para ambos métodos se recomienda trazar cuatro o cinco rayos que abarquen la zona de estudio.

Para cada dirección de oleaje y período de interés se construye un diagrama de refracción; se recomienda que en el sitio de estudio pasen como mínimo dos ortogonales, una a cada lado del lugar de interés.

### **3.2 CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE REFRACCION POR EL MÉTODO DE LOS FRENTES DE OLA.**

Este método se utiliza por su sencillez para trazar los frentes de oleaje, pues se apoya en la construcción de una regleta la cuál relaciona los avances de los frentes de las olas a distintas profundidades, ligadas por la relación  $d/L_0$  como se muestra en la figura 3.1.

Generalmente es posible empezar el trazo de los diagramas de refracción desde frentes de oleaje rectos en una profundidad igual a la mitad de la longitud de la ola en aguas profundas.

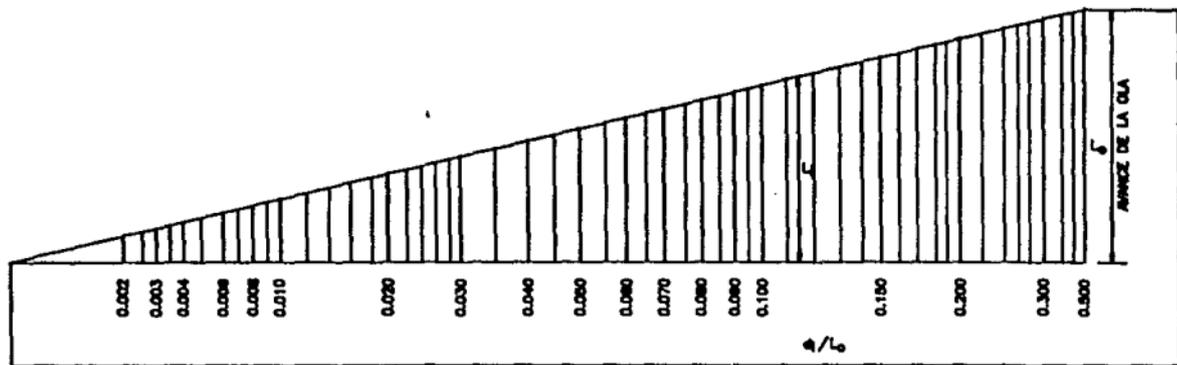


FIG. 3.1 PLANTILLA PARA LA OBTENCION DE LOS DIAGRAMAS  
DE REFRACCION, SEGUN JOHNSON, O'BRIEN Y ISAACS (1948)

La forma inicial de la ola en aguas profundas es una línea recta. El trazo de un diagrama de refracción se realiza moviendo cada punto de la cresta en una dirección perpendicular a la misma. En la figura 3.1 se puede apreciar éste avance " $L_0$ ", dicho avance no debe de ser ni muy grande ni extremadamente pequeño; ya que para el primer caso la influencia del fondo no es muy notoria y en el segundo caso se hace muy laborioso el trazo del plano de oleaje.

En la práctica el tamaño del cateto menor de la regleta " $L_0$ " es del orden de 2.5 a 4.0 cm y el del cateto mayor de 15.0 a 20.0 cm, éstas dimensiones son las recomendables para manipular la regleta y realizar las lecturas sin dificultad.

La regleta que se va a utilizar para el trazo del diagrama de refracción debe de ser de material transparente. El cateto mayor contiene toda la variación de la relación  $d/L_0$  desde la zona de aguas bajas hasta el límite de aguas profundas, es decir, desde  $0.0 \leq d/L_0 \leq 0.5$ .

Para poder construir un diagrama de refracción debemos de contar con los siguientes elementos:

- a) Batimetría del sitio de estudio.
- b) Direcciones y períodos del oleaje del sitio de estudio.
- c) Regleta para el trazo del plano de oleaje.

Una vez que se cuenta con esta información se procede al trazo del plano de oleaje. La metodología a seguir es la siguiente:

- 1.- Determinar el límite de aguas profundas  $d/L_0 = 0.5$
- 2.- Determinar las relaciones  $d/L_0$  para facilitar el trazo del diagrama y anotarla en cada batimétrica.
- 3.- Trazar el frente de ola en el límite de aguas profundas o detrás de éste en la dirección a estudiar.

4.- Dividir el frente de ola en el límite de aguas profundas en segmentos de tamaño " $b_0$ ".

5.- Colocar la regla por el lado de los valores de  $d/L_0$  haciendo coincidir éste cateto tangencialmente con el último frente de ola.

6.- Se hace coincidir a la batimétrica más cercana con su correspondiente  $d/L_0$  en la línea punteada de la regla, determinando el avance correspondiente sobre la hipotenusa de la regla.

7.- Una vez dibujados los frentes de ola se trazan líneas perpendiculares a estos determinando una malla como se muestra en la figura 3.2

Los canales de energía definirán la acumulación o dispersión de ésta, pudiéndose determinar la altura del oleaje con la siguiente expresión:

$$H_i = H_0 \frac{b_0}{b_i} k_s \quad (3.1)$$

Donde:

$H_i$  ; Es la altura de la ola en el sitio de estudio.

$H_0$  ; Es la altura de la ola en aguas profundas.

$b_0$  ; Es el ancho del canal de energía en aguas profundas.

$b_i$  ; Es el ancho del canal de energía en el sitio de estudio.

$k_s$  ; Es el coeficiente de fondo.

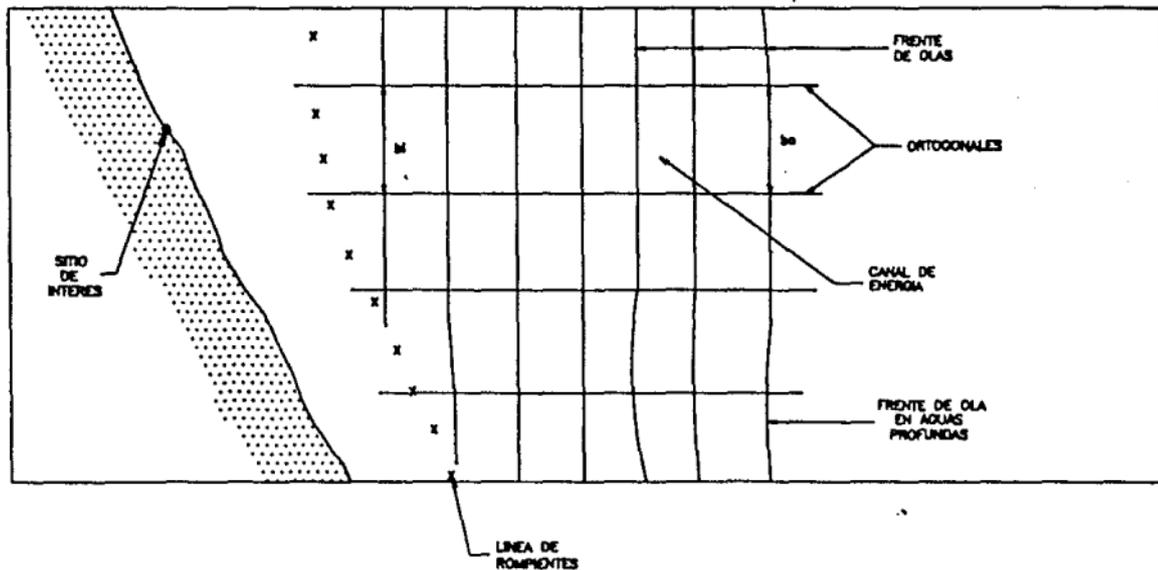


FIG. 3.2 COMPONENTES DE UN DIAGRAMA DE REFRACCION

### 3.3 METODO DE LAS ORTOGONALES O RAYOS DE OLA.

Como sabemos, las cartas batimétricas muestran información de las profundidades del sitio en estudio; en la cuál podemos dibujar los contornos batimétricos o bien trazarlos en un papel sobrepuesto para varios intervalos de profundidad. Dichos intervalos serán escogidos dependiendo del grado de exactitud que se desee.

En el trazo de las líneas batimétricas, las pequeñas irregularidades pueden no tomarse en cuenta, puesto que éstas son comparativamente pequeñas con respecto a la longitud de la onda, por lo cuál la onda no se ve afectada por tales irregularidades.

El rango de los períodos y direcciones de onda a ser estudiados, pueden ser determinados por estudios precedentes de cartas históricas de tiempo o por algún otro registro relacionado con el período y dirección de la onda.

También en éste método como en el anterior debemos de construir para cada período y dirección de oleaje seleccionado un diagrama de refracción por separado.

Los valores de  $C_1/C_2$  para cada intervalo de las líneas batimétricas pueden ser calculados a la mitad de dichos intervalos.

La metodología a seguir en el cálculo de la relación  $C_1/C_2$  está ilustrado en la tabla 3.1.

Para la construcción de las ortogonales desde aguas profundas hasta aguas reducidas o someras, debe de determinarse en primer lugar la aproximación de la dirección de la onda en aguas profundas. En está zona, el frente de onda (cresta) es dibujado como una línea recta perpendicular a está dirección de la onda, y el espaciamiento de las ortogonales será convenientemente dibujado perpendicular a éste frente de onda y paralelo a la dirección seleccionada de la onda.

Un espaciamiento más estrecho de las ortogonales da resultados más detallados que un espaciamiento ancho entre ellas.

TABLA 3.1

EJEMPLO DEL CÁLCULO DE LOS VALORES DE  $C_1/C_2$  PARA EL ANÁLISIS  
DE REFRACCION POR EL MÉTODO DE LAS ORTOGONALES

T = 10 segundos.				
$L_0$ (en m.) = 1.561 T <sup>2</sup>				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
d	$\frac{d}{L_0}$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\frac{C_1}{C_2}$	$\frac{C_2}{C_1}$
1.829	0.0117	0.268	1.40	0.72
3.658	0.0233	0.374	1.21	0.83
5.486	0.0352	0.453	1.14	0.88
7.315	0.0469	0.516		

Obtención de las columnas.

- columna 1.

Está es dada por los contornos correspondientes de las profundidades de la zona de estudio de las cartas batimétricas.

- Columna 2.

Es el resultado el cociente de la columna 1 por la correspondiente longitud de la onda en aguas profundas " $L_0$ " para un período considerado.

- Columna 3.

Es el valor de  $\tanh \frac{2\pi d}{L}$  para el correspondiente valor de la profundidad relativa dado en la columna 2.

- Columna 4.

Es el cociente de los términos sucesivos de la columna 3.

- Columna 5.

Es el recíproco de la columna 4.

Hay dos formas o procedimientos que pueden emplearse para el trazo de los planos de oleaje, dependiendo de si el ángulo de incidencia es menor de  $80^\circ$  o igual o mayor de  $80^\circ$ .

#### A) PROCEDIMIENTO PARA $\beta < 80^\circ$

Sea  $\beta_i$  la dirección del rayo frente a la batimétrica  $d_i$ ; si se quiere conocer la nueva dirección del rayo de la ola para la siguiente batimétrica  $d_{i+1}$  (ver figura 3.3), la metodología es la siguiente:

- 1.- Se dibuja la profundidad media entre líneas batimétricas.
- 2.- Se extiende la ortogonal de la ola incidente, más allá del contorno de la profundidad media. El cruce con esta línea es el punto  $P'$ .
- 3.- En el punto del cruce del contorno o profundidad media con la ortogonal de la ola incidente  $P'$ , se dibuja la tangente S-T.

4.- La plantilla mostrada en la figura 3.4 se coloca coincidiendo la ortogonal incidente con la línea  $MM'$  de la plantilla, y el punto ortogonal incidente  $P$  de la misma, sobre  $P'$ .

5.- Se gira la plantilla haciendo centro en el punto  $R$  hasta que la tangente  $S-T$  interseque la recta  $P-R$  en el valor de  $C_j/C_{j+1}$  correspondientes a las líneas batimétricas  $d_j$  y  $d_{j+1}$ .

6.- La línea ortogonal marcada en la plantilla,  $MM'$ , muestra la nueva dirección de la ortogonal pero su localización necesita de una ligera corrección, desplazandola paralelamente a  $\overline{PB}$  de tal manera que  $\overline{AP} = \overline{PB}$

7.-El procedimiento se repite hasta llegar a la línea de la costa.

#### B) PROCEDIMIENTO PARA $\beta \geq 80^\circ$ .

En el caso de ortogonales con ángulo de incidencia  $\beta \geq 80^\circ$  , no es posible utilizar el método anterior; ya que la batimétrica media y el rayo del oleaje tienden a hacerse paralelos, por lo que el punto en el que se presenta el cambio de dirección tiende a estar en el infinito.

Para este último caso (  $\beta \geq 80^\circ$  ) la metodología a seguir es la siguiente:

1.- Como se ilustra en la figura 3.5, el espacio comprendido entre líneas batimétricas adyacentes se discretiza formando una malla. El intervalo " $R$ " se define arbitrariamente y se recomienda que en lo posible sea un múltiplo de " $J$ " (donde está " $J$ " es la distancia promedio entre las dos batimétricas en el intervalo considerado).

2.- Con la relación  $C_j/C_{j+1}$ , previamente calculada, y la relación  $R/J$ , el ángulo de deflexión de la ortogonal incidente ( $\Delta\beta$ ) se obtiene en la figura 3.4b.

3.- La ortogonal incidente se prolonga al centro del elemento discretizado y la nueva ortogonal se dibuja tomando una deflexión  $\Delta\beta$  (ver figura 3.5).

4.- El proceso se continua si se cumple con las siguientes condiciones:

a) Si  $\beta < 80^\circ$  se continua como en el primer caso.

b) Si  $\beta \geq 80^\circ$  se sigue utilizando éste procedimiento.

De esta manera se obtiene una línea quebrada que posteriormente debe de ser suavizada.

Los métodos gráficos de refracción tratan de reproducir los cambios que experimenta el oleaje en su aproximación a la costa. Para su concepción se considera al oleaje monocromático, es decir, que las características de todas las olas son iguales.

En realidad, solo el oleaje tipo SWELL presenta algunas crestas de igual longitud. El de tipo SEA por el contrario, tiene crestas cortas, desiguales y sometidas a la acción directa del viento; por lo que su reproducción por medio de los distintos métodos de refracción es muy poco efectiva.

Otra limitación importante es que éstos métodos suponen que la energía entre las ortogonales se mantiene constante. De esta forma se puede llegar al punto conflictivo de los CAUSTICOS.

La zona cóustica es el punto del diagrama de refracción donde las líneas normales al frente o las ortogonales se cruzan. Teóricamente, en éste tipo de puntos la altura de la ola se vuelve infinita, ya que no existe separación entre las ortogonales.

$$H = H_0 \sqrt{\frac{b_0}{b}}$$

$$\text{si } b_{\text{ortogonales}} = 0 \rightarrow H = \infty$$

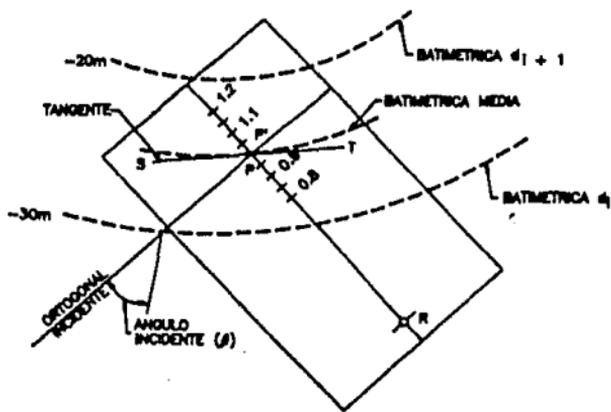
Esto en realidad no se presenta. La explicación reside en el hecho de que entre las ortogonales existe una sesión de energía que se incrementa con la diferencia de altura de onda entre ellas.

El método de los frentes de ola presenta las siguientes ventajas, en comparación con otros métodos:

- Ofrece una mejor idea de las condiciones de refracción al presentarse el frente de la ola en sucesivas posiciones.
- Permite la reproducción del fenómeno de difracción mediante la expansión lateral o bilateral y por lo tanto es apto para problemas de agitación.
- Permite el trazo de normales a partir de un frente de oleaje cualquiera con objeto de conseguir mayor precisión en una zona determinada.

**Como inconvenientes se pueden citar:**

- **Ejecución más lenta y complicada.**
  
- **Imposibilidad de ejecución desde profundidades reducidas hacia mar adentro.**



$\beta < 90^\circ$

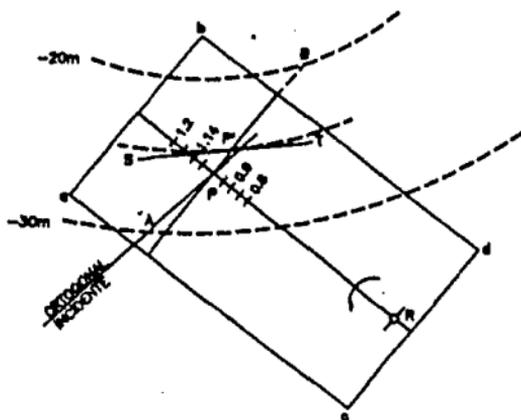
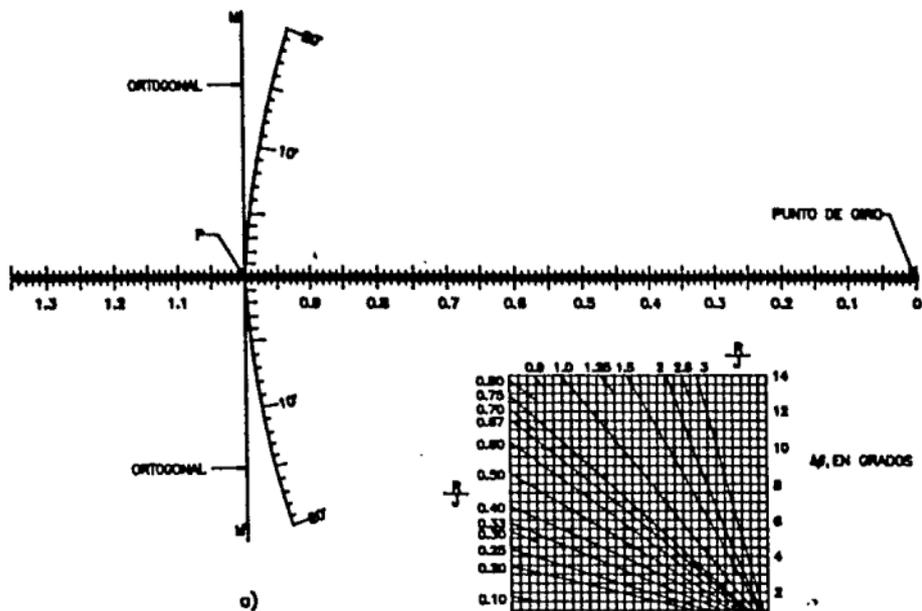


FIG. 3.3 USO DE LA PLANTILIA PARA DIBUJAR  
LOS DIAGRAMAS DE REFRACCION



NOTAR: LA FIGURA DEBERIA SER DIBUJADA EN UNA MICA (LAMINA TRANSPARENTE)

CUANDO  $C_2/C_1 < 1$ , LA ONDA AVANZA HACIA AGUAS CON MENOR PROFUNDIDAD; SI  $C_2/C_1 > 1$  AVANZA HACIA AGUAS CON MAYOR PROFUNDIDAD.

FIG. 3.4 PLANTILLA PARA DIBUJAR LOS DIAGRAMAS DE REFRACCION

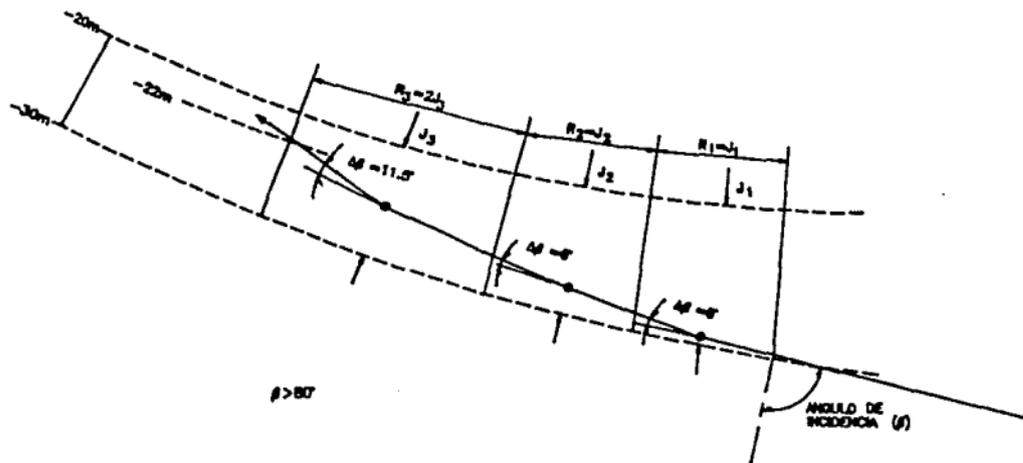


FIG. 3.5 DIAGRAMA DE REFRACCION EMPLEANDO EL METODO DE RAYOS

### 3.4 MÉTODOS ANALÍTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA REFRACCIÓN DEL OLEAJE.

#### 3.4.1. Método de las ortogonales.

Existen varios métodos para construir los diagramas de refracción, y así obtener los cambios de dirección y las alturas de las olas en las diferentes zonas y profundidades, pero hemos elegido el Método de las ortogonales o rayos de oleaje para desarrollarlo analíticamente.

Para calcular los cambios de dirección, se consideran a las curvas batimétricas como líneas formadas por segmentos de recta realizando el siguiente desarrollo.

#### 1.- PARA $\beta < 80^\circ$ .

1.- Conocer las condiciones iniciales del rayo de oleaje (ver figura 3.6), que son:

$(X, Y)$  : Coordenadas de arranque de la ortogonal.

$S$  : Pendiente de incidencia de la ortogonal.

2.- Determinar las coordenadas extremas y las celeridades del intervalo en donde cruzará la ortogonal a las dos líneas batimétricas, y las pendientes de éstas.

$C_1$  : Celeridad de la primer batimétrica.

$C_2$  : Celeridad de la segunda batimétrica.

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  : Coordenadas extremas de la primer batimétrica.

$(X_3, Y_3), (X_4, Y_4)$  : Coordenadas extremas de la segunda batimétrica.

$M_1 = (Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)$  : Pendiente de la primer batimétrica.

$M_2 = (Y_4 - Y_3) / (X_4 - X_3)$  : Pendiente de la segunda batimétrica.

3.- Determinar las coordenadas y la pendiente de la batimétrica media.

$$X_3 = (X_1 + X_4)/2$$

$$Y_3 = (Y_1 + Y_4)/2$$

$$X_6 = (X_2 + X_5)/2$$

$$Y_6 = (Y_2 + Y_5)/2$$

$$S_1 = (Y_6 - Y_3)/(X_6 - X_3)$$

4.- Determinar los puntos de intersección A y B con la primer batimétrica y la batimétrica media, respectivamente.

De la ecuación de la recta.

$$A_2 - Y = S(A_1 - X)$$

$$A_2 = S(A_1 - X) + Y \dots \dots \dots (1)$$

$$A_2 - Y_1 = M_1 (A_1 - X_1) \dots \dots \dots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) tenemos:

$$S(A_1 - X) + Y - Y_1 = M_1(A_1 - X_1)$$

$$SA_1 - SX + Y - Y_1 = M_1A_1 - M_1X_1$$

$$A_1 = (SX - Y - M_1 X_1 + Y_1) / (S - M_1) \dots \dots \dots (3)$$

$$A_2 = S (A_1 - X) + Y \dots \dots \dots (2)$$

Similarmente:

$$B_1 = (S_1X_3 - Y_3 - SX + Y) / (S_1 - S) \dots \dots \dots (4)$$

$$B_2 = S (B_1 - X) + Y \dots \dots \dots (5)$$

5.- Determinar las coordenadas del punto C, situado a una distancia arbitraria ( $L_1$ ), sabiendo que la recta  $\overline{BC}$  (distancia  $L_1$ ), representará el frente de las olas y será perpendicular a la ortogonal entrante.

$$S_2 = -1/S \dots\dots\dots \text{pendiente de } \overline{BC} .$$

$$C_2 = B_2 + 10 \quad \text{si } S < 0$$

ordenada de C

$$C_2 = B_2 - 10 \quad \text{si } S > 0$$

De la ecuación de la recta:

$$C_2 - B_2 = S_2 (C_1 - B_1)$$

$$C_1 = B_1 + (C_2 - B_2)/S_2 \dots\dots\dots \text{abscisa de C.}$$

6.- Determinar el ángulo de incidencia " $H_1$ " entre la batimétrica media y el frente de oleaje.

$$\text{TANH } H_1 = \frac{(S_1 - S_2)}{(1 + S_2 S_1)}$$

$$H_1 = \arctan \left[ \frac{(S_1 - S_2)}{(1 + S_2 S_1)} \right]$$

7.- Determinar el radio de giro  $R_1$  para encontrar el punto E ( $E_1$ ,  $E_2$ ) y además determinar la pendiente ( $S_3$ ) de la recta  $\overline{EC}$  (nuevo frente de oleaje) y el ángulo entre  $\overline{EC}$  y la batimétrica media ( $H_2$ ).

$$R_1 = L_1 \frac{C_{(1)}}{C_{(2)}}$$

$$H_2 = \arctan \frac{L_1}{(L_2 + L_3)}$$

donde:  $L_1$  = longitud ( $\overline{DC}$ )

$(L_2 + L_3)$  = longitud ( $\overline{DE}$ )

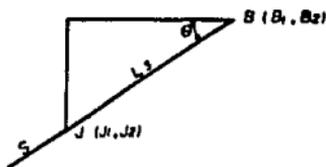
$$S_3 = \frac{(E_2 - C_2)}{(E_1 - C_1)}$$

8.- Determinar la pendiente ( $S_4$ ) de la ortogonal refractada, (perpendicular al nuevo frente de olas  $\overline{EC}$  y las coordenadas del punto de arranque de la nueva ortogonal.

$$S_4 = -\frac{1}{S_3}$$

$$\text{TAN} \left\{ \frac{\Delta H}{2} \right\} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{BC}} = \frac{L_3}{L_1}$$

$$L_3 = L_1 \left\{ \text{TAN} \left[ \frac{\Delta H}{2} \right] \right\}$$



De la figura anterior tenemos:

$$\text{TANG} = S$$

$$\theta = \text{ARCTAN}(S)$$

$$\text{COS} \theta = \frac{(J_2 - B_2)}{L_2}$$

$$J_2 = B_2 + L_2 \text{COS}(\text{ARCTAN}(S))$$

$$\text{Si } S > 0$$

$$J_2 = B_2 - L_2 \text{COS}(\text{ARCTAN}(S))$$

$$\text{Si } S < 0$$

$$J_1 = \frac{(J_2 - B_2)}{S + B_1}$$

9.- Por último determinar el punto de intersección  $N(N_1, N_2)$  entre la ortogonal refractada y la segunda batimétrica.

$$N_1 = \frac{[M_2 + 3 - Y_3 + J_2 - S_4 J_1]}{(M_2 - S_4)}$$

$$N_2 = M_2(N_1 - X_2) + Y_3$$

10.- El proceso se repite para el siguiente par de batimétricas, teniendo como datos iniciales:

$$X = J_1$$

$$Y = J_2$$

$$S = S_4$$

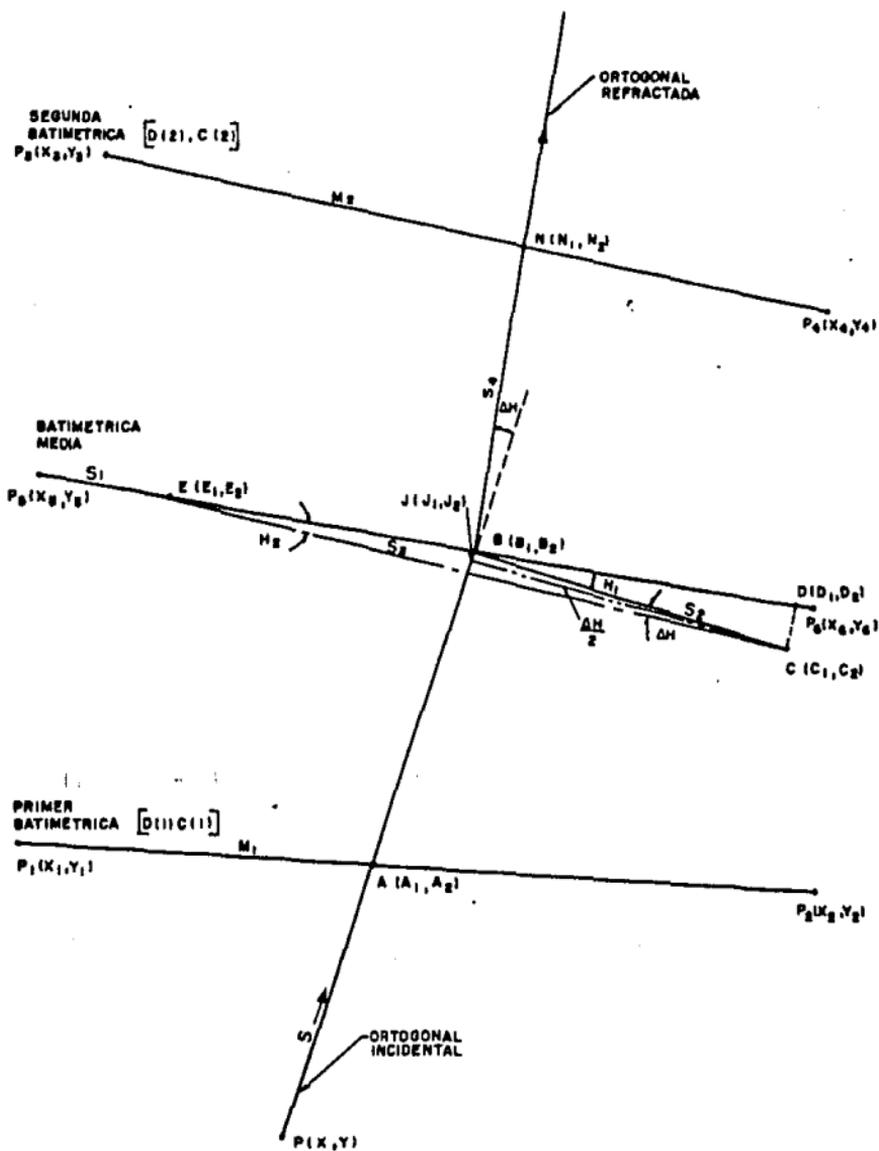


FIG. 3.6 METODO DE LAS ORTOGONALES PARA  $\beta < 80^\circ$

II.- Para  $\beta \geq 80^\circ$  .

1.- Conocer las condiciones iniciales de la ortogonal incidente (ver fig. 3.8):

(x,y) : Coordenadas del inicio de la ortogonal.

S : Pendiente de la ortogonal.

2.- Determinar las celeridades de las batimétricas y las coordenadas extremas de ellas: C(2), C(1), X<sub>1</sub>, Y<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, Y<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>, Y<sub>3</sub>, X<sub>4</sub>, Y<sub>4</sub>, y además:

$$M_1 = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)}$$

$$M_2 = \frac{(Y_4 - Y_3)}{(X_4 - X_3)}$$

3.- Determinar las longitudes de los intervalos de (R) y la distancia promedio entre batimétricas (J) en cada uno de ellos.

4.- Determinar el punto de intersección de la primer batimétrica (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>) y determinar el punto de intersección con la vertical media (J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>).

5.- Conociendo (R/J) y [ C(2)/C(1) ] determinar  $\Delta H = H_2$  .

Haciendo un análisis de la función gráfica dada por el Shore Protection Manual (ver fig 3.4b) se observa:

- i).-  $\Delta H$  se mide en el eje de las ordenadas.
- ii).-  $C_2/C_1$  se mide en el eje de las abscisas.
- iii).- R/J son valores para diferentes pendientes en la gráfica.

- iv).- El punto (1.0,0) es común a todas las rectas.
- v).- Se puede encontrar una ecuación que determine la pendiente a utilizar en función de la relación (R/J).
- vi).- Aplicando en la ecuación normal de la recta la pendiente encontrada podemos conocer  $\Delta H=H_2$

De la ecuación normal de la recta:

$$Y_2 - Y_1 = M(X_2 - X_1)$$

$$\Delta \alpha_2 - \Delta \alpha_1 = M \left[ \frac{R}{J} \right] \left\{ \left[ \frac{C_2}{C_1} \right]_2 - \left[ \frac{C_2}{C_1} \right]_1 \right\}$$

como  $P_1 (1,0)$

$$\Delta \alpha_2 - \Delta \alpha_1 = M \left[ \frac{R}{J} \right] \left\{ \left[ \frac{C_2}{C_1} \right] - 1 \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$M_{R/J} = \frac{\Delta \alpha}{\left[ \frac{C_2}{C_1} - 1 \right]} \dots \dots \dots (2)$$

Con la ecuación (2) podemos conocer los valores de las pendientes para las diferentes relaciones de (R/J), conociendo  $(\Delta \beta, C_2/C_1)$ , lo cuál es dado en la siguiente tabla.

TABLA 3.2  
VALORES DE LAS PENDIENTES PARA DIFERENTES  
RELACIONES DE R/J.

No. de Recta.	R/J	$\Delta\beta$	$C_2/C_1$	$M_{(u)}$
1	3.00	12.00	0.930	-171.42
2	2.50	14.00	0.900	-140.00
3	2.00	8.60	0.930	-114.29
4	1.50	9.50	0.890	- 86.36
5	1.25	14.00	0.805	- 71.79
6	1.00	12.50	0.780	- 56.82
7	0.90	14.00	0.728	- 51.47
8	0.80	13.50	0.705	- 45.76
9	0.75	12.50	0.708	- 42.81
10	0.70	12.00	0.700	- 40.00
11	0.67	11.40	0.700	- 38.00
12	0.60	10.20	0.700	- 34.00
13	0.50	8.60	0.700	- 28.67
14	0.40	6.80	0.700	- 22.67
15	0.33	5.70	0.700	- 19.00
16	0.30	5.20	0.700	- 17.33
17	0.25	4.35	0.700	- 14.50
18	0.20	3.45	0.700	- 11.50
19	0.10	1.75	0.700	- 5.83

Haciendo una gráfica de los valores de R/J y  $M_{(u)}$  tenemos:

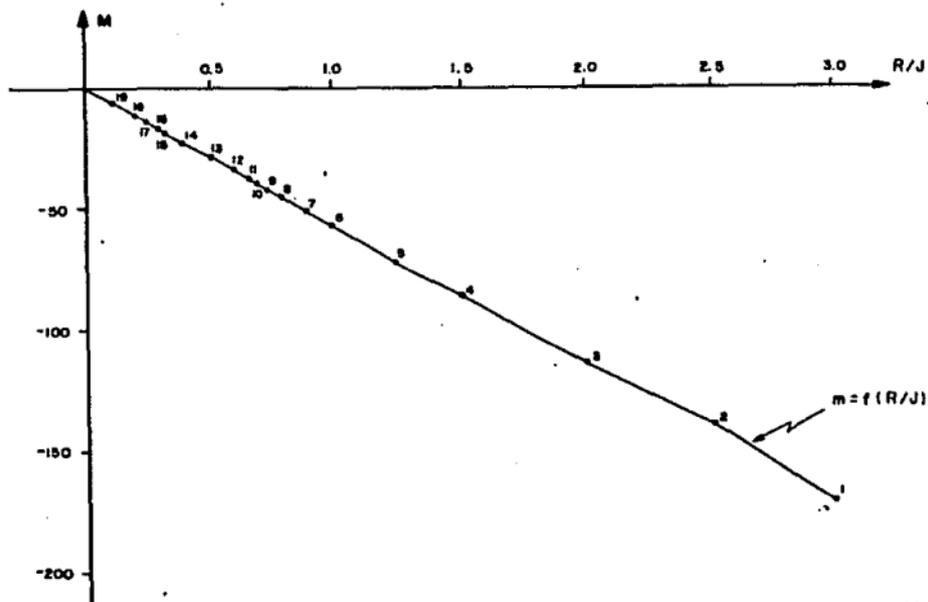


FIG. 3.7 GRAFICA DE R/J CONTRA  $M_{(R/J)}$

Sensiblemente, la gráfica obtenida es una recta, por lo que utilizando el método de los mínimos cuadrados encontraremos una ecuación que represente la gráfica obtenida.

\* Método de los mínimos cuadrados.

Si tenemos que:

$$m = a_0 + a_1(R/J)$$

$$na_0 + a_1 \sum(R/J) = \sum S$$

$$a_0 \sum(R/J) + a_1 \sum(R/J)^2 = \sum(R/J) \cdot S$$

A continuación se tabulan los parámetros  $n$ ,  $R/J$ ,  $S$ ,  $(R/J)^2$ , y  $(R/J) \cdot S$ ; para poder resolver el sistema de ecuaciones.

n	R/J	S	(R/J) <sup>2</sup>	(R/J).S
1	3.00	- 171.42	9.0000	- 514.2600
2	2.50	- 140.00	6.2500	- 350.0000
3	2.00	- 114.29	4.0000	- 228.5800
4	1.50	- 86.36	2.2500	- 129.5400
5	1.25	- 71.79	1.5625	- 89.7400
6	1.00	- 56.82	1.0000	- 56.8200
7	0.90	- 51.47	0.8100	- 46.3230
8	0.80	- 45.76	0.6400	- 36.6080
9	0.75	- 42.81	0.5625	- 32.1075
10	0.70	- 40.00	0.4900	- 28.0000
11	0.67	- 38.00	0.4489	- 25.4600
12	0.60	- 34.00	0.3600	- 20.4000
13	0.50	- 28.67	0.2500	- 14.3350
14	0.40	- 22.67	0.1600	- 9.0680
15	0.33	- 19.00	0.1089	- 6.2700
16	0.30	- 17.33	0.0900	- 5.1990
17	0.25	- 14.50	0.0625	- 3.6250
18	0.20	- 11.50	0.0400	- 2.3000
19	0.10	- 5.83	0.0100	- 0.5830
Σ	17.75	-1012.22	28.0953	-1600.2185

Las ecuaciones a resolver son:

$$19a_0 + 17.75a_1 = -1012.22 \quad (1)$$

$$17.75a_0 + 28.0953a_1 = -1600.2185 \quad (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por 17.75 y la ecuación (2) por 19 tenemos:

$$337.25 a_0 + 315.0625 a_1 = -17966.905$$

$$-337.25 a_0 - 533.8107 a_1 = 30404.151$$

---


$$- 218.7482 a_1 = 12437.246$$

$$\therefore a_1 = -56.86$$

$$a_0 = 0.159$$

Entonces:

$$m = 0.159 - 56.86 (R/J) \quad (3)$$

$$\therefore \Delta\beta = m [ (C_1/C_2) - 1 ]$$

$$\Delta\beta = [0.159 - 56.86 (R/J)] [ (C_1/C_2) - 1 ] \quad (4)$$

Con las ecuaciones (3) y (4), quedan solucionados los incisos v) y vi) respectivamente.

6.- Conociendo el valor de  $\Delta\beta = H_1$ , podemos conocer la pendiente de la ortogonal refractada utilizando la ecuación para determinar el ángulo entre dos rectas.

$$S_4 = [ S - \text{TAN} (H_1) ] / [ 1 - S \text{TAN} (H_1) ]$$

7.- El procedimiento se repite, sabiendo que ahora:

$$X = J_1$$

$$Y = J_2$$

$$S = S_4$$

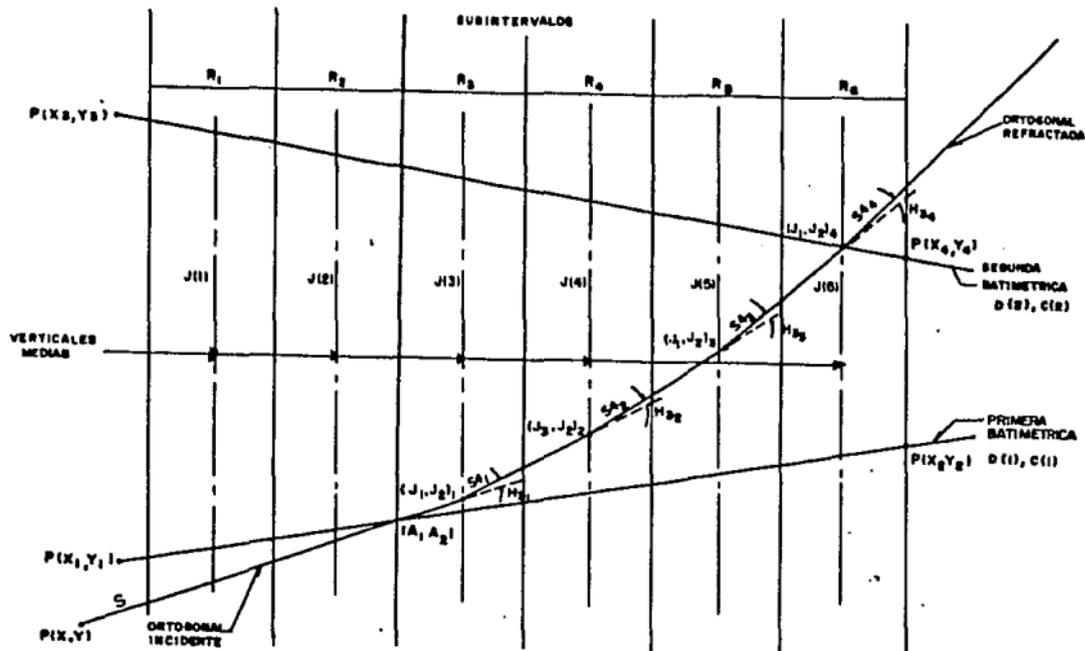


FIG. 3.8 METODO DE LAS ORTOGONALES PARA  $\beta > 80^\circ$

### 3.4.2 Ley de Snell.

Consideremos el caso en que el oleaje incide con un ángulo  $\beta_1$  a la línea límite entre  $h_1$  y  $h_2$  de profundidad, como se muestra en la fig. 3.9.

Cuando la línea de dirección de oleaje II llega al punto B sobre la línea límite, la línea I está en el punto A, por esto el frente de oleaje se expresa por la línea AB. En la profundidad  $h_2$ , la celeridad del oleaje es más lenta que en la profundidad  $h_1$  porque  $h_1 < h_2$ .

Por lo tanto, mientras que el oleaje marcha de A a A' sobre la línea I, él marcha sólo de B a B' sobre la línea II; es por esto que el frente de oleaje se expresa por la línea A'B'; o sea que el oleaje está refractado por la línea límite entre  $h_1$  y  $h_2$  de profundidad. El ángulo de refracción  $\beta_2$  está dado por la Ley de Snell como sigue:

$$\frac{\text{sen}\beta_2}{\text{sen}\beta_1} = \frac{C_2}{C_1} \quad (3.2)$$

Para el caso en que las líneas batimétricas son rectas y paralelas, tal y como se muestra en la fig. 3.10, el ángulo de refracción estará dado utilizando la ec. (3.2) desde aguas profundas, por la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}\beta'}{\text{sen}\beta_0} \cdot \frac{\text{sen}\beta''}{\text{sen}\beta'} \cdot \frac{\text{sen}\beta'''}{\text{sen}\beta''} \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\beta'''} = \frac{C'}{C_0} \cdot \frac{C''}{C'} \cdot \frac{C'''}{C''} \cdot \frac{C}{C'''}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\beta_0} = \frac{C}{C_0}$$

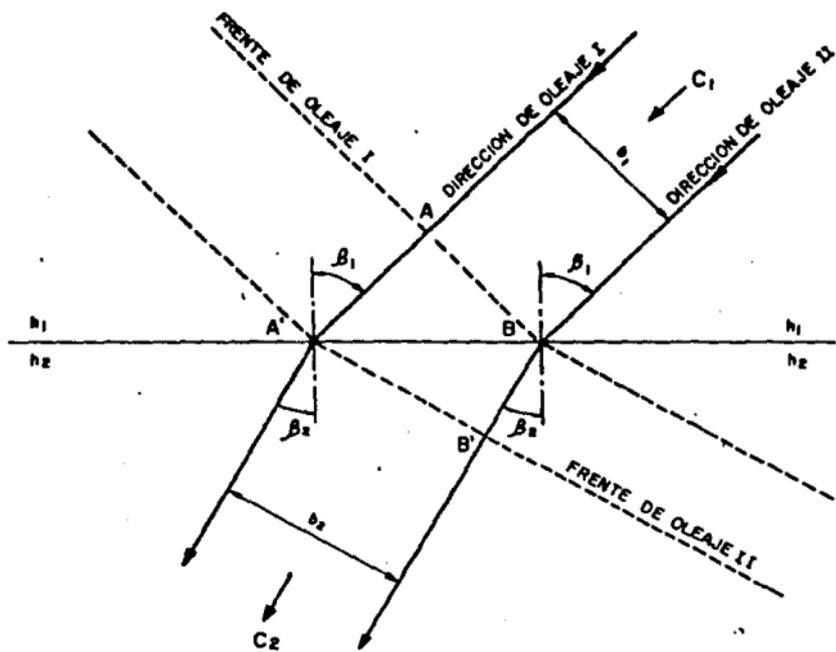


FIG. 3.9 REFRACCION DEL OLAJE

Despejando al  $\text{sen}\beta$  de la expresión anterior tenemos:

$$\text{sen}\beta = \frac{C}{C_0} \text{sen}\beta_0 \quad (3.3)$$

Por otra parte, el coeficiente de refracción está dado por:

$$\begin{aligned} kr &= \left(\frac{b_0}{b}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cos\beta_0}{\cos\beta}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \text{sen}^2\beta_0}{1 - \text{sen}^2\beta}\right)^{1/4} = \left(\frac{1 - \text{sen}^2\beta}{1 - \text{sen}^2\beta_0}\right)^{-1/4} \\ Kr &= \left(\frac{1 - \text{sen}^2\beta_0 + \text{sen}\beta_0 - \text{sen}^2\beta}{1 - \text{sen}^2\beta_0}\right)^{-1/4} \\ kr &= \left(1 + \frac{1}{1 - \text{sen}\beta_0^2} [\text{sen}\beta_0^2 - \text{sen}^2\beta]\right)^{-1/4} \\ Kr &= \left(1 + \frac{\text{sen}^2\beta_0 - \text{sen}^2\beta}{\cos\beta_0^2}\right)^{-1/4} \\ Kr &= \left(1 + \left\{1 - \left[\frac{C}{C_0}\right]^2\right\} \tan^2\beta_0\right)^{-1/4} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde:

$\beta_0$ ; es el ángulo del oleaje en aguas profundas.

$b_0$ ; es la distancia entre las ortogonales en aguas profundas.

$b$ ; es la distancia entre las ortogonales en aguas reducidas.

En la fig. 2.3 presentada en el capítulo II, se muestra un diagrama que permite determinar el coeficiente de refracción dado por las ecuaciones (3.3) y (3.4).

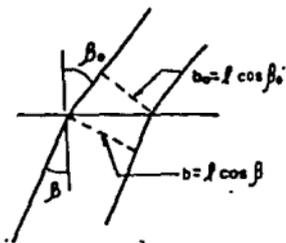
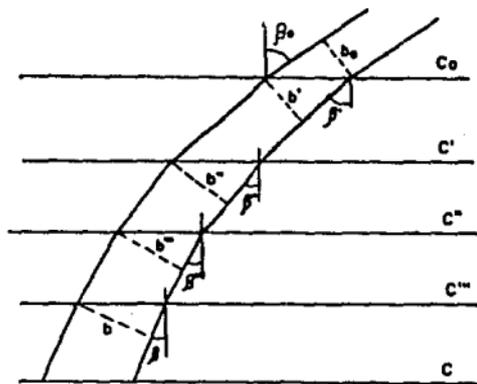


FIG. 3.10 REFRACCION CUANDO LAS LINEAS BATIMETRICAS SON RECTAS Y PARALELAS

## **CAPITULO IV.**

## EFFECTOS DE LA DIFRACCION EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLAJE

### 4.1 DIFRACCION DEL OLAJE.

La difracción de las ondas de agua es un fenómeno en el cuál la energía es transferida lateralmente a lo largo de la cresta de la onda de agua. Esto es más notable cuando en tren de oleaje regular es interrumpido por una barrera o un islote.

Cuando el oleaje pasa por el extremo de una barrera, por ejemplo, un rompeolas, la energía del oleaje se reduce al dispersarse dentro de una zona que se le llama "penumbra" en forma circular. En el caso de una barrera discontinua como la entrada de un puerto, el proceso de difracción se produce en ambos extremos de los rompeolas que lo forman, y a diferencia de la situación anterior, la energía del oleaje decrece más rápidamente hacia el interior.

Cuando un tren de oleaje pasa una estructura impermeable transfiere la energía de la onda a lo largo de la cresta de está dentro del sotaventó de la estructura, tal y como se muestra en la figura 4.1. Como resultado la altura de la ola en la región interior puede ser afectada. La relación de la altura de la ola para un punto en esa región y la altura de la ola u onda incidente es conocido como coeficiente de difracción "  $K_D$  ", donde el

$$K_D = f(\theta, \beta, r/L) .$$

Así tenemos que dicho coeficiente está dado por la siguiente expresión:

$$K_D = \frac{H_D}{H_I} \quad (4.1)$$

Donde:

$K_D$  = coeficiente de difracción.

$H_D$  = altura de la ola difractada.

$H_I$  = altura de la ola incidente.

La figura 4.1 define  $(\theta), (\beta)$ , y  $(r)$  . El patrón de la cresta de la onda en el sotavento de la estructura puede ser aproximado por arcos circulares concéntricos.

Hay que notar que la profundidad del agua en la figura 4.1 se considera constante; pues de otra manera, el patrón de las crestas de las ondas y altura de éstas también pueden ser afectadas por la refracción.

Generalmente la altura de la ola decrece a lo largo de su cresta dentro del sotavento de la estructura.

Si la barrera de la figura 4.1 refleja la energía de la onda, las crestas de las ondas u olas reflejadas también pueden ser difractadas por círculos concéntricos a las crestas alrededor del extremo de la barrera.

La difracción de las ondas de agua es análoga a la difracción de la luz. Penny y Price (1952) demostraron que la solución matemática para la difracción de la luz también puede ser usada para la predicción de los patrones de las crestas de las ondas y la variación de la altura de las ondas por los efectos de la difracción del oleaje.

Wiegel (1962) usó la solución exacta presentada por Penny y Price para calcular el coeficiente de difracción como una función de la sección de los valores de  $(\theta), (\beta)$ , y la relación  $(r/L)$ .

Estos resultados son tabulados en la tabla 4.1. Para valores intermedios de  $(\theta), (\beta)$  y  $(r/L)$  dados en la tabla 4.1, se pueden calcular dichos valores por medio de una interpolación lineal.

Para un punto particular de interés en el sotavento de la estructura, el coeficiente de difracción depende de oleaje incidente y de la longitud de la onda (o período de está).

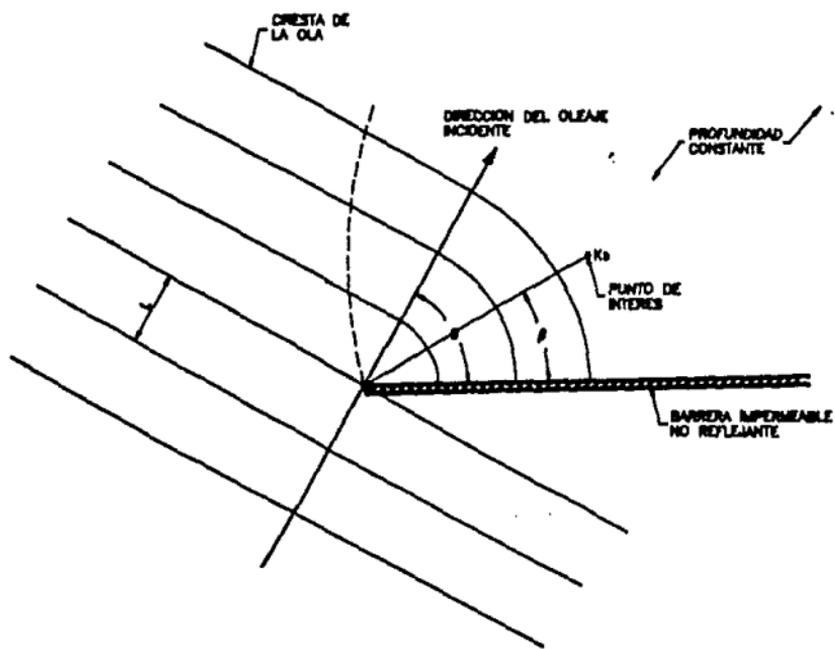


FIG. 4.1 DIFRACCION DE OLAJE DETRAS DE UN ROMPEOLAS

TABLA 4.1  
 COEFICIENTES DE DIFRACCION DEL OLEAJE, " $K_0$ ", DE LA DIRECCION Y POSICION DEL OLEAJE INCIDENTE  $\theta$ , COMO UNA FUNCION DE  $r/L$  Y  $\beta$  (WIEGEL, 1962)

$r/L$	$\beta$ (Grados)												
	0	15	30	45	60	70	90	105	120	135	150	165	180
$\theta=15^\circ$													
1/2	0.49	0.79	0.83	0.90	0.97	1.01	1.03	1.02	1.01	0.99	0.99	1.00	1.00
1	0.38	0.73	0.83	0.95	1.04	1.04	0.99	0.98	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00
2	0.21	0.68	0.86	1.05	1.03	0.97	1.02	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
5	0.13	0.63	0.99	1.04	1.03	1.02	0.99	0.99	1.00	1.01	1.00	1.00	1.00
10	0.35	0.58	1.10	1.05	0.98	0.99	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\theta=30^\circ$													
1/2	0.61	0.63	0.68	0.76	0.87	0.97	1.03	1.05	1.03	1.01	0.99	0.95	1.00
1	0.50	0.53	0.63	0.78	0.95	1.06	1.05	0.98	0.98	1.01	1.01	0.97	1.00
2	0.40	0.44	0.59	0.84	1.07	1.03	0.96	1.02	0.98	1.01	0.99	0.95	1.00
5	0.27	0.32	0.55	1.00	1.04	1.04	1.02	0.99	0.99	1.00	1.01	0.97	1.00
10	0.20	0.24	0.54	1.12	1.06	0.97	0.99	1.01	1.00	1.00	1.00	0.98	1.00
$\theta=45^\circ$													
1/2	0.49	0.50	0.55	0.63	0.73	0.85	0.96	1.04	1.06	1.04	1.00	0.99	1.00
1	0.38	0.40	0.47	0.59	0.76	0.95	1.07	1.06	0.98	0.97	1.01	1.01	1.00
2	0.29	0.31	0.39	0.56	0.83	1.08	1.04	0.96	1.03	0.98	1.01	1.00	1.00
5	0.18	0.20	0.29	0.54	1.01	1.04	1.05	1.03	1.00	0.99	1.01	1.00	1.00
10	0.13	0.15	0.22	0.53	1.13	1.07	0.96	0.98	1.02	0.99	1.00	1.00	1.00
$\theta=60^\circ$													
1/2	0.40	0.41	0.45	0.52	0.60	0.72	0.85	1.13	1.04	1.06	1.03	1.01	1.00
1	0.31	0.32	0.36	0.44	0.57	0.75	0.96	1.08	1.06	0.98	0.98	1.01	1.00
2	0.22	0.23	0.28	0.37	0.55	0.83	1.08	1.04	0.96	1.03	0.98	1.01	1.00
5	0.14	0.15	0.18	0.28	0.53	1.01	1.04	1.05	1.03	0.99	0.99	1.00	1.00
10	0.10	0.11	0.13	0.21	0.52	1.14	1.07	0.96	0.98	1.01	1.00	1.00	1.00
$\theta=75^\circ$													
1/2	0.34	0.35	0.38	0.42	0.50	0.59	0.71	0.85	0.97	1.04	1.05	1.02	1.00
1	0.25	0.26	0.29	0.34	0.43	0.56	0.75	0.95	1.02	1.06	0.98	0.98	1.00
2	0.18	0.19	0.22	0.26	0.36	0.54	0.83	1.09	1.04	0.96	1.03	0.99	1.00
5	0.12	0.12	0.13	0.17	0.27	0.52	1.01	1.04	1.05	1.03	0.99	0.99	1.00
10	0.08	0.08	0.10	0.13	0.20	0.52	1.14	1.07	0.96	0.98	1.01	1.00	1.00
$\theta=90^\circ$													
1/2	0.31	0.31	0.33	0.36	0.41	0.49	0.59	0.71	0.85	0.96	1.03	1.03	1.00
1	0.22	0.23	0.24	0.28	0.33	0.42	0.56	0.75	0.96	1.07	1.05	0.99	1.00
2	0.16	0.16	0.18	0.20	0.26	0.35	0.54	0.69	1.08	1.04	0.96	1.02	1.00
5	0.10	0.10	0.11	0.13	0.16	0.27	0.53	1.01	1.04	1.05	1.02	0.99	1.00
10	0.07	0.07	0.08	0.09	0.13	0.20	0.52	1.14	1.07	0.96	0.99	1.01	1.00

**TABLA 4.1**  
**COEFICIENTES DE DIFRACCION DEL OLEAJE, "K<sub>D</sub>", DE LA**  
**DIRECCION Y POSICION DEL OLEAJE INCIDENTE  $\theta$ , COMO**  
**UNA FUNCION DE  $r/L$  Y  $\beta$  (WIEGEL, 1962)**

r/L	$\beta$ (Grados)												
	0	15	30	45	60	70	90	105	120	135	150	165	180
$\theta=105^\circ$													
1/2	0.28	0.28	0.29	0.32	0.35	0.41	0.49	0.59	0.72	0.85	0.97	1.01	1.00
1	0.20	0.20	0.24	0.23	0.27	0.33	0.42	0.56	0.75	0.95	1.06	1.04	1.00
2	0.14	0.14	0.13	0.17	0.20	0.25	0.35	0.54	0.83	1.08	1.03	0.97	1.00
5	0.09	0.09	0.10	0.11	0.13	0.17	0.27	0.52	1.02	1.04	1.04	1.02	1.00
10	0.07	0.06	0.08	0.08	0.09	0.12	0.20	0.52	1.14	1.07	0.97	0.99	1.00
$\theta=120^\circ$													
1/2	0.25	0.26	0.27	0.28	0.31	0.35	0.41	0.50	0.60	0.73	0.87	0.97	1.00
1	0.18	0.19	0.19	0.21	0.23	0.27	0.33	0.43	0.57	0.76	0.95	1.04	1.00
2	0.13	0.13	0.14	0.14	0.17	0.20	0.26	0.16	0.55	0.83	1.07	1.03	1.00
5	0.08	0.08	0.08	0.09	0.11	0.13	0.16	0.27	0.53	1.01	1.04	1.03	1.00
10	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.09	0.13	0.20	0.52	1.13	1.06	0.98	1.00
$\theta=135^\circ$													
1/2	0.24	0.24	0.25	0.26	0.28	0.32	0.36	0.42	0.52	0.63	0.76	0.99	1.00
1	0.18	0.17	0.18	0.19	0.21	0.23	0.28	0.34	0.44	0.59	0.78	0.95	1.00
2	0.12	0.12	0.13	0.14	0.14	0.17	0.20	0.26	0.37	0.56	0.84	1.05	1.00
5	0.08	0.07	0.08	0.08	0.09	0.11	0.13	0.17	0.28	0.54	1.00	1.04	1.00
10	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07	0.08	0.09	0.13	0.21	0.53	1.12	1.05	1.00
$\theta=150^\circ$													
1/2	0.23	0.23	0.24	0.25	0.27	0.29	0.33	0.38	0.45	0.55	0.68	0.83	1.00
1	0.16	0.17	0.17	0.18	0.19	0.22	0.24	0.29	0.36	0.47	0.63	0.83	1.00
2	0.12	0.12	0.12	0.13	0.14	0.15	0.18	0.22	0.28	0.39	0.59	0.86	1.00
5	0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.10	0.11	0.13	0.18	0.29	0.55	0.99	1.00
10	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.10	0.13	0.22	0.54	1.10	1.00
$\theta=165^\circ$													
1/2	0.23	0.23	0.23	0.24	0.26	0.28	0.31	0.35	0.41	0.50	0.63	0.79	1.00
1	0.16	0.16	0.17	0.17	0.19	0.20	0.23	0.26	0.32	0.40	0.53	0.73	1.00
2	0.11	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.16	0.19	0.23	0.31	0.44	0.68	1.00
5	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.12	0.15	0.20	0.32	0.63	1.00
10	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07	0.08	0.11	0.11	0.21	0.58	1.00
$\theta=180^\circ$													
1/2	0.20	0.25	0.23	0.24	0.25	0.28	0.31	0.34	0.40	0.49	0.61	0.78	1.00
1	0.10	0.17	0.16	0.18	0.18	0.23	0.22	0.25	0.31	0.38	0.50	0.70	1.00
2	0.02	0.09	0.12	0.12	0.13	0.18	0.16	0.18	0.22	0.29	0.40	0.60	1.00
5	0.02	0.06	0.07	0.07	0.07	0.08	0.10	0.12	0.14	0.18	0.27	0.46	1.00
10	0.01	0.05	0.05	0.04	0.06	0.07	0.07	0.08	0.10	0.13	0.20	0.36	1.00

Para un espectro de ondas, si todas provienen de la misma dirección, generalmente la densidad de la energía decrece en un gran porcentaje y sucesivamente el período de la onda disminuye. Para determinar el coeficiente de difracción " $K_D$ " para el rango de período y direcciones de ondas incidentes uno puede evaluar las modificaciones de las características para un espectro de ondas en el punto de interés en el sotavento de la estructura.

El fenómeno de la difracción puede analizarse analíticamente utilizando la teoría de potencial, pero se requiere de cálculos muy elaborados. Es por esto que éste fenómeno se estudia ya sea con computadoras electrónicas, o con diagramas de difracción obtenidos experimentalmente.

La figura 4.2 nos muestra curvas de igual reducción de alturas de la ola que han sido elaboradas considerando una profundidad uniforme en la zona protegida por la barrera. Dicha figura esta preparada en forma adimensional y puede ser usada por tanto, para cualquier período del oleaje y profundidad, para lo cual solo hay que sobreponer una ampliación o reducción de la figura al plano del problema que se estudia.

#### 4.2 COMBINACION DE REFRACCION Y DIFRACCION.

En muchas instancias cuando las ondas son difractadas la batimetría del lugar es tal que es causa de que se produzcan efectos simultáneos de refracción y difracción del oleaje. Hasta la fecha no ha sido desarrollada una técnica para poder predecir la combinación de éstos efectos del oleaje en una región con contornos batimétricos irregulares.

La Armada de los Estados Unidos (1973) sugirió el siguiente procedimiento para la refracción del oleaje interrumpida por una barrera.

- 1.) Refractar el oleaje incidente hasta encontrar la barrera.
- 2.) Construir el patrón de difracción en el sotavento de la barrera para una distancia de tres o cuatro veces la longitud de la ola, si esto es posible.

$r$  = DISTANCIA RADIAL DEL EXTREMO DEL OBSTACULO AL PUNTO EN ESTUDIO.

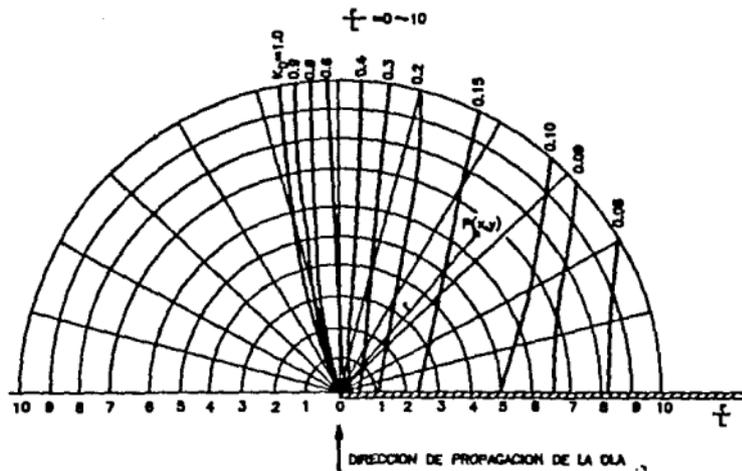


FIG. 4.2 DIAGRAMA DE DIFRACCION EN EL EXTREMO DE UN ROMPEOLAS

- 3.) Con el último frente del patrón de difracción continuar con el diagrama de refracción hasta el punto de interés.

La relación de la altura de la ola incidente con la altura de la ola en un punto de interés y para una profundidad del agua dada será igual al producto de:

- El coeficiente de refracción en la barrera.
- El coeficiente de difracción para la última cresta de la onda difractada.
- El coeficiente de refracción para la última cresta de la ola u onda difractada en el punto de interés.
- El coeficiente de fondo de la profundidad del agua en el punto de interés.

Este producto puede expresarse de la siguiente manera:

$$K_{r-D} = K_R K_S K_D \quad (4.2)$$

La selección del número de longitudes de la ola para transportar el análisis de difracción implica considerar circunstancias particulares.

A medida que la pendiente del fondo es aproximadamente horizontal o la profundidad es grande pero aproximadamente igual a  $0.3 L_0$ , se puede continuar el análisis de difracción; pues los efectos que produce la difracción es muy probable que sean predominantes.

Si el fondo no es horizontal o la profundidad es mayor que  $0.3 L_0$ , solo las crestas de las olas aproximadamente paralelas a los contornos del fondo, continúan en el análisis de difracción pero incluyendo los efectos del fondo si se quiere evaluar la altura de ola en la zona de estudio.

Los efectos de la difracción pueden ser insignificantes para un análisis de refracción 100% puro, pero hay que recordar que si se presentan cambios abruptos en el espaciamiento de las ortogonales a lo largo de las crestas de las olas, la difracción puede afectar significativamente los resultados calculados para la altura de la ola.

# **CAPITULO V.**

## CAPITULO V

### IDENTIFICACION Y TRATAMIENTO DE LAS ZONAS CAUSTICAS

#### 5.1 GENERALIDADES.

Cuando se manejan los datos obtenidos de los diagramas de refracción debemos recordar que la presencia de las corrientes puede alterar en forma considerable los resultados. Durante las tormentas se pueden producir cambios sustanciales en la batimetría, de manera que los resultados en tales condiciones son debatibles. Además debemos de considerar la naturaleza casual del oleaje, de modo que al efectuar los trazos con el oleaje monocromático lo que obtenemos en realidad es un promedio grueso del comportamiento real del oleaje.

En los últimos años se han desarrollado diversos programas computacionales para definir los planos de oleaje; algunos de ellos inclusive tratan de tener en cuenta limitaciones como puede ser la fricción del fondo.

Un problema que merece especial atención, en especial cuando los planos de oleaje se realizan por medio de programas computacionales es la formación de las ZONAS CAUSTICAS, es decir, de las zonas en donde se cruzan las ortogonales del oleaje en estudio.

En teoría pura, en éste tipo de puntos la altura de la ola se vuelve infinita, ya que la separación entre las ortogonales o rayos es nula. Esto en la realidad no se presenta; la explicación reside en el hecho de que entre las ortogonales existe una cesión de energía que se incrementa con la diferencia de la altura de ola entre ellas.

Con frecuencia la formación de zonas cáusticas se debe a una selección defectuosa de la equidistancia entre las batimétricas, o en el caso de los programas de computadora, a una selección inadecuada de la malla de profundidades para realizar el estudio.

Quando se han revisado estos aspectos y la zona cáustica persiste, debemos recordar que hacia el centro de ella se forma una protuberancia al cruzarse las olas; lo que da lugar en la misma zona y en su proximidad a que se forme un sistema de olas de cresta corta, en donde pierden toda validez los resultados obtenidos con los planos de oleaje.<sup>1</sup>

En esta forma la presencia de una zona cáustica debidamente comprobada en un plano de oleaje, significa que en ella no es posible obtener resultados confiables.

## 5.2 TEORIA DE RAYOS.

Una onda propagándose y viajando alrededor de un estado de equilibrio podemos imaginarla moviéndose en una superficie o frente de oleaje.

Para algunos autores, un punto geométrico de una onda en movimiento, puede ser observado como un mecanismo por medio del cuál la energía y las características de la onda pueden ser transferidas de un punto a otro sin que haya un transporte de masa.

La onda más sencilla puede ser escrita matemáticamente mediante la siguiente expresión:

$$\Phi(x,t) = \text{Re}(A \exp[i(kx - \omega t)]) \quad 5.1$$

En donde:

A ; amplitud de la onda

k ; es un vector que define el número de onda y que está dado por la siguiente expresión:

---

<sup>1</sup>) Pierson, W; "Wave Behaviour Near Caustics in Models and Nature"; Academic Press, New York 1972.

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

donde :

L ; longitud de la onda.

$\omega$  ; Frecuencia angular (por conveniencia se toma con signo positivo).

En la expresión anterior la amplitud de la onda "A" es una constante y la fase  $kx - \omega t$  varía con el tiempo "t" con la frecuencia angular " $\omega$ " para un punto fijo; y para un tiempo fijo con el vector número de onda "k".

Como ya se había mencionado anteriormente, el período de un onda "T" es el intervalo de tiempo entre el paso de dos crestas sucesivas idénticas; dicho período está relacionado para la frecuencia angular " $\omega$ " por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La longitud de la onda "L", la cuál es la distancia entre dos crestas sucesivas, la podemos relacionar con el vector número de onda "k" por la siguiente expresión:

$$L = \frac{2\pi}{k}$$

Donde:

$k = \omega / c$  para una cresta moviéndose con velocidad  $c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k}$  la

cuál es conocida como la fase de la velocidad.

Para un instante " $t_0$ " el frente de una onda está definido por:

$$kx - \omega t_0 = \text{constante}$$

la cuál es una familia de planos paralelos con un vector normal " $k$ ". Para un incremento del tiempo, estos planos se mueven con la velocidad de fase " $C$ " en la dirección del número de onda " $k$ "; y por lo tanto dicha fase es paralela a " $k$ ".

Una manera más sencilla de describir a una onda es dada por la siguiente expresión:

$$\Phi(x,t) = A(x,t) \exp(iS(x,t)) \quad (5.2)$$

En esta expresión la amplitud de la onda  $A(x,t)$  se asume variable lentamente en el tiempo y en el espacio.

Para un plano de onda, como el proporcionado por la expresión (5.1), el número de onda " $k$ " y la frecuencia angular " $\omega$ " estarán dados respectivamente por el gradiente y la derivada negativa del tiempo de la FUNCION DE FASE  $S(x,t)$ .

Por medio de una analogía, el valor local de la variación del número de onda " $k$ " y la frecuencia angular " $\omega$ " en un plano de aproximación de la onda, puede ser definido de la siguiente manera:

$$k = \nabla S \quad \omega = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.3)$$

Estás expresiones implican que:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \omega = 0 \quad (5.4)$$

Está última expresión con frecuencia es llamada ECUACION DE CONSERVACION DE CRESTAS en la cuál el vector "k" puede ser interpretado como una densidad direccional de crestas en el espacio y la frecuencia angular "  $\omega$  " como un flujo de crestas pasando por un punto fijo.

Bajo las consideraciones de la Teoría de Rayo ninguna cresta será destruida y el número total de estás ondas se conservará.

La proporción de progresión de una superficie de fase  $S(x,t) = \text{constante}$  está dada por:

$$dS(x,t) = 0 \quad \text{con lo cuál obtenemos}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} dt + \nabla S dx = 0 \quad (5.5)$$

Haciendo uso de las expresiones (5.3) y (5.5) la velocidad de fase  $C = dx/dt$  en  $S = \text{constante}$  se relaciona con la frecuencia angular "  $\omega$  " por:

$$\omega = kC \quad (5.6)$$

Puesto que la velocidad de fase "C" y el número de onda "k" serán paralelos y  $C = \omega/k$ ; siguiendo la forma de la expresión (5.6) la fase del vector velocidad estará dada por:

$$C = \frac{\omega k}{k^2} \quad (5.7)$$

La dinámica fundamental cede además una relación de dispersión entre la frecuencia angular "  $\omega$  " y el vector número de onda "k", de la siguiente forma:

$$\omega(x,t) = \sigma[k(x,t); \lambda(x,t)] \quad (5.8)$$

Donde la frecuencia angular "  $\omega$  " varía no solamente a través de  $k(x,t)$  para una constante del vector número de onda "k"; también tiene variaciones en las propiedades del medio mismo, como se expresa mediante el parámetro  $\lambda(x,t)$ .

Sustituyendo la relación de dispersión dada por (5.8) dentro de la ecuación de conservación de la cresta dada por (5.4) se obtiene:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0 \quad (5.9)$$

Dado que la expresión (5.3) implica que  $\nabla \times k = 0$ , se puede hacer que:

$$\frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j}$$

Y si se define a la velocidad de grupo "C<sub>g</sub>" por la relación:

$$C_{g_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_i} \quad (5.10)$$

La ecuación (5.9) se puede reescribir [superponiendo para notación vectorial] de la siguiente forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_g \nabla k = - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \nabla \lambda \quad (5.11)$$

Similarmente por diferenciación de (5.8) con respecto al tiempo "t" y empleando la ecuación de conservación de crestas (5.4), se obtiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + C_g \nabla \omega = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (5.12)$$

Las ecuaciones (5.11) y (5.12) poseen las mismas curvas características, las cuales pueden ser obtenidas por integración de la relación:

$$\frac{dx}{dt} = C_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k} \quad (5.13)$$

Estas curvas características son llamadas RAYOS y la significancia de ellas se ilustra mejor por la selección de un sistema natural de coordenadas para describir las ondas. Integrando la expresión (5.13) tenemos:

$$x - \int C_g dt = \alpha$$

En donde "  $\alpha$  " es un vector constante el cuál varía de un rayo a el siguiente.

La derivada del tiempo a lo largo del rayo, teniendo a "  $\alpha$  " fijo es:

$$\left[ \frac{d}{dt} \right]_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} + C_g \nabla \quad (5.14)$$

De las ecuaciones (5.11) y (5.12) para un medio completamente homogéneo e independientemente del tiempo, el vector número de onda "k" y la frecuencia angular "  $\omega$  " serán conservadas a lo largo del rayo.

Cualquier variación de " $k$ " y " $\omega$ " a lo largo del rayo resulta en heterogeneidades espaciales temporales, como está dado en la parte derecha de esas ecuaciones.

La validez de la Teoría de Rayo está relacionada para la ecuación de conservación de crestas (5.4), la cuál rompe hacia abajo cuando los rayos se intersectan; a está intersección es lo que llamamos SUPERFICIES CAUSTICAS.

Para un menor período catastrófico, la Teoría de Rayo empieza a perder su aplicabilidad cuando la amplitud de la onda  $A(x,t)$  varía apreciablemente sobre las escalas del tiempo para la longitud de la onda o el período.

Cuando la Teoría de Rayo es aplicable, simplifica la solución de problemas de onda, usualmente estando en términos de ecuaciones diferenciales parciales para su integración ordinaria a lo largo de los rayos.

En la practica, la Teoría de Rayo es aplicada como sigue:

- a) Para las ecuaciones dinámicas y conociendo la variabilidad del medio de propagación, una relación de dispersión de la forma dada por la ecuación (5.8) es derivada para ondas cercanas al plano.
- b) Partiendo de valores conocidos del vector número de onda " $k$ " y la frecuencia angular " $\omega$ " a lo largo de una curva, la cuál no es la misma curva característica, es posible calcular haciendo uso de la ecuación (5.13) las direcciones de los rayos emanando de la curva.
- c) Los frentes de oleaje son entonces dejados para trasladarse hacia adelante para una velocidad " $C_g$ " (en general en función de la posición) para un corto tiempo de paso a lo largo de las curvas características (ortogonales).

- d) Nuevos valores del vector número de onda "k" y de la frecuencia angular " $\omega$ " son evaluados para las expresiones (5.11) y (5.12), los cuales son usados para recalculer las direcciones de los rayos y los nuevos valores de la velocidad de grupo usando la ecuación (5.13).

Este procedimiento se continua hasta llegar a la línea de la costa; está técnica puede ser usada extensivamente para describir la superficie de refracción de ondas de gravedad.

## 5.3 REFRACCION POR FLUJO CORTANTE.

Consideremos como primer paso el comportamiento de la superficie de las ondas de gravedad viajando en una corriente horizontal  $U = [U(y), 0, 0]$  de la forma mostrada en la figura 5.1a.

El número de onda  $k = (k_1, k_2, 0)$  tiende a un plano horizontal. Definiendo el ángulo "  $\theta$  " como el ángulo existente entre la abscisa en "Y" y el vector "k" (ver fig.5.1a), los componentes del vector número de onda estarán dadas por:

$$k_1 = k \text{sen} \theta$$

y

$$k_2 = k \text{cos} \theta$$

Puesto que el medio es independiente del tiempo, y asumiendo que la frecuencia angular "  $\omega$  " es invariable a lo largo del rayo, tenemos por consiguiente que:

$$k C_e + k U \text{sen} \theta = \omega = \text{constante} \quad (5.15)$$

además dada la homogeneidad existente únicamente en la dirección "Y" tenemos:

$$k_1 = k \text{sen} \theta = \text{constante} \quad (5.16)$$

Eliminando al número de onda "k" entre las ecuaciones (5.15) y (5.16), y dejando el subíndice "e" para referir valores de las propiedades de la onda para el punto de entrada dentro del flujo cortante, se puede obtener:

$$\frac{C_e}{\text{sen} \theta} U(y) = \frac{C_e}{\text{sen} \theta_e} + U_e \quad (5.17)$$

La cual es la ley de refracción de Snell, modificada por la presencia de la corriente.

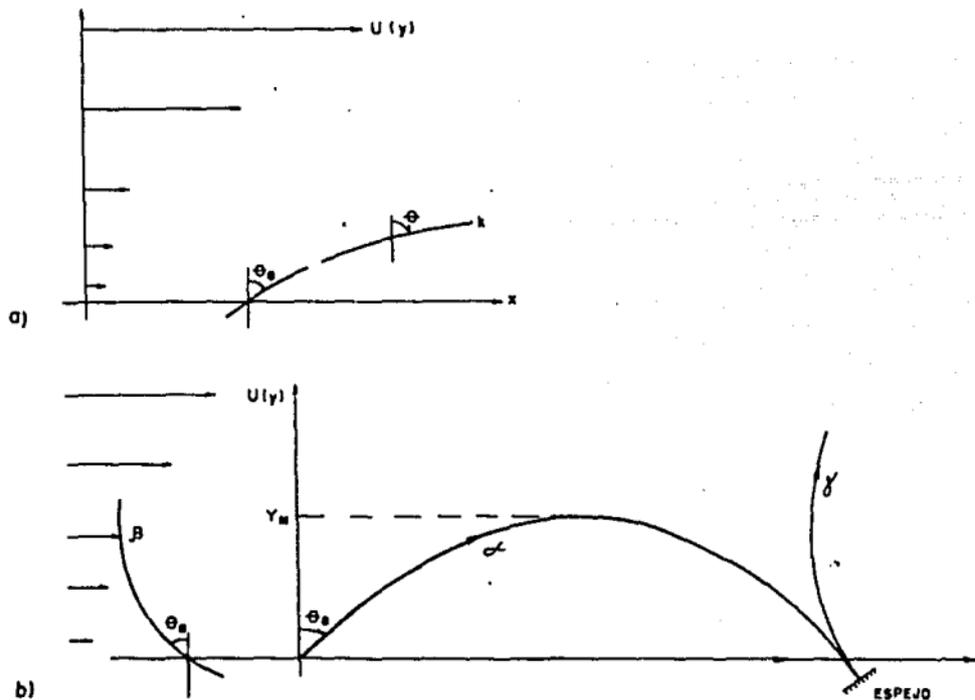


FIG. 5.1 a) GEOMETRIA DE LA PROPAGACION DE LOS RAYOS EN EL FLUJO POR CORTANTE.  
 b) COMPORTAMIENTO DE VARIOS TIPOS DE RAYOS  
 (VER EXPLICACION EN EL TEXTO)

Con ayuda de la relación de dispersión dada por la expresión (5.8), es generalmente posible expresar " $C_0$ " como una función del número de onda " $k$ ", y por consiguiente poder eliminar dicho parámetro de las ecuaciones (5.15) y (5.16) para la solución del ángulo  $\theta(y)$ .

Para una superficie larga de ondas de gravedad, la cuál será no dispersiva, la celeridad  $C_0 = \sqrt{gH}$  y el número de onda " $k$ " no puede introducirse en la expresión (5.17). Si se considera que la altura de la ola " $H$ " es constante y que la corriente de entrada  $U_0 = 0$ . El ángulo  $\theta(y)$  está fundamentado de la expresión (5.17) como:

$$\text{sen}\theta(y) = \frac{\text{sen}\theta_0}{1 - \frac{U(y)\text{sen}\theta_0}{\sqrt{gh}}} \quad (5.18)$$

El comportamiento de los rayos es fácilmente deducido de la expresión anterior. Para un ángulo de entrada  $0 < \theta_0 < \pi/2$ ,  $\theta$  puede ser incrementado como un incremento de " $U$ ", y un rayo incidente es refractado en la dirección de la corriente tal y como se muestra en la figura 5.1b. Si la corriente es lo suficientemente fuerte, el miembro a la derecha de la ecuación (5.18) se aproxima a la unidad cuando " $Y$ " se incrementa; y la refracción continua hasta que el ángulo  $\theta = \pi/2$ , para el cuál el ángulo del rayo es turnado hacia atrás por reflexión interna total. Este fenómeno ocurre cuando  $Y = Y_M$ , así:

$$\frac{U(Y_M)}{\sqrt{gH}} = \frac{1}{\text{sen}\theta_0} - 1 \quad (5.19)$$

Debemos notar que cuando  $\theta = \pi/2$ , la componente "Y" del número de onda  $k_y = k \cos \theta$  desaparece. La escala de longitud de las ondas es mucho más pequeña comparada con el flujo cortante en ese punto, y la Teoría de Rayo no es aplicable. Como podemos observar en la fig.5.1, existen pocos rayos adyacentes cerca del punto de reflexión interna total; y es entonces cuando una envolvente de rayos ó caústico puede presentarse en ese punto.

Para ángulos negativos de acceso,  $\theta_s < 0$ ,  $|\theta|$ , éste decrece como se incrementa "U", y un rayo incidente tiende hacia la normal de la corriente tal y como se observa en la fig. 5.1b.

Finalmente debemos notar que esos rayos no serán reversibles. Un espejo colocado a través de la trayectoria de un rayo emergente de la corriente, semejante como el rayo  $\alpha$  en la fig 5.1b puede reflejar el rayo hacia atrás con el mismo valor negativo de  $\theta_s$ , enviándolo a lo largo de la trayectoria de  $\alpha$ . Este fenómeno es irreversiblemente típico de refracción por variaciones de corriente.

Como varía la energía del oleaje a lo largo de un rayo?. Consideraremos una componente simple de Fourier, para un valor dado de "k". Para un caso simple considerando ( $C_0 = \sqrt{gH}$ , sin dependencia de "x" y "t"). La ecuación de conservación de la acción del oleaje, (en donde el subíndice "o" es mencionado solamente para referir las cantidades observadas dentro del sistema en movimiento), está dada por:

$$\frac{\partial (E_o)}{\partial t \omega_o} + \nabla \cdot \left( C_o \frac{(E_o)}{\omega_o} \right) = 0$$

Reduciendo la ecuación anterior a:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ (E_p) \sqrt{gH} \cos \frac{\theta}{\omega_p} \right] = 0 \quad (5.20)$$

Integrando la ecuación (5.20) tenemos:

$$(E_p) \cos \frac{\theta}{k} = \text{constante} \quad (5.21)$$

Haciendo uso de la ecuación (5.16) podemos eliminar el término "k", con lo que tenemos:

$$(E_p) \text{sen} 2\theta = \text{constante} \quad (5.22)$$

Para un espectro continuo  $S(k;x,t)$  de banda ancha  $\Delta k$  y para un sistema de coordenadas moviéndose con el fluido tenemos que  $s + \omega_p = \text{constante}$ .

Reemplazando  $\omega_p$  por  $k\sqrt{gH}$  y empleando la expresión (5.16) tenemos:

$$S(k;x,t) \text{sen} \theta = \text{constante} \quad (5.23)$$

Finalmente con las expresiones (5.15) y (5.16), consideramos que la onda penetra en la corriente cortante en donde  $dU/dy > 0$ .

A medida que "U" se va incrementando, el término  $k \text{sen} \theta$  permanece constante.

Para un estado crítico, la frecuencia intrínseca  $\omega_p = kC_p$  desaparece.

Para las ondas de gravedad largas, nuevamente con la corriente de entrada  $U_e=0$  obtenemos:

$$U_c = \frac{\sqrt{gH}}{\sin\theta_c}$$

para la velocidad de la corriente en la capa crítica.

Reemplazando el valor de "U" en el punto de reflexión interna total  $Y=Y_M$  (ver ec. 5.19), es claro que  $U_{(Y_M)} < U_c$ ; por lo tanto la capa crítica nunca alcanza por el oleaje en éste caso.

La diferencia en comportamiento de los oleajes cerca del nivel crítico al nivel cerca de la reflexión interna total se ilustra más claramente con los oleajes internos de gravedad.

En ausencia de rotación ( $f=0$ ), la relación de dispersión para ondas de gravedad interna estará dada por:

$$\omega_o^2 = \frac{N^2(k_1^2 + k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)} \quad (5.24)$$

Si para las ondas que satisfacen esta ecuación, se considera un marco de referencia donde el fluido está en reposo y que será propagado en una vertical a la corriente cortante horizontal  $U = [U(z), 0, 0]$ , nosotros podemos hacer  $k_1=0$ , por simplicidad. La frecuencia " $\omega$ " vista por un observador estacionario, es igual a:

$$\omega = \omega_o + k_1 U \quad (5.25)$$

donde " $\omega$ " es constante a lo largo del rayo.

La componente vertical de la velocidad de grupo es establecida por diferenciación de la ecuación (5.25) con respecto a  $k_3$ .

Usando la expresión (5.24) y con  $k_2=0$  tenemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_3} = C_{g3} = \frac{(-k_3 \omega_o)}{(k_1^2 + k_3^2)} \quad (5.26)$$

Así  $C_{g3}$  desaparece cuando  $k_3=0$ ; o cuando  $\omega_o=0$ .

Mediante el uso de la ecuación (5.24) con  $k_2=0$ , la componente vertical de la velocidad de grupo puede ser reescrita como:

$$C_{g3} = - \left[ 1 - \frac{\omega_o^2}{N^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_o^2}{N k_1} \quad (5.27)$$

Expandiendo  $\omega_o$  en una serie de Taylor cerca del valor del nivel crítico  $z=z_c$ , tenemos:

$$\omega_o = (z-z_c) \omega_o'(z_c) + (z-z_c)^2 \frac{\partial \omega_o}{\partial z} + \dots = (z-z_c) k_1 \frac{\partial U}{\partial z} \quad (5.28)$$

Y sustituyendo cerca del nivel crítico en la ecuación (5.27) tenemos:

$$C_{g3} = - \frac{k_1}{N} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 (z-z_c)^2 \quad (5.29)$$

Integrando esta relación, nosotros encontramos que el tiempo hecho de un nivel  $z_1$  a otro nivel  $z_2$ , cerca del nivel crítico es:

$$t_2 - t_1 = \left( \frac{N}{k_1 (\partial U / \partial z)^2} \right) \left( \frac{1}{(z_2 - z_c)} - \frac{1}{(z_1 - z_c)} \right) \quad (5.30)$$

Como  $z_2$  es aproximado a  $z_c$ , una onda de grupo jamás llegará al nivel crítico.

### 5.4 IDENTIFICACION DE LAS ZONAS CAUSTICAS.

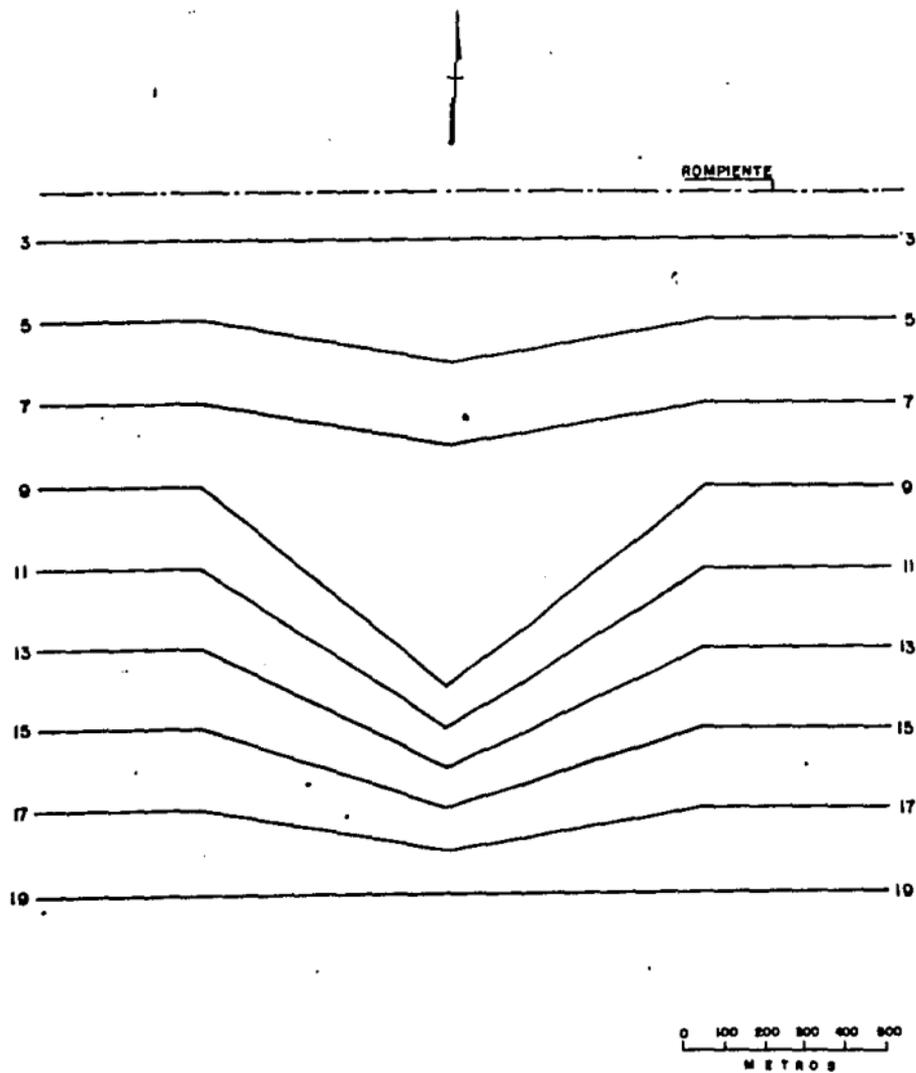
A manera de ejemplo práctico<sup>2</sup> a continuación se presenta para la batimetría hipotética de la figura 5.2 (con "curvas a cada 2m) de una playa en la que incide un oleaje que, en aguas profundas, tiene una altura de ola significativa  $H_{1/3} = 1.5\text{m}$  y un período  $T = 8$  seg.

A partir de la batimetría 19 y hacia aguas profundas, la pendiente es regular, de manera que se supone que ya se ha determinado que, en esa curva, el oleaje incide con dirección SW-NE, con un ángulo de  $5^\circ$ .

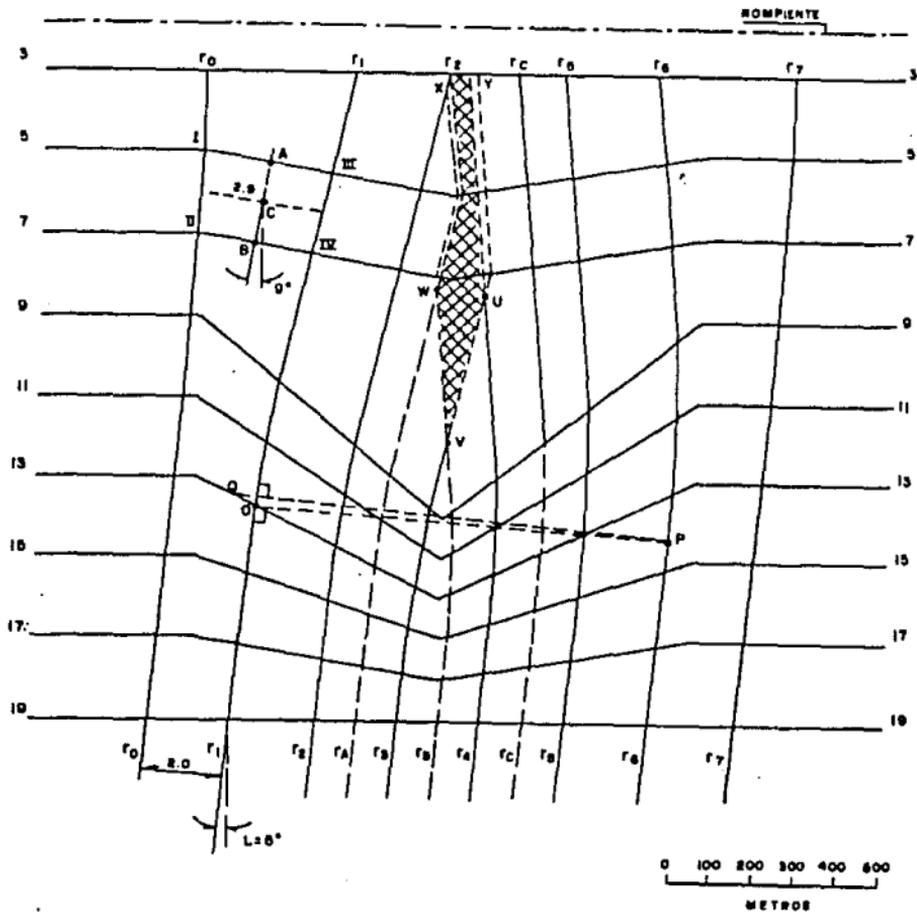
Considerando la condición batimétrica de la figura 5.2 y las condiciones establecidas anteriormente, se aplicó la Teoría del Rayo para determinar el Diagrama de Refracción mostrado en la figura 5.3.

En dicha figura se observa que los rayos  $r_3$  y  $r_4$  se cruzan en el punto "U", entre las batimétricas 9 y 7. Por esta razón se han dibujado los rayos auxiliares (intermedios)  $r_A$ ,  $r_B$  y  $r_C$ . Mientras éste último no muestra cruzamientos, los rayos  $r_A$  y  $r_B$ , conjuntamente con  $r_3$  muestran la presencia de una zona caústica, limitada por los puntos U, V, W, X, Y. Para cerciorarse de su existencia sería necesario repetir los trazos con una batimetría más fina. De persistir, habría que decir que, el Diagrama de Refracción no da la información válida en la zona sombreada en la figura 5.3.

<sup>2</sup>) José L. Sánchez Bribiesca; "Manual de Hidráulica Marítima Elemental", Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., 1982.



**FIG. 5.2 BATIMETRIA HIPOTETICA SOBRE UNA PLAYA**



**FIG. 5.3 DIAGRAMA DE REFRACCION**

(NOTESE LA PRESENCIA DE LA ZONA CAUSTICA)

El cruce de los rayos adyacentes es indicativo en el tipo de salida del rayo por el cambio de signo de la dirección del mismo.

El dibujo de estos puntos en el diagrama de refracción definen claramente la envolvente del cóustico indicado por el patrón de rayos de la figura 5.3.

En la opinión de W.J. Pierson, un cambio gradual y continuo en la posición de la envolvente del cóustico puede ser evidente cuando los diagramas de refracción son calculados para un incremento lo suficientemente pequeño del período y dirección del oleaje.

El haberse agudizado la salida de una onda de período y dirección sencilla en el diagrama de refracción representa una cantidad de energía infinitesimal en el espectro del oleaje.

Cuando está cantidad infinitesimal se incrementa infinitamente, como se representa por el cruce de los rayos adyacentes, es del todo posible que resulte una cantidad finita de energía.

El coeficiente de refracción es la representación de la energía de la onda fuera del cóustico, si la difracción del oleaje es insignificante. En tal caso, el cambio en el signo de la dirección del rayo indica el cruce de las ortogonales adyacentes y el coeficiente de refracción es por lo tanto:

$$K_r = \sqrt{\frac{1}{|\beta|}}$$

donde:

$$\beta = \frac{b}{b_0}$$

en la cuál:

$b$ ; es la separación del rayo en aguas reducidas.

$b_0$ ; es la separación del rayo en aguas profundas.

Dicho coeficiente puede ser evaluado en cualquier punto excepto para el punto de intersección de los rayos. Donde la difracción de la onda resulte ser apreciable, el coeficiente de refracción puede ser muy bajo.

Por otra parte, retomando los conceptos vertidos en el inciso 5.3, cuando se tiene la presencia de una corriente, la posición de una zona cáustica ( $Y=Y_M$ ) esta dada por la ecuación (5.19), y expresada como:

$$\frac{U(Y_M)}{\sqrt{gH}} = \frac{1}{\text{sen}\theta_e} - 1$$

Es en la zona cáustica en donde se presenta una transición abrupta entre una región irradiada en donde  $Y < Y_M$  para un dominio dentro del cuál ninguna onda con un ángulo de entrada  $\theta_e > \theta_M$  puede penetrar.  $\theta_M$  es el ángulo de entrada dentro del flujo cortante para el cuál ocurre una reflexión interna total para  $Y_M$ .

La Teoría de Rayo no nos provee de una descripción del comportamiento de la amplitud de las ondas a través de la transición; además, se puede decir que la reflexión que ocurre en un sitio dentro de la zona cáustica, nosotros estamos ignorando la amplitud de la onda reflejada y de algún cambio de fase el cuál podría ocurrir sobre la reflexión.

### 3.5 Reflexión perfecta debida a la refracción del oleaje.

Como un caso particular de la deformación del oleaje, cuando ocurre reflexión perfecta a continuación se describe en forma sucinta, la manera de tomar en cuenta este fenómeno.

Tomando como base la fig. 3.9, si  $\beta_2 \geq 90^\circ$ , el oleaje no puede entrar en la profundidad  $h_2$ , es decir, el oleaje se refleja perfectamente en el límite entre  $h_1$  y  $h_2$  de profundidad. El ángulo de incidencia límite del oleaje que se refleja perfectamente se calcula como sigue:

De la ecuación (3.2) (ver inciso 3.4.2, del capítulo 3) tenemos:

$$\frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } \beta_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

Si  $\beta_2 = 90^\circ$ , es decir, cuando  $\text{sen } \beta_2 = 1$ , tendremos:

$$\text{sen } \beta_1 = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\therefore \beta_1 = \text{sen}^{-1} \left( \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (5.31)$$

En la ecuación anterior, el valor de  $C_1/C_2$  no puede ser mayor de 1, porque el valor de la función seno no puede ser mayor que 1. Entonces, en general, la reflexión perfecta ocurre cuando  $C_2$  es mayor que  $C_1$ , es decir cuando los oleajes entran en una zona más profunda.

El ángulo  $\beta_1$  de la ec. (5.31) se llama el ángulo crítico de reflexión perfecto.

# **CAPITULO VI.**

## CAPITULO VI

### APLICACION DE UN MODELO NUMERICO

#### A UN CASO ESPECIFICO

##### 6.1 Generalidades.

En la costa de Quintana Roo, en Bahía Mujeres, entre punta Cancún y Puerto Juárez, se localiza la ciudad de Cancún (ver fig. 6.1); su situación geográfica está definida por  $21^{\circ} 10'$  de latitud norte y  $86^{\circ} 45'$  de longitud oeste.

Es en esta zona donde se realizará el proyecto ejecutivo del desarrollo turístico denominado "CANCUN NAUTICO".

Para poder realizar dicho proyecto fue necesario realizar los estudios de agitación y refracción del oleaje; siendo éste último del que nos ocuparemos en el presente capítulo.

El estudio de la refracción del oleaje es de vital importancia, ya que las estructuras marítimas se construyen en aguas intermedias o bajas, donde los patrones del oleaje sufre considerables cambios que pueden causar efectos de concentración de energía y provocar daños en las estructuras.

En el proyecto "Cancún Náutico" se estudiaron tres direcciones del oleaje a saber: Este, Sureste y Noroeste; con períodos de 5, 7 y 9 seg para cada dirección.

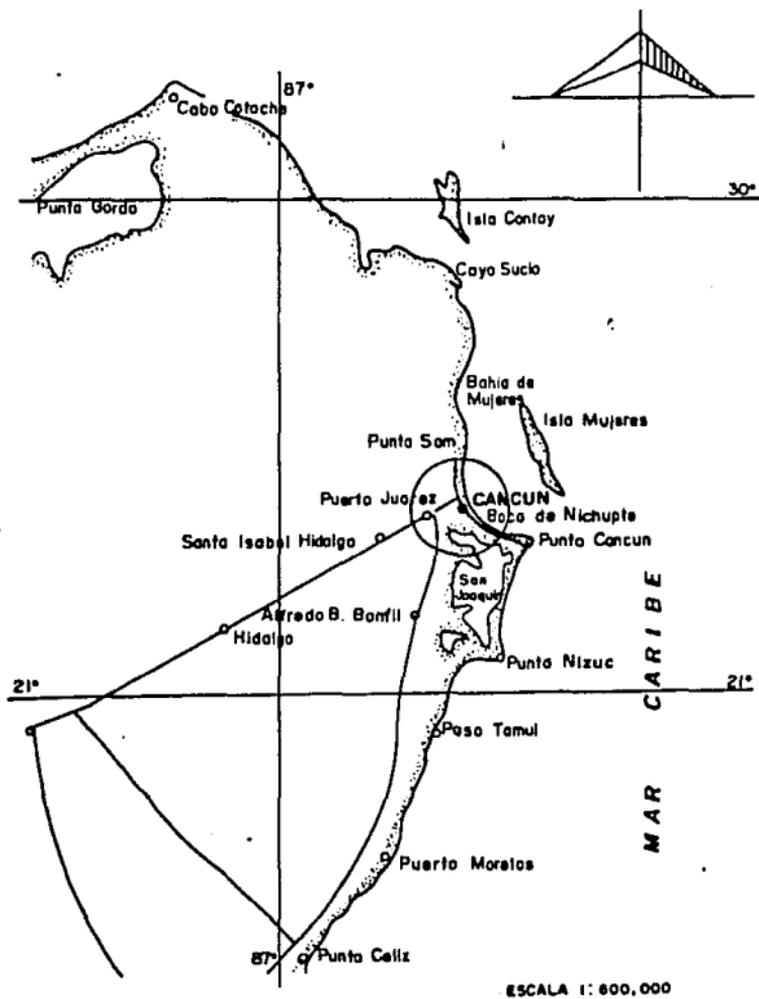


FIG. 6.1 CROQUIS DE LOCALIZACION

## 6.2 Recopilación de Información.

Para realizar el estudio de refracción de oleaje se utilizaron dos planos de batimetría con diferente detalle, la razón de éste hecho obedeció a que la zona en estudio resultaba demasiado extensa para tener una precisión satisfactoria en el cálculo, además de requerirse en la zona próxima a la construcción del puerto de una malla más pequeña para representar con mayor aproximación el fenómeno.

La batimetría en aguas profundas se obtuvo del portulano No. S.M.924 "México-Costa Este de la Isla Mujeres a Isla Cozumel, publicado por la Dirección General de Oceanografía de la Secretaría de Marina.

La digitalización de las curvas batimétricas se llevó a cabo por medio de secciones aproximadamente perpendiculares a la costa, con una separación aproximada entre cada una de ellas de 1000m.

En aguas superficiales (aguas intermedias y bajas) la batimetría se obtuvo del plano denominado "Batimetría General", plano No. 1 de 6 elaborados por El Fondo Nacional de Fomento al Turismo, "FONATUR"; en julio de 1989.

La discretización de las curvas batimétricas se realizó mediante secciones aproximadamente perpendiculares a la costa separadas entre si una distancia de 200m., correspondiendo el origen de la malla definida por este procedimiento con el origen de la malla de aguas profundas.

En las figuras 6.2 y 6.3 se muestran las mallas de profundidades discretizadas para la condición de aguas profundas y aguas superficiales (aguas intermedias y, bajas) respectivamente.

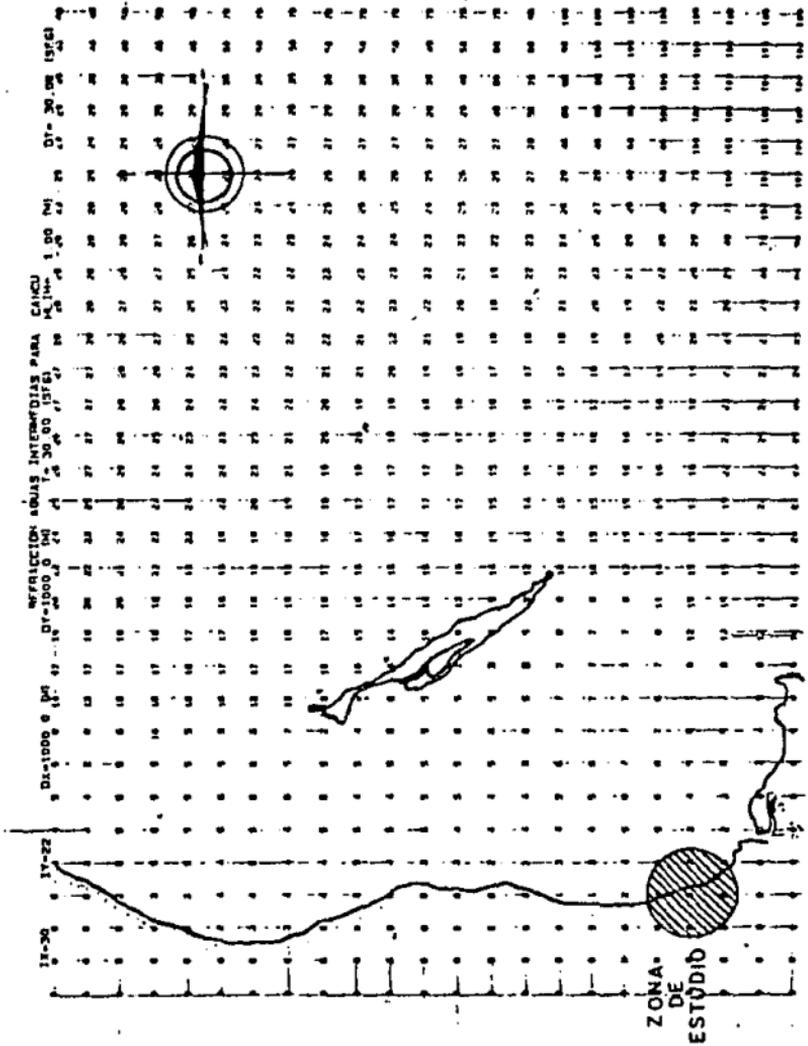


Fig. No. 6.2 Malla de Profundidad discretizada para la condición de aguas profundas.

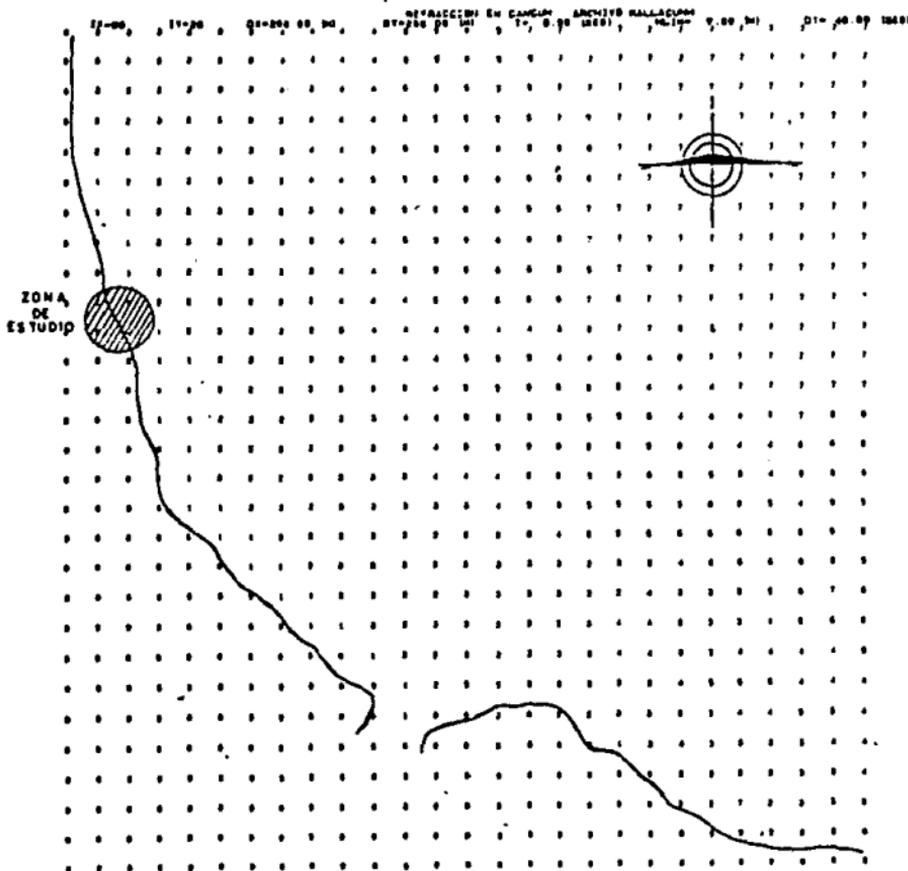


Fig. No. 6.3 Malla de Profundidades discretizada para la condición de aguas intermedias y -- aguas bajas.

### 6.3 Algoritmo utilizado.

En el estudio de refracción de oleaje del proyecto "Cancún Náutico", se empleó el método de las ortogonales, el cual supone que cuando el oleaje avanza hacia la playa, no existe dispersión lateral de energía a lo largo de las ortogonales adyacentes a un canal de energía determinado.

En la figura 6.4 se ilustra el método de cálculo utilizado para obtener el cambio en la dirección del oleaje en el modelo numérico.

Este método se basa en la obtención de las coordenadas del punto  $(n + 1)$ ,  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  y el ángulo del oleaje del mismo punto  $(A_{n+1})$ , con los datos del punto anterior  $(n)$ ,  $(X_n, Y_n)$  y  $(A_n)$ ; para lo cual se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\Delta A = \frac{(K_n + K_{n+1}) D_n}{2} \quad (6.1)$$

$$A_{n+1} = A_n + \Delta A \quad (6.2)$$

$$X_{n+1} = X_n + D_n \cos \left( A_n + \frac{\Delta A}{2} \right) \quad (6.3)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + D_n \operatorname{sen} \left( A_n + \frac{\Delta A}{2} \right) \quad (6.4)$$

$$K_n = - \frac{1}{C_n} \left[ \frac{\partial c}{\partial \eta} \right] \eta \quad (6.5)$$

$$K_{n+1} = - \frac{1}{C_{n+1}} \left[ \frac{\partial c}{\partial \eta} \right] \quad (6.6)$$

$$D_n = \frac{\Delta s (C_n + C_{n+1})}{2} \quad (6.7)$$

Donde:

$D_n$  ; Es la distancia entre los dos puntos de profundidad conocida (n) y (n + 1).

$C_n$  y  $C_{n+1}$  ; Es la celeridad del oleaje en cada punto de profundidad conocida.

$\eta$  ; Es la dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje.

$K_n$  y  $k_{n+1}$  ; Son factores característicos al tipo de curva definida por la propagación del oleaje.

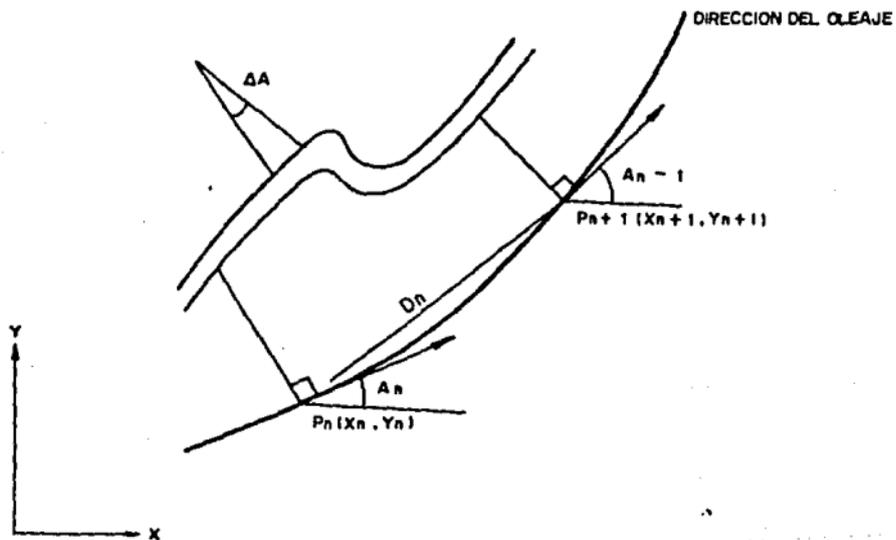


FIG.6.4. METODO DE CALCULO DE REFRACCION DE OLEAJE

El valor de la profundidad "h" está dado por la interpolación de cuatro puntos de la maya, tal y como se muestra en la figura 6.5 y las ecuaciones 6.8.

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(Dx-x)^2 + y^2}$$

(6.8)

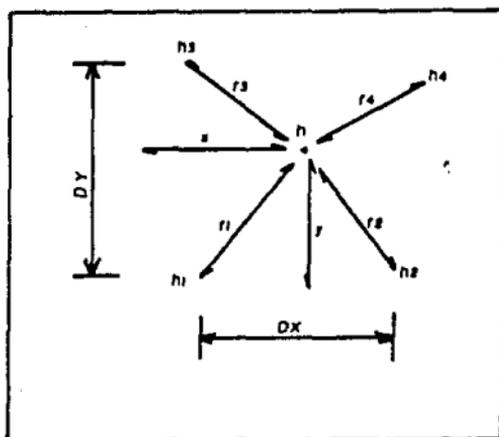
$$r_3 = \sqrt{(Dx-x)^2 + (Dy-y)^2}$$

$$r_4 = \sqrt{x^2 + (Dy - y)^2}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$$

(6.8)

$$h = r_0 \left( \frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2} + \frac{h_3}{r_3} + \frac{h_4}{r_4} \right)$$


**Fig. 6.5 Cálculo de la profundidad promedio.**

El valor de  $\delta c / \delta \eta$  está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\delta c}{\delta \eta} = \frac{\delta c}{\delta h} \left( - \frac{\delta h}{\delta x} \text{sen } A + \frac{\delta h}{\delta y} \text{cos } A \right) \quad (6.9)$$

$$\frac{\delta h}{\delta x} = \frac{1}{D_x D_y} \{ y [h_3 - h_4] + (Dy - y) (h_2 - h_1) \} \quad (6.10)$$

$$\frac{\delta h}{\delta y} = \frac{1}{D_x D_y} \{ X [h_3 - h_2] + (Dx - x) (h_4 - h_1) \} \quad (6.11)$$

El procedimiento de cálculo en el modelo numérico se desarrolla como sigue:

- 1.) Se supone  $K_{n+1} = K_n$  y  $C_{n+1} = C_n$ .
- 2.) Se calculan las coordenadas  $X_{n+1} = Y_{n+1}$  y el ángulo del oleaje  $A_{n+1}$  con las ecuaciones 6.2, 6.3 y 6.4.
- 3.) Se calcula el valor de  $C_{n+1}$  y  $K_{n+1}$ .
- 4.) Se repite el cálculo a partir de 2.) y 3.) hasta que la diferencia de  $K_{n+1}$  cumpla con la siguiente desigualdad:

$$D_n (K_{n+1} - K_n) < 0.01$$

Se termina la ejecución del cálculo cuando el oleaje cae fuera del rango de la malla o cuando encuentra la profundidad especificada.

En base al procedimiento expuesto anteriormente se estructuraron dos programas para computadora.

El primero de ellos, denominado "PROF I", se alimenta con los datos de una malla de profundidades (como las mostradas en las figuras 6.2 y 6.3) de la zona de estudio con lo cual se genera un archivo de datos. Enseguida se muestra el listado del programa para generar dicha malla.

```

10 REM ***** CALCULO DE REFRACCION DEL OLEAJE ETAPA-1 *****
20 REM ***** DEFINIR LA MALLA DEL CALCULO Y TECLEAR LAS PROFUNDIDADES**
30 REM *****
40 REM ***** NOMBRE DEL ARCHIVO DONDE SE GUARDAN LOS DATOS *****
50 INPUT "NOMBRE DEL ARCHIVO";NAM$
60 REM ***** DEFINIR LA MALLA *****
70 INPUT "DX(M)=";DX: INPUT "DY(M)=";DY
80 INPUT " IX=";IX: INPUT " IY=";IY
90 DIM H(IX,IY)
    
```

```

100 REM ***** TECLEAR LAS PROFUNDIDADES *****
110 FOR J=0 TO IY : Y=J*DY: FOR I=0 TO IX : X=I*DX
120 PRINT "INPUT LA PROFUNDIDAD EN (M) H( ;I ; ;J ; ) ";
130 PRINT "( X(M) = ;X ; Y(M) = ;Y ; ) "; INPUT H(I,J) : PRINT
140 NEXT I : NEXT J
150 REM ***** GUARDAR LOS DATOS EN EL ARCHIVO *****
160 INPUT "INSTALAR EL F.P. DISCO Y TECLE (D) Y (CR) ";IK
170 FLNS="A: " : MID$(FLNS,3,8)=NAM$: OPEN FLNS FOR OUTPUT AS #2
180 PRINT #2,DX,DY,IX,IY
190 FOR J=0 TO IY : FOR I=0 TO IX : PRINT #2,H(I,J) : NEXT I : NEXT J
200 CLOSE : END
    
```

Una vez que se ha formado el archivo de datos de las profundidades discretizadas, se procede al cálculo de la refracción del oleaje, mediante el siguiente programa de computadora, el cuál denominaremos "REFRACCION".

```

10 CLS
20 '***** CALCULO DE REFRACCION DEL OLEAJE ETAPA 2 *****
30 '***** CALCULO DE REFRACCION E IMPRIMIR EL RESULTADO *****
40 '*****
50 '***** LEER LOS DATOS DEL ARCHIVO *****
60 DEFINT I-N
70 INPUT "NOMBRE DEL ARCHIVO";NAM$
80 FLNS="A: " : MID$(FLNS,3,8)=NAM$: OPEN FLNS FOR INPUT AS #2
90 INPUT #2,DX,DY,IX,IY : DIM H(IX,IY),XD(100),YD(100),ALFD(100)
100 FOR J=0 TO IY : FOR I=0 TO IX : INPUT #2,H(I,J) : NEXT I : NEXT J
110 CLOSE
120 '***** TECLEAR LOS DATOS DE LAS CONDICIONES DEL CALCULO *****
130 INPUT "PERIODO DEL OLEAJE T(SEG)";T
140 INPUT "INTERVALO DEL CALCULO DT(SEG)";DT
150 INPUT "LIMITE DE LA PROFUNDIDAD HLIM(M)";HLJM
160 '***** IMPRIMIR EL TITULO Y LAS CONDICIONES *****
170 INPUT "TITULO";AS : LPRINT AS
180 LPRINT "DX = ;DX ; (M) DY = ;DY ; (M) IX = ;IX ; IY = ;IY
190 LPRINT " T = ;T ; (SEG) DT = ;DT ; (SEG) HLIM = ;HLJM ; (M) "
200 '***** ENTRADA DE LOS DATOS (X) (Y) (ALF) *****
210 PRINT "COORDENADAS DEL PUNTO DEL INICIO DEL CALCULO (X),(Y) EN (M)"
    
```

```

220 PRINT "SI DESEA TERMINAR EL CALCULO , TECLE -1,-1 "
230 INPUT X0,Y0
240 IF X0<0 THEN GOTO 740
250 IF Y0<0 THEN GOTO 740
260 INPUT "DIRECCION DEL OLEAJE EN GRADOS (ALF)":ALF0
270 ALF0=ALF0*3.141592/180
280 X1=X0 : Y1=Y0 : ALF1=ALF0 : XD(1)=X1 : YD(1)=Y1
290 ALFD(1)=ALF1*180/3.141592 : ISTEP=1
300 '***** CHECAR SI EL PUNTO ESTA DENTRO DE LA MALLA O NO *****
310 ISTEP=ISTEP+1 : IF ISTEP>100 THEN GOTO 610
320 IF X1 <= 0 THEN GOTO 610
330 IF Y1 <= 0 THEN GOTO 610
340 IF X1 > (DX*IX) THEN GOTO 610
350 IF Y1 > (DY*IY) THEN GOTO 610
360 '***** CALCULO DE LA PROFUNDIDAD DEL PUNTO *****
370 X=X1 : Y=Y1 : GOSUB 750
380 H1=H0 : IF H1 < HLIM THEN GOTO 610
390 '***** CALCULO DE (C) (DC/DH) (DC/DN) Y (EK) *****
400 ALF=ALF1 : GOSUB 860
410 C1=C0 : CH1=CH0 : CN1=CN0 : EK1=EK0
420 '***** BUSCAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO 2 *****
430 IREP=0
440 C2=C1 : EK2=EK1
450 DIS=.5*DT*(C1+C2) : ALF2=ALF1+.5*DIS*(EK1+EK2) : ALFB=.5*(ALF1+ALF2)
460 X2=X1+DIS*COS(ALFB) : Y2=Y1+DIS*SIN(ALFB)
470 IF X2 <= 0 THEN GOTO 610
480 IF Y2 <= 0 THEN GOTO 610
490 IF X2 >= (DX*IX) THEN GOTO 610
500 IF Y2 >= (DY*IY) THEN GOTO 610
510 X=X2 : Y=Y2 : GOSUB 750
520 H2=H0 : IF H2 < HLIM THEN GOTO 610
530 ALF=ALF2 : GOSUB 860 : C2=C0 : CH2=CH0 : CN2=CN0
540 IREP=IREP+1 : IF IREP>20 THEN GOTO 580
550 ER1=DIS*ABS(EK2+CN2/C2) : IF ER1 < .01 THEN GOTO 590
560 EK2=EK0 : GOTO 450
570 '***** AVANZAR EL PUNTO DEL CALCULO *****
580 PRINT "IREP > 20 NOSE ENCUENTRA LA SOLUCION EXACTA EN ISTEP=" ;ISTEP
590 XD(ISTEP)=X2 : YD(ISTEP)=Y2 : ALFD(ISTEP)=ALF2*180/3.141592
600 X1=X2 : Y1=Y2 : ALF1=ALF2 : GOTO 300
610 '***** IMPRIMIR EL RESULTADO DEL CALCULO *****

```

```

620 IF ISTEP<=-2 THEN GOTO 210
630 PRINT " X(M) Y(M) ALF(GRADO)"
640 FOR I=1 TO (ISTEP-1)
650 PRINT USING " #####.## ";XD(I);YD(I);ALFD(I) : NEXT
660 PRINT "SI IMPRIME EL RESULTADO CON LA IMPRESORA TECLE (1),(CR)"
670 PRINT "SI NO TECLE (0),(CR)"
680 INPUT IPR2
690 IF IPR2=0 THEN GOTO 210
700 LPRINT " X(M) Y(M) ALF(GRADO)"
710 FOR I=1 TO (ISTEP-1)
720 LPRINT USING " #####.## ";XD(I);YD(I);ALFD(I) : NEXT : IPR2=0
730 LPRINT : GOTO 210
740 END
750 ***** SUBROUTINA PARA CALCULAR LA PROFUNDIDAD Y PENDIENTE DEL PUNTO*
760 NX=INT(X/DX) : NY=INT(Y/DY) : NX1=NX+1 : NY1=NY+1
770 RX=(X-NX*DX)/DX : RY=(Y-NY*DY)/DY : IF RX>0 OR RY>0 THEN GOTO 790
780 H0=H(NX,NY) : HX=(H(NX1,NY)-H0)/DX : HY=(H(NX,NY1)-H0)/DY : RETURN
790 R1=SQR(RX*RX+RY*RY) : R2=SQR(((1-RX)*(1-RX)+RY*RY))
800 R3=SQR(((1-RX)*(1-RX)+(1-RY)*(1-RY))) : R4=SQR(RX*RX+(1-RY)*(1-RY))
810 RR1=1/R1 : RR2=1/R2 : RR3=1/R3 : RR4=1/R4 : RR0=RR1+RR2+RR3+RR4
820 H0=RR1*H(NX,NY)+RR2*H(NX1,NY)+RR3*H(NX1,NY1)+RR4*H(NX,NY1) :
H0=H0/RR0
830 HX=RY*(H(NX1,NY1)-H(NX,NY1))+(1-RY)*(H(NX1,NY)-H(NX,NY)) : HX=HX/DX
840 HY=RX*(H(NX1,NY1)-H(NX1,NY))+(1-RX)*(H(NX,NY1)-H(NX,NY)) : HY=HY/DY
850 RETURN
860 ***** SUBROUTINA PARA CALCULAR (C) (C/C/H) (C/C/N) Y (EK) *****
870 SIG=3.141592*2/T : D=H0/9.8*SIG*SIG
880 D=D*(D+1/(1+D*(.6522+D*(.4622+D*(.0864+D*(.0675)))))) : D=SQR(D)
890 C0=2*3.141592*H0/D/T : TH=(EXP(D)-EXP(-D))/(EXP(D)+EXP(-D))
900 TH=1-TH*TH : CH0=9.8/C0*TH/(1+9.8*H0/C0/C0*TH)
910 CNO=CH0*(-HX*SIN(ALF)+HY*COS(ALF)) : EKO=-CNO/C0 : RETURN

```

#### 6.4 Aplicación al Proyecto del Desarrollo Náutico en Cancún, Quintana Roo.

Como ya se mencionó anteriormente, para la realización de éste proyecto turístico se realizaron los estudios de refracción del oleaje para las direcciones Este, Sureste y Noreste con períodos de 5, 7 y 9 segundos para cada dirección.

Para cada uno de estos períodos y direcciones del oleaje, se realizó el estudio de refracción del oleaje en dos fases.

En la primera de ellas el estudio de refracción se hizo tomando como base la batimetría obtenida del portulano No. S.M.924 "México-Costa Este de la Isla Mujeres a Isla Cozumel, publicado por la Dirección General de Oceanografía de la Secretaría de Marina; la cuál tuvo que ser discretizada para poder generar una malla de profundidades por medio del programa "PROF I", para la condición de aguas profundas.

Se seleccionaron los frentes de oleaje en aguas profundas en base a cada dirección del oleaje y se procedió a el cálculo de la refracción del oleaje utilizando el programa de computadora "REFRACCION", el cuál nos da la variación que sufre las ortogonales en cuanto a su dirección por efecto de la profundidad.

En las siguientes tablas se dan los resultados obtenidos para la refracción del oleaje en aguas profundas por medio del programa "REFRACCION" para la dirección Este con período de 7 segundos para cada una de las ortogonales consideradas dentro del frente de oleaje; así mismo en la figura 6.7 se muestra el plano de oleaje para está condición analizada.

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SÉG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	15000.00	180.00
6.00	35362.33	15000.00	180.00
11.00	33724.65	15000.00	180.00
16.00	32086.97	15000.00	180.00
21.00	30499.30	15000.00	180.00
26.00	28811.62	15000.00	180.00
31.00	27173.95	15000.00	180.00
36.00	25536.27	15000.00	180.00
41.00	23898.60	15000.00	180.00
46.00	22260.97	15000.00	180.00
51.00	20625.56	15001.46	179.80
56.00	19009.23	15017.08	179.21
61.00	17405.30	15043.35	178.94
66.00	15814.86	15076.53	178.54
71.00	14249.33	15122.61	177.99
76.00	12734.95	15209.69	175.15
81.00	11343.81	15330.49	175.33
86.00	10032.89	15424.07	176.29
91.00	8956.92	15469.09	181.50
96.00	8234.11	15252.32	209.59

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	16000.00	180.00
6.00	35362.33	16000.00	180.00
11.00	33724.65	16000.00	180.00
16.00	32086.97	16000.00	180.00
21.00	30499.30	16000.00	180.00
26.00	28811.62	16000.00	180.00
31.00	27173.95	16000.00	180.00
36.00	25536.27	16000.00	180.00
41.00	23898.61	16000.00	180.00
46.00	22261.23	16000.11	179.98
51.00	20635.22	16008.37	179.32
56.00	19035.09	16040.27	178.38
61.00	17445.32	16101.24	177.15
66.00	15866.14	16195.47	176.10
71.00	14316.89	16311.55	174.89
76.00	12824.35	16463.12	173.72
81.00	11400.71	16603.55	175.30
86.00	10047.76	16712.06	174.94
91.00	8876.44	16835.21	173.98
96.00	7830.37	16903.89	177.48
101.00	6850.54	16925.40	180.00
106.00	5989.02	16886.39	185.51
111.00	5322.11	16710.54	202.63

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	17000.00	180.00
6.00	35362.33	17000.00	180.00
11.00	33724.65	17000.00	180.00
16.00	32086.97	17000.00	180.00
21.00	30449.30	17000.00	180.00
26.00	28811.62	17000.00	180.00
31.00	27173.95	17000.00	180.00
36.00	25536.27	17000.00	180.00
41.00	23898.65	17000.01	180.00
46.00	22264.92	17002.12	179.66
51.00	20657.90	17025.51	178.54
56.00	19083.62	17090.10	176.70
61.00	17531.42	17204.26	174.89
66.00	15998.26	17368.19	172.86
71.00	14490.04	17589.94	170.67
76.00	13043.74	17850.06	169.00
81.00	11637.09	19138.06	166.59
86.00	10378.39	18515.21	159.76
91.00	9299.33	18949.75	156.92
96.00	8264.29	19375.65	158.67
101.00	7204.11	19780.49	159.49
106.00	6162.62	20158.93	159.27
111.00	5211.27	20535.26	157.55
116.00	4371.16	20907.50	154.08
121.00	3649.43	21270.10	153.07

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO = 7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	18000.00	180.00
6.00	35362.33	18000.00	180.00
11.00	33724.65	18000.00	180.00
16.00	32086.97	18000.00	180.00
21.00	30449.30	18000.00	180.00
26.00	28811.62	18000.00	180.00
31.00	27173.95	18000.00	180.00
36.00	25536.28	18000.00	180.00
41.00	23898.99	18000.12	179.98
46.00	22275.75	18007.11	179.46
51.00	20685.13	18040.02	178.24
56.00	19133.23	18094.38	177.78
61.00	17608.00	18158.30	177.31
66.00	16102.95	18242.51	176.25
71.00	14424.13	18360.92	174.41
76.00	13186.84	18524.55	172.87
81.00	11801.29	18715.55	170.72
86.00	10562.88	18982.49	164.57
91.00	9448.06	19308.79	163.90
96.00	8351.87	19615.10	165.23
101.00	7248.73	19894.34	166.25
106.00	6173.32	20174.96	163.77
111.00	5195.64	20478.49	161.44
116.00	4328.48	20796.24	157.60
121.00	3594.38	21110.96	156.06

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	19000.00	180.00
6.00	35362.33	19000.00	180.00
11.00	33724.65	19000.00	180.00
16.00	32086.97	19000.00	180.00
21.00	30449.30	19000.00	180.00
26.00	28811.62	19000.00	180.00
31.00	27173.95	19000.00	180.00
36.00	25536.33	19000.01	180.00
41.00	23899.87	19000.85	179.88
46.00	22892.19	19013.21	179.08
51.00	20727.48	19053.15	178.00
56.00	19189.38	19131.41	176.29
61.00	17679.21	19245.54	175.12
66.00	16193.04	19383.13	174.39
71.00	14730.06	19530.07	174.16
76.00	13295.31	19672.08	174.61
81.00	11950.09	19816.01	171.97
86.00	10778.63	20044.65	167.68
91.00	9640.90	20291.64	167.86
96.00	8515.47	20532.89	167.81
101.00	7413.58	20776.25	167.10
106.00	6374.63	21038.26	164.17
111.00	5408.67	21329.18	162.17
116.00	4535.77	21623.40	161.12
121.00	3763.05	21888.50	161.59

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO = 7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha'$ grados.
1.00	37000.00	20000.00	180.00
6.00	35362.33	20000.00	180.00
11.00	33724.65	20000.00	180.00
16.00	32086.97	20000.00	180.00
21.00	30449.30	20000.00	180.00
26.00	28811.62	20000.00	180.00
31.00	27173.96	20000.00	180.00
36.00	25536.65	20000.11	179.98
41.00	23906.06	20006.41	179.42
46.00	22307.10	20027.48	179.11
51.00	20743.98	20047.49	179.28
56.00	19219.32	20061.84	179.66
61.00	17714.67	20069.32	179.64
66.00	16232.20	20085.22	179.00
71.00	14769.44	20124.49	178.03
76.00	13327.36	20181.71	177.14
81.00	11991.30	20303.91	172.37
86.00	10823.04	20461.30	172.23
91.00	9668.31	20617.15	172.44
96.00	8537.43	20767.34	172.41
101.00	7411.56	20921.32	171.64
106.00	6364.63	21092.86	169.91
111.00	5376.50	21286.39	167.69
116.00	4479.41	21500.13	166.00
121.00	3712.46	21693.29	166.36

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	21000.00	180.00
6.00	35362.33	21000.00	180.00
11.00	33724.65	21000.00	180.00
16.00	32086.97	21000.00	180.00
21.00	30449.30	21000.00	180.00
26.00	28811.63	21000.00	180.00
31.00	27173.99	21000.00	180.00
36.00	25537.97	21000.22	179.97
41.00	23920.24	21005.36	179.65
46.00	22324.61	21021.57	179.17
51.00	20747.39	21050.91	178.66
56.00	19216.03	21092.26	178.03
61.00	17709.95	21152.27	177.44
66.00	16227.84	21220.03	177.44
71.00	14768.32	21277.29	178.02
76.00	13333.74	21329.39	177.23
81.00	12031.47	21418.49	175.41
86.00	10833.73	21508.39	175.88
91.00	9666.07	21590.27	175.99
96.00	8517.06	21673.14	175.79
101.00	7396.28	21759.36	175.36
106.00	6342.20	21851.18	174.73
111.00	5364.44	21952.88	173.01
116.00	4470.71	22071.63	172.12
121.00	3668.97	22185.43	171.91

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

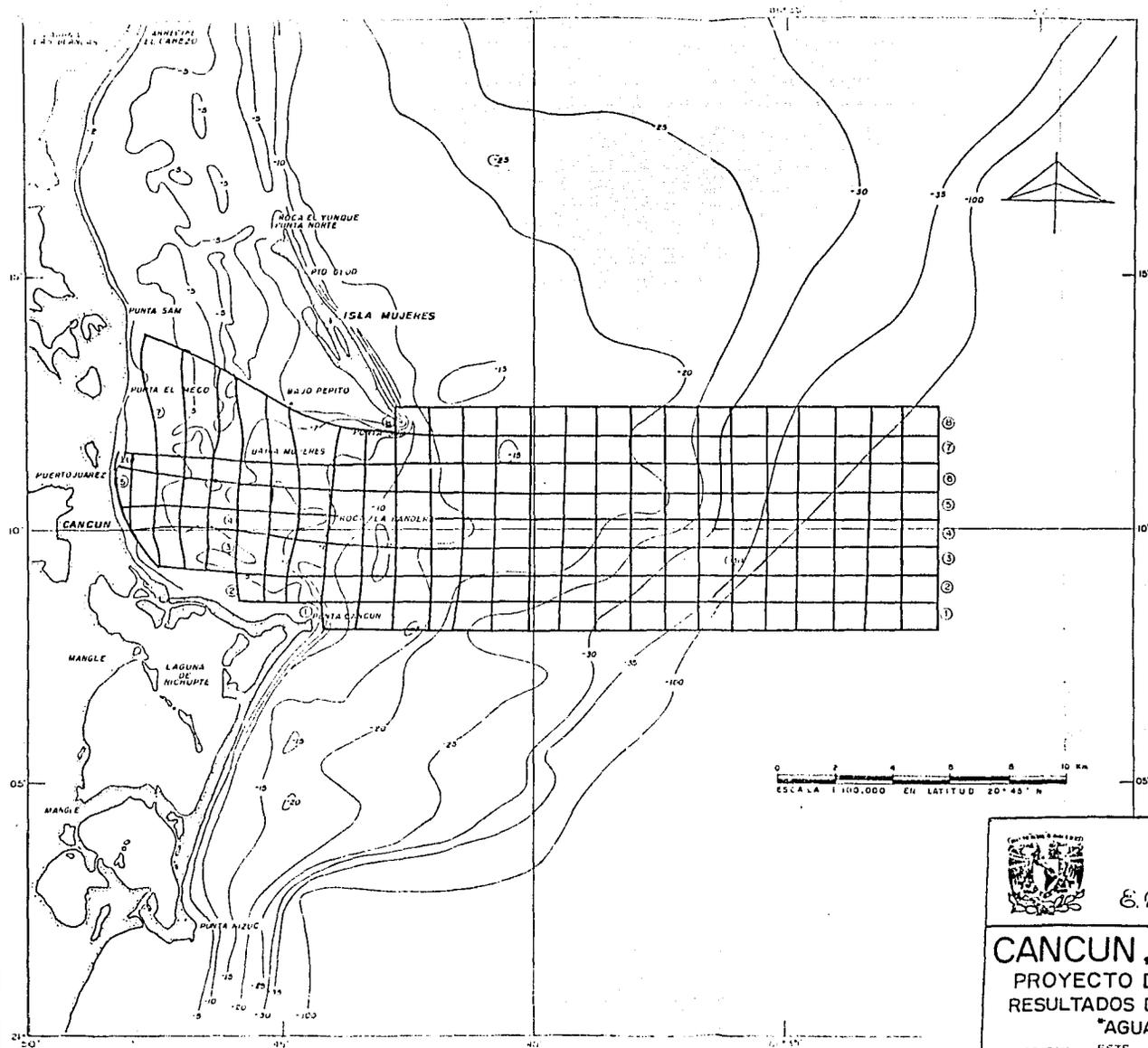
Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	22000.00	180.00
6.00	35362.33	22000.00	180.00
11.00	33724.65	22000.00	180.00
16.00	32086.97	22000.00	180.00
21.00	30449.30	22000.00	180.00
26.00	28811.64	22000.00	180.00
31.00	27174.05	22000.01	180.00
36.00	25538.77	22001.24	179.80
41.00	23294.83	22017.39	179.13
46.00	22336.14	22048.62	178.60
51.00	20765.80	22096.43	177.81
56.00	19238.18	22167.56	177.03
61.00	17743.52	22252.13	176.49
66.00	16266.60	22350.51	175.89
71.00	14810.83	22463.84	175.15
76.00	13387.94	22598.34	174.10
81.00	12182.42	22735.98	171.04

**TABLA 6.1**  
**REFRACCION EN AGUAS PROFUNDAS.**  
**DIRECCION ESTE, PERIODO=7 SEG.**

Punto No.	X(m).	Y(m).	$\alpha$ grados.
1.00	37000.00	23000.00	180.00
6.00	35362.33	23000.00	180.00
11.00	33724.65	23000.00	180.00
16.00	32086.97	23000.00	180.00
21.00	30449.31	23000.00	180.00
26.00	28811.69	23000.01	180.00
31.00	27174.38	23000.15	179.98
36.00	25544.82	23003.43	179.70
41.00	23944.35	23020.72	178.99
46.00	22364.98	23059.86	178.17
51.00	20812.71	23130.00	176.63
56.00	19294.47	23231.83	175.92
61.00	17805.53	23340.93	175.71
66.00	16334.70	23453.10	175.57
71.00	14879.27	23568.56	175.36
76.00	13440.55	23679.12	175.89
81.00	12098.74	23770.24	175.27

De igual manera, para cada una de las direcciones y períodos del oleaje considerados se obtuvieron los listados de resultados (por medio del programa "REFRACCION"), con los cuales fueron dibujados los planos de oleaje.

En las figuras 6.6 a 6.14 se muestran los planos de oleaje para la condición de aguas profundas.



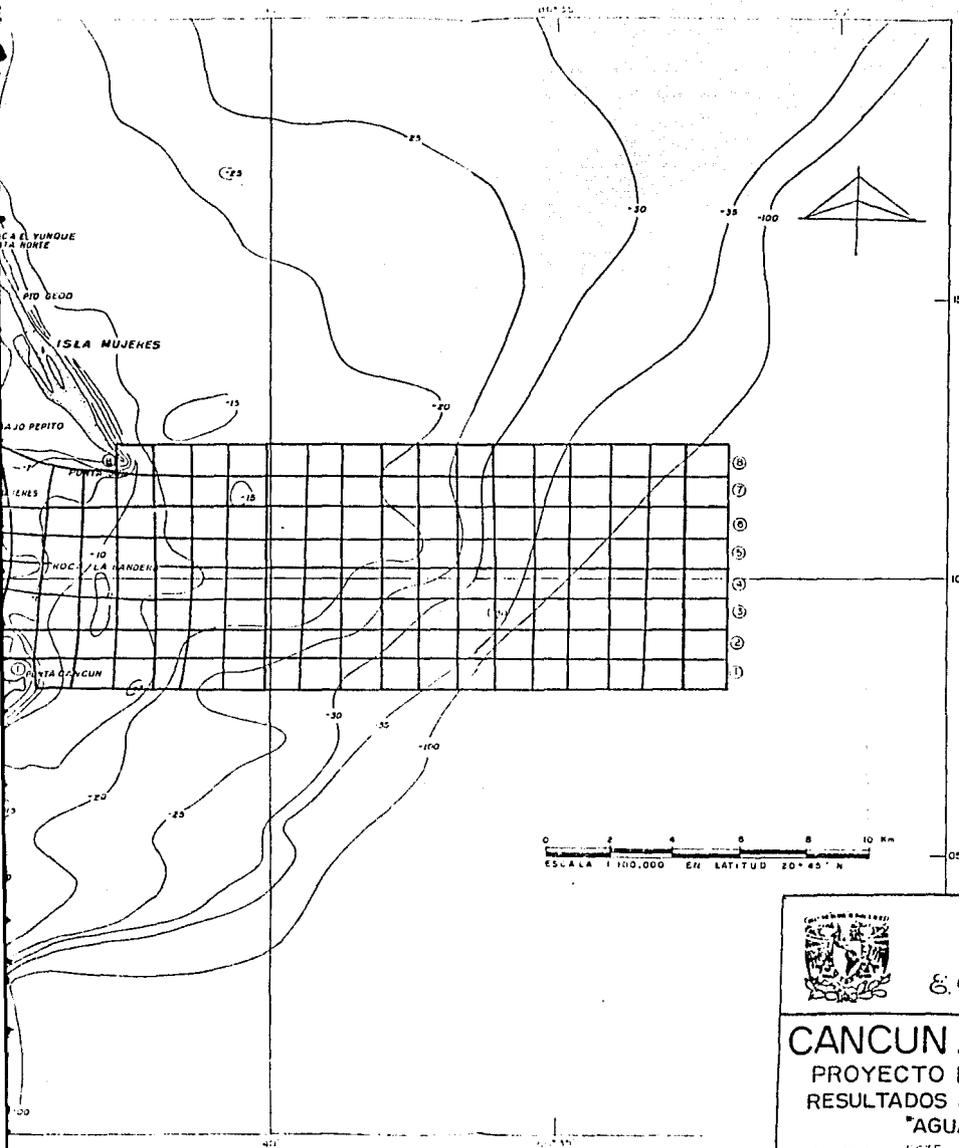
LA S  
DE  
FE  
SE  
LAS  
EN  
EL N  
EL N  
MED



E. N. E.

**CANCUN, Q**  
 PROYECTO DES  
 RESULTADOS DE F  
 "AGUAS P

DIRECCION: ESTE



LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO No 5M-924,  
DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE  
FECHA MAIZO DE 1985, ELABORADO POR LA  
SECRETARIA DE MARINA.

LAS COTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS  
EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL  
MEDIO DEL MARIN M.M.I. CON ELEVACION 0.00 m.

CANAL	Kr
(1)	1 0102
(2)	0 0535
(3)	0 8586
(4)	1 1508
(5)	0 8006
(6)	1 4142
(7)	0 4650
(8)	0 0483

0 2 4 6 8 10 Km  
ESCALA 1 100,000 EN LATITUD 20° 45' N



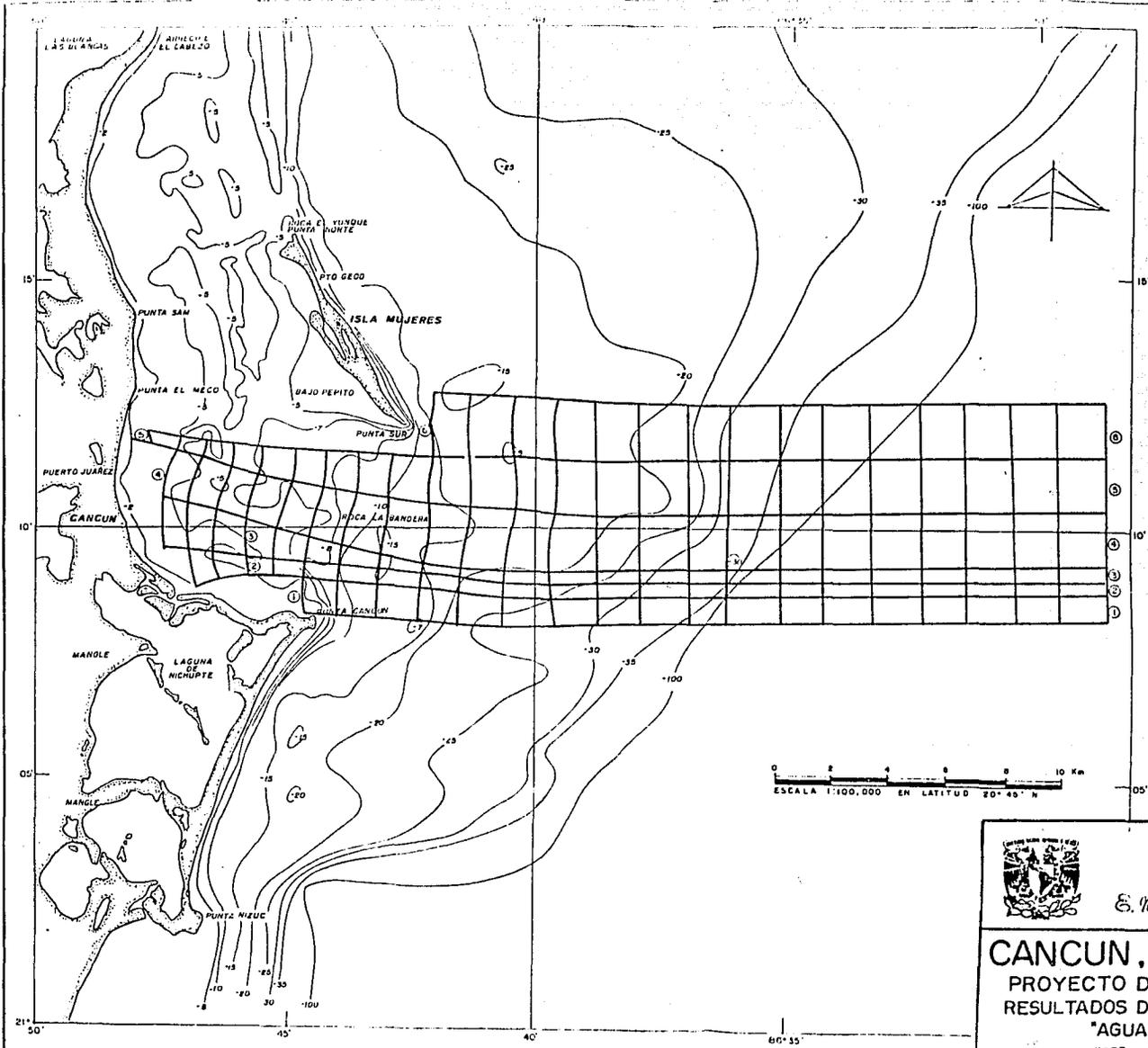
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

E. N. E. D. ARAZON



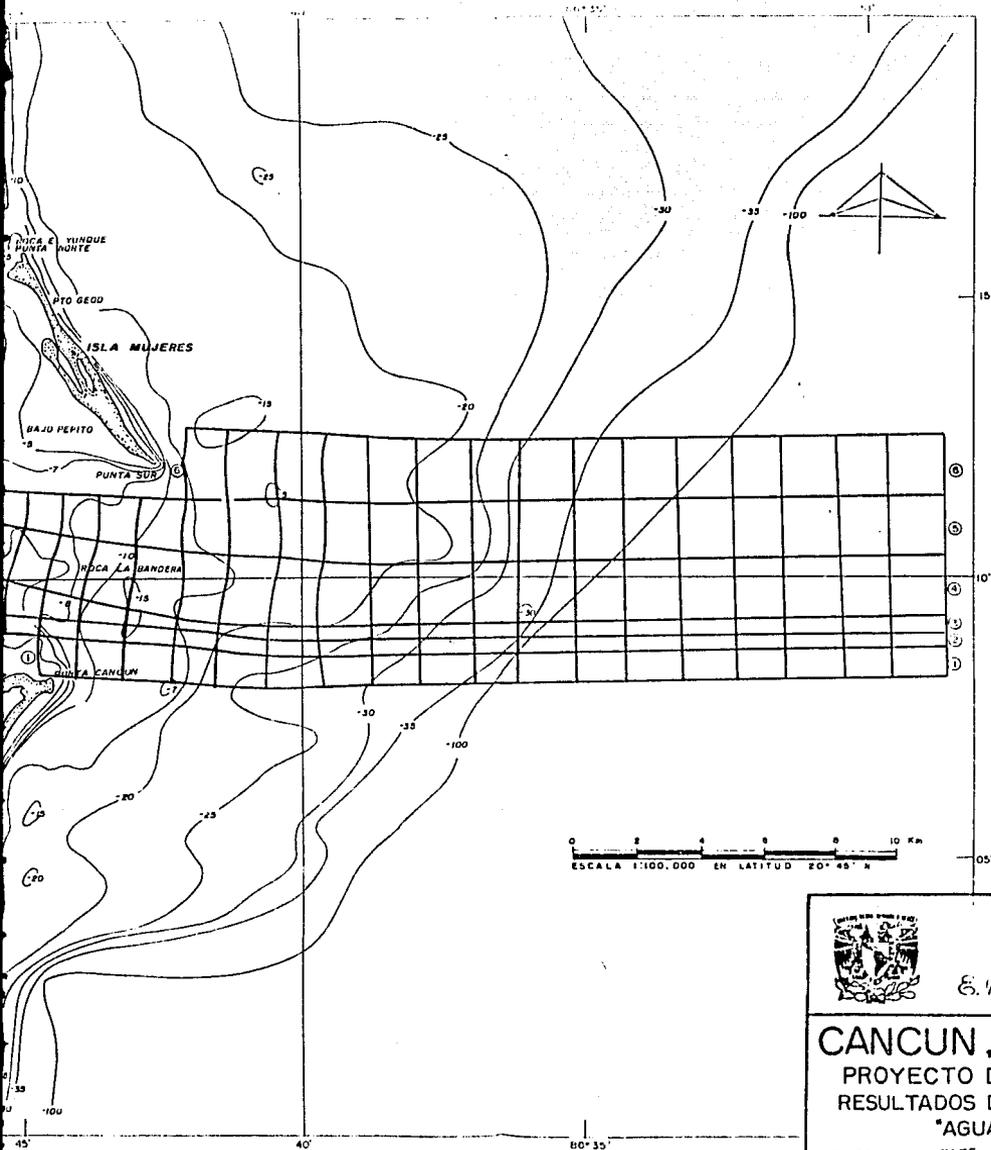
**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"

DIRECCION ESTE PERIODO 2 2009 FIG. 6 6



E. M. C.

**CANCUN, C**  
 PROYECTO DE  
 RESULTADOS DE  
 "AGUAS"  
 DIRECCION ESTE



LA DATUM LITIA SE TOMO DEL PLANO No SIM-924, DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE FECHA MAIJO DE 1965, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA.

LAS COTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON EL ELEVACION 0.00 M

CANAL	Kr
①	0.8606
②	0.7437
③	0.5534
④	1.0690
⑤	2.0000
⑥	0.9225



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉJICO

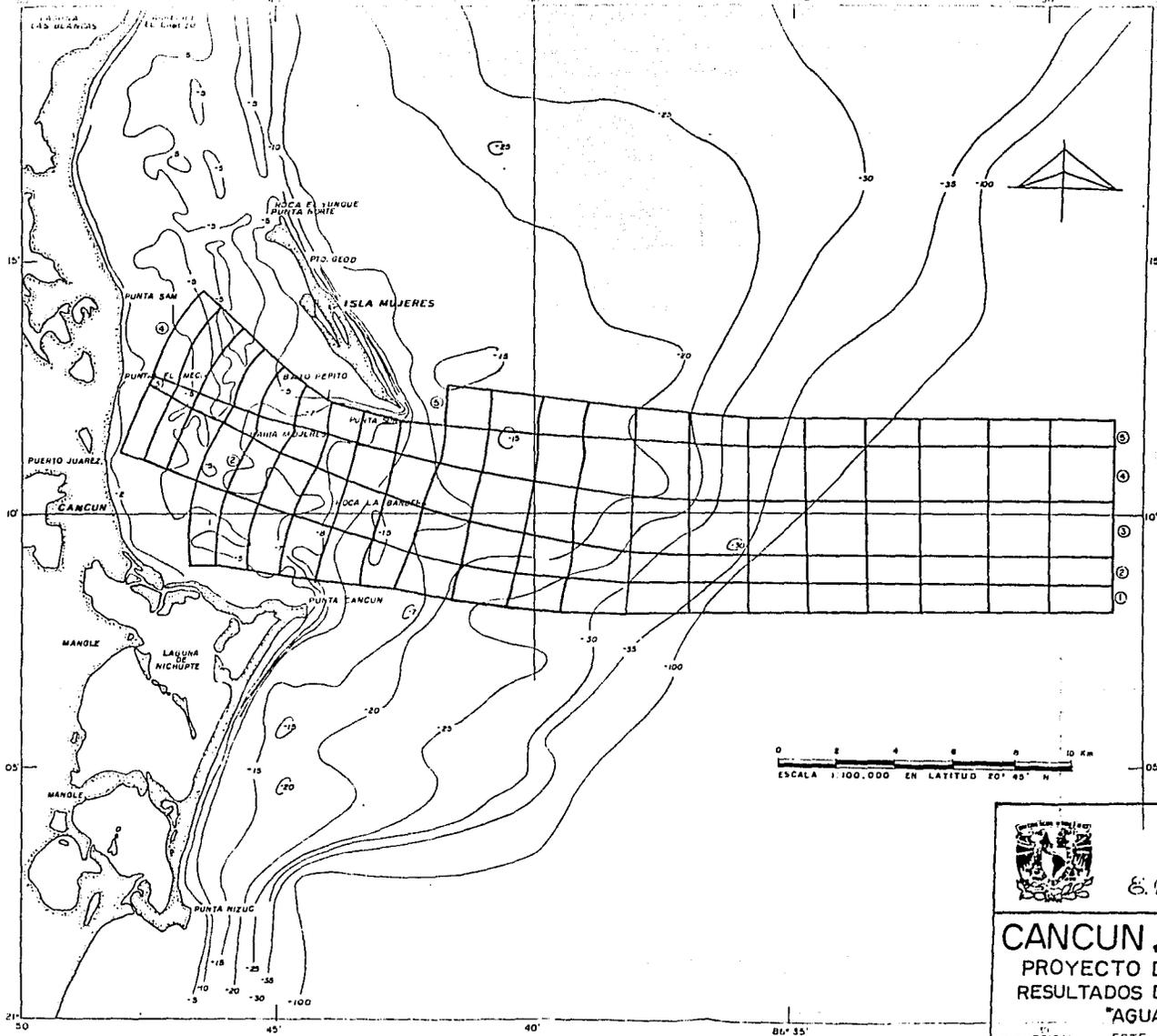
E. M. E. D. ARAJÓN



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
 "AGUAS PROFUNDAS"

DIRECCION ESTE PERIODO 1964

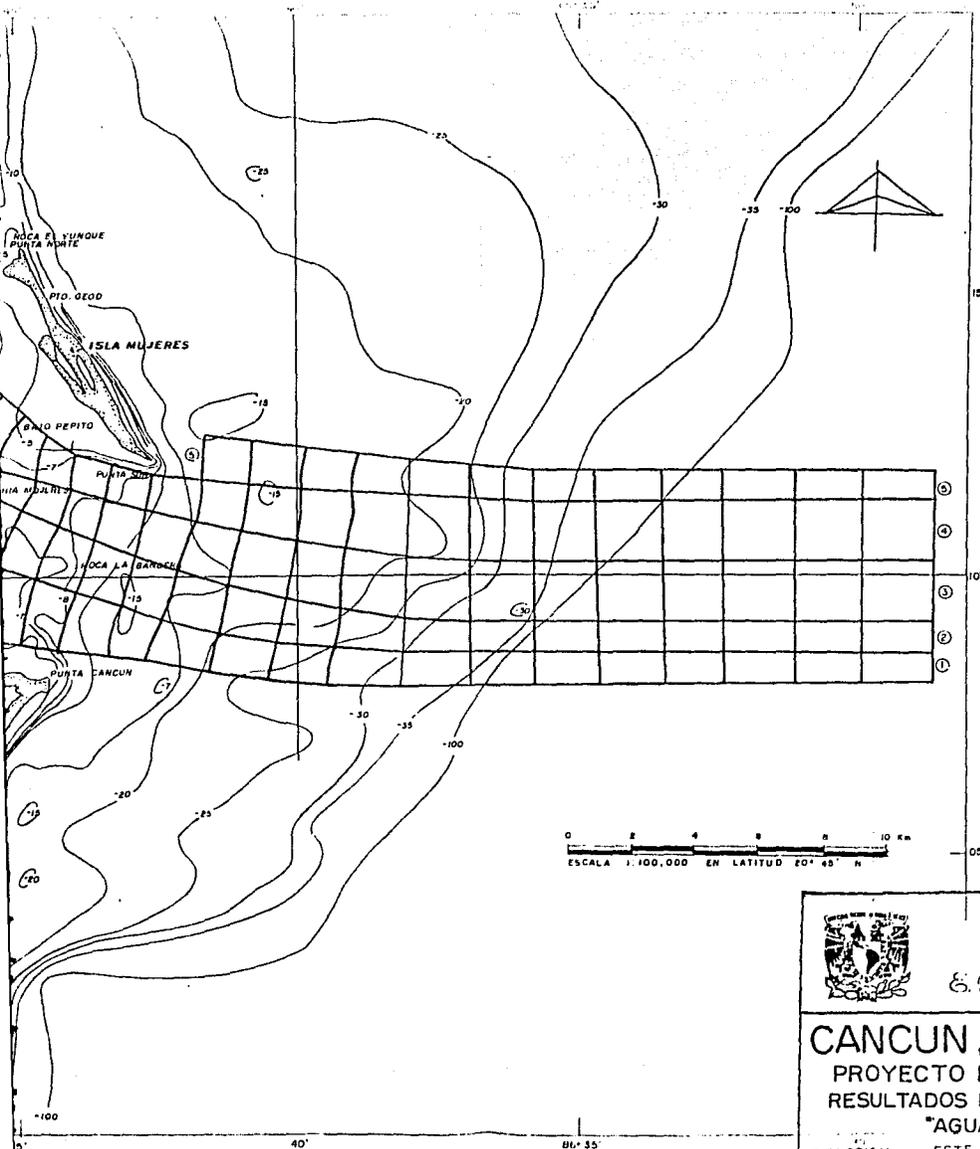
FIG. 6 7



E. N. S.

**CANCUN, C.**  
 PROYECTO DE  
 RESULTADOS DE  
 "AGUAS

DIRECCION ESTE



LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO No SM-924, DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE FECHA MARZO DE 1985, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA.

LAS ACOTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS EN METROS

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00 m

CANAL	Kr
①	0.6051
②	0.6733
③	2.3905
④	0.7559
⑤	0.8165

0 2 4 6 8 10 Km  
ESCALA 1:100,000 EN LATITUD 20° 45' N



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

E. M. E. D. ACRAGÓN

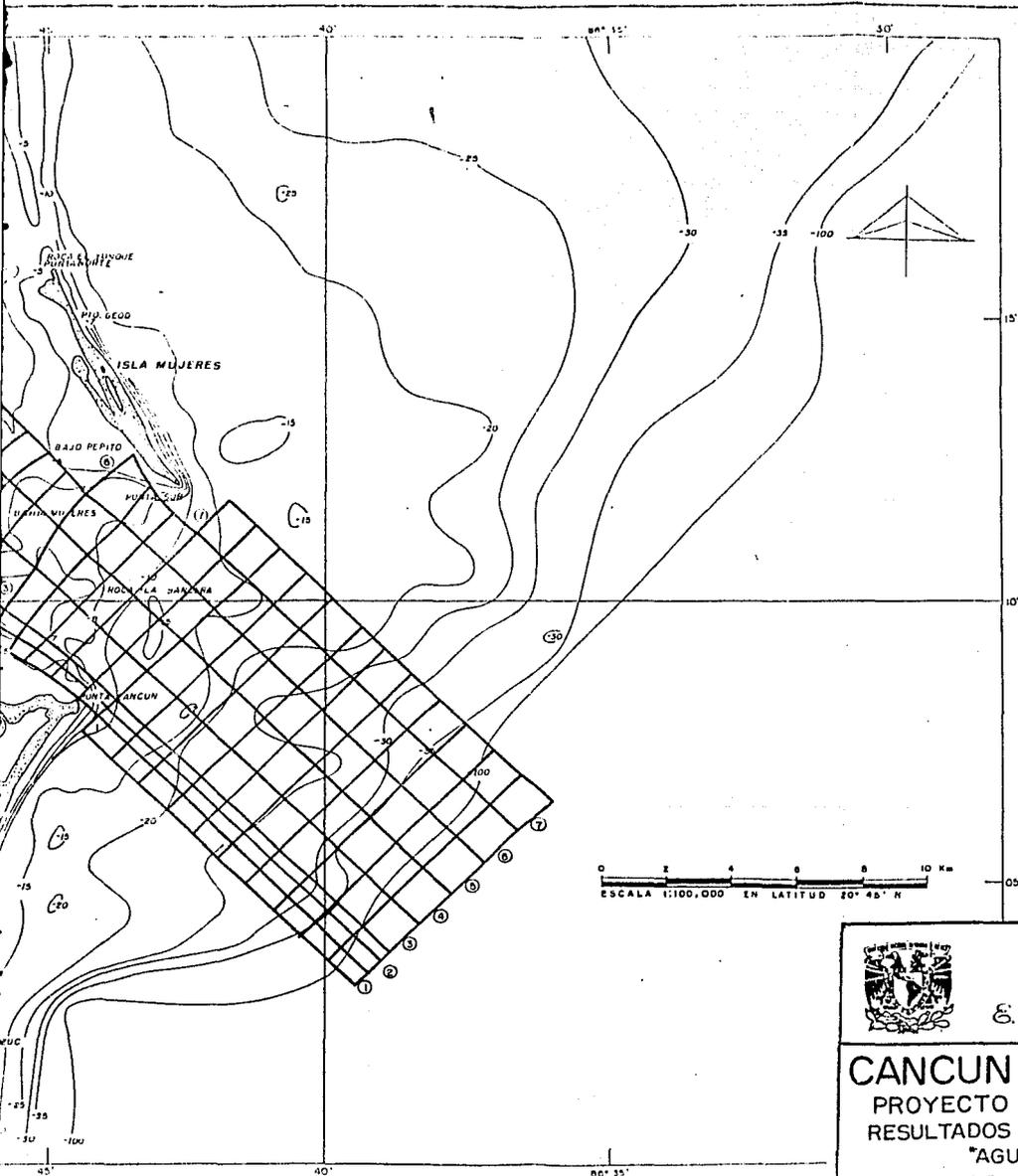


**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"

DIRECCION .. ESTE .. PERIODO .. 9 sep

FIG. 6 B





LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO N. SM-924, DENOMINADO ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL DE FECHA MAJZO DE 1985, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA

LAS ACOTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS EN METROS

EL NORTE CONSOLIDADO ES EL ASTRONOMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL DEL MAR (N.M.M) CON ELEVACION 0.00M

CANAL	Kr
①	0.9258
②	0.8017
③	0.9190
④	0.9045
⑤	0.0022
⑥	0.8584
⑦	0.0649

0 2 4 6 8 10 Km  
ESCALA 1:100,000 EN LATITUD 20° 45' N



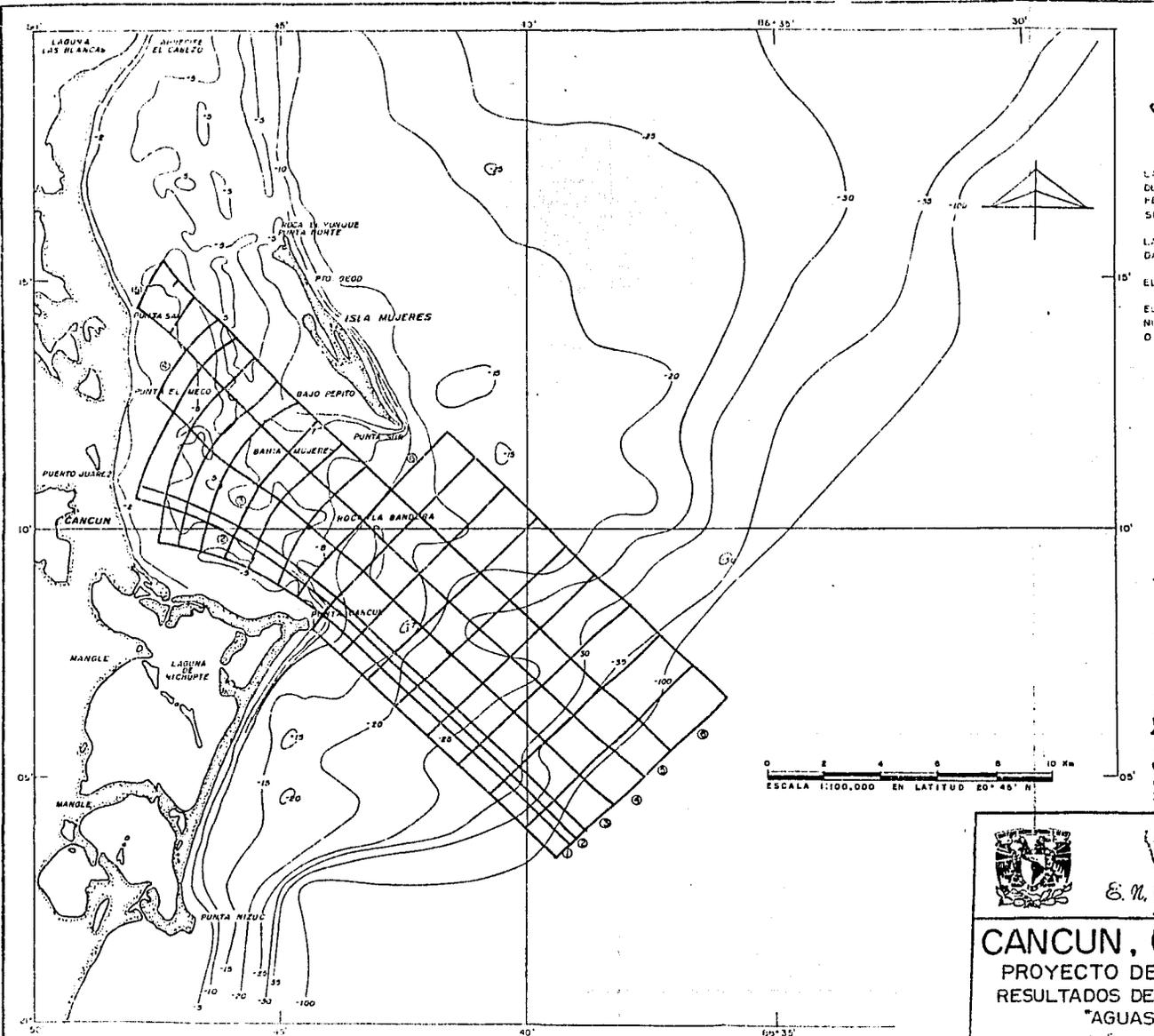
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

E. N. S. D. ARAGON



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"

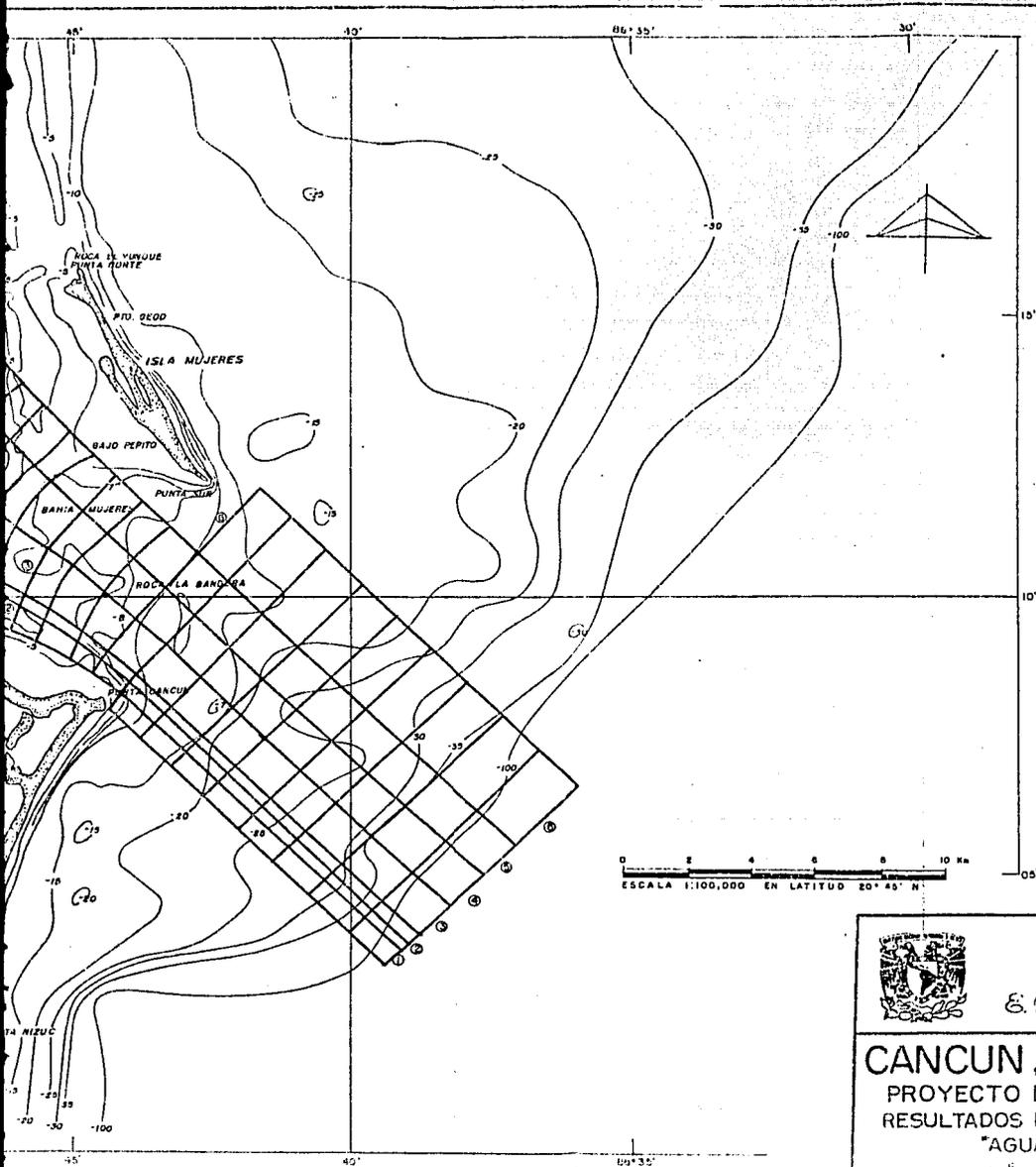
DIRECCION S. E. PERIODO 5-5-87 FIG. 6.6



E. N.

**CANCUN,**  
 PROYECTO DE  
 RESULTADOS DE  
 "AGUAS

DIR. GEN. DE E.



LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO N. SM-924, DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE FECHA MARZO DE 1965, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA.

LAS COTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00 m.

CANAL	Kr
①	1.0146
②	0.7840
③	0.8669
④	0.8300
⑤	0.8215
⑥	0.0738

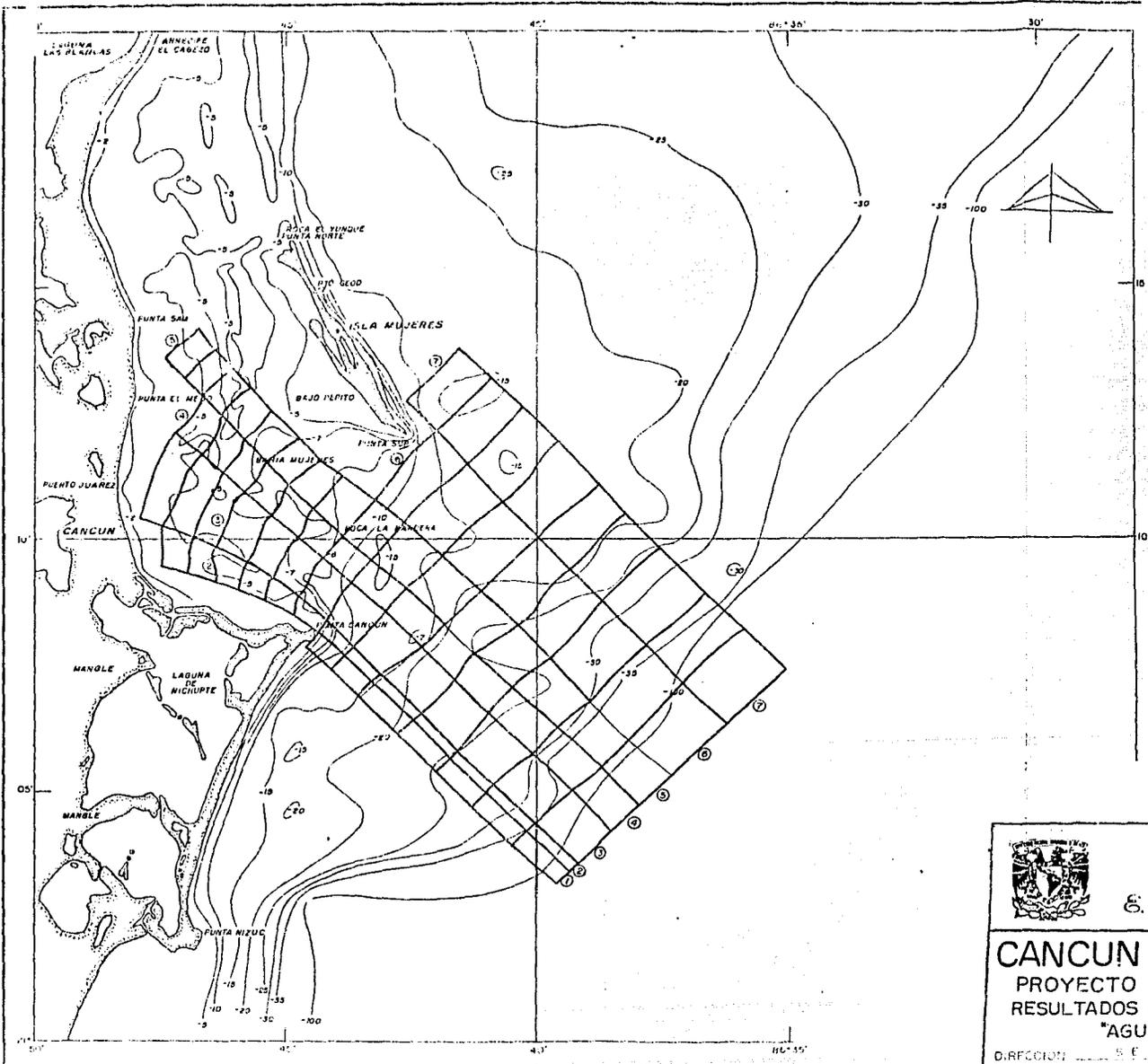


UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

E. N. E. D. ARAGON

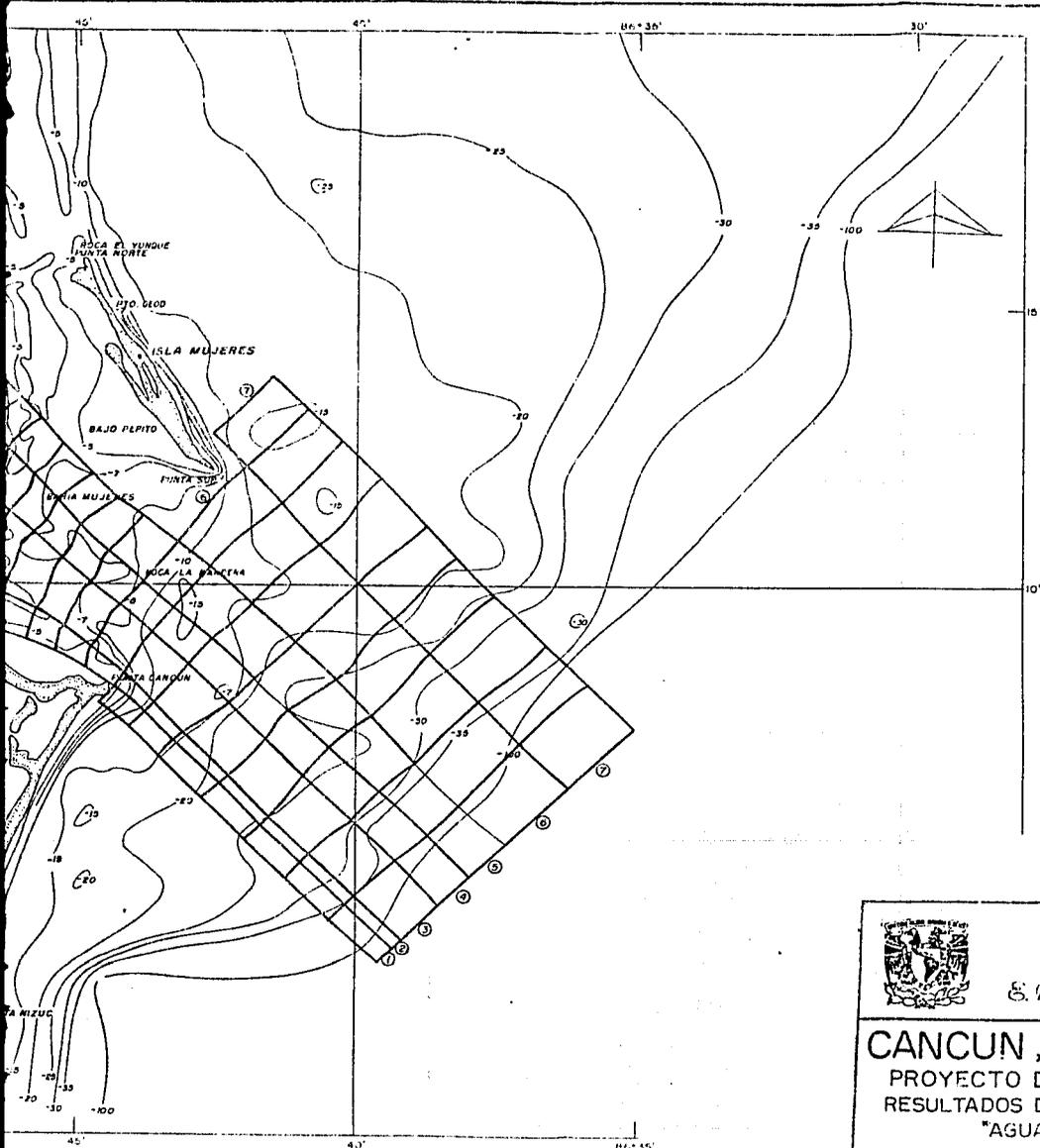


**CANCUN, QUINTANA ROO**  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
 "AGUAS PROFUNDAS"



**CANCUN**  
 PROYECTO  
 RESULTADOS  
 "AGUA"

DIRECCION



LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO No SIM-924, DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE FECHA MARZO DE 1985, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA.

LAS ACOTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTROGNOMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL DEL MAR (N.M.M) CON ELEVACION 0.00 m

CANAL	Kr
①	1.0351
②	0.5632
③	0.8665
④	0.9354
⑤	1.0328
⑥	0.9115
⑦	1.0092



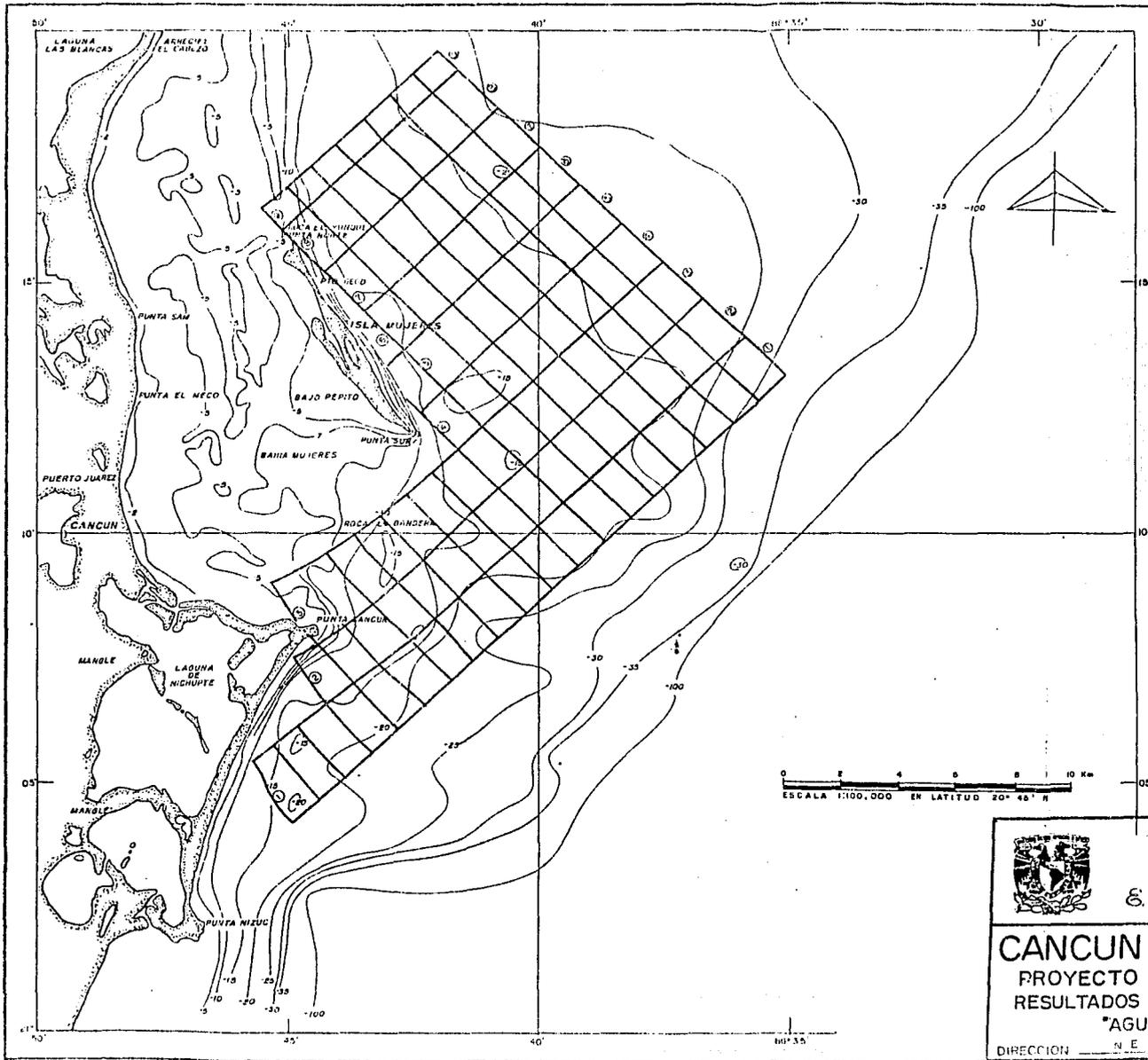
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

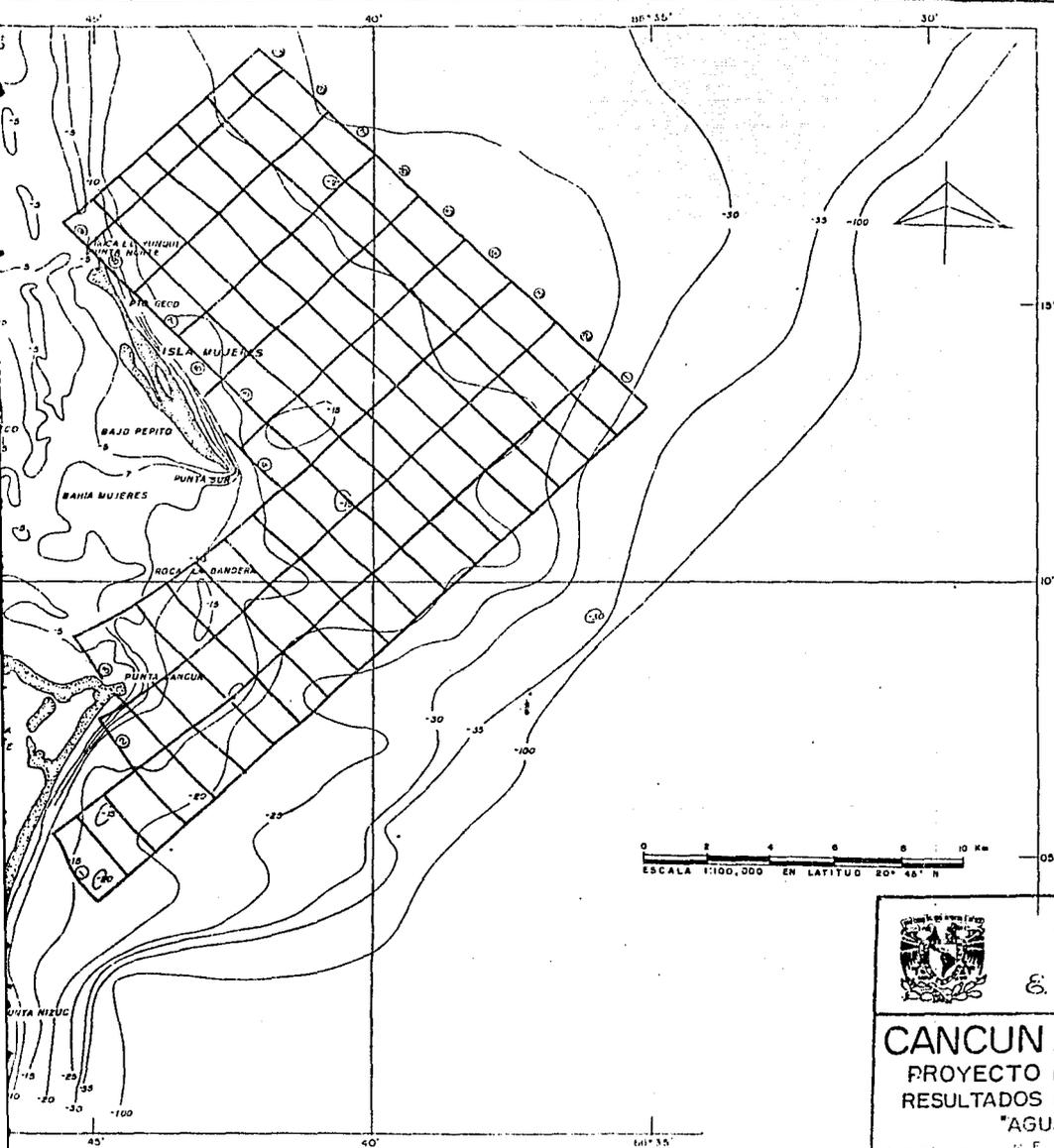
E. M. S. D. ARAÇON



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"

DIRECCION DE OCEANOGRAFIA Y METEOROLOGIA MARITIMA PERIODO 1985-1986 FIG. 011





LA DATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO No 5M 1924, DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE FECHA MARZO DE 1905, ELABORADO POR LA SECRETARIA DE MARINA.

LAS ACOTACIONES Y PROFUNDALES ESTAN DADAS EN METROS

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL DEL MAR EN M.M. CON ELEVACION 0.00 m

CANAL	Kr
①	0.8687
②	0.9759
③	0.8452
④	1.0127
⑤	1.0051
⑥	1.0028
⑦	0.9958
⑧	0.9903
⑨	0.9537

0 2 4 6 8 10 Km  
ESCALA 1:100,000 EN LATITUD 20° 45' N



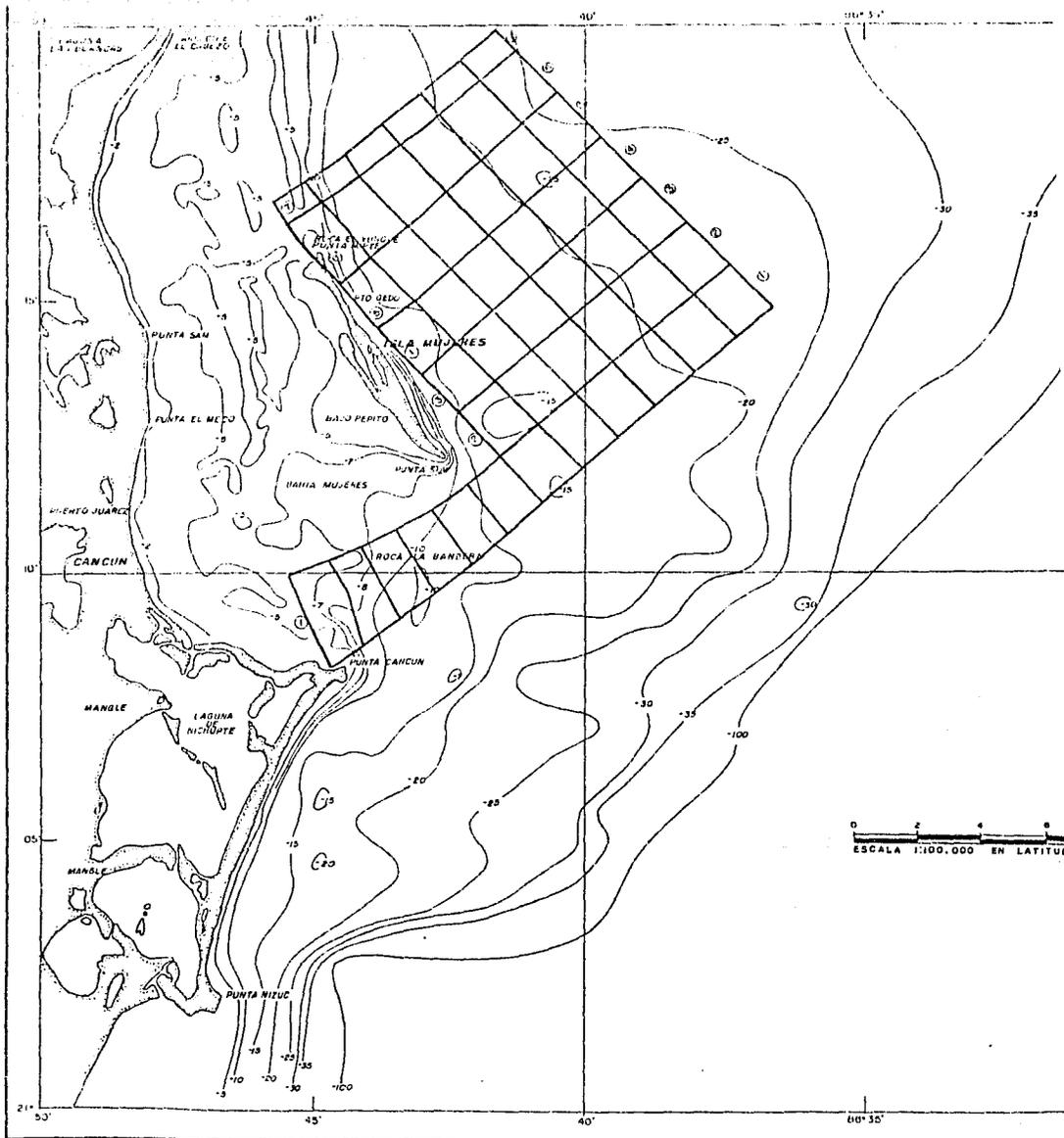
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

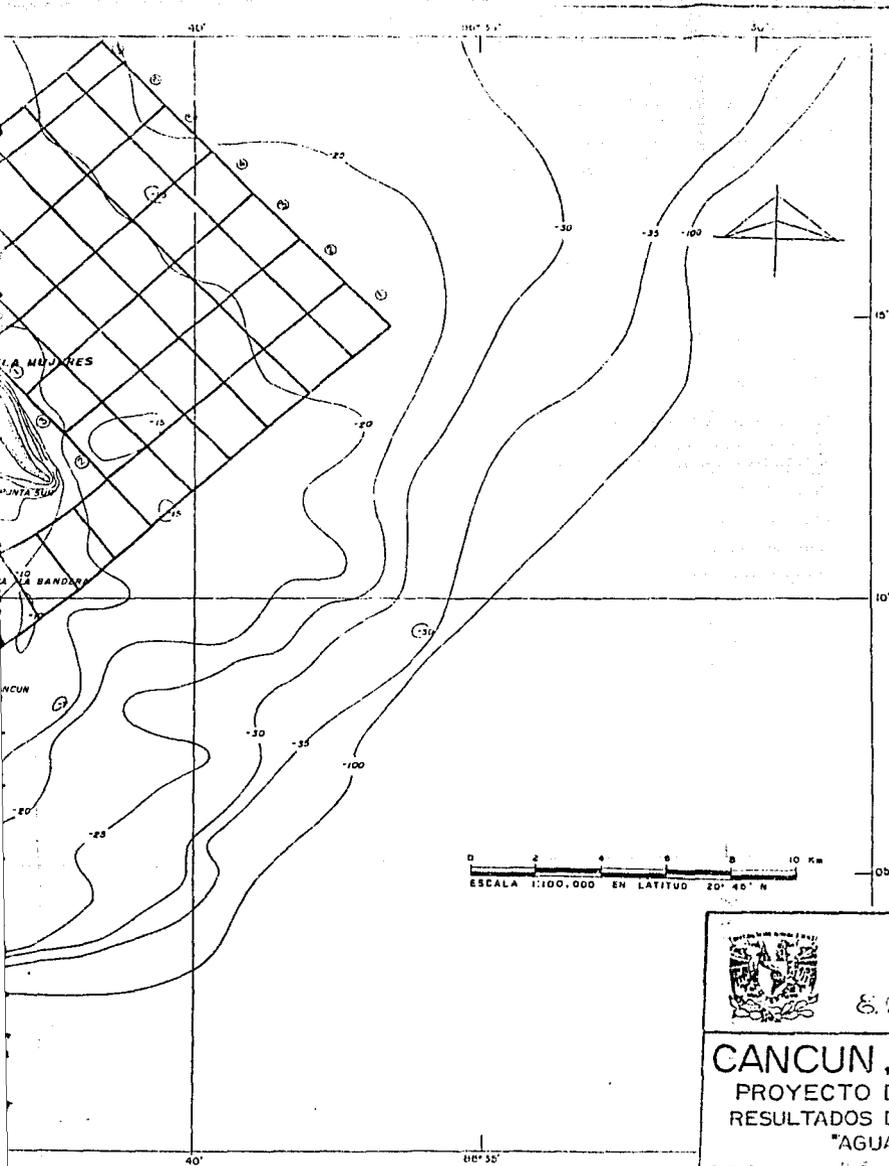
E. M. S. J. ARAZÓN



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"

DIRECCION N. E. No. 1000 1959 FIG. 6 12





LA BATIMETRIA SE TOMO DEL PLANO No 5M-924,  
DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE  
FECHA MARZO DE 1985, ELABORADO POR LA  
SECRETARIA DE MARINA.

LOS ACOTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN  
DADAS EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO.

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL  
MEDIO DEL MAR (N.M.M) CON ELEVACION 0.00 m



CANAL	Kr
①	0.7688
②	0.9916
③	1.0598
④	0.0032
⑤	0.9779
⑥	0.9129
⑦	1.0260

0 2 4 6 8 10 Km  
ESCALA 1:100,000 EN LATITUD 20° 40' N

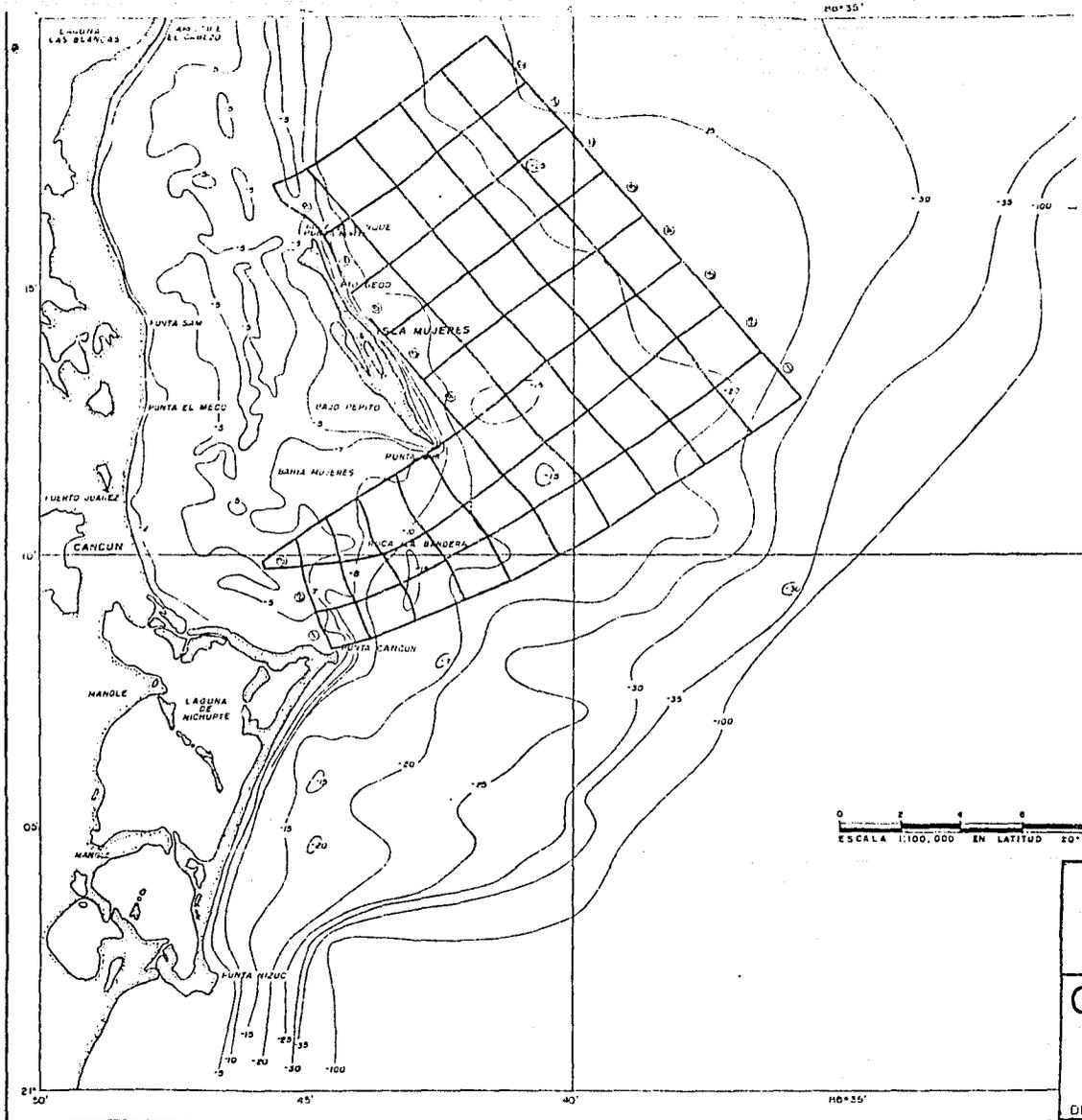


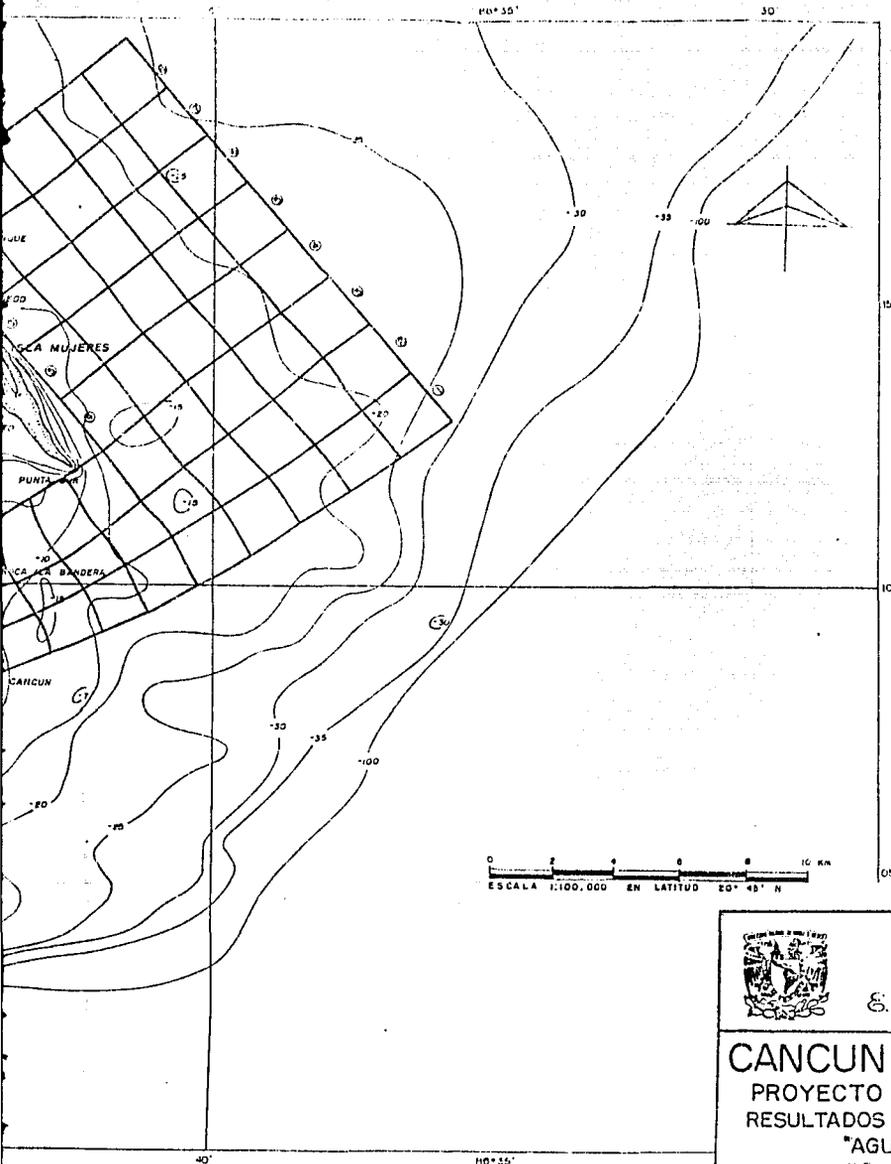
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

*E. M. S. D. ARAJÓN*



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
"AGUAS PROFUNDAS"





LA MATRIZ SE TOMO DEL PLANO No 5M-024,  
 DENOMINADO "ISLA MUJERES A ISLA COZUMEL" DE  
 FECHA MARZO DE 1985, ELABORADO POR LA  
 SECRETARIA DE MARINA.

LAS COTACIONES Y PROFUNDIDADES ESTAN DADAS  
 EN METROS.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL AZIMUTHICO

EL NIVEL DE REFERENCIA CORRESPONDE AL NIVEL  
 DEL MAR EN M.M. CON ELEVACION 0.00m

CANAL	Kr
①	0.2309
②	1.1180
③	2.5820
④	1.0478
⑤	0.9311
⑥	1.0741
⑦	1.0002
⑧	0.8089

0 2 4 6 8 10 KM  
 ESCALA 1:100,000 EN LATITUD 20° 45' N



UNIVERSIDAD NACIONAL  
 AUTÓNOMA DE  
 MÉXICO

E. N. E. D. ARAJÓN



CANCUN, QUINTANA ROO  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
 "AGUAS PROFUNDAS"

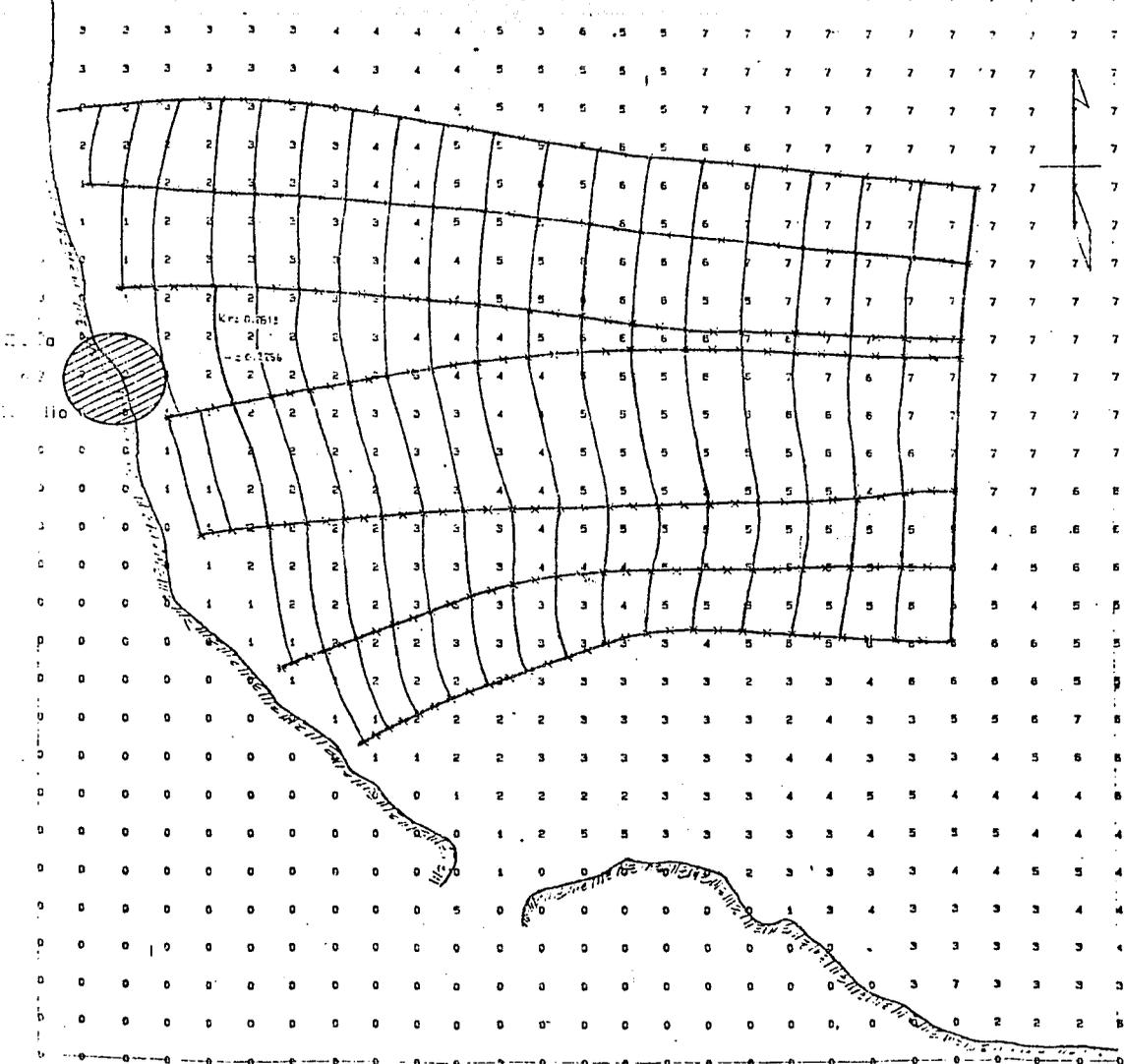
DIRECCION N E PERIODO 2.5.93 FIG. 6.14

En la segunda fase del estudio , que corresponde a la condición de aguas superficiales (aguas intermedias y bajas), se utilizó el plano batimétrico denominado "Batimetría General", plano No. 1 de 6 elaborados por FONATUR.

Al igual que para la condición de aguas profundas, en esta fase también se obtuvo una malla de profundidades discretizada para poder formar un archivo de datos por medio del programa "PROF I"; se alimentó esta información al programa "REFRACCION", y se continuó el estudio de refracción en la zona de aguas superficiales.

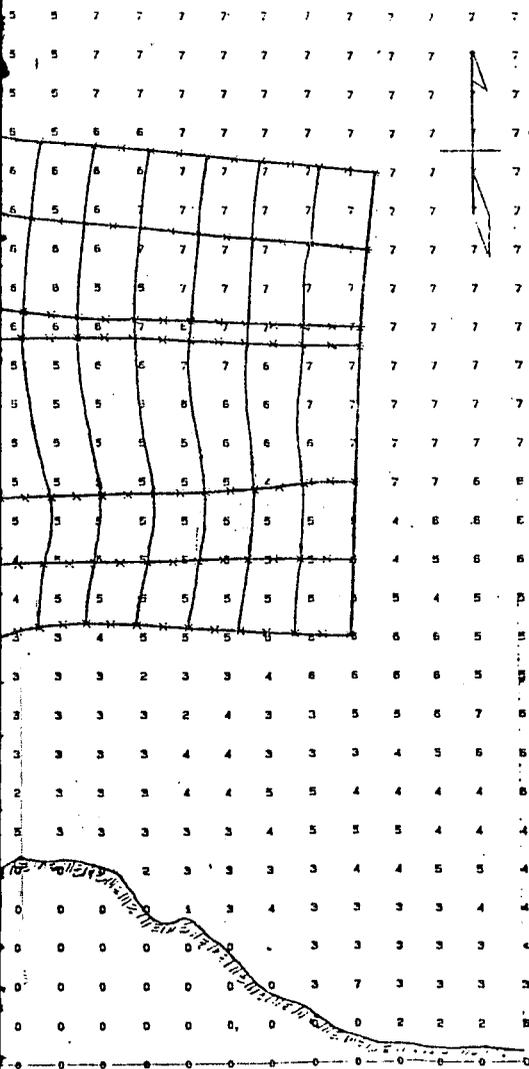
Cabe recordar que el origen de esta malla de profundidades coincide con el origen de la malla de profundidades de la región de aguas profundas; además se seleccionaron los frentes de oleaje más críticos obtenidos de la refracción en aguas profundas y se ubicaron dentro de la malla de profundidades para la región de aguas superficiales (aguas intermedias y bajas) con los cuales se continuaron los estudios de refracción del oleaje hasta llegar a la línea de la costa, para cada una de las direcciones y períodos de oleaje considerados.

En la sucesión de figuras 6.15 a 6.23 se presentan en forma gráfica los resultados del análisis de refracción de oleaje para la zona de aguas superficiales.



CANCUN ARAGON MALLACUN  
 T = 5.00 (1000) H = 1.00 (M) 1989

Dirección = E 1 - 5 seg.



Canal	Kf
1	0.8745
2	0.7431
3	1.0538
4	* 0.2813
5	0.8798
6	0.9986

\* Coeficiente en la zona de estudio

### NOTAS -

LAS CURVAS BATIMETRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMETRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

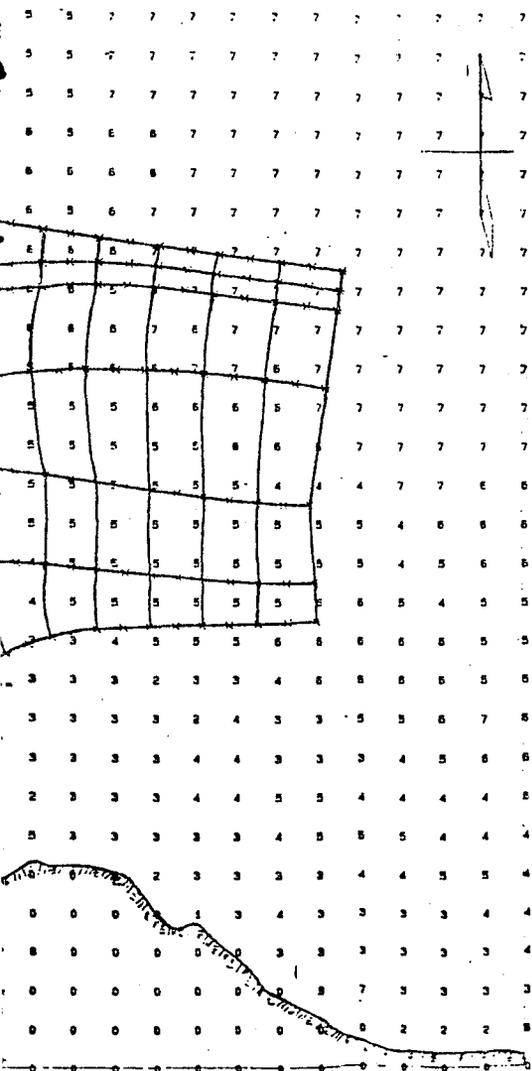
U.N.A.M.

FIG. 6.15  
 E.N.E.P. ARAGON  
 C A N C U N Q. R.  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = E T = 5 s



Canal	kr
1	0.4788
2	0.6960
3	2.7516
4	* 0.7486
5	0.6374
6	0.3724

\* Coeficiente en la zona de estudio



NOTAS -

LAS CURVAS BATIMETRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICD.

EL LEVANTAMIENTO BATIMETRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

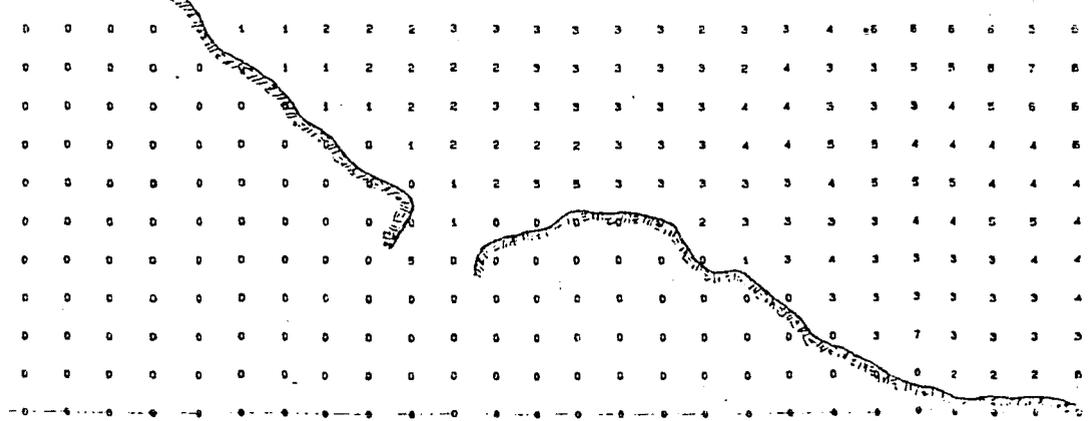
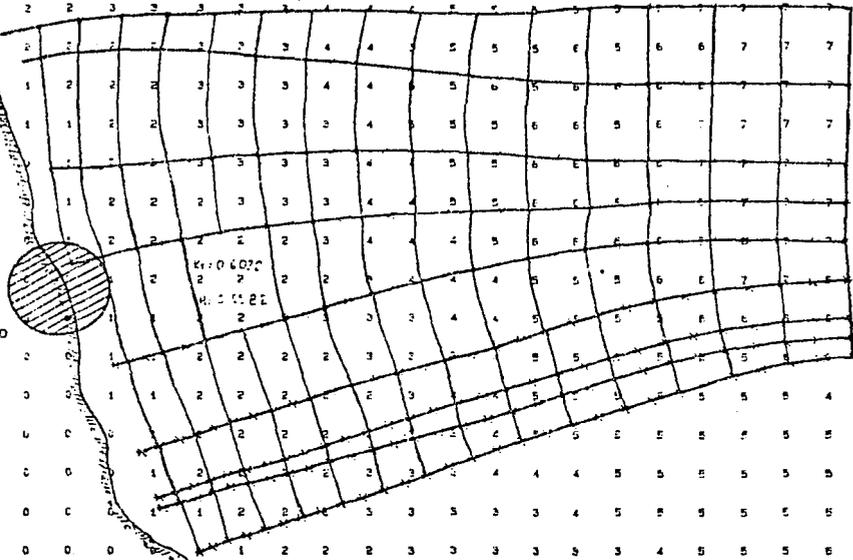
EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON  
 FIG. 6.16 C A N C U N Q. R.  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = E T = 7 s

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

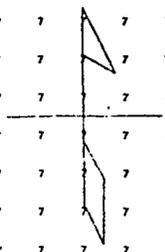
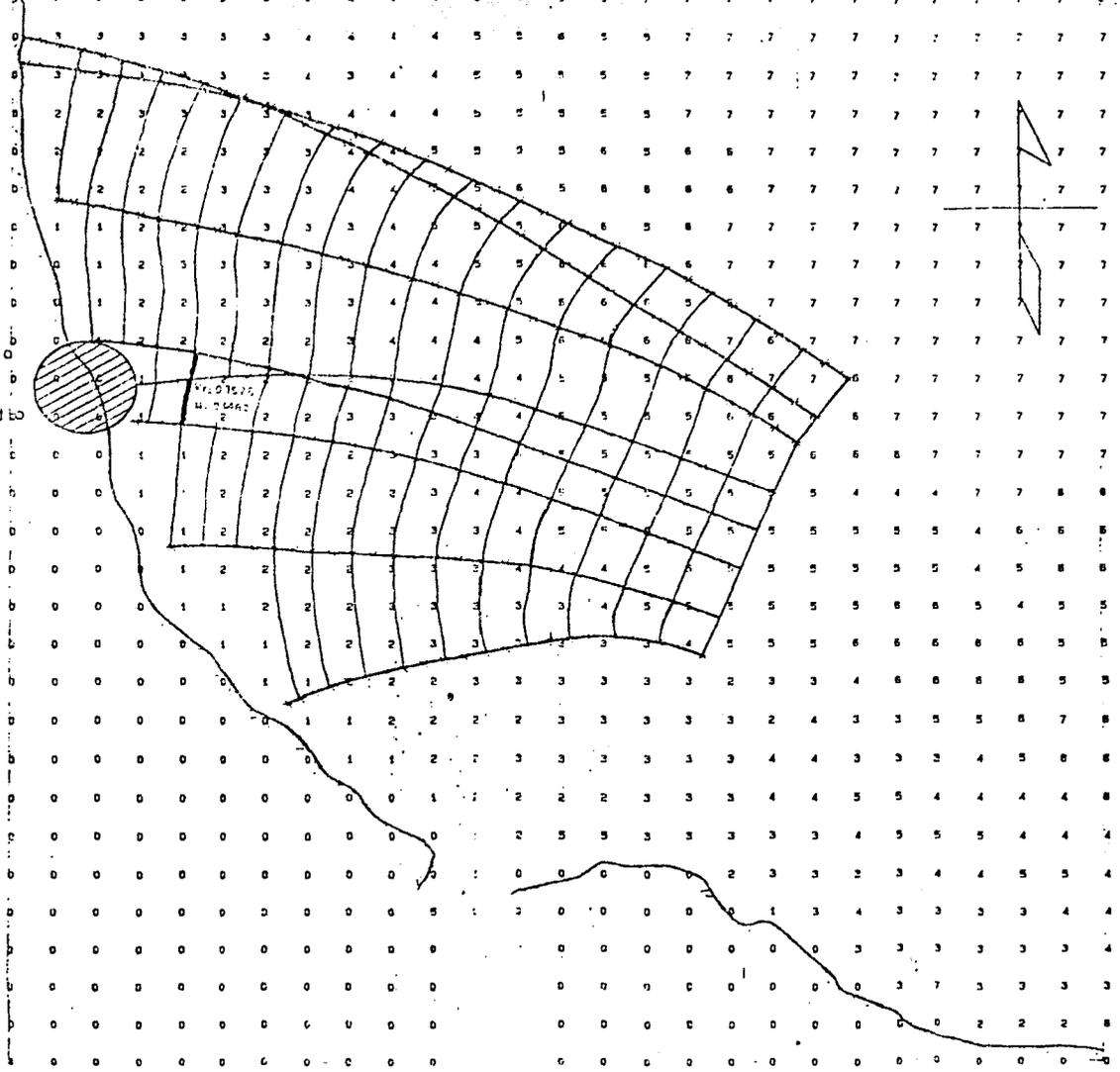
Zona de Estudio





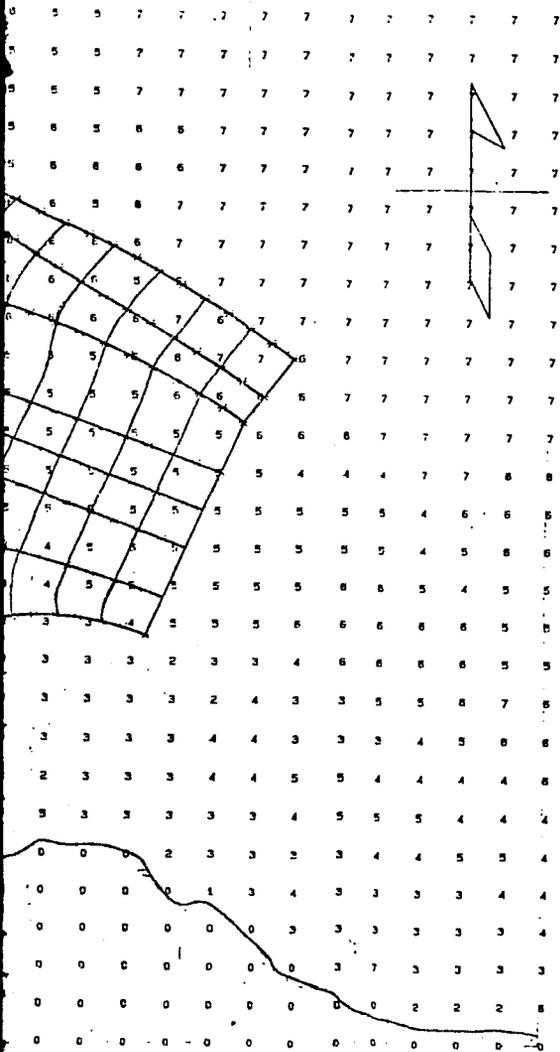
17-26 3 17-24 3 D7-200.00 (M) 4 D7-200.00 (M) 5 7 5.00 (SLG) 7 H.1211- 1.00 (M) 7 D7- 20.00 (SE6)

Zona  
 de  
 Estudio



ANCHURA DEL CANAL = 1.00 (M)      DT = 20.00 (SEG)

Dirección = SE T = 5 seg.



Canal	Kr
1	0.5171
2	0.6626
3	* 0.7528
4	0.8286
5	0.7806

\* Coeficiente en la zona de estudio

**NOTAS.-**

LAS CURVAS BATIMÉTRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO.

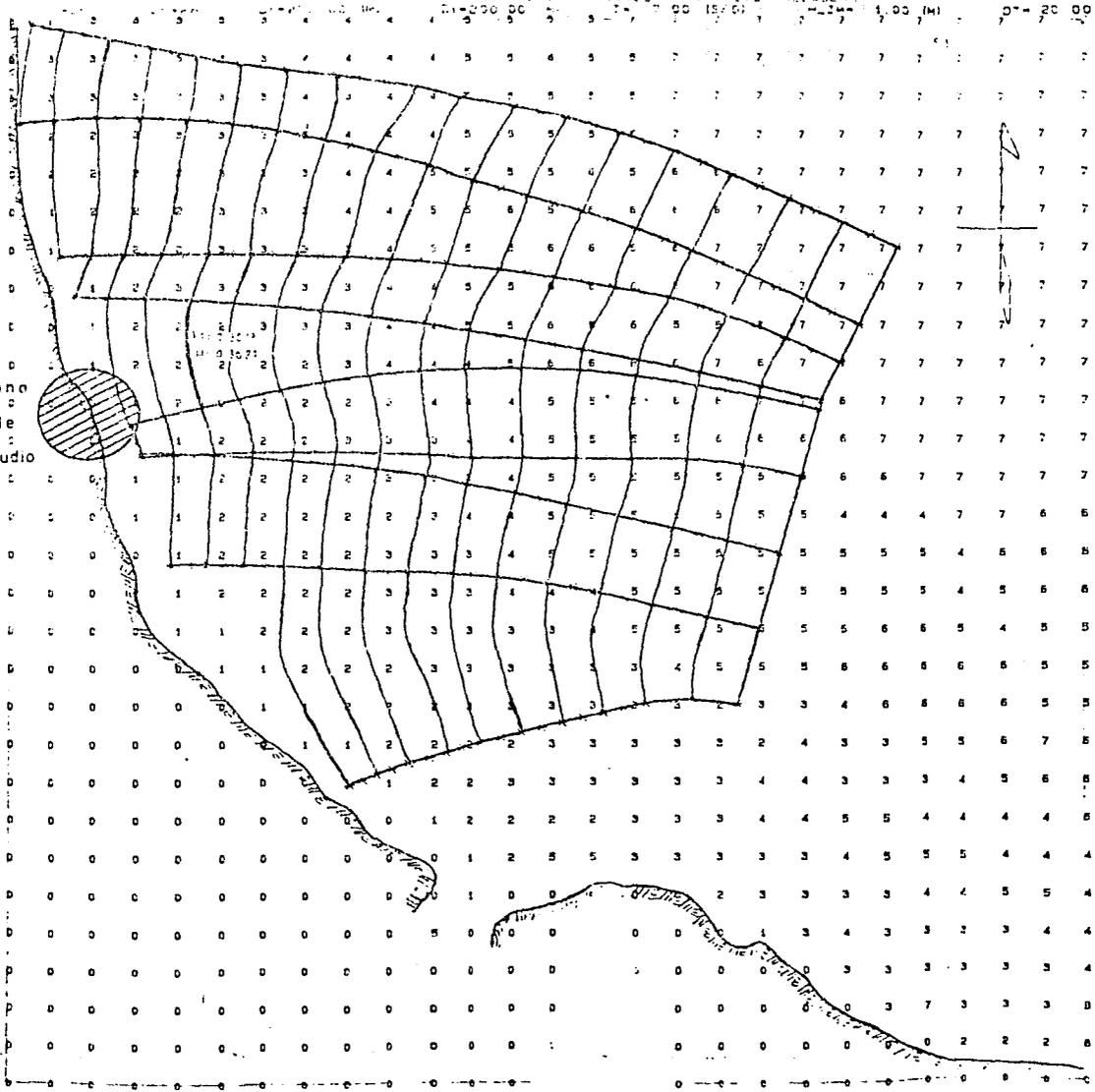
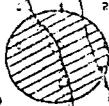
EL LEVANTAMIENTO BATIMÉTRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON  
**CANCUN Q.R.**  
 FIG. 6.18 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = SE T = 5 seg 182

Zona  
de  
Estudio



Dirección = SE 1 = 7 seg.

Canal	Kr
1	0.5889
2	0.8417
3	3.3210
4	1.3553
5	0.3013
6	0.9973
7	0.5550
8	0.9165

\* Coeficiente en la zona de estudio

### NOTAS.-

LAS CURVAS BATIMÉTRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR. (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMÉTRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1965.

EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON

CANCUN Q. B.

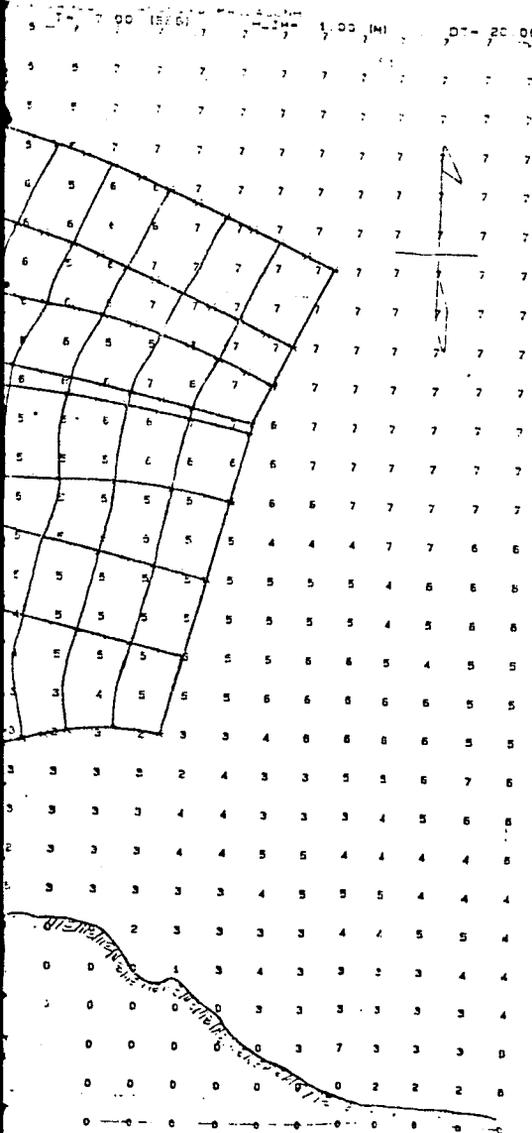
PROYECTO DESARROLLO NAUTICO

RESULTADOS DE REFRACCION

DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)

DIP = SE 1 = 7 183

FIG.  
6.19



11-28

DA=200.00 (M)

DY=200.00 (M)

T= 9 00 (SEG)

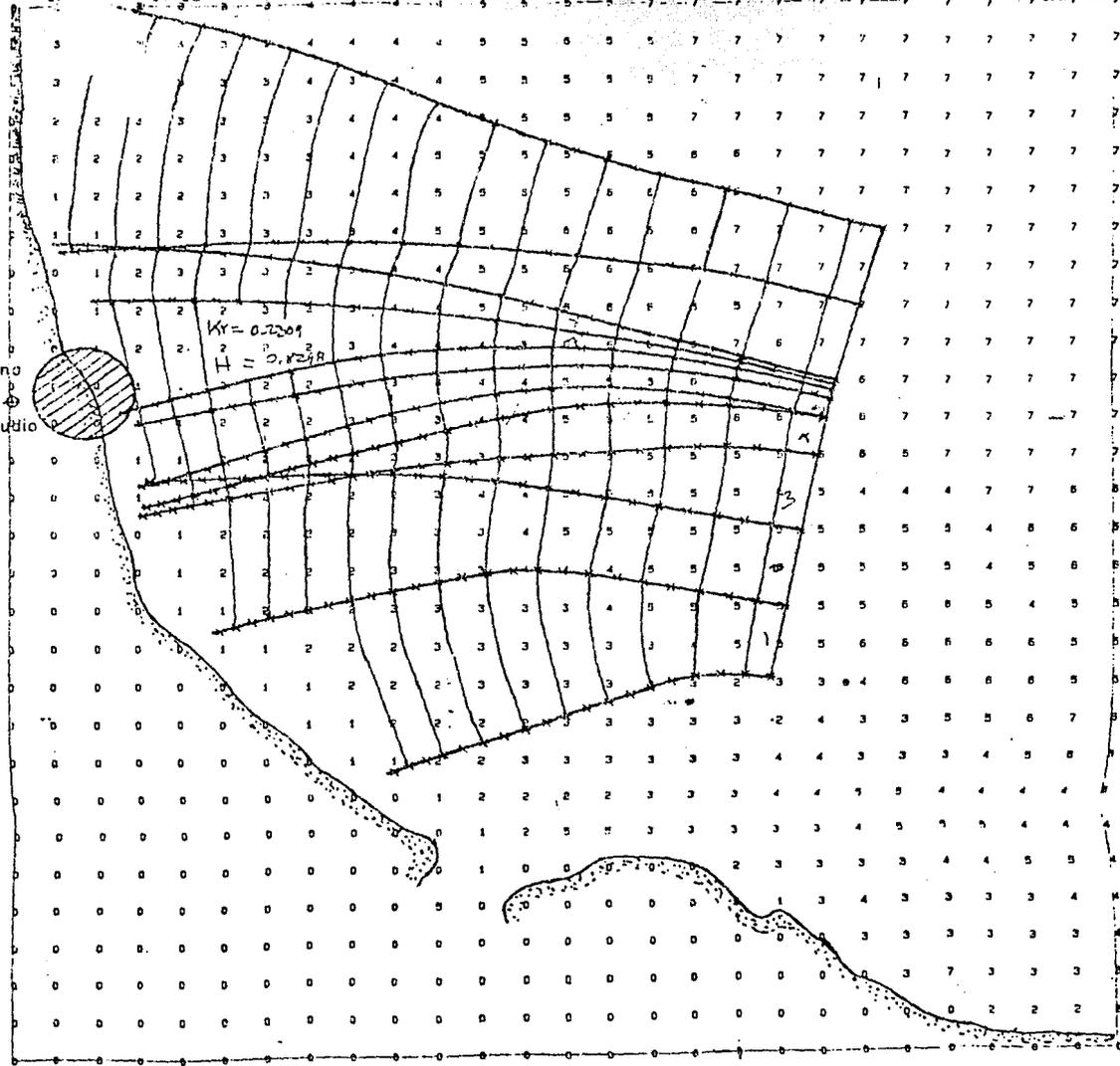
M.H= 1.00 (M)

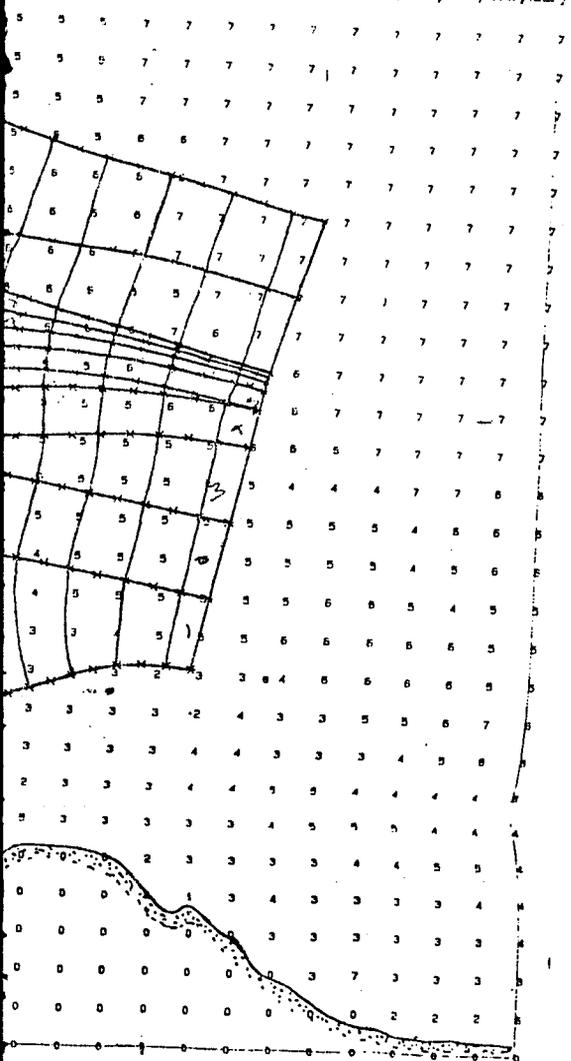
DT= 20.00

Zona  
de  
Estudio



$Ky = 0.7209$   
 $H = 0.7248$





Dirección = SE T = 9 seg.

Canal	Profundidad
1	0.6230
2	1.0871
3	0.9428
4	0.6262
5	* 0.2303
6	1.2719
7	0.5701

\* Coeficiente en la zona de estudio

### NOTAS.-

LAS CURVAS BATIMÉTRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMÉTRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CÁLCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON

CANCUN Q. R.

FIG. 6.20

PROYECTO DESARROLLO NAUTICO

RESULTADOS DE REFRACCION

DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)

DIR = SE T = 9 s

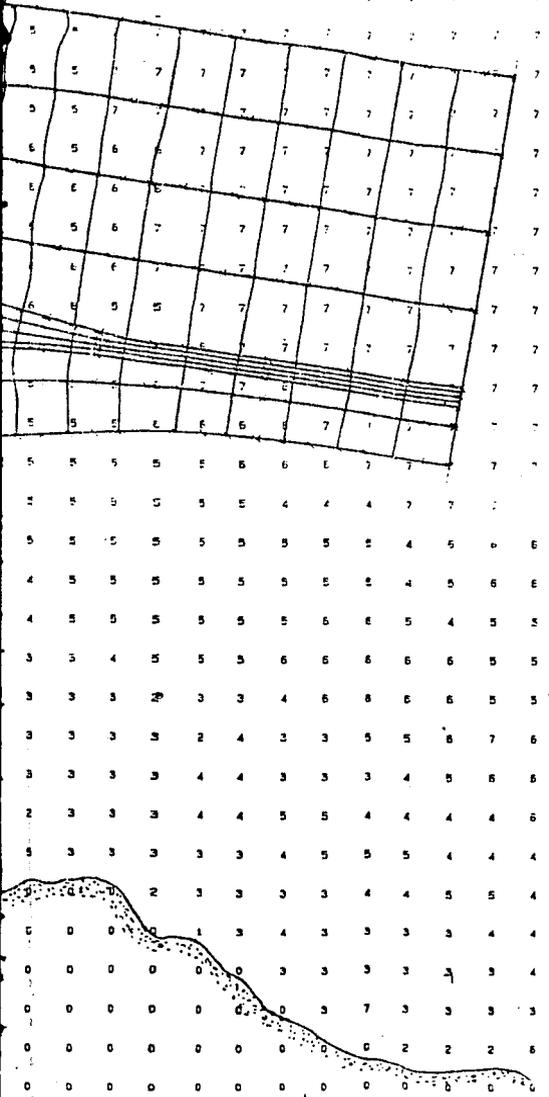
PROYECTO DE OBRAS DE RECONSTRUCCIÓN DEL PUERTO DE LA ZONA DE ESTUDIO  
MAY 1950  
MAY 1950



Zona de Estudio

EN CANCUN ARAGON MAR. ABRIL 1959  
 T = 5.00 (SEG.) H.L. = 1.00 (M) DT = 20 00

Direccion = NE T = 5 seg.



Canal	Kr
1	1.9803
2	0.5485
3	0.3419
4	0.3162
5	1.6629
6	0.9617
7	2.1725

\* Coeficiente en la zona de estudio

NOTAS -

LAS CURVAS BATIMETRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMETRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1959.

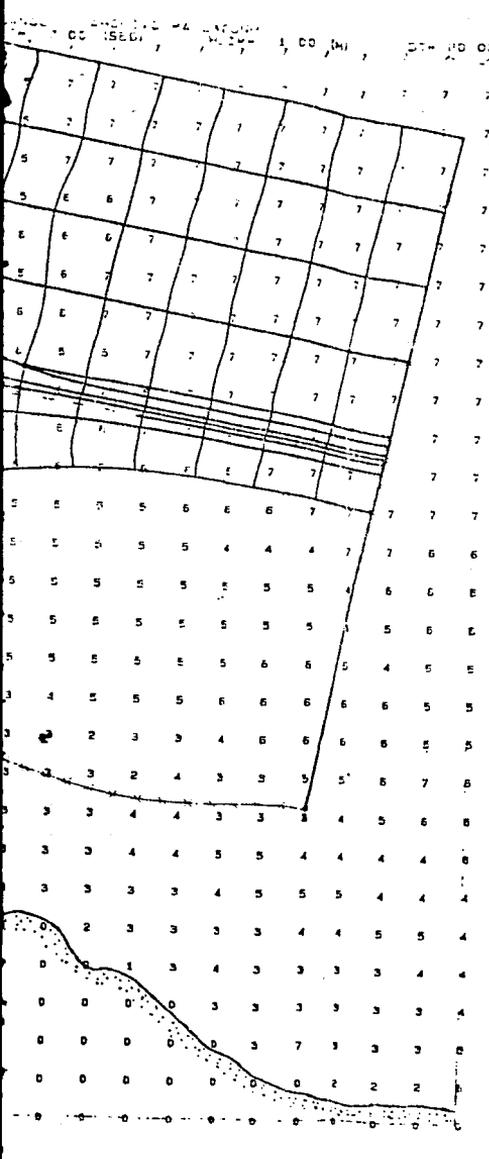
EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON  
 C A N C U N Q. R.  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = NE T = 5 s

FIG. 6,21





Dirección = NE T = 7 seg.

Canal	kr
1	1.0206
2	0.6934
3	* 0.2550
4	0.4732
5	0.9718
6	2.7735

\* Coeficiente en la zona de estudio

NOTAS -

LAS CURVAS BATIMETRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONOMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMETRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

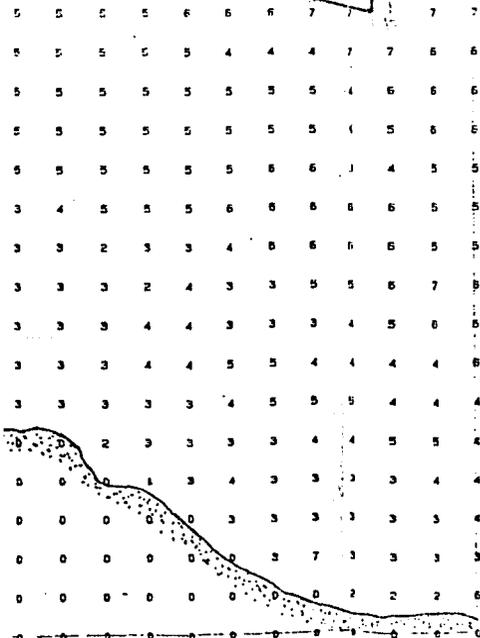
EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON  
 C A N C U N Q. R.  
 FIG. 6,22  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = NE T = 7 s



CONDU. ARRIANDO MALLACUNA  
 = 9.00 (SEG) 7 7 MLIM= 1.00 (M) 7 7 DT= 20 00



Dirección = NE T = 9 seg.

Canal	Kr
1	0.9129
2	0.9449
3	* 0.2750
4	0.4077
5	1.1785
6	1.8257

\* Coeficiente en la zona de estudio

### NOTAS.-

LAS CURVAS BATIMÉTRICAS ESTAN DADAS EN METROS Y REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M.) CON ELEVACION 0.00.

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO.

EL LEVANTAMIENTO BATIMÉTRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR F O N A T U R EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1989.

EL SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO EN EL CALCULO DE LA REFRACCION DEL OLEAJE ES ARBITRARIO.

U.N.A.M.

E.N.E.P. ARAGON

FIG.  
6.23

C A N C U N Q. R.  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION  
 DEL OLEAJE (AGUAS BAJAS)  
 DIR = NE T = 9 s

### 6.5 Resultados obtenidos.

Del análisis de los planos de oleaje se puede observar que en la región de aguas profundas las ortogonales son aproximadamente paralelas hasta una profundidad del fondo marino igual a 30m. A partir de esta profundidad y avanzando hacia la línea de la costa las ortogonales comienzan a experimentar un cambio en su dirección, pero en ningún caso hay intersección de ellas por lo que no se presentan problemas de presencia de un cóustico.

En cuanto a la región de aguas bajas, analizando los planos de oleaje de las figuras 6.15 a 6.23, donde se presentan bajos, existe una concentración de energía y las ortogonales tienden a converger, formándose una zona cóustica, deformando el frente original y propiciando la superposición de canales de energía en la zona posterior a la zona cóustica.

Este fenómeno es particularmente notorio para las direcciones Este con período de 7 segundos, y Sureste con períodos de 5, 7 y 9, segundos.

Los coeficientes de refracción que son mostrados en los planos de oleaje para la zona de aguas profundas, fueron obtenidos utilizando la siguiente expresión:

$$K_r = \sqrt{\frac{b_o}{b}}$$

Donde:

$b_o$ ; es el espaciamiento entre dos ortogonales adyacentes en aguas profundas.

$b$ ; es el espaciamiento entre dos ortogonales adyacentes en aguas reducidas.

Para el caso de la zona de aguas reducidas, los coeficientes de refracción se obtuvieron de igual manera, salvo el caso en donde hubo presencia de zonas cáusticas; ya que en dichas zonas el coeficiente de refracción no se puede calcular por no existir espaciamiento entre las ortogonales.

### 6.6 Aplicación del Método Gráfico de los frentes de oleaje.

A continuación procederemos a aplicar el método de los frentes de oleaje a nuestro caso para la condición de aguas bajas, para comprobar la presencia de la zona cáustica obtenida en nuestros análisis de refracción de oleaje.

Debido a que es demasiado laborioso obtener los planos de oleaje o diagramas de refracción para cada una de las direcciones y períodos considerados anteriormente, solamente obtendremos el diagrama de refracción para la dirección del oleaje Este con período de 7 segundos.

#### \* Construcción de la regleta

Sabemos que la longitud de la ola en aguas profundas está dada por la siguiente expresión:

$$L_o = 1.56 T^2$$

Donde:

T; es el período del oleaje en segundos.

$L_o$ ; es la longitud de la ola en aguas profundas.

Por lo tanto para el caso que nos ocupa tenemos que la longitud de la ola  $L_0 = 76.44\text{m}$ .

Si el límite de aguas profundas está dado por :

$$\frac{d}{L} \leq 0.5$$

entonces tenemos que el límite de aguas profundas está ubicado a 38.22m.

Con ayuda de las funciones tabuladas en el Apéndice A, los datos anteriormente obtenidos y la tabla 6.2 procederemos a construir la regla la cuál es mostrada en la figura 6.24.

Siguiendo el procedimiento dado en el inciso 3.2 del capítulo III, obtenemos el diagrama de refracción o plano de oleaje mostrado en la fig. 6.25 en la zona de aguas bajas para la dirección Este y período del oleaje de 7 segundos.

Al observar el diagrama de refracción obtenido, nos damos cuenta que el patrón del oleaje es idéntico en forma con el obtenido con el método analítico. Como la zona cáustica prevaleció en ambos métodos para el caso considerado, esto nos indica teóricamente que en el cruce de las ortogonales tenemos una altura de ola infinita, lo cuál en la realidad es imposible que se presente.

Cuando persiste la zona cáustica, el diagrama de refracción no nos da una información válida de esta zona, por lo tanto se recomienda que el coeficiente de refracción sea calculado fuera de la zona del cáustico, si es que la difracción del oleaje es insignificante, mediante el uso de la siguiente expresión:

$$K_r = \sqrt{\frac{1}{|\beta|}}$$

donde:

$$\beta = \frac{b}{b_0}$$

en la cuál:

$b$ ; es la separación del rayo en aguas reducidas.

$b_0$ ; es la separación del rayo en aguas profundas.

**TABLA 6.2**  
**CONSTRUCCION DE LA REGLETA POR EL METODO**  
**DE LOS FRENTE DE OLAJE.**

$d$ (m)	$\frac{d}{L_0}$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$X' = 15 \text{ cm}$	$X = X' \left( \tanh \frac{2\pi d}{L} \right)$
0.00	0.0000	0.0000	15	0.00
1.00	0.0131	0.2820	15	4.23
2.00	0.0262	0.3932	15	5.89
3.00	0.0393	0.4747	15	7.12
4.00	0.0523	0.5403	15	8.10
5.00	0.0654	0.5954	15	8.93
6.00	0.0780	0.6427	15	9.64
7.00	0.0920	0.6868	15	10.30
8.00	0.1050	0.7226	15	10.84
9.00	0.1180	0.7520	15	11.28
10.00	0.1308	0.7824	15	11.74
11.00	0.1440	0.8076	15	12.11
12.00	0.1570	0.8301	15	12.45
13.00	0.1700	0.8501	15	12.75
14.00	0.1830	0.8680	15	13.02
15.00	0.1962	0.8839	15	13.26
20.00	0.2616	0.9412	15	14.12
25.00	0.3271	0.9713	15	14.57
30.00	0.3925	0.9865	15	14.80
35.00	0.4579	0.9939	15	14.91
38.22	0.5000	0.9964	15	14.95

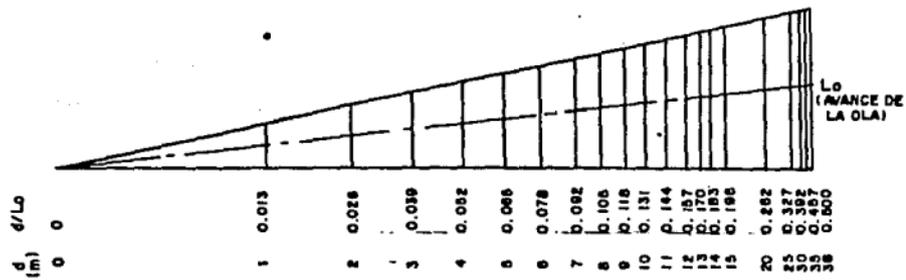


FIG. 6.24 REGLITA UTILIZADA PARA LA CONSTRUCCION DEL DIAGRAMA DE REFRACCION PARA LA DIRECCION ESTE PERIODO DE 7seg

ZONA DE ESTUDIO

X: 520,800

X: 521,600

X: 522,400

X: 523,200

X: 524,000

X: 524,800

Y: 2337,500

Y: 2338,500

Y: 2339,500

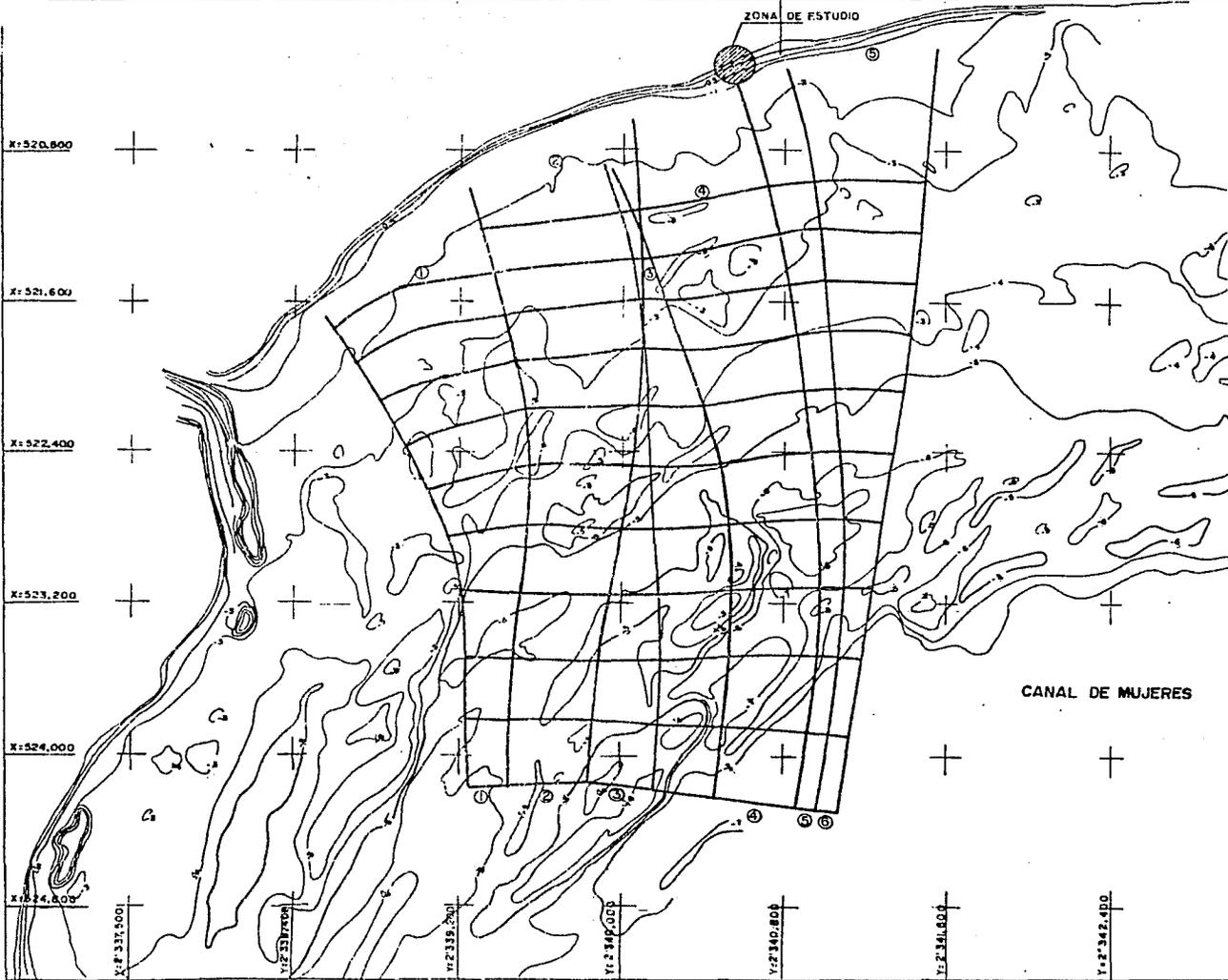
Y: 2340,500

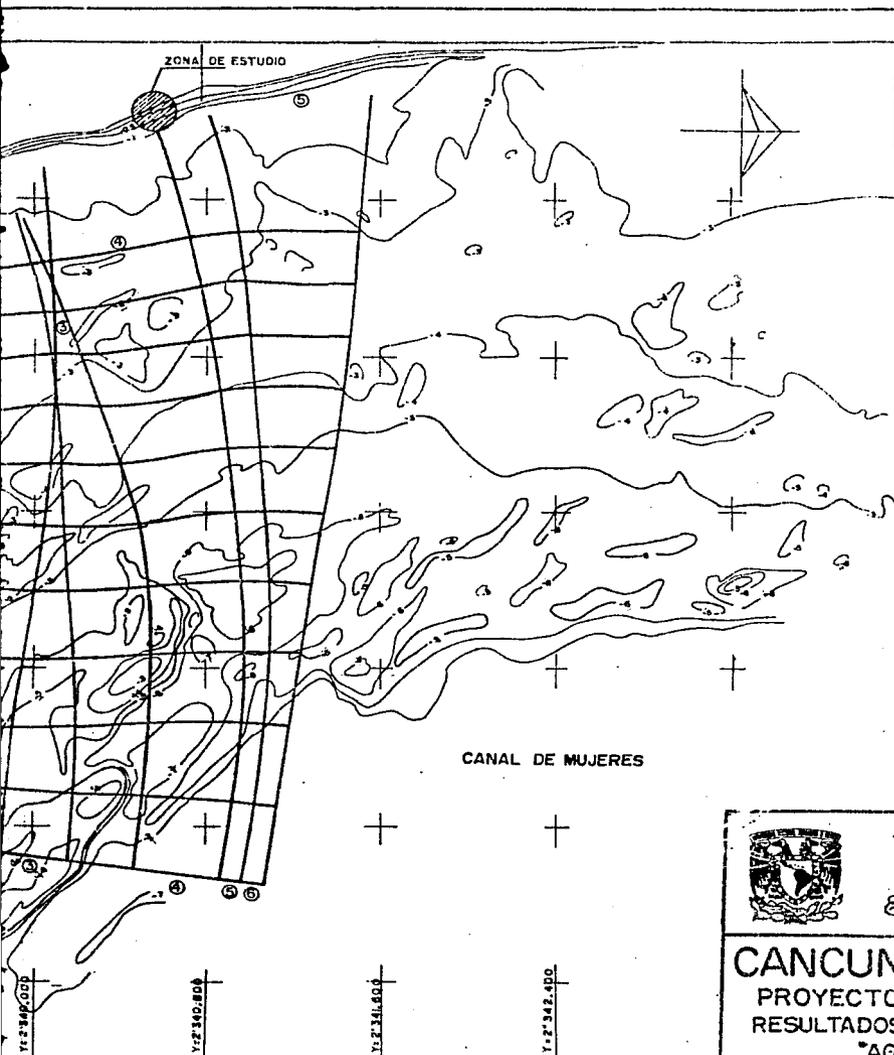
Y: 2341,500

Y: 2342,500

Y: 2343,500

CANAL DE MUJERES





LAS CURVAS BATIMÉTRICAS ESTAN DADAS EN METROS REFERIDAS AL NIVEL MEDIO DEL MAR (N.M.M) CON ELEVACION 0.00

EL NORTE CONSIDERADO ES EL ASTRONÓMICO

EL LEVANTAMIENTO BATIMÉTRICO CORRESPONDE AL EFECTUADO POR FONATUR EN LOS MESES DE MAYO Y JUNIO DE 1959

CANAL	Kr
①	0.4788
②	0.6960
③	2.7516
④	0.7486
⑤	0.6374
⑥	0.3724



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

E. N. E. P. ARAZÓN



**CANCUN, QUINTANA ROO**  
 PROYECTO DESARROLLO NAUTICO  
 RESULTADOS DE REFRACCION DE OLEAJE  
 "AGUAS BAJAS"

DIRECCION: E PERIODO: 7 seg FIG. 6.25

# **CAPITULO VII.**

## CAPITULO VII

### CONCLUSIONES

Con base a lo discutido en el presente trabajo, se pueden establecer las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- Debido a la naturaleza casual del oleaje, es muy difícil de determinar los efectos que este produce sobre las estructuras marítimas.

- Aunque en la actualidad contamos con diversas teorías que tratan de analizar matemáticamente las características del oleaje, esto es muy difícil de lograr debido a las irregularidades que este presenta.

- La inadecuada selección de la teoría de oleaje a ser utilizada podrá conducir a resultados erróneos, y por lo tanto no tendríamos bien definidos los fenómenos del oleaje; los cuales son datos fundamentales para poder realizar los estudios de refracción del oleaje.

- La teoría del oleaje que más se utiliza en la Ingeniería de Costas, es la Teoría Lineal, por ser la más dinámica y accesible.

- Para el diseño y construcción de las obras marítimas generalmente se necesitan conocer las alturas, períodos y direcciones del oleaje; para determinar estos parámetros se necesita tomar en cuenta los efectos de la refracción y de la difracción del oleaje.

- Conforme el oleaje se traslada de aguas profundas hacia aguas reducidas, el cambio en la profundidad origina una disminución de la celeridad y como consecuencia la longitud de la onda disminuye, aumentando su altura y reorientando la dirección del oleaje conforme a la batimetría del sitio de estudio.

• La ley de Snell sólo es aplicable directamente en la refracción del oleaje cuando se presenta en el sitio de estudio una batimetría recta y paralela.

• Los cambios del oleaje debidos al fenómeno de refracción se estiman en forma gráfica mediante el trazo de los planos de oleaje o diagramas de refracción; en base a dos métodos básicos: a) el método de los frentes de ola y b) el método de las ortogonales.

• Los métodos gráficos de refracción consideran el oleaje monocromático, es decir, oleaje con características constantes en su altura, en su período y en su dirección.

• Una limitación importante de los métodos gráficos es que suponen que la energía entre las ortogonales se mantiene constante, de esta forma se puede llegar a el punto conflictivo de las zonas cáusticas.

• Los métodos gráficos tienen el inconveniente de ser lentos y tediosos para la persona que lo está realizando, aparte de que es imposible ejecutarlos desde profundidades reducidas hacia mar adentro.

• El método de las ortogonales es el más apto de los métodos gráficos expuestos en este trabajo, para poder ser codificado y usado en un ordenador.

• El coeficiente de refracción para oleaje regular considera un período constante y una sola dirección de propagación.

• La variación de las alturas del oleaje real debidas al fenómeno de refracción, no se pueden representar correctamente por un coeficiente de refracción, como lo es para el oleaje regular.

• En muchas instancias cuando las olas son difractadas, la batimetría del lugar es tal que causa que se produzcan simultáneamente el fenómeno de difracción y refracción del oleaje.

#### CONCLUSIONES

\* Hasta la fecha no ha sido desarrollada una teoría para poder tratar simultáneamente a la difracción y refracción del oleaje en una región con contornos batimétricos irregulares.

\* Un problema importante que se presenta en la construcción de los planos de olas, cuando estos se realizan por medio de un ordenador, es la formación de zonas cósticas.

\* La formación de las zonas cósticas puede deberse a dos causas principales:

- a) En el caso de los métodos gráficos, a una selección defectuosa de la equidistancia entre las curvas batimétricas.
- b) En el caso del uso de ordenadores, a una selección inadecuada de la abertura de la malla de profundidades.

\* En el caso del uso de ordenadores es importante señalar que si la abertura de la malla de profundidades fuese mayor, probablemente se anule la presencia de la zona cóstica; pero también hay que considerar que con este aumento en la abertura de la malla, tendremos un mayor grado de imprecisión y por lo tanto resultados más alejados de la realidad.

\* Del estudio de refracción de oleaje realizado en el sitio denominado "Cancún Náutico", ubicado en el estado de Quintana Roo, se observa que al aplicar el método numérico se presenta una convergencia entre las ortogonales para la condición de aguas bajas para las direcciones Este con período de 7 seg. y Sureste con períodos de 5, 7 y 9 seg.

\* Al aplicar el método de los frentes de oleaje al proyecto "Cancún Náutico" para la dirección Este con período de 7 seg., se observa que el patrón de oleaje es idéntico en forma al obtenido con el método analítico, persistiendo la presencia de la zona cóstica.

## CONCLUSIONES

• La presencia de la zona cáustica en la aplicación realizada puede ser debida a dos causas:

La primera de ellas es la batimetría tan irregular que se tiene en el sitio de estudio.

La segunda de ellas puede ser una mala selección del espaciamiento de la malla de profundidades.

• Como la zona cáustica prevaleció en ambos métodos para el caso considerado, esto nos indica teóricamente que en el cruce de las ortogonales tenemos una altura de ola infinita, lo cual en la realidad es imposible que se presente.

• Aunque actualmente se ha tratado de describir analíticamente la presencia de una zona cáustica, todavía no se cuenta con un método que señale con certeza que metodología se debe seguir cuando esta se presenta.

• Cuando la zona cáustica persiste, el diagrama de refracción o plano de oleaje no proporciona información válida de esta zona.

• Se recomienda que el coeficiente de refracción se calcule fuera de la zona del cáustico, si es que la difracción del oleaje es insignificante, mediante el uso de la siguiente expresión:

$$K_r = \sqrt{\frac{1}{|\beta|}}$$

donde:

$$\beta = \frac{b}{b_0}$$

en la cuál:

$b$ ; es la separación del rayo en aguas reducidas.

$b_0$ ; es la separación del rayo en aguas profundas.

\* Se recomienda que para evitar en lo posible la formación de las zonas cóusticas se revisen los siguientes aspectos:

- Cuando los estudios de refracción del oleaje sean realizados por medio de un ordenador, ensayar varias aberturas de la malla de profundidades, sin que dicha abertura sea demasiado grande, pues obtendríamos resultados imprecisos.

- Seleccionar la equidistancia entre las líneas batimétricas, de tal manera que al utilizar alguno de los métodos gráficos, se eliminen pequeñas irregularidades del fondo marino que nos pudiera propiciar la formación de un cóustico.

- Por último tener la certeza de que la información a ser utilizada sea proporcionada por una fuente confiable.

No HAY PAGINA

200



## **APENDICE A.**

· VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	
0.0001000	0.003990	0.02507	0.02506	0.25070	1.0003	0.05016	1.001	0.9998	4.4670
0.0002000	0.005643	0.03546	0.03544	0.03547	1.0006	0.07097	1.003	0.9996	3.7570
0.0003000	0.006912	0.04343	0.04343	0.04344	1.0009	0.08697	1.004	0.9994	3.3950
0.0004000	0.007982	0.05015	0.05015	0.05018	1.0013	0.10050	1.005	0.9992	3.1600
0.0005000	0.008925	0.05608	0.05602	0.05611	1.0016	0.11240	1.006	0.9990	2.9890
0.0006000	0.009778	0.06144	0.06136	0.06148	1.0019	0.12320	1.008	0.9988	2.8560
0.0007000	0.010560	0.06637	0.06627	0.06642	1.0022	0.13310	1.009	0.9985	2.7490
0.0008000	0.011290	0.07096	0.07084	0.07102	1.0025	0.14240	1.010	0.9983	2.6590
0.0009000	0.011980	0.07527	0.07513	0.07534	1.0028	0.15110	1.011	0.9981	2.5820
0.0010000	0.012630	0.07935	0.07918	0.07943	1.0032	0.15940	1.013	0.9979	2.5150
0.0011000	0.013250	0.08323	0.08304	0.08333	1.0035	0.16720	1.014	0.9977	2.4560
0.0012000	0.013840	0.08694	0.08672	0.08705	1.0038	0.17480	1.015	0.9975	2.4040
0.0013000	0.014400	0.09050	0.09026	0.09063	1.0041	0.18200	1.016	0.9973	2.3570
0.0014000	0.014950	0.09393	0.09365	0.09407	1.0044	0.18900	1.018	0.9971	2.3140
0.0015000	0.015480	0.09723	0.09693	0.09739	1.0047	0.19570	1.019	0.9969	2.2750
0.0016000	0.015980	0.10040	0.10010	0.10060	1.0051	0.20220	1.020	0.9967	2.2390
0.0017000	0.016480	0.10350	0.10320	0.10370	1.0054	0.20860	1.022	0.9965	2.2050
0.0018000	0.016960	0.10660	0.10620	0.10680	1.0057	0.21470	1.023	0.9962	2.1740
0.0019000	0.017430	0.10950	0.10910	0.10970	1.0060	0.22070	1.024	0.9960	2.1450

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.0020000	0.017880	0.11230	0.11190	0.11250	1.0063	0.22660	1.025	0.9958	2.1190
0.0021000	0.018320	0.11510	0.11460	0.11540	1.0066	0.23230	1.027	0.9956	2.0940
0.0022000	0.018760	0.11780	0.11730	0.11810	1.0069	0.23790	1.028	0.9954	2.0700
0.0023000	0.019180	0.12050	0.11990	0.12080	1.0073	0.24330	1.029	0.9952	2.0470
0.0024000	0.019590	0.12310	0.12250	0.12340	1.0076	0.24870	1.031	0.9950	2.0250
0.0025000	0.020000	0.12570	0.12500	0.12600	1.0079	0.25400	1.032	0.9948	2.0050
0.0026000	0.020400	0.12820	0.12750	0.12850	1.0082	0.25920	1.033	0.9946	1.9860
0.0027000	0.020790	0.13060	0.12990	0.13100	1.0085	0.26420	1.034	0.9944	1.9670
0.0028000	0.021170	0.13300	0.13230	0.13340	1.0089	0.26920	1.036	0.9942	1.9500
0.0029000	0.021550	0.13540	0.13460	0.13580	1.0092	0.27410	1.037	0.9939	1.9330
0.0030000	0.021920	0.13770	0.13690	0.13820	1.0095	0.27900	1.038	0.9937	1.9170
0.0031000	0.022280	0.14000	0.13910	0.14050	1.0098	0.28370	1.040	0.9935	1.9020
0.0032000	0.022640	0.14230	0.14130	0.14270	1.0101	0.28840	1.041	0.9933	1.8870
0.0033000	0.023000	0.14450	0.14350	0.14490	1.0104	0.29300	1.042	0.9931	1.8730
0.0034000	0.023350	0.14670	0.14560	0.14720	1.0108	0.29760	1.043	0.9929	1.8600
0.0035000	0.023690	0.14880	0.14770	0.14940	1.0111	0.30210	1.045	0.9927	1.8470
0.0036000	0.024030	0.15100	0.14980	0.15150	1.0114	0.30650	1.046	0.9925	1.8340
0.0037000	0.024360	0.15310	0.15190	0.15370	1.0117	0.31090	1.047	0.9923	1.8220
0.0038000	0.024690	0.15510	0.15390	0.15580	1.0121	0.31530	1.049	0.9921	1.8100
0.0039000	0.025020	0.15720	0.15590	0.15790	1.0124	0.31960	1.050	0.9919	1.7990

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.004000	0.025340	0.15920	0.15790	0.15990	1.0127	0.32380	1.051	0.9917	1.7880
0.004100	0.025660	0.16120	0.15980	0.16190	1.0130	0.32800	1.052	0.9915	1.7770
0.004200	0.025970	0.16320	0.16170	0.16390	1.0133	0.33220	1.054	0.9912	1.7670
0.004300	0.026280	0.16510	0.16360	0.16590	1.0137	0.33620	1.055	0.9910	1.7560
0.004400	0.026590	0.16710	0.16550	0.16780	1.0140	0.34030	1.056	0.9908	1.7460
0.004500	0.026890	0.16900	0.16740	0.16980	1.0143	0.34440	1.058	0.9906	1.7370
0.004600	0.027190	0.17080	0.16920	0.17170	1.0146	0.34830	1.059	0.9904	1.7270
0.004700	0.027490	0.17270	0.17100	0.17360	1.0149	0.35230	1.060	0.9902	1.7180
0.004800	0.027780	0.17450	0.17280	0.17540	1.0153	0.35620	1.062	0.9900	1.7090
0.004900	0.028070	0.17640	0.17460	0.17730	1.0156	0.36010	1.063	0.9898	1.7010
0.005000	0.028360	0.17820	0.17640	0.17910	1.0159	0.36400	1.064	0.9896	1.6920
0.005100	0.028640	0.18000	0.17810	0.18090	1.0162	0.36780	1.066	0.9894	1.6840
0.005200	0.028930	0.18180	0.17980	0.18270	1.0166	0.37150	1.067	0.9892	1.6760
0.005300	0.029210	0.18350	0.18150	0.18450	1.0169	0.37530	1.068	0.9889	1.6690
0.005400	0.029480	0.18520	0.18320	0.18630	1.0172	0.37900	1.069	0.9887	1.6620
0.005500	0.029760	0.18700	0.18480	0.18800	1.0175	0.38270	1.071	0.9885	1.6540
0.005600	0.030030	0.18870	0.18650	0.18980	1.0178	0.38640	1.072	0.9883	1.6470
0.005700	0.030300	0.19040	0.18810	0.19150	1.0182	0.39000	1.073	0.9881	1.6400
0.005800	0.030570	0.19210	0.18970	0.19320	1.0185	0.39370	1.075	0.9879	1.6330
0.005900	0.030830	0.19370	0.19130	0.19490	1.0188	0.39720	1.076	0.9877	1.6260

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\operatorname{senh}$ $2\pi d/L$	$\operatorname{cosh}$ $2\pi d/L$	$\operatorname{senh}$	$\operatorname{cosh}$	$n$	$K_s$
0.0060000	0.031100	0.19540	0.19290	0.19670	1.0192	0.40080	1.077	0.9875	1.6200
0.0061000	0.031360	0.19700	0.19450	0.19830	1.0195	0.40440	1.079	0.9873	1.6140
0.0062000	0.031620	0.19870	0.19610	0.20000	1.0198	0.40790	1.080	0.9871	1.6070
0.0063000	0.031880	0.20030	0.19760	0.20160	1.0201	0.41140	1.081	0.9869	1.6010
0.0064000	0.032130	0.20190	0.19920	0.20330	1.0205	0.41480	1.083	0.9867	1.5950
0.0065000	0.032380	0.20350	0.20070	0.20490	1.0208	0.41830	1.084	0.9865	1.5890
0.0066000	0.032640	0.20510	0.20220	0.20650	1.0211	0.42170	1.085	0.9863	1.5830
0.0067000	0.032890	0.20660	0.20370	0.20810	1.0214	0.42510	1.087	0.9860	1.5780
0.0068000	0.033130	0.20820	0.20520	0.20970	1.0217	0.42850	1.088	0.9858	1.5720
0.0069000	0.033380	0.20970	0.20670	0.21130	1.0221	0.43190	1.089	0.9856	1.5670
0.0070000	0.033620	0.21130	0.20820	0.21280	1.0224	0.43520	1.091	0.9854	1.5610
0.0071000	0.033870	0.21280	0.20960	0.21440	1.0227	0.43860	1.092	0.9852	1.5560
0.0072000	0.034110	0.21430	0.21110	0.21600	1.0231	0.44190	1.093	0.9850	1.5510
0.0073000	0.034350	0.21580	0.21250	0.21750	1.0234	0.44520	1.095	0.9848	1.5460
0.0074000	0.034590	0.21730	0.21390	0.21900	1.0237	0.44840	1.096	0.9846	1.5410
0.0075000	0.034820	0.21880	0.21540	0.22050	1.0240	0.45170	1.097	0.9844	1.5360
0.0076000	0.035060	0.22030	0.21680	0.22210	1.0244	0.45490	1.099	0.9842	1.5310
0.0077000	0.035290	0.22180	0.21820	0.22360	1.0247	0.45820	1.100	0.9840	1.5260
0.0078000	0.035520	0.22320	0.21960	0.22510	1.0250	0.46140	1.101	0.9838	1.5210
0.0079000	0.035760	0.22470	0.22090	0.22650	1.0253	0.46460	1.103	0.9836	1.5170

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.0080000	0.035980	0.22610	0.22230	0.22800	1.0257	0.46780	1.104	0.9834	1.5120
0.0081000	0.036210	0.22750	0.22370	0.22950	1.0260	0.47090	1.105	0.9832	1.5080
0.0082000	0.036440	0.22900	0.22500	0.23100	1.0263	0.47410	1.107	0.9830	1.5030
0.0083000	0.036660	0.23040	0.22640	0.23240	1.0266	0.47720	1.108	0.9827	1.4990
0.0084000	0.036890	0.23180	0.22770	0.23380	1.0270	0.48030	1.109	0.9825	1.4950
0.0085000	0.037110	0.23320	0.22900	0.23530	1.0273	0.48340	1.111	0.9823	1.4910
0.0086000	0.037330	0.23460	0.23030	0.23670	1.0276	0.48650	1.112	0.9821	1.4870
0.0087000	0.037550	0.23600	0.23170	0.23810	1.0280	0.48960	1.113	0.9819	1.4820
0.0088000	0.037770	0.23730	0.23300	0.23960	1.0283	0.49270	1.115	0.9817	1.4780
0.0089000	0.037990	0.23870	0.23430	0.24100	1.0286	0.49570	1.116	0.9815	1.4740
0.0090000	0.038210	0.24010	0.23560	0.24240	1.0290	0.49880	1.118	0.9813	1.4710
0.0091000	0.038420	0.24140	0.23680	0.24380	1.0293	0.50180	1.119	0.9811	1.4670
0.0092000	0.038640	0.24280	0.23810	0.24520	1.0296	0.50490	1.120	0.9809	1.4630
0.0093000	0.038850	0.24410	0.23940	0.24650	1.0299	0.50790	1.122	0.9807	1.4590
0.0094000	0.039060	0.24550	0.24070	0.24790	1.0303	0.51090	1.123	0.9805	1.4560
0.0095000	0.039280	0.24680	0.24190	0.24930	1.0306	0.51380	1.124	0.9803	1.4520
0.0096000	0.039490	0.24810	0.24310	0.25070	1.0309	0.51680	1.126	0.9801	1.4480
0.0097000	0.039700	0.24940	0.24430	0.25200	1.0313	0.51980	1.127	0.9799	1.4450
0.0098000	0.039900	0.25070	0.24560	0.25340	1.0316	0.52270	1.128	0.9797	1.4420
0.0099000	0.040110	0.25200	0.24680	0.25470	1.0319	0.52570	1.130	0.9794	1.4380

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.0100000	0.040320	0.25330	0.24800	0.25600	1.0322	0.52860	1.131	0.9792	1.4350
0.0110000	0.042330	0.26600	0.25980	0.26910	1.0356	0.55740	1.145	0.9772	1.4030
0.0120000	0.044260	0.27810	0.27110	0.28170	1.0389	0.58530	1.159	0.9751	1.3750
0.0130000	0.046120	0.28980	0.28200	0.29380	1.0423	0.61250	1.173	0.9731	1.3500
0.0140000	0.047910	0.30100	0.29240	0.30560	1.0456	0.63910	1.187	0.9710	1.3270
0.0150000	0.049640	0.31190	0.30220	0.31700	1.0490	0.66510	1.201	0.9690	1.3070
0.0160000	0.051320	0.32250	0.31170	0.32810	1.0524	0.69060	1.215	0.9670	1.2880
0.0170000	0.052960	0.33280	0.32090	0.33890	1.0559	0.71580	1.230	0.9649	1.2710
0.0180000	0.054550	0.34280	0.32980	0.34950	1.0593	0.74050	1.244	0.9629	1.2550
0.0190000	0.056110	0.35250	0.33860	0.35990	1.0628	0.76500	1.259	0.9609	1.2400
0.0200000	0.057630	0.36210	0.34700	0.37010	1.0663	0.78910	1.274	0.9588	1.2260
0.0210000	0.059120	0.37140	0.35520	0.38000	1.0698	0.81310	1.289	0.9568	1.2130
0.0220000	0.060570	0.38060	0.36320	0.38980	1.0733	0.83680	1.304	0.9548	1.2010
0.0230000	0.062000	0.38960	0.37100	0.39950	1.0768	0.86030	1.319	0.9528	1.1890
0.0240000	0.063400	0.39840	0.37860	0.40900	1.0804	0.88370	1.335	0.9508	1.1780
0.0250000	0.064780	0.40700	0.38600	0.41840	1.0840	0.90690	1.350	0.9488	1.1680
0.0260000	0.066130	0.41550	0.39320	0.42760	1.0876	0.93100	1.366	0.9468	1.1590
0.0270000	0.067470	0.42390	0.40020	0.43670	1.0912	0.95300	1.381	0.9448	1.1500
0.0280000	0.068780	0.43220	0.40710	0.44570	1.0949	0.97600	1.397	0.9428	1.1410
0.0290000	0.070070	0.44030	0.41380	0.45460	1.0985	0.99880	1.413	0.9408	1.1330

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh \frac{2rd}{L}$	$\sinh \frac{2rd}{L}$	$\cosh \frac{2rd}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.0300000	0.071350	0.44830	0.42050	0.46340	1.1021	1.02200	1.430	0.9388	1.1250
0.0310000	0.072600	0.45620	0.42690	0.47210	1.1059	1.04400	1.446	0.9369	1.1180
0.0320000	0.073850	0.46400	0.43330	0.48080	1.1096	1.06700	1.462	0.9349	1.1110
0.0330000	0.075070	0.47170	0.43950	0.48940	1.1133	1.09000	1.479	0.9329	1.1040
0.0340000	0.076300	0.47940	0.44570	0.49800	1.1171	1.11300	1.496	0.9309	1.0980
0.0350000	0.077480	0.48680	0.45170	0.50640	1.1209	1.13500	1.513	0.9289	1.0920
0.0360000	0.078670	0.49430	0.45770	0.51470	1.1247	1.15800	1.530	0.9270	1.0860
0.0370000	0.079840	0.50170	0.46350	0.52300	1.1285	1.18000	1.547	0.9250	1.0800
0.0380000	0.081000	0.50900	0.46910	0.53120	1.1324	1.20300	1.564	0.9230	1.0750
0.0390000	0.082150	0.51620	0.47470	0.53940	1.1362	1.22600	1.582	0.9211	1.0690
0.0400000	0.083290	0.52330	0.48020	0.54750	1.1401	1.24800	1.600	0.9192	1.0640
0.0410000	0.084420	0.53040	0.48570	0.55560	1.1440	1.27100	1.617	0.9172	1.0590
0.0420000	0.085530	0.53740	0.49110	0.56370	1.1479	1.29400	1.636	0.9153	1.0550
0.0430000	0.086640	0.54440	0.49640	0.57170	1.1518	1.31700	1.654	0.9133	1.0500
0.0440000	0.087740	0.55130	0.50150	0.57960	1.1558	1.34000	1.672	0.9114	1.0460
0.0450000	0.088830	0.55810	0.50660	0.58760	1.1599	1.36300	1.691	0.9095	1.0420
0.0460000	0.089910	0.56490	0.51160	0.59540	1.1639	1.38600	1.709	0.9076	1.0380
0.0470000	0.090980	0.57170	0.51660	0.60330	1.1679	1.40900	1.728	0.9057	1.0340
0.0480000	0.092050	0.57840	0.52150	0.61110	1.1720	1.43300	1.747	0.9037	1.0300
0.0490000	0.093110	0.58500	0.52630	0.61890	1.1760	1.45600	1.766	0.9018	1.0260

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.050000	0.094160	0.59160	0.53100	0.62670	1.1802	1.47900	1.786	0.8999	1.0230
0.051000	0.095200	0.59810	0.53570	0.63440	1.1843	1.50300	1.805	0.8980	1.0190
0.052000	0.096230	0.60460	0.54030	0.64210	1.1884	1.52600	1.825	0.8961	1.0160
0.053000	0.097260	0.61110	0.54490	0.64990	1.1926	1.55000	1.845	0.8943	1.0130
0.054000	0.098290	0.61760	0.54940	0.65750	1.1968	1.57400	1.865	0.8924	1.0100
0.055000	0.099300	0.62390	0.55380	0.66520	1.2011	1.59800	1.885	0.8905	1.0070
0.056000	0.100300	0.63030	0.55820	0.67290	1.2053	1.62200	1.906	0.8886	1.0040
0.057000	0.101300	0.63660	0.56260	0.68050	1.2096	1.64600	1.926	0.8867	1.0010
0.058000	0.102300	0.64280	0.56680	0.68800	1.2138	1.67000	1.947	0.8849	0.9985
0.059000	0.103300	0.64910	0.57110	0.69560	1.2181	1.69500	1.968	0.8830	0.9958
0.060000	0.104300	0.65530	0.57530	0.70330	1.2225	1.71900	1.989	0.8811	0.9932
0.061000	0.105300	0.66160	0.57940	0.71100	1.2270	1.74400	2.011	0.8792	0.9907
0.062000	0.106300	0.66780	0.58340	0.71870	1.2315	1.77000	2.033	0.8773	0.9883
0.063000	0.107300	0.67390	0.58740	0.72640	1.2355	1.79500	2.055	0.8755	0.9860
0.064000	0.108200	0.67990	0.59140	0.73350	1.2402	1.81900	2.076	0.8737	0.9837
0.065000	0.109200	0.68600	0.59540	0.74110	1.2447	1.84500	2.098	0.8719	0.9815
0.066000	0.110100	0.69200	0.59930	0.74860	1.2492	1.87000	2.121	0.8700	0.9793
0.067000	0.111100	0.69810	0.60310	0.75610	1.2537	1.89600	2.144	0.8682	0.9772
0.068000	0.112000	0.70370	0.60690	0.76330	1.2580	1.92100	2.166	0.8664	0.9752
0.069000	0.113000	0.70990	0.61060	0.77110	1.2628	1.94800	2.189	0.8646	0.9732

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.070000	0.113900	0.71570	0.61440	0.77830	1.2672	1.97400	2.213	0.8627	0.9713
0.0710000	0.114900	0.72190	0.61810	0.78630	1.2721	2.00000	2.236	0.8609	0.9694
0.0720000	0.115800	0.72770	0.62170	0.79370	1.2767	2.02600	2.260	0.8591	0.9676
0.0730000	0.116800	0.73360	0.62520	0.80110	1.2813	2.05300	2.284	0.8572	0.9658
0.0740000	0.117700	0.73950	0.62890	0.80880	1.2861	2.08000	2.308	0.8554	0.9641
0.0750000	0.118600	0.74530	0.63240	0.81620	1.2908	2.10700	2.332	0.8537	0.9624
0.0760000	0.119500	0.75110	0.63590	0.82370	1.2956	2.13500	2.357	0.8519	0.9607
0.0770000	0.120500	0.75690	0.63920	0.83120	1.3004	2.16200	2.382	0.8501	0.9591
0.0780000	0.121400	0.76250	0.64270	0.83860	1.3051	2.18900	2.407	0.8483	0.9576
0.0790000	0.122300	0.76830	0.64600	0.84620	1.3100	2.21700	2.432	0.8465	0.9562
0.0800000	0.123200	0.77410	0.64930	0.85380	1.3149	2.24500	2.458	0.8448	0.9548
0.0810000	0.124100	0.77990	0.65260	0.86140	1.3198	2.27400	2.484	0.8430	0.9534
0.0820000	0.125100	0.78540	0.65580	0.86870	1.3246	2.30300	2.511	0.8413	0.9520
0.0830000	0.125900	0.79110	0.65900	0.87620	1.3295	2.33100	2.537	0.8395	0.9506
0.0840000	0.126800	0.79670	0.66220	0.88370	1.3345	2.36000	2.563	0.8378	0.9493
0.0850000	0.127700	0.80260	0.66550	0.89150	1.3397	2.38900	2.590	0.8360	0.9481
0.0860000	0.128600	0.80800	0.66850	0.89890	1.3446	2.41800	2.617	0.8342	0.9469
0.0870000	0.129500	0.81370	0.67160	0.90640	1.3497	2.44800	2.644	0.8325	0.9457
0.0880000	0.130400	0.81930	0.67470	0.91410	1.3548	2.47800	2.672	0.8308	0.9445
0.0890000	0.131300	0.82500	0.67780	0.92180	1.3600	2.50800	2.700	0.8290	0.9433

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.0900000	0.132200	0.83060	0.88080	0.92950	1.3653	2.53800	2.728	0.8273	0.9422
0.0910000	0.133100	0.83630	0.68380	0.93720	1.3706	2.56800	2.756	0.8255	0.9411
0.0920000	0.134000	0.84200	0.68680	0.94500	1.3759	2.59900	2.785	0.8238	0.9401
0.0930000	0.134900	0.84740	0.68970	0.95250	1.3810	2.63000	2.814	0.8221	0.9391
0.0940000	0.135700	0.85280	0.69250	0.96000	1.3862	2.66200	2.843	0.8204	0.9381
0.0950000	0.136600	0.85830	0.69530	0.96770	1.3917	2.69300	2.873	0.8187	0.9371
0.0960000	0.137500	0.86390	0.69820	0.97550	1.3970	2.72600	2.903	0.8170	0.9362
0.0970000	0.138400	0.86940	0.70110	0.98320	1.4023	2.75700	2.933	0.8153	0.9353
0.0980000	0.139200	0.87490	0.70390	0.99080	1.4077	2.79000	2.963	0.8136	0.9344
0.0990000	0.140100	0.88030	0.70660	0.99850	1.4131	2.82200	2.994	0.8120	0.9335
0.1000000	0.141000	0.88580	0.70930	1.00600	1.4187	2.85500	3.025	0.8103	0.9327
0.1010000	0.141900	0.89130	0.71200	1.01400	1.4242	2.88800	3.057	0.8086	0.9319
0.1020000	0.142700	0.89670	0.71470	1.02200	1.4297	2.92200	3.088	0.8069	0.9311
0.1030000	0.143600	0.90230	0.71730	1.03000	1.4354	2.95600	3.121	0.8052	0.9304
0.1040000	0.144500	0.90760	0.72000	1.03700	1.4410	2.99000	3.153	0.8036	0.9297
0.1050000	0.145300	0.91300	0.72260	1.04500	1.4465	3.02400	3.185	0.8019	0.9290
0.1060000	0.146200	0.91840	0.72520	1.05300	1.4523	3.05900	3.218	0.8003	0.9282
0.1070000	0.147000	0.92390	0.72770	1.06100	1.4580	3.09400	3.251	0.7986	0.9276
0.1080000	0.147900	0.92930	0.73030	1.06900	1.4638	3.12800	3.284	0.7970	0.9269
0.1090000	0.148800	0.93430	0.73270	1.07600	1.4692	3.16400	3.319	0.7954	0.9263

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.110000	0.149600	0.94000	0.73520	1.08500	1.4752	3.20100	3.353	0.7937	0.9257
0.111000	0.150500	0.94560	0.73770	1.09300	1.4814	3.23700	3.388	0.7920	0.9251
0.112000	0.151300	0.95080	0.74020	1.10100	1.4871	3.27400	3.423	0.7904	0.9245
0.113000	0.152200	0.95630	0.74260	1.10900	1.4932	3.31200	3.459	0.7888	0.9239
0.114000	0.153000	0.96160	0.74500	1.11700	1.4990	3.34800	3.494	0.7872	0.9234
0.115000	0.153900	0.96700	0.74740	1.12500	1.5051	3.38500	3.530	0.7856	0.9228
0.116000	0.154700	0.97200	0.74970	1.13300	1.5108	3.42300	3.566	0.7840	0.9223
0.117000	0.155600	0.97750	0.75200	1.14100	1.5171	3.46200	3.603	0.7824	0.9218
0.118000	0.156400	0.98270	0.75430	1.14900	1.5230	3.50100	3.641	0.7808	0.9214
0.119000	0.157300	0.98820	0.75660	1.15700	1.5293	3.54000	3.678	0.7792	0.9209
0.120000	0.158100	0.99360	0.75890	1.16500	1.5356	3.57980	3.716	0.7776	0.9204
0.121000	0.159000	0.99890	0.76120	1.17400	1.5418	3.62000	3.755	0.7760	0.9200
0.122000	0.159800	1.00400	0.76340	1.18200	1.5479	3.65900	3.793	0.7745	0.9196
0.123000	0.160700	1.01000	0.76560	1.19000	1.5546	3.69900	3.832	0.7729	0.9192
0.124000	0.161500	1.01500	0.76780	1.19800	1.5605	3.74000	3.871	0.7713	0.9189
0.125000	0.162400	1.02000	0.77000	1.20700	1.5674	3.78200	3.912	0.7698	0.9186
0.126000	0.163200	1.02500	0.77210	1.21500	1.5734	3.82400	3.952	0.7682	0.9182
0.127000	0.164000	1.03000	0.77420	1.22300	1.5795	3.86500	3.992	0.7667	0.9178
0.128000	0.164900	1.03600	0.77630	1.23100	1.5862	3.90700	4.033	0.7652	0.9175
0.129000	0.165700	1.04100	0.77830	1.24000	1.5927	3.95000	4.074	0.7637	0.9172

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.1300000	0.166500	1.04600	0.78040	1.24800	1.5990	3.99200	4.115	0.7621	0.9169
0.1310000	0.167400	1.05200	0.78240	1.25700	1.6060	4.03600	4.158	0.7606	0.9166
0.1320000	0.168200	1.05700	0.78440	1.26500	1.6124	4.08000	4.201	0.7591	0.9164
0.1330000	0.169100	1.06200	0.78650	1.27300	1.6191	4.12500	4.245	0.7575	0.9161
0.1340000	0.169900	1.06800	0.78850	1.28200	1.6260	4.16900	4.288	0.7560	0.9158
0.1350000	0.170800	1.07300	0.79050	1.29100	1.6330	4.21700	4.334	0.7545	0.9156
0.1360000	0.171600	1.07800	0.79250	1.30000	1.6400	4.26200	4.378	0.7530	0.9154
0.1370000	0.172400	1.08400	0.79450	1.30800	1.6470	4.30900	4.423	0.7515	0.9152
0.1380000	0.173300	1.08900	0.79640	1.31700	1.6540	4.35500	4.468	0.7500	0.9150
0.1390000	0.174100	1.09400	0.79830	1.32600	1.6600	4.40200	4.514	0.7485	0.9148
0.1400000	0.174900	1.09900	0.80020	1.33400	1.6670	4.45000	4.561	0.7471	0.9146
0.1410000	0.175800	1.10500	0.80210	1.34300	1.6750	4.49800	4.607	0.7456	0.9144
0.1420000	0.176600	1.11000	0.80390	1.35200	1.6810	4.54600	4.654	0.7441	0.9142
0.1430000	0.177400	1.11500	0.80570	1.36000	1.6880	4.59500	4.663	0.7426	0.9141
0.1440000	0.178300	1.12000	0.80760	1.36900	1.6960	4.64400	4.751	0.7412	0.9140
0.1450000	0.179100	1.12500	0.80940	1.37800	1.7030	4.69500	4.800	0.7397	0.9139
0.1460000	0.180000	1.13100	0.81120	1.38800	1.7100	4.74600	4.850	0.7382	0.9137
0.1470000	0.180800	1.13600	0.81310	1.39700	1.7180	4.79800	4.901	0.7368	0.9136
0.1480000	0.181600	1.14100	0.81490	1.40500	1.7250	4.84700	4.951	0.7354	0.9135
0.1490000	0.182500	1.14600	0.81660	1.41500	1.7320	4.90100	5.001	0.7339	0.9134

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.150000	0.183300	1.15200	0.81830	1.42400	1.7400	4.95400	5.054	0.7325	0.9133
0.151000	0.184100	1.15700	0.82000	1.43300	1.7470	5.00700	5.106	0.7311	0.9133
0.152000	0.185000	1.16200	0.82170	1.44200	1.7550	5.06100	5.159	0.7296	0.9132
0.153000	0.185800	1.16700	0.82340	1.45100	1.7620	5.11500	5.212	0.7282	0.9132
0.154000	0.186600	1.17300	0.82500	1.46000	1.7700	5.16900	5.265	0.7268	0.9132
0.155000	0.187500	1.17800	0.82670	1.46900	1.7770	5.22500	5.320	0.7254	0.9131
0.156000	0.188300	1.18300	0.82840	1.47900	1.7850	5.28300	5.376	0.7240	0.9130
0.157000	0.189100	1.18800	0.83010	1.48800	1.7930	5.33900	5.432	0.7226	0.9129
0.158000	0.190000	1.19400	0.83170	1.49800	1.8010	5.39800	5.490	0.7212	0.9130
0.159000	0.190800	1.19900	0.83330	1.50700	1.8090	5.45400	5.544	0.7198	0.9130
0.160000	0.191700	1.20400	0.83490	1.51700	1.8170	5.51300	5.603	0.7184	0.9130
0.161000	0.192500	1.20900	0.83650	1.52700	1.8250	5.57100	5.660	0.7171	0.9130
0.162000	0.193300	1.21500	0.83810	1.53600	1.8330	5.63000	5.718	0.7157	0.9130
0.163000	0.194100	1.22000	0.83960	1.54600	1.8410	5.69000	5.777	0.7144	0.9130
0.164000	0.195000	1.22500	0.84110	1.55500	1.8490	5.75100	5.837	0.7130	0.9130
0.165000	0.195800	1.23000	0.84270	1.56500	1.8570	5.81300	5.898	0.7117	0.9131
0.166000	0.196600	1.23500	0.84420	1.57400	1.8650	5.87400	5.959	0.7103	0.9132
0.167000	0.197500	1.24000	0.84570	1.58400	1.8730	5.93800	6.021	0.7090	0.9132
0.168000	0.198300	1.24600	0.84720	1.59400	1.8820	6.00300	6.085	0.7076	0.9133
0.169000	0.199200	1.25100	0.84860	1.60400	1.8900	6.06600	6.148	0.7063	0.9133

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\operatorname{senh} \frac{2\pi d}{L}$	$\operatorname{cosh} \frac{2\pi d}{L}$	$\operatorname{senh}$	$\operatorname{cosh}$	$n$	$K_s$
0.170000	0.200000	1.25700	0.85010	1.61400	1.8990	6.13000	6.212	0.7050	0.9134
0.171000	0.200800	1.26200	0.85150	1.62400	1.9070	6.19700	6.275	0.7036	0.9135
0.172000	0.201700	1.26700	0.85290	1.63400	1.9150	6.26200	6.342	0.7023	0.9136
0.173000	0.202500	1.27200	0.85440	1.64400	1.9240	6.32900	6.407	0.7010	0.9137
0.174000	0.203300	1.27700	0.85580	1.65400	1.9330	6.39500	6.473	0.6997	0.9138
0.175000	0.204200	1.28200	0.85720	1.66400	1.9410	6.46500	6.541	0.6984	0.9139
0.176000	0.205000	1.28800	0.85860	1.67500	1.9510	6.53400	6.610	0.6971	0.9140
0.177000	0.205800	1.29300	0.86000	1.68500	1.9590	6.60300	6.679	0.6958	0.9141
0.178000	0.206600	1.29800	0.86140	1.69500	1.9680	6.67200	6.747	0.6946	0.9142
0.179000	0.207500	1.30400	0.86270	1.70600	1.9770	6.74400	6.818	0.6933	0.9144
0.180000	0.208300	1.30900	0.86400	1.71600	1.9860	6.81800	6.891	0.6920	0.9145
0.181000	0.209200	1.31400	0.86530	1.72700	1.9950	6.89000	6.963	0.6907	0.9146
0.182000	0.210000	1.32000	0.86660	1.73700	2.0040	6.96300	7.035	0.6895	0.9148
0.183000	0.210800	1.32500	0.86800	1.74800	2.0130	7.03800	7.109	0.6882	0.9149
0.184000	0.211700	1.33000	0.86930	1.75800	2.0220	7.11300	7.183	0.6870	0.9150
0.185000	0.212500	1.33500	0.87060	1.76900	2.0320	7.19100	7.260	0.6857	0.9152
0.186000	0.213400	1.34100	0.87180	1.78000	2.0410	7.26700	7.336	0.6845	0.9154
0.187000	0.214200	1.34600	0.87310	1.79100	2.0510	7.34500	7.412	0.6832	0.9155
0.188000	0.215000	1.35100	0.87430	1.80100	2.0600	7.42100	7.488	0.6820	0.9157
0.189000	0.215900	1.35600	0.87550	1.81200	2.0700	7.50000	7.566	0.6808	0.9159

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.1900000	0.216700	1.36200	0.87670	1.82300	2.0790	7.58100	7.647	0.6796	0.9161
0.1910000	0.217600	1.36700	0.87790	1.83400	2.0890	7.66300	7.728	0.6784	0.9163
0.1920000	0.218400	1.37200	0.87910	1.84500	2.0990	7.74600	7.810	0.6772	0.9165
0.1930000	0.219200	1.37700	0.88030	1.85600	2.1080	7.82700	7.891	0.6760	0.9167
0.1940000	0.220100	1.38300	0.88150	1.86700	2.1180	7.91100	7.974	0.6748	0.9169
0.1950000	0.220900	1.38800	0.88270	1.87900	2.1280	7.99600	8.059	0.6736	0.9170
0.1960000	0.221800	1.39300	0.88390	1.89000	2.1380	8.08300	8.145	0.6724	0.9172
0.1970000	0.222600	1.39900	0.88500	1.90100	2.1480	8.16700	8.228	0.6712	0.9174
0.1980000	0.223400	1.40400	0.88620	1.91300	2.1580	8.25600	8.316	0.6700	0.9176
0.1990000	0.224300	1.40900	0.88730	1.92400	2.1690	8.24600	8.406	0.6689	0.9179
0.2000000	0.225100	1.41400	0.88840	1.93500	2.1780	8.43600	8.495	0.6677	0.9181
0.2010000	0.226000	1.42000	0.88950	1.94700	2.1890	8.52400	8.583	0.6666	0.9183
0.2020000	0.226800	1.42500	0.89060	1.95900	2.1990	8.61600	8.674	0.6654	0.9186
0.2030000	0.227700	1.43000	0.89170	1.97000	2.2100	8.70800	8.766	0.6642	0.9188
0.2040000	0.228500	1.43600	0.89280	1.98200	2.2200	8.80300	8.860	0.6631	0.9190
0.2050000	0.229300	1.44100	0.89390	1.99400	2.2310	8.89700	8.953	0.6620	0.9193
0.2060000	0.230200	1.44600	0.89500	2.00600	2.2420	8.99400	9.050	0.6608	0.9195
0.2070000	0.231000	1.45100	0.89600	2.01700	2.2520	9.09000	9.144	0.6597	0.9197
0.2080000	0.231900	1.45700	0.89710	2.03000	2.2630	9.18700	9.240	0.6586	0.9200
0.2090000	0.232800	1.46200	0.89810	2.04200	2.2740	9.28800	9.342	0.6574	0.9202

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.210000	0.233600	1.46800	0.89910	2.05500	2.2850	9.38900	9.442	0.6563	0.9205
0.2110000	0.234400	1.47300	0.90010	2.06600	2.2950	9.49000	9.542	0.6552	0.9207
0.2120000	0.235300	1.47900	0.90110	2.07900	2.3070	9.59000	9.642	0.6541	0.9210
0.2130000	0.236100	1.48400	0.90210	2.09100	2.3180	9.69300	9.744	0.6531	0.9213
0.2140000	0.237000	1.48900	0.90310	2.10300	2.3290	9.79600	9.847	0.6520	0.9215
0.2150000	0.237800	1.49400	0.90410	2.11500	2.3400	9.90200	9.952	0.6509	0.9218
0.2160000	0.238700	1.50000	0.90510	2.12800	2.3510	10.01000	10.060	0.6498	0.9221
0.2170000	0.239500	1.50600	0.90610	2.14200	2.3640	10.12000	10.170	0.6488	0.9223
0.2180000	0.240400	1.51100	0.90700	2.15400	2.3750	10.23000	10.280	0.6477	0.9226
0.2190000	0.241200	1.51600	0.90790	2.16600	2.3860	10.34000	10.380	0.6467	0.9228
0.2200000	0.242100	1.52100	0.90880	2.17800	2.3970	10.45000	10.500	0.6456	0.9231
0.2210000	0.242900	1.52600	0.90970	2.19200	2.4090	10.56000	10.610	0.6446	0.9234
0.2220000	0.243800	1.53200	0.91070	2.20400	2.4210	10.68000	10.720	0.6436	0.9236
0.2230000	0.244600	1.53700	0.91160	2.21800	2.4330	10.79000	10.840	0.6425	0.9239
0.2240000	0.245500	1.54200	0.91250	2.23000	2.4440	10.91000	10.958	0.6414	0.9242
0.2250000	0.246300	1.54800	0.91340	2.24400	2.4570	11.02000	11.070	0.6404	0.9245
0.2260000	0.247200	1.55300	0.91430	2.25700	2.4690	11.15000	11.190	0.6394	0.9248
0.2270000	0.248100	1.55900	0.91520	2.27100	2.4810	11.27000	11.310	0.6383	0.9251
0.2280000	0.248900	1.56400	0.91610	2.28400	2.4930	11.39000	11.440	0.6373	0.9254
0.2290000	0.249800	1.56900	0.91700	2.29700	2.5060	11.51000	11.560	0.6363	0.9258

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$  SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.2300000	0.250600	1.57500	0.91780	2.31100	2.5180	11.64000	11.680	0.6353	0.9261
0.2310000	0.251500	1.58000	0.91860	2.32500	2.5310	11.77000	11.810	0.6343	0.9264
0.2320000	0.252300	1.58500	0.91940	2.33800	2.5430	11.90000	11.930	0.6333	0.9267
0.2330000	0.253200	1.59100	0.92030	2.35200	2.5560	12.03000	12.074	0.6323	0.9270
0.2340000	0.254000	1.59600	0.92110	2.36600	2.5690	12.15000	12.190	0.6313	0.9273
0.2350000	0.254900	1.60200	0.92190	2.38000	2.5810	12.29000	12.330	0.6304	0.9276
0.2360000	0.255800	1.60700	0.92270	2.39300	2.5940	12.43000	12.470	0.6294	0.9279
0.2370000	0.256600	1.61200	0.92350	2.40800	2.6070	12.55000	12.590	0.6284	0.9282
0.2380000	0.257500	1.61800	0.92430	2.42200	2.6200	12.69000	12.730	0.6275	0.9285
0.2390000	0.258400	1.62300	0.92510	2.43600	2.6340	12.83000	12.870	0.6265	0.9288
0.2400000	0.259200	1.62900	0.92590	2.45000	2.6470	12.97000	13.010	0.6256	0.9291
0.2410000	0.260100	1.63400	0.92670	2.46400	2.6600	13.11000	13.150	0.6246	0.9294
0.2420000	0.261000	1.64000	0.92750	2.48000	2.6740	13.26000	13.300	0.6237	0.9298
0.2430000	0.261800	1.64500	0.92820	2.49400	2.6870	13.40000	13.440	0.6228	0.9301
0.2440000	0.262700	1.65000	0.92890	2.50800	2.7000	13.55000	13.590	0.6218	0.9304
0.2450000	0.263500	1.65600	0.92960	2.52300	2.7140	13.70000	13.730	0.6209	0.9307
0.2460000	0.264400	1.66100	0.93040	2.53800	2.7280	13.85000	13.880	0.6200	0.9310
0.2470000	0.265300	1.66700	0.93110	2.55300	2.7420	14.00000	14.040	0.6191	0.9314
0.2480000	0.266100	1.67200	0.93180	2.56800	2.7550	14.15000	14.190	0.6182	0.9317
0.2490000	0.267000	1.67800	0.93250	2.58300	2.7700	14.31000	14.350	0.6173	0.9320

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.250000	0.267900	1.68300	0.93320	2.59900	2.7840	14.47000	14.510	0.6164	0.9323
0.2510000	0.268700	1.68900	0.93390	2.61400	2.7980	14.62000	14.660	0.6155	0.9327
0.2520000	0.269600	1.69400	0.93460	2.62900	2.8130	14.79000	14.820	0.6146	0.9330
0.2530000	0.270500	1.70000	0.93530	2.64500	2.8280	14.95000	14.990	0.6137	0.9333
0.2540000	0.271400	1.70500	0.93600	2.66000	2.8420	15.12000	15.150	0.6128	0.9336
0.2550000	0.272200	1.71100	0.93670	2.67600	2.8560	15.29000	15.320	0.6120	0.9340
0.2560000	0.273100	1.71600	0.93740	2.69100	2.8710	15.45000	15.490	0.6111	0.9343
0.2570000	0.274000	1.72200	0.93810	2.70700	2.8860	15.63000	15.660	0.6102	0.9346
0.2580000	0.274900	1.72700	0.93880	2.72300	2.9010	15.80000	15.830	0.6093	0.9349
0.2590000	0.275700	1.73200	0.93940	2.73900	2.9160	15.97000	16.000	0.6085	0.9353
0.2600000	0.276600	1.73800	0.94000	2.75500	2.9310	16.15000	16.180	0.6076	0.9356
0.2610000	0.277500	1.74400	0.94060	2.77200	2.9460	16.33000	16.360	0.6068	0.9360
0.2620000	0.278400	1.74900	0.94120	2.78800	2.9620	16.51000	16.540	0.6060	0.9363
0.2630000	0.279200	1.75500	0.94180	2.80400	2.9770	16.69000	16.730	0.6052	0.9367
0.2640000	0.280100	1.76000	0.94250	2.82000	2.9920	16.88000	16.910	0.6043	0.9370
0.2650000	0.281000	1.76600	0.94310	2.83700	3.0080	17.07000	17.100	0.6035	0.9373
0.2660000	0.281900	1.77100	0.94370	2.85300	3.0230	17.26000	17.280	0.6027	0.9377
0.2670000	0.282700	1.77600	0.94430	2.87000	3.0390	17.45000	17.450	0.6018	0.9380
0.2680000	0.283600	1.78200	0.94490	2.88600	3.0550	17.64000	17.670	0.6010	0.9383
0.2690000	0.284500	1.78800	0.94550	2.90400	3.0710	17.84000	17.870	0.6002	0.9386

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.2700000	0.285100	1.79300	0.94610	2.92100	3.0880	18.04000	18.070	0.5994	0.9390
0.2710000	0.286300	1.79900	0.94670	2.93800	3.1040	18.24000	18.270	0.5986	0.9393
0.2720000	0.287200	1.80400	0.94730	2.95600	3.1200	18.46000	18.490	0.5978	0.9396
0.2730000	0.288000	1.81000	0.94780	2.97300	3.1360	18.65000	18.670	0.5971	0.9400
0.2740000	0.288900	1.81500	0.94840	2.99000	3.1530	18.86000	18.890	0.5963	0.9403
0.2750000	0.289800	1.82100	0.94900	3.00800	3.1700	19.07000	19.100	0.5955	0.9406
0.2760000	0.290700	1.82600	0.94950	3.02500	3.1860	19.28000	19.300	0.5947	0.9410
0.2770000	0.291600	1.83200	0.95000	3.04300	3.2030	19.49000	19.510	0.5940	0.9413
0.2780000	0.292400	1.83700	0.95050	3.06100	3.2200	19.71000	19.740	0.5962	0.9416
0.2790000	0.293300	1.84300	0.95110	3.07900	3.2370	19.93000	19.960	0.5925	0.9420
0.2800000	0.294200	1.84900	0.95160	3.09700	3.2540	20.16000	20.180	0.5917	0.9423
0.2810000	0.295100	1.85400	0.95210	3.11500	3.2720	20.39000	20.410	0.5910	0.9426
0.2820000	0.296000	1.86000	0.95260	3.13300	3.2890	20.62000	20.640	0.5902	0.9430
0.2830000	0.296900	1.86600	0.95320	3.15200	3.3070	20.85000	20.870	0.5895	0.9433
0.2840000	0.297800	1.87100	0.95370	3.17100	3.3250	21.09000	21.110	0.5887	0.9436
0.2850000	0.298700	1.87700	0.95420	3.19000	3.3430	21.33000	21.350	0.5880	0.9440
0.2860000	0.299600	1.88200	0.95470	3.20900	3.3610	21.57000	21.590	0.5873	0.9443
0.2870000	0.300500	1.88800	0.95520	3.22800	3.3790	21.82000	21.840	0.5866	0.9446
0.2880000	0.301400	1.89300	0.95570	3.24600	3.3960	22.05000	22.070	0.5859	0.9449
0.2890000	0.302200	1.89900	0.95620	3.26400	3.4140	22.30000	22.320	0.5852	0.9452

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.290000	0.303100	1.90500	0.95670	3.28400	3.4330	22.54000	22.570	0.5845	0.9456
0.291000	0.304000	1.91000	0.95720	3.30300	3.4510	22.81000	22.830	0.5838	0.9459
0.292000	0.304900	1.91600	0.95770	3.32300	3.4710	23.07000	23.090	0.5831	0.9463
0.293000	0.305800	1.92200	0.95810	3.34300	3.4900	23.33000	23.350	0.5824	0.9466
0.294000	0.306700	1.92700	0.95850	3.36200	3.5080	23.60000	23.620	0.5817	0.9469
0.300000	0.312100	1.96100	0.96110	3.48300	3.6240	25.24000	25.260	0.5777	0.9490
0.301000	0.313000	1.96700	0.96160	3.50300	3.6430	25.53000	25.550	0.5771	0.9493
0.302000	0.313900	1.97200	0.96200	3.52400	3.6630	25.82000	25.830	0.5764	0.9466
0.303000	0.314800	1.97800	0.96240	3.54500	3.6830	26.12000	26.140	0.5758	0.9499
0.304000	0.315700	1.98400	0.96290	3.56600	3.7030	26.42000	26.440	0.5751	0.9502
0.305000	0.316600	1.98900	0.96330	3.58700	3.7240	26.72000	26.740	0.5745	0.9505
0.306000	0.317500	1.99500	0.96370	3.60900	3.7450	27.02000	27.040	0.5739	0.9509
0.307000	0.318400	2.00100	0.96410	3.63000	3.7650	27.33000	27.350	0.5732	0.9512
0.308000	0.319300	2.00700	0.96450	3.65100	3.7860	27.65000	27.660	0.5726	0.9515
0.309000	0.320200	2.01200	0.96490	3.67300	3.8060	27.96000	27.980	0.5720	0.9518
0.310000	0.321100	2.01800	0.96530	3.69400	3.8270	28.28000	28.300	0.5714	0.9522
0.311000	0.322000	2.02300	0.96560	3.71600	3.8480	28.60000	28.620	0.5708	0.9525
0.312000	0.323000	2.02900	0.96600	3.73800	3.8700	28.93000	28.950	0.5701	0.9528
0.313000	0.323900	2.03500	0.96640	3.76000	3.8910	29.27000	29.280	0.5695	0.9531
0.314000	0.324800	2.04100	0.96680	3.78200	3.9120	29.60000	29.620	0.5689	0.9535

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.3150000	0.325700	2.04600	0.96720	3.80500	3.9340	29.94000	29.960	0.5683	0.9538
0.3160000	0.326600	2.05200	0.96760	3.82800	3.9560	30.29000	30.310	0.5678	0.9541
0.3170000	0.327500	2.05800	0.96790	3.85100	3.9780	30.64000	30.650	0.5672	0.9544
0.3180000	0.328400	2.06300	0.96820	3.87300	3.0000	30.99000	31.000	0.5666	0.9547
0.3190000	0.329400	2.06900	0.96860	3.89600	3.0220	31.35000	31.370	0.5660	0.9550
0.3200000	0.330200	2.07500	0.96900	3.91900	4.0450	31.71000	31.720	0.5655	0.9553
0.3210000	0.331100	2.08100	0.96930	3.94300	4.0680	32.07000	32.080	0.5649	0.9556
0.3220000	0.332100	2.08600	0.96960	3.96600	4.0900	32.44000	32.460	0.5643	0.9559
0.3230000	0.333000	2.09200	0.97000	3.99000	4.1140	32.83000	32.840	0.5637	0.9562
0.3240000	0.333900	2.09800	0.97030	3.01400	4.1360	32.20000	32.220	0.5632	0.9565
0.3250000	0.334900	2.10400	0.97070	4.03800	4.1600	33.60000	33.610	0.5627	0.9568
0.3260000	0.335700	2.11000	0.97100	4.06100	4.1830	33.97000	33.990	0.5621	0.9571
0.3270000	0.336700	2.11500	0.97130	4.08500	4.2060	34.37000	34.380	0.5616	0.9574
0.3280000	0.337600	2.12100	0.97170	4.11000	4.2300	34.77000	34.790	0.5610	0.9577
0.3290000	0.338500	2.12700	0.97200	4.13500	4.2540	35.18000	35.190	0.5605	0.9580
0.3300000	0.339400	2.13300	0.97230	4.15900	4.2770	35.58000	35.590	0.5599	0.9583
0.3310000	0.340300	2.13800	0.97260	4.18400	4.3010	35.99000	36.000	0.5594	0.9586
0.3320000	0.341300	2.14400	0.97290	4.20900	4.3260	36.42000	36.430	0.5589	0.9589
0.3330000	0.342200	2.15000	0.97320	4.23400	4.3500	36.84000	36.850	0.5584	0.9592
0.3340000	0.343100	2.15600	0.97350	4.25900	4.3750	37.25000	37.270	0.5578	0.9595

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_0$
0.3350000	0.344000	2.16100	0.97380	4.28400	4.39900	37.70000	37.720	0.5573	0.9598
0.3360000	0.344900	2.16700	0.97410	4.31000	4.4240	38.14000	38.150	0.5568	0.9601
0.3370000	0.345900	2.17300	0.97440	4.33600	4.4500	38.59000	38.600	0.5563	0.9604
0.3380000	0.346800	2.17900	0.97470	4.36100	4.4740	39.02000	39.040	0.5558	0.9607
0.3390000	0.347700	2.18500	0.97500	4.38800	4.5000	39.48000	39.490	0.5553	0.9610
0.3400000	0.348600	2.19000	0.97530	4.41300	4.5250	39.95000	39.960	0.5548	0.9613
0.3410000	0.349500	2.19600	0.97560	4.43900	4.5500	40.40000	40.410	0.5544	0.9615
0.3420000	0.350400	2.20200	0.97580	4.46600	4.5760	40.87000	40.890	0.5539	0.9618
0.3430000	0.351400	2.20800	0.97610	4.49200	4.6020	41.36000	41.370	0.5534	0.9621
0.3440000	0.352300	2.21400	0.97640	4.52100	4.6300	41.85000	41.840	0.5529	0.9623
0.3450000	0.353200	2.22000	0.97670	4.54700	4.6560	42.33000	42.340	0.5524	0.9626
0.3460000	0.354200	2.22500	0.97690	4.57500	4.6820	42.83000	42.840	0.5519	0.9629
0.3470000	0.355100	2.23100	0.97720	4.60200	4.7090	43.34000	43.350	0.5515	0.9632
0.3480000	0.356000	2.23700	0.97750	4.62900	4.7360	43.85000	43.860	0.5510	0.9635
0.3490000	0.357000	2.24300	0.97770	4.65700	4.7630	44.37000	44.400	0.5505	0.9638
0.3500000	0.357900	2.24900	0.97800	4.68500	4.7910	44.89000	44.800	0.5501	0.9640
0.3510000	0.358800	2.25500	0.97820	4.71300	4.8180	45.42000	45.430	0.5496	0.9643
0.3520000	0.359800	2.26000	0.97850	4.74100	4.8450	45.95000	45.960	0.5492	0.9646
0.3530000	0.360700	2.26600	0.97870	4.77000	4.8730	46.50000	46.510	0.5487	0.9648
0.3540000	0.361600	2.27200	0.97900	4.79800	4.9010	47.03000	47.040	0.5483	0.9651

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_2$
0.3550000	0.362500	2.27800	0.97920	4.82700	4.9290	47.59000	47.600	0.5479	0.9654
0.3560000	0.363500	2.28400	0.97950	4.85600	4.9570	48.15000	48.150	0.5474	0.9657
0.3570000	0.364400	2.29000	0.97970	4.88500	4.9870	48.72000	48.720	0.5470	0.9659
0.3580000	0.365300	2.29600	0.97990	4.91400	5.0150	49.29000	49.290	0.5466	0.9662
0.3590000	0.366300	2.30100	0.98010	4.94400	5.0440	49.88000	49.880	0.5461	0.9665
0.3600000	0.367200	2.30700	0.98040	4.97400	5.0720	50.47000	50.480	0.5457	0.9667
0.3610000	0.368200	2.31300	0.98060	5.00400	5.1030	51.08000	51.090	0.5453	0.9670
0.3620000	0.369100	2.31900	0.98080	5.03400	5.1320	51.67000	51.670	0.5449	0.9673
0.3630000	0.370000	2.32500	0.98110	5.06300	5.1610	52.27000	52.280	0.5445	0.9675
0.3640000	0.370900	2.33100	0.98130	5.09400	5.1910	52.89000	52.900	0.5441	0.9677
0.3650000	0.371900	2.33700	0.98150	5.12400	5.2210	53.52000	53.530	0.5437	0.9680
0.3660000	0.372800	2.34200	0.98170	5.15500	5.2510	54.15000	54.160	0.5433	0.9683
0.3670000	0.373700	2.34800	0.98190	5.18600	5.2810	57.78000	54.790	0.5429	0.9686
0.3680000	0.374700	2.35400	0.98210	5.21700	5.3120	55.42000	55.430	0.5425	0.9688
0.3690000	0.375600	2.36000	0.98230	5.24800	5.3430	56.09000	56.100	0.5421	0.9690
0.3700000	0.376600	2.36600	0.98250	5.28000	5.3740	56.76000	56.770	0.5417	0.9693
0.3710000	0.377500	2.37200	0.98270	5.31200	5.4060	57.43000	57.440	0.5413	0.9696
0.3720000	0.378500	2.37800	0.98300	5.34500	5.4380	58.13000	58.140	0.5409	0.9698
0.3730000	0.379400	2.38400	0.98320	5.37700	5.4690	58.82000	58.830	0.5405	0.9700
0.3740000	0.380400	2.39000	0.98340	5.41000	5.5020	59.52000	59.530	0.5402	0.9702

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh \frac{2\pi d}{L}$	$\cosh \frac{2\pi d}{L}$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.3750000	0.381300	2.39600	0.98350	5.44300	5.5340	60.24000	60.250	0.5398	0.9705
0.3760000	0.382200	2.40200	0.98370	5.47500	5.5660	60.95000	60.950	0.5394	0.9707
0.3770000	0.383200	2.40800	0.98390	5.50800	5.5980	61.68000	61.680	0.5390	0.9709
0.3780000	0.384100	2.41300	0.98410	5.54100	5.6310	62.41000	62.420	0.5387	0.9712
0.3790000	0.385000	2.41900	0.98430	5.57200	5.6610	63.13000	63.140	0.5383	0.9714
0.3800000	0.386000	2.42500	0.98450	5.60900	5.6970	63.90000	63.910	0.5380	0.9717
0.3810000	0.386900	2.43100	0.98470	5.64300	5.7310	64.66000	64.670	0.5376	0.9719
0.3820000	0.387900	2.43700	0.98480	5.67700	5.7650	65.45000	65.460	0.5372	0.9721
0.3830000	0.388800	2.44300	0.98500	5.71200	5.7980	66.20000	66.210	0.5369	0.9724
0.3840000	0.389800	2.44900	0.98520	5.74600	5.8330	67.00000	67.010	0.5365	0.9726
0.3850000	0.390700	2.45500	0.98540	5.78000	5.8660	67.80000	67.810	0.5362	0.9728
0.3860000	0.391700	2.46100	0.98550	5.81400	5.9000	68.61000	68.620	0.5359	0.9730
0.3870000	0.392600	2.46700	0.98570	5.85000	5.9350	69.45000	69.460	0.5355	0.9732
0.3880000	0.393600	2.47300	0.98590	5.88600	5.9700	70.28000	70.290	0.5352	0.9735
0.3890000	0.394500	2.47900	0.98600	5.92100	6.0050	71.12000	71.130	0.5349	0.9737
0.3900000	0.395500	2.48500	0.98620	5.95700	6.0400	71.97000	71.980	0.5345	0.9739
0.3910000	0.396400	2.49100	0.98640	5.99300	6.0760	72.85000	72.860	0.5342	0.9741
0.3920000	0.397400	2.49700	0.98650	6.02900	6.1120	73.72000	73.720	0.5339	0.9743
0.3930000	0.398300	2.50300	0.98670	6.06600	6.1480	74.59000	74.590	0.5336	0.9745
0.3940000	0.399300	2.50900	0.98690	6.10300	6.1850	75.48000	75.480	0.5332	0.9748

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.3950000	0.400200	2.51500	0.98700	6.14000	6.2210	76.40000	76.400	0.5329	0.9750
0.3960000	0.401200	2.52100	0.98720	6.17700	6.2580	77.32000	77.320	0.5326	0.9752
0.3970000	0.402100	2.52700	0.98730	6.21500	6.2950	78.24000	78.240	0.5323	0.9754
0.3980000	0.403100	2.53200	0.98740	6.25200	6.3320	79.19000	79.190	0.5320	0.9756
0.3990000	0.404000	2.53800	0.98760	6.29000	6.3690	80.13000	80.130	0.5317	0.9758
0.4000000	0.405000	2.54400	0.98770	6.32900	6.4070	81.12000	81.120	0.5314	0.9761
0.4010000	0.405900	2.55000	0.98790	6.36700	6.4450	82.08000	82.080	0.5311	0.9763
0.4020000	0.406900	2.55600	0.98800	6.40600	6.4830	83.06000	83.060	0.5308	0.9765
0.4030000	0.407800	2.56200	0.98820	6.44400	6.5210	84.07000	84.070	0.5305	0.9766
0.4040000	0.408800	2.56800	0.98830	6.48400	6.5610	85.11000	85.110	0.5302	0.9768
0.4050000	0.409800	2.57500	0.98850	6.52500	6.6010	86.14000	86.140	0.5299	0.9777
0.4060000	0.410700	2.58100	0.98860	6.56400	6.6400	87.17000	87.170	0.5296	0.9772
0.4070000	0.411600	2.58600	0.98870	6.60300	6.6790	88.20000	88.200	0.5293	0.9774
0.4080000	0.412650	2.59200	0.98890	6.64400	6.7180	89.28000	89.280	0.5290	0.9776
0.4090000	0.413600	2.59800	0.98900	6.68400	6.7580	90.39000	90.390	0.5287	0.9778
0.4100000	0.414500	2.60400	0.98910	6.72500	6.7990	91.44000	91.440	0.5285	0.9780
0.4110000	0.415500	2.61000	0.98920	6.76600	6.8390	92.55000	92.550	0.5282	0.9782
0.4120000	0.416400	2.61600	0.98940	6.80600	6.8790	93.67000	93.670	0.5279	0.9784
0.4130000	0.417400	2.62300	0.98950	6.84900	6.9210	94.83000	94.830	0.5277	0.9786
0.4140000	0.418300	2.62900	0.98960	6.89000	6.9630	95.96000	95.960	0.5274	0.9788

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.4150000	0.419300	2.63500	0.98980	6.93200	7.0040	97.13000	97.130	0.5271	0.9790
0.4160000	0.420300	2.64100	0.98990	6.97400	7.0460	98.30000	98.300	0.5269	0.9792
0.4170000	0.421200	2.64700	0.99000	7.01800	7.0880	99.52000	99.520	0.5266	0.9794
0.4180000	0.422200	2.65300	0.99010	7.06000	7.1300	100.70000	100.700	0.5263	0.9795
0.4190000	0.423100	2.65900	0.99020	7.10200	7.1730	101.90000	101.900	0.5261	0.9797
0.4200000	0.424100	2.66500	0.99040	7.14600	7.2150	103.10000	103.100	0.5258	0.9798
0.4210000	0.425100	2.67100	0.99050	7.19000	7.2590	104.40000	104.400	0.5256	0.9800
0.4220000	0.426000	2.67700	0.99060	7.23400	7.3030	105.70000	105.700	0.5253	0.9802
0.4230000	0.427000	2.68300	0.99070	7.27900	7.3490	107.00000	107.000	0.5251	0.9804
0.4240000	0.428000	2.68900	0.99080	7.32500	7.3920	108.30000	108.300	0.5248	0.9806
0.4250000	0.428900	2.69500	0.99090	7.37100	7.4380	109.70000	109.700	0.5246	0.9808
0.4260000	0.429800	2.70100	0.99100	7.41200	7.4790	110.90000	110.900	0.5244	0.9810
0.4270000	0.430800	2.70700	0.99110	7.45700	7.5240	112.20000	112.200	0.5241	0.9811
0.4280000	0.431850	2.71300	0.99120	7.50300	7.5700	113.60000	113.600	0.5239	0.9812
0.4290000	0.432800	2.71900	0.99130	7.55000	7.6160	115.00000	115.000	0.5237	0.9814
0.4300000	0.433700	2.72500	0.99140	7.59900	7.6610	116.40000	116.400	0.5234	0.9816
0.4310000	0.434700	2.73100	0.99150	7.64200	7.7070	117.80000	117.800	0.5232	0.9818
0.4320000	0.435600	2.73700	0.99160	7.68800	7.7530	119.20000	119.200	0.5230	0.9819
0.4330000	0.436600	2.74300	0.99170	7.73500	7.8000	120.70000	120.700	0.5227	0.9821
0.4340000	0.437600	2.74900	0.99180	7.78300	7.8470	122.20000	122.200	0.5225	0.9823

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.4350000	0.438500	2.75500	0.99190	7.83100	7.8950	123.70000	123.700	0.5223	0.9824
0.4360000	0.439500	2.76200	0.99200	7.88000	7.9430	125.20000	125.200	0.5221	0.9826
0.4370000	0.440500	2.76800	0.99210	7.92200	7.9910	126.70000	126.700	0.5218	0.9828
0.4380000	0.441400	2.77400	0.99220	7.97500	8.0350	128.30000	128.300	0.5216	0.9829
0.4390000	0.442400	2.78000	0.99230	8.02600	8.0880	129.90000	129.900	0.5214	0.9830
0.4400000	0.443400	2.78600	0.99240	8.07500	8.1360	131.40000	131.400	0.5212	0.9832
0.4410000	0.444300	2.79200	0.99250	8.12400	8.1850	133.00000	133.000	0.5210	0.9833
0.4420000	0.445300	2.79800	0.99260	8.17500	8.2360	134.70000	134.700	0.5208	0.9835
0.4430000	0.446300	2.80400	0.99270	8.22800	8.2850	136.30000	136.300	0.5206	0.9836
0.4440000	0.447200	2.81000	0.99280	8.27400	8.3340	137.90000	137.900	0.5204	0.9838
0.4450000	0.448200	2.81600	0.99290	8.32600	8.3870	139.60000	139.600	0.5202	0.9839
0.4460000	0.449200	2.82200	0.99300	8.37900	8.4380	141.40000	141.400	0.5200	0.9841
0.4470000	0.450100	2.82800	0.99300	8.42700	8.4860	143.10000	143.100	0.5198	0.9843
0.4480000	0.451150	2.83400	0.99310	8.48100	8.5400	144.80000	144.800	0.5196	0.9844
0.4490000	0.452100	2.84000	0.99320	8.53200	8.5900	146.60000	146.600	0.5194	0.9846
0.4500000	0.453100	2.84700	0.99330	8.58500	8.6430	148.40000	148.400	0.5192	0.9847
0.4510000	0.454000	2.85300	0.99340	8.63800	8.6950	150.20000	150.200	0.5190	0.9848
0.4520000	0.455000	2.85900	0.99350	8.69300	8.7500	152.10000	152.100	0.5188	0.9849
0.4530000	0.456000	2.86500	0.99350	8.74700	8.8040	154.00000	154.000	0.5186	0.9851
0.4540000	0.456900	2.87100	0.99360	8.79700	8.8540	155.90000	155.900	0.5184	0.9852

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.4550000	0.457900	2.87700	0.99370	8.85300	8.9100	157.70000	157.700	0.5182	0.9853
0.4560000	0.458900	2.88300	0.99380	8.91000	8.9650	159.70000	159.700	0.5181	0.9855
0.4570000	0.459900	2.89000	0.99380	8.96500	9.0210	161.70000	161.700	0.5179	0.9857
0.4580000	0.460800	2.89600	0.99390	9.01600	9.0720	163.60000	163.600	0.5177	0.9858
0.4590000	0.461800	2.90200	0.99400	9.07400	9.1290	165.60000	165.600	0.5175	0.9859
0.4600000	0.462800	2.90800	0.99410	9.13200	9.1860	167.70000	167.700	0.5173	0.9860
0.4610000	0.463700	2.91400	0.99410	9.18300	9.2380	169.70000	169.700	0.5172	0.9862
0.4620000	0.464700	2.92000	0.99420	9.24200	9.2960	171.80000	171.800	0.5170	0.9863
0.4630000	0.465700	2.92600	0.99430	9.30100	9.3540	173.90000	173.900	0.5168	0.9864
0.4640000	0.466600	2.93200	0.99440	9.35300	9.4060	176.00000	176.000	0.5167	0.9865
0.4650000	0.467600	2.93800	0.99440	9.41300	9.4660	178.20000	178.200	0.5165	0.9867
0.4660000	0.468600	2.94400	0.99450	9.47200	9.5250	180.40000	180.400	0.5163	0.9868
0.4670000	0.469500	2.95100	0.99460	9.53300	9.5850	182.60000	182.600	0.5162	0.9869
0.4680000	0.470550	2.95700	0.99460	9.58600	9.6380	184.80000	184.800	0.5160	0.9871
0.4690000	0.471500	2.96300	0.99470	9.64700	9.6990	187.20000	187.200	0.5158	0.9872
0.4700000	0.472500	2.96900	0.99470	9.70900	9.7600	189.50000	189.500	0.5157	0.9873
0.4710000	0.473500	2.97500	0.99480	9.77000	9.8210	191.80000	191.800	0.5155	0.9874
0.4720000	0.474400	2.98100	0.99490	9.82600	9.8770	194.20000	194.200	0.5154	0.9875
0.4730000	0.475400	2.98700	0.99490	9.88800	9.9380	196.50000	196.500	0.5152	0.9876
0.4740000	0.476400	2.99300	0.99500	9.95100	10.0000	199.00000	199.000	0.5150	0.9877

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_2$
0.4750000	0.477400	2.99900	0.99510	10.01000	10.070	201.40000	201.400	0.5149	0.9878
0.4760000	0.478300	3.00500	0.99510	10.07000	10.120	203.90000	203.900	0.5147	0.9880
0.4770000	0.479300	3.01200	0.99520	10.13000	10.180	206.50000	206.500	0.5146	0.9881
0.4780000	0.480300	3.01800	0.99520	10.20000	10.250	209.00000	209.000	0.5144	0.9882
0.4790000	0.481300	3.02400	0.99530	10.26000	10.310	211.70000	211.700	0.5143	0.9883
0.4800000	0.482200	3.03000	0.99530	10.32000	10.370	214.20000	214.200	0.5142	0.9885
0.4810000	0.483200	3.03600	0.99540	10.39000	10.430	216.80000	216.800	0.5140	0.9886
0.4820000	0.484200	3.04200	0.99550	10.45000	10.500	219.50000	219.500	0.5139	0.9887
0.4830000	0.485200	3.04900	0.99550	10.52000	10.570	222.20000	222.200	0.5137	0.9888
0.4840000	0.486200	3.05500	0.99560	10.59000	10.630	225.00000	225.000	0.5136	0.9889
0.4850000	0.487100	3.06100	0.99560	10.65000	10.690	228.30000	228.300	0.5134	0.9890
0.4860000	0.488100	3.06700	0.99570	10.71000	10.760	230.60000	230.600	0.5133	0.9891
0.4870000	0.489100	3.07300	0.99570	10.78000	10.830	233.50000	233.500	0.5132	0.9892
0.4880000	0.490100	3.07900	0.99580	10.85000	10.900	236.40000	236.400	0.5130	0.9893
0.4890000	0.491100	3.08600	0.99580	10.82000	10.960	239.60000	239.600	0.5129	0.9895
0.4900000	0.492000	3.09200	0.99590	10.99000	11.030	242.30000	242.300	0.5128	0.9896
0.4910000	0.493000	3.09800	0.99590	11.05000	11.090	245.20000	245.200	0.5126	0.9897
0.4920000	0.494000	3.10400	0.99600	11.12000	11.160	248.30000	248.300	0.5125	0.9898
0.4930000	0.495000	3.11000	0.99600	11.19000	11.240	251.30000	251.300	0.5124	0.9899
0.4940000	0.496000	3.11700	0.99610	11.26000	11.310	254.50000	254.500	0.5122	0.9899

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.4950000	0.496900	3.12200	0.99610	11.32000	11.370	257.60000	257.600	0.5121	0.9900
0.4960000	0.497900	3.12800	0.99620	11.40000	11.440	260.80000	260.800	0.5120	0.9901
0.4970000	0.498900	3.13500	0.99620	11.47000	11.510	264.00000	264.000	0.5119	0.9902
0.4980000	0.499900	3.14100	0.99630	11.54000	11.590	267.30000	267.300	0.5118	0.9903
0.4990000	0.500900	3.14700	0.99630	11.61000	11.650	270.60000	270.600	0.5116	0.9904
0.5000000	0.501800	3.15300	0.99640	11.68000	11.720	274.00000	274.000	0.5115	0.9905
0.5010000	0.502800	3.15900	0.99640	11.75000	11.800	277.50000	277.500	0.5114	0.9906
0.5020000	0.503800	3.16600	0.99640	11.83000	11.870	280.80000	280.800	0.5113	0.9907
0.5030000	0.504800	3.17200	0.99650	11.91000	11.950	284.30000	284.300	0.5112	0.9908
0.5040000	0.505800	3.17800	0.99650	11.98000	12.020	287.90000	287.900	0.5110	0.9909
0.5050000	0.506700	3.18400	0.99660	12.05000	12.090	291.40000	291.400	0.5109	0.9909
0.5060000	0.507700	3.19000	0.99660	12.12000	12.160	295.00000	295.000	0.5108	0.9910
0.5070000	0.508700	3.19600	0.99670	12.20000	12.240	298.70000	298.700	0.5107	0.9911
0.5080000	0.509700	3.20300	0.99670	12.28000	12.320	302.40000	302.400	0.5106	0.9912
0.5090000	0.510700	3.20900	0.99680	12.35000	12.390	306.20000	306.200	0.5105	0.9913
0.5100000	0.511700	3.21500	0.99680	12.43000	12.470	310.00000	310.000	0.5104	0.9914
0.5110000	0.512600	3.22100	0.99680	12.50000	12.540	313.80000	313.800	0.5103	0.9915
0.5120000	0.513600	3.22700	0.99690	12.58000	12.620	317.70000	317.700	0.5102	0.9915
0.5130000	0.514600	3.23300	0.99690	12.66000	12.700	321.70000	321.700	0.5101	0.9916
0.5140000	0.515600	3.24000	0.99700	12.74000	12.780	325.70000	325.700	0.5100	0.9917

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh$ $2\pi d/L$	$\sinh$ $2\pi d/L$	$\cosh$ $2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.5150000	0.516600	3.24600	0.99700	12.82000	12.860	329.70000	329.700	0.5098	0.9918
0.5160000	0.517600	3.25200	0.99700	12.90000	12.940	333.80000	333.800	0.5097	0.9919
0.5170000	0.518500	3.25800	0.99710	12.98000	13.020	337.90000	337.900	0.5096	0.9919
0.5180000	0.519500	3.26400	0.99710	13.06000	13.100	342.20000	342.200	0.5095	0.9920
0.5190000	0.520500	3.27000	0.99710	13.14000	13.180	346.40000	346.400	0.5094	0.9921
0.5200000	0.521500	3.27700	0.99720	13.22000	13.260	350.70000	350.700	0.5093	0.9922
0.5210000	0.522500	3.28300	0.99720	13.31000	13.350	355.10000	355.100	0.5092	0.9923
0.5220000	0.523500	3.28900	0.99720	13.39000	13.430	359.60000	359.600	0.5092	0.9924
0.5230000	0.524400	3.29500	0.99730	13.47000	13.510	364.00000	364.000	0.5091	0.9924
0.5240000	0.525400	3.30100	0.99730	13.55000	13.590	368.50000	368.500	0.5090	0.9925
0.5250000	0.526400	3.30800	0.99730	13.64000	13.680	373.10000	373.100	0.5089	0.9926
0.5260000	0.527400	3.31400	0.99740	13.73000	13.760	377.80000	377.800	0.5088	0.9927
0.5270000	0.528400	3.32000	0.99740	13.81000	13.850	382.50000	382.500	0.5087	0.9927
0.5280000	0.529400	3.32600	0.99740	13.90000	13.940	387.30000	387.300	0.5086	0.9928
0.5290000	0.530400	3.33300	0.99750	13.99000	14.020	392.20000	392.200	0.5085	0.9929
0.5300000	0.531400	3.33900	0.99750	14.07000	14.100	397.00000	397.000	0.5084	0.9930
0.5310000	0.532300	3.34500	0.99750	14.16000	14.190	402.00000	402.000	0.5083	0.9931
0.5320000	0.533300	3.35100	0.99760	14.25000	14.280	406.90000	406.900	0.5082	0.9931
0.5330000	0.534300	3.35700	0.99760	14.34000	14.370	412.00000	412.000	0.5082	0.9932
0.5340000	0.535300	3.36300	0.99760	14.43000	14.460	417.20000	417.200	0.5081	0.9933

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.5350000	0.536300	3.37000	0.99760	14.52000	14.550	422.40000	422.400	0.5080	0.9933
0.5360000	0.537300	3.37600	0.99770	14.61000	14.640	427.70000	427.700	0.5079	0.9934
0.5370000	0.538300	3.38200	0.99770	14.70000	14.730	433.10000	433.100	0.5078	0.9935
0.5380000	0.539300	3.38800	0.99770	14.79000	14.820	438.50000	438.500	0.5077	0.9935
0.5390000	0.540200	3.39400	0.99770	14.88000	14.910	444.00000	444.000	0.5077	0.9936
0.5400000	0.541200	3.40100	0.99780	14.97000	15.010	449.50000	449.500	0.5076	0.9936
0.5410000	0.542200	3.40700	0.99780	15.07000	15.100	455.10000	455.100	0.5075	0.9937
0.5420000	0.543200	3.41300	0.99780	15.16000	15.190	460.70000	460.700	0.5074	0.9938
0.5430000	0.544200	3.41900	0.99790	15.25000	15.290	466.40000	466.400	0.5073	0.9938
0.5440000	0.545200	3.42600	0.99790	15.35000	15.380	472.20000	472.200	0.5073	0.9939
0.5450000	0.546100	3.43200	0.99790	15.45000	15.480	478.10000	478.100	0.5072	0.9940
0.5460000	0.547100	3.43800	0.99790	15.54000	15.580	484.00000	484.000	0.5071	0.9941
0.5470000	0.548100	3.44400	0.99800	15.64000	15.670	490.00000	490.000	0.5070	0.9941
0.5480000	0.549100	3.45000	0.99800	15.74000	15.770	496.00000	496.000	0.5070	0.9942
0.5490000	0.550100	3.45600	0.99800	15.84000	15.870	502.00000	502.000	0.5069	0.9942
0.5500000	0.551100	3.46300	0.99800	15.94000	15.970	508.00000	508.000	0.5068	0.9942
0.5510000	0.552100	3.46900	0.99810	16.04000	16.070	515.00000	515.000	0.5067	0.9942
0.5520000	0.553100	3.47500	0.99810	16.14000	16.170	521.00000	521.000	0.5067	0.9943
0.5530000	0.554100	3.48100	0.99810	16.24000	16.270	528.00000	528.000	0.5066	0.9944
0.5540000	0.555100	3.48800	0.99810	16.34000	16.370	534.00000	534.000	0.5065	0.9944

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_1$
0.5550000	0.556000	3.49400	0.99820	16.44000	16.470	541.40000	541.400	0.5065	0.9945
0.5560000	0.557000	3.50000	0.99820	16.54000	16.570	548.10000	548.100	0.5064	0.9945
0.5570000	0.558000	3.50600	0.99820	16.65000	16.680	554.90000	554.900	0.5063	0.9946
0.5580000	0.559000	3.51200	0.99820	16.75000	16.780	562.00000	562.000	0.5063	0.9947
0.5590000	0.560000	3.51900	0.99820	16.85000	16.880	569.10000	569.100	0.5062	0.9947
0.5600000	0.561000	3.52500	0.99830	16.96000	16.990	576.10000	576.100	0.5061	0.9947
0.5610000	0.562000	3.53100	0.99830	17.06000	17.090	583.30000	583.300	0.5061	0.9948
0.5620000	0.563000	3.53700	0.99830	17.17000	17.200	590.70000	590.700	0.5060	0.9949
0.5630000	0.564000	3.54300	0.99830	17.28000	17.310	598.00000	598.000	0.5059	0.9949
0.5640000	0.564900	3.55000	0.99840	17.38000	17.410	605.00000	605.000	0.5059	0.9950
0.5650000	0.565900	3.55600	0.99840	17.49000	17.520	613.20000	613.200	0.5058	0.9950
0.5660000	0.566900	3.56200	0.99840	17.60000	17.630	620.80000	620.800	0.5057	0.9951
0.5670000	0.567900	3.56800	0.99840	17.71000	17.740	628.50000	628.500	0.5057	0.9951
0.5680000	0.568900	3.57500	0.99840	17.82000	17.850	636.40000	636.400	0.5056	0.9952
0.5690000	0.569900	3.58100	0.99850	17.94000	17.970	644.30000	644.300	0.5056	0.9952
0.5700000	0.570900	3.58700	0.99850	18.05000	18.080	652.40000	652.400	0.5055	0.9953
0.5710000	0.571900	3.59300	0.99850	18.16000	18.190	660.50000	660.500	0.5054	0.9953
0.5720000	0.572900	3.60000	0.99850	18.28000	18.310	668.80000	668.800	0.5054	0.9954
0.5730000	0.573800	3.60600	0.99850	18.39000	18.420	677.20000	677.200	0.5053	0.9954
0.5740000	0.574800	3.61200	0.99850	18.50000	18.530	685.60000	685.600	0.5053	0.9955

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.5750000	0.575800	3.61800	0.99860	18.62000	18.640	694.30000	694.300	0.5052	0.9955
0.5760000	0.576800	3.62400	0.99860	18.73000	18.760	703.20000	703.200	0.5052	0.9956
0.5770000	0.577800	3.63000	0.99860	18.85000	18.880	711.90000	711.900	0.5051	0.9956
0.5780000	0.578800	3.63700	0.99860	18.97000	19.000	720.80000	720.800	0.5051	0.9957
0.5790000	0.579800	3.64300	0.99860	19.09000	19.120	729.90000	729.900	0.5050	0.9957
0.5800000	0.580800	3.64900	0.99870	19.21000	19.240	739.00000	739.000	0.5049	0.9957
0.5810000	0.581800	3.65600	0.99870	19.33000	19.360	748.10000	748.100	0.5049	0.9955
0.5820000	0.582800	3.66200	0.99870	19.45000	19.480	757.50000	757.500	0.5048	0.9958
0.5830000	0.583800	3.66800	0.99870	19.58000	19.600	767.00000	767.000	0.5048	0.9959
0.5840000	0.584800	3.67400	0.99870	19.70000	19.730	776.70000	776.700	0.5047	0.9959
0.5850000	0.585800	3.68000	0.99870	19.81000	19.840	786.50000	786.500	0.5047	0.9960
0.5860000	0.586700	3.68600	0.99870	19.94000	19.960	796.40000	796.400	0.5046	0.9960
0.5870000	0.587700	3.69300	0.99880	20.06000	20.090	806.50000	806.500	0.5046	0.9960
0.5880000	0.588700	3.69900	0.99880	20.19000	20.210	816.50000	816.500	0.5045	0.9961
0.5890000	0.589700	3.70500	0.99880	20.32000	20.340	826.70000	826.700	0.5045	0.9961
0.5900000	0.590700	3.71200	0.99880	20.45000	20.470	837.10000	837.100	0.5044	0.9962
0.5910000	0.591700	3.71800	0.99880	20.57000	20.600	847.60000	847.600	0.5044	0.9962
0.5920000	0.592700	3.72400	0.99880	20.70000	20.730	858.20000	858.200	0.5043	0.9963
0.5930000	0.593700	3.73000	0.99890	20.83000	20.860	868.90000	868.900	0.5043	0.9963
0.5940000	0.594700	3.73700	0.99890	20.97000	20.990	879.80000	879.800	0.5043	0.9963

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_n$
0.5950000	0.595700	3.74300	0.99890	21.10000	21.120	890.80000	890.800	0.5042	0.9964
0.5960000	0.596700	3.74900	0.99890	21.23000	21.250	901.90000	901.900	0.5042	0.9964
0.5970000	0.597700	3.75500	0.99890	21.35000	21.370	913.40000	913.400	0.5041	0.9964
0.5980000	0.598700	3.76100	0.99890	21.49000	21.510	925.00000	925.000	0.5041	0.9965
0.5990000	0.599600	3.76700	0.99890	21.62000	21.640	936.50000	936.500	0.5040	0.9965
0.6000000	0.600600	3.77400	0.99900	21.76000	21.780	948.10000	948.100	0.5040	0.9965
0.6100000	0.610600	3.83600	0.99910	23.17000	23.190	1.0740000	1.07400	0.5036	0.9969
0.6200000	0.620500	3.89900	0.99920	24.66000	24.680	1.2170000	1.21700	0.5032	0.9972
0.6300000	0.630500	3.96100	0.99930	26.25000	26.270	1.3790000	1.37900	0.5029	0.9975
0.6400000	0.640400	4.02400	0.99940	27.95000	27.970	1.5270000	1.52700	0.5026	0.9977
0.6500000	0.650400	4.08600	0.99940	29.75000	29.770	1.7710000	1.77100	0.5023	0.9980
0.6600000	0.660300	4.14900	0.99950	31.68000	31.690	2.0080000	2.00800	0.5021	0.9982
0.6700000	0.670300	4.21200	0.99960	33.73000	33.740	2.2750000	2.27500	0.5019	0.9983
0.6800000	0.680300	4.27400	0.99960	35.90000	35.920	2.5790000	2.57900	0.5017	0.9985
0.6900000	0.690200	4.33700	0.99970	38.23000	38.240	2.9230000	2.92300	0.5015	0.9987
0.7000000	0.700200	4.40000	0.99970	40.71000	40.720	3.3140000	3.31400	0.5013	0.9988
0.7100000	0.710200	4.46200	0.99970	43.34000	43.350	3.7570000	3.75700	0.5012	0.9989
0.7200000	0.720200	4.52500	0.99980	46.14000	46.150	4.2580000	4.25800	0.5011	0.9990
0.7300000	0.730200	4.58800	0.99980	49.13000	49.140	4.8280000	4.82800	0.5010	0.9991
0.7400000	0.740100	4.65000	0.99980	52.31000	52.320	5.4730000	5.47300	0.5009	0.9992

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2\pi d/L$	$\tanh \cdot 2\pi d/L$	$\sinh 2\pi d/L$	$\cosh 2\pi d/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_0$
0.750000	0.750100	4.71300	0.99980	55.70000	55.710	6.2040000	6.20400	0.5008	0.9993
0.760000	0.760100	4.77600	0.99990	59.30000	59.310	7.0340000	7.03400	0.5007	0.9994
0.770000	0.770100	4.83900	0.99990	63.15000	63.160	7.9760000	7.97600	0.5006	0.9995
0.780000	0.780100	4.90200	0.99990	67.24000	67.250	9.0420000	9.04200	0.5005	0.9996
0.790000	0.790100	4.96400	0.99990	71.60000	71.600	10.2500000	10.2500	0.5005	0.9996
0.800000	0.800100	5.02700	0.99990	76.24000	76.240	11.6200000	11.6200	0.5004	0.9996
0.810000	0.810100	5.09000	0.99990	81.19000	81.190	13.1800000	13.1800	0.5004	0.9996
0.820000	0.820100	5.15300	0.99990	86.44000	86.440	14.9400000	14.9400	0.5003	0.9997
0.830000	0.830100	5.21500	0.99990	92.05000	92.050	17.3400000	17.3400	0.5003	0.9997
0.840000	0.840000	5.27800	1.00000	98.01000	98.010	19.2100000	19.2100	0.5003	0.9997
0.850000	0.850000	5.34100	1.00000	104.40000	104.40	21.7800000	21.7800	0.5002	0.9998
0.860000	0.860000	5.40400	1.00000	111.10000	111.10	24.6900000	24.6900	0.5002	0.9998
0.870000	0.870000	5.46700	1.00000	118.30000	118.30	28.0000000	28.0000	0.5002	0.9998
0.880000	0.880000	5.52900	1.00000	126.00000	126.00	31.7500000	31.7500	0.5002	0.9998
0.890000	0.890000	5.59200	1.00000	134.20000	134.20	36.0000000	36.0000	0.5002	0.9998
0.900000	0.900000	5.65500	1.00000	142.90000	142.00	40.8100000	40.8100	0.5001	0.9999
0.910000	0.910000	5.71800	1.00000	152.10000	152.10	46.2800000	46.2800	0.5001	0.9999
0.920000	0.920000	5.78100	1.00000	162.00000	162.10	52.4700000	52.4700	0.5001	0.9999
0.930000	0.930000	5.84400	1.00000	172.50000	172.50	59.5000000	59.5000	0.5001	0.9999
0.940000	0.940000	5.90600	1.00000	183.70000	183.70	67.4700000	67.4700	0.5009	0.9999

VALORES DE LAS FUNCIONES DE  $d/L_0$ , SEGUN WIEGEL

$d/L_0$	$d/L$	$2rd/L$	$\tanh$ $2rd/L$	$\sinh$ $2rd/L$	$\cosh$ $2rd/L$	$\sinh$	$\cosh$	$n$	$K_s$
0.950000	0.950000	5.69600	1.00000	195.6000	195.60	76.490000	76.4900	0.5001	0.9999
0.960000	0.960000	6.03200	1.00000	203.5000	203.50	86.740000	86.7400	0.5001	0.9999
0.970000	0.970000	6.09500	1.00000	222.8000	222.80	98.350000	98.3500	0.5001	0.9999
0.980000	0.980000	6.15800	1.00000	236.1000	236.10	111.500000	111.5000	0.5001	0.9999
0.990000	0.990000	6.22000	1.00000	251.4000	251.40	126.500000	126.5000	0.5000	1.0000
1.000000	1.000000	6.28300	1.00000	267.7000	267.70	143.400000	143.4000	0.5000	1.0000

# **BIBLIOGRAFIA.**

## BIBLIOGRAFIA.

**- Basic Coastal Engineering.**

Robert M. Sorensen.  
A Wiley-Interscience Publication.  
New York, 1978.

**- Coastal Engineering.**

An Introduction to Ocean Engineering.  
Kiyoshi Horikawa.  
Jhon Wiley & Sons.  
New York.

**- Fisica Universitaria.**

Sears, Zemansky, Young.  
Fondo Educativo Interamericano.  
Sexta Edición. México, 1986.

**- Ingeniería Marítima.**

Roberto Bustamante Ahumada.  
Ediciones Temas Marítimos.  
1976.

**- Manual Básico para Residentes de Obras Marítimas y Portuarias.**

Colegio de Ingenieros Civiles de México.

**- Manual de Hidráulica Marítima.**

José L. Sánchez Bribiesca.  
Instituto de Ingeniería U.N.A.M.  
1982.

**- Manual de Diseño de Obras Civiles.**

Vol.A.2.13. Hidráulica Marítima.  
Instituto de Investigaciones Eléctricas, C.F.E.  
México, 1983.

**BIBLIOGRAFIA.**

**- Random Seas and Design of Maritime Structures.**

Yoshimi Goda.

University of Tokio, 1985.

**- Shore Protection Manual Vol. I.**

U.S. Army Coastal Engineering Research Center.

1973.

**- Waves in the Ocean.**

Paul H. LeBlond and Lawrence A. Mysak.

Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York.

Segunda Edición, 1980.

**- Wave Behaviour Near Caustics and Nature.**

Pierson, W. New York 1972.