

42  
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION A LAS SOLUCIONES DE LAS  
ECUACIONES DE EINSTEIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
F I S I C O  
P R E S E N T A I  
ALBERTO SANCHEZ MORENO



MEXICO, D. F.,

1992

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

Introducción . . . . .	pag. 3
------------------------	--------

### Capítulo I

#### Conceptos Generales

1.1 Resumen . . . . .	5
1.2 Teoría Newtoniana de la Gravitación . . . . .	5
1.3 El Principio de Equivalencia . . . . .	7
1.4 Relatividad General . . . . .	9
1.5 Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	12
1.6 Simetría . . . . .	15

### Capítulo II

#### Soluciones Exteriores

2.1 Resumen . . . . .	16
2.2 Soluciones en el Vacío . . . . .	16
2.3 Simetría Axial . . . . .	17
2.4 Métrica Estacionarias con Simetría Axial . . . . .	18
(i) Métrica General . . . . .	19
(ii) Ecuación de Ernst . . . . .	21
2.5 Tipos de Soluciones . . . . .	25
(i) Solución de Weyl . . . . .	25
(ii) Solución de Schwarzschild . . . . .	26
(iii) Solución de Kerr . . . . .	28
(iv) Solución Tomimatsu-Sato . . . . .	30
(v) Solución de Papapetrou . . . . .	31
2.6 Técnicas de Generación de Soluciones . . . . .	33
(i) Transformación Bäcklund . . . . .	34
(ii) Método Belinsky-Zakharov . . . . .	36
2.7 Momentos Multipolares en Relatividad General . . . . .	38
(i) Definición Heurística de Momentos Multipolares . . . . .	39
(ii) Momentos Multipolares Newtonianos . . . . .	41
(iii) Momentos Multipolares Geroch-Hansen . . . . .	44

2.8 Soluciones Exactas, Axisimétricas y Estacionarias . . . . .	47
(i) Transformación HKX . . . . .	48
(ii) Cálculo de las Funciones Métricas . . . . .	55
(iii) Casos Especiales . . . . .	56
(iv) Cálculo de los Momentos Multipolares Geroch-Hansen . . . . .	59
(v) Cálculo de Momentos Multipolares . . . . .	61

## Capítulo III

### Soluciones Interiores

3.1 Resumen . . . . .	63
3.2 Termodinámica . . . . .	64
3.3 Interior Estelar . . . . .	67
3.4 Soluciones Interiores Exactas . . . . .	70
(i) Solución Interior de Buchdahl . . . . .	70
(ii) Solución Interior de Schwarzschild . . . . .	71
3.5 Campo vectorial Espacial . . . . .	74
(i) Congruencias de Líneas Mundo . . . . .	74
(ii) Hipersuperficie Ortogonal . . . . .	75
(iii) Campo Vectorial Geodésico . . . . .	76
(iv) Campo Vectorial Covariantemente Constante . . . . .	76
3.6 Campo de Velocidades . . . . .	78
3.7 Diadas . . . . .	81
3.8 Soluciones Interiores Axisimétricas Estacionarias . . . . .	84
(i) Solución de Wahlquist . . . . .	84
(ii) Velocidades en la Solución de Wahlquist . . . . .	91
(iii) Generalización de la Métrica de Wahlquist . . . . .	94

## Capítulo IV

### Solución Completa

4.1 Resumen . . . . .	100
4.2 Hipersuperficie 3-Dimensional Reducida para el Tensor de Curvatura . . . . .	101
(i) Métrica y Tensor de Proyección . . . . .	101
(ii) Tensor de Curvatura $K_{ab}$ . . . . .	102
(iii) Descomposición de la Derivada de un Vector Perpendicular a $n_a$ . . . . .	102
(iv) Fórmulas Reducidas del Tensor de Curvatura . . . . .	103
4.3 Condiciones de Unión . . . . .	105
4.4 Unión de la Métrica Interior y Exterior de Schwarzschild . . . . .	107
4.5 Conclusiones . . . . .	109

## INTRODUCCIÓN

Durante muchos años la teoría Newtoniana de la gravitación se mantuvo como el modelo más perfecto de una interacción física. Desde que Newton le propuso en el siglo XVII, ha sido usada muchas veces por multitud de científicos que siempre han obtenido resultados muy satisfactorios con ella; como un ejemplo podemos citar la predicción de la existencia de planetas como Urano y Neptuno.

Por más de trescientos años el modelo gravitacional de Newton recogió triunfos al explicar con gran precisión la mecánica celeste y predecir la existencia de cuerpos de los que no se tenía noticia. Sin embargo a finales del siglo XIX, con ayuda de aparatos mucho más precisos comenzaron a aparecer pequeñas inconsistencias entre las observaciones y los pronósticos basados en la teoría. Se habían encontrado ciertos "efectos finos" de la gravitación que no coincidían con la teoría de Newton y ni siquiera podían ser explicados. Por ejemplo, se había observado que la órbita de Mercurio no formaba una curva cerrada, una elipse como lo predice la teoría de Newton. Cada que Mercurio completa una vuelta alrededor del Sol no llega al mismo lugar del que partió, sino que se adelanta un poco cada vez, (42 segundos de arco cada año).

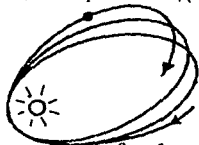


fig. 1

Este problema fue resuelto por el físico alemán Albert Einstein, quien propuso una nueva teoría de la gravitación que fue capaz de explicar los efectos finos observados y predecir algunos otros. Esta teoría recibe el nombre de TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD y se trata de una teoría completa con la que se puede predecir adicionalmente objetos astrofísicos como Cuasares, Pulsares y Hoyos Negros y que contiene como un caso especial a la teoría Newtoniana.

La investigación del campo gravitacional generado por una distribución de materia\* es muy importante debido a que la interacción gravitacional es fundamental en el estudio de la astronomía y la astrofísica. Las fuentes astronómicas son usualmente cuerpos rotando con una distribución de masa que carece de simetría esférica, pero que mantiene simetría axial. Para el estudio del campo gravitacional generado por estas distribuciones de materia hacemos uso de las ecuaciones que proporciona la relatividad general y que son llamadas comúnmente ecuaciones de Einstein. La solución de estas ecuaciones (en el vacío) nos describe el campo gravitacional exterior generado por los objetos astronómicos, además de darnos información de las propiedades de la materia como presión, densidad, etc.

El propósito de este trabajo es presentar una revisión lo más completa posible, de las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que nos permiten describir de forma completa el campo gravitacional generado por distribuciones de materia físicamente realistas (objetos astrofísicos). Estas soluciones pertenecen a la clase de soluciones estáticas, estacionarias y que mantienen simetría axial.

\* Nos referiremos a esta distribución como la fuente gravitatoria

El trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero de ellos se presenta una revisión de los conceptos fundamentales de la teoría Newtoniana y de Teoría General de la Relatividad. En el segundo se estudia el tipo de soluciones que permiten describir el campo gravitacional exterior a distribuciones de materia estacionarias, estáticas y con simetría axial. Se presenta el elemento de línea general, se discute algunas técnicas de generación de soluciones y para la investigación del significado físico de las soluciones se estudian los momentos multipolares. En el capítulo tercero se estudia la posible solución interior para fuentes estacionarias axisimétricas. Por último, en el cuarto capítulo se estudian las condiciones de unión entre dos métricas (Exterior e Interior, Capítulos II y III) para generar una solución completa al problema de la descripción del campo gravitacional generado por una distribución de materia.

## CONCEPTOS GENERALES

### 1.1 Resumen

La fuerza gravitacional es la que mantiene unido al Universo. Gracias a ella, un planeta o una estrella mantiene unidas sus partes y los planetas giran alrededor del sol sin escaparse. Si llegara a desaparecer la fuerza de gravedad, la Tierra se despedazaría, el Sol y todas las estrellas se diluirían en el espacio cósmico y sólo quedaría materia uniformemente distribuida por todo el Universo. Afortunadamente, la gravedad ha permanecido inmutable desde que se formó el Universo y es una propiedad inherente de la materia misma. En este capítulo nos proponemos revisar de manera general los conceptos fundamentales de la teoría de la gravitación, desde sus inicios (Newton(1687)) hasta la teoría general de la relatividad (Einstein(1915)).

### 1.2 Teoría Newtoniana de la Gravitación

Con Newton nace la ciencia moderna, es decir, la unión de la física celeste con la física terrestre. Antes de Newton, nadie había sospechado que la gravitación era un fenómeno inherente a todos los cuerpos del Universo. La gravitación se interpretaba como la tendencia de los cuerpos a ocupar su "lugar natural" que era el centro de la Tierra. La Tierra era el centro del Universo, alrededor del cual giraban los cuerpos celestes.

Antes que Newton muchos hombres de ciencia trabajaron para poder dar una explicación al movimiento de los astros, Copérnico en el siglo XVI propuso un sistema heliocéntrico según el cual los planetas incluyendo a la Tierra giran alrededor del Sol. El modelo describía el movimiento de los astros con aceptable precisión, pero no explicaba el mecanismo responsable de esos movimientos. utilizando su telescopio Galileo descubrió cuatro pequeños astros que giraban alrededor de Júpiter esto lo convenció de que la Tierra no era el centro del Universo. y dio evidencia de la validez del sistema de Copérnico.

Kepler, contemporáneo de Galileo, descubrió que los planetas no se mueven en círculos sino en trayectorias elípticas y que ese movimiento no es arbitrario ya que existen ciertas relaciones entre los periodos de revolución de los Planetas y sus distancias al Sol. Kepler plasmó estas relaciones en tres leyes. Una regularidad en el movimiento de los planetas sugería la existencia de un fenómeno universal subyacente. El mismo Kepler sospechó que el Sol es el responsable de ese fenómeno pero no lleo a elaborar ninguna teoría que lo explicara.

Robert Hooke fue quien más se acercó a una teoría de gravitación, este científico inglés contemporáneo de Newton, en 1674 había escrito:

*... todos los cuerpos celestes ejercen una atracción o poder gravitacional hacia sus centros, por lo que atraen no sólo sus propias partes, y evitan que se escapen de ellos, como vemos que lo hace la Tierra, sino también atraen a todos los cuerpos celestes que se encuentran dentro de sus esferas de actividad.*

† Citado por A. Koyré, en *Newtonian Studies*, University of Chicago Press(1965)

Sin esa atracción, prosigue Hooke, los cuerpos celestes se moverían en línea recta, pero ese poder gravitacional curva su trayectoria y los fuerza a moverse en círculos, elipses o alguna otra curva. Sin embargo su descripción fue puramente cualitativa y del planteamiento de Hooke a un sistema del mundo bien fundamentado y matemáticamente riguroso, existe un gran abismo, abismo que fue librado por Newton.

En teoría Newtoniana de gravitación un pedazo de materia suficientemente pequeña atrae a otro pedazo de materia suficientemente pequeña con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a las dos piezas y proporcional al producto de sus masas. La constante de proporcionalidad es  $G$ , llamada constante gravitacional de Newton. De la ley del inverso al cuadrado uno deduce que el campo gravitacional de una distribución de masa está completamente descrito por una única función  $\Phi$ , función de la posición y posiblemente del tiempo, que satisface la ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad [1.2.1]$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano; la ecuación [1.2.1] es la ecuación de Poisson, donde  $\rho$  es la densidad de masa. En el espacio vacío,  $\Phi$  satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad [1.2.2]$$

la función  $\Phi$  es llamada el potencial gravitacional y su significado físico es el siguiente. Una partícula de masa  $m$  ubicada en un campo gravitacional en el punto  $(x, y, z)$ , experimenta una fuerza que está dada por

$$F = m \nabla \Phi \quad [1.2.3]$$

la solución a la ecuación [1.2.1] en coordenadas cartesianas está dada por

$$\Phi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(x', y', z', t') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad [1.2.4]$$

donde la integración es sobre toda la región en la cual  $\rho$  es diferente de cero.

La integral [1.2.4] es usualmente difícil de resolver, por tanto, es necesario utilizar alguna simplificación que nos permita tener menos dificultad para encontrar el potencial  $\Phi$ . Estas simplificaciones suceden especialmente cuando existen situaciones que involucren simetrías.



### 1.3 El Principio de Equivalencia

El principio de equivalencia descansa en la igualdad entre la masa gravitacional y la masa inercial demostrada por Galileo, Huygens, Newton, Bessel. Einstein se dió cuenta de que consecuentemente, no se podía detectar la presencia de cualquier campo gravitacional externo que fuera estático y homogéneo desde el interior de un elevador en caída libre, ya que todos los objetos en el elevador, observador y elevador incluidos, estarían acelerados de la misma manera.

Consideremos un sistema de  $N$  partículas que se mueven a velocidades no relativistas bajo la influencia de ciertas fuerzas  $\vec{F}(\vec{r}_N - \vec{r}_M)$ , fuerzas que solo dependen de la separación entre partículas y bajo la influencia de un campo gravitacional externo  $\vec{g}$ . Las  $N$  ecuaciones de movimiento son

$$m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} = m_N \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{r}_N - \vec{r}_M) \quad [1.3.1]$$

realicemos la transformación

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t = t'$$

para obtener

$$\begin{aligned} m_N \frac{d^2}{dt'^2} \left[ \vec{r}'_N + \frac{1}{2} \vec{g} t'^2 \right] &= m_N \vec{g} + \sum_M \vec{F} \left[ \vec{r}'_N + \frac{1}{2} \vec{g} t'^2 - \vec{r}'_M - \frac{1}{2} \vec{g} t'^2 \right] \\ &\Rightarrow \\ m_N \frac{d^2 \vec{r}'_N}{dt'^2} + m_N \vec{g} &= m_N \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{r}'_N - \vec{r}'_M) \end{aligned}$$

Es decir el campo gravitacional se cancela por una fuerza no-inercial. Por lo tanto el observador en el sistema no primado ( $\vec{r}, t$ ) y el observador primado en caída libre ( $\vec{r}', t'$ ) no detectarán diferencia alguna en las leyes de la mecánica, la única diferencia será que el observador no primado dirá que siente un campo gravitacional mientras que el observador primado dirá que no lo siente.

Si  $\vec{g}$  depende de  $\vec{r}$  o de  $t$ , es decir que fuera inhomogeneo o no estacionario, no se hubiera podido eliminar mediante la introducción de una fuerza no-inercial. Por ejemplo: la Tierra está en caída libre alrededor del Sol y aún cuando prácticamente no sentimos el campo gravitacional solar, la pequeñísima inhomogeneidad en dicho campo (1 parte en 6000 entre medio día y media noche) es suficiente para originar las impresionantes mareas en los océanos. Aún en el elevador en caída libre podríamos en principio, detectar el campo terrestre, pues los objetos caerían radialmente hacia el centro de la Tierra y se irían aproximando entre sí a medida que el elevador descendiese.

Aún cuando las fuerzas no-inerciales no cancelan exactamente la fuerza gravitacional cuando el campo es inhomogeneo o dependiente del tiempo, podemos esperar una cancelación aproximada si nos restringimos a una región del espacio tiempo lo suficiente pequeña como para considerar constante el campo dentro de ella.

Por lo anterior el Principio de Equivalencia puede enunciarse de la siguiente manera:

*Para cada punto del espacio tiempo en presencia de un campo gravitacional arbitrario es posible escoger un sistema de coordenadas localmente inercial, tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor del punto, las leyes de la naturaleza tienen la misma forma que en los sistemas de coordenadas cartesianas no acelerados en ausencia de gravitación.*

Al hablar de mantener la forma de las leyes de la naturaleza en los sistemas de coordenadas cartesianas nos referimos a la forma que tienen las leyes de la naturaleza en relatividad especial:

$$f^{\alpha} = m \frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2}; \quad [1.3.2a]$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha\beta} = -J^{\beta}, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} F_{\gamma\delta} = 0; \quad [1.3.2b]$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}(x) = 0 \quad [1.3.2c]$$

$$f^{\alpha} = e F_{\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\gamma}}{dt} \quad [1.3.2d]$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, = 0, 1, 2, 3$$

Estas leyes son respectivamente la fuerza, las ecuaciones de Maxwell, la conservación de la energía y la fuerza electromagnética; y la condición de suficientemente pequeño se refiere a lo necesario para que el campo gravitacional sea satisfactoriamente constante dentro de la región.

## 1.4 Relatividad General

Los conceptos fundamentales y las consecuencias más importantes de la teoría General de la Relatividad son revisados de una forma breve en las siguientes páginas.

La relatividad general está formulada en una variedad † 4-dimensional Riemanniana ‡ en la cual los puntos son etiquetados en general por un sistema de coordenadas no inercial  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  y sujetas a la convención

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad [1.4.1]$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

llamada convención de suma de Einstein.\* Para cubrir todo el espacio tiempo utilizamos tres dimensiones espaciales y una temporal. En muchas ocasiones necesitamos pasar de un sistema de coordenadas del espacio tiempo  $x^\mu$  a otro sistema  $x'^\mu$ . A este tipo de transformaciones se les llama transformaciones de Lorentz y están dadas por

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^\mu) \quad [1.4.2]$$

y la invariancia del elemento de línea,  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  implica

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu} = \eta'_{\alpha\beta} \quad [1.4.3]$$

donde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [1.4.4]$$

es el llamado tensor de Minkowski. En el espacio tiempo podemos definir tetravectores  $A^\mu$  y  $B_\nu$  llamados respectivamente tetravector contravariante y tetravector covariante, los que se transforman de la siguiente manera

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad [1.4.5a]$$

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \quad [1.4.5b]$$

y tensores por ejemplo  $A^\mu_{\nu\lambda}$ , que se transforman como

$$A'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} A^\alpha_{\beta\gamma} \quad [1.4.6]$$

de la misma forma se transforman tensores de rango superior¶

† Variedad es un espacio curvo que localmente se ve como euclidiano.

‡ Variedad Riemanniana es una variedad diferenciable con métrica.

\* Índices repetidos arriba y abajo se suman.

¶ El número de índices es el rango del tensor

La información del campo gravitacional está contenida en un tensor covariante de segundo rango llamado TENSOR MÉTRICO, denotado por  $g_{\mu\nu}$ , que es la generalización del tensor de Minkowski. Este tensor determina el intervalo espacio-temporal  $ds^2$  de eventos o puntos separados por una distancia infinitesimal  $x^\mu$  y  $x^\mu + dx^\mu$  de la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad [1.4.7]$$

El tensor contravariante correspondiente a  $g_{\mu\nu}$  es  $g^{\mu\nu}$  y es definido por

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad [1.4.8]$$

donde

$$\delta_\nu^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \nu \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \nu \end{cases} \quad [1.4.9]$$

es la delta de Kronecker. Los índices en los tensores pueden cambiar de contravariantes a covariantes utilizando el tensor métrico de la siguiente manera:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad [1.4.10a]$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad [1.4.10b]$$

En este espacio tenemos una generalización de la diferenciación parcial ordinaria. Esta generalización es la llamada diferenciación covariante y se denota por un punto y coma. Aplicada a vectores covariantes y contravariantes se define como

$$A_{;\nu}^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\lambda \quad [1.4.11a]$$

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad [1.4.11b]$$

donde  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  son los llamados símbolos de Christoffel; ellos tienen la propiedad  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu$  y están dados en términos del tensor métrico de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad [1.4.12]$$

donde la coma indica diferenciación parcial con respecto a la variable correspondiente. Estos símbolos serían el análogo a la fuerza en la teoría Newtoniana. Los símbolos de Christoffel así definidos traen como consecuencia que la derivada covariante del tensor métrico sea cero

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad [1.4.13a]$$

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0 \quad [1.4.13b]$$

En una transformación de coordenadas de  $x^\mu$  a  $x'^\mu$  los símbolos de Christoffel se transforman como sigue

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \quad [1.4.14]$$

de donde observamos que  $\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda}$  no es un tensor pues no se transforma como tal. Con los símbolos de Christoffel podemos definir un nuevo tensor de la forma siguiente:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad [1.4.15]$$

Este tensor es el llamado tensor de Riemann, y tiene las siguientes propiedades de simetría:

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\lambda\nu} \quad [1.4.16]$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\mu} \quad [1.4.17]$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0 \quad [1.4.18]$$

y satisface la identidad

$$R_{\mu\nu;\lambda;\rho}^{\sigma} + R_{\rho\mu\nu;\lambda}^{\sigma} + R_{\mu\lambda\rho;\nu}^{\sigma} = 0 \quad [1.4.19]$$

llamada identidad de Bianchi. Con estas propiedades podemos formar un nuevo tensor  $R_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} \\ &= R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \end{aligned} \quad [1.4.20]$$

llamado tensor de Ricci, con el cual podemos construir el escalar de curvatura ( $R$ )

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad [1.4.21]$$

Tomando la identidad de Bianchi con todos los índices covariantes

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda;\rho} + R_{\sigma\mu\rho\nu;\lambda} + R_{\sigma\mu\lambda\rho;\nu} = 0 \quad [1.4.22]$$

multiplicando a ambos lados de la igualdad por  $g^{\sigma\lambda} g^{\mu\nu}$  y contrayendo tenemos

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu;\rho} + g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\rho;\lambda} + g^{\mu\nu} R_{\mu\rho;\nu} = 0 \quad [1.4.23]$$

En base a las propiedades de simetría, esta ecuación toma la forma

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu;\rho} - g^{\mu\nu} R_{\rho\rho;\nu} - g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\rho;\lambda} = 0 \quad [1.4.24]$$

Utilizando la definición de escalar de curvatura y cambiando  $\nu$  por  $\lambda$  (se puede hacer porque son índices mudos) resulta:

$$\begin{aligned} R_{;\rho} - R_{\rho;\nu}^{\nu} - R_{\rho;\lambda}^{\lambda} &= 0 \\ R_{;\rho} - 2R_{\rho;\nu}^{\nu} &= 0 \end{aligned} \quad [1.4.25]$$

que se puede poner en la forma

$$(R_{\rho\rho} - \frac{1}{2} g_{\rho\rho} R)^{\nu} = 0 \quad [1.4.26]$$

donde el tensor que se encuentra entre paréntesis se llama tensor de Einstein.

## 1.5 Ecuaciones de Campo de Einstein

Los campos gravitacionales transportan energía y momento por lo, que a diferencia de los campos electromagnéticos que no transportan carga, deben de contribuir a su propia fuente, es decir, las ecuaciones de campo gravitacional son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, donde la no linealidad representa el efecto de la gravitación sobre sí misma.

Utilicemos el principio de equivalencia. En todo punto  $x$  en un campo gravitacional arbitrariamente intenso, podemos definir un sistema de coordenadas localmente inercial, tal que

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}, \quad y \quad \left[ \frac{\partial g_{\alpha\beta}(\chi)}{\partial \chi^\gamma} \right]_{\chi=x} = 0 \quad [1.5.1]$$

De manera que para cualquier  $\chi$  cercana a  $x$ , el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  puede diferir de  $\eta_{\alpha\beta}$  sólo mediante términos cuadráticos en  $(\chi - x)$ . En este sistema de coordenadas el campo gravitacional es débil alrededor de  $x$  y podemos esperar que el campo se pueda describir mediante ecuaciones diferenciales parciales que sean lineales. Una vez que se tienen estas ecuaciones de campo débil, podemos encontrar las ecuaciones de campo generales, invirtiendo las transformación de coordenadas que volvió débil el campo.

En un campo estático débil producido por una densidad de masa no relativista  $\rho$ , La componente (0 0) del tensor métrico está dada, de manera aproximada por

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)$$

donde  $\Phi$  es el potencial Newtoniano determinado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

en donde  $G$  denota la constante de gravitación universal. Además, la densidad de energía  $T_{00}$  para materia no relativista es igual a su densidad de masa

$$T_{00} = \rho$$

combinando las dos últimas ecuaciones, tenemos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad [1.5.2]$$

una ecuación que es válida para campos estáticos débiles generados por materia no relativista y que ni siquiera es invariante de Lorenz. Sin embargo, nos conduce a pensar que las ecuaciones de campo débil para una distribución general de energía y momento  $T_{\alpha\beta}$  son de la forma

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$$

donde  $G_{\alpha\beta}$  es una combinación lineal de la métrica y sus primeras y segundas derivadas[2]. Utilizando el principio de equivalencia sabemos que las ecuaciones que gobiernan campos gravitacionales de intensidad arbitraria deben ser de la forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad [1.5.3]$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es un tensor que se reduce a  $G_{\alpha\beta}$  en el caso de campos débiles.

En general habrá una variedad de tensores  $G_{\mu\nu}$  que se puedan formar a partir del tensor métrico y sus derivadas y que se reducen en el límite de un campo débil a un  $G_{\alpha\beta}$  dado

Revisemos qué información tenemos alrededor de la ecuación [1.5.3]

(i) Por definición  $G_{\mu\nu}$  es un tensor

(ii) Por suposición  $G_{\mu\nu}$  consiste únicamente de términos con  $N=2$  derivadas de la métrica, es decir,  $G_{\mu\nu}$  contiene únicamente términos que son lineales en las segundas derivadas o cuadráticos en las primeras derivadas de la métrica.

(iii) Como  $T_{\mu\nu}$  es simétrico entonces  $G_{\mu\nu}$  también lo es.

(iv) Como  $T_{\mu\nu}$  se conserva ( $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ) también  $G_{\mu\nu}$  se conserva:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad [1.5.4]$$

(v) Para un campo débil estacionario producido por materia no relativista, la componente (00) de [1.5.3] se debe reducir a [1.5.2], es decir, en dicho límite

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00} \quad [1.5.5]$$

Y como se puede demostrar solo existe un tensor que cumple con los requerimientos (i), (ii), (iii) y (iv) y es el tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad [1.5.6]$$

y junto con [1.5.3] nos da las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad [1.5.7]$$

Si ampliamos la suposición (ii) y permitimos que  $G_{\mu\nu}$  contenga términos con menos de dos derivadas de la métrica, esto no permite la integración de nuevos términos en  $G_{\mu\nu}$ ; pero si, ampliamos (ii) al grado de poder incluir al tensor métrico mismo, entonces es posible integrar un término nuevo igual a  $g_{\mu\nu}$  veces una constante  $\lambda$ . Las ecuaciones de campo quedan como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \quad [1.5.8]$$

El término  $\lambda g_{\mu\nu}$  fue introducido por Einstein por razones cosmológicas, y por ello  $\lambda$  se conoce como la constante cosmológica. Este nuevo término satisface (i), (ii), y (iv) pero no satisface (v), de manera que  $\lambda$  debe de ser lo suficientemente pequeña como para no interferir con los éxitos de la teoría Newtoniana de Gravitación.

Cuando el tensor energía momento  $T_{\mu\nu}$  es cero, tenemos ausencia de materia, es decir, estamos considerando que estamos en el exterior de una fuente gravitacional, en este caso las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad [1.5.9]$$

o utilizando [1.4.21]

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad [1.5.10]$$

La ecuación [1.5.10] nos da las ecuaciones de Einstein en el vacío. Estas son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales acopladas, para 10 funciones no conocidas  $g_{\mu\nu}$ . Cuando tenemos un  $T_{\mu\nu}$  diferente de cero tenemos las ecuaciones interiores de la fuente gravitacional y en este caso aparte de las 10 ecuaciones no conocidas, tenemos otras ecuaciones tales como la densidad masa-energía y la presión.

Las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo gravitacional son dadas por la ecuación geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} \frac{\partial x^\beta}{\partial s} = 0 \quad [1.5.11]$$

Esto completa nuestra revisión de conceptos básicos de Relatividad General.



## 1.6 SIMETRÍA

Cuando manejamos problemas físicos, El considerar que poseen propiedades de simetría permite cierta simplicidad al trabajar con ellos. Se puede, por tanto, esperar que en relatividad general cuando uno tiene un alto grado de simetría, la solución de las ecuaciones de campo se faciliten en cierta medida y que las soluciones posean propiedades especiales.

La simetría de un sistema en el espacio tiempo de Minkowski, o en el espacio euclidiano 3-dimensional se define por el hecho de que, dentro de traslaciones a lo largo de ciertas líneas o sobre ciertas superficies, las variables físicas no cambian. Se puede llevar esta idea a los espacios Riemannianos y definir una simetría para este espacio, si existe una variedad n-dimensional de puntos en ésta, que sean físicamente equivalentes.

Esta idea es más precisa imaginando un vector  $\xi^\mu$  en todo punto  $x^a$  del espacio y preguntándonos por las condiciones bajo las cuales la métrica no cambia bajo una traslación en la dirección  $\xi^\mu$ . Todo movimiento finito puede ser construido por movimientos infinitesimales. Tomemos una transformación infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu, \quad |\epsilon| \ll 1 \quad [1.6.1]$$

El requerimiento fundamental para la invariancia de la métrica es

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x') \quad [1.6.2]$$

por tanto, si queremos que la transformación infinitesimal  $x \rightarrow x'$  sea una isometría, debe cumplir [1.6.2]. Sustituyendo [1.6.1] en [1.6.2] y quedándonos a primer orden en  $\epsilon$  tenemos

$$0 = \xi^\mu_{;\rho} g_{\mu\sigma} + \xi^\mu_{;\sigma} g_{\rho\mu} + \xi^\mu g_{\rho\sigma;\mu} \quad [1.6.3]$$

Utilizando [1.4.11a] y [1.4.12] se obtiene

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} - 2 \xi_\mu \Gamma^\mu_{\rho\sigma}$$

que nos da

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} \quad [1.6.4]$$

La ecuación [1.6.4] es la ecuación de Killing y los vectores  $\xi^\mu$ , que son solución de esta ecuación se llaman vectores de Killing. Ellos caracterizan las propiedades de simetría del espacio Riemanniano en una forma invariante.

Existen vectores más generales como las colineaciones afines que nos hablan de otras simetrías del espacio [41]

## SOLUCIONES EXTERIORES

## 2.1 Resumen

Desde que Albert Einstein formuló su teoría de gravitación, muchos científicos han investigado sus ecuaciones. Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, no lineales y acopladas, cuya solución presenta una gran dificultad, sin embargo, se han encontrado numerosas soluciones a estas ecuaciones, de las cuales algunas de ellas nos permiten describir con bastante realismo el campo gravitacional exterior de cuerpos astrofísicos. Todas estas soluciones presentan la característica de ser estacionarias, estáticas y con simetría axial. En este capítulo, nos proponemos presentar una revisión de los aspectos generales de esta clase de soluciones.

## 2.2 Soluciones en el vacío

Las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

nos describen el campo gravitacional generado por una distribución de materia dada por el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Si nos alejamos de esta distribución de masa, estaremos en el exterior de la fuente gravitacional y el tensor energía-momento desaparecerá ( $T_{\mu\nu} = 0$ ); las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad [2.2.1]$$

que se pueden simplificar multiplicando por  $g^{\mu\nu}$  obteniendo

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0$$

considerando

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad y \quad g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$$

la ecuación [2.2.1] toma la forma

$$R = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad [2.2.2]$$

Esto nos dice que para describir el campo gravitacional exterior a una distribución de materia basta resolver la ecuación [2.2.2]. Cuando resolvemos para [2.2.2] decimos que estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío.

## 2.3 SIMETRÍA AXIAL

Nosotros trabajamos con situaciones de simetría axial o cilíndrica; por esta razón es conveniente antes de empezar a hablar y a utilizar esta simetría, estudiar su definición y sus aspectos generales.

Definamos las coordenadas cilíndricas como  $\rho, \phi, z$  (ver figura 2)

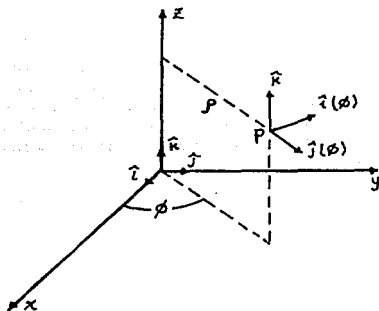


fig. 2

entonces un punto P tiene coordenadas cilíndricas-polares  $(\rho, \phi, z)$ , donde  $\rho$  es la distancia del punto P al eje z,  $\phi$  es el ángulo que el plano, que contiene a el punto P y al eje z, hace con el plano  $y = 0$ , al ángulo  $\phi$  se le llama ángulo azimutal. Estas coordenadas están relacionadas las coordenadas cartesianas por

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

Una función escalar  $f(x, y, z)$ , se dice que tiene simetría axial † si, cuando se expresa en coordenadas polar-cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , ésta no depende de  $\phi$

$$f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = F(\rho, z)$$

Así funciones con simetría axial tienen simetría rotacional alrededor del eje z. Para ver esto, consideremos un círculo que pasa a través de P con centro en el eje z y sus planos paralelos al plano  $z = 0$ . Una función con simetría axial tiene el mismo valor en todos los puntos de este círculo, puesto que este círculo es descrito por valores fijos de  $\rho$  y  $z$ . Así las superficies  $f(\rho, z) = cte$  tienen la propiedad de que ellas indican la misma posición y forma, si ellas son rotadas por algún ángulo alrededor del eje z, esto es, ellas son invariantes dentro de una rotación del sistema coordenado alrededor del eje z.

† Tomando como eje de simetría el eje z

La simetría cilíndrica es un caso particular de la simetría axial. Así una función  $f(x, y)$  (que es independiente de  $z$ ) tiene simetría cilíndrica (con el eje  $z$  como eje de simetría), si cuando la expresamos en términos de las coordenadas  $(\rho, \phi, z)$  esta es únicamente función de  $\rho$

$$f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = F(\rho)$$

Por ejemplo, si  $a$  y  $b$  son constantes, la función

$$F(\rho) = a\rho^2$$

tiene simetría cilíndrica y

$$F(\rho, z) = a\rho^2 + bz^2$$

tiene simetría axial pero no cilíndrica.

## 2.4 MÉTRICAS ESTACIONARIAS CON SIMETRÍA AXIAL

Tomemos un campo generado por la rotación continua de una distribución de materia (una estrella por ejemplo) cuyo tensor de energía-momento es el de un fluido perfecto. La distribución de materia y el campo alrededor de ella poseen una simetría axial alrededor del eje de rotación que pasa a través del centro de la materia, que nosotros usaremos como origen del sistema coordinado; Tomaremos como eje de rotación al eje  $z$ . Estas condiciones nos dicen que tenemos una coordenada temporal  $x_0 = t$  y una coordenada angular  $x^3 = \phi$  de las cuales los coeficientes métricos y todas las variables de la materia son independientes. Esto se expresa de la siguiente forma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\rho, z)$$

$$\mu = \mu(\rho, z)$$

$$p = p(\rho, z)$$

donde  $\mu$  es la densidad de masa-energía total y  $p$  es la presión. Puesto que  $\phi$  es la coordenada angular alrededor del eje de rotación, el valor de la coordenada  $(t, \rho, z, \phi)$  y  $(t, \rho, z, \phi + 2\pi)$  corresponde al mismo punto en el espacio-tiempo y su cuadrivelocidad  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  tiene la siguiente forma

$$u^0 = u^0(\rho, z) = \frac{dt}{ds}$$

$$u^1 = \frac{d\rho}{ds} = 0$$

$$u^2 = \frac{dz}{ds} = 0$$

$$u^3 = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \Omega(\rho, z)u^0$$

Aquí  $\Omega(\rho, z)$  es la velocidad angular, y si se tiene una rotación rígida es constante.

El campo de distribución de materia es invariante bajo las transformaciones simultáneas

$$t \rightarrow -t$$

$$\phi \rightarrow -\phi$$

y en este caso los coeficientes métricos  $g_{01}$ ,  $g_{02}$ ,  $g_{13}$ ,  $g_{23}$  desaparecen. La métrica que describe este espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dt d\phi + g_{33}d\phi^2 + g_{AB}dx^A dx^B$$

con A y B corriendo de 1 a 2.

## (i) MÉTRICA GENERAL

La teoría general de la relatividad nos conduce a un sistema de ecuaciones, bastante complicado, sin embargo, dar solución a éstas permite tener una descripción completa del campo gravitacional generado por la materia. Es por esto que mucha gente ha estudiado y encontrado soluciones a estas ecuaciones, conocidas como ecuaciones de Einstein. Un tipo particular e interesante de soluciones son aquellas que nos describen el campo gravitacional de una distribución finita de materia. Las soluciones de este tipo, son soluciones que se caracterizan por tener simetría axial y ser estacionarias. A continuación presentamos la solución general que contiene este tipo de soluciones y se muestra que contiene las soluciones con simetría esférica ya conocidas como casos particulares.

Tomemos una 4-variedad Riemanniana  $\Sigma$  que tenga una métrica  $g_{\mu\nu}$  y tomemos coordenadas cilíndricas  $(t, \rho, z, \phi)$ , como nuestro requerimiento es que el espacio-tiempo tenga una simetría axial y sea estacionario, la métrica sólo tendrá dependencia de  $\rho$  y  $z$ . Además queremos que la distribución de materia esté rotando, esto nos conduce a pedir que el espacio-tiempo no cambie ante la inversión simultánea de  $t$  y  $\phi$ , esto es que sea invariante ante la transformación simultánea

$$t \rightarrow -t$$

$$\phi \rightarrow -\phi$$

El requerimiento de invariancia ante inversión temporal y azimutal nos lleva a pedir, como ya se mencionó que

$$g_{t\rho} = g_{tz} = g_{\phi\rho} = g_{\phi z} = 0$$

ya que en caso contrario  $g_{\mu\nu}$  nos describiría un campo gravitacional completamente diferente al cambiar  $t$  por  $-t$  y  $\phi$  por  $-\phi$ , es decir la métrica cambiaría, por ejemplo, el término  $g_{t\rho}dt d\rho$  cambiaría de signo al realizar la transformación y con esto tendríamos una métrica diferente. El elemento de línea bajo estas condiciones toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dt d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + [g_{\rho\rho}d\rho^2 + 2g_{\rho z}d\rho dz + g_{zz}dz^2] \quad [2.4.1]$$

Al cual siempre podemos aplicar una transformación de coordenadas del tipo

$$(\rho, z) \rightarrow (\rho', z')$$

que hasta cuadraturas permite describir el elemento de línea de la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dt d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + e^\mu(d\rho^2 + dz^2) \quad [2.4.2]$$

Resolviendo las ecuaciones de Einstein para el vacío,  $T_{\mu\nu} = 0$ , podemos simplificar más el elemento de línea hasta dejarlo en la forma

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad [2.4.3]$$

con  $f = f(\rho, z)$ ,  $\omega = \omega(\rho, z)$ , y  $\gamma = \gamma(\rho, z)$  que satisfacen las ecuaciones de Einstein

$$f(f_{\rho\rho} + f_{zz} + \rho^{-1}f_\rho) - f_\rho^2 + f_z^2 + \rho^{-2}f^4(\omega_\rho^2 + \omega_z^2) = 0 \quad [2.4.3a]$$

$$f(\omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} - \rho^{-1}\omega_\rho) + 2f_\rho\omega_\rho + 2f_z\omega_z = 0 \quad [2.4.3b]$$

$$\gamma_\rho = \frac{1}{4}\rho f^{-2}(f_\rho^2 - f_z^2) - \frac{1}{4}\rho^{-1}f^2(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) \quad [2.4.3c]$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2}\rho f^{-2}f_\rho f_z - \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2\omega_\rho\omega_z \quad [2.4.3d]$$

Existen varias soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que nos permiten describir el campo gravitacional exterior a una distribución finita de materia; todas estas soluciones se encuentran contenidas como casos particulares en la solución más general [2.4.1]. A continuación presentamos algunas de estas soluciones

## (ii) ECUACIÓN DE ERNST

No obstante la aparente sencillez de las ecuaciones de Einstein en vacío, estacionarias y con simetría axial, encontrar nuevas soluciones a éstas, presenta una dificultad extremadamente grande. Para resolver este problema se encontró una nueva representación a estas ecuaciones, que es independiente de las coordenadas y debido a esto permite investigar su simetría y encontrar nuevas soluciones. Esta representación fue formulada por Ernst en 1968[17], en la cual aparece un potencial (potencial de Ernst) cuya ventaja principal es que es un punto de partida para muchas técnicas que permiten generar soluciones a estas ecuaciones.

Ernst usó un principio variacional sobre una función de Lagrange que puede ser construida de las funciones métricas  $f$  y  $\omega$ . A continuación presentamos la ecuación de Ernst derivada a partir de las ecuaciones de campo obtenidas anteriormente.

La ecuación de campo [2.4.3b] se puede escribir de la siguiente forma

$$\Omega_{,p} + \Omega_{,p} = 0 \quad [2.4.4]$$

con

$$\Omega_{,t} = \rho^{-1} f^2 \omega_{,p}, \Omega_{,p} = -\rho^{-1} f^2 \omega_{,t} \quad [2.4.5]$$

utilizando [2.4.5] la ecuación [2.4.3a] toma la forma

$$f \nabla^2 f - f_p^2 - f_t^2 + \Omega_p^2 + \Omega_t^2 = 0 \quad [2.4.6]$$

donde  $\nabla^2$  es el operador gradiente en dos dimensiones. Utilizando [2.4.5] tenemos la siguiente relación

$$f \nabla^2 \Omega = 2(f_p \Omega_p + f_t \Omega_t) \quad [2.4.7]$$

definiendo el potencial de Ernst ( $E$ ) de la siguiente forma

$$E = f + i\Omega$$

encontramos que las ecuaciones [2.4.5] y [2.4.6] están contenidas en la siguiente ecuación

$$(Re E) \nabla^2 E = (\nabla E)^2 \quad [2.4.8]$$

como su parte real e imaginaria respectivamente. La ecuación [2.4.8] es la ecuación de Ernst, que es una nueva representación de las ecuaciones de campo encontradas anteriormente. En coordenadas cilíndricas toma la forma

$$(Re E)(E_{pp} + E_{tt} + \rho^{-1} E_p) = E_p^2 + E_t^2 \quad [2.4.9]$$

y las restantes ecuaciones de campo [2.4.3c] y [2.4.3b] pueden ser expresadas en la forma

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \rho f^{-2} (f_p^2 - f_t^2 + \Omega_p^2 - \Omega_t^2) \quad [2.4.10]$$

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \rho f^{-2} (f_p f_t + \Omega_p \Omega_t) \quad [2.4.11]$$

Introduciendo un nuevo potencial  $\xi$  relacionado con  $E$  por

$$E = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

podemos obtener otra representación de la ecuación de Ernst, para ello procedemos de la siguiente forma:

La parte real de  $E$  es dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} E &= \frac{E + E^*}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} + \frac{1 + \xi^*}{1 + \xi^*} \right) \\ &= -\frac{(\xi\xi^* - 1)}{(1 + \xi)(1 + \xi^*)} \end{aligned} \quad (a)$$

En términos de este potencial el Laplaciano de  $E$  toma la forma

$$\nabla^2 E = -\frac{2}{(1 + \xi)^2} \nabla^2 \xi + \frac{4}{(1 + \xi)^3} (\nabla \xi)^2 \quad (b)$$

ya que

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{2\xi_\rho}{(1 + \xi)^2} \\ E_{\rho\rho} &= -\frac{2\xi_{\rho\rho}}{(1 + \xi)^2} + \frac{4\xi_\rho^2}{(1 + \xi)^3} \\ E_{\xi\xi} &= -\frac{2\xi_{\xi\xi}}{(1 + \xi)^2} + \frac{4\xi_\xi^2}{(1 + \xi)^3} \\ \rho^{-1} E_\rho &= -\frac{2\rho^{-1}\xi_\rho}{(1 + \xi)^2} \end{aligned}$$

y  $(\nabla E)^2$  está dado por

$$(\nabla E)^2 = \frac{4\xi_\rho^2}{(1 + \xi)^4} + \frac{4\xi_\xi^2}{(1 + \xi)^4} \quad (c)$$

Sustituyendo (a), (b), y (c) en [2.4.8] tenemos

$$-\frac{(\xi\xi^* - 1)}{(1 + \xi)(1 - \xi^*)} \left[ -\frac{2\nabla^2 \xi}{(1 + \xi)^2} + \frac{4(\nabla \xi)^2}{(1 + \xi)^3} \right] = \frac{4\xi_\rho^2}{(1 + \xi)^4} + \frac{4\xi_\xi^2}{(1 + \xi)^4}$$



$$\frac{(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi}{(1 + \xi^*)} - \frac{2(\xi\xi^* - 1)(\nabla\xi)^2}{(1 + \xi)(1 + \xi^*)} = \frac{2(\nabla\xi)^2}{(1 + \xi)}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi}{(1 + \xi^*)} &= \frac{2(\nabla)^2}{(1 + \xi)} + \frac{2(\xi\xi^* - 1)(\nabla\xi)^2}{(1 + \xi)(1 + \xi^*)} \\ &= 2\frac{(\nabla)^2}{(1 + \xi)} \left[ 1 + \frac{(\xi\xi^* - 1)}{(1 + \xi^*)} \right] \\ &= 2\frac{(\nabla\xi)^2}{(1 + \xi)} \left[ \frac{\xi^*(1 + \xi)}{(1 + \xi^*)} \right] \\ &= \frac{2(\nabla\xi)^2\xi^*}{(1 + \xi^*)} \end{aligned}$$

finalmente

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*(\nabla\xi)^2 \quad [2.4.8^*]$$

La ecuación [2.4.8\*], es la ecuación de Ernst en términos del potencial  $\xi$ .

No es suficiente que las funciones métricas sean soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, además es necesario pedirles ciertas condiciones para que sean físicamente relevantes. Estas condiciones son.

1.-

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho, z) = 1 \quad [2.4.12a]$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega(\rho, z) = 0 \quad [2.4.12b]$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \gamma(\rho, z) = 0 \quad [2.4.12c]$$

es decir, que a una gran distancia de la fuente desaparece el campo gravitacional y nuestra métrica se reduce a la métrica para el espacio-tiempo plano

2.-

El ángulo azimutal tiene que ser periódico (periodo  $2\pi$ ) a lo largo de la trayectoria del vector de Killing espacial  $\eta$ . Esto implica

$$\frac{|\eta|_{,\sigma} |\eta|^{\sigma}}{4(\eta)} = 1 \quad [2.4.13]$$

$$|\eta| = 0$$

en el eje de simetría  $\rho \neq 0$ . Estas condiciones se cumple si

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma(\rho, z) = 0 \quad [2.4.14a]$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho, z) = c t \hat{e} \quad [2.4.14b]$$

## 2.5 Tipos de Soluciones[3]

### (i) Solución de Weyl

Cuando el cuerpo no está girando, es decir, cuando  $\omega = 0$ , el elemento de línea general toma la forma

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad [2.5.1]$$

definiendo a  $f$  como

$$f = e^{2\psi} \quad [2.5.2]$$

tenemos que

$$ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - e^{-2\psi} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad [2.5.3]$$

y las ecuaciones de campo toman la forma

$$\nabla^2 \psi = \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \rho^{-1} \psi_{\rho} = 0 \quad [2.5.4]$$

$$\gamma_{\rho} = \rho(\psi_{\rho}^2 - \psi_z^2) \quad [2.5.5]$$

$$\gamma_z = 2\rho\psi_{\rho}\psi_z \quad [2.5.6]$$

donde  $\nabla^2$  es el Laplaciano en dos dimensiones en coordenadas cilíndricas.

Observamos que la función métrica  $\gamma$  puede ser obtenida integrando si se conoce  $\psi$  o  $f$ ; esto nos dice que el problema de encontrar una solución estacionaria con simetría axial en el vacío cuando el cuerpo no está rotando, se reduce a resolver las ecuaciones [2.5.4], [2.5.5], y [2.5.6] para  $\psi$ . La ecuación [2.5.3] junto con las ecuaciones de campo [2.5.4], [2.5.5], y [2.5.6], que determinan las funciones métricas, es conocida como la solución de Weyl, y representa campos exteriores estáticos (no rotando) con simetría axial.

Una solución interesante de Weyl es cuando  $\psi$  tiene el valor

$$\begin{aligned} \psi &= \delta \log \left( \frac{z-m+R^{(-)}}{z+m+R^{(+)}} \right) \\ &= \delta \log \left( \frac{R^{(-)} + R^{(+)} - 2m}{R^{(-)} + R^{(+)} + 2m} \right) \end{aligned}$$

con

$$R^{(+)} = [\rho^2 + (z+m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R^{(-)} = [\rho^2 + (z-m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

donde  $\delta$  y  $m$  son constantes. La función  $\psi$  representa el potencial gravitacional Newtoniano externo de una varilla infinitamente delgada y uniforme que tiene una densidad proporcional a  $\delta$ , con su centro ubicado en el origen de coordenadas y sus extremos sobre el eje  $z$  en  $z=m$  y  $z=-m$ , y por tanto tiene longitud  $2m$ .

Lo importante de esta solución es que para  $\delta = 1$  recobramos la métrica de Schwarzschild, que tiene simetría esférica y para  $\delta = 2, 3, \dots$  tenemos el límite estático de las soluciones Tomimatsu-Sato (ver (iv)).

La solución de Weyl en coordenadas esferoidales prolatas  $(t, \xi, \zeta, \phi)$ , que están definidas mediante la transformación

$$\begin{aligned} t &= t \\ \phi &= \phi \\ \xi &= \frac{r_+ + r_-}{2\sigma}, \quad (\xi \geq 1) \\ \zeta &= \frac{r_+ - r_-}{2\sigma}, \quad (-1 \leq \zeta \leq 1) \\ r_{(\pm)}^2 &= \rho^2 + (z_{(\pm)}\sigma)^2 \end{aligned}$$

donde  $\sigma$  es constante, toma la forma

$$ds^2 = \exp(2\bar{\psi})dt^2 - \sigma^2 \exp(-2\bar{\psi}) \{ \exp(2\bar{\gamma}) (\xi^2 - \zeta^2) \left( \frac{d\xi^2}{\xi^2 - 1} + \frac{d\zeta^2}{1 - \zeta^2} \right) + (1 - \zeta^2)(\xi^2 - 1)d\phi^2 \}$$

## (ii) SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD [3]

Como lo mencionamos anteriormente la solución de Weyl con

$$\delta = 1$$

conduce a la solución de Schwarzschild. Dada la importancia de esta métrica es necesario discutir sin entrar en detalle los puntos principales de la misma. La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas tiene la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\phi^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad [2.5.7]$$

La transformación utilizada para pasar de la métrica de Weyl a la métrica de Schwarzschild es la siguiente

$$\rho = (r^2 - 2mr)^{\frac{1}{2}} \sin\theta, \quad z = (r - m)\cos\theta \quad [2.5.7a]$$

$$r = m + \frac{1}{2}(R^{(+)} + R^{(-)}), \quad \cos\theta = \frac{1}{2m}(R^{(+)} - R^{(-)}) \quad [2.5.7b]$$

donde  $R^{(\pm)}$  está dado como en la sección anterior.

La métrica de Schwarzschild tiene simetría esférica, como se puede ver del hecho de que [2.5.7] sea invariante bajo una rotación arbitraria del sistema coordenado, considerado como un sistema coordenado polar esférico. La métrica [2.5.7] representa el campo gravitacional exterior de una distribución de materia de masa  $m$  con simetría esférica, pero, como es bien conocido, puede ser interpretada también como el campo producido por una estrella con simetría esférica colapsándose. esto es, un hoyo negro. Las funciones métricas  $g_{\mu\nu}$ , las funciones que representan las componentes contravariantes  $g^{\mu\nu}$  y sus derivadas parciales son continuas en todas partes excepto en  $r = 0$  y  $r = 2m$ . La irregularidad  $r = 2m$  puede ser removida

realizando una transformación de las coordenadas  $(r, t)$  a las coordenadas  $(u, v)$ , que de forma implícita está dada por.

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{2m}(r - 2m)e^{\frac{t}{4m}} \quad [2.5.8a]$$

$$v = u \tanh\left(\frac{t}{4m}\right) \quad [2.5.8b]$$

y reduce la ecuación [2.5.7] a la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{\frac{t}{4m}} (du^2 - dv^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad [2.5.9]$$

donde  $r$  es función de  $u$  y  $v$ . La irregularidad en el punto  $r = 0$ , sin embargo, no puede ser removida por ninguna transformación de coordenadas, entonces decimos que en este punto tenemos una singularidad del espacio tiempo. Si colocamos una partícula prueba en reposo en algún valor finito de  $r$  (y suponiendo que la masa  $m$  es mucho más grande que la masa de la partícula) esta alcanzará el punto  $r = 0$  en un tiempo propio finito, es decir, un tiempo medido por un observador que está en la partícula prueba y le llevará un tiempo infinito para un observador de laboratorio (exterior a la partícula).

Como ya dijimos la superficie  $r = 2m$  no es una singularidad del espacio-tiempo esta superficie es una "membrana dirigida" en el sentido que geodésicas tipo tiempo y tipo luz puede penetrar a la región  $r < 2m$  a partir de la región  $r > 2m$ , pero éstas no pueden salir de la región  $r < 2m$ . Así la singularidad del espacio-tiempo  $r = 0$  es separada de la región  $r > 0$  por la superficie  $r = 2m$ , esta superficie es llamada horizonte de eventos.

(iii) Solución de Kerr[3]

Tomemos el potencial de Ernst en términos de una nueva función desconocida  $\xi$

$$E = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad [2.5.10]$$

bajo esta consideración la ecuación de Ernst toma la forma

$$(\xi\xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2\xi^*(\xi_\rho^2 + \xi_z^2) \quad [2.5.11]$$

donde  $\xi^*$  el complejo conjugado de  $\xi$ . Introduciendo coordenadas esferoidales prolatas  $(X, Y)$  que están relacionadas con las coordenadas cilíndricas  $(\rho, z)$  por

$$\rho^2 = (X^2 - 1)(1 - Y^2), \quad z = XY \quad [2.5.12]$$

en términos de estas coordenadas la ecuación [2.5.11] toma la forma

$$(\xi\xi^* - 1)[(X^2 - 1)\xi_{XX} + 2X\xi_{XZ} + (1 - Y^2)\xi_{YY} - 2Y\xi_{YZ}] = 2\xi^*[(X^2 - 1)\xi_X^2 + (1 - Y^2)\xi_Y^2] \quad [2.5.13]$$

las restantes funciones métricas en términos de estas coordenadas tienen la forma

$$\omega_X = (1 - Y^2)f^{-2}u_Y, \quad \omega_Y = (1 - X^2)f^{-2}u_X \quad [2.5.14]$$

$$\mu'_X = \frac{(1 - Y^2)f^{-2}}{2(X^2 - Y^2)} [X(X^2 - 1)(f_X^2 + u_X^2) + X(Y^2 - 1)(f_Y^2 + u_Y^2) - 2Y(X^2 - 1)(f_X f_Y + u_X u_Y)] \quad [2.5.15]$$

$$\mu'_Y = \frac{(X^2 - 1)f^{-2}}{2(X^2 - Y^2)} [Y(X^2 - 1)(f_X^2 + u_X^2) - Y(1 - Y^2)(f_Y^2 + u_Y^2) + 2X(1 - Y^2)(f_X f_Y + u_X u_Y)] \quad [2.5.16]$$

la ventaja de utilizar la ecuación [2.5.13] es que la solución de Kerr está dada por una solución que tiene una forma muy simple

$$\xi = pX - iqY \quad [2.5.17]$$

donde  $p$  y  $q$  son constantes que se relacionan por

$$q^2 + p^2 = 1$$

utilizando  $E = f + iu$ , [2.5.10], y [2.5.17] se encuentra la solución

$$f = \frac{p^2 X^2 + q^2 Y^2 - 1}{(pX + 1)^2 + q^2 Y^2}, \quad u = \frac{-2qY}{(pX + 1)^2 + q^2 Y^2} \quad [2.5.18]$$

de [2.5.14] y [2.5.18]

$$\omega = \frac{2qp - 1(1 - Y^2)(pX + 1)}{p^2 X^2 + q^2 Y^2 - 1} + \omega_0$$
$$\omega_0 = cte$$

y de las ecuaciones de campo [2.5.15] y [2.5.16]

$$e^{\mu'} = \frac{\lambda(X^2 p^2 + q^2 Y^2 - 1)}{X^2 - Y^2} \quad [2.5.19]$$

de la ecuación [2.5.19] y de la definición de  $\mu'(e^{\mu'} = fe^{\mu})$  tenemos

$$e^{\mu} = \frac{A[(pX + 1)^2 + q^2 Y^2]}{X^2 - Y^2} \quad [2.5.20]$$

introduciendo las coordenadas  $r$  y  $\theta$  que están relacionadas con  $X$  y  $Y$  por

$$pX + 1 = pr, \quad Y = \cos\theta \quad [2.5.21]$$

se introducen también las constantes  $m$  y  $a$  que están relacionadas a  $p$  y  $q$  por

$$p^{-1} = m, \quad p^{-1}q = a, \quad m^2 - a^2 = 1 \quad [2.5.22]$$

con  $m$  y  $ma$  la masa y momento angular de la solución de Kerr respectivamente

Para transformar la solución de Kerr a su forma estándar partimos del elemento de línea general y sustituimos las funciones métricas dadas por [2.5.18], [2.5.19] y [2.5.21], que tendrán que ser previamente transformadas a las coordenadas  $r$  y  $\theta$  utilizando [2.5.12] y [2.5.21], los resultados encontrados después de realizar los pasos algebraicos mencionados anteriormente y haciendo uso de la ecuación [2.5.22] son

$$\rho = (r^2 - 2mr + a^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\theta, \quad z = (r - m)\cos\theta \quad [2.5.23]$$

$$e^{\mu} = \frac{A(r^2 + a^2 \cos^2\theta)}{m^2[(r - m)^2 + (a^2 - m^2)\cos^2\theta]} \quad [2.5.24]$$

$$d\rho^2 + dz^2 = [(r - m)^2 + (a^2 - m^2)\cos^2\theta][(r^2 - 2mr + a^2)^{-1}dr^2 + d\theta^2] \quad [2.5.25]$$

$$k = 2amr \operatorname{sen}^2\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta)^{-1} \quad [2.5.26]$$

$$l = 2ma^2 r \operatorname{sen}^4\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta)^{-1} + (r^2 + a^2) \operatorname{sen}^2\theta \quad [2.5.27]$$

y la métrica toma la forma

$$ds^2 = (1 - 2mr \sum_1^{-1}) dt^2 - 4amr \operatorname{sen}^2\theta \sum_1^{-1} d\phi dt - (2ma^2 r \operatorname{sen}^2\theta \sum_1^{-1} + r^2 + a^2) \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 - \sum_1 (\sum_2^{-1} dr^2 + d\theta^2) \quad [2.5.28]$$

donde

$$\sum_1 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad \sum_2 = r^2 - 2mr + a^2 \quad [2.5.29]$$

par  $r$  muy grandes [2.5.28] tiene la forma

$$ds^2 \approx (1 - \frac{2m}{r}) dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) - \frac{4am \operatorname{sen}^2\theta}{r} d\phi dt \quad [2.5.30]$$

con  $m$  la masa y  $ma$  el momento angular de la fuente que genera el campo gravitacional.

(iv) Soluciones Tomimatsu-Sato[3]

En 1972 Tomimatsu y Sato encuentran la siguiente solución compleja a [2.5.13]

$$\xi = \frac{p^2 X^4 + q^2 Y^4 - 2ipqXY(X^2 - Y^2) - 1}{2pX(X^2 - 1) - 2iqY(1 - Y^2)} \quad [2.5.31]$$

donde  $p$  y  $q$  son constantes sujetas a la relación  $p^2 + q^2 = 1$ . De  $E = f + iu$  y [2.5.10] se observa que si se escribe  $\xi$  en la siguiente forma

$$\xi = \frac{N + iN'}{D + iD'} \quad [2.5.32]$$

Donde  $N, N', D, D'$  son polinomios reales en  $X$  y  $Y$ , con esto las funciones  $f$  y  $u$  toman la siguiente forma

$$f = \frac{N^2 + N'^2 - D^2 - D'^2}{(N + D)^2 + (N' + D')^2} \quad [2.5.33]$$

$$u = \frac{2(N'D - ND')}{(N + D)^2 + (N' + D')^2} \quad [2.5.34]$$

sustituyendo [2.5.33] y [2.5.34] en [2.5.14], [2.5.15], y [2.5.16] se obtienen los valores correspondientes a  $\omega$  y  $\mu$  y de [2.5.31] tenemos

$$N = p^2 X^4 + q^2 Y^4 - 1, \quad N' = -2pqXY(X^2 - Y^2) \quad [2.5.35a]$$

$$D = 2pX(X^2 - 1), \quad D' = -2pY(1 - Y^2) \quad [2.5.35b]$$

con todo lo anterior obtenemos los siguientes resultados

$$f = \frac{A}{B}, \quad \omega = \frac{2p^{-1}q(1 - Y^2)C}{A}, \quad e^{\mu} = \frac{B}{p^4(X^2 - Y^2)^4} \quad [2.5.36]$$

donde

$$A = [p^2(X^2 - 1)^2 + q^2(1 - Y^2)^2] - 4p^2q^2(X^2 - 1)(1 - Y^2)(X^2 - Y^2)^2 \quad [2.5.37a]$$

$$B = (p^2 X^4 + q^2 Y^4 - 1 + 2pX^3 - 2pX)^2 + 4q^2 Y^2 (pX^3 - pXY^2 + 1 - Y^2)^2 \quad [2.5.37b]$$

$$C = p^2(X^2 - 1)[(X^2 - 1)(1 - Y^2) - 4X^2(X^2 - Y^2)] - p^2 X(X^2 - 1)[2(X^4 - 1) + (X^2 + 3)(1 - Y^2)] + q^2(1 + pX)(1 - Y^2)^2 \quad [2.5.37c]$$



(v) Solución de Papapetrou[3]

Las soluciones a las ecuaciones [2.4.3a] y [2.4.3b] encontradas por Papapetrou no son muy interesantes físicamente, sin embargo, es una de las pocas soluciones que dependen de funciones armónicas e ilustra la dificultad de encontrar soluciones físicamente relevantes.

Para encontrar esta solución es necesario comenzar con la suposición

$$\omega_{pp} + \omega_{zz} - \rho^{-1}\omega_p = 0 \quad [2.5.38]$$

la solución de [2.5.38] es dada en términos de la función armónica  $\zeta$  de la siguiente forma

$$\omega = A\rho\zeta_p, \quad \nabla^2\zeta = \zeta_{pp} + \zeta_{zz} + \rho^{-1}\zeta_p = 0 \quad [2.5.39]$$

$A = cte$  arbitraria utilizando las ecuaciones [2.4.3b] y [2.5.38] tenemos

$$f_p\omega_p + f_z\omega_z = 0$$

utilizando [2.5.39]

$$\omega_p = A\rho[\zeta_{pp} + \rho^{-1}\zeta_p]$$

$$\omega_z = A\rho\zeta_{pz}$$

y

$$\zeta_{zz} = -[\zeta_{pp} + \rho^{-1}\zeta_p]$$

y utilizando esta última ecuación tenemos que

$$\omega_p = -A\rho\zeta_{zz}$$

por tanto

$$f_p\omega_p + f_z\omega_z = -f_p A\rho\zeta_{zz} + f_z A\rho\zeta_{pz} = 0$$

$\Rightarrow$

$$-f_p\zeta_{zz} + f_z\zeta_{pz} = 0 \quad [2.5.40]$$

la solución a la ecuación [2.5.40] es

$$f = f(\zeta_z)$$

esto es,  $f$  es una función arbitraria de  $\zeta_z$ , a partir de esta ecuación nosotros tenemos

$$f_p = f'\zeta_{pz}, \quad f_{pp} = f''\zeta_{pz}^2 + f'\zeta_{ppz} \quad [2.5.41]$$

$$f_z = f'\zeta_{zz}, \quad f_{zz} = f''\zeta_{zz}^2 + f'\zeta_{zzz} \quad [2.5.42]$$

donde  $f' = \frac{\partial f}{\partial \zeta_z}$ . Usando [2.5.39], [2.5.41], [2.5.42], y la relación

$$\zeta_{ppz} + \zeta_{zzz} + \rho^{-1}\zeta_{pz} = 0 \quad [2.5.43]$$

que se obtiene a partir de [2.5.40], la ecuación [2.4.3a] se reduce a

$$f f'' - f'^2 + A^2 f^4 = 0$$

haciendo el cambio de variable  $f = h^{-1}$  obtenemos la ecuación

$$h'' - 2h^{-1}h' - A^2h^{-1} + h^{-1}h'^2 = 0 \quad [2.5.44]$$

la solución a la ecuación [2.5.44] es

$$h = f^{-1} = \alpha \cosh \zeta_0 + \beta \sinh \zeta_0 \quad [2.5.45]$$

$$A^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes arbitrarias

Así [2.5.39] da una solución en términos de la función armónica  $\zeta$

Como ya se mencionó para que la solución sea asintóticamente plana  $\zeta$  tiene que ser armónica, por ejemplo, tomemos  $\zeta = r^{-1}$  con  $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ . En este caso

$$\omega = -A\rho^2 r^{-3} \quad [2.5.46]$$

si tenemos una solución asintótica la forma de  $f$  en infinito tiene que ser

$$f = [1 - \frac{2M}{r} + \dots] \quad [2.5.47]$$

para este caso la forma asintótica de  $f$  se obtiene expandiendo la ecuación [2.5.45] el resultado obtenido es

$$f = \alpha^{-1} [1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{z}{r^3} + \dots] \quad [2.5.48]$$

comparando con la forma de la expresión [2.5.47] se observa que  $f$  dada por [2.5.48] no tiene términos proporcionales a  $r^{-1}$  así que la solución tiene masa cero. Por tanto esta clase de soluciones no contiene ninguna solución que represente alguna masa rotando cuyo campo gravitacional sea asintóticamente plano.

## 2.6 Técnicas de Generación de Soluciones

Dada la complejidad de las ecuaciones de Einstein como ya se mencionó, es muy difícil obtener soluciones exactas físicamente realistas. Después que Schwarzschild(1916) encontró su solución con simetría esférica y Weyl(1917)[14] encuentra la solución general axisimétrica estática, pasó alrededor de medio siglo para que una solución físicamente realista axisimétrica estacionaria fuera obtenida, ésta es la métrica de Kerr[19].

Más tarde muchos científicos se encargaron de estudiar métodos de generación de soluciones, entre ellos Tomimatsu y Sato([21], [22]) y Yamazaki y Hori[23]; usaron la formulación compacta de las ecuaciones de campo de Ernst para obtener nuevas soluciones que presenta una cierta dependencia funcional de el potencial de Ernst  $\xi$ . Ernst[20] propuso dos técnicas de generación de soluciones que fueron ampliadas y unificadas por Kinnersley([24], [25]). Estos métodos mapean soluciones asintóticamente planas en vacío a soluciones asintóticamente singular-NUT.

Las técnicas nuevas de generación involucran transformaciones de grupos de Lie o transformaciones *Bäcklund*[14]. El primer grupo fue encontrado por Cosgrove([26], [27]) y usado para obtener la generalización de las soluciones Tomimatsu-Sato. Maison(1979) investigó el grupo dimensionalmente infinito de Kinnersley y el grupo de Geroch[28] que no generaban soluciones asintóticamente planas. Kinnersley(1977) y Kinnersley y Chitre (1977, 1978) estudiaron el grupo de Geroch y descubrieron subgrupos infinitesimales que preservan la condición de asintóticamente plana. Ellos usaron la métrica de Zipoy-Voorhees para generar una solución que contiene la clase NUT y la métrica Tomimatsu-Sato como casos especiales, sin embargo, ellos no desarrollaron una teoría general de estas transformaciones y, por tanto, tampoco un método de extrapolación posible. Hoenselaers[11] encontró subgrupos del grupo de Geroch que preserva la condición de asintóticamente plana y puede ser extrapolada por métodos puramente algebraicos.

Independientemente, Harrison[29] y Neugebauer[30] descubrieron transformaciones de *Bäcklund* para la ecuación de Ernst que genera las soluciones asintóticamente planas. Finalmente Belinsky y Zakharov[31] formularon las ecuaciones de campo no lineales como un problema de valores propios que puede ser resuelto por medio del método de desviación inversa.

Ahora pasemos a explicar de manera breve dos de las técnicas de generación de soluciones que pueden ser usadas para obtener soluciones físicamente realistas de las ecuaciones de Einstein.

### (i) Transformación Bäcklund

Sea  $U$  una función real en dos variables  $x$  e  $y$ . La transformación de Bäcklund para una ecuación diferencial de segundo orden  $U$  es una transformación

$$F_k(x, y, U, U_x, U_y; x', y', U', U'_x, U'_y) = 0 \quad [2.6.1]$$
$$k = 1, 2, \dots$$

que mapea la ecuación diferencial original dentro de la misma ecuación en alguna variable prima. Un ejemplo de una transformación Bäcklund puede ser dado para la ecuación de sen-Gordon

$$U_{xy} = \text{sen}(U) \quad [2.6.2]$$

La transformación

$$x = x' \quad [2.6.3a]$$

$$y = y' \quad [2.6.3b]$$

$$\frac{1}{2}(U'_x + U_x) = c \text{sen}\left(\frac{U' - U}{2}\right) \quad [2.6.3c]$$

$$\frac{1}{2}(U'_y - U_y) = \frac{1}{c} \text{sen}\left(\frac{U' + U}{2}\right) \quad [2.6.3d]$$

$$c = \text{cte}$$

genera una nueva solución  $U'$  a partir la solución conocida  $U$ . Veamos esto de manera más explícita.

Derivando la ecuación [2.6.3c] con respecto a  $y$

$$\frac{1}{2}(U'_{xy} + U_{xy}) = \left[ \frac{1}{2}(U'_y - U_y) \right] c \cos\left(\frac{U' - U}{2}\right) \quad (a)$$

sustituyendo la ecuación [2.6.3d] en la ecuación (a)

$$\frac{1}{2}(U'_{xy} + U_{xy}) = \text{sen}\left(\frac{U' + U}{2}\right) \cos\left(\frac{U' - U}{2}\right) \quad (b)$$

y utilizando las identidades trigonométricas

$$\text{sen} \frac{x}{2} = \pm \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

y las identidades seno y coseno de la suma y resta de dos ángulos. La ecuación (b) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U'_{xy} + U_{xy}) &= \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos(U' + U)) (1 + \cos(U' - U)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}^2 U' + 2 \operatorname{sen} U' \operatorname{sen} U + \operatorname{sen}^2 U]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} [(\operatorname{sen} U' + \operatorname{sen} U)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} U' + \operatorname{sen} U) \end{aligned}$$

⇒

$$U'_{xy} + U_{xy} = \operatorname{sen} U' + \operatorname{sen} U \quad (c)$$

y sustituyendo [2.6.2] en (c) tenemos

$$U'_{xy} + U_{xy} = \operatorname{sen} U' + U_{xy}$$

⇒

$$U'_{xy} = \operatorname{sen} U'$$

## (ii) Método Belinsky-Zakharov

Esta técnica de generación de soluciones nos permite obtener nuevas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en vacío para el caso de métricas que dependen solamente de dos variables. Las ecuaciones de campo son integradas por la técnica de desviación inversa. El punto de partida del método Belinsky-Zakharov es el elemento de línea general. De las funciones métricas construimos la matriz de  $2 \times 2$

$$F = \begin{pmatrix} f & -\omega f \\ -\omega f & f\omega^2 - \rho^2 f^{-1} \end{pmatrix} \quad [2.6.4]$$

con esta matriz las ecuaciones de campo toman la forma

$$(\rho F_\rho F^{-1})_\rho + (\rho F_z F^{-1})_z = 0 \quad [2.6.5]$$

$$\mu_\rho = \frac{-1}{\rho} + \frac{1}{4\rho} \text{Tr}(U^2 - V^2) \quad [2.6.6]$$

$$\mu_z = \frac{1}{2\rho} \text{Tr}(UV) \quad [2.6.7]$$

donde

$$\mu = 2\gamma - \ln f, \quad U = \rho F_\rho F^{-1}, \quad V = \rho F_z F^{-1}, \quad [2.6.8]$$

para conocer  $U$  y  $V$  se puede calcular  $\mu$  por cuadraturas la ecuación [2.6.5] toma la forma

$$U_\rho + V_z = 0 \quad [2.6.9]$$

y de las condiciones de integrabilidad de [2.6.8] con respecto a  $F$

$$U_z - V_\rho + \frac{1}{\rho}[U, V] + \frac{1}{\rho}V = 0 \quad [2.6.10]$$

el paréntesis cuadrado denota el conmutador de las respectivas matrices. El siguiente paso consiste en representar [2.6.9] y [2.6.10] como las condiciones de compatibilidad de un sistema sobre determinado más general de ecuaciones de matrices relacionado a un problema de valores propios por algún operador diferencial lineal. Tal sistema puede depender únicamente de las matrices  $U, V, F$  y de un parámetro complejo. No existe un procedimiento general para la determinación de tal sistema, sin embargo, para el caso relativamente simple [2.6.9] y [2.6.10] esto puede hacerse. Para este propósito se introducen los operadores diferenciales

$$O_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \rho^2} \partial_\lambda \quad [2.6.11a]$$

$$O_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2} \partial_\lambda \quad [2.6.11b]$$

donde  $\lambda$  es un parámetro complejo. El conmutador de estos operadores se anula

$$[O_1, O_2] = 0 \quad [2.6.12]$$

Introduciendo la matriz compleja  $\Psi(\lambda, \rho, z)$  se pueden escribir las ecuaciones

$$O_1 \Psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2} \Psi \quad [2.6.13a]$$

$$O_2 \Psi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2} \Psi \quad [2.6.13b]$$

esto nos dice que la condición de compatibilidad  $[O_1, O_2]\Psi = 0$  para [2.6.13] coincide con las ecuaciones diferenciales [2.6.9] y [2.6.10] cuya solución está determinada por

$$F(\rho, z) = \Psi(0, \rho, z) \quad [2.6.14]$$

Sean  $F_0, U_0, y V_0$  soluciones de [2.6.9] y [2.6.10]. La respectiva matriz  $\Psi_0(\lambda, \rho, z)$  puede ser calculada de [2.6.13] y una nueva solución toma la forma

$$\Psi = \chi \Psi_0 \quad [2.6.15]$$

entonces [2.6.9] nos conduce a

$$O_1 \chi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2} \chi - \chi \frac{\rho V_0 - \lambda U_0}{\lambda^2 + \rho^2} \quad [2.6.16a]$$

$$O_2 \chi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2} \chi - \chi \frac{\rho U_0 + \lambda V_0}{\lambda^2 + \rho^2} \quad [2.6.16b]$$

pidiendo que  $F$  sea real y simétrica se obtiene

$$\chi^*(\lambda^*, \rho, z) = \chi(\lambda, \rho, z), \quad \Psi^*(\lambda^*, \rho, z) = \psi(\lambda, \rho, z) \quad [2.6.17]$$

$$F = \chi \left( \frac{-\rho^2}{\lambda}, \rho, z \right) F_0 \chi^T(\lambda, \rho, z) \quad [2.6.18]$$

la  $T$  denota matriz transpuesta. Las ecuaciones anteriores junto con [2.6.14] requieren que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \chi(\lambda, \rho, z) = I \quad [2.6.19]$$

donde  $I$  denota una matriz unitaria de  $2 \times 2$ .

Para la construcción de nuevas soluciones se puede proceder como sigue:

(i) dadas  $U_0, f_0$  y  $V_0$  encontrar la solución de  $\chi$  de [2.6.16], que satisfice las condiciones [2.6.17] y [2.6.19]

(ii) calcular la matriz  $F$  de [2.6.14] y [2.6.15]

(iii) Resolver las ecuaciones de campo [2.6.6] y [2.6.7] para la función métrica  $\mu$

(iv) Determinar las restantes funciones métricas  $f$  y  $\omega$  de [2.6.4]

Es necesario hacer notar los siguientes puntos importantes. La métrica semilla satisfice la relación  $det F_0 = -\rho^2$ . Para que la signatura de la métrica permanezca sin cambio, nosotros pedimos que la nueva solución satisfaga también esta relación. Las ecuaciones [2.6.14] y [2.6.15] requieren que  $F = \chi(0)F_0$ .

Así nosotros tenemos que imponer otra condición sobre la matriz  $\chi$ , esta es:  $det \chi(0) = 1$ . Es más conveniente ignorar esta condición durante los cálculos, y usar una simple renormalización en el resultado final para obtener la expresión correcta. El procedimiento es el siguiente: supongamos que  $F$  con determinante  $det F \neq \rho^2$  es una nueva solución obtenida con el método descrito anteriormente. La traza de [2.6.5] conduce a

$$\frac{1}{\rho} [\rho (ln(det F))_{,\rho}]_{,\rho} + (ln(det F))_{,zz} = 0 \quad [2.6.20]$$

definiendo una nueva matriz  $F_{\rho h}$  por

$$F_{\rho h} = -\rho (-det F)^{-\frac{1}{2}} F \quad [2.6.21]$$

uno puede ver que la nueva matriz satisfice la ecuación de campo [2.6.5] y  $det F_{\rho h} = -\rho^2$

## 2.7 MOMENTOS MULTIPOLARES EN RELATIVIDAD GENERAL

Para que una solución a las ecuaciones de Einstein tenga importancia relevante debemos darle una interpretación aceptable desde el punto de vista físico, desgraciadamente esto no es tarea fácil. Sin embargo un camino que puede utilizarse para obtener alguna información acerca del campo gravitacional es calcular el límite Newtoniano de la métrica, ya que la teoría Newtoniana está contenida en la teoría de Einstein como un caso especial. Al calcular el límite Newtoniano obtendremos términos que se identificarán como los momentos multipolares del cuerpo, este límite nos permite calcular los momentos multipolares del cuerpo que en la teoría Newtoniana determinan el campo gravitacional únicamente.

El procedimiento para calcular el límite Newtoniano depende del sistema coordenado que se elige, por tanto, no es único. Esta dependencia coordenada nos presenta problemas, ya que uno esperaría que la descripción del campo gravitacional no cambiara de un sistema coordenado a otro. Es por esto que necesitamos una definición de momentos multipolares independiente de las coordenadas.

Hernandez[32] calculó los momentos multipolares de la métrica de Kerr como desviaciones de una distribución de masa con simetría esférica, sin embargo su método no permite la generalización para otras métricas, Van Der Burg[33] representó el elemento de línea general

$$ds^2 = f(dt - wd\phi)^2 - f^{-1}\{e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\} \quad [2.7.1]$$

como una expansión de una "adecuada coordenada radial" y las funciones métricas como soluciones de la ecuación de Laplace con ciertos coeficientes constantes que pueden ser interpretados como los momentos multipolares. Su definición de "aceptable coordenada radial" es, sin embargo, no invariante y el método no sirve para calcular esta coordenada para una métrica arbitraria. Geroch(1970) propuso una definición de momentos multipolares covariante e independiente de las coordenadas para campos gravitacionales estáticos. Esta definición fue generalizada por Hansen(1974) incluyendo campos estacionarios. Otra definición de momentos multipolares dependiente de las coordenadas fue propuesta por Thorne[35]. La dependencia coordenada fue investigada desde el punto de vista físico; un criterio para la elección de una coordenada aceptable fue propuesto y discutido, finalmente, Beig y Simon[34] formularon una definición independiente de las coordenadas usando el trabajo de Geroch y Hansen[28]. De las definiciones antes mencionadas las más importantes son

- 1.-Geroch-Hansen
- 2.-Thorne
- 3.-Beig-Simons



## 2.7 MOMENTOS MULTIPOLARES EN RELATIVIDAD GENERAL

Para que una solución a las ecuaciones de Einstein tenga importancia relevante debemos darle una interpretación aceptable desde el punto de vista físico, desgraciadamente esto no es tarea fácil. Sin embargo un camino que puede utilizarse para obtener alguna información acerca del campo gravitacional es calcular el límite Newtoniano de la métrica, ya que la teoría Newtoniana está contenida en la teoría de Einstein como un caso especial. Al calcular el límite Newtoniano obtendremos términos que se identificarán como los momentos multipolares del cuerpo, este límite nos permite calcular los momentos multipolares del cuerpo que en la teoría Newtoniana determinan el campo gravitacional únicamente.

El procedimiento para calcular el límite Newtoniano depende del sistema coordenado que se elige, por tanto, no es único. Esta dependencia coordenada nos presenta problemas, ya que uno esperaría que la descripción del campo gravitacional no cambiara de un sistema coordenado a otro. Es por esto que necesitamos una definición de momentos multipolares independiente de las coordenadas.

Hernandez[32] calculó los momentos multipolares de la métrica de Kerr como desviaciones de una distribución de masa con simetría esférica, sin embargo su método no permite la generalización para otras métricas, Van Der Burg[33] representó el elemento de línea general

$$ds^2 = f(dt - wd\phi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad [2.7.1]$$

como una expansión de una "adecuada coordenada radial" y las funciones métricas como soluciones de la ecuación de Laplace con ciertos coeficientes constantes que pueden ser interpretados como los momentos multipolares. Su definición de "aceptable coordenada radial" es, sin embargo, no invariante y el método no sirve para calcular esta coordenada para una métrica arbitraria. Geroch(1970) propuso una definición de momentos multipolares covariante e independiente de las coordenadas para campos gravitacionales estáticos. Esta definición fue generalizada por Hansen(1974) incluyendo campos estacionarios. Otra definición de momentos multipolares dependiente de las coordenadas fue propuesta por Thorne[35]. La dependencia coordenada fue investigada desde el punto de vista físico; un criterio para la elección de una coordenada aceptable fue propuesto y discutido, finalmente, Beig y Simon[34] formularon una definición independiente de las coordenadas usando el trabajo de Geroch y Hansen[28]. De las definiciones antes mencionadas las más importantes son

- 1.-Geroch-Hansen
- 2.-Thorne
- 3.-Beig-Simons

(i) Definición heurística de momentos multipolares[2]

Puesto que la teoría de la gravitación de Newton está contenida en la teoría de Einstein como un caso especial, se puede investigar ciertos casos límite de una métrica dada para entender su significado físico y estructura. Uno de estos casos límite es la aproximación lineal que nos da un campo gravitacional a gran distancia de la fuente. Los cálculos explícitos de esta aproximación están relacionados a las coordenadas en las cuales la métrica está dada, por tanto, uno espera que el proceso sea dependiente de las coordenadas.

Consideremos un sistema aislado cuyo campo gravitacional es tan débil que despreciemos los efectos gravitacionales en sí mismos. A gran distancia de la fuente gravitacional el espacio-tiempo posee una estructura casi plana cuya métrica puede ser la del espacio plano de Minkowski más una perturbación

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta} \quad [2.7.2]$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  representa la métrica de Minkowski y las cantidades  $h_{\alpha\beta}$  son cantidades infinitesimales. Bajo esta aproximación las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -8\pi T_{\alpha\beta} \quad [2.7.3]$$

donde  $\square$  representa el operador de D'Alembert y

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h^\gamma_\gamma \quad [2.7.4]$$

La solución general para [2.7.3] puede ser dada como un potencial retardado

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = -2 \int \frac{T_{\alpha\beta}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dx'^3 \quad [2.7.5]$$

expandiendo  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  en potencias de  $\frac{r'}{r} = \frac{r'}{r}$  utilizando

$$T_{\alpha\beta}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} T_{\alpha\beta}(t - r, \vec{x}') \right] (r - |\vec{x} - \vec{x}'|)^n \quad [2.7.6]$$

obtenemos el elemento de línea[2]

$$ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - (4_{ij} J^j \frac{x^k}{r} + A_i) dt dx^i - [(1 - 2\phi)\delta_{ij} + A_{ij}] dx^i dx^j \quad [2.7.7]$$

donde  $i, j, k = 1, 2, 3$ .  $A_{ij}$  son cantidades dependientes del tiempo de orden  $O(r^{-1})$  que conduce a la aparición de ondas gravitacionales demandando que el tensor energía momento sea independiente del tiempo podemos despreciar las cantidades  $A_{ij}$ . El momento dipolar de la distribución de momentos está dado por

$$J_i = \int \epsilon_{ijk} x^j T^{k0} d^3x' \quad [2.7.8]$$

las cantidades  $A_i$  son  $O(r^{-3})$ . Ellas determinan momentos de orden mayor de la distribución de momento angular. Finalmente, la función  $\phi$  satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi T_{00} = 4\pi \rho \quad [2.7.9]$$

$\phi$  representa el potencial gravitacional Newtoniano, así la solución de [2.7.9] es

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad [2.7.10]$$

Introduciendo la expansión de  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$  en términos de armónicos esféricos tenemos

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} \int \rho(\vec{x}') r'^l P_l(\cos\theta') d^3x' \quad [2.7.11]$$

donde  $P_l(\cos\theta)$  son los polinomios de Legendre. Nosotros definimos los momentos multipolares de una distribución de masa de densidad  $\rho(\vec{x}')$  como sigue

$$\mu_l = \int \rho(\vec{x}') r'^l P_l(\cos\theta') d^3x' \quad [2.7.12]$$

entonces el potencial gravitacional de una distribución con simetría axial está dada por

$$\phi = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mu_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$

El momento monopolar es

$$\mu_0 = M$$

donde  $M$  es la masa total del sistema, el momento dipolar está dado por

$$\mu_1 = \int \rho(\vec{x}') x'^3 d^3x' = x_{CM}^3 M$$

y determina la distancia entre el origen de coordenadas y el centro de masa de la fuente. En particular podemos elegir el centro de masa como origen coordenado y este término multipolar siempre lo podemos hacer cero. El momento cuadrupolar masa está definido como

$$\mu_2 = Q = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}') [3(x'^2)^2 - r'^2] d^3x'$$

para una fuente prolata uno tiene  $Q > 0$ ; si  $Q = 0$  entonces la distribución de masa tiene simetría esférica, y finalmente  $Q < 0$  para una fuente oblata. Así es posible calcular todos los momentos multipolares de una métrica dada investigando la respectiva expansión en potencias inversas de una "coordenada radial aceptable". Sin embargo esta definición tiene dependencia coordenada, por ejemplo, tomemos la métrica de Schwarzschild

(i) En coordenadas esféricas

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad [2.7.13]$$

y utilizando la definición de momentos multipolares

$$\mu_0 = M$$

$$\mu_k = 0$$

$$\text{si } k > 0$$

esto nos dice que la métrica de Schwarzschild describe el campo gravitacional de una distribución de masa con simetría esférica de masa total  $M$

(ii) sin embargo esta misma métrica en coordenadas de Weyl toma la forma

$$ds^2 = \exp(2\psi)dt^2 - \exp(-2\psi)[\exp(2\gamma)(d\rho^2 + dz^2) + \rho d\phi^2]$$

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{r_+ + r_- - 2M}{r_+ + r_- + 2M} \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(r_+ + r_-)^2 - 4M^2}{4r_+ r_-} \right]$$

$$r_+ = \rho^2 + (z + M)^2$$

$$r_- = \rho^2 + (z - M)^2$$

y nos describe el campo gravitacional de un poste cuyo centro de masa está en el origen del sistema coordenado. Los puntos finales del poste están situados sobre el eje  $z$  en los puntos  $z = -M, z = M$  así que la longitud es  $2M$  con este ejemplo mostramos que diferentes sistemas coordenados nos dan diferentes momentos multipolares los que describen distintos campos gravitacionales para la misma métrica, por lo que, esta definición no es muy confiable

## (ii) Momentos multipolares Newtonianos[14]

La aproximación Newtoniana de la teoría de gravitación de Einstein puede ser derivada imponiendo ciertas condiciones sobre el tensor de energía-momento y expandiendo la métrica. Pero el resultado obtenido por este camino es dependiente de las coordenadas. Sin embargo existe otra derivación del límite Newtoniano basado en la consideración del límite  $c \rightarrow \infty$  para recuperar la teoría Newtoniana a partir de la teoría de Einstein. Las ideas básicas de este método fueron dadas por Friedrichs (1927), Dautcourt(1924), Künzle(1976), y Ehlers(1981). A continuación se presenta una descripción corta de estas ideas basada en el trabajo de Ehlers.

Una teoría que contiene las teorías de gravitación de Einstein y Newton puede ser definida en una variedad 4-dimensional, real, conectada, y Hausdorff diferenciable  $\Sigma$ . Los siguientes objetos están contenidos en  $\Sigma$ :

a) La constante de causalidad  $\lambda = c^{-2}, (\lambda \geq 0)$

b) La constante gravitacional  $G (G \geq 0)$

c) La métrica  $g_{\alpha\beta}$

d) El tensor energía-momento  $T_{\alpha\beta}$

e) La conexión  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , lineal y simétrica.

Elijiendo apropiadamente  $\lambda$  y  $G$  se recuperan las teorías conocidas que se encuentran en esta teoría como casos particulares.

(i)  $\lambda > 0, G > 0$ . Esta elección conduce a la teoría de gravitación de Einstein

(ii)  $\lambda = 0, G > 0$ . Este caso límite corresponde a la teoría de gravitación de Newton

(iii)  $\lambda > 0, G = 0$ . Este caso límite conduce a la teoría especial de la relatividad si la curvatura desaparece

Nosotros nos limitamos a los casos (i) y (ii) cuya relación directa está dada en las siguientes definiciones

#### definición 1

Una congruencia  $(g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}, T^{\mu\nu})$  de  $\lambda$ -campos dependientes sobre  $\Sigma$ , definida para  $0 < \lambda < \lambda_0$  tiene el límite Newtoniano  $(\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{g}^{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma}, \hat{T}^{\mu\nu})$  si los campos  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$ , y sus derivadas parciales con respecto a  $\lambda$  y la coordenada local  $x^\mu$  hasta tercer orden, el campo  $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$  y sus derivadas hasta segundo orden, y el campo  $T^{\mu\nu}$  y sus derivadas a primer orden, son continuas en  $\Sigma \setminus X[0, \lambda_0]$  y cumplen con las siguientes leyes para  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$  en  $\Sigma$ :

1.- Existe un vector tipo tiempo mínimo.

2.- La más alta dimensión del subespacio del espacio cotangente de  $\Sigma$  es 3, si el producto escalar inducido por  $g^{\mu\nu}$  es positivo definido.

3.-  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -\lambda^2$

4.-  $g_{\mu\nu;\nu} = 0$ ,  $g^{\mu\nu}{}_{;\gamma} = 0$

5.-  $T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu > 0$  es válido para cada vector tipo tiempo  $\xi^\mu$ ; en otro caso  $T^{\mu\nu} = 0$

6.-  $T^{\mu\mu}{}_{;\gamma} = 0$

7.-  $R_{\mu\nu\gamma\beta} = R_{\gamma\beta\mu\nu}$

8.-  $R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T^\gamma{}_\gamma)$

9.-  $R_{\mu\nu\gamma\beta} R^\nu{}_{\mu\gamma}{}^\beta = 0$

Para el caso límite  $(\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{g}^{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\gamma}, \hat{T}^{\mu\nu})$ . Los requerimientos 2-8 son válidos tanto en la teoría Newtoniana como en la teoría relativista. El requerimiento 9 solamente es válido en el caso  $\lambda = 0$  (teoría Newtoniana) y esto permite que uno pueda introducir sistemas de coordenadas no rotando en los cuales las ecuaciones de campo (requerimientos 7 y 8) conducen inmediatamente a las ecuaciones de la teoría de Newton.

La definición de límite Newtoniano dada anteriormente nos permite investigar soluciones de las ecuaciones de Einstein independientemente de la elección de coordenadas. Usando la definición 1, se pueden probar los siguientes lemas que nos dan la solución al problema de la interpretación de los momentos multipolares.

#### lema 1

Una congruencia del espacio-tiempo de Schwarzschild parametrizada por  $\lambda$ , con métrica

$$g_{tt} = T^2 \left( 1 - \frac{2\lambda GM}{r} \right)$$

$$g_{rr} = \frac{\lambda L^2}{1 - \frac{2\lambda GM}{r}}$$

$$g_{\theta\theta} = \lambda r^2$$

$$g_{\phi\phi} = \lambda r^2 \sin^2 \theta$$

sobre la variedad  $\Sigma = \{(t, \bar{r}, p) \mid t \in \text{reales}, \bar{r} > 0, p \in S^2\}$  con  $\bar{r} = r - 2\lambda GM$  conduce, en el límite Newtoniano, al campo gravitacional de una masa puntual

$$\Phi = \frac{-GM}{r}$$

T y L representan las dimensiones de tiempo y longitud respectivamente

## Lema 2

Consideremos una solución de Weyl estática axisimétrica, parametrizada por  $\lambda$  y descrita en coordenadas cilíndricas

$$g_{tt} = T^2 \exp(2\lambda\psi)$$

$$g_{\rho\rho} = g_{zz} = L^2 \lambda \exp[2\lambda(\lambda\gamma - \psi)]$$

$$g_{\phi\phi} = \lambda \rho^2 \exp(-2\lambda\psi)$$

sean las funciones métricas  $\psi$  y  $\gamma$  una congruencia de funciones armónicas para  $\lambda = 0$  y sea  $\Sigma = \text{reales } X$  [dominio regular de  $\phi$  - parte del eje donde  $\gamma$  es diferente de cero]. Entonces el correspondiente límite Newtoniano está dado por el potencial

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi(\rho, z, \lambda)$$

## Definición 2

Los momentos multipolares de masa de una solución estática de Weyl que satisface el Lema 2 son los coeficientes  $N_l$  de la expansión

$$\Phi = -G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$

seguida de la expresión

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi(\rho, z, \lambda)$$

nótese que el Lema 2 es válido sólo en las coordenadas  $(t, \rho, z, \phi)$  y la expansión para encontrar los momentos multipolares está en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , por tanto tenemos que realizar una transformación de coordenadas, que sólo será válida si el origen de coordenadas permanece sin cambio, dado que únicamente en este caso los momentos multipolares son invariantes ante transformaciones de coordenadas. Entonces nosotros podemos escribir

$$\Phi = -G \sum_{l=0}^{\infty} N_l \frac{P_l\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)}{(\rho^2+z^2)^{l+\frac{1}{2}}}$$

sin embargo se prefiere utilizar la opción en coordenadas esféricas por ser más cómoda y familiar.

La definición 2 nos dice que el único momento multipolar distinto de cero de la métrica de Schwarzschild es un monopolo  $N_0 = M$ .

(iii) Momentos multipolares Geroch-Hansen[14]

Los momentos multipolares de masa en gravedad Newtoniana pueden ser definidos en dos formas equivalentes:

- 1.- Como momentos de una distribución de masa, si la densidad de masa es conocida
- 2.- Como coeficientes de expansión de multipolos

Otra definición fue propuesta por Geroch (1970). Define los momentos multipolares como tensores conformes de Killing en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}$  con la métrica  $h_{ij}$ , es decir, tensores  $\xi^{ij\dots}$  satisfaciendo la ecuación

$$\nabla^{(i}\xi^{jk\dots l)} = h^{(ij}T^{k\dots l)} \quad [2.7.14]$$

donde  $\nabla$  representa el operador gradiente en  $\mathbb{R}$  y  $T^{k\dots l}$  es un tensor arbitrario en  $\mathbb{R}$ . Esta interpretación está basada en las siguientes consideraciones: Los momentos multipolares obtenidos al resolver la ecuación  $\nabla^2\phi = 0$  son un conjunto de matrices independientes, simétricas y sin traza  $Q_i, Q_{ij}, \dots$ . Estas matrices están definidas en el origen del sistema de coordenadas para un punto arbitrario de  $\mathbb{R}$ , debido a esto el conjunto de matrices constituye un campo tensorial en  $\mathbb{R}$ . Además estas matrices satisfacen la ecuación [2.7.14], por tanto son un campo tensorial de Killing.

Debido a la invariancia coordenada y al caracter covariante de esta interpretación, se espera que la generalización a la teoría de Einstein nos permita definir momentos multipolares relativistas con las mismas propiedades. Esta idea fue desarrollada por Geroch(1970) para soluciones de las ecuaciones de Einstein en vacío, asintóticamente planas y estáticas y por Hansen(1974) para soluciones estacionarias

Sea  $p$  una 4-variedad Riemanniana con la métrica que tiene la asignatura  $(+ - - -)$  y satisface las ecuaciones de Einstein para el vacío. Sea  $\xi^\alpha$  un vector Killing temporal ( $\xi^\alpha \xi_\alpha < 0$ ) definido en  $p$ , introduciendo  $f$  y  $\omega$  por

$$f = \xi^\alpha \xi_\alpha \quad [2.7.15]$$

$$\omega_\alpha = \epsilon_{abcd} \xi^b \nabla^c \xi^d \quad [2.7.16]$$

Las ecuaciones de campo requieren  $\nabla_{[\alpha} \omega_{\beta]} = 0$ , es decir, existe un campo escalar  $\Omega$  satisfaciendo

$$\omega_\alpha = \nabla_\alpha \Omega \quad [2.7.17]$$

$f$  y  $\Omega$  definen el potencial de Ernst para campos axisimétricos. Las orbitas del vector de campo  $\xi^\alpha$  constituyen una 3-variedad dimensional diferenciable  $j$  con la métrica

$$g_{ij} = g_{00}g_{ij} + g_{0i}g_{0j} \quad [2.7.18]$$

Se puede introducir el concepto de asintóticamente plano en  $j$ , por medio de sistemas coordenados "asintóticamente euclidianos". Pero esto puede conducir a una cierta dependencia del sistema coordenado, sin embargo hay una alternativa que es coordenada-invariante que consiste en añadir el "punto en infinito" ( $A$ ) a la variedad  $j$  por medio de una transformación conforme. Entonces el comportamiento asintótico de un campo en  $j$  es dado por el comportamiento en  $A$

### Definición 1

Una 3-variedad dimensional  $j$  con la métrica  $s_{ij}$  que satisface las siguientes condiciones :

- (i)  $\bar{j} = j \cup \Lambda$
- (ii)  $\bar{s}_{ij} = \Sigma^2 s_{ij}$ , donde  $\Sigma$  es un campo escalar definido en  $\bar{j}$
- (iii)  $\Sigma|_{\Lambda} = 0$ ,  $\bar{D}_i \Sigma|_{\Lambda} = 0$ ,  $\bar{D}_i \bar{D}_j \Sigma|_{\Lambda} = 2\bar{s}_{ij}|_{\Lambda}$

Aquí,  $\bar{D}_i$  representa la derivada covariante con respecto a  $\bar{s}_{ij}$ . Introduciendo el campo escalar

$$\bar{\Phi}^M = \Sigma^{-1} \Phi^M, \quad P_{hi}{}^M = \frac{1}{4f}(f^2 + \Omega^2 - 1) \quad [2.7.19]$$

$$\bar{\Phi}^J = \Sigma^{-1} \Phi^J, \quad \Phi^J = \frac{1}{2f} \Omega \quad [2.7.20]$$

en  $j$  y definiendo los campos tensoriales  $P_{a_1 \dots a_l}^M$  y  $P_{a_1 \dots a_l}^J$  por

$$P^A = \bar{\Phi}^A \quad [2.7.21]$$

$$P_{a_1 \dots a_l}^A = \mathbb{Q}[\bar{D}_{a_1} \dots \bar{D}_{a_l} P^A - \frac{1}{2} l(l-1) \bar{R}_{a_1 a_2} \bar{R}_{a_3 \dots a_l} P^A] \quad [2.7.22]$$

$$A = M, J$$

### Definición 2

Los  $2^l$ -momentos polares de  $\Phi^M$  y  $\Phi^J$  son determinados por el valor de los tensores  $P_{a_1 \dots a_l}^M$  y  $P_{a_1 \dots a_l}^J$  y  $\Lambda$  respectivamente

$$M_{a_1 \dots a_l} = P_{a_1 \dots a_l}^M|_{\Lambda} \quad [2.7.23]$$

$$J_{a_1 \dots a_l} = P_{a_1 \dots a_l}^J|_{\Lambda} \quad [2.7.24]$$

donde  $M_{a_1 \dots a_l}$  denota los momentos multipolares másicos y  $J_{a_1 \dots a_l}$  la distribución de momentos angulares.

El potencial Newtoniano satisface la ecuación de Laplace  $D^2 \Phi = 0$ , cuya solución es

$$\Phi = r^{-1} Q + r^{-3} Q_i x^i + \frac{1}{2} r^{-5} Q_{ij} x^i x^j + \dots \quad [2.7.25]$$

donde  $x$  es el vector y  $r$  su norma. Tomemos el punto  $\Lambda$  como  $\bar{x}^i = r^{-2} x^i y \Sigma = r^2$ , entonces la expansión [2.7.25] toma la forma

$$\bar{\Sigma} = Q + Q_i \bar{x}^i + \frac{1}{2} Q_{ij} \bar{x}^i \bar{x}^j + \dots \quad [2.7.26]$$

esto nos dice que

$$Q = \bar{\Phi}|_{\Lambda}, \quad Q_i = \bar{D}_i \bar{\Phi}|_{\Lambda}, \quad Q_{ij} = \bar{D}_i \bar{D}_j \bar{\Phi}|_{\Lambda}, \dots \quad [2.7.27]$$

Para campos axisimétricos existe un vector espacial Killing  $\eta$  en  $j$  que satisface las siguientes relaciones

$$L_{\eta} s_{ij} = 0, \quad L_{\eta} \Phi^M = L_{\eta} \Phi^J = 0 \quad [2.7.28]$$



el factor conformal  $\Sigma$  debe ser elegido tal que  $\tilde{\eta}^a = (\eta^a)$  permanezca como vector de Killing espacial en  $\bar{J}$  y el vector axial

$$\tilde{z}^a = 2\tilde{z}^{abc}\tilde{D}_b\tilde{\eta}_c \quad [2.7.29]$$

es un vector unitario en  $\Lambda$

$$\tilde{z}^a\tilde{z}_a|_\Lambda = 1 \quad [2.7.30]$$

dado que los tensores  $P_{a_1\dots a_l}^M$  y  $P_{a_1\dots a_l}^J$  son invariantes bajo rotaciones inducidas por  $\eta$  alrededor del eje de simetría, se puede mostrar (ver Hansen(1974)) que los 2<sup>l</sup>-momentos polares son determinados por

$$M_l = \frac{1}{l!} M_{a_1\dots a_l} \tilde{z}^{a_1} \dots \tilde{z}^{a_l} |_\Lambda \quad [2.7.31]$$

$$J_l = \frac{1}{l!} J_{a_1\dots a_l} \tilde{z}^{a_1} \dots \tilde{z}^{a_l} |_\Lambda \quad [2.7.32]$$

Para una solución estacionaria es posible calcular los momentos multipolares Geroch-Hansen de la siguiente forma :

- (i) calcular  $f$  y  $\Omega$  de [2.7.15] y [2.7.16]
- (ii) Elegir el factor conforme,  $\Sigma$ , de tal modo que las condiciones de asintóticamente plano (definición [1]) sean satisfechas
- (iii) Calcular el potencial  $\tilde{\Phi}^M$  y  $\tilde{\Phi}^J$  de [2.7.19] y [2.7.20] respectivamente
- iv) Calcular los momentos multipolares utilizando [2.7.23] y [2.7.24], o de [2.7.31] y [2.7.32], si la métrica es axisimétrica

El cálculo explícito de los momentos multipolares es completamente tedioso y laborioso .

## 2.8 SOLUCIONES EXACTAS, AXISIMÉTRICAS Y ESTACIONARIAS

En la teoría Newtoniana la rotación no afecta al campo gravitacional. Esto no es verdad en relatividad general. Se comprobó (Lense y Thirring[36]) que el campo gravitacional de un cuerpo rotando conduce al "arrastramiento de marcos inerciales" en la vecindad del cuerpo (efecto Lense-Thirring), las pequeñas correcciones de la métrica debidas al efecto Lense-Thirring pueden ser calculadas como una aproximación lineal análoga a la hecha para encontrar los momentos multipolares. Los elementos fuera de la diagonal del elemento de línea

$$ds^2 = c^2(1 + \frac{2\Phi}{c^2})dt^2 - (4\epsilon_{ijk}J^j \frac{x^k}{r^3} + A_i)dt dx^i - [(1 - \frac{2\Phi}{c^2})\delta_{ij} + A_{ij}]dx^i dx^j \quad [2.8.1]$$

determinan el arrastramiento de los marcos inerciales. En electrodinámica el movimiento de cargas produce un campo magnético que puede ser detectado experimentalmente. Debido a esta analogía, el campo gravitacional de una masa en movimiento es llamado campo "gravitomagnético"

Kerr (1963)[19], presentó la primera solución estacionaria, axisimétrica, y asintóticamente plana. Esta solución es muy importante para el entendimiento del colapso gravitacional de estrellas rotando. Se esperaba que la métrica de Kerr describiera el campo gravitacional de cuerpos rotando uniformemente, sin embargo, la correspondiente solución interior no fué encontrada. La métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist(1967) tiene la forma

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\Sigma^2}(dt^2 - a \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 - \Sigma^2 d\theta^2 \quad [2.8.2]$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2$$

$$\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

donde  $m$  es la masa de la fuente y  $a$  representa su momento angular por unidad de masa. Esta se reduce a la métrica de Schwarzschild para  $a=0$  y al espacio-tiempo de Minkowski para  $m=a=0$ . La rotación de la masa conduce a una deformación que puede ser descrita por el momento cuadrupolar. En el límite Newtoniano ( $c \rightarrow \infty$ ), el momento cuadrupolar desaparece y la métrica de Kerr describe el campo gravitacional de una distribución de masa con simetría esférica. Más soluciones estacionarias axisimétricas fueron encontradas por Tomimatsu y Sato(1972, 1973, [21], [22]) usando la representación de Ernst de las ecuaciones de campo. El momento cuadrupolar de esta clase de soluciones desaparece también en el límite Newtoniano.

Ahora presentaremos una nueva solución exacta en vacío estacionaria y axisimétrica obtenida por Hernandez Quevedo (1990)[18]. Esta solución posee un infinito número de parámetros independientes. El límite Newtoniano de esta solución conduce al potencial de una distribución de masa deformada con todos los momentos multipolares de masa. Si todos los momentos multipolares masa desaparecen exceptuando el monopolo la solución se reduce a la de Kerr-NUT.

(i) Transformación HKX [11]

Como ya vimos existen varios métodos para generar soluciones a partir de una conocida. Una de estas transformaciones es la transformación HKX. Con esta transformación se calcula el potencial de Ernst de una solución estacionaria a partir de una métrica estática.

La transformación HKX, fue descubierta como un subgrupo del grupo de Geroch (Hoenselaers, 1979, [11]). Esta transformación puede ser interpretada como una transformación infinitesimal que actúa sobre el potencial de Ernst. El método para generar soluciones es el siguiente Usando las funciones métricas del elemento de línea general se construye la matriz

$$F = \begin{pmatrix} f\omega & f^{-1}\rho^2 - f\omega^2 \\ f & -f\omega \end{pmatrix} \quad [2.8.3]$$

que satisface las siguientes relaciones

$$F^2 = \rho^2 I \quad [2.8.4a]$$

$$cF^T c = F \quad [2.8.4b]$$

con

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y se definen los operadores

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \partial_s \end{pmatrix} \quad [2.8.5a]$$

$$\nabla^* = \begin{pmatrix} \partial_s \\ -\partial_\rho \end{pmatrix} \quad [2.8.5b]$$

la ventaja de usar este operador es que podemos construir la expresión

$$\nabla \nabla^* A = 0 \quad [2.8.6]$$

que es válida para cualquier matriz arbitraria  $A$  de  $2 \times 2$  y puede ser usada como una condición de integrabilidad.

Con la definiciones mencionadas anteriormente las ecuaciones de campo [2.4.3a] y [2.4.3b] se pueden poner dentro de la ecuación

$$\nabla \left( \frac{1}{\rho} F \nabla F \right) = 0 \quad [2.8.7]$$

las ecuaciones [2.8.6] y [2.8.7] nos dicen que existe una matriz  $\omega$  real de  $2 \times 2$  que está definida por

$$\nabla^* \Omega = -\frac{1}{\rho} F \nabla F \quad [2.8.8]$$

definiendo una matriz  $H$  como

$$H = F + i\Omega \quad [2.8.9]$$

se puede poner la ecuación [2.8.7] en la forma

$$\nabla H = \frac{i}{\rho} F \nabla^* H \quad [2.8.10]$$

que es equivalente a la ecuación de Ernst. Así encontrando la solución  $H$  para la ecuación [2.8.10], se genera una nueva solución estacionaria axisimétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío. Ahora por medio de  $H$  uno define una nueva matriz  $H_2$  de la siguiente forma

$$H_2 = i(N + HH) \quad [2.8.11]$$

donde la matriz  $N$  satisface la siguiente condición

$$\nabla N = \epsilon H^\dagger \epsilon \nabla H \quad [2.8.12]$$

aquí " $\dagger$ " denota la matriz conjugada hermitiana. Y nuevamente la matriz  $H_2$  satisface la ecuación [2.8.10], es decir

$$\nabla H_2 = \frac{i}{\rho} F \nabla^* H_2 \quad [2.8.13]$$

Todavía más, se puede definir una nueva matriz  $N_1$  a partir de  $H_2$  utilizando la ecuación [2.8.12], después con  $N_1$  se construye la nueva matriz  $H_3$  utilizando la ecuación [2.8.11], que nuevamente satisface la ecuación [2.8.10], es decir, es una nueva solución. Siguiendo este camino uno puede obtener un número infinito de matrices  $H_n$  y  $N_{mn}$  con  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\nabla H_n = \frac{i}{\rho} F \nabla^* H_n \quad [2.8.14a]$$

$$\nabla N_{mn} = \epsilon H_m^\dagger \epsilon \nabla H_n \quad [2.8.14b]$$

$$b f H_{n+1} = i(N_{1n} + H_1 H_n) \quad [2.8.14c]$$

donde nuestra matriz original  $H$  es tomada como  $H_1$ .

Para calcular una solución estacionaria a partir de una métrica estática dada (semilla), se tiene que proceder de la siguiente manera: Tomemos el potencial de Ernst

$$E = E_0 \exp(2\psi) \quad [2.8.15]$$

de una solución axisimétrica estática. La acción de  $N$  transformaciones  $HKX$  de rango cero sobre  $E_0$  genera un nuevo potencial estacionario  $E$

$$E = E_0 \frac{D_-}{D_+} \quad [2.8.16]$$

donde

$$D_{\pm} = \det \left[ \delta_{ij} + i \frac{\alpha_k U_k}{2S(U_k)} \exp[2\beta(U_k)] \left( \frac{U_j + U_k - 4U_j U_k z}{U_j S(U_k) + U_k S(U_j)} \pm 1 \right) \right] \quad [2.8.17]$$

primero elijamos aquí  $j, k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\alpha_k$  y  $U_k$  son  $2N$  parámetros. Las ecuaciones  $\beta(U_k)$  satisfacen la ecuación diferencial

$$S(U_k) \nabla \beta(U_k) = (1 - 2U_k z) \nabla \psi - 2U_k \rho \nabla^* \psi \quad [2.8.18]$$

con

$$S^2(U_k) = (1 - 2U_k z)^2 + (2U_k \rho)^2 \quad [2.8.19]$$

Para obtener el potencial de Ernst  $E$  de la nueva solución se tienen que calcular explícitamente las  $N$  funciones  $\beta(U_k)$ . La ecuación [2.8.18] define a  $\beta(U_k)$  (para cada  $k$ ) como una función de  $\rho$  y  $z$  saliendo una constante que puede ser absorbida por una redefinición del parámetro  $\alpha_k$ . La ecuación [2.8.17] sólo es válida para transformaciones de rango cero. con [2.8.15] se pueden calcular las funciones  $f$  y  $\Omega$  que serían la parte real e imaginaria del potencial de Ernst respectivamente

$$f = \text{Re} E \quad \Omega = \text{Im} E$$

\* Los cálculos para obtener  $H_n$  a partir de  $H_1$  son bastante complicados y salen de los propósitos de este trabajo

El número de soluciones obtenidas utilizando las transformación HKX[11] es muy grande. Se conoce que uno puede obtener todas soluciones de la ecuación de Ernst usando la transformación HKX con la solución de Weyl como semilla métrica, algunos ejemplos son

Aplicando dos veces las transformaciones HKX sobre la métrica estática de Curzon(Curzon(1924))

$$\psi = -\frac{2mX}{X^2 - Y^2} \quad \omega = 0 \quad [2.8.20a]$$

$$\gamma_s = -m^2 \left( \frac{1 - Y^2}{X^2 - Y^2} \right)^4 [(X^2 - 1)(X^4 + 6X^2Y^2 + Y^4) + (X^2 - Y^2)^3] \quad [2.8.20b]$$

se genera una solución estacionaria con simetría axial que describe el campo gravitacional de dos partículas rotando alrededor del eje de simetría [38]. Ambas partículas pueden tener la misma masa (proporcional a  $m$ ) y estar rotando en la misma dirección para que el sistema esté en equilibrio. Esto significa que la fuerza gravitacional entre las dos partículas es compensada por la interacción spin-spin, así esto probó que las ecuaciones de campo de Einstein permiten una solución estacionaria al problema de dos cuerpos.

La solución Kerr-Nut se derivó aplicando dos veces la transformación HKX a la métrica de Zipoy-Voorhees(Zipoy[39](1966) ; Quevedo (1986)[13])

$$\psi = \frac{1}{2} \delta \ln \left( \frac{X-1}{X+1} \right) \quad [2.8.21a]$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \delta^2 \ln \left( \frac{X^2 - 1}{X^2 - Y^2} \right) \quad [2.8.21b]$$

$$\omega = 0 \quad [2.8.21c]$$

con  $\delta = 1$ . Finalmente cabe mencionar que entre las últimas soluciones generada por medio de esta transformación fue la generada por Mashhoon y Quevedo ([12], [13]). Esta solución será explicada de manera más amplia a continuación.

## la semilla métrica

Puesto que nosotros demandamos que la solución estacionaria describiera el campo gravitacional de una fuente axisimétrica en el límite Newtoniano, la métrica semilla tiene que contener multipolos de masa. (como nosotros hemos visto los multipolos de masa no desaparecen en el límite Newtoniano en contraste con los multipolos de momento angular). Nosotros ya hemos derivado la solución que contiene todos los multipolos de masa que permanecen en el límite Newtoniano. Así, nosotros elegimos la métrica semilla de la forma

$$\psi = \delta \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n(Y) Q_n(X)$$

donde X y Y son coordenadas esferoidales prolatas, y  $\delta$  es el parámetro Zipoy-Voorhees. En este nivel, el parámetro  $\delta$  no es relevante porque este puede ser absorbido redefiniendo  $q_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Sin embargo en este caso, se fija el parámetro  $q_n$  y dejamos  $\delta$  arbitrario. Aplicando la transformación HKX dos veces sobre el potencial estático  $E_0 = \exp(2\psi)$  se produce un potencial estacionario E que está dado por

$$E = \exp(2\psi) \frac{D_-}{D_+} \quad [2.8.22]$$

$$S(U_1)^2 S(U_2)^2 D_{\pm} = S(U_1)^2 S(U_2)^2 - \frac{1}{4} \alpha_1 \alpha_2 U_1 U_2 \exp[2(\beta(U_1) + \beta(U_2))] \quad [2.8.23]$$

$$\times \left[ (1 - 2U_1 z \pm S(U_1))(1 - 2U_2 z \pm S(U_2)) - S(U_1)S(U_2) \left( 1 \pm \frac{U_1 S(U_2) - U_2 S(U_1)}{U_1 - U_2} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} i \left[ \alpha_1 U_1 S(U_2)^2 (1 - 2U_1 z \pm S(U_1)) \exp[2\beta(U_1)] + \alpha_2 U_2 S(U_1)^2 (1 - 2U_2 z \pm S(U_2)) \exp[2\beta(U_2)] \right]$$

con  $k = 1, 2$

$$S^2(U_k) = (1 - 2U_k z)^2 + (2U_k \rho)^2 \quad [2.8.24]$$

Las funciones  $\beta(U_k)$  son las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$S(U_k) \frac{\partial \beta(U_k)}{\partial \rho} = (1 - 2U_k z) \psi_{\rho} - 2U_k \rho \psi_z \quad [2.8.25]$$

$$S(U_k) \frac{\partial \beta(U_k)}{\partial z} = (1 - 2U_k z) \psi + 2U_k \rho \psi_{\rho} \quad [2.8.26]$$

El potencial [2.8.22] corresponde a una métrica estacionaria. El potencial [2.8.22] contiene 4 nuevas constantes  $\alpha_1, \alpha_2, U_1, U_2$ . Se puede sin embargo, fijar dos de ellos por medio de una transformación de coordenadas de la forma  $z \rightarrow z' = z + \text{constante}$ . La función  $S(U_k)$  corresponde a  $2U_k$  veces la distancia entre los puntos  $(0, \frac{1}{2U_k})$  y  $(\rho, z)$  en el plano  $(\rho, z)$ .

Ahora hay que resolver las ecuaciones [2.8.25] y [2.8.26]. Para facilitar un poco el trabajo, se utilizan coordenadas esferoidales prolatas y elegimos el sistema de coordenadas de tal manera que la relación

$$U_1 = -U_2 = \frac{1}{2\sigma} = U \quad [2.8.27]$$

$$S(\pm U) = S_{\pm} = X \mp Y \quad [2.8.28]$$

después del cambio de coordenadas  $X \rightarrow -X$ , el potencial [2.8.22] toma la forma

$$E = \exp(2\delta\psi) \frac{d_-}{d_+} \quad [2.8.29]$$

con

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} P_n(Y) Q_n(X) \quad [2.8.30]$$

$$d_{\pm} = (X \pm 1)^{\pm 1} \{X(1 - \lambda\nu) + iY(\lambda + \nu) \pm (1 + \lambda\nu) \mp i(\lambda - \nu)\} \quad [2.8.31]$$

y

$$\lambda = \alpha_1 (X^2 - 1)^{1-i} (X - Y)^{2i-2} \exp[2\delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n \beta_{n-}] \quad [2.8.32]$$

$$\nu = \alpha_2 (X^2 - 1)^{1-i} (X - Y)^{2i-2} \exp[2\delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n \beta_{n+}] \quad [2.8.33]$$

Las ecuaciones diferenciales [2.8.25] y [2.8.26] para las funciones

$$\beta(U_{\pm}) = \beta_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n\pm} \quad [2.8.34]$$

pueden ser escritas después del cambio de coordenadas  $X \rightarrow -X$  como

$$(X \mp Y)(\beta_{n\pm})_X = (1 \mp XY) P_n Q'_n \mp (1 - Y^2) Q_n P'_n \quad [2.8.35]$$

$$(X \mp Y)(\beta_{n\pm})_Y = (1 \mp XY) Q_n P'_n \pm (X^2 - 1) P_n Q'_n \quad [2.8.36]$$

donde  $P'_n = \frac{dP_n(Y)}{dY}$  y  $Q'_n = \frac{dQ_n(X)}{dX}$

El nuevo potencial [2.8.29] contiene los siguientes parámetros:

a)  $q_n$  y  $\delta$  que fueron dados por la métrica semilla

b)  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que fueron introducidos por la transformación HKX. Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  desaparecen recobramos el potencial de Ernst de la métrica semilla.

Para resolver las ecuaciones [2.8.35] y [2.8.36] utilizamos la siguiente fórmula para la integración de funciones de Legendre

$$\int Q_n dX = \frac{1}{2n+1}(Q_{n+1} - Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [2.8.37]$$

Una inmediata integración no es posible debido al coeficiente  $(X \pm Y)$ . Para poder integrar se reescribe el lado derecho de la ecuación [2.8.35] de tal forma que se absorba dicho coeficientes  $(X \pm Y)$ . Para este propósito usamos las siguientes fórmulas de recurrencia

$$R'_n = nR_{n-1} + ZR'_{n-1} \quad [2.8.38a]$$

$$nR_n = ZR'_n - R'_{n-1} \quad [2.8.38b]$$

$$R_n = Q_n, \quad P_n = P_n, \quad Z = X, \quad Y = Y$$

donde  $R'_n = \frac{dR_n}{dX}$ , Reescribiendo [2.8.35] en la forma

$$(X \mp Y)(\beta_n \pm)_X = P_n Q'_n \mp P'_n Q_n \mp Y(X P_n Q'_n - Y P'_n Q_n) \quad [2.8.39]$$

y usando [2.8.38a] y [2.8.38b], se obtiene

$$(X \mp Y)(\beta_n \pm)_X = (X \mp Y)P_n Q'_{n-1} + n(P_n Q_{n-1} \mp P_{n-1} Q_n) \quad [2.8.40]$$

considerando el término

$$C_n = n(P_n Q_{n-1} \mp P_{n-1} Q_n) \quad [2.8.41]$$

y haciendo uso de la fórmula de recurrencia

$$nR_n = (2n-1)ZR_{n-1} - (n-1)R_{n-2} \quad [2.8.42]$$

en [2.8.41], tenemos

$$C_n = \mp(2n-1)(X \mp Y)P_{n-1}Q_{n-1} - (2n-3)(X \mp Y)P_{n-2}Q_{n-2} + C_{n-2} \quad [2.8.43]$$

entonces

$$C_n = -(X \mp Y) \sum_{k=1}^{n-1} (\pm 1)^k (2n-2k+1) P_{n-k} Q_{n-k} + (\pm 1)^{n-1} C_1 \quad [2.8.44]$$

Introduciendo explícitamente los valores de  $Q_1, P_1, Q_0, Y P_0$  en  $C_1$  se encuentra

$$C_1 = P_1 Q_0 \mp P_0 Q_1 = \mp(X \mp Y) Q_0 \pm 1 \quad [2.8.45]$$

por tanto de [2.8.39], [2.8.44], y [2.8.45] tenemos

$$(\beta_{\pm})_X = P_n Q'_{n-1} - \sum_{k=1}^n (\pm 1)^k (2n-2k+1) P_{n-k} Q_{n-k} + \frac{(\pm 1)^k}{X \mp Y} \quad [2.8.46]$$



ecuación que puede ser integrada utilizando [2.8.37]. El resultado es

$$\beta_{n\pm} = (\pm 1)^n \beta_{0\pm} - (\pm 1)^n Q_n(X) + P_n(Y) Q_{n-1}(X) - \sum_{k=1}^{n-1} (\pm 1)^k P_{n-k}(Y) [Q_{n-k+1}(X) - Q_{n-k-1}(X)] \quad [2.8.47]$$

con

$$\beta_{0\pm} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(X \mp Y)^2}{X^2 - 1} \right]$$

Aquí la constante de integración se toma como cero de acuerdo a la condición

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \beta_{n\pm} = 0 \quad [2.8.48]$$

Así, el potencial de Ernst de la nueva solución estacionaria está dado explícitamente. El potencial de Ernst [2.8.22] no es asintóticamente plano, sin embargo, este problema puede ser resuelto por medio de la transformación de Ehlers

$$\xi = \frac{1-E}{1+E} \rightarrow \xi' = \exp(ir)\xi \quad [2.8.49]$$

Donde  $r$  es una constante que garantiza la condición de asintóticamente plano de  $\xi'$

$$E' = \frac{\cos r[d_+ + \exp(2\delta\psi)d_-] - d_+ + \exp(2\delta\psi)d_- - i \operatorname{sen} r[d_+ - \exp(2\delta\psi)d_-]}{\cos r[d_+ + \exp(2\delta\psi)d_-] + d_+ - \exp(2\delta\psi)d_- + i \operatorname{sen} r[d_+ - \exp(2\delta\psi)d_-]} \quad [2.8.50]$$

## (ii) Cálculo de las funciones métricas

Ahora calcularemos las funciones métricas para el potencial de Ernst generado por medio de la transformación HKX. Expresando este potencial en términos de los potenciales de Yamazaki[37] tenemos

$$\begin{aligned}
 B &= a_+^2 + b_+^2 \\
 A &= \exp(2\delta\hat{\psi})(a_-a_+ + b_-b_+) \\
 I &= \frac{1}{2}\exp(2\delta\hat{\psi})(a_+b_- - a_-b_+) \\
 H &= \frac{1}{4}[a_+^2 + b_+^2 - \exp(4\delta\hat{\psi})(a_-^2 + b_-^2)] \\
 G &= \frac{1}{4}[a_+^2 + b_+^2 - \exp(4\delta\hat{\psi})(a_-^2 + b_-^2)] - \exp(2\delta\hat{\psi})(a_-a_+ + b_-b_+)
 \end{aligned} \tag{2.8.51}$$

donde

$$a_{\pm} = (X \pm 1)^{\pm+1} [X(1 - \lambda\nu) \pm (1 + \lambda\nu)] \tag{2.8.52a}$$

$$b_{\pm} = (X \pm 1)^{\pm-1} [Y(\lambda + \nu) \mp (\lambda - \nu)] \tag{2.8.52b}$$

con lo cual se pueden calcular las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  por medio de las relaciones de la transformación HKX. Introduciendo coordenadas esferoidales prolatas y eligiendo los parámetros de acuerdo a [2.8.27] tenemos: El elemento de línea en estas coordenadas está dado por

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -\sigma^2 f^{-1} [\exp(2\gamma)(X^2 + Y^2) \left( \frac{dX^2}{X^2 - 1} + \frac{dY^2}{1 - Y^2} \right) \\
 &\quad + (X^2 - 1)(1 - Y^2)d\phi^2] + f(dt - \omega d\phi)^2
 \end{aligned} \tag{2.8.53}$$

con

$$\begin{aligned}
 f &= 2R \left\{ (1 + \cos\tau) L_+ \left( \frac{X-1}{X+1} \right)^{1-t} \exp(-2\hat{\psi}) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \cos\tau) L_- \left( \frac{X-1}{X+1} \right)^{t-1} \exp(2\delta\hat{\psi}) + \text{sen}\tau (XN_- + YN_+) \right\}^{-1} \\
 \omega &= K_1 + \sigma \text{sen}\tau [\delta\hat{\psi} + 2Y(1 - \delta)] \\
 &\quad - \frac{\sigma}{R} \left\{ (1 + \cos\tau) M_+ \left( \frac{X-1}{X+1} \right)^{1-t} \exp(-2\delta\hat{\psi}) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \cos\tau) M_- \left( \frac{X-1}{X+1} \right)^{t-1} \exp(2\delta\hat{\psi}) \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{sen}\tau [X(\lambda^2 - \nu^2)(1 - Y^2) + Y(1 - \lambda^2\nu^2)(X^2 - 1)] \right\} \\
 \exp(2\gamma) &= K_2 \exp(2\delta^2\hat{\gamma}) \frac{R}{X^2 - 1}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 R &= (X^2 - 1)(1 - \lambda\nu)^2 - (1 - Y^2)(\lambda + \nu)^2 \\
 L_{\pm} &= (1 - \lambda\nu)[(X \pm 1)^2 - \lambda\nu(X \mp 1)^2] \\
 &\quad + (\lambda + \nu)[\lambda(1 \mp Y)^2 + \nu(1 \pm Y)^2] \\
 M_{\pm} &= (X^2 - 1)(1 - \lambda\nu)[\lambda + \nu \mp Y(\lambda - \nu)] \\
 &\quad + (1 - Y^2)(\lambda + \nu)[1 - \lambda\nu \pm X(1 - \lambda\nu)] \\
 N_{\pm} &= (\lambda + \nu)(1 \pm \lambda\nu)
 \end{aligned}$$

y

$$\dot{p} = -2(1 - Y^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} q_n [P_n(Y)]_Y [Q_{n+1}(X) - Q_{n-1}(X)]$$

$$\dot{\gamma} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} q_m q_n \Gamma^{mn}$$

$\dot{p}$  es la solución asintóticamente plana de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{p}_X = -2(1 - Y^2) \sum_{n=1}^{\infty} q_n P'_n Q_n$$

$$\dot{p}_Y = 2(X^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} q_n P_n Q'_n$$

$$P'_n = \frac{dP_n}{dX}, \quad Q'_n = \frac{dQ_n}{dY}$$

con  $K_1$  y  $K_2$  constantes de integración y  $\tau$  el parámetro de Ehlers que pueden ser expresados en términos de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y garantizan que la solución sea asintóticamente plana.

### (iii) Casos especiales

Aunque la forma explícita de la métrica encontrada es muy complicada, se puede obtener cierta información de su significado físico estudiando los casos especiales contenidos en ésta. Esta métrica tiene los siguientes parámetros independientes:

- (i)  $q_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  : Ellos vienen de la semilla solución y determinan los multipolos Newtonianos
- (ii)  $\delta$  : El parámetro Zipoy-Voorhees que fue introducido en la semilla solución.
- (iii)  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  : Estos parámetros fueron introducidos por la transformación HKX.

Además la métrica contiene las siguientes constantes

- (iv)  $K_1$  y  $K_2$  : Son constantes de integración. Ellas pueden ser expresadas en términos de los parámetros independientes a partir de la condición de ser asintóticamente plana.
- (v)  $\tau$  : Este parámetro fue introducido por la transformación de Ehlers del original potencial de Ernst. Esto garantiza junto con  $K_1$  y  $K_2$  que la solución es asintóticamente plana.
- (vi)  $\sigma$  : Esta constante fue introducida de la transformación de coordenadas esféricas a coordenadas esféricas prolatas.

Dando valores apropiados a este conjunto de parámetros independientes y constantes podemos recobrar casos especiales ya conocidos:

1.- Si los parámetros independientes toman los valores

$$q_0 = 1, \quad q_k = 0, \quad (k > 0) \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = r = 0, \quad K_2 = 1, \quad \sigma = m$$

recobramos la métrica de Schwarzschild

2.- Si los parámetros toman los valores

$$q_0 = 1, \quad q_k = 0, \quad (k > 0), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = r = 0, \quad K_2 = 1, \quad \sigma = m$$

recobramos la métrica de Zipoy-Voorhees

3.- Si los parámetros toman los valores

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 0, \quad q_2 \neq 0, \quad q_k = 0 (k > 2), \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = r = 0 \quad K_2 = 1, \quad \sigma = m$$

recobramos la métrica Erez-Rosen

4.- Si queremos recobrar la generalización de la métrica Erez-Rosen con todos sus momentos multipolares, los parámetros independientes deben tomar los valores

$$\delta = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = r = 0, \quad K_2 = 1, \quad \sigma = m$$

Todas estas métricas pertenecen a la clase de soluciones estáticas en vacío. Esto es debido a que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , es decir, el potencial de Ernst es real

$$E = \exp\left[2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} q_n P_n(Y) Q_n(X)\right]$$

Los casos estacionarios contenidos en esta métrica son

5.- La métrica de Kerr, al tomar los parámetros independientes los valores

$$q_0 = 1, \quad q_k = \Phi, \quad (k > 0), \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{a}{\sigma}, \quad \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = -2a, \quad K_2 = 1, \quad \text{sen } \tau = -\frac{a}{m}, \quad \text{cos } \tau = \frac{\sigma}{m}, \quad \sigma^2 = m^2 - a^2$$

Aquí  $m$  denota la masa y  $a$  el momento angular por unidad de masa

6.- La métrica de Kerr-NUT, al tomar los parámetros independientes

$$q_0 = 1, \quad q_k = 0, \quad (k > 0), \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = a - a_2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}[a \pm (a^2 - 8\sigma^2)^{\frac{1}{2}}]$$

y las constantes

$$K_1 = -2a, \quad K_2 = 1, \quad \sigma s^2 = m^2 - a^2 + b^2$$

$$\cos r = \frac{\pm b(a^2 - 8\sigma^2)^{\frac{1}{2}} - 3m\sigma}{m^2 + b^2}$$

$$\operatorname{sen} r = \frac{\pm 3\sigma \cos r + m}{m^2 + b^2}$$

Aquí  $b$  es el parámetro de NUT.

7.- Métrica de Kerr con momento cuadrupolar masa arbitrario, al tomar los parámetros independientes

$$q_1 = 0, \quad q_2 = q, \quad q_k = 0 \quad (k > 2), \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = \frac{a}{\sigma}, \quad \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = -2a, \quad K_2 = 1, \quad \operatorname{sen} r = -\frac{a}{m}, \quad \cos r = \frac{\sigma}{m}, \quad \sigma^2 = m^2 - a^2$$

8.- La métrica de Kerr con todos sus momentos multipolares, con los parámetros independientes

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 0, \quad \delta = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{a}{\sigma}, \quad \alpha_2 = 0$$

y las constantes

$$K_1 = -2a, \quad K_2 = 1, \quad \operatorname{sen} r = -\frac{a}{m}, \quad \cos r = \frac{\sigma}{m}, \quad \sigma^2 = m^2 - a^2$$

De los casos anteriores se puede concluir que la métrica estática más general contenida en la nueva solución es la generalización de la métrica Erez-Rosen con todos sus momentos multipolares masa. Por otra parte, la métrica más general estacionaria y que contiene únicamente momento monopolar masa Newtoniano, contenida en la nueva solución es la métrica Kerr-NUT. De todo esto se concluye que la nueva solución puede ser interpretada como una superposición no lineal de la métrica de Kerr-NUT con la semilla solución estática que contiene todos los momentos multipolares masa en el límite Newtoniano.

(iv) Cálculo de los Momentos Multipolares Geroch-Hansen

En 1986 Hoenselaers[14] encontró una relación entre el potencial de Ernst y sus momentos multipolares Geroch-Hansen. En esta parte del trabajo se presenta esta relación y algunas fórmulas de recurrencia que son muy útiles durante los cálculos explícitos.

Consideremos el potencial de Ernst  $\xi$  en coordenadas esferoidales prolatas, en el eje de simetría ( $Y = 1$ ). Introduciendo la coordenada  $z$  ( $z = \sigma XY$ ), el punto en el infinito  $A$  está determinado por  $z \rightarrow \infty$  o  $\bar{z} = 0$  ( $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ). Definiendo el potencial  $\bar{\xi}$

$$\bar{\xi}(\bar{z}, 1) = \frac{1}{z} \xi(z, 1) \quad [2.8.54]$$

los momentos multipolares Geroch-Hansen para soluciones estacionarias, estáticas y axisimétricas son determinados por

$$M_l = Re \left( \frac{1}{l!} \frac{d^l \bar{\xi}(\bar{z}, 1)}{d\bar{z}^l} \Big|_{\bar{z}=0} + d_l(m_{l-1}, m_{l-2}, \dots, m_0) \right) \quad [2.8.55]$$

y

$$J_l = Im \left( \frac{1}{l!} \frac{d^l \bar{\xi}(\bar{z}, 1)}{d\bar{z}^l} \Big|_{\bar{z}=0} + d_l(m_{l-1}, m_{l-2}, \dots, m_0) \right) \quad [2.8.56]$$

el término  $d_l$  desaparece para  $l < 4$ . Para  $l \geq 4$ ,  $d_l$  tiene que ser calculado usando la definición original. Algunas componentes de  $d_l$  son conocidas explícitamente (Hoenselaers, 1976) en términos de  $m_i$

$$d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

$$d_4 = \frac{1}{7} m_0^* (m_1^2 - m_2 m_0)$$

$$d_5 = \frac{1}{3} = m_0^* (m_2 m_1 - m_3 m_0) + \frac{1}{21} m_1^* (m_2^2 - m_2 m_0)$$

$$d_6 = \frac{2}{7} m_0^* (4m_2^2 + 5m_3 m_1 - 9m_4 m_0) + \frac{4}{33} m_1^* (m_2 m_1 - m_3 m_0) \\ + \frac{1}{231} (5m_2^2 - 7m_0^* m_1^*) (m_1^2 - m_2 m_0)$$

$$d_7 = \frac{2}{143} m_0^* (38m_3 m_2 + 17m_4 m_1 - 55m_5 m_0)$$

$$+ \frac{3}{243} m_0^* m_1^* (m_1^3 - 6m_2 m_1 m_0 + 5m_3 m_0^2)$$

$$+ \frac{2}{429} m_1^* (22m_2^2 + 23m_3 m_1 - 45m_4 m_0)$$

$$+ \frac{25}{429} m_2^* (m_2 m_1 - m_3 m_0)$$

$$+ \frac{5}{429} (m_3^2 - 2m_0 m_0^* m_1^*) (m_1^2 - m_2 m_0)$$

con

$$m_l = \frac{1}{l!} \frac{d^l \bar{\xi}(\bar{z}, 1)}{d\bar{z}^l} \Big|_{\bar{z}=0} \quad [2.8.57]$$

y "\*" denota conjugación compleja.

Así el cálculo de los momentos multipolares relativistas es equivalente al cálculo de  $m_i$ .

Expandiendo el potencial  $\xi$  en potencias de  $\bar{z}$

$$\xi(\bar{z}, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k \bar{\xi}(\bar{z}, 1)}{d\bar{z}^k} \Big|_{\bar{z}=0} \frac{\bar{z}^k}{k!} \quad [2.8.58]$$

utilizando [2.8.54] y [2.8.57]

$$m_l = \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \xi(\bar{z}, 1)}{d\bar{z}^l} \Big|_{\bar{z}=0}$$

introduciendo E obtenida de

$$\xi = \frac{1-E}{1+E} \quad [2.8.60]$$

dentro de [2.8.59], se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia para el cálculo de  $m_l$

$$m_l = -\frac{h_{l+1}}{(l+1)!} \Big|_{\bar{z}=1, \bar{z}=0} \quad [2.8.61]$$

Aquí

$$h_1 = \frac{1}{2E} \frac{dE}{d\bar{z}} \quad [2.8.62]$$

y

$$h_l = \frac{dh_{l-1}}{d\bar{z}} + 2\xi h_l h_{l-1} \quad \text{para } l \geq 2 \quad [2.8.63]$$

Para calcular los momentos multipolares de una métrica estacionaria, se lleva a cabo el procedimiento siguiente

- (i) Calcular el potencial de Ernst E y  $\xi$  utilizando [2.8.60]
- (ii) Calcular las cantidades  $m_l$  usando la fórmula de recurrencia [2.8.61]
- (iii) Calcular los multipolos de masa y los multipolos de la distribución de momento angular utilizando

$$M_l = \text{Re}(m_l + d_l) \quad [2.8.64]$$

y

$$J_l = \text{Im}(m_l + d_l) \quad [2.8.65]$$

El potencial de Ernst de una solución axisimétrica estática es real y está dado por

$$E = \exp(2\psi) \quad [2.8.66]$$

Esto significa que los multipolos de la distribución del momento angular desaparecen y los multipolos masa son dados por

$$M_l = d_l - \frac{h_{l+1}}{(l+1)!} \Big|_{\bar{z}=1, \bar{z}=0} \quad [2.8.67]$$

con

$$h_1 = \frac{d\psi}{d\bar{z}} \quad [2.8.68]$$

$$h_l = \frac{dh_{l-1}}{d\bar{z}} + 2\xi h_{l-1} \frac{d\psi}{d\bar{z}} \quad [2.8.69]$$

El comportamiento de los momentos multipolares bajo la acción de una transformación de Ehlers  $\xi \rightarrow \xi' = e^{i\alpha} \xi$  es el siguiente. Escribimos a  $\xi$  como

$$\xi = \text{Re}(\xi) + i \text{Im}(\xi) \quad [2.8.70]$$

sustituyendo [2.8.70] en [2.8.58] puede ser mostrado que  $m_l$  se transforma de acuerdo a

$$\text{Re}(m'_l) = \text{Re}(m_l) \cos \alpha - \text{Im}(m_l) \sin \alpha \quad [2.8.71]$$

$$\text{Im}(m'_l) = \text{Re}(m_l) \sin \alpha + \text{Im}(m_l) \cos \alpha, \quad (l \geq 0) \quad [2.8.72]$$

puesto que el término  $d_l$ , desaparece para  $l \leq 3$ . Y de la ecuación [2.8.64] y [2.8.65]

$$M'_l = M_l \cos \alpha - J_l \sin \alpha \quad [2.8.73]$$

$$J'_l = M_l \sin \alpha + J_l \cos \alpha, \quad l \leq 3 \quad [2.8.74]$$

estas fórmulas no son válidas para  $l > 3$  puesto que la combinación de la forma  $m_{l-2}, m_{l-3}, \dots$  tiene diferente comportamiento bajo una transformación de Ehlers.

## (v) Cálculo de Momentos Multipolares [14]

Para investigar los parámetros físicos contenidos en la nueva solución, se calculan los momentos multipolares. Para llevar a cabo este trabajo es necesario utilizar las fórmulas de recurrencia [2.8.61], [2.8.62], [2.8.63], [2.8.64], y [2.8.65] derivadas en la sección pasada. Primero se investiga el valor del potencial de Ernst en el eje de simetría ( $Y=1$ )

$$\beta_{n\pm}(X, 1) = \mp Q_n(X) \quad [2.8.75]$$

y las ecuaciones para  $\lambda$  y  $\mu$  toman la forma

$$\lambda = \alpha_1 \left( \frac{X+1}{X-1} \right)^{s-1} e^{-2i\psi}, \quad \mu = \alpha_2 \left( \frac{X+1}{X-1} \right)^{s-1} e^{2i\psi} \quad [2.8.76]$$

introduciendo el valor de  $\bar{z}$  en la ecuación  $E = \exp(2\delta\psi) \frac{E}{z^2}$  y utilizando las ecuaciones [2.8.76], uno obtiene el potencial a lo largo del eje de simetría

$$E = \frac{F_{\pm} e^{2i\psi} + 2i\alpha_1 \sigma G_{-}}{F_{-} + 2i\alpha_2 \sigma G_{+} e^{2i\psi}} \quad [2.8.77]$$

donde

$$F_{\pm} = 1 - \sigma^2 \bar{z}^2 - \alpha_1 \alpha_2 (1 \pm \sigma \bar{z})^2 \quad [2.8.78]$$

$$G_{\pm} = \bar{z} (1 \pm \sigma \bar{z}) \quad [2.8.79]$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} q_n Q_n \left( \frac{1}{\sigma \bar{z}} \right), \quad q_0 = 1 \quad [2.8.80]$$

con las fórmulas de recurrencia y con los resultados obtenidos anteriormente podemos calcular los momentos multipolares

$$M_0 = \sigma \left( \delta - 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \right)$$

$$M_1 = \sigma^2 \left[ \frac{-1}{3} \delta q_1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} M_2 = \sigma^3 & \left\{ \frac{2}{15} \delta q_2 - \frac{1}{3} \delta^3 - 2\delta^3 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \right. \\ & + \delta \left[ \frac{1}{3} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (-2 - 2\alpha_1 \alpha_2 + 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2) - 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)^3} \right] \\ & \left. + 2 \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1 \alpha_2 (1 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2)}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)} \right\} \quad [2.8.81] \end{aligned}$$

$$J_0 = \sigma \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$J_1 = \sigma^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)^2} [1 - 3\alpha_1 \alpha_2 - 2\delta(1 - \alpha_1 \alpha_2)]$$

$$\begin{aligned} J_2 = \frac{\sigma^3}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & \left[ \frac{2}{3} q_1 \delta (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) (1 - \delta)^2 \right] \\ & - \frac{\sigma^3}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)^3} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 J_3 = & -\frac{\sigma^4}{1-\alpha_1\alpha_2} \left\{ \frac{4}{15}q_2\delta(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{2}{3}q_1\delta(\delta-1)(\alpha_2-\alpha_1) \right. \\
 & - \frac{2}{3}\delta^3(\alpha_1+\alpha_2) - \delta^2 \frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1-\alpha_1\alpha_2)^2} (5\alpha_1^3\alpha_2^3 - 9\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2 - 2) \\
 & - \frac{4}{3}\delta \left[ 3 \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{(1-\alpha_1\alpha_2)^2} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1-\alpha_1\alpha_2)^2} (7\alpha_1^3\alpha_2^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2 - 2) \right] \\
 & \left. - \frac{1}{(1-\alpha_1\alpha_2)^2} [(\alpha_1+\alpha_2)(5\alpha_1^3\alpha_2^3 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 1) + (\alpha_1^3 + \alpha_2^3)(5\alpha_1\alpha_2 - 3)] \right\}
 \end{aligned}$$

Los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  por la transformación HKX están contenidas en todas las expresiones de los momentos multipolares. Estos parámetros determinan la rotación y la masa total de la fuente. La existencia de momentos masas impares y momentos pares de la distribución de momento angular muestra que la métrica es axisimétrica con respecto al plano ecuatorial ( $Y=0$ )

De las ecuaciones [2.8.73] y [2.8.74], es posible notar que el parámetro  $r$  afecta los momentos multipolares por una rotación en la siguiente forma

$$M'_n = M_n \cos r - J_n \sin r \quad [2.8.82]$$

$$J'_n = M_n \sin r + J_n \cos r, \quad \text{para } n \leq 3 \quad [2.8.83]$$

consideremos el siguiente caso especial

$$\delta = q_0 = 1, \quad q_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad q_k \neq 0, \quad (k \geq 2)$$

esto significa que estamos considerando el campo gravitacional de un cuerpo con todos sus momentos multipolares Newtonianos y el parámetro  $\alpha_1$  de la transformación HKX. Escogiendo

$$\alpha_1 = \tan r = -\frac{a}{\sigma}, \quad \sigma^2 = m^2 - a^2$$

entonces [2.8.82] y [2.8.83] conducen a

$$M'_0 = m$$

$$M'_1 = m$$

$$M'_2 = \frac{2}{15}m^3 \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^2 q_2 - ma^2,$$

$$M'_3 = \frac{2}{15}m^3 \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^3 \left[ q_2 a^2 - \frac{3}{7}m^3 q_3 \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^2 \right]$$

$$J'_0 = 0$$

$$J'_1 = ma$$

$$J'_2 = -\frac{2}{15}a \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^3 m^3 q_2$$

$$J'_3 = -ma^3 + \frac{2}{15}m^3 a \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right) \left(2q_2 + \frac{3}{7}q_3\right)$$

De las expresiones del momento angular el parámetro  $a$  determina la rotación de la fuente, es decir  $a$  es el parámetro de Kerr. Los momentos multipolares anteriores representan, en general, una superposición no lineal de los momentos multipolares de la semilla métrica (Erez-Rosen con todos los multipolos Newtonianos) con los de la métrica de Kerr. Una propiedad particular de estos últimos momentos multipolares, es que en el caso límite  $m^2 = |a|^2$  corresponde a la métrica de Kerr independiente de los valores  $q_2, q_3, q_4, \dots$

## SOLUCIONES INTERIORES

## 3.1 Resumen

Encontrar soluciones interiores a las ecuaciones de Einstein que tengan un significado físico relevante no es tarea fácil. Una de las primeras soluciones encontradas es la solución interior de Schwarzschild, que nos permite describir el interior de una distribución de materia de fluido perfecto con una simetría esférica, estática, y con densidad constante. Para el caso de una distribución de materia rotando, estacionaria y axisimétrica, la única solución conocida que describe el interior de este tipo de objetos es la solución encontrada por Wahlquist[16] y generalizada por él mismo utilizando el formalismo de Diadas en 1991[9]

En este capítulo nos proponemos presentar una revisión de las soluciones interiores de las ecuaciones de Einstein conocidas, y estudiar los parámetros físicos velocidad, velocidad de rotación, aceleración, velocidad de expansión, densidad y presión que se obtienen a partir de éstas.

### 3.2 Termodinámica

Los sistemas termodinámicos pueden ser altamente complicados; por ejemplo, un gran número de procesos termodinámicos pueden estar sucediendo simultáneamente en el interior de una estrella. Nosotros explicaremos las ideas básicas, limitando nuestras observaciones a sistemas simples.

Durante los procesos termodinámicos ciertos elementos de la materia, con sus propiedades se conservan, por ejemplo, en moléculas termodinámicas no relativistas o átomos y sus masas. En la transformación de una estrella y durante sus procesos nucleares, los bariones con sus masas en reposo son conservados en su lugar. Es por este motivo que nosotros tenemos que relacionar todas las cantidades a estos bariones. Si, por ejemplo, nosotros elegimos un elemento de volumen del sistema, entonces nosotros tenemos que tomar como cuadrivelocidad de este elemento a  $u^i$  que será el promedio de velocidad bariónica. El flujo (movimiento) del sistema será caracterizado por una cuadrivelocidad

$$u^i = u^i(x^\alpha), \quad u^i u_i = -c^2 \quad [3.2.1]$$

Para obtener las ecuaciones básicas de termodinámica primero se va a un sistema de referencia, local en reposo

$$u^i = (0, 0, 0, c) \quad [3.2.2]$$

del elemento de volumen bajo consideración y observando este elemento de volumen como un sistema que existe en equilibrio (naturalmente está interactuando con su alrededor, así que el sistema no está necesariamente en equilibrio); esto es, uno introduce para este elemento de volumen las variables de estado fundamentales de la termodinámica

$n$ =número de densidad bariónica,  $s$ =entropía por masa bariónica  
 $\rho$ =densidad de masa bariónica,  $p$ =presión isotrópica  
 $T$ =temperatura,  $\bar{\mu}$ =potencial químico  
 $u$ =energía interna por unidad de masa,  $f$ =energía libre por unidad de masa

Densidad aquí siempre significa, por volumen tres dimensional en el sistema local en reposo, La densidad de entropía, por ejemplo, tiene que ser dada por  $s\rho$ . Existen relaciones entre las variables de estado que nos dicen que sólo dos de ellas son realmente independientes, del conocimiento de la entropía como función de la energía y la densidad, o del volumen específico  $v = \frac{1}{\rho}$

$$s = s(u, v) \quad [3.2.3]$$

uno puede calcular las otras cantidades, por ejemplo,

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T} \quad [3.2.4a]$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T} \quad [3.2.4b]$$

$$f = u - Ts \quad [3.2.4c]$$

Para la interacción del elemento de volumen con su alrededor nosotros tenemos ecuaciones de balance. Estas son: La ley de conservación del número bariónico está dada por

$$(\rho u^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad [3.2.5]$$

La ecuación de balance para la energía y momento, formulada como

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad [3.2.6]$$

con  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento y la ecuación de balance para la entropía

$$s^\alpha_{;\alpha} = \sigma \geq 0 \quad [3.2.7]$$

que nos dice que la densidad de producción de entropía  $\sigma$  es siempre positiva o cero. Naturalmente toman significado físico sólo si la entropía de densidad de corriente  $s^\alpha$  y el tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  son relacionados uno con otro y con las cantidades termodinámicas antes mencionadas.

Esto puede llevarse a cabo como sigue. Usando el tensor proyección

$$h_{\lambda\beta} = g_{\lambda\beta} + \frac{u_\lambda u_\beta}{c^2} \quad [3.2.8]$$

para descomponer el tensor energía-momento en una componente paralela y una perpendicular a la cuadriv-  
elocidad

$$T_{\lambda\beta} = \mu u_\lambda u_\beta + p h_{\lambda\beta} + \frac{(u_\lambda q_\beta + q_\lambda u_\beta)}{c^2} + \pi_{\lambda\beta} \quad [3.2.9a]$$

$$q_\lambda u^\lambda = 0, \quad \pi_{\lambda\beta} u^\lambda = 0, \quad \pi^\lambda_\lambda = 0 \quad [3.2.9b]$$

El coeficiente de  $h_{\lambda\beta}$  es la presión isotrópica  $p$ , la energía interna por unidad de masa está relacionada a la densidad  $\mu$  en el sistema en reposo de la materia por

$$\mu = \rho s u^\gamma + \frac{q^\gamma}{T} \quad [3.2.10]$$

y la corriente de calor  $q^\gamma$  (densidad del momento de corriente en el sistema de referencia en reposo) que va en la entropía de corriente

$$s^\gamma = \rho s u^\gamma + \frac{q^\gamma}{T} \quad [3.2.11]$$

La ecuación [3.2.11] nos dice que el flujo de entropía es transportado por el flujo de calor (es la generalización de  $dS = \frac{dq}{T}$ ).

Nosotros queremos ahora obtener una expresión explícita para la densidad de producción de entropía  $\sigma$ . Usando la ecuación [3.2.5] y la ecuación

$$s_{;\alpha} u^\alpha = \frac{1}{T} \left( \frac{\mu c^2}{\rho} \right)_{;\alpha} u^\alpha + \frac{p}{T} \left( \frac{1}{\rho} \right)_{;\alpha} u^\alpha = \frac{1}{\rho T} [(p + \nu c^2) u^\gamma_{;\gamma} + \nu_{;\alpha} u^\alpha c^2] \quad [3.2.12]$$

que resulta de las ecuaciones [3.2.3], [3.2.4] y [3.2.10], se obtiene

$$\sigma = s^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{T} [(p + \mu c^2) u^\gamma_{;\gamma} + \mu_{;\alpha} u^\alpha c^2] + \left( \frac{q^\alpha}{T} \right)_{;\alpha} \quad [3.2.13]$$

puesto que el término entre paréntesis cuadrados puede ser escrito en la forma

$$(p + \mu c^2) u^\gamma_{;\gamma} + \mu_{;\alpha} u^\alpha c^2 = (\mu u_\lambda u_\beta + p h_{\lambda\beta})^{;\alpha} u^\alpha \quad [3.2.14]$$

y la divergencia del tensor energía-momento desaparece, [3.2.13] implica la relación

$$\sigma = [T^{\alpha\lambda} - \mu u^\lambda u^\alpha - p h^{\alpha\lambda} - p h^{\alpha\lambda}]_{;\lambda} \frac{u^\alpha}{T} + \left(\frac{q^\alpha}{T}\right)_{;\alpha} \quad [3.2.15]$$

que teniendo en cuenta la definición [3.2.9b] de  $q^\alpha$

$$\sigma = -(T^{\lambda\alpha} - \mu u^\lambda u^\alpha - p h^{\lambda\alpha}) \left(\frac{u^\lambda}{T}\right)_{;\alpha} \quad [3.2.16]$$

En termodinámica irreversible uno puede satisfacer el requerimiento  $\sigma \geq 0$  en muchos casos escribiendo el lado derecho de [3.2.16] como una forma cuadrática definida positiva, esto es, haciendo la suposición de la linealidad de las ecuaciones fenomenológicas

En muchos casos uno puede ignorar los procesos irreversibles. Si el sistema está determinado por sólo dos cantidades de estado en el sentido de [3.2.3], tendremos irreversibilidad exacta ( $\sigma = 0$ ), esto sólo es posible en ciertas métricas (aquellas en que la derivada de Lie a lo largo de  $\frac{u^\alpha}{T}$  desaparece), o para las cuales el tensor energía-momento tiene la forma

$$T^{\lambda\alpha} = \mu u^\lambda u^\alpha + p h^{\lambda\alpha} = \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) u^\lambda u^\alpha + p g^{\lambda\alpha} \quad [3.2.17]$$

este medio es llamado fluido perfecto y cuando  $p = 0$  polvo

### 3.3 Interior Estelar

Considerar el problema de descripción de objetos astrofísicos realistas, es decir, saber de que tipo de materia están constituidos y cual es su simetría; es un problema muy complicado. Sin embargo, considerar que el interior de estos objetos astrofísicos está constituido por un fluido perfecto y que tienen en primera aproximación una simetría esférica, es una aceptable aproximación. Bajo estas consideraciones, un modelo aceptable que describa el interior de objetos astrofísicos se puede construir utilizando los parámetros de un fluido perfecto

- (i)  $\rho(r)$  = densidad de masa-energía en un marco de referencia en reposo en el fluido
- (ii)  $p(r)$  = presión isotrópica en un marco de referencia en reposo en el fluido
- (iii)  $n(r)$  = densidad numérica de bariones en un marco de referencia en reposo en el fluido
- (iv)  $u^{\mu}(r)$  = 4-velocidad del fluido
- (v)  $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}$  = Tensor de energía-momento del fluido

Para que el objeto astrofísico sea estático, cada elemento del fluido tiene que permanecer siempre en reposo en el sistema coordenado estático, es decir, cada elemento del fluido tiene que moverse a lo largo de la línea mundo de constantes  $r, \theta, \phi$  (dada la consideración de simetría esférica lo más razonable es trabajar en estas coordenadas), y en este caso la cuadrivelocidad tiene las componentes

$$u^r = \frac{dr}{ds} = 0 \quad [3.3.1a]$$

$$u^{\theta} = \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad [3.3.1b]$$

$$u^{\phi} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad [3.3.1c]$$

con  $ds$  el elemento de línea en coordenadas esféricas y además normalizada como

$$u^{\mu}u_{\mu} = -1 \quad [3.3.2]$$

Utilizando la métrica para simetría esférica

$$ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r\sin^2\theta d\phi^2 \quad [3.3.3]$$

tenemos

$$\begin{aligned} u^{\mu}u_{\nu} &= g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \\ &= g_{tt}u^t u^t \\ &= -e^{2\phi}u^t u^t \end{aligned}$$

esto implica, utilizando [3.3.2] que

$$u^t = e^{-\phi}$$

y el tensor de energía-momento tiene las componentes

$$T^{00} = \rho e^{-2\phi} \quad [3.3.4a]$$

$$T^{rr} = p e^{-2\lambda} \quad [3.3.4b]$$

$$T^{\theta\theta} = p r^{-2} \quad [3.3.4c]$$

$$T^{\phi\phi} = p r^{-2} \sin^{-2}\theta \quad [3.3.4d]$$

$$T^{\mu\nu} = 0, \text{ si } \alpha \neq \beta$$

por tanto la estructura de la estrella está definida para las funciones  $\Phi(r)$ ,  $\Lambda(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $n(r)$ . Estas funciones son determinadas con la ayuda de las ecuaciones de Einstein, por la ley de conservación de energía-momento y por una ecuación de estado, que para un fluido simple en equilibrio termodinámico local siempre existe una relación de la forma

$$p = p(\rho, S) \quad [3.3.5]$$

que expresa la presión en términos de la densidad de energía y la entropía específica. Uno frecuentemente idealiza con situaciones en la cuales la entropía puede ser considerada como constante (en particular, tan pequeña que se puede despreciar), así uno tiene la relación

$$p = p(\rho) \quad [3.3.6]$$

esta relación es diferente para diferentes formas funcionales.

De la ley de conservación de energía

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

tenemos cuatro ecuaciones, una para cada valor del parámetro libre  $\mu$ . De la simetría pedida tenemos

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

lo que nos lleva a obtener la ecuación

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} \quad [3.3.7]$$

esta ecuación nos dice que gradiente de presión es necesario para dejar el fluido estático en el campo gravitacional, cuyos efectos dependen de  $\frac{d\Phi}{dr}$ . De las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

tenemos

$$m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda})$$

$\Rightarrow$

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \quad [3.3.8]$$

además

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad [3.3.9]$$

y con

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \Phi'$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda}$$

podemos obtener

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]} \quad [3.3.10]$$

De lo anterior podemos concluir que si uno tiene una ecuación de estado [3.3.6], entonces con [3.3.6], [3.3.7], [3.3.9], y [3.3.10] tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro funciones desconocidas  $\Phi$ ,  $m$ ,  $p$ ,  $\rho$ , es decir se determina el sistema.

Si dividimos [3.3.7] entre  $(\rho + p)$ , e igualamos con [3.3.10] tenemos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m(r))} \quad [3.3.11]$$

La ecuación [3.3.11] es llamada ecuación Oppenheimer-Volkov(O-V).

En una situación Newtoniana

$$p \ll \rho$$

$$\Rightarrow$$

$$4\pi r^3 p \ll m$$

la métrica que describe este espacio tiene que ser muy cercana a la plana, por tanto, la ecuación [3.3.8] requiere que  $m \ll r$  y la ecuación [3.3.11] toma la forma

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2} \quad [3.3.12]$$



### 3.4 Soluciones Interiores Exactas

En teoría Newtoniana [3.3.9] y [3.3.12] son muy difíciles de resolver analíticamente para una ecuación de estado dada, su contra parte relativista es todavía más. Por tal motivo encontrar soluciones exactas es muy complicado. Existen dos soluciones interiores exactas para ecuaciones relativistas, una debida a Schwarzschild y otra más reciente debida a Buchdahl(1981)[40]. A continuación una revisión general de ambas soluciones.

#### (i) Solución Interior de Buchdahl

Buchdahl en 1981 encontró una solución para la ecuación de estado

$$\rho = 12(Kp)^{\frac{1}{2}} - 5p \quad [3.4.1]$$

con  $k$  una constante arbitraria

Esta ecuación no tiene bases físicas particulares pero tiene dos propiedades importantes

- (a) Puede ser hecha causal en todas partes de la estrella demandando que la rapidez del sonido local  $(\frac{dp}{d\rho})^{\frac{1}{2}}$  sea menor que 1  
 (b) Para  $p$  pequeñas se reduce a

$$\rho = 12(Kp)^{\frac{1}{2}}$$

que en teoría Newtoniana de estructura estelar es llamada un  $n=1$  politropo. Entonces  $n=1$  politropo es uno de los pocos sistemas Newtonianos resueltos de forma exacta.

Los requerimientos de causalidad demandan

$$p < K, \quad \rho < 7K$$

y tenemos una diferente coordenada radial  $r'$  definida en términos de la usual por.

$$r(r') = r' \left[ \frac{1-\beta+u(r')}{1-2\beta} \right]$$

con  $\beta = \text{cte}$ . En términos de las funciones métricas de la solución de Schwarzschild, para  $Ar' \ll \pi$

$$e^{2\phi} = (1-2\beta)(1-\beta-u)(1-\beta+u)^{-1}$$

$$e^{2\Lambda} = (1-2\beta)(1-\beta+u)(1-\beta-u)^{-1}(1-\beta+\beta \cos Ar')^2)^{-1}$$

$$p(r) = A^2(1-2\beta)u^2[8\pi(1-\beta+u)^2]^{-1}$$

$$\rho(r) = 2A^2(1-2\beta)u(1-\beta-\frac{3}{2}u)[8\pi(1-\beta+u)^2]^{-1}$$

La superficie  $p=0$  es donde  $u=0$ , es decir, en  $r' = \frac{\pi}{A} = R'$ , en este lugar

$$e^{2\phi} = e^{-2\Lambda} = 1 - 2\beta$$

$$R = r(R') = \pi(1-\beta)(1-2\beta)^{-1} A^{-1}$$

y la masa de la estrella está dada por

$$M = \frac{\pi\beta(1-\beta)}{(1-2\beta)A} = \left[ \frac{\pi}{288K(1-2\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \beta(1-\beta)$$

## (ii) Solución Interior de Schwarzschild[5]

Ya en el capítulo anterior trabajamos con las ecuaciones de Einstein para el vacío, con las cuales se describía el campo gravitacional exterior generado por distribuciones finitas de materia con simetría axial, estacionaria y estática. Este tipo de distribuciones de materia es una buena aproximación a objetos astrofísicos.

Para poder describir el interior de este tipo de cuerpos, es necesario tener un modelo que los caracterize, lo que implica que tenemos que decir algo de su tensor de Energía-momento. Como una buena aproximación podemos considerar que el interior de estos cuerpos está constituido por un fluido perfecto, es decir el tensor energía momento que caracteriza la materia es el de un fluido perfecto y tiene la forma

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad [3.4.2]$$

En el caso de la solución interior de Schwarzschild tenemos una distribución de materia con simetría esférica y estática cuyo elemento de línea general es independiente del tiempo, y está dado por

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}c^2 dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad [3.4.3]$$

tomando un sistema de referencia que va con el fluido (la materia está en reposo en este sistema) la cuadriv-  
elocidad toma la forma

$$u^\mu = (e^{\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0)$$

con  $\mu$  y  $p$  son funciones únicamente del radio  $r$

Tomando las componentes del tensor de Ricci encontrados para la solución exterior de Schwarzschild

$$R_{11} = \frac{-\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} \quad [3.4.4a]$$

$$R_{44} = e^{\nu-\lambda} \left\{ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right\} \quad [3.4.4b]$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right] + 1 = \frac{R_{33}}{\sin^2\theta} \quad [3.4.4c]$$

$$R = R_n^n = -2e^{-\lambda} \left\{ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda}{r} + \frac{1}{r^2} \right\} \quad [3.4.4d]$$

y usando las ecuaciones de Einstein con un  $T^{\mu\nu}$  dado por [3.4.2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

tenemos

$$kp = e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} \quad [3.4.5a]$$

$$kp = e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu'}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right] \quad [3.4.5b]$$

$$-k\rho = e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} \quad [3.4.5c]$$

Las dos funciones métricas  $\lambda, \nu$  y  $p, \rho$  se determinan con las tres ecuaciones anteriores y una ecuación de estado

$$f(\rho, p) = 0 \quad [3.4.6]$$

con ayuda de la ley de conservación de energía integramos las ecuaciones [3.4.5] y utilizando que, para una distribución estática de materia y presión tenemos

$$\rho_{;\mu} u^\mu = 0 \quad [3.4.7a]$$

$$p_{;\mu} u^\mu = 0 \quad [3.4.7b]$$

$$u^\mu_{;\mu} = 0 \quad [3.4.7c]$$

Podemos encontrar el valor de las funciones métricas de la siguiente forma

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = [g^{\mu\nu} p + (\rho + p) u^\mu u^\nu]_{;\nu} = 0$$

$\Rightarrow$

$$p' + (\rho + p) u_{1,4} u^4 = p' - (\rho + p) \Gamma^4_{14} u^4 = 0$$

$\Rightarrow$

$$p' = -\frac{\nu'}{2} (\rho + p) \quad [3.4.8]$$

Ahora tomando [3.4.5c] tenemos

$$k\rho r^2 = -e^{-\lambda} [r\lambda' - 1] - 1$$

$$= -[e^{-\lambda} r]' - 1$$

$\Rightarrow$

$$[e^{-\lambda} r]' = k\rho r^2 - 1$$

integrando

$$e^{-\lambda} r = \int (k\rho r^2 - 1) dr$$

$$= \frac{1}{3} k\rho r^3 - r$$

$$= 2m(r) - r$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\lambda} = 2 \frac{m(r)}{r} - 1$$

para las siguientes funciones métricas, necesitamos fijar la ecuación de estado. Tomemos el caso más simple

$$\rho = cte \quad [3.4.9]$$

Esta ecuación de estado nos da modelo estelar aceptable;  $\rho = cte$  es una primera aproximación únicamente para estrellas en las cuales la presión no es muy grande. La solución estática con simetría esférica con la ecuación de estado [3.4.9] se llama solución interior de Schwarzschild.

Para

$$\rho = cte$$

tenemos

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - Ar^2 & [3.4.10] \\ A &= \frac{1}{3}k\rho \end{aligned}$$

y la ecuación [3.4.8] puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} (\rho + p)' &= \frac{-\nu'}{2}(\rho + p) \\ &\Rightarrow \\ \int \frac{(\rho + p)'}{(\rho + p)} &= - \int \frac{\nu'}{2} \\ &\Rightarrow \\ \ln(\rho + p) &= \frac{-\nu}{2} \\ &\Rightarrow \\ Be^{\frac{-\nu}{2}} &= \rho + p & [3.4.11] \end{aligned}$$

donde B es una constante de integración. Ahora eligiendo la combinación

$$\begin{aligned} k(\rho + p) &= k\rho + kp \\ &= e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} \\ &= e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right] \\ &= kB e^{\frac{-\nu}{2}} \\ &\Rightarrow \\ (1 - Ar^2) \left[ \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right] &= kB e^{\frac{-\nu}{2}} & [3.4.12] \end{aligned}$$

Sacando logaritmo natural a ambos lados de la igualdad [3.4.10], encontramos el valor de  $\lambda$ , la cual derivamos con respecto a  $\lambda$  obteniendo

$$\lambda' = \frac{-2Ar}{(1 - Ar^2)}$$

sustituyendo el valor de  $\lambda'$  en [3.4.12] y después de realizar un poco de álgebra obtenemos

$$[e^{\frac{\nu}{2}}(1 - Ar^2)^{-\frac{1}{2}}]' = \frac{kBr}{2(1 - Ar^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integrando esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\frac{\nu}{2}}(1 - Ar^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{kB}{A} \frac{1}{(1 - Ar^2)^{\frac{3}{2}}} + D \\ &\Rightarrow \\ e^{\frac{\nu}{2}} &= \frac{kB}{2A} + D(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}} & [3.4.13] \end{aligned}$$

B y D son constantes de integración, y son determinadas de las condiciones de unión con otra métrica

### 3.5 Campo Vectorial Espacial

En muchos problemas y soluciones en Relatividad General, tenemos un campo vectorial preferente. Su origen puede ser de una naturaleza más física (Campo de velocidades de una distribución de materia) o de una naturaleza matemática (vectores propios del tensor de Weyl, vectores de Killing). Uno puede aprovechar el conocimiento de las propiedades de cada vector para clasificar soluciones o para simplificar cálculos por la introducción de sistemas coordenados que son adaptados al campo vectorial preferente. Nosotros ahora estudiaremos un campo vectorial espacial y las coordenadas apropiadas a éste.

#### (i) Congruencias de Líneas Mundo

El siguiente campo vectorial tiene la propiedad que en todo punto se puede definir un vector. Una familia de líneas mundo (Congruencia de líneas mundo) es equivalente a cada campo vectorial  $a^n(x^i)$ , sus vectores tangentes tienen la dirección de  $a^n$ . Esta consideración no es única, puesto que no sólo  $a^n$  si no que también los puntos  $\lambda a^n$  están en dirección de la tangente. Tomando estas líneas mundo como líneas coordenadas uno obtiene una forma simple de los vectores  $a^n(x^i)$  (por ejemplo,  $x^0 = \text{cte}$ ,  $x^4 = \text{variable}$ ); el campo vectorial entonces tiene la forma normal

$$a^n(x^i) = (0, 0, 0, a^4(x^i)) \quad [3.5.1]$$

por medio de una transformación de coordenadas  $x'^\mu = x'^\mu(x^i)$  uno puede dejar  $a^4 = 1$ . Si  $a^n$  es la cuadrivelocidad de la materia, entonces en [3.5.1] nosotros estamos tratando con un sistema de coordenadas comóvil.

## (ii) Campos Hipersuperficie-Ortogonal

Un campo vectorial es llamado hipersuperficie-ortogonal (o sin rotación) si es posible construir una familia de superficies  $f(x^i) = \text{cte}$  a través de la congruencia de líneas mundo, y con ellas los vectores de campo son perpendiculares a las superficies (figura 3)

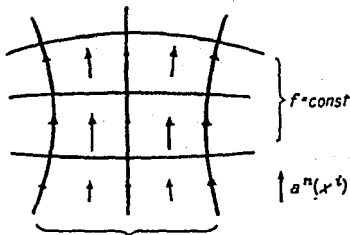


fig. 3 Congruencia de líneas mundo

El campo vectorial  $a^n$  por tanto apunta en dirección del gradiente a la familia de superficies

$$f_{,n} = \lambda a_n$$

y por tanto tiene que satisfacer la ecuación

$$a_{n,m} - a_{m,n} = \frac{\lambda_{,n}}{\lambda} a_m - \frac{\lambda_{,m}}{\lambda} a_n \quad [3.5.2]$$

y por tanto

$$\omega^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lmnr} a_{[m,n]} a_r = 0 \quad [3.5.3]$$

Un campo vectorial puede ser hipersuperficie-ortogonal sólo si su rotación definida en [3.5.3] desaparece. Esta condición es también suficiente: un campo vectorial es hipersuperficie ortogonal si la ecuación [3.5.3] vale.

Aunque las componentes contravariantes  $a^n$  de un vector pueden siempre ser transformadas a la forma normal [3.5.1], una correspondiente transformación de las componentes covariantes a la forma

$$a_n(x^i) = (0, 0, 0, a_4(x^i)) \quad [3.5.4]$$

es solo posible en una región de espacio si el campo vectorial es hipersuperficie ortogonal. Uno puede ver esto inmediatamente del hecho que [3.5.4] es equivalente a  $a_n = a_4 x^n$ . Si uno toma la superficie  $f = \text{cte}$  como superficie coordenada, entonces con tal que  $a^n$  no sea un vector nulo uno puede simultaneamente con [3.5.1] y [3.5.4] llevar la métrica a la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + g_{44} (dx^4)^2 \quad [3.5.5]$$

### (iii) Campo Vectorial Geodésico

Un campo vectorial es llamado geodésico cuando las líneas mundo  $x^i(s)$  de la congruencia asociada satisface la ecuación geodésica

$$t_{i;n}t^n = 0, \quad t^i = \frac{dx^i}{ds} \quad [3.5.6]$$

puesto que  $t^i = \lambda(x^m)a^i$  tiene que valer, esto implica que para el campo vectorial  $a^n$  que

$$a_{[m}a_{i];n}a^n = 0 \quad [3.5.7]$$

Esta condición es también suficiente; es decir, si esta se satisface, entonces uno puede siempre encontrar una función  $\lambda$  que, cuando multiplicado por  $a^i$ , da una  $t^i$  que satisface [3.5.6]

Si el campo vectorial es hipersuperficie ortogonal y geodésica, entonces de [3.5.1] y [3.5.4] se tiene la métrica [3.5.5]

$$a_{\alpha;n}a^n = 0 = \Gamma_{\alpha 4}^4 = \frac{1}{2}g_{44,\alpha}g^{44}, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$g_{44}$  depende únicamente de  $x^4$  y puede ser llevado a tomar los valores  $\pm$  utilizando una transformación de coordenadas  $x^{4'} = x^4(x^4)$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^4)dx^\alpha dx^\beta \pm (dx^4)^2 \quad [3.5.8]$$

### (iv) Campo Vectorial Covariantemente Constante

Un campo vectorial es covariantemente constante si sus derivadas covariantes desaparecen:

$$a_{i;n} = 0 \quad [3.5.9]$$

de la definición del tensor de curvatura se tiene

$$a^k R_{kinm} = 0 \quad [3.5.10]$$

El tensor de curvatura y con éste la métrica están limitados, si existe este campo vectorial.

Si  $a^i$  no es un vector nulo, entonces en la métrica [3.5.8] tenemos

$$a_{\alpha;\beta} = 0 = \Gamma_{\alpha\beta}^4$$

Esto es,  $g_{\alpha\beta}$  es independiente de  $x^4$ . El tensor de la curvatura extrínseca  $K_{\alpha\beta}$  de la superficie  $x^4 = \text{constante}$ , las fórmulas reducidas y la ecuación [3.5.10] conducen a

$$R_{4\beta\nu\mu}^{[4]} = 0, \quad R_{\alpha\beta\nu\mu}^{[3]} = R_{\alpha\beta\nu\mu}^{[4]}$$

### 3.6 Campo de Velocidades

Una de los más importantes ejemplos de un campo vectorial temporal (tipo tiempo) es el campo de velocidades  $u^i(x^n)$  de una distribución de materia. Las propiedades de este campo de velocidades se puede estudiar de manera más eficaz examinando la derivada covariante  $u_{i;n}$ . La idea consiste esencialmente en la descomposición de la derivada covariante en una parte simétrica, una parte simétrica sin traza, y su propia traza.

$$\begin{aligned}
 u_{i;n} &= -\frac{\dot{u}_i u_n}{c^2} + \omega_{in} + \sigma_{in} + \frac{\Theta h_{in}}{3} \\
 \dot{u}_i &= u_{i;n} u^n = \frac{D u_i}{D \tau}, \quad \dot{u}_i u^i = 0 \\
 \omega_{in} &= u_{[i;n]} + \frac{\dot{u}_{[i} u_{n]}}{c^2}, \quad \omega_{in} u^n = 0 \\
 \sigma_{in} &= u_{(i;n)} + \frac{\dot{u}_{(i} u_{n)}}{c^2} - \frac{\Theta h_{in}}{3}, \quad \sigma_{in} u^n = 0 \\
 \Theta &= u^i_{;i} \\
 h_{in} &= g_{in} + \frac{u_i u_n}{c^2} \\
 h_{in} u^n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.6.1}$$

puesto que esta separación es covariante, las componentes individuales caracterizan el campo de flujo de manera invariante; y son

- $\dot{u}_i$  Aceleración
- $\omega_{in}$  Velocidad de Rotación
- $\sigma_{in}$  Velocidad Shear
- $\Theta$  Velocidad de expansión

Veamos ahora el significado físico de las cantidades mencionadas anteriormente.

La congruencia de líneas mundo

$$x^a = x^a(y^\alpha, \tau) \tag{3.6.2}$$

que están asociadas con el campo de velocidades

$$u^a(x^i) = \frac{\partial x^a}{\partial \tau} \tag{3.6.3}$$

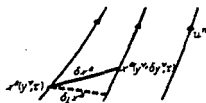


fig. 4



Para las soluciones de las ecuaciones de Einstein en vacío se tiene

$$R_{\alpha\beta}^{[4]} = R_{\alpha\beta}^{[3]} = 0.$$

y, puesto que el tensor de curvatura del subespacio 3-dimensional puede ser construido de su tensor de Ricci, entonces el tensor de curvatura del espacio 4-dimensional desaparece por completo.

Así se tiene la siguiente ley:

**Si una solución en vacío de las ecuaciones de Einstein posee un campo vectorial covariantemente constante, entonces nos estamos enfrentando a un campo vectorial nulo o también al espacio plano.**

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

tiene el significado físico de una familia de líneas de corriente.

A lo largo de las líneas mundo de todas las partículas (todo elemento de volumen) las  $y^a$  son constantes y  $\tau$  varía,  $y^a$  etiqueta las diferentes líneas mundo (partículas). Manteniendo el parámetro  $\tau$  fijo se pasa de las líneas mundo ( $y^a$ ) a las líneas mundo vecinas ( $y^a + \delta y^a$ ) avanzando

$$\delta x^a = \frac{\partial x^a}{\partial y^a} \delta y^a \quad [3.6.4]$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \delta x^a &= \frac{d}{d\tau} \delta x^a + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \delta x^c \\ &= \frac{\partial^2 x^a}{\partial \tau \partial y^a} \delta y^a + \Gamma_{bc}^a u^b \delta x^c \\ &= \frac{\partial u^a}{\partial y^a} \delta y^a + \Gamma_{bc}^a u^b \delta x^c \\ &= \frac{\partial u^a}{\partial x^n} \delta x^n + \Gamma_{bc}^a u^b \delta x^c \end{aligned} \quad [3.6.5]$$

esta derivada vectorial cambia conforme se avanza a lo largo de la línea mundo de acuerdo a

$$(\delta x^a)' = u_n^a \delta x^n \quad [3.6.6]$$

Sin embargo, un observador moviéndose con el flujo, no define como desplazamiento a  $\delta x^a$ , si no con frecuencia toma la proyección de esta cantidad en su espacio 3-dimensional, esto es,

$$\delta_{\perp} x^a = (g_{\perp}^a + \frac{u^a u_a}{c^2}) \delta x^b = H_{\perp}^a \delta x^b \quad [3.6.7]$$

como este observador usa de manera natural un sistema coordenado comóvil cuyos eje coordenados son Fermi-Walker, él define como la velocidad de un elemento de materia vecina, la derivada de Fermi de  $\delta_{\perp} x^a$ . usando [3.6.7] y [3.6.6], y recordando que  $(\delta_{\perp} x^a) u_a = 0$ , se encuentra esta velocidad

$$\frac{D}{D\tau} (\delta_{\perp} x^a) - \frac{1}{c^2} (\delta_{\perp} x^n) (u^a \dot{u}_n - \dot{u}^a u_n) = (\delta_{\perp} x^n) h_n^a \quad [3.6.8]$$

y finalmente utilizando [3.6.8] y [3.6.1] tenemos

$$\begin{aligned} (\delta_{\perp} x^n) h_n^a &= (u_n^a + \frac{\dot{u}^a u_n}{c^2}) (\delta_{\perp} x^n) \\ &= (\omega_n^a + \sigma_n^a + \frac{\Theta \delta_n^a}{3}) (\delta_{\perp} x^n) \end{aligned} \quad [3.6.9]$$

la ecuación [3.6.9] expresa la conexión entre la velocidad  $(\delta_{\perp} x^n) h_n^a$  de la partícula vecina al observador (velocidad relativa al observador) y el vector de posición infinitesimal  $\delta_{\perp} x^n$  que va del observador a la partícula. De esto se deduce lo siguiente:

(a) La expansión  $\Theta$  conduce a un campo de velocidades en dirección radial cuya magnitud es independiente de la dirección; un elemento de volumen es aumentado ( $\Theta > 0$ ) o disminuido ( $\Theta < 0$ ) en tamaño.

(b) Puesto que el tensor antisimétrico de rotación  $\omega_{mi}$  puede ser mapeado con el vector vorticidad  $\omega^i$  de acuerdo a

$$\omega^i = \frac{1}{2} \epsilon^{imnr} a_{[m,n]} \alpha_r = 0$$

entonces

$$\omega^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abmi} u_b \omega_{mi}, \quad \omega_{mi} = \epsilon_{mi0l} \omega^a u^l \quad [3.6.10]$$

el campo de velocidades descrito de este modo tiene la forma

$$(\delta_{\perp} x^n) \dot{h}_n^a = \epsilon_{nm}^a \omega^m u^i \delta_{\perp} x^n \quad [3.6.11]$$

La velocidad es perpendicular al vector posición  $\delta_{\perp} x^n$  y al vector vorticidad  $\omega^m$ , y así nosotros estamos tratando con una rotación alrededor del eje definido por  $\omega^m$

(c) El tensor simétrico  $\sigma_{an}$  del shear conduce a una dirección que depende del campo de velocidades que produce un elipsoide exterior a una esfera de partículas. Puesto que la traza  $\sigma_n^n$  desaparece, este elipsoide tiene el mismo volumen que la esfera original, y así tenemos un cambio de forma en volumen constante.

### 3.7 Diadas

El análisis espinorial y el de tétradas[15] fueron utilizados en los años treinta con el fin de intentar una generalización de la relatividad general y lograr formular una teoría unificada de electricidad y gravitación. Sin embargo, no se tuvo éxito en este problema. Años después se tomó nuevamente interés en el análisis espinorial y tuvo gran aplicación a casos de radiación gravitacional dentro de la relatividad general de Einstein. Las tétradas tienen también gran utilidad dentro de la teoría de Einstein cuando son aplicadas a situaciones en las cuales tenemos congruencias tipo tiempo. Cuando un formalismo de tétradas está basado en alguna congruencia, entonces, ésta nos conduce a una diádría 3-dimensional y una formulación vectorial que explícitamente depende de la dimensionalidad y la asignatura del espacio-tiempo físico. Para resultados que dependen de su dimensionalidad y signatura para su validez, el cálculo tensorial usual resulta ser un instrumento más complicado y que solo nos puede dar resultados más generales, que son válidos en  $n$ -dimensiones con arbitraria asignatura.

Construir una tétrada significa que en cada punto del espacio-tiempo (4-variedad) estamos fijando 4 campos vectoriales  $e_\mu$  que constituyen una base para dicha variedad en el punto. El índice latino de la tétrada etiqueta los vectores. La utilidad de este formalismo radica en que podemos proyectar sobre estos campos vectoriales a cualquier objeto definido en la variedad, de manera que podemos calcular componentes de campos sobre la variedad.

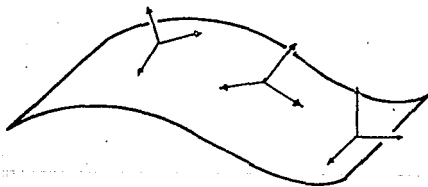


fig. 5

La elección continua de tétradas  $e_\mu$  en cada punto del espacio-tiempo nos permite calcular componentes, es decir, escalares, de los objetos de la variedad.  $e_\mu$  es el vector unitario tangente a la congruencia tipo tiempo y  $e_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) son las triadas vectoriales espaciales. Estas cantidades pueden también ser vistas como las matrices de transformación entre el conjunto de bases.

La base natural de vectores y 1-formas[9] asociadas con las coordenadas es:

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad e^\mu = dx^\mu \quad [3.7.1a]$$

$$e_\mu e^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu e_\nu = g_{\mu\nu} \quad [3.7.1b]$$

$$e^\mu e^\nu = g^{\mu\nu} \quad [3.7.1c]$$

donde  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  son coeficientes métricos covariantes y contravariantes. La base dual de vectores y 1-formas son

$$u_r = \lambda^\mu e_{\mu}, \quad u^r = \lambda_\mu e^\mu \quad [3.7.2a]$$

$$u_r u^s = \delta_r^s, \quad u_r u_s = \eta_{rs} \quad [3.7.2b]$$

$$4u^r u^s = \eta^{rs} \quad [3.7.2c]$$

donde  $\eta_{rs}$  y  $\eta^{rs}$  son la métrica de Minkowski.

Entonces cualquier tensor,  $F_{\mu\nu}$  escrito en términos de las usuales coordenadas es convertida (proyectada) a las componente ortonormales  $F_{rs}$  de la siguiente forma

$$F_{rs} = F_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^s \quad [3.7.3a]$$

y la transformación inversa

$$F_{\mu\nu} = F_{rs} \lambda^\mu \lambda^\nu \quad [3.7.3b]$$

con  $x^\mu$  coordenadas comóviles. La matriz de componentes de la tétrada contravariante tiene la forma

$${}^r \lambda^\mu = \begin{pmatrix} {}^a \lambda^\alpha & {}^a A \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \quad [3.7.4]$$

$$\alpha = a = 1, 2, 3$$

y su inversa

$${}^r \lambda_\mu = \begin{pmatrix} {}^a \lambda_\alpha & 0 \\ -\Phi^{-1} A_\alpha & \Phi^{-1} \end{pmatrix} \quad [3.7.5]$$

con

$${}^a A = {}_a \lambda^\alpha A_\alpha \quad [3.7.6]$$

donde  ${}^a A_\alpha$  son ortonormales y componentes de un 3-vector  $A$  y  $\Phi$  es un escalar.

Las características de las congruencias tipo tiempo son expresadas en las siguientes ecuaciones

$$a_\mu = \partial \lambda_{\mu\nu} \partial \lambda^\nu \quad [3.7.7a]$$

$$\Omega^\mu = \frac{1}{2} (-g)^{-\frac{1}{2}} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial \lambda_{\nu\sigma} \partial \lambda_\tau \quad [3.7.7b]$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \partial \lambda_{(\mu;\nu)} + a_{(\mu} \partial \lambda_{\nu)} \quad [3.7.7c]$$

donde  $a_\mu$ ,  $\Omega^\mu$  y  $\sigma_{\mu\nu}$  son los vectores aceleración, velocidad angular y el tensor de velocidad de shear. Todas estas cantidades son proyectadas dentro de un 3-espacio ortogonal a la congruencia tipo tiempo, es decir,

$$a_0^\mu \lambda_\mu = \Omega_0^\mu \lambda_\mu = \sigma_0^{\mu\nu} \lambda_\mu = 0$$

después de transformar a componentes ortonormales ( $a_a, \Omega_a, \sigma_{ab}$ ) como en [3.7.3], los correspondientes vectores tridimensionales y las cantidades diádicas son definidas por

$$a = a_a u^a, \quad \Omega = \Omega_a u^a \quad [3.7.8a]$$

$$S = S_{ab} u^a u^b = \sigma_{ab} u^a u^b = S^T \quad [3.7.8b]$$

donde  $u^a$  es la triada ortonormal de vectores tipo espacio con componentes coordenadas  ${}^a \lambda^\mu$ . Y las derivadas de estas triadas de vectores son representadas por un 3-vector  $\omega$

$$\omega = \omega_a u^a, \quad \omega_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \lambda^\mu \partial \lambda_{\mu\nu} \partial \lambda^\nu \quad [3.7.9]$$

y una diada  $N$

$$N = N_{ab} u^a u^b, \quad N_{ab} = \frac{1}{2} \epsilon_{bcd} \lambda^\mu \partial \lambda_{\mu\nu} \partial \lambda^\nu \quad [3.7.10]$$

el vector  $\omega$  es la velocidad angular de la triada de vectores ortonormales relativa a los ejes.

Cuando estas cantidades diádicas son diferenciadas, a lo largo de y ortogonales a la congruencia tipo tiempo, y las segundas derivadas del la tétrada son eliminadas por medio de de la ley de conmutación para la diferenciación covariante, componentes de el tensor de curvatura de Riemann ( $R^{\mu}_{\nu\sigma\tau}$ ) son introducidos. Dos conjuntos equivalentes de diadas son empleados para representar las 20 componentes independientes de este tensor. Ambos son obtenidos de manera usual tomando componentes ortonormales. Del primero resultan tres diadas simétricas P, Q, B (con  $\text{Tr}B=0$ ) y un vector t donde

$$P_{ab} = -\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\epsilon_{kfg}R^{cd}{}_{fg} \quad [3.7.11a]$$

$$Q_{ab} = R_{0ab} \quad [3.7.11b]$$

$$B_{ab} - \epsilon_{ab}t^c = \frac{1}{2}\epsilon_{bcd}R_{0acd} \quad [3.7.11c]$$

La segunda representación depende de la resolución invariante de el tensor de curvatura dentro del tensor de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  y el tensor de Weyl,  $C^{\mu}_{\nu\sigma\tau}$ . La diada B y el vector t aparecen nuevamente y así son comunes a ambos conjuntos. Además se pueden obtener dos diadas simétricas T, A y un escalar  $\rho$

$$A_{ab} = C_{0ab} = -\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\epsilon_{kfg}C^{cd}{}_{fg} \quad [3.7.12a]$$

$$B_{ab} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\epsilon_{bcd}C_{0acd} \quad [3.7.12b]$$

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(R_{ab} - \frac{1}{2}R\delta_{ab}) \quad [3.7.12c]$$

$$t_a = \frac{1}{2}R_{0a} \quad [3.7.12d]$$

$$\rho = -\frac{1}{2}(R_{00} + \frac{1}{2}R) \quad [3.7.12e]$$

A y B son llamados respectivamente, las componentes eléctrica y magnética de el tensor de Weyl. Teniendo en cuenta las ecuaciones de Einstein se identifica a T como la diada de esfuerzo de la materia, t el vector densidad de momento, y  $\rho$  la densidad de energía. la relación entre estos dos conjuntos son

$$A = \frac{1}{2}[P + Q - \frac{1}{3}(TrP + TrQ)I] \quad [3.7.13a]$$

$$T = \frac{1}{2}[-P + Q - (TrQ)I] \quad [3.7.13b]$$

$$\rho = -\frac{1}{2}TrP \quad [3.7.13c]$$

### 3.8 Soluciones Interiores Axisimétricas Estacionarias

Las soluciones para distribución de materia rotando, estacionaria, y con simetría axial no son escasas, sin embargo, muy pocas de las soluciones conocidas son capaces de representar una distribución de materia finita, a saber, sólo existe una de ellas encontrada por H.D.Wahlquist(1968)[16] que nos describe un cuerpo con las condiciones antes señaladas constituido por un fluido perfecto. El mismo Wahlquist en 1991[9] presenta la generalización de su métrica encontrada en 1968 y una nueva solución utilizando para ello el formalismo de diadas y muestra que es posible que unir su solución general a la solución general exterior obteniéndose así la solución completa(Capítulo IV) para distribuciones de materia finitas estacionarias axisimétricas. A continuación presentamos una revisión de estos trabajos.

#### (i) Solución de Wahlquist

La solución encontrada por Wahlquist[16] describe el interior de una distribución finita de materia constituida por un fluido perfecto y que se encuentra rotando. La importancia de esta solución radica en que fue la primera solución exacta encontrada de un cuerpo de fluido perfecto rotando limitado por una superficie finita de presión cero, y sería una buena aproximación para la descripción de objetos astrofísicos realistas.

La métrica encontrada en coordenadas esféricas prolatas  $(\zeta, \xi, \phi)$  a partir de un formalismo diádico es

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi}(dt - A d\phi)^2 + r_0(\zeta^2 + \xi^2)\left[\frac{d\zeta^2}{(1 - k^2\zeta^2)h_1} + \frac{d\xi^2}{(1 + k^2\xi^2)h_2} + \frac{\delta^2 h_1 h_2}{(h_1 - h_2)} d\phi^2\right] \quad [3.8.1]$$

con

$$\frac{1}{\Phi^2} = \frac{(h_1 - h_2)}{(\zeta^2 + \xi^2)} \quad [3.8.2]$$

$$A = \delta r_0 \left[ \frac{(\xi^2 h_1 + \zeta^2 h_2)}{(h_1 - h_2)} - \xi_A^2 \right] \quad [3.8.3]$$

$$h_1(\zeta) = 1 + \zeta^2 - \frac{2m}{r_0} \zeta (1 - k^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta}{\kappa} \left[ \zeta - \frac{1}{k} (1 - k^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}^{-1}(k\zeta) \right] \quad [3.8.4]$$

$$h_2(\xi) = 1 - \xi^2 - \frac{2b}{r_0} \xi (1 + k^2 \xi^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\xi}{\kappa} \left[ \xi - \frac{1}{k} (1 + k^2 \xi^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}^{-1}(k\xi) \right] \quad [3.8.5]$$

donde  $\xi_A = cte$  y hemos utilizado la convención

$$4\pi G = c = 1$$

Con parámetros exteriores

$m$  = constante de Schwarzschild

$b$  = la constante NUT

$r_0$  es un parámetro relacionado a la constante de Kerr  $\bar{a}$  (momento angular) por  $r_0^2 = \bar{a}^2 - b^2$

Y parámetros interiores  $k$ , y  $\kappa$  que están relacionados al fluido a través de las ecuaciones para la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ , que están dadas por

$$p = \frac{1}{2} \rho_* \left( 1 - \frac{\kappa^2}{\Phi^2} \right) \quad [3.8.6]$$

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_* \left( 3 \frac{\kappa^2}{\Phi^2} - 1 \right) \quad [3.8.7]$$

Las ecuaciones anteriores son obtenidas resolviendo las ecuaciones de Einstein con el  $T^{\mu\nu}$  de fluido perfecto. Donde  $\rho$  es la densidad de energía en la superficie y el parámetro  $k$  está definido como

$$k = \kappa \rho_*^{\frac{1}{2}} r_0 \quad [3.8.8]$$

y cuando  $\rho_*$  y  $k$  tienden a cero el fluido desaparece. La ecuación de estado utilizada en esta solución se obtiene de las ecuaciones [3.8.6] y [3.8.7] eliminando  $\Phi$ , el resultado es

$$p + \frac{1}{3} \rho = \frac{1}{3} \rho_* \quad [3.8.9]$$

Las restantes constantes que aparecen en la métrica,  $\xi_A$  y  $\delta$ , son determinadas geoméricamente por los otros parámetros. Las superficies  $\xi = cte$  son el análogo de los hiperboloides cofocales en el espacio plano, y  $\xi_A$  está definida tal que  $\xi = \xi_A$  sea la superficie degenerada que da el eje de simetría y rotación. Esto está implícitamente determinado en la solución de la ecuación

$$h_2(\xi_A) = 0 \quad [3.8.10]$$

que garantiza que los coeficientes métricos de  $dt d\theta$  y  $d\theta^2$  desaparecen en el eje. La constante  $\delta$  es determinada tal que las superficies coordenadas  $\zeta = cte$ , que son el análogo de esferoides cofocales en el espacio plano, sean localmente planas en el eje de simetría. Esta condición se expresa de la siguiente forma

$$\delta = \pm 2 \left[ (1 + k^2 \xi_A^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dh_2}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_A} \right]^{-1} \quad [3.8.11]$$



## Ecuación de Estado

La ecuación [3.8.9], es la ecuación de estado para el interior de la distribución de materia. Como podemos observar esta ecuación no corresponde a ninguna configuración física. La densidad en la superficie es constante, por tanto hacia el centro de la distribución la presión aumenta y la densidad tiene que disminuir, es decir, tendremos densidades negativas. En el caso de considerar un gas relativista, como puede ser el caso de algunas estrellas de neutrones, tenemos que la densidad en el centro es la mitad de la densidad en la superficie. En un gas relativista la presión es un tercio de la densidad. Calculemos la densidad en el centro si queremos considerar que esta distribución de materia representa una estrella constituida por un gas relativista

$$p_c = \frac{1}{3}\rho_c$$

donde el subíndice c indica cantidades calculadas en el centro de la distribución. Sustituyendo esta relación en la ecuación de estado [3.8.9], tenemos

$$p_c + \frac{1}{3}\rho_c = \frac{1}{3}\rho_s$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{3}\rho_c + \frac{1}{3}\rho_c = \frac{1}{3}\rho_s$$

$\Rightarrow$

$$2\rho_c = \rho_s$$

$\Rightarrow$

$$\rho_c = \frac{1}{2}\rho_s$$

entonces esta ecuación de estado no puede representar esta clase de estrellas, ya que estos objetos astrofísicos conforme uno penetra a su interior la densidad aumenta gradualmente.

Cuando tenemos el caso

$$p_c \ll \rho_c$$

la presión se puede despreciar en comparación con la densidad, y tendremos

$$\rho_c = \rho_s$$

entonces tendremos modelos con densidad constante como el de Schwarzschild.

## Casos Especiales

Escogiendo adecuadamente los parámetros de la métrica [3.8.1] podemos recuperar algunas soluciones conocidas

### (a).- Espacio-tiempo plano

Para poder obtener la solución del espacio-tiempo plano es necesario tomar  $m=b=0$  y hacer tender  $k$  a 0, ya que el fluido depende de  $k$  y si  $k$  tiende a cero el fluido desaparece. bajo estas consideraciones las funciones de la métrica toman la forma

$$h_1 = 1 + \zeta^2 \quad [3.8.12]$$

$$h_2 = 1 - \xi^2 \quad [3.8.13]$$

$$\xi_A = \pm 1 \quad [3.8.14]$$

$$\delta = \pm 1 \quad [3.8.15]$$

$$\Phi = 1, \quad A = 0 \quad [3.8.16]$$

y la métrica se reduce a la del espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas oblatas con foco en el círculo de radio  $r_0$  en  $\xi = \zeta = 0$

$$ds^2 = -(dt - Ad\theta)^2 + d\theta^2 r_0^2 \quad [3.8.17]$$

### (b). Solución Exterior de Kerr-Nut

Haciendo tender  $k$  a cero y con  $b$  y  $m$  distintas de cero, se recuperan esta solución

$$\lim_{k \rightarrow 0} h_1 = 1 + \zeta^2 - \frac{2m}{r_0} \zeta \quad [3.8.18]$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} h_2 = 1 - \xi^2 - \frac{2b}{r_0} \xi \quad [3.8.19]$$

y

$$h_2(\xi_A) = 0$$

⇒

$$\xi_A^2 + \frac{2b}{r_0} \xi_A - 1 = 0$$

⇒

$$\xi_A = -\frac{b}{r_0} \pm \frac{(b^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0}$$

pero

$$\bar{a}^2 = r_0^2 + b^2$$

por tanto

$$\xi_A = -\left(\frac{b \mp \bar{a}}{r_0}\right) \quad [3.8.20]$$

utilizando [3.8.11] y [3.8.20]

$$\delta = \mp \frac{r_0}{\bar{a}} \quad [3.8.21]$$

Utilizando [3.8.2], [3.8.18], y [3.8.19]

$$\frac{1}{\Phi^2} = 1 - \frac{2}{r_0} \left[ \frac{m\zeta - b\xi}{\zeta^2 + \xi^2} \right] \quad [3.8.22]$$

y finalmente utilizando [3.8.3], [3.8.18], [3.8.19], y [3.8.2]

$$A = \delta r_0 [\Phi^2 (1 - \frac{2\xi(\zeta(\xi m + \zeta b)}{r_0(\zeta^2 + \xi^2)}) - \zeta_A^2] \quad [3.8.23]$$

Las coordenadas  $\zeta$  y  $\xi$  se pueden poner en términos de las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  (ver M. Demianski y E. Newman Bull Acad. Polon.Sci 14,653(1968)) de la siguiente forma

$$\zeta = \frac{r}{r_0} \quad [3.5.24a]$$

$$\xi = \frac{1}{r_0} (b + \bar{a} \cos \theta) \quad [3.8.24b]$$

Si queremos recuperar la conocida métrica de Kerr, tenemos que hacer el parámetro  $b$  igual a cero, bajo esta condición los parámetros y las funciones métricas toman la forma:

$$r_0 = \bar{a}, \quad \xi_A = \mp 1, \quad \delta = \pm 1$$

$$h_1 = 1 + \zeta^2 - \frac{2m}{\bar{a}} \zeta, \quad h_2 = 1 - \xi^2$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = 1 - \frac{2m\zeta}{\bar{a}(\zeta^2 + \xi^2)}$$

$$A = \pm \bar{a} \left[ \Phi^2 \left[ 1 - \frac{2m\zeta\xi^2}{\bar{a}(\zeta^2 + \xi^2)} \right] - 1 \right]$$

utilizando [3.5.24a] y [3.5.24b] tenemos

$$\zeta = \frac{r}{\bar{a}}, \quad \xi = -\cos \theta$$

$\Rightarrow$

$$d\zeta = \frac{dr}{\bar{a}}, \quad d\xi = \sin \theta d\theta$$

con esto las funciones métricas toman la forma

$$h_1 = 1 + \frac{r^2}{\bar{a}^2} - \frac{2mr}{\bar{a}^2}, \quad h_2 = \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = 1 - \frac{2mr}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta}$$

$$A = \pm \frac{2mr\bar{a} \sin^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta - 2mr}$$

y la métrica [3.8.1] toma la forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -\frac{1}{\Phi^2}(dt - A d\phi)^2 + (r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta) \left[ \frac{dr^2}{\bar{a} h_1} + \frac{\text{sen}^2 \theta d\theta^2}{h_2} \right] + \frac{(r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta) h_1 h_2}{h_1 - h_2} d\phi^2 \\
 &\quad \Rightarrow \\
 ds^2 &= -\left[ \frac{r^2 - 2mr + \bar{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 + \left[ \frac{4mr \bar{a} \text{sen}^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right] dt d\phi \\
 &\quad + \left[ \frac{(r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta)(\bar{a}^2 + r^2 - 2mr) \text{sen}^2 \theta}{r^2 - 2mr + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} - \frac{4m^2 r^2 \bar{a}^2 \text{sen}^4 \theta}{(r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta)(r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta - 2mr)} \right] d\phi^2 \\
 &\quad + [r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta] \left[ \frac{dr^2}{\bar{a}^2 - 2mr + r^2} + d\theta^2 \right] \\
 &\quad \Rightarrow \\
 ds^2 &= -\left[ \frac{r^2 - 2mr + \bar{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right] dt^2 + \left[ \frac{4mr \bar{a}^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right] dt d\phi \\
 &\quad + \text{sen}^2 \theta \left[ r^2 \bar{a}^2 + \frac{2mr \bar{a}^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right] d\phi^2 + [r^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \theta] \left[ \frac{dr^2}{\bar{a}^2 - 2mr + r^2} + d\theta^2 \right]
 \end{aligned}$$

que es la solución de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist.

### (c) Límite Esférico sin Rotación

Si el parámetro  $b$  toma el valor cero, las coordenadas  $\zeta$  y  $\xi$ , debido a [3.8.24a] y [3.8.24b], toman los siguientes valores

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{r}{r_0} \\
 \zeta &= \cos \chi
 \end{aligned} \tag{3.8.25}$$

Tomando el límite cuando  $r_0$  tiende a cero la métrica [3.8.1] toma la forma

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2} dt^2 + \frac{\Phi^2}{(1 - \kappa^2 \rho_s r^2)} dr^2 + r^2 (d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi d\theta^2) \tag{3.8.26}$$

con

$$\frac{1}{\Phi^2} = 1 - \frac{2m}{r} (1 - \kappa^2 \rho_s r^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\kappa^2} \left[ 1 - \frac{(1 - \kappa^2 \rho_s r^2)^{\frac{1}{2}}}{\kappa \rho_s^{\frac{1}{2}} r} \text{sen}^{-1}(\kappa \rho_s^{\frac{1}{2}} r) \right] \tag{3.8.27}$$

esta métrica nos describe un cuerpo constituido por un fluido perfecto con simetría esférica y sin rotación.

Cuando  $\rho_s \rightarrow 0$  tenemos

$$\lim_{\rho_s \rightarrow 0} ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2} dt^2 + \Phi^2 dr^2 + r^2 (d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi d\theta^2) \tag{3.8.28}$$

que es la solución de Schwarzschild, ya que\*

$$\lim_{\rho_s \rightarrow 0} \frac{1}{\Phi^2} = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \tag{3.8.29}$$

\* tanto en estos cálculos como en los anteriores al calcular el límite se utiliza la regla de L'Hopital.

Para  $m=0$ , la ecuación [3.8.26] describiría una esfera de fluido cuya estructura en el caso de tener una presión central pequeña, es similar a la solución interior de Schwarzschild.

Si nos acercamos al centro, es decir, para  $r$  muy pequeñas la ecuación [3.8.27] toma la forma

$$\frac{1}{\Phi^2} \approx 1 + \frac{1}{3}\rho_s r^2 \quad [3.8.30]$$

y en  $r=0$

$$\Phi_c^2 = 1$$

El subíndice  $c$  indica el centro y debido a esto

$$p_c = \frac{1}{2}\rho_s(1 - \kappa^2)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_s(3\kappa^2 - 1)$$

Esto nos dice que este espacio-tiempo interior es conformalmente plano en el centro

#### (d) Cuerpo constituido por un fluido y rotando

Dejando los parámetros con los valores  $m = b = 0$  obtenemos la solución interior de un cuerpo rígido constituido por un fluido y rotando. las cantidades físicas en términos de los parámetros son encontradas en dos lugares:

(i) En  $(\zeta = 0, \xi = \xi_A)$

(ii) En  $(\zeta = 0, \xi = 0)$

Denotamos con un subíndice  $c$  el primer caso y con un subíndice  $0$  el segundo, Entonces tenemos

$$\Phi_c^2 = \xi_A^2,$$

$$\Phi_0^2 = 1$$

$$p_c = \frac{1}{2}\rho_s \left(1 - \frac{\kappa^2}{\xi_A^2}\right)$$

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho_s(1 - \kappa^2)$$

$$\Omega_c = \frac{1}{2}\rho_s r_0 \frac{\left[\kappa^2(\xi_A^2 - 1) - k^2 \xi_A^4\right]}{k^2 \xi_A^2 (1 + k^2 \xi_A^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{3}\rho_s r_0$$

$$a_c = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\rho_s r_0$$

$\Omega$  es la velocidad angular y  $a$  la aceleración.

(ii) Velocidades en la Solución de Wahlquist

Las velocidades para una distribución de materia axisimétrica pueden ser dadas a partir de la solución encontradas por Wahlquist (1968) y utilizando las ecuaciones de Einstein. Estas velocidades son

$$u_a = (u_0, 0, 0, u_3) = (u_1, 0, 0, u_\phi)$$

donde

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{(\rho - p)}{\rho_1 \kappa_a} - \frac{k^2}{r_0^2 \rho_1 \kappa^2}$$
$$u_3 = \pm \frac{\delta}{(\rho + p)} - Au_0$$

dada la simetría existen dos vectores Killing

$$\xi^a = (1, 0, 0, 0), \quad \xi_a = (g_{11}, 0, 0, g_{1\phi})$$

$$\eta^a = (0, 0, 0, 1), \quad \eta_a = (g_{1\phi}, 0, 0, g_{\phi\phi})$$

en términos de estos Killing las velocidades toman la forma

$$u_0 = g_{00}u^0 + g_{03}u^3 = (-\xi_a^a \xi_{B\alpha} S^A S^B)^{-\frac{1}{2}} [g_{00} + g_{03}\Omega]$$

$$u_3 = (-\xi_a^a \xi_{B\alpha} S^A S^B)^{-\frac{1}{2}} [g_{30} + g_{33}\Omega]$$

donde

$$S^A = (1, \Omega)$$

$$A, B = 1, 2 \quad \nu \quad \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta$$

y utilizando las ecuaciones de la sección anterior podemos calcular la aceleración, velocidad de rotación, velocidad de "shear", y velocidad de expansión. En el caso particular en el cual la velocidad angular del sistema  $\Omega$  es constante, entonces el sistema rota rigidamente y no hay movimiento de expansión ni "shear", es decir

$$\Theta = \sigma = 0$$

El elemento de línea y las funciones que describen el fluido encontradas por Wahlquist fueron obtenidas utilizando un formalismo de diadas[15], este formalismo, como veremos más adelante, es complicado y no sentimos que sea demasiado claro. Esto es una motivación para tratar de expresar la ecuación de Wahlquist en forma análoga a el elemento de línea general exterior visto en el capítulo II. La razón principal de esto, es que podemos reducir nuestro problema de encontrar las funciones métricas y las cantidades físicas a resolver un sistema de ecuaciones en coordenadas conocidas (cilíndricas, de la misma forma que para el caso exterior. La manera de realizar esto es la siguiente

El elemento de línea encontrado por Wahlquist tiene la forma

$$ds^2 = -F(dt - Ad\phi)^2 + Bd\zeta^2 + Cd\xi^2 + Ld\phi^2 \quad [3.8.31]$$

donde

$$B(\xi, \zeta) = \frac{r_0^2(\xi^2 + \zeta^2)}{(1 - k^2\xi^2)h_1}$$

$$C(\xi, \zeta) = \frac{r_0^2(\xi^2 + \zeta^2)}{(1 + k^2\xi^2)h_2}$$

$$L(\xi, \zeta) = \frac{\delta^2 h_1 h_2}{(h_1 + h_2)}$$

para poder expresar el elemento de línea [3.8.31] en la forma del elemento de línea general exterior [2.4.3], tenemos que dar una transformación de coordenadas

$$(\xi, \zeta) \rightarrow (\xi', \zeta')$$

tal que

$$Bd\zeta^2 + Cd\xi^2 = D(\xi', \zeta')(d\zeta'^2 + d\xi'^2) \quad [3.8.32]$$

por tanto supongamos que la transformación es de la forma

$$\zeta' = G(\xi, \zeta), \quad \xi' = F(\xi, \zeta)$$

tomando la diferencial de estas funciones tenemos

$$d\zeta' = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \zeta} d\zeta = F_\xi d\xi + F_\zeta d\zeta \quad [3.8.33]$$

$$d\xi' = \frac{\partial G}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial G}{\partial \zeta} d\zeta = G_\xi d\xi + G_\zeta d\zeta \quad [3.8.34]$$

multiplicando [3.8.33] por  $G_\xi$ , [3.8.34] por  $F_\xi$ , restando y despejando  $d\zeta$  tenemos

$$d\zeta = J^{-1}(F_\xi d\xi' - G_\xi d\xi') \quad [3.8.35]$$

trabajando de manera análoga

$$d\xi = J^{-1}(G_\zeta d\xi' - F_\zeta d\xi') \quad [3.8.36]$$

donde

$$J = (F_\xi G_\zeta - G_\xi F_\zeta) \neq 0$$

es el Jacobiano de la transformación sustituyendo, [3.8.35] y [3.8.36] en [3.8.32] y realizando el álgebra correspondiente obtenemos la relación

$$J^{-2}[(BG_\xi^2 + CG_\zeta^2)d\xi'^2 - 2(G_\xi F_\zeta B + F_\xi G_\zeta C)d\xi'd\xi' + (BF_\zeta^2 + CF_\xi^2)d\xi'^2] = D(d\xi'^2 + d\zeta'^2)$$

para que se pueda cumplir esta igualdad se debe satisfacer

$$J \neq 0$$

$$BG_{\xi}^2 + CG_{\xi}^2 = D \quad [3.8.37]$$

$$BF_{\xi}^2 + CF_{\xi}^2 = D \quad [3.8.38]$$

$$G_{\xi}F_{\xi}B + F_{\xi}G_{\xi}C = 0 \quad [3.8.39]$$

resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos la siguiente relación

$$\frac{1}{2}D_{\xi}G_{\xi} + D_{\xi\xi} = \frac{1}{2}B_{\xi}G_{\xi} + B_{\xi\xi} \quad [3.8.40]$$

resolviendo por separación de variables tenemos

$$G = c_1 e^m + c_2 e^n + c_3 e^{-n} + c_4 e^{-m} \quad [3.8.41]$$

$$F = c_5 e^p + c_6 e^q + c_7 e^{-q} + c_8 e^{-p} \quad [3.8.42]$$

con

$$m = [g]^{\frac{1}{2}}\gamma + [h]^{\frac{1}{2}}\alpha$$

$$n = [h]^{\frac{1}{2}}\alpha - [g]^{\frac{1}{2}}\gamma$$

$$p = [g]^{\frac{1}{2}}\theta + [t]^{\frac{1}{2}}\beta$$

$$q = [t]^{\frac{1}{2}}\beta - [g]^{\frac{1}{2}}\theta$$

donde  $g = \frac{\lambda^2}{(1+k^2\xi^2)^2}$ ,  $s = \lambda^2(1+k^2\xi^2)$ ,  $h = \lambda^2(1-k^2\xi^2)$ ,  $t = \frac{\lambda^2}{(1-k^2\xi^2)^2}$  y  $\theta, \beta, \gamma, \alpha$  estan dadas por

$$\theta = \int \left[ \frac{h_2}{r_0(1+k^2\xi^2)} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad [3.8.43]$$

$$\beta = \int \left[ \frac{h_1}{r_0} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad [3.8.44]$$

$$\gamma = \int \left[ \frac{h_2}{r_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad [3.8.45]$$

$$\alpha = \int \left[ \frac{h_1}{r_0^2(1-k^2\xi^2)} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad [3.8.46]$$

esto nos dice que para dar una transformación explícita, basta con resolver las integrales [3.8.43], [3.8.44], [3.8.45], y [3.8.46]; cuando esto es posible la métrica de Wahlquist puede tomar la forma

$$ds^2 = F(\xi, \zeta)(dt - Ad\phi)^2 + D(\xi, \zeta)(d\zeta^2 + d\xi^2) + Ld\theta^2$$

sin embargo la solución a este tipo de integrales no es trivial, y no pudo ser encontrada una solución analítica, por lo que no fue posible reescribir la métrica en coordenadas cilíndricas.



(iii) Generalización de la Métrica de Wahlquist

Wahlquist en 1991 presenta una aproximación matemática para encontrar la solución general interior para cuerpos rotando rígidamente, su solución es basada en un formalismo de Diadas[15] para congruencias tipo tiempo. La importancia del formalismo de diadas estriba en que nos permite trabajar en un marco de referencia que es, en todas partes, el marco local en reposo de la materia. Las variables dinámicas del sistema de referencia son iguales a las de la materia, y la geometría, es la de una 3-variedad riemanniana. A continuación presentamos una revisión sintetizada de este trabajo.

Para encontrar esta solución, primero se adaptan las ecuaciones diádicas generales a una congruencia arbitraria tipo tiempo para este problema en particular y desarrollamos las consecuencias de asumir simetría axial y el carácter estacionario. De esto se obtienen las ecuaciones diádicas, expresadas en términos del 3-vector aceleración  $\vec{a}$  y el 3-vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$

$$E = -P - 3\vec{\Omega}\vec{\Omega} \quad (3.8.47)$$

$$P = A - [T - \frac{1}{3}(TrT)I] - \frac{2}{3}\rho I \quad (3.8.48)$$

donde E representa la diada de curvatura y A la componente eléctrica de la diada de curvatura de Weyl, entonces

$$Q = A + [T - \frac{1}{3}(TrT)I] + \frac{1}{3}(\rho - TrT)I \quad (3.8.49)$$

$$TrQ = \mu = \rho - TrT = \rho + 3p \quad (3.8.50)$$

$$M = T - \frac{1}{3}(TrT)I = T + PI \quad (3.8.51)$$

con T=diada de esfuerzo

$$P = -\frac{1}{3}(TrT) \quad (3.8.52)$$

$\mu$ =densidad de energía de la fuente gravitacional M= Parte anisotrópica de la diada esfuerzo de la materia y

$$\nabla p + (\rho + p)\vec{a} = \nabla M + \vec{a}M \quad (3.8.53)$$

Que es la ecuación de equilibrio hidrostático en su forma diádica

El vector  $\vec{a}$  es interpretado físicamente como la aceleración absoluta de la materia en cada punto, es decir, la aceleración producida por la resultante de todas las fuerzas generadas por las diada esfuerzo T, y geoméricamente es la curvatura de la línea mundo de la materia.  $\vec{\Omega}$  es interpretada como la velocidad angular absoluta de la materia en cada punto, es decir, la velocidad angular local relativa a los ejes que se propagan a lo largo de las líneas mundo de la materia.

Haber tomado simetría axial nos conduce a algunas consecuencias en la forma de de las diadas de curvatura y esfuerzo. la consecuencia es que ambas admiten el 3-vector axial simétrico  $\vec{K}$  como un vector propio, es decir

$$\vec{K}E = -(\Omega^2 + \vec{a}L - \mu + 2p - 4r)\vec{K} \quad (3.8.54)$$

$$\vec{K}A = (\Omega^2 + \vec{a}L - \frac{1}{3}\mu - 2r)\vec{K} \quad (3.8.55)$$

$$\vec{K}B = \Omega(H2\vec{a})\vec{K} \quad (3.8.56)$$

$$\vec{K}M = 2r\vec{K} \quad (3.8.57)$$

con

$$M = T + \rho I, \quad L = \frac{\nabla r}{r}, \quad r = |K| \quad [3.8.58]$$

$r$  = valor propio. Estos resultados son obtenidos de analizar las condiciones de integrabilidad de la ecuación de Killing en forma diádica

$$\nabla K + K \nabla = 0 \quad [3.8.59]$$

Las siguientes relaciones importantes, son encontradas basándose en este formalismo

a) El gradiente del 3-vector aceleración  $\vec{a}$

$$\nabla \vec{a} = -\vec{a}\vec{a} + \vec{\Omega}\vec{\Omega} - \Omega^2 I + Q \quad [3.8.60]$$

b) El gradiente del 3-vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$

$$\nabla \vec{\Omega} = -2\vec{a}\vec{\Omega} + (\vec{a}\vec{\Omega})I + B \quad [3.8.61]$$

c) La identidad de Bianchi para  $Q$ , que resulta de tomar el rotacional de a)

$$\nabla \times Q = -\vec{a} \times Q + P \times \vec{a} - B \times \vec{\Omega} + (\vec{\Omega}B) \times I \quad [3.8.62]$$

d) Si se contrae la identidad de Bianchi, obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\nabla T = -\vec{a}T + \rho\vec{a} \quad [3.8.63]$$

Entonces lo que interesa es encontrar soluciones a las ecuaciones  $\nabla \bar{a}, \nabla \times \bar{\Omega}, \nabla \times \mathbf{Q}, \nabla \times \mathbf{B}$  y  $\nabla T$ . Para facilitar este trabajo es conveniente pasar a un espacio complejo, esto se hace introduciendo un vector complejo en terminos de la aceleración y la velocidad angular

$$\mathbf{Z} = \bar{a} + i\bar{\Omega} \quad [3.8.64]$$

con esto obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias analíticas que son mas tratables que sus equivalentes ecuaciones diferenciales parciales reales. Con esta consideración tenemos

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} + i\mathbf{B} - \frac{1}{3}\mu\mathbf{I} = \mathbf{A} + i\mathbf{B} + \mathbf{M} = \mathbf{C} + \mathbf{M} \quad [3.8.65]$$

a R la definimos como la diada de curvatura en este espacio complejo, y podemos encontrar una ecuación análoga a la ecuación de Ernst

$$(\epsilon + \bar{z}) \nabla^2 \epsilon = \frac{1}{2} \nabla \epsilon (3 \nabla \epsilon - \nabla \bar{z}) + \mu(\epsilon + \bar{z})^2 \quad [3.8.66]$$

con

$$\nabla \epsilon = \frac{\mathbf{Z}}{\Phi^2} \quad [3.8.67]$$

$$\epsilon + \bar{z} = \frac{1}{\Phi^2} \quad [3.8.68]$$

$$\bar{a} = -\frac{\nabla \Phi}{\Phi} = -\frac{1}{2} \Phi (\mathbf{Z} + \bar{\mathbf{Z}}) \quad [3.8.69]$$

y la diada compleja de Weyl sera

$$\mathbf{C} = \alpha \left( \mathbf{I} - 3 \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}{2\Phi^2} \right), \quad \alpha = \text{escalar} \quad [3.8.70]$$

con  $\mathbf{M}=0$ , ya que, en esta solución el tensor esfuerzo es isotrópico.

Utilizando todo este formalismo Wahlquist encuentra dos soluciones:

La primera de ellas para materia rotando con esfuerzo anisotrópico (solución encontrada en 1968 con diferente notación)

$$\mathbf{M} = -\tau(\mathbf{I} - 3\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}) \quad [3.8.71]$$

con las ecuaciones de vectores propios

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T} &= (2\tau - p)\hat{\mathbf{K}} \\ \mathbf{V}\mathbf{T} &= -(p + \tau)\mathbf{V} \end{aligned} \quad [3.8.72]$$

con  $\mathbf{V}$  perpendicular a  $\hat{\mathbf{K}}$  la ecuación de equilibrio estacionario y la curvatura diádica compleja toman la forma

$$\nabla(p + \tau) + 3\tau\mathbf{H} + (\mu - 2p - 2\tau)\bar{\alpha} = 0 \quad [3.8.73a]$$

$$\mathbf{R} = \alpha(\mathbf{I} - \frac{3\mathbf{Z}\mathbf{Z}}{Z^2}) + \beta(\mathbf{I} - 3\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}) \quad [3.8.73b]$$

$\alpha$  y  $\beta$  son variables complejas. Esto nos conduce a las ecuaciones de vectores propios

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{R} = (\alpha - 2\beta)\hat{\mathbf{K}} \quad [3.8.74a]$$

$$\alpha - 2\beta = \mathbf{Z}\mathbf{H} - Z^2 - \frac{1}{3}\mu \quad [3.8.74b]$$

y  $\mathbf{R}$  es del tipo Petrov I para valores generales de  $\alpha$  y  $\beta$  se tienen 3 casos algebraicos especiales para los valores propios

$$a)\alpha = \beta, \quad b)\alpha = 0, \quad c)\beta = 0$$

todos tipo petrov D. La diádica de Weyl

$$\mathbf{C} = \alpha(\mathbf{I} - \frac{3\mathbf{Z}\mathbf{Z}}{Z^2}) + (\beta + \tau)(\mathbf{I} - 3\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}})$$

que es algebraicamente especial para

$$a)\alpha = \beta + \tau, \quad b)\alpha = 0, \quad c)\beta + \tau$$

utilizando que  $\mathbf{Z}$  es un vector propio de  $\mathbf{R}$  se generan las siguientes ecuaciones diferenciales que involucran los valores propios

$$\nabla(\alpha - 2\beta + \frac{1}{3}\mu) = 3\beta\mathbf{H} - \left[ Z^2(\mu - 2p - 2\tau) + 3\alpha(\alpha - 2\beta + \frac{1}{3}\mu) \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75a]$$

$$\nabla(\alpha + \beta - \frac{2}{3}\mu) = -3\beta\mathbf{H} + \left[ 2Z^2(\mu - 2p + \tau) + 3\beta Z^2 + (\mathbf{Z} \nabla \alpha) + 3\alpha(2\alpha - \beta + \frac{2}{3}\mu) \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75b]$$

$$\nabla(2\alpha - \beta - \frac{1}{3}\mu) = \left[ Z^2(\mu - 2p + 4\tau) + 3\beta Z^2 + 3(\mathbf{Z} \nabla \alpha) + 3\alpha(\alpha + \beta + \frac{1}{3}\mu) \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75c]$$

$$\nabla(\beta - \frac{1}{3}\mu) = -2\beta\mathbf{H} + \left[ Z^2(\mu - 2p) + \beta Z^2 + (\mathbf{Z} \nabla \alpha) + 3\alpha(\alpha - \beta + \frac{1}{3}\mu) \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75d]$$

$$\nabla(\alpha - \frac{1}{3}\mu) = -\beta\mathbf{H} + \left[ Z^2(\mu - 2p + 2\tau) + 2\beta Z^2 + 2(\mathbf{Z} \nabla \alpha) + 3\alpha(\alpha + \frac{1}{3}\mu) \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75e]$$

$$\nabla(\alpha - \beta) = \beta\mathbf{H} + \left[ 2\tau Z^2 + \beta Z^2 + (\mathbf{Z} \nabla \alpha) + 3\alpha\beta \right] \frac{\mathbf{Z}}{Z^2} \quad [3.8.75f]$$

si una solución completamente general para las ecuaciones [3.8.72] pudiera ser dada, no es necesario considerar los casos degenerados separadamente, sin embargo algunas relaciones son requeridas para simplificar este problema y las condiciones degeneradas son un lugar natural para encontrarlas.

Los primeros casos nos conducen a  $\beta = \tau = 0$  como la única solución y de los restantes casos  $\alpha = \beta + \tau$  y  $\alpha = 0$  tenemos

i) El caso  $\alpha = \beta + \tau$  no reditua una pronta solución

ii) El caso  $\alpha = 0$  nos conduce a

$$\mu = -3\sigma_0^2 - 3\beta$$

$$r = -\frac{1}{2}\beta$$

$$p = -\frac{3}{2}\sigma_0^2 - \beta$$

$$\rho = \frac{3}{2}\sigma_0^2$$

$$\sigma_0^2 = \beta + \frac{1}{3}\mu \quad \sigma_0 \in \mathfrak{R}, \quad \sigma_0 > 0$$

que es una solución a densidad constante

La métrica tiene la forma

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2} [dt + A d\theta]^2 + \frac{r_0^2 \psi^2}{(h_1 + h_2)} d\theta^2 + \frac{u^2 + v^2}{\sigma_0^2} \left[ \frac{du^2}{g_1^2} + \frac{dv^2}{g_2^2} \right] \quad [3.8.76]$$

donde

$$\frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} (h_1 + h_2)$$

$$A = \left[ \frac{r_0 \sigma_0}{(h_1 + h_2)} (k_0 (1 + h_1 h_2) + g_1 g_2) \right] + A_0$$

$$r = \left( \frac{r_0}{\sigma_0} \right) \psi \Phi^2, \quad \frac{r_0}{\sigma_0} = \text{cte de integración}$$

$$h_1 = \epsilon - u^2, \quad g_1^2 = 1 - h_1^2$$

$$h_2 = \epsilon + v^2, \quad g_2^2 = 1 - h_2^2$$

$$\psi = 1 + h_1 h_2 + k_0 g_1 g_2$$

y

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} = \frac{1}{2} \beta (\mathbf{I} - 3\mathbf{K}\mathbf{K})$$

con

$$\beta = -\frac{2}{3} \sigma_0 \Phi \frac{r_0}{r}$$

La segunda es la generalización de su solución encontrada en 1968 para un cuerpo finito rotando constituido por un fluido perfecto. La métrica encontrada es

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2} [dt + A d\beta]^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{g}{\mu_0} \left[ \frac{du^2}{h_1 + Q_i} + \frac{dv^2}{h_2 + Q_i} \right] \quad [3.8.77]$$

con

$$g = \cos 2u + \cosh 2v$$

$$h_1 = h_0 + \epsilon_0 \cos 2u + (u + u_0) \sin 2u$$

$$h_2 = h_0 - \epsilon_0 \cosh 2v + (v + v_0) \sinh 2v$$

$$r^2 = 4\Phi^2 R_i^2 (h_1 + Q_i)(h_2 + Q_i)$$

$$\frac{1}{\Phi^2} = \frac{\mu_0}{q_0 g} (h_1 - h_2)$$

$$A = A_0 + 2 \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \left( \frac{R_i}{h_1 - h_2} \right) [(h_2 + Q_i) \cos 2u + (h_1 + Q_i) \cosh 2v] + p_i$$

donde para  $Q_i$  es solución a la ecuación

$$2(Q_i')^2 - [(h_1 + Q_i) Q_i']' = 0$$

$$\left( \frac{1}{R_i^2} \right)' = -\frac{k\kappa}{q_0 R_i^2 (h_1 + Q_i)^2}$$

y

$$\mu = \mu_0$$

$$p = \frac{1}{2} \left( \mu_0 - \frac{q_0}{\Phi^2} + \frac{q_2 \Phi^2}{3r^4} \right)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left( -\mu_0 + \frac{3q_0}{\Phi^2} - \frac{q_2 \Phi^2}{r^4} \right)$$

$$r = -\frac{2}{3} \frac{\Phi^2}{q_2 r^4}$$

$$\beta = \frac{2}{3} k \left( \frac{\Phi^2}{r^2} \right) \xi$$

con

$$\xi^2 = \frac{Z^2}{\Phi^2}, \quad \forall q_2 = k^2 \text{ con } k = cte \in \mathfrak{R} \text{ si } q_2 > 0$$

ó

$$k \in \mathfrak{I} \text{ si } q_2 < 0$$

si  $q_2 = k = 0$  obtenemos la solución encontrada por Wahlquist en 1968

## SOLUCIÓN COMPLETA

## 4.1 Resumen

En la teoría de Maxwell se conocen condiciones de unión; que algunas componentes tienen que satisfacer en la interface entre dos medios; estas condiciones de unión están determinadas por las ecuaciones de Maxwell. Siguiendo un camino análogo se piden ciertas propiedades de continuidad de la métrica en la superficie de la distribución de materia si es que se desea construir una solución completa que nos describa tanto el campo gravitacional exterior como el interior a una distribución de materia. Las apropiadas condiciones de unión son obtenidas a partir de las ecuaciones de campo de Einstein.

Las propiedades de continuidad de la métrica y sus derivadas pueden ser cambiadas por transformaciones de coordenadas o mediante una elección inadecuada de coordenadas. Ante este problema se pueden formular las condiciones de unión en un sistema de coordenadas especial en el cual la frontera es una superficie coordenada  $x^4 = \text{cte}$  y las coordenadas en la vecindad de la frontera son de frontera son coordenadas Gausianas, así que

$$ds^2 = \epsilon (dx^4)^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \epsilon = \pm 1 \quad [4.1.1]$$

( $\epsilon = +1$ , si  $x^4$  es una coordenada espacial). Puesto que las segundas derivadas de la métrica aparecen en las ecuaciones de campo, tenemos que demandar que  $g_{\alpha\beta}$  y  $g_{\alpha\beta,4}$  sean continuas en la superficie de la frontera.

En éste capítulo estudiamos las condiciones indispensables para poder obtener la solución completa a las ecuaciones de Einstein, y se presenta la única solución completa conocida, que es la solución de Schwarzschild.

#### 4.1 Hipersuperficie 3-Dimensional y Fórmulas Reducidas para el Tensor de Curvatura

Las leyes básicas de la física tienen una estructura tal que del conocimiento de un estado presente de un sistema, su evolución futura puede ser determinada. En mecánica, por ejemplo, la trayectoria de una partícula es fijada únicamente especificando su posición inicial y su velocidad inicial; en mecánica cuántica, la ecuación de Schroedinger determina el estado futuro únicamente a partir del conocimiento del valor de la función  $\psi$ . De la misma forma las ecuaciones de campo gravitacional también tienen tal estructura causal. Para apreciar esto tenemos que ver que entendemos por presente y por estado presente. Como preliminar a esto se examina las propiedades de una superficie 3-dimensional en un espacio 4-dimensional.

##### (i) Métrica y tensor proyección

Supongamos que nosotros damos una hipersuperficie 3-dimensional en un espacio 4-dimensional Riemanniano que puede ser imaginado como el elemento de una familia de superficies; el vector normal a estas superficies  $n^a$  tiene que ser no nulo, es decir,

$$n_a n^a = \epsilon = \pm 1 \quad [4.1.1]$$

si nosotros tomamos estas superficies como las superficies coordenadas  $x^4 = cte$  de un sistema coordenado que no es necesariamente ortogonal y denotamos las componentes del vector normal por

$$n_a = (0, 0, 0, \epsilon N), \quad a, b, \dots = 1, \dots, 4 \quad [4.1.2a]$$

$$n^a = \left(-\frac{N^a}{N}, \frac{1}{N}\right), \quad \alpha, \beta, \dots = 1, \dots, 3 \quad [4.1.2b]$$

Entonces el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  de la hipersuperficie

$$d^{(3)}s^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad [4.1.3]$$

y el tensor métrico del espacio 4-dimensional están relacionados por

$$d^{(4)}s^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} (dx^\alpha + N^\alpha dx^4)(dx^\beta + N^\beta dx^4) + \epsilon (N dx^4)^2 \quad [4.1.4]$$

de lo cual obtenemos el tensor inverso

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} + \epsilon \frac{N^\alpha N^\beta}{N^2} & -\epsilon \frac{N^\alpha}{N} \\ -\epsilon \frac{N^\alpha}{N} & \frac{1}{N^2} \end{pmatrix} \quad [4.1.5]$$

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad N_\alpha = g_{\alpha\beta} N^\beta$$

Con la ayuda del tensor de proyección  $h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$ , que tiene las siguientes propiedades

$$h_{ab} h_c^b = h_{ac}, \quad h_{ab} n^a = 0, \quad [4.1.6a]$$

$$h_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad h_b^b = 0 \quad [4.1.6b]$$

se puede descomponer todo tensor en sus componentes paralela o perpendicular a el vector normal a la superficie.



(ii) El tensor de curvatura  $K_{ab}$

Tomando la derivada covariante del vector normal y proyectando se encuentra el tensor  $K_{ab}$  definido por

$$K_{ab} = -n_{a,i} h_b^i = -n_{a,b} + \epsilon n_a n_b \quad [4.1.7a]$$

$$n_{a,b} = n_{a,i} (\epsilon n^i n_b + h_b^i) \quad [4.1.7b]$$

Puesto que  $n_a$  es un vector unitario y es proporcional al gradiente de una familia de superficies,  $K_{ab}$  es simétrico y no tiene componentes en la dirección de la normal a la superficie

$$K_{ab} = K_{ba}, \quad K_{ab} n^a = 0 \quad [4.1.8]$$

sus componentes son combinaciones lineales de los símbolos de christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)\mu}$  del espacio 4-dimensional

$$K_{ab} = -h_a^i h_b^j n_{i;k} = \epsilon N h_a^\alpha h_b^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)\mu} \quad [4.1.9]$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N} (N_{\alpha,\beta} + N_{\beta,\alpha} - 2N_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^{[\lambda]\nu} - g_{\alpha\beta,\lambda})$$

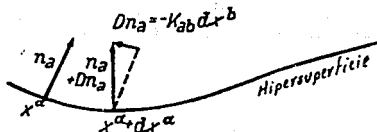


fig. 6

Como se puede ver (figura 6), el tensor  $K_{ab}$  tiene un significado geométrico simple; bajo un movimiento del vector normal a lo largo de la hipersuperficie se tiene

$$Dn_a = n_{a,b} dx^b = -K_{ab} dx^b \quad [4.1.10]$$

$K_{ab}$  es, por tanto una, medida de la curvatura extrínseca de la superficie, esto es de la curvatura en relación con su espacio circundante (en contraste con la curvatura intrínseca, que esta caracterizada por el tensor de curvatura 3-dimensional  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$  de la superficie sola)

Es importante mencionar que esta descomposición es de fundamental importancia en formulaciones alternativas a la formulación de Einstein, principalmente mencionamos a la formulación ADM, para una presentación completa del formalismo ver [42].

(iii) Descomposición de la Derivada de un Vector Perpendicular a  $n_a$

Para la derivada covariante de un arbitrario vector  $T_a$  ortogonal al vector normal  $n_a$  que obedece las siguientes reglas

$$T_a n^a = 0, \quad T^a = (T^a, 0), \quad T_a = (T_a, T_b N^b) \quad [4.1.11]$$

se obtiene después de realizar algunos cálculos, utilizando la ecuación [4.1.8] y que  $n_{a;b} T^a = -n^a T_{a;b}$ , la descomposición

$$T_{a;b} = h_a^i h_b^j T_{i;j} + \epsilon n_b \dot{T}_i h_a^i + \epsilon n_a T^d K_{ib} - n_a n_b T^d \dot{n}_i \quad [4.1.12]$$

puesto que  $h_a^4 = 0$  y

$$\begin{aligned} h_a^i h_b^j T_{i;j} &= h_a^\alpha h_b^\beta (T_{\alpha;\beta} - T_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma 4}) \\ &= h_a^\alpha h_b^\beta [T_{\alpha;\beta} - \frac{1}{2} T^\gamma (g_{\beta\sigma, \alpha} + g_{\rho\alpha, \beta} - g_{\alpha\sigma, \rho})] \end{aligned} \quad [4.1.13]$$

El primer término de esta descomposición, que es totalmente ortogonal a  $n_a$ , puede ser expresado en términos de la derivada covariante de el 3-vector  $T_\alpha$  con respecto a la métrica 3-dimensional  $g_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} h_a^i h_b^j T_{i;j} &= h_a^\alpha h_b^\beta T_{\alpha||\beta} \\ T_{\alpha||\beta} &= T_{\alpha;\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{(3)\gamma} T_\gamma \end{aligned} \quad [14]$$

En la derivación de esta relación sólo la definición de la derivada covariante y la ortogonalidad entre  $T_i$  y  $n_i$  fueron usadas y, por tanto, ecuaciones análogas son válidas para la proyección de la derivada de arbitrarios tensores de rango superior perpendiculares al vector normal.

(iv) Fórmulas Reducidas del Tensor de Curvatura

El objetivo del siguiente cálculo es encontrar una relación entre el tensor de curvatura del espacio 4-dimensional  $R_{abmn}^{(4)}$  y las propiedades de la hipersuperficie, esto es, del tensor de curvatura 3-dimensional  $R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(3)}$  y las cantidades  $n_a$  y  $K_{ab}$

De las ecuaciones [4.1.12] y [4.1.14] y de la relación

$$h_{ab;i} = -(\dot{n}_a n_b + n_a \dot{n}_b) n_i + \epsilon (K_{ai} n_b + K_{bi} n_a) \quad [4.1.15]$$

que resultan a partir de la ecuación [4.1.7a], se obtiene

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(3)} T^\alpha h_b^\beta h_m^\mu h_n^\nu = R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}^{(4)} T^\alpha h_b^\beta h_m^\gamma h_n^\epsilon + \epsilon (K_{nb} K_{m\alpha} - K_{bm} K_{n\alpha}) T^\alpha$$

Puesto que esta relación vale para todo vector  $T^\alpha$ , la relación

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(4)} = R_{\alpha\beta\mu\nu}^{(3)} + \epsilon (K_{\beta\mu} K_{\alpha\nu} - K_{\beta\nu} K_{\mu\alpha}) \quad [4.1.16]$$

es válida entre los tensores de curvatura.

Haciendo transformaciones similares de las segundas derivadas de el vector normal se obtienen las restantes expresiones de las componentes del tensor de curvatura 4-dimensional

$$R_{\rho\mu\nu}^{[4]a} n_a = K_{\rho\nu||\nu} - K_{\rho\mu||\nu} \quad [4.1.17]$$

$$R_{\rho m \nu}^{[4]a} n_a n^m = \dot{n}_{(\rho, \nu)} + K_{\rho\mu} K_{\nu}^{\mu} - \epsilon \dot{n}_{\rho} \dot{n}_{\nu} + \mathcal{L}_n K_{\rho\nu} \quad [4.1.18]$$

donde  $\mathcal{L}_n$  denota la derivada de Lie a lo largo de  $n$

Las fórmulas [4.1.16] y [4.1.18] son frecuentemente usadas para expresar el tensor de curvatura de la métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} + \epsilon N^2 (dx^4)^2, \quad \epsilon = \pm 1$$

En términos del subespacio 3-dimensional (la métrica  $g_{\alpha\beta}$ ) y la función  $N$ . En el caso ( $N^{\alpha} = 0$ ) las ecuaciones se simplifican a

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= -\frac{g_{\alpha\beta,4}}{2N} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu}^{[4]} &= R_{\alpha\beta\mu\nu}^{[3]} + \epsilon(K_{\beta\mu} K_{\alpha\nu} - K_{\beta\nu} K_{\alpha\mu}) \\ R_{\rho\mu\nu}^{[4]4} &= \epsilon \frac{(K_{\rho\nu||\nu} - K_{\rho\mu||\nu})}{N} \\ R_{\rho 4 \nu}^{[4]4} &= \epsilon \frac{K_{\rho\nu,4}}{N} - \frac{N_{\rho||\nu}}{N} + \epsilon K_{\alpha\beta} K_{\nu}^{\alpha} \end{aligned} \quad [4.1.19]$$

### 4.3 Condiciones de Unión

Al resolver las ecuaciones de Einstein uno se enfrenta al problema de unir dos métricas que se obtuvieron en diferentes regiones del espacio-tiempo. Por ejemplo, unir la solución de las ecuaciones de campo

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

válida para una distribución de materia, con la solución obtenida utilizando las ecuaciones

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

válida en la región exterior a dicha distribución.

Este problema lo podemos trabajar bajo las siguientes restricciones

(i) La superficie que limita las dos regiones del espacio-tiempo que se quieren unir (superficie límite) tiene que ser una superficie no nula

(ii) El tensor energía-momento puede ser discontinuo, pero no tiene que contener  $\delta$ -funciones singulares (no tienen que ocurrir en la estructura de la capa de la superficie).

Simplificamos el trabajo al usar un sistema de coordenadas tal que el elemento de línea tenga la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \epsilon N^2 (dx^4)^2 \quad [4.3.1]$$

en ambos lados de la superficie  $x^4 = cte$ . Con las siguientes consideraciones obtenemos algunos resultados cualitativos: Si las componentes del tensor energía-momento son discontinuas, entonces de las ecuaciones de Einstein tendremos que las componentes del tensor de curvatura son también discontinuas; pero si las segundas derivadas de la métrica son menos discontinuas, entonces, la métrica y sus primeras derivadas tienen que ser continuas.

Para tener resultados cuantitativos, se tiene que notar que por una mala elección de coordenadas pueden aparecer discontinuidades artificiales en la métrica. La superficie límite entre dos regiones espaciales I y II tiene que ser una superficie razonable, es decir, si nos aproximamos por I o por II, estas regiones deben tener las mismas propiedades métricas. Para evitar singularidades innecesarias se tiene que introducir el mismo sistema coordenado en ambos sitios de la superficie límite, esto es, sobre la superficie nosotros demandamos que

$$[g_{\alpha\beta}] = g^{I\alpha\beta} - g^{II\alpha\beta} = 0 \quad [4.3.2]$$

y todas las derivadas  $g_{\alpha\beta,\nu\mu\dots}$  de esta métrica tienen también que ser continuas en la superficie. Otra información alrededor de la discontinuidad de la métrica puede ser obtenida analizando las ecuaciones para el tensor de curvatura en su forma reducida

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \frac{-g_{\alpha\beta,4}}{2N} \\ R^{[4]}_{\alpha\beta\mu\nu} &= R^{[3]}_{\alpha\beta\mu\nu} + \epsilon(K_{\beta\mu}K'_{\alpha\nu} - K_{\beta\nu}K'_{\alpha\mu}) \\ R^{[4]}_{\beta\mu\nu} &= \epsilon \frac{(K_{\beta\nu}{}_{||\mu} - K_{\beta\mu}{}_{||\nu})}{N} \\ R^{[4]}_{\beta 4\nu} &= \epsilon \frac{K_{\beta\nu,4}}{N} - \frac{N_{,\beta}{}_{||\nu}}{N} + \epsilon K'_{\alpha\beta} K'_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad [4.3.3]$$

Segundas derivadas de la métrica en dirección de la superficie normal están contenidas sólo en las componentes  $R^{(4)}_{\beta\mu\nu}$  del tensor de curvatura, en consecuencia ellas (segundas derivadas) están en la parte espacial de la ecuación de campo en la combinación

$$\begin{aligned} G_{\beta}^{\alpha} &= \frac{c}{N}(K_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha} K_{\nu}^{\nu})_{,4} + \hat{G}_{\beta}^{\alpha}(K_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, K_{\mu\nu,\lambda}, N, N_{,\lambda}, \dots) \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\beta}^{\alpha} \end{aligned} \quad [4.3.4]$$

Puesto que en [4.2.4] ni  $T_{\beta}^{\alpha}$  ni  $\hat{G}_{\beta}^{\alpha}$  pueden ser singulares en la superficie límite,  $K_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha} K$  y, por tanto  $K_{\alpha\beta}$ , tienen que ser continuas

$$[K_{\alpha\beta}] = K^{[I]}_{\alpha\beta} - K^{[II]}_{\alpha\beta} = 0 \quad [4.3.5]$$

La ecuación [4.3.5] garantiza la igualdad de la curvatura extrínseca en ambos sitios de la superficie límite, la ecuación [4.3.4] demanda igualdad de la curvatura intrínseca. Cuando las condiciones de unión [4.3.2] y [4.3.5] son satisfechas entonces, debido a [4.3.3],  $R^{(4)}_{\alpha\beta\mu\nu}$  y  $N R^{(4)}_{\beta\mu\nu}$  son también continuas, y de las ecuaciones de campo se tiene también

$$[T_{\alpha}^{\alpha}] = 0, \quad [NT_{\alpha}^{\alpha}] = 0 \quad [4.3.6]$$

Resumiendo: si en la superficie límite  $x^4 = cte$  de dos métricas de la forma [4.3.1] el tensor de energía-momento es no singular entonces la métrica  $g_{\alpha\beta}$  y la curvatura  $K_{\alpha\beta} = -\frac{g_{\alpha\beta,4}}{2N}$  de la superficie, así como también las componentes

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \epsilon n_{\alpha} n^{\beta} T_{\beta}^{\alpha} \quad \text{y} \quad NT_{\alpha}^{\alpha} = \epsilon n_{\alpha} T_{\alpha}^{\alpha}$$

del tensor energía-momento, tienen que ser continuas ahí, mientras que una posible discontinuidad de  $N = [g_{44}]^{\frac{1}{2}}$  puede ser eliminada por una transformación de coordenadas,  $T_{\alpha\beta}$  puede ser completamente discontinua; aunque nosotros tenemos

$$[G_{\beta}^{\alpha}] = k[T_{\beta}^{\alpha}]$$

Por ejemplo: para unir las soluciones interior y exterior de Schwarzschild, para satisfacer [4.3.2] se requiere continuidad en la métrica y [4.3.6] se satisface con la condición  $p=0$ ; y la condición [4.3.5] se satisface automáticamente.

#### 4.4 UNIÓN DE LAS MÉTRICAS INTERIOR Y EXTERIOR DE SCHWARZSCHILD

Para conectar la solución interior con la exterior, en la superficie de de la distribución de materia (puede ser una estrella)  $r = r_0$ , requerimos que la métrica  $g_{\mu\nu}$  sea continua en  $r = r_0$  y que la presión desaparezca sobre la superficie de la distribución de materia (estrella) a partir de la ecuación [3.4.13] obtenemos

$$e^{-\lambda} = \frac{2A}{kB - 2AB(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}}} \quad [4.4.1]$$

sustituyendo [4.4.1] en [3.4.11] y despejando  $p$  tenemos

$$p = \frac{1}{k} \left[ \frac{2AB}{B - 2AB(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}}} - k\rho \right] \quad [4.4.2]$$

pero

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{3}k\rho \\ &\Rightarrow \\ \rho &= \frac{3A}{k} \end{aligned}$$

sustituyendo este valor de  $\rho$  en [4.4.2] y después de realizar el álgebra correspondiente obtenemos el siguiente valor para  $p$

$$p = \frac{1}{k} \left[ \frac{3AD(1 - ar^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{Bk}{2}}{\frac{Bk}{2A} - D(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad [4.4.3]$$

queremos continuidad en las funciones métricas, esto es

$$g_{tt}^{int} = g_{tt}^{ext}$$

$$g_{rr}^{int} = g_{rr}^{ext}$$

$\Rightarrow$

$$1 - Ar_0^2 = 1 - \frac{2M}{r_0} \quad [4.4.4]$$

y

$$\left( \frac{kB}{2A} - D(1 - Ar_0^2) \right)^2 = 1 - \frac{2M}{r_0} \quad [4.4.5]$$

si  $p = 0$

$\Rightarrow$

$$\frac{Bk}{2} = 3AD(1 - Ar_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad [4.4.6]$$

resolviendo [4.4.4], [4.4.5] y [4.4.6] para  $M$ ,  $D$  y  $B$  tenemos

$$M = \frac{Ar_0^3}{2}$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$kB = 3A(1 - Ar_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$B$ ,  $M$  y  $D$  funciones de  $\rho$  y  $r_0$

Por tanto el campo gravitacional con simetría esférica de una distribución de materia de fluido perfecto, con densidad constante y radio  $r_0$  es descrita por la solución

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Ar^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - \left[ \frac{3}{2}(1 - Ar_0^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dt^2 \quad [4.4.7]$$

con

$$\rho = cte, A = \frac{1}{3}kp; kp = 3A \frac{\{(1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - Ar_0^2)^{\frac{1}{2}}\}}{3(1 - Ar_0^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - Ar^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dentro de la estrella; y por la solución

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad [4.4.8]$$

con  $M = \frac{1}{2}Ar_0^3$  en el exterior de la estrella

#### 4.5 Conclusiones

La investigación de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein es muy importante ya que permite hasta cierta aproximación describir objetos físicamente realistas. El tipo de soluciones que dan la mejor descripción del campo gravitacional exterior generado por un objeto astrofísico realista son las soluciones que pertenecen a la clase estacionarias axisimétricas. El problema de encontrar este tipo de soluciones exterior se puede considerar como resuelto, con la solución general encontrada por Weyl y las técnicas de generación de soluciones utilizadas para encontrar soluciones a partir de una solución conocida ( métrica semilla). Sin embargo el problema de soluciones interiores que den la descripción de una distribución de masa finita que represente un objeto físicamente realista es un problema difícil de resolver de hecho la única solución interior, con bases físicas, conocidas es la de Schwarzschild que es una solución a presión constante y con simetría esférica, durante este trabajo se estudio una nueva solución interior propuesta por Wahquist en 1968, solución presentada en coordenadas esferoidales prolatas y la cual según se menciona para su derivación se utilizó un formalismo de diadas, formalismo bastante confuso y complicado para su estudio, dado que esta solución fue presentada sin derivación, una de las primeras motivaciones para la elaboración de este trabajo fue tratar de obtener esta solución y tratar de presentarla lo más claramente posible siguiendo el formalismo diádico utilizado, sin embargo, dado que este formalismo no quedó muy claro, fue necesario utilizar otro camino para la derivación de la solución, un primer intento es tratar de cambiar la métrica a coordenadas cilíndricas ya que estas coordenadas son más fáciles de manejar y además son las coordenadas en las que se encuentra la métrica general exterior estacionaria axisimétrica y esto podía permitir una posible unión de métricas que permitiera obtener una posible solución general con la que se pudiera describir el campo gravitacional exterior generado por la distribución de materia y conocer sus propiedades internas (presión, densidad, velocidad, etc) Sin embargo la transformación no fue posible y no se pudo llevar a cabo este propósito. por tanto para revisar esta solución fue necesario tomar la métrica dada por Wahquist y resolver las ecuaciones de Einstein, para obtener y verificar los cantidades físicas dadas por Wahlquist sin derivación. En cuanto al problema de encontrar una solución completa estacionaria axisimétrica, en el sentido antes mencionado, Wahquist habla sobre esta posibilidad en su artículo de 1991, en el cual presenta una generalización de su métrica anterior y plantea la posibilidad de unirla a la solución general exterior, sin embargo esta solución general queda en términos de una función que es solución a una ecuación diferencial difícil de resolver y para mostrar la posibilidad de unión trabaja el caso para densidad constante el cual no presenta el problema de resolver la ecuación diferencial antes mencionada y lo trabaja de manera superficial sin llegar a mencionar la forma de unir.

Por tanto del estudio de este tipo de soluciones podemos concluir que la única solución completa y físicamente realista es la solución de Schwarzschild. Esto es una motivación para estudiar otras posibles soluciones que nos permita conocer el campo gravitacional completo de alguna distribución de materia físicamente realista. Otra posible solución completa se puede buscar para distribuciones de materia axisimétricas estacionarias. Conociendo la solución general exterior axisimétrica estacionaria (capítulo II), una posible solución general interior dada por Wahlquist (capítulo III), y las condiciones de unión entre dos métricas (capítulo IV), se puede intentar construir la solución completa para este tipo de distribución de materia. Wahlquist al presentar su solución interior plantea la posibilidad de la unión con la métrica general exterior, bajo la condición de densidad constante, análogo a la solución completa de Schwarzschild, sin embargo, no presenta los cálculos explícitos y no fue posible hacerlos.

En este trabajo se intentó resolver este problema, siguiendo las condiciones de unión para dos métricas expuestas anteriormente; sin embargo, entre otros problemas está el que las métricas se encuentran en coordenadas diferentes y, una de las condiciones para poder unir las métricas es que ambas estén expresadas en



las mismas coordenadas, por tanto lo primero que se intentó fue pasar las métricas a las mismas coordenadas; desgraciadamente debido al formalismo de diadas empleado para encontrar la solución interior de Wahlquist y la cual está expresada en coordenadas esféricas prolatas no fue posible pasarla a las coordenadas (cilíndricas) de la solución exterior y por tanto no fue posible la unión de estas métricas.

Por último podemos decir que el problema de encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, a un cuando, es un problema difícil dada la complejidad de las ecuaciones, presenta gran interés ya que permite la posibilidad de conocer el campo gravitacional y las propiedades internas de distribuciones finitas de materia que pueden representar objetos astrofísicos físicamente realistas.

## REFERENCIAS

- [1] Weinberg, Steven, *Gravitation and Cosmology*, Massachusetts Institute of Technology, (1972)
- [2] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., Wheeler, Archibald W., *Gravitation*
- [3] Islam, Jamal Nazrul., *Rotating Fields in General Relativity*, Cambridge University Press, (1985)
- [4] Stephani, Hans., *General Relativity*, Cambridge University Press, (1982)
- [5] Schutz, Bernard F., *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, (1985)
- [6] Sarmiento, G. A., *Gravitación*, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., México, (1989)
- [7] Hacyan, Shahan., *Los Hoyos Negros y la Curvatura del Espacio-Tiempo*, (1988)
- [8] Gutsunaev, and Manko V. S., *On a Stationary Generalization of the Schwarzschild Solution*, *Class. Quantum Grav.*, (1989)
- [9] Wahlquist, H. D., *The Problem of Exact Interior Solutions for Rotating Rigid Bodies in General Relativity* (1991)
- [10] Balbinot, Roberto., *Solution of the Einstein-Strauss Problem with  $\Lambda$  Term* **38**, No. 8, 2415- 2418, *Physical Review D*, (1988)
- [11] Hoenselaers, C., Kinnersley, W., and Xanthopoulos, Basilis, C., *Symmetries of the Stationary Einstein-Maxwell Equations Transformations which Generate Asymptotically Flat Space-Times with Arbitrary Multipole Moments* **20**, No. 12, 2530-2536, *J. Math. Phys.*, (1979)
- [12] Quevedo, Hernando, and Mashoon, B., *Exterior Gravitational Field of a Rotating Deformed Mass* **109a**, No. 1,2 , 13-18, *Physics Letters*, (1985)
- [13] Quevedo, Hernando., *Class of Stationary Axisymmetric Solutions of Einstein's Equations in Empty Space* **33**, No. 2, 324-327, *Physical Review D*, (1986)
- [14] Quevedo, Hernando., *Multipole Moments in General Relativity, Static and Stationary Vacuum Solutions* Institute for Theoretical Physics, University of Cologne, (1990)
- [15] Estabrook, Frank B., and Wahlquist, Hugo D., *Dyadic Analysis of Espace-Times Congruences* **5**, No. 11, 1629-1644, *J. Math. Phys.*, (1964)
- [16] Wahlquist, Hugo D., *Interior Solution for a Finite Rotation Body of Perfect Fluid* **172**, No. 5, 1291-1296, *Physical Review*, (1968)

- [17] Ernst, Frederick J., *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem* 168, No. 5, 1415-1417, Physical Review, (1968)
- [18] Manko, V. S., *New Exact Solution for the Exterior Gravitational Field of a Spinning Mass* 64, No. 14, 1625-1627, Physical Review Letters, (1990)
- [19] Kerr, Roy p., *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics* 11, No. 5, 237-238, (1963)
- [20] Ernst, Frederick J., *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational field Problem* 167, No. 5, 1175-1178, Physical Review, (1968)
- [21] Tomimatsu, A., and Sato, H., (1972), Phys. Rev. Lett. 29, 1344
- [22] Tomimatsu, A., and Sato, H., (1973), Prog. Theor. Phys. (lett), 50, 95
- [23] Yamazaki, M, and Hori, S., (1977), Prog. Theor. Phys. (lett), 57, 1696
- [24] Kinnersley, W., (1973), J. Math. Phys. 14, 651
- [25] Kinnersley, W., (1977), J. Math. Phys. 18, 1529
- [26] Cosgrove, C. M., (1977a), J. Phys. A: Math., Gen. 10, 1481
- [27] Cosgrove, C. M., (1977b). J. Phys. A: Math., Gen., 10, 2093
- [28] Geroch, Robert, *A Method for Generating Solutions of Einstein's Equations*, 12, No. 6, 918-925, J. Math. Phys.
- [29] Harrison, B. K., (1978), Phys. Rev. Lett., 41, 1197
- [30] Neugebauer, G., (1980), J. Phys. A : Math. Gen, 13, 1737, L 19
- [31] Belinski, V. A., and Zakharov, V. E., (1978), Soviet. Physics, Jet P, 48, 985
- [32] Hernandez, W., (1967), Phys. Rev., 159, 1070
- [33] Van der Burg, M. G. J., (1968), Proc. Roy. Soc., London, A., 303, 37
- [34] Beig, R., and Simon, W., (1981a), Acta. Phys. Austr. 53, 249
- [35] Thorne, K. S., (1980), Rev. Mod. Phys, 52, 299
- [36] Thirring, H., and Lense, J., (1918), Phys. Z., 19, 156
- [37] Yamazaki, M., (1981), J. Math. Phys., 22, 133

- [38] Dietz, W., and Hoenselaers, C., *A New Class of Bipolar Vacuum Gravitational fields*  
A 382, 221-229, Proc. R. Soc. Lond., (1982)
- [39] Zipoy, D. M., (1966), J. Math. Phys., 7, 1137
- [40] Buchdahl, H. A., *Seventeen Simple Lectures on General Relativity Theory*, (Wiley N. Y.), (1981)
- [41] Núñez, D., and Hojman, S., *Affine Collineations in Riemannian Spaces*  
32, No.1, J. Math. Phys., 234-237, (1991)
- [42] Alejandro, C., y Darío N., *Introducción al Formalismo ADM*  
37, No. 4, 720-747, Revista Mexicana de Física, (1991)
- [43] Kramer, D., Stephani, H., Mac Callum, M., Herit, E., *Exact Solutions of Einstein's field equations*  
Cambridge Univ. Press, (1980)