

Nº 18
2 EJ.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS VARIACIONES DEL
TEOREMA DE MENGER

T E S I S

que para obtener el título de

ACTUARIA

P R E S E N T A

LAURA ELENA CHÁVEZ LOMELÍ

Ciudad Universitaria

1992

FALLA U. MENGER



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
Notación	3
El Teorema de Menger	5
CAPITULO II	
Teoremas Mengerianos para trayectorias largas en digráficas	10
CAPITULO III	
Trayectorias de longitud mayor o igual que tres	29
CAPÍTULO IV	
Resultados relacionados con trayectorias largas	47
CONCLUSIONES	62
BIBLIOGRAFIA	63

INTRODUCCION

Una clase importante de teoremas en la teoría de gráficas, son los teoremas min-max. La mayor parte de estos teoremas pueden ser enunciados también, como teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica cumpla cierta propiedad. Este es el caso del Teorema de Menger que es, sin duda, el teorema fundamental de la conexidad en gráficas.

Para enunciar dicho teorema, considere las siguientes definiciones: Sea G una gráfica conexa y u y v , dos vértices no adyacentes de ésta. Una uv -trayectoria es una trayectoria que une a u con v . Un uv -separador, es un conjunto de vértices que al removerse de G la desconectan de tal forma que u y v quedan en diferentes componentes. Todos los conceptos a los que se hace referencia en esta introducción, se definen formalmente en el primer capítulo de esta tesis.

Así, el Teorema de Menger establece que en una gráfica, dados dos puntos, u y v , no adyacentes, el número máximo de uv -trayectorias disjuntas es igual al número mínimo de puntos que se necesitan para formar un uv -separador.

Al considerar únicamente uv -trayectorias de longitud al menos n fija, se obtiene una variante de este problema. En este caso, al ignorar de esta manera, las trayectorias de longitud menor que n , es claro que el máximo número de trayectorias de longitud al menos n , en una digráfica, no es necesariamente igual al número mínimo de puntos necesarios para romper cada una de estas trayectorias, es decir, se pierde la relación min-max. En [6] Luis Montejano y V. Neumann-Lara plantearon por primera vez este problema e iniciaron el estudio de la función $a_n(h)$, que es el número máximo de uv -trayectorias disjuntas de longitud al menos n , que deben existir en una gráfica que contiene un conjunto de vértices de cardinalidad h , que bloquea todas estas trayectorias. Este artículo fue precedido por la publicación de L. Lovász, V. Neumann-Lara y M. Plummer [5]. en la que se estudió el problema análogo sobre trayectorias de longitud l o lo mas n , dada.

El objetivo central del presente trabajo es exponer los avances conocidos hasta la fecha, en el estudio de la función $a_n(h)$.

El primer capítulo presenta las definiciones, notación y antecedentes del problema que se estudia en este trabajo.

En el segundo capítulo se expone el trabajo publicado en [6], por L. Montejano y V. Neumann-Lara. En esta sección se estudia el problema en su forma mas general, para digráficas y n arbitraria. Se incluyen también demostraciones de resultados análogos sobre ciertas variaciones de este problema.

En el tercer capítulo se exponen resultados para el caso particular $n = 3$, en gráficas no dirigidas, que mejora las cotas que se tienen en el caso general. Estos resultados fueron obtenidos por M. Hager en [2].

En el cuarto capítulo se expone el trabajo publicado por W. Mader en [3]. En esta parte se introduce un problema planteado por T. Gallai, a través del estudio del cual, se obtienen resultados sobre el problema central de esta tesis. Finalmente se presenta una relación sorprendente entre los resultados que se obtienen sobre trayectorias y el conocido Teorema de W. Tutte sobre 1-factores.

CAPITULO I

1.1 NOTACION.

Una gráfica, G , consiste de un conjunto V finito, no vacío de *vértices* o *nodos* o *puntos* y un conjunto predeterminado, E de parejas no ordenadas de vértices. Cada par $e = xy \in E$, es una *arista* de la gráfica y se dice que e *une* o *conecta* a los vértices x y y . Una *gráfica dirigida* o *digráfica* D , consiste análogamente de un conjunto de vértices, V , finito y no vacío y de una colección, E de parejas ordenadas de vértices, a los elementos de E se les llama *flechas*. Al primer vértice de una flecha se le llama *vértice inicial* u *origen* y al segundo elemento, *vértice final*. El conjunto de *aristas* (resp. *flechas*) de una gráfica G (resp. digráfica D) se denota por $E(G)$ ($E(D)$) y el conjunto de *vértices* o *puntos* de ésta, por $V(G)$ ($V(D)$).

Dada una gráfica G y dos vértices $u, v \in V(G)$, se dice que u y v son *adyacentes* o *vecinos*, si existe en la gráfica la arista, uv , que los une. El número de vecinos de un vértice v en una gráfica se llama *valencia* o *grado* del vértice en la gráfica y se denota por $val_G(v)$. A los puntos que son adyacentes a éste se les llamará *vecinos* de v y se denotan $N(v; G)$. En una digráfica, al conjunto de puntos que son el extremo final de una flecha que sale de un vértice v , se le llama *vecindad exterior* y se denota por $N^+(v, D)$. Al conjunto de vértices que son el extremo inicial de una flecha que entra al vértice v , se le llama *vecindad interior* y se denota por $N^-(v, D)$.

En una gráfica dos vértices están unidos por a lo mas una arista, si sucede que dos vértices en G están unidos por mas de una arista, se dice que G es una *multigráfica* y las aristas que unen a un mismo par de vértices se llaman *aristas múltiples*.

Una *subgráfica* H , de una gráfica G , es una gráfica tal que su conjunto de vértices $V(H)$ es un subconjunto de los vértices de G y de la misma manera, su conjunto de aristas es subconjunto de las aristas de G . Se dice que H es una *subgráfica inducida* por el conjunto $X \subseteq V(G)$, en G si $V(H) = X$, $A(H) \subseteq A(G)$ y toda arista de G que une puntos de X , es también una arista de H . se denota por $G[X]$ a la *gráfica inducida* por X en G . A una subgráfica de G , en la que todos los vértices tienen valencia 1, se le llama un *1-factor* de G .

Un conjunto $X \subseteq V(G)$ es *independiente* si ningún par de puntos de X está unido por una arista en G .

Un *camino* $(v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ en una gráfica es una sucesión alternante de vértices y aristas, donde v_0, \dots, v_n son vértices de la gráfica y a_1, \dots, a_n son aristas de la gráfica. Cada arista a_i tiene como extremos a los vértices v_{i-1} y v_i . Tratandose

de un *camino dirigido* en una digráfica, la sucesión es, claramente, de flechas y vértices y se tiene además que para cada flecha a_i , su vértice inicial es v_{i-1} y su vértice final, es v_i .

Una *trayectoria* en una gráfica, es un camino en el cual todos los vértices (y consecuentemente, las aristas) son diferentes. Análogamente, una *trayectoria dirigida* en una digráfica, es un camino dirigido, que no repite vértices. Un *ciclo* es una trayectoria que inicia y termina en el mismo vértice.

Si G es una gráfica y $u, v \in V(G)$, se llama *uv-trayectoria* en G , a una trayectoria con puntos extremos u y v , diferentes. En una *uv-trayectoria* en una digráfica, u será el *vértice inicial* y v el *vértice final* de la misma, en este caso se asume que las trayectorias son dirigidas. Análogamente si $X, Y \subset V(G)$ una *XY-trayectoria* es una *xy-trayectoria* donde $x \in X$ y $y \in Y$.

La *longitud* de una trayectoria T , se define como el número de aristas en ella y se denota por $l(T)$.

Dos trayectorias son *disjuntas* (o *ajenas*), o *mutuamente disjuntas* (o *ajenas*) si no tienen puntos en común y son *internamente disjuntas* o *independientes*, si sus únicos puntos comunes son los extremos, es decir, el primero y el último. Se dice que son disjuntas en aristas si no tienen aristas en común. Un conjunto S de vértices de una gráfica G , es un *uv-separador* si toda *uv-trayectoria* en G contiene un punto de S , un *uv-separador estricto* si no contiene ni a u ni a v . De manera semejante, un *XY-separador* es un conjunto de vértices que intersecta toda *XY-trayectoria* en la gráfica. Un *XY-separador estricto* si no contiene ningún vértice de $X \cup Y$.

Una gráfica G es conexas si para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe un camino en G que los tiene como extremos. Una *componente conexa* de una gráfica es una subgráfica conexas, maximal de G . Al conjunto de *componentes conexas* de una gráfica G , se le denota por $\mathcal{L}(G)$. Se dice que una *componente conexa* es *trivial* si contiene solamente un punto.

Dado un número real x , $[x]$ denota al *menor entero mayor o igual que x* y $\{x\}$ representa a la *parte entera de x* , es decir, al *mayor entero menor o igual que x* .

1.2. EL TEOREMA DE MENGER

Con la intención de hacer una presentación lo mas completa posible, se incluyen en esta sección, algunos resultados que son antecedentes del problema que se estudia en este trabajo.

Teorema de Menger 1.2.1.

Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$ dos vértices tales que la flecha (u, v) no pertenezca a la digráfica. Si todo separador estricto en D tiene al menos h elementos, entonces D contiene h uv -trayectorias internamente disjuntas por pares.

A continuación se da una forma equivalente de éste teorema, en la cual se analiza la misma relación trayectorias - conjuntos separadores, pero se han considerado AB -trayectorias donde A y B son conjuntos de vértices de la digráfica.

Teorema de Menger 1.2.2.

Sean D una digráfica y $A, B \subset V(D)$ dos conjuntos de vértices de la digráfica. Si todo AB -separador en D tiene al menos h elementos, entonces D contiene h AB -trayectorias mutuamente ajenas.

Antes de demostrar la validez de estos resultados, se probará que las dos versiones anteriores son equivalentes. Se incluye una demostración tomada de [7]

Supóngase que se cumple el Teorema 1.2.2, y que se tienen una digráfica D y dos puntos $u, v \in V(D)$ que satisfacen las hipótesis del Teorema 1.2.1.

Sean :

$$A = N^+(u, D),$$

$$B = N^-(v, D)$$

y D' la gráfica inducida por los vértices de D menos $\{u, v\}$.



Figura 1.2.1.

Un AB -separador en D' es, claramente un uv -separador estricto en D , y viceversa. Además toda AB -trayectoria en D' puede completarse a una uv -trayectoria en D y obviamente, si dos AB -trayectorias son disjuntas, las uv -trayectorias obtenidas extendiendo éstas, son internamente disjuntas en D . Véase la Figura 1.2.1.

Aplicando el Teorema 1.2.2, se sabe que hay h AB -trayectorias disjuntas por pares en D' . De acuerdo con las observaciones anteriores, estas h trayectorias dan origen a h uv -trayectorias internamente disjuntas en D y es claro que este sistema de uv -trayectorias es máximo en D con lo que se tiene que se cumple el Teorema 1.2.1.

Ahora se supone que se cumple el Teorema 1.2.1 y se tiene una digráfica D , y dos conjuntos de vértices $A, B \subset V(D)$.

Sea D' la digráfica cuyos vértices son $V(D) \cup \{u, v\}$, y en la cual se respetan las adyacencias de D y se añaden las flechas que unen el vértice u a cada punto de A y las que van de cada vértice de B al punto v , como se muestra en la figura 1.2.2.

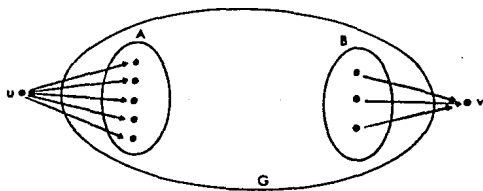


Figura 1.2.2.

Todo uv separador estricto en D' es un AB separador en D y viceversa. Además toda AB -trayectoria en D se puede extender a una uv -trayectoria en D' simplemente añadiendo las flechas que van del vértice u al primer vértice de la trayectoria y de la misma manera, la flecha que va del último punto de la trayectoria al vértice v .

Es claro que si dos uv -trayectorias son internamente disjuntas en D' , las AB -trayectorias obtenidas al restringir éstas a D , serán disjuntas y viceversa. Aplicando el Teorema 1.2.1 se tiene que hay en D' , h uv -trayectorias internamente disjuntas que corresponden a h AB -trayectorias disjuntas por pares en D , con lo que se tiene que se cumple el Teorema 1.2.2.

□

Habiendo probado la equivalencia de los teoremas 1 y 2, se incluye ahora una demostración de la segunda versión, tomada de [7] y debida a Pym.

A lo largo de este capítulo, dada una trayectoria T y dos vértices en ella, a y b , se denota por $T[a, b]$ a la subtrayectoria de T que inicia en a y termina en b .

Demostración :

Sea S un conjunto AB -separador en D con cardinalidad mínima, sea $n = |S|$. La prueba es por inducción sobre el peso de la digráfica, definido como $\pi(D) = |V(D)| + |F(D)|$.

Si $\pi(D) = 1$, la única posibilidad es que $|V(D)| = 1$, $F(D) = 0$ y en este caso el resultado se cumple trivialmente.

Supongamos ahora que el resultado ha sido probado cuando $\pi(D) < k$ y sea D tal que $\pi(D) = k$. Dos casos son posibles:

I) Existe un AB -separador $Z \neq A, B$ con $|Z| = n$.

Sea D'_{AZ} la subdigráfica de D que es unión de todas las AZ -trayectorias, cuyo conjunto de vértices internos queda totalmente contenido en la componente conexa de A , en $D - Z$, a estas trayectorias se les llamará, AZ -trayectorias directas en D . Defínase D_{AZ} de modo que :

$$V(D_{AZ}) = V(D'_{AZ}) \cup A \cup Z, \quad F(D_{AZ}) = F(D'_{AZ}).$$

Análogamente (dualmente) sea D'_{ZB} la subdigráfica de D que es unión de todas las ZB -trayectorias cuyo conjunto de vértices internos queda totalmente contenido en la componente conexa de B , en $D - Z$, a estas trayectorias se les llamará, ZB -trayectorias directas en D . Igual que antes, se define D_{ZB} de manera que :

$$V(D_{ZB}) = V(D'_{ZB}) \cup Z \cup B, \quad F(D_{ZB}) = F(D'_{ZB}).$$

Como $|B| \geq |Z|$ y $B \neq Z$, $B-Z \neq \emptyset$. Sea $b \in B-Z$. Se probará que $b \notin V(D_{AZ})$ se tendría $b \in A-Z$ o bien b sería punto interior de alguna AZ -trayectoria directa en D . En ambos casos Z no sería AB -separador en D . Luego $\pi(D_{ZB}) < k$. Si S es un AZ -separador en D_{AZ} , S es un AB -separador en D , pues cada AB -trayectoria en D pasa por Z y contiene por lo tanto a una AZ -trayectoria directa la cual por estar contenida en D_{AZ} debe pasar por S . Se sigue que $|S| \geq n$. Aplicando la hipótesis de inducción, D_{AZ} contiene n AZ -trayectorias mutuamente ajenas T_1, \dots, T_n que terminan en z_1, \dots, z_n respectivamente, las cuales podemos suponer directas.

Dualmente D_{ZB} contiene n ZB -trayectorias directas mutuamente ajenas T'_1, \dots, T'_n las cuales se inician en z_1, \dots, z_n respectivamente. Figura 1.2.3.

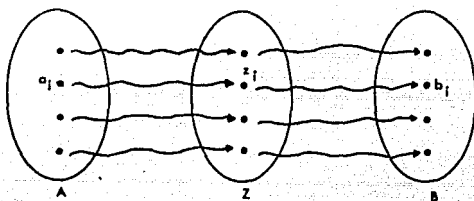


Figura 1.2.3.

Se tiene :

$$V(T_i) \cap V(T'_j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j, \\ z_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

pues si se tuviera $w \in V(T_i) \cap V(T'_j)$ con $w \notin Z$ yuxtaponiendo $T_i[a_i, w]$ y $T'_j[w, b_j]$, donde a_i es el origen de T_i y b_j es el final de T'_j , se obtendría una AB -trayectoria en D que elude a Z lo cual es imposible ya que Z es un AB -separador.

$T_1 \cup T'_1, T_2 \cup T'_2, \dots, T_n \cup T'_n$ forman un haz de n AB -trayectorias mutuamente disjuntas en D .

II) Si Z es un AB -separador tal que $|Z| = n$ entonces $Z = A$ ó B .

Podemos suponer, por dualidad, que $|A| \leq |B|$. Sea Z un AB -separador en D tal que $|Z| = n$. Sabemos que $Z = A$ o $Z = B$. Como A es un AB -separador y $|A| \leq |Z| = n$, se tiene $|A| = n$. Si $A \subset B$, los n vértices de A , son las n trayectorias buscadas. Si $A \not\subset B$ probaremos primero que existe una flecha ax en D con $a \in A - B$ y sea $A_1 = A - a$. Como $|A_1| = n - 1$, A_1 no separa A de B en D . Luego existe una AB -trayectoria en $D - A_1$. Como $a \notin B$,

dicha trayectoria usa una flecha ax con $x \in A$. Sea $D_1 = D - ax$. Nótese que $\pi(D_1) = \pi(D) - 1 < k$. Sea W un AB -separador en D_1 de cardinalidad mínima. Si $|W| = n$, D_1 contiene n AB -trayectorias mutuamente disjuntas y por lo tanto D también.

Si $|W| < n$ tanto $W \cup \{a\}$ como $W \cup \{x\}$ son AB -separadores en D con cardinalidad menor o igual a n lo cual implica que ambos tienen cardinalidad n y cada uno de ellos debe coincidir por lo tanto con A o B . Se sigue que $A = W \cup \{a\}$ y $B = W \cup \{x\}$ ya que $a \notin B$ y $x \notin A$. Las n AB -trayectorias buscadas consisten en los $n-1$ vértices de W y la flecha ux con lo cual se concluye la demostración.

□

CAPITULO II

TEOREMAS MENGERIANOS PARA TRAYECTORIAS LARGAS EN DIGRAFICAS

En este capítulo se inicia la exposición de los resultados que se conocen sobre el problema de trayectorias largas, mencionado en la introducción, que es el problema central de esta tesis. Considere la siguiente definición:

Sea D una digráfica, $S \subset V(D)$ y $u, v \in V(D) - S$, para $n \geq 2$, se escribe $(u, S, v)_D^n$ si y sólo si toda uv -trayectoria de longitud mayor o igual que n , tiene al menos un vértice en S .

El problema en cuestión, puede enunciarse formalmente como sigue:

Dados una digráfica D , un número $n \geq 2$ y un par de puntos $u, v \in V(D)$ ¿Qué relación existe entre el número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n en D y la cardinalidad mínima, h de un conjunto, S que intersecta a todas estas trayectorias?

Claramente se tiene que para $n = 2$, el Teorema de Menger proporciona la respuesta a esta pregunta. Utilizando la notación definida arriba, se sabe por el Teorema de Menger que una digráfica D tiene h uv -trayectorias disjuntas, si y sólo si el conjunto mas pequeño, $S \subseteq V(D) - \{u, v\}$ tal que $(u, S, v)_D^2$, tiene cardinalidad $|S| = h$.

Para $n \geq 3$ esta relación no siempre se satisface. Considere la digráfica representada en la figura 2.1, donde $n = 3$. Cualquier subconjunto de al menos 2 vértices de $\{1, 2, 3\}$, corresponde a una uv -trayectoria de longitud al menos 3, en la digráfica. Dado que $|V(D) - \{u, v\}| = 3$ y cada trayectoria de longitud al menos 3 tiene por lo menos dos vértices internos, no existen en D , 2 uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud mayor o igual que 3. Por otra parte, para que un conjunto $S \subseteq V(D) - \{u, v\}$ intersekte toda uv -trayectoria de longitud al menos 3 en D , es necesario incluir en S al menos 2 vértices de $V(D) - \{u, v\}$. De acuerdo con lo anterior, se tiene que en esta digráfica el número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas y de longitud mayor o igual que 3 es 1, mientras que la cardinalidad de un conjunto S que satisface $(u, S, v)_D^3$, es al menos 2.

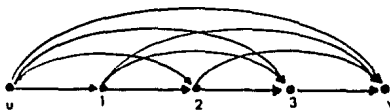


Figura 2.1.

El siguiente teorema proporciona una cota inferior para el número máximo de trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n , en una digráfica D , en términos del tamaño de los conjuntos de vértices, S tales que $(u, S, v)_D$.

Teorema 2.1.

Sean D una digráfica, $u, v \in V(D)$ y $n \geq 2$. Si todo conjunto $S \subseteq V(D) - \{u, v\}$ tal que $(u, S, v)_D$ satisface $|S| \geq h$, entonces existen $\left\lfloor \frac{h}{(3n-5)} \right\rfloor$ uv -trayectorias internamente disjuntas en D , de longitud al menos n .

Demostración.

Sea t el número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas de longitud al menos n , y $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ un conjunto de dichas trayectorias, elegido de tal forma que $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$ toma el valor mínimo posible.

Sea P_i el conjunto formado por los primeros $n-2$ puntos interiores de T_i y Q_i el conjunto formado por los últimos $n-2$ puntos interiores de T_i , se definen los conjuntos $P = \bigcup_{i=1}^t P_i$ y $Q = \bigcup_{i=1}^t Q_i$.

Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ una colección de uv -trayectorias que cumplen las siguientes condiciones:

- i) u es el punto inicial de C_i $i = 1, \dots, t$,
- ii) C_i es la trayectoria trivial consistente en un único punto $a_i = u$, o bien $V(C_i) \cap V(T_1 \cup \dots \cup T_t) = \{u, a_i\}$, donde $a_i \in T_i - (P_i \cup Q_i \cup \{u, v\})$ es el punto final de C_i $i = 1, \dots, t$,
- iii) $V(C_i) \cap V(C_j) = \{u\}$ si $i \neq j$.

En la figura 2.2, se muestran los conjuntos P y Q y las trayectorias C_i .

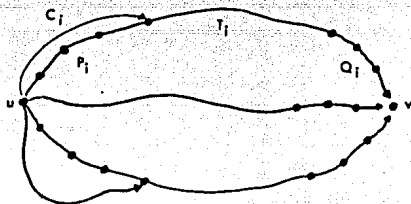


Figura 2.2.

Sea T_i' la subtrayectoria de T_i que inicia en a_i y termina en v , y sea T_i'' la subtrayectoria de T_i que inicia en u y termina en a_i .

Es claro que si $\ell(C_i) \neq 0$ entonces $\ell(C_i) \geq n-1$ pues de no ser así, sustituyendo T_i'' por C_i se obtiene una trayectoria \tilde{T}_i de menor longitud que T_i con lo cual se contradice la minimalidad de $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_i)$. Observe la figura 2.3.

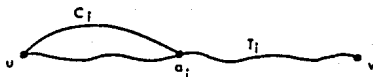


Figura 2.3.

Sea R_i el conjunto formado por los primeros $n-2$ puntos interiores de C_i , si $\ell(C_i) \neq 0$; o por el conjunto vacío, $R_i = \emptyset$, si $\ell(C_i) = 0$. Se define $R = \bigcup_{i=1}^t R_i$.

Se puede suponer que las trayectorias $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ son tales que

$$\ell(T_1') + \ell(T_2') + \dots + \ell(T_t'),$$

toma el valor mínimo posible. Si Γ es una uv -trayectoria en D de longitud al menos n , que no interseca al conjunto $P \cup Q \cup R$, entonces por la maximalidad de t , Γ interseca a :

$$\left(\bigcup_{i=1}^t T_i \right) - \{u, v\}.$$

Sea α el primer punto de Γ que pertenece a

$$V\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)\right) - \{u, v\}.$$

Observe que α no puede ser un punto de T'_i , pues de ser así, al sustituir C_i por la sección de Γ que va de u a α , se obtendría una nueva colección de trayectorias C_i , $1 \leq i \leq t$ para la cual $\ell(T'_1) + \ell(T'_2) + \dots + \ell(T'_t)$ es menor. De aquí se sigue que:

$$\alpha \in V\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T''_i)\right) - (P \cup R).$$

Sea Δ la colección de todos los conjuntos $Z = \{x_1, \dots, x_t\}$ tales que:

$$x_i \in T'_i - \{u, v\}, \quad i = 1, \dots, t,$$

es decir, Z es un conjunto de puntos de $\bigcup_{i=1}^t V(T_i)$ que interseca a todas las trayectorias más allá de a_i , para cada i . Supóngase que $t < \left\lfloor \frac{h}{3n-5} \right\rfloor$. Observe que bajo esta suposición, para cada conjunto $Z \in \Delta$ se cumple que:

$$|P \cup Q \cup R \cup Z| \leq t(n-2) + t(n-2) + t(n-2) + t = t(3n-5) < h,$$

y como se sabe que $(u, S, v)_D^h$ implica que $|S| \geq h$ entonces debe existir una uv -trayectoria Γ_z de longitud al menos n que no interseca a:

$$P \cup Q \cup R \cup Z.$$

Por lo tanto Γ_z interseca $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) - \{u, v\}$ por primera vez en:

$$\alpha_z \in V\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T''_i)\right) - (P \cup R).$$

Sea Γ'_z la subtrayectoria de Γ_z con punto inicial α_z y punto final v . Considere la subdigráfica D_0 de D definida como sigue:

$$D_0 = \bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \cup \bigcup_{Z \in \Delta} \Gamma'_z,$$

es decir, los vértices y flechas de D_0 son los de éstas trayectorias. Claramente toda uv -trayectoria en D_0 contiene a P_i o R_i para alguna i , de donde toda uv -trayectoria en D_0 tiene longitud al menos n .

Para separar u y v en $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ se necesitan al menos t puntos, más aún, todo separador Z en t puntos pertenece a Δ , véase la figura 2.4.

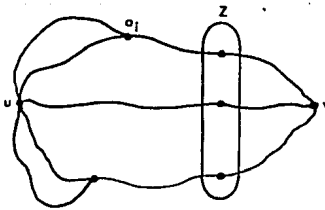


Figura 2.4.

Pero dado que $\Gamma'_z \subset D_0$, se sigue que Z no separa u y v en D_0 , pues sabemos que $\Gamma_z \cap Z = \emptyset$ y por lo tanto $(u, S, v)_{D_0}^2$ implica $|S| \geq t + 1$.

Usando el Teorema de Menger en su versión original, se sabe que existen al menos $t + 1$ uv -trayectorias internamente disjuntas en D_0 , cada una de ellas de longitud al menos n , lo cual contradice la maximalidad de t y por lo tanto se obtiene que

$$t \geq \left\lceil \frac{h}{3n - 5} \right\rceil,$$

que es el resultado que se buscaba demostrar. □

A continuación se enuncian teoremas que se refieren a algunas variaciones del problema de trayectorias largas y en cuyas demostraciones, se emplean las mismas técnicas utilizadas en la prueba de Teorema 2.1.

Teorema 2.2.

Sean $H_1, H_2 \subseteq V(G)$, $n \geq 2$ y $S \subseteq V(D)$ tales que $(H_1, S, H_2)_D^n$ implica $|S| \geq h$ entonces existen $\lceil h/(3n - 2) \rceil$ $H_1 H_2$ -trayectorias disjuntas por pares y de longitud al menos n en D .

Demostración :

Sea t el máximo número de $H_1 H_2$ -trayectorias disjuntas por pares, de longitud al menos n y $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ un conjunto de dichas trayectorias elegido de tal forma que $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$, toma el valor mínimo posible.

Para cada trayectoria T_i , $1 \leq i \leq t$ sean u_i el punto inicial y v_i el final, P_i el conjunto formado por los primeros $n-1$ puntos de T_i y Q_i el conjunto formado por los últimos $n-1$ puntos de T_i . Se definen: $P = \bigcup_{i=1}^t P_i$ y $Q = \bigcup_{i=1}^t Q_i$.

Observe que en la demostración anterior no se incluye, en la definición de los conjuntos P_i y Q_i , a los puntos u y v , mientras que en este caso los puntos extremos de las trayectoria T_i , son incluidos en estos conjuntos. El cambio se debe a que en este caso, se consideran trayectorias disjuntas por pares y conjuntos separadores no necesariamente estrictos mientras que en el teorema anterior, se trataba de trayectorias internamente disjuntas y separadores estrictos.

Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ una colección de trayectorias que cumplen las siguientes condiciones:

- i) $b_i \in H_1$ es el punto inicial de C_i $i = 1, \dots, t$,
- ii) C_i es la trayectoria trivial consistente en un único punto $b_i = u_i \in H_1$, o $V(C_i) \cap V(T_1 \cup \dots \cup T_t) = \{a_i\}$, donde $a_i \in T_i - (P_i \cup Q_i \cup \{u_i, v_i\})$ es el punto final de C_i $i = 1, \dots, t$,
- iii) $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

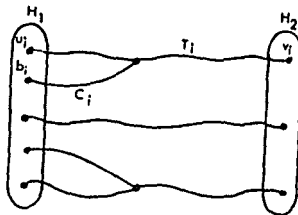


Figura 2.5.

Como se ilustra en la figura 2.5, las trayectorias C_i definidas para esta prueba, no inician en el punto inicial de la trayectoria T_i correspondiente, pueden comenzar en cualquier vértice de H_1 que no sea vértice inicial de ninguna otra trayectoria T_j o C_j . Obsérvese que las trayectorias T_i y C_i , sólo pueden intersectarse en el último punto.

Sea T_i' la subtrayectoria de T_i que inicia en a_i y termina en v_i , y sea T_i'' la subtrayectoria de T_i que inicia en b_i y termina en a_i .

Nótese que si $\ell(C_i) \neq 0$ entonces $\ell(C_i) \geq n-1$ pues de no ser así, sustituyendo T_i'' por C_i se contradice la minimalidad de: $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$.

Sea R_i el conjunto formado por los primeros $n-1$ puntos de C_i si $\ell(C_i) \neq 0$ y $R_i = \emptyset$ si $\ell(C_i) = 0$. Se define:

$$R = \bigcup_{i=1}^t R_i.$$

De la misma manera como se hizo para P_i y Q_i , en la definición de estos conjuntos R_i , se incluye a los vértices iniciales de cada trayectoria C_i .

Puede suponerse que $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ son tales que $\ell(T'_1) + \ell(T'_2) + \dots + \ell(T'_t)$, toma el valor mínimo posible. Si Γ es una $H_1 H_2$ -trayectoria en D de longitud al menos n , que no intersecta al conjunto $P \cup Q \cup R$, entonces por la maximalidad de t , Γ intersecta a :

$$\left(\bigcup_{i=1}^t T_i \right).$$

Sea α el primer punto de Γ que pertenece a

$$V \left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \right),$$

entonces :

$$\alpha \in V \left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \right) - (P \cup R),$$

pues de no ser así, al sustituir C_i donde i es tal que $\alpha \in V(T_i)$, por la subtrayectoria de Γ que va de H_1 a a_i , se tendría un sistema de trayectorias C_i con las características deseadas y un valor menor para $\ell(T'_1) + \ell(T'_2) + \dots + \ell(T'_t)$ que se había supuesto mínimo posible.

Sea Δ la colección de todos los conjuntos de puntos $Z = \{x_1, \dots, x_t\}$ tales que:

$$x_i \in T'_i, \quad i = 1, \dots, t,$$

es decir, Z intersecta a todas las trayectorias, mas allá de a_i . Supóngase que $t < \left\lfloor \frac{h}{3n-2} \right\rfloor$. Observe que bajo esta suposición para todo conjunto $Z \in \Delta$ se cumple que :

$$|P \cup Q \cup R \cup Z| \leq t(n-1) + t(n-1) + t(n-1) + t = t(3n-2) < h,$$

y como se sabe que $\langle H_1, S, H_2 \rangle_D^n$ implica que $|S| \geq h$ entonces debe existir una $H_1 H_2$ -trayectoria Γ_z de longitud al menos n que no intersecta a:

$$P \cup Q \cup R \cup Z.$$

Sean u_z y v_z los puntos inicial y final de Γ_z , se sabe que Γ_z interseca $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ por primera vez en :

$$\alpha_z \in V\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)\right) - (P \cup R).$$

Sea Γ'_z la subtrayectoria de Γ_z con punto inicial α_z y punto final $v_z \in H_2$. Considérese la siguiente subdigráfica de D :

$$D_0 = \bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \cup \bigcup_{Z \in \Delta} \Gamma'_z,$$

toda H_1H_2 -trayectoria en D_0 contiene, a P_i o a R_i , para alguna i , de donde toda H_1H_2 -trayectoria en D_0 tiene longitud al menos n .

Para separar H_1 y H_2 en $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ se necesitan al menos t puntos, mas aún, todo separador Z en t puntos pertenece a Δ .

Dado que $\Gamma'_z \subset D_0$ se sigue que Z no separa H_1 y H_2 en D_0 , pues sabemos que $\Gamma_z \cap Z = \emptyset$ y por lo tanto $(H_1, S, H_2)_{D_0}^Z$ implica $|S| \geq t + 1$.

Usando el Teorema de Menger tenemos que existen al menos $t + 1$ H_1H_2 -trayectorias internamente disjuntas en D_0 , cada una de ellas de longitud al menos n , lo cual contradice la maximalidad de t y se concluye la demostración. □

Sea D una digráfica y $H_1, H_2 \subset V(D)$ dos conjuntos de vértices de ésta. Una H_1H_2 -pseudotrayectoria es o bien una H_1H_2 -trayectoria o un ciclo dirigido con un único punto en $H_1 \cup H_2$ y el resto en $V(D) - (H_1 \cup H_2)$.

Vía esta definición, se puede enunciar el siguiente teorema que proporciona una cota para el número máximo de H_1H_2 -pseudotrayectorias disjuntas de longitud al menos n en una digráfica, en función de la cardinalidad mínima de un conjunto que interseca todas las H_1H_2 -pseudotrayectorias de longitud al menos n , en D .

Teorema 2.3.

Sean $n \geq 2$ y D una digráfica que cumple con la siguiente propiedad :

Para todo $S \subset V(D) - \{H_1 \cup H_2\}$ que interseca cada H_1H_2 -pseudo trayectoria de longitud al menos n , se tiene que $|S| \geq h$. Entonces D tiene $\lfloor h/(3n - 5) \rfloor$ H_1H_2 -pseudotrayectorias internamente disjuntas de longitud al menos n .

Demostración:

Sea t el máximo número de H_1H_2 -pseudotrayectorias disjuntas por pares, de longitud al menos n y $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ un conjunto de dichas pseudotrayectorias, elegido de tal forma que $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$, toma el mínimo valor posible.

Para cada pseudotrayectoria T_i sean u_i el punto inicial y v_i el final. Note que u_i puede ser igual a v_i si T_i es un ciclo y $u_i = V(T_i) \cap (H_1 \cup H_2)$.

Sea P_i el conjunto formado por los primeros $n-2$ puntos internos de T_i y Q_i el conjunto formado por los últimos $n-2$ puntos interiores de T_i , se definen: $P = \bigcup_{i=1}^t P_i$ y $Q = \bigcup_{i=1}^t Q_i$.

Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ una colección de trayectorias que cumplen las siguientes condiciones:

i) $b_i \in \{H_1 \cup H_2\}$ es el punto inicial de C_i $i = 1, \dots, t$. Si T_i es un ciclo con un vértice en H_2 , la trayectoria C_i correspondiente puede comenzar en un vértice de H_2 , pero sólo en este caso una C_i iniciará en H_2 .

ii) C_i es la trayectoria trivial consistente en un único punto, $a_i = u_i \in \{H_1 \cup H_2\}$,

o $V(C_i) \cap V(T_1 \cup \dots \cup T_t) \subseteq \{u_i, a_i\}$, donde $a_i \in T_i - (P_i \cup Q_i \cup \{u_i, v_i\})$ es el punto final de C_i $i = 1, \dots, t$.

iii) $V(C_i) \cap V(C_j) \subseteq \{u_i, u_j\}$ si $i \neq j$. Es decir las trayectorias C_i sólo pueden intersectarse en el punto inicial. Recuerde que en este caso, las pseudotrayectorias T_i , son ajenas por pares.

En la figura 2.6, se muestran las trayectorias C_i y los conjuntos P y Q .

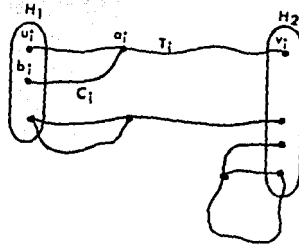


Figura 2.6.

Sea T_i' la subtrayectoria de T_i que inicia en a_i y termina en v_i , y sea T_i'' la subtrayectoria de T_i que inicia en u_i y termina en a_i .

Nótese que si $\ell(C_i) \neq 0$ entonces $\ell(C_i) \geq n-1$ pues de no ser así, sustituyendo T_i'' por C_i se contradice la minimalidad de: $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$.

Sea R_i el conjunto formado por los primeros $n-2$ puntos interiores de C_i si $\ell(C_i) \neq 0$ y $R_i = \emptyset$ si $\ell(C_i) = 0$. Se define:

$$R = \bigcup_{i=1}^t R_i.$$

Se puede suponer que $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ son tales que $\ell(T_1') + \ell(T_2') + \dots + \ell(T_t')$ toma el valor mínimo posible. Si Γ es una $H_1 H_2$ -pseudotrayectoria en D de longitud al menos n , que no interseca al conjunto $P \cup Q \cup R$, entonces por la maximalidad de t , Γ interseca a :

$$\left(\bigcup_{i=1}^t T_i \right).$$

Sea α el primer punto de Γ que pertenece a

$$V \left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \right),$$

entonces

$$\alpha \in V \left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i'') \right) - (P \cup R),$$

pues de no ser así, al sustituir C_i , donde i es tal que $\alpha \in V(T_i)$, por la subtrayectoria de Γ que va de H_1 a α , se tendría un sistema de trayectorias C_i con las características deseadas y un valor menor para $\ell(T_1') + \ell(T_2') + \dots + \ell(T_t')$, que se había supuesto mínimo posible.

Sea Δ la colección de todos los conjuntos $Z = \{x_1, \dots, x_t\}$ tales que:

$$x_i \in T'_i - \{u_i, v_i\}, \quad i = 1, \dots, t,$$

es decir, Z intersecciona a todas las pseudotrayectorias mas allá de α_i . Supóngase que $t < \left\lfloor \frac{h}{3n-5} \right\rfloor$. Bajo esta suposición se tiene, una vez mas, que para todo conjunto $Z \in \Delta$ se cumple que :

$$|P \cup Q \cup R \cup Z| \leq t(n-2) + t(n-2) + t(n-2) + t = t(3n-5) < h,$$

y como se sabe que $\langle H_1, S, H_2 \rangle_D^h$ implica que $|S| \geq h$ entonces debe existir una H_1H_2 -pseudotrayectoria Γ_Z de longitud al menos n que no intersecciona a:

$$P \cup Q \cup R \cup Z.$$

Sean u_Z y v_Z los puntos inicial y final de Γ_Z , se tiene que Γ_Z intersecciona $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ por primera vez en :

$$\alpha_Z \in V \left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T'_i) \right) - (P \cup R).$$

Sea Γ'_Z la subtrayectoria de Γ_Z con punto inicial α_Z y punto final $v_Z \in \{H_1 \cup H_2\}$.

Considérese la siguiente subdigráfica de D :

$$D_0 = \bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \cup \bigcup_{Z \in \Delta} \Gamma'_Z,$$

toda H_1H_2 -pseudotrayectoria en D_0 contiene, a P_i o a R_i para alguna i , de donde toda H_1H_2 -pseudotrayectoria en D_0 tiene longitud al menos n .

Para separar H_1 y H_2 en $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ se necesitan al menos t puntos, mas aún, todo separador Z en t puntos pertenece a Δ .

Dado que $\Gamma'_Z \subset D_0$ se sigue que Z no separa H_1 y H_2 en D_0 , pues sabemos que $\Gamma_Z \cap Z = \emptyset$ y por lo tanto $\langle H_1, S, H_2 \rangle_{D_0}^h$ implica $|S| \geq t+1$.

Usando el Teorema de Menger tenemos que existen al menos $t+1$ H_1H_2 -pseudotrayectorias internamente disjuntas en D_0 , cada una de ellas de longitud al menos n , lo cual contradice la maximalidad de t .

□

La utilización del concepto de pseudotrayectoria permite considerar ciclos dirigidos además de trayectorias. El siguiente corolario es una aplicación del resultado anterior para pseudotrayectorias, obteniendo un resultado sobre ciclos dirigidos que se intersectan en un sólo punto.

Corolario 2.1.

Sean D una digráfica y $v_0 \in V(D)$ tales que se satisface la siguiente propiedad :

para todo $S \subset V(D) - \{v_0\}$ que intersecta cada ciclo dirigido de longitud al menos n , se cumple que $|S| \geq h$. Entonces D tiene $\lceil \frac{h}{3n-5} \rceil$ ciclos dirigidos de longitud al menos n cuya intersección por pares es v_0 .

Demostración.

Tome $H_1 = H_2 = \{v_0\}$, todo ciclo dirigido de longitud al menos n que incluye a v_0 , es una H_1H_2 -pseudotrayectoria y viveversa. Aplicando el teorema anterior se sigue el resultado. □

A continuación se enuncia la versión para flechas del Teorema 2.1, es decir, las trayectorias consideradas son disjuntas en flechas y los conjuntos separadores de que se habla son conjuntos de flechas. Con la siguiente definición se hereda la notación que se ha utilizado hasta el momento, para esta variación del problema.

Sea D una digráfica, $u, v \in V(D)$ y sea $S \subset E(D)$ un conjunto de flechas en D . Escribimos $(u, S, v)_D^n$ $n \geq 2$ si y sólo si toda uv -trayectoria de longitud mayor o igual que n en D , tiene una flecha en S .

Teorema 2.4.

Sea $n \geq 2$, si $S \subset E(D)$ y $(u, S, v)_D^n$ implica $|S| \geq h$ entonces existen $\lceil \frac{h}{3n-2} \rceil$ uv - trayectorias disjuntas en flechas y de longitud al menos n en D .

Demostración.

Sea t el número máximo de uv -trayectorias disjuntas en flechas, de longitud al menos n , y $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ un conjunto de tales trayectorias, elegido de tal forma que $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$ toma el valor mínimo posible.

Sea P_i el conjunto formado por las primeras $n-1$ flechas de T_i y Q_i el conjunto formado por las últimas $n-1$ flechas de T_i , se definen los conjuntos $P = \bigcup_{i=1}^t P_i$ y $Q = \bigcup_{i=1}^t Q_i$.

Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ una colección de uv -trayectorias que cumplen las siguientes condiciones:

- i) u es el punto inicial de C_i $i = 1, \dots, t$,
- ii) C_i es la trayectoria trivial consistente en un único punto $a_i = u$, o $V(C_i) \cap V(T_1 \cup \dots \cup T_t) = \{u, a_i\}$, donde $a_i \in T_i - \{u, v\}$ es el punto final de C_i $i = 1, \dots, t$ y a_i no es vértice interior de las subtrayectorias definidas por P_i y Q_i .
- iii) $A(C_i) \cap A(C_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

En la figura 2.7, se pueden ver las trayectorias C_i y los conjuntos P y Q .

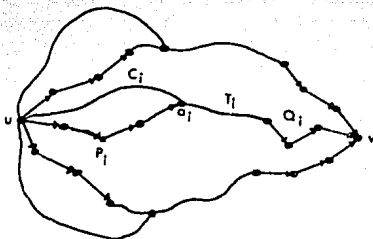


Figura 2.7.

Sea T'_i la subtrayectoria de T_i que inicia en a_i y termina en v , y sea T''_i la subtrayectoria de T_i que inicia en u y termina en a_i .

Es claro que si $\ell(C_i) \neq 0$ entonces $\ell(C_i) \geq n-1$ pues de no ser así, sustituyendo T''_i por C_i se obtiene una trayectoria \hat{T}_i de menor longitud que T_i con lo cual se contradice la minimalidad de $\ell(T_1) + \ell(T_2) + \dots + \ell(T_t)$.

Sea R_i el conjunto formado por las primeras $n-1$ flechas de C_i si $\ell(C_i) \neq 0$ y $R_i = \emptyset$ si $\ell(C_i) = 0$. Se define $R = \bigcup_{i=1}^t R_i$.

Nuevamente se puede suponer que las trayectorias $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ son tales que $\ell(T'_1) + \ell(T'_2) + \dots + \ell(T'_t)$ toma el valor mínimo posible. Si Γ es una uv -trayectoria en D de longitud al menos n que no interseca al conjunto $P \cup Q \cup R$, entonces por la maximalidad de t , se sabe que Γ interseca a :

$$\left(\bigcup_{i=1}^t T_i \right).$$

Sea α la primera flecha de Γ que pertenece a

$$A\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)\right),$$

al igual que en las demostraciones anteriores, se sabe que :

$$\alpha \in A\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T'_i)\right) - (P \cup R),$$

pues de no ser así, al sustituir la trayectoria C_i con i tal que $\alpha \in T_i$, por la sección de Γ que va de u a α , se tendría un sistema de trayectorias C_i , con las características deseadas y un valor menor para $\ell(T'_1) + \ell(T'_2) + \dots + \ell(T'_t)$ que se había supuesto mínimo posible.

Sea Δ la colección de todos los conjuntos de flechas $Z = \{x_1, \dots, x_t\}$ tales que:

$$x_i \in T'_i, \quad i = 1, \dots, t,$$

es decir, Z intersecciona a todas las trayectorias mas allá de a_i . Supóngase que $t < \left\lfloor \frac{h}{3n-2} \right\rfloor$. Observe que bajo esta suposición para todo conjunto $Z \in \Delta$ se cumple que :

$$|P \cup Q \cup R \cup Z| \leq t(n-2) + t(n-2) + t(n-2) + t = t(3n-2) < h,$$

y como se sabe que $(u, S, v)_D^h$ implica que $|S| \geq h$ entonces debe existir una uv -trayectoria Γ_z de longitud al menos n , que no intersecciona a:

$$P \cup Q \cup R \cup Z.$$

Por lo tanto Γ_z intersecciona $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ por primera vez en :

$$\alpha_z \in A\left(\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T'_i)\right) - (P \cup R).$$

Sea Γ'_z la subtrayectoria de Γ_z que inicia con la flecha α_z y tiene punto final en v . Sea D_0 la subdigráfica de D definida como la unión de las siguientes trayectorias:

$$D_0 = \bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i) \cup \bigcup_{Z \in \Delta} \Gamma'_z,$$

es decir, los vértices y flechas de D_0 son los de estas trayectorias. Claramente toda uv -trayectoria en D_0 contiene a P_i o R_i para alguna i , de donde toda uv -trayectoria en D_0 tiene longitud al menos n .

Para separar u y v en $\bigcup_{i=1}^t (C_i \cup T_i)$ se necesitan al menos t flechas, mas aún, todo separador Z en t flechas pertenece a Δ . Observe la figura 2.8.

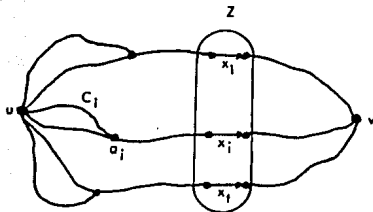


figura 2.8.

dato que $\Gamma'_z \subset D_0$ se sigue que Z no separa u y v en D_0 , pues sabemos que $\Gamma_z \cap Z = \emptyset$ y por lo tanto $\langle u, S, v \rangle_{D_0}^2$ implica $|S| \geq t + 1$.

Usando el Teorema de Menger tenemos que existen al menos $t+1$ uv -trayectorias disjuntas en flechas en D_0 , cada una de ellas de longitud al menos n , lo cual contradice la maximalidad de t .

□

El siguiente resultado es un teorema de tipo Menger pero diferente a los que se han presentado hasta el momento. En este caso se considera un conjunto distinguido de flechas y se quiere encontrar la relación entre el número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas, que contienen al menos k flechas de este conjunto distinguido y la cardinalidad de un conjunto separador de vértices. Para enunciar formalmente el resultado, se introducen a continuación algunos conceptos.

Sean D una digráfica, $u, v \in V(D)$, $W \subseteq A(D)$ y k un número entero, a una uv -trayectoria que contiene al menos k flechas de W se le llama (k, W) -trayectoria en D . Si $S \subset V(D) - \{u, v\}$, se escribe $\langle u, S, v \rangle_D^{(k, W)}$ cuando toda (k, W) -trayectoria en D contiene al menos un punto en S .

Se definen :

$$d = \max\{\ell(T) / T \text{ es una } u, v - \text{trayectoria en } D\} \text{ y}$$

$$d' = \max\{\ell(T) / T \text{ es una } u, v - \text{trayectoria en } D - W\}.$$

Teorema 2.5.

Si $(u, S, v)_D^{(k, W)}$ implica $|S| \geq h$, entonces existen $[h/m]$ (k, W) - trayectorias internamente disjuntas en D donde:

$$m = \begin{cases} 3d' - 2 & \text{si } k=1, \\ 3kd - 5 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostración.

La prueba es una aplicación directa del Teorema 2.1 y se divide en dos casos :

a) $k = 1$.

En éste caso se transforma la digráfica de tal manera que toda uv -trayectoria con al menos una flecha de W en D , tenga longitud mayor o igual que un número dado y al mismo tiempo toda trayectoria, en la digráfica transformada, cuya longitud satisface esta cota, contenga al menos una flecha de W . En estas condiciones, el teorema 2.1 completa la demostración.

Sea $n = d' + 1$, por la definición de d' es claro que las únicas uv -trayectorias de longitud al menos n en D , son aquellas que contienen al menos una flecha de W .

Observe que en D puede haber uv -trayectorias totalmente contenidas en W , estas trayectorias, no son necesariamente de longitud al menos $d' + 1$, pero subdividiendo cada flecha de W , al introducir d' vértices nuevos en cada flecha, se obtiene una digráfica en la que cada (k, W) -trayectoria de la digráfica original, corresponde a una trayectoria cuya longitud es al menos $d' + 1$ en la nueva digráfica.

Aplicando el teorema 2.1 sobre la nueva digráfica, se tiene que D tiene

$$\left\lceil \frac{h}{3d' - 2} \right\rceil,$$

uv -trayectorias internamente disjuntas, con lo que se tiene el resultado.

b) $k \geq 2$.

Se procede en forma análoga a como se hizo en el caso anterior, introduciendo $d - 1$ nuevos vértices en cada flecha de W . En la digráfica obtenida al hacer esta subdivisión, toda uv -trayectoria que contenga al menos k flechas de W debe tener longitud al menos $n = kd$, mas aún, por la definición de d es claro que toda uv -trayectoria de longitud al menos n en la nueva digráfica, deberá contener al menos k flechas de W . De la misma manera como se hizo en

el caso anterior, se aplica ahora el Teorema 2.1 con $n = kd$ y se tiene que la nueva digráfica contiene

$$\frac{h}{3d-5},$$

uv -trayectorias de longitud al menos kd y por lo tanto D contiene este mismo número de (k, W) -trayectorias con lo que se concluye la prueba del teorema. □

Hasta este momento se han presentado cotas inferiores para el número máximo de trayectorias disjuntas, de longitud al menos n en una digráfica. Si se le llama $a_n(D, u, v)$ al número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n en D y $a_n(h)$ al mínimo valor de $a_n(D, u, v)$ sobre todas las ternas (D, u, v) donde D es una digráfica y $u, v \in V(D)$, se ha probado que si $\langle u, S, v \rangle_D^2$ implica $|S| \geq h$, entonces:

$$\left\lceil \frac{h}{3n-5} \right\rceil \leq a_n(h),$$

es decir que en cualquier digráfica D , se puede garantizar la existencia de un sistema de al menos $\left\lceil \frac{h}{3n-5} \right\rceil$ uv -trayectorias independientes de longitud al menos n . En [6], L. Montejano y V. Neumann-Lara encontraron una cota superior para $a_n(h)$, a saber :

$$a_n(h) \leq \left\lceil \frac{h}{n-1} \right\rceil.$$

Observe que basta probar que existen una digráfica D , y un par de puntos $u, v \in V(D)$ para los cuales, $a_n(D, u, v) \leq \left\lceil \frac{h}{n-1} \right\rceil$. Para tal efecto se introducen los siguientes conceptos :

Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Se definen :

$$h_n(D, u, v) = \text{mín} \{ |S| / S \subset V(D) - \{u, v\} \text{ y } \langle u, S, v \rangle_D^2 \},$$

y \mathcal{D}_n como la colección de ternas (D, u, v) donde D es una digráfica, $u, v \in V(D)$ y D no contiene 2 uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n , pero si contiene una de tales trayectorias. Sean $h_n = \text{máx} \{ h_n(D, u, v) / (D, u, v) \in \mathcal{D}_n \}$ y $(D_n, u, v) \in \mathcal{D}_n$ tal que :

$$h_n(D, u, v) = h_n.$$

Se puede probar que :

$$a_n(h) \leq \left\lceil \frac{h}{h_n} \right\rceil,$$

pues si $D_n(h)$ es la digráfica obtenida al tomar la unión de $\left\lceil \frac{h}{h_n} \right\rceil$ copias de D_n digamos D_n^i $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{h}{h_n} \right\rceil$, con

$$V(D_n^i) \cap V(D_n^j) = \{u, v\},$$

entonces $\langle u, S, v \rangle_{D_n(h)}^B$ implica $|S| \geq h$ y $\left\lceil \frac{h}{h_n} \right\rceil$ es el número máximo de uv -trayectorias de longitud al menos n , internamente disjuntas en $D_n(h)$.

Por otro lado, sea Ω_n la digráfica con nodos $\{u = 0, 1, 2, \dots, 2n-3, 2n-2 = v\}$ y flechas (i, j) para $0 \leq i < j \leq 2n-2$, véase la figura 2.9.

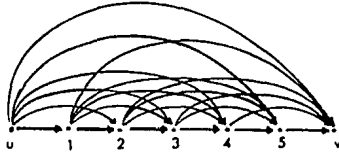


Figura 2.9. La gráfica Ω_4

Claramente $(\Omega_n, u, v) \in D_n$ pues cualquier trayectoria de longitud mayor o igual que n tiene al menos $n-1$ puntos interiores. Como en Ω_n sólo hay $2n-2$ vértices diferentes de u y v , no es posible encontrar mas de una uv -trayectoria sin que se intersecten. Se obtiene que $h_n(\Omega_n, u, v) = n-1$ pues cualquier conjunto de $n-1$ puntos de $\Omega_n - \{u, v\}$ da origen a una uv -trayectoria y por lo tanto es necesario eliminar al menos $n-1$ puntos para bloquear toda colección de vértices que genere una trayectoria de longitud mayor o igual que n , de aquí que $h_n \geq n-1$.

De esta forma, como:

$$a_n(h) \leq \left\lceil \frac{h}{h_n} \right\rceil \quad \text{y} \quad n-1 \leq h_n,$$

se obtiene que:

$$a_n(h) \leq \left\lceil \frac{h}{n-1} \right\rceil.$$

□

La definición de h_n permite acotar el número $a_n(h)$ y por supuesto, determinar el valor exacto de h_n proporciona información valiosa sobre $a_n(h)$.

Las cotas anteriores también son válidas para el caso de H_1H_2 -trayectorias. Para ver esto se define la digráfica $\tilde{\Omega}_n$ con nodos $\{1, 2, \dots, 2n-3\} \cup H_1 \cup H_2$, con $|H_1| = |H_2| = n-1$ y flechas (i, j) para $i < j \leq 2n-3$. Se aumentan además las flechas que van de cada punto de H_1 a los vértices $\{1, 2, \dots, 2n-3\}$ y las que van de los vértices $\{1, 2, \dots, 2n-3\}$ a los puntos de H_2 . El conjunto $H_1 \cup H_2$ es un conjunto independiente de vértices. Ver figura 2.10.

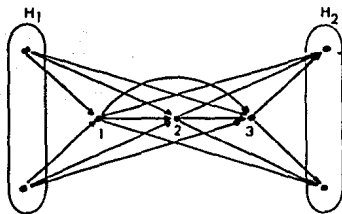


Figura 2.10. La gráfica $\tilde{\Omega}_3$.

Utilizando los mismos argumentos que en el caso anterior se concluye que el máximo número de H_1H_2 -trayectorias de longitud al menos n , disjuntas por pares en esta digráfica es 1 y cualquier conjunto que interseccione a todas estas trayectorias debe tener por lo menos $n-1$ vértices.

Note que esta misma digráfica, muestra que la cota obtenida es válida también para el caso de H_1H_2 -pseudotrayectorias.

CAPITULO III

TRAYECTORIAS DE LONGITUD MAYOR O IGUAL QUE TRES

Los resultados expuestos en el capítulo anterior, son los únicos que se conocen para el caso general, del problema de trayectorias largas en digráficas, de tal suerte que no se conocen aún, las mejores cotas para el número máximo de trayectorias largas, disjuntas en una digráfica. A lo largo de este capítulo, toda vez que se hable de trayectorias disjuntas, se entenderá que son disjuntas en vértices.

A continuación, se presenta el trabajo de M. Hager, publicado en [2], el cual se restringe al caso $n = 3$, en gráficas no dirigidas. Los resultados se presentan en este capítulo, son los primeros resultados que se tuvieron para este caso y mejoran las cotas que se probaron en el capítulo anterior, para el caso general. Finalmente se enuncian dos conjeturas planteadas por M. Hager [2], y posteriormente demostradas por W. Mader en [3].

Antes de presentar los resultados principales de este capítulo, considere la siguiente familia de gráficas:

Dados n y t , sean S_1, \dots, S_t , t copias disjuntas de la gráfica K_{2n-3} . Se construye la gráfica G_t con vértices

$$V(G_t) = \{u, v\} \cap \bigcap_{i=1}^t V(S_i)$$

y aristas :

$$\{ux, xv \mid x \in V(G_t) - \{u, v\}\} \cup \bigcup_{i=1}^t E(S_i).$$

En esta gráfica existe un sistema de t uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n , y cualquier conjunto de vértices que interseca toda uv -trayectoria de longitud al menos n en G_t , tiene cardinalidad al menos $t(n-1)$. Note que cuando $t = 1$, la gráfica G_t , construida de esta forma, es isomorfa a la gráfica obtenida al ignorar la dirección de las flechas de la digráfica Ω_n , utilizada en el capítulo anterior para mostrar esta misma cota, en el caso de gráficas dirigidas.

Se hacen, ahora las siguientes definiciones y observaciones, con la intención de hacer mas clara la exposición.

Dada una trayectoria P , P^0 denota al interior de P , es decir, las aristas y los vértices de P , con excepción de los extremos.

Sea $M = \{z \in V(G) \mid \{u, v\} \subseteq N_G(z)\}$, el conjunto de vértices de G , adyacentes a u y v . Considérese el conjunto de todos los sistemas maximales de t , uv -trayectorias independientes, de longitud al menos 3, que intersecten a M en un número mínimo de vértices. Se elige, de este conjunto, el sistema $\mathcal{U} = \{P_1, \dots, P_t\}$, como aquel en el que las trayectorias tengan longitud mínima. Se denota por U a los vértices de las trayectorias de este sistema y se define para U , $M^* = M - (M \cap U)$.

Observe que como las trayectorias P_i son de longitud al menos 3, cada $P_i \in \mathcal{U}$ contiene a lo mas 2 puntos de M . De no ser así, se puede sustituir ésta por otra trayectoria mas corta, pero de longitud mayor o igual que 3, figura 3.1, lo cual contradice la minimalidad, tanto de las longitudes, como de $|M \cap U|$. Mas aún, si $P_i \in \mathcal{U}$ y $m \in M$ es un vértice de P_i , entonces um o $mv \in E(P_i)$, es decir, todo punto de M que pertenece a una trayectoria $P_i \in \mathcal{U}$ debe ser el primero ó el último punto interior de ésta.

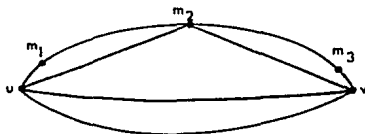


Figura 3.1.

Toda uv -trayectoria de longitud 2 en G debe contener como único punto interior a un punto de M , de tal manera que si $M = \emptyset$, la gráfica en cuestión sólo contiene uv -trayectorias de longitud al menos 3. En este caso el Teorema de Menger proporciona el resultado que se desea. Consecuentemente, si se elimina de cada vértice de M , al menos una de las aristas que lo unen a los vértices $\{u, v\}$, la gráfica que resulta sólo tiene trayectorias de longitud mayor o igual que 3 y se puede obtener un separador como el que se busca, vía el Teorema de Menger.

Se define $G(U)$ de tal forma que $V(G) = V(G(U))$ y cada arista $k = um, vm$ con $m \in M$ es eliminada si k no pertenece a $E(U)$. Sea R_u la intersección de M con la vecindad de u en $G(U)$ y $r = |R_u|$.

Observe que en $G(U)$ se han quitado adyacencias de G , de tal forma que toda uv -trayectoria en $G(U)$ tiene longitud al menos 3, y por lo tanto se puede aplicar el Teorema de Menger y obtener un uv -separador en t puntos.

El siguiente lema garantiza la existencia de un conjunto uv -separador en $G(U)$, con cardinalidad t y que además contenga los puntos de R_u .

Lema 3.1.

Sean G una gráfica y $u, v \in V(G)$ dos vértices tales que existen t uv -trayectorias internamente disjuntas en G , entonces existe un conjunto de vértices T , con cardinalidad t , que separa u y v en $G(U)$ y tal que $R_u \subseteq T$.

Demostración :

Sea $G' = G(U) - R_u$, por el Teorema de Menger se sabe que existe un conjunto uv -separador, $A \subseteq V(G')$, con $|A| = a \leq t$ y G' contiene un sistema de uv -trayectorias independientes \mathcal{W} tal que $A \subseteq V(\mathcal{W})$, $|A| = |\mathcal{W}|$.

Supóngase que $a \leq t - r$ para alguno de estos conjuntos, en este caso el conjunto $T = R_u \cup A$ es el que se está buscando pues satisface :

$$|T| \leq t,$$

$$R_u \subseteq T \text{ y}$$

$$T \text{ separa a } u \text{ y } v \text{ en } G(U).$$

De esta manera sólo resta analizar el caso en que $a > t - r$ para todos estos conjuntos A . Se probará que bajo las hipótesis actuales, esta suposición implica una contradicción. Considere los siguientes casos :

I) Existe un sistema de uv -trayectorias internamente disjuntas en G' , con cardinalidad a , y tal que cada trayectoria P_j con $V(\mathcal{W}) \cap P_j \neq \emptyset$ satisface que $P_j \cap R_u = \emptyset$.

Esto contradice la maximalidad de t pues las trayectorias de U que no están contenidas en G' , es decir las que intersectan a R_u , no intersectan a \mathcal{W} y son exactamente r . Como $a > t - r$, se tiene que

$$\mathcal{W} \cup \{P_i / P_i \cap R_u \neq \emptyset\},$$

es un sistema de uv -trayectorias independientes de longitud al menos 3 y de cardinalidad $a + r > t$, lo cual es una contradicción.

II) Cada sistema \mathcal{W} en G' intersecta una trayectoria P_j con $P_j \cap R_u \neq \emptyset$.

Si se llama G^* a la u -componente de $G' - A$, se sabe que existe al menos un vértice $z_i \in A \cap V(P_i)$ para cada trayectoria P_i , tal que $P_i \cap V(G^*) \neq \emptyset$. Se distinguen dos casos, a saber :

a) La trayectoria P_j tiene una sección contenida en G^* , o por lo menos intersecta al conjunto A , es decir, $P_j \cap (A \cup V(G^*)) \neq \emptyset$.

En este caso se encuentra un nuevo sistema U' con

$$|M \cap V(U')| < |M \cap V(U)|,$$

a saber :

$$U' = (W \cap G^*) \cup (U - G^*).$$

Es decir, se sustituye la parte inicial de P_i $1 \leq i \leq t$ que está contenida en $V(G^*) \cup A$, por un tramo de $W \in \mathcal{W}$ que está contenido en G^* , como se muestra en la figura 3.2. Esto es posible pues se sabe que ambos sistemas, U y W , son maximales y por lo tanto, cada trayectoria de W interseca exactamente a una trayectoria de U , además $W \cap P_j \neq \emptyset$. Con esta sustitución se obtiene una uv -trayectoria de longitud al menos 3 que no interseca R_u y por lo tanto, este sistema en efecto cumple que :

$$|M \cap V(U')| < |M \cap V(U)|$$

lo cual contradice la minimalidad de $|M \cap U|$.

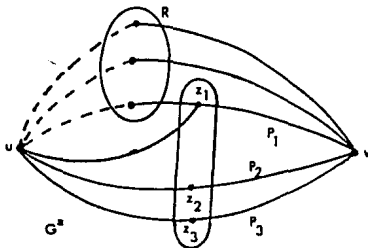


Figura 3.2

b) Cada una de dichas trayectorias $P_j \in \mathcal{U}$ interseca W después de A , es decir, $P_j \cap (A \cup V(G^*)) = \emptyset$.

En este caso también se contradice la minimalidad de $|M \cap U|$. Observe que es posible cambiar W a un sistema W' tal que W' intersece exactamente α trayectorias de U . Para tal efecto se elige el conjunto $X \subseteq V(W \cap U)$ de entre aquellos vértices $x_i \in V(P_i)$ que están a mínima distancia de v . De aquí que $|X| \geq \alpha$.

Si $|X| > a$ entonces una trayectoria $W \in \mathcal{W}$ interseca dos trayectorias P_j, P_k diferentes en vértices x_j, x_k , respectivamente. Supóngase que interseca primero a P_j . Ahora se cambia W a $W_1 = (W - W) \cup W_1$ donde W_1 consiste en W de u a x_j y P_j de x_j a v , así se puede encontrar un nuevo conjunto X_1 tal que $|X_1| < |X|$ y siguiendo este método se llega a encontrar un conjunto X^* con $|X^*| = a$.

Se ha encontrado que existe un sistema W' con la propiedad de que W' interseca exactamente a trayectorias de \mathcal{U} .

Se define ahora un sistema U' que contiene los siguientes conjuntos de trayectorias :

$$W = P_k \text{ con } P_k \cap W' = \emptyset,$$

W formado por la primera parte de $W' \in \mathcal{W}'$ de u a $x_j \in X^*$ y

$$P_j \text{ de } x_j \text{ a } v.$$

Pero :

$$|M \cap V(U)| > |M \cap V(U')|,$$

y con esto se ha llegado a la contradicción que se buscaba.

A partir de esto, se puede concluir que : $a \leq t - r$ pues se ha probado que el caso II no es posible. Esto concluye la demostración del Lema. □

Observe que la definición de R_u en el Lema anterior, puede cambiarse por: $R_v = \{x \in V(G) / x \in N(v, G(U))\}$. Con esta nueva definición, se puede enunciar un segundo lema como sigue :

Lema 3.2.

Sean G una gráfica y $u, v \in V(G)$ dos vértices tales que existen t , uv -trayectorias internamente disjuntas en G . Entonces existe un conjunto de vértices T'' con cardinalidad, t , que separa u y v en $G(U)$ y tal que $R_v \subseteq T''$. □

La demostración de este lema es exactamente igual a la del Lema 3.1, pues la situación es simétrica para u y v .

Habiendo probado el Lema 3.1 se puede demostrar el resultado principal de este capítulo, que establece cotas mas estrictas para este caso particular

Teorema 3.1.

Sean G una gráfica y $u, v \in V(G)$ tales que G contiene a lo mas t , uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos 3. Entonces G contiene un conjunto de vértices S con :

$$|S| \leq 3t - 2 \quad \text{si} \quad t \geq 4 \quad \text{y}$$

$$|S| \leq 2t \quad \text{si} \quad t \in \{1, 2, 3\},$$

tal que :

$$\langle u, S, v \rangle_G^3.$$

La prueba se realiza en 3 partes, en cada una de ellas se encuentra un separador de las uv -trayectorias de longitud al menos 3. En la primera parte el conjunto que se encuentra tiene cardinalidad a lo mas $3t$; en la segunda se prueba que en caso de que se tenga un separador de tamaño $3t$ o $3t - 1$, se puede encontrar un separador de cardinalidad, a lo mas $3t - 2$; finalmente se considera el caso en que $|S| = 7$ y se prueba que en este caso se puede encontrar un separador de cardinalidad $2t$.

Demostración :

I. Sea G una gráfica con a lo más t , uv -trayectorias independientes de longitud mayor o igual que 3.

i) Se sabe que no existen trayectorias Q con $V(Q) \cap U = \emptyset$ entre puntos de M^* , pues de haberlas, G tendría al menos $t + 1$, uv -trayectorias disjuntas de longitud al menos 3.

ii) Sea H_i la unión de las trayectorias P_j $j \neq i$. Se sabe que en la gráfica $G - H_i$, no puede haber dos $M^*P_i^0$ -trayectorias Q , ajenas, pues de haberlas, G tendría mas de t uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud mayor o igual que 3, véase la figura 3.3. Se probará que existe un vértice, $y_i \in V(P_i^0) \cup M^*$ que bloquea todas estas $M^*P_i^0$ -trayectorias en $G - H_i$.

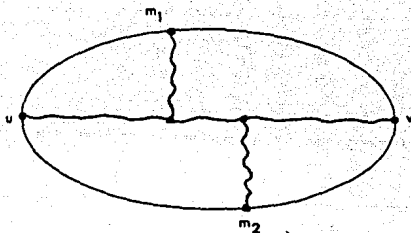


Figura 3.3.

Dado que no hay 2 $M^*P_i^0$ -trayectorias disjuntas en $G - H_i$, utilizando el Teorema de Menger, se sabe que existe en esta gráfica, un vértice que bloquea todas las trayectorias, Q en cuestión. Además, este vértice, no puede ser un punto interno de Q , pues si dos trayectorias, Q_1, Q_2 , se intersecaran en un punto interior, automáticamente se forman trayectorias entre puntos de M^* y en i , se hizo notar que esto implica una contradicción. Por ésto, se puede garantizar que es posible elegir un punto y_i , de M^* o de P_i^0 , para bloquear toda $M^*P_i^0$ -trayectoria en $G - H_i$ y que dicho vértice es un punto extremo de la trayectoria Q . A este vértice común, se le llama $y(P)$ si es un punto de P , note que dicho punto es tal que $y(P) \in (P - \{u, v\})$, o sería posible encontrar mas uv -trayectorias de longitud al menos 3, internamente disjuntas. Si el vértice común es un vértice de M^* , se le llama $y^*(P)$.

De esta manera se puede elegir, para cada $P \in \mathcal{U}$, el vértice $y_i \in M^*$ o en $V(P_i^0)$, si el anterior no existe y así formar el conjunto Y , con $|Y| = t$

Sea $S = Y \cup T \cup (R_v - T)$, donde T ha sido elegido como en el Lema 3.1, se afirma que S es tal que $\langle u, S, v \rangle_G^3$.

Suponga que esto no es cierto, es decir que existe Γ , una uv -trayectoria de longitud al menos 3 en G que no contiene ningún punto de S . Dicha trayectoria debe satisfacer las siguientes condiciones

- 1) Como T interseca a todas las uv -trayectorias de $G(\mathcal{U})$, Γ no puede estar totalmente contenida en $G(\mathcal{U})$.
- 2) Dado que \mathcal{U} es maximal, Γ debe intersecar alguna trayectoria $P_i \in \mathcal{U}$.

Por (1) se sabe que Γ debe pasar por alguna arista de G que se haya eliminado al tomar $G(\mathcal{U})$ y por lo tanto debe pasar por algún punto de M .

Si Γ pasa por un punto de $M \cap U$ claramente S la interseca, de tal manera que Γ debe utilizar un punto de $M - (M \cap U) = M^*$. Pero si Γ interseca uno de estos puntos, por (2), debe contener una M^*P_i -trayectoria y ésta debe pasar por algún punto de Y , lo cual constituye una contradicción.

De esta forma se ha encontrado un conjunto con cardinalidad a lo mas $3t$, que interseca a todas las uv -trayectorias de longitud al menos 3 y con ésto se termina la parte I de la prueba.

II. Supóngase que $|S| \in \{3t, 3t - 1\}$.

a) $|S| = 3t$.

En este caso, utilizando la simetría que existe con respecto a u y v , y el hecho de que $|M \cap (V(U) - T)| = t$, se puede garantizar que $|M \cap V(U)| = 2t$, lo cual implica que todas las trayectorias de U empiezan y terminan en puntos de M y por lo tanto $|R_u| = t$. esto implica además que toda uv -trayectoria de longitud mayor o igual que 3 en G , debe de iniciar y terminar con un punto de M , de otra manera se contradice la minimalidad de $|M \cap U|$, dado que U es un sistema máximo de trayectorias internamente disjuntas, se tiene que toda uv -trayectoria que no pertenezca a U y que no tenga como primero y último punto interior a un vértice de U , debe pasar por $y(P_i)$ o $y^*(P_i)$ para alguna $1 \leq i \leq t$.

Se sabe además, que sólo existen trayectorias entre $P_i, P_j \in U$, si éstas pasan por $y(P_i)$ o $y(P_j)$, de otro modo existe un sistema U' con mas de t trayectorias. En la figura 3.4 se ilustra como se encuentran 3 uv -trayectorias disjuntas, de longitud mayor o igual que 3 a partir de P_i y P_j cuando están conectadas por una trayectoria que no interseca a los vértices $\{y(P_i), y(P_j)\}$.

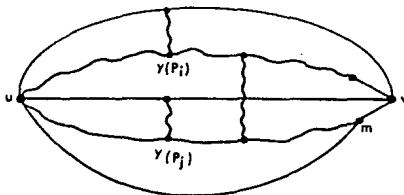


Figura 3.4.

Por estas razones cualquier uv -trayectoria de longitud al menos 3, en la gráfica, o bien está contenida en $G(U)$, o bien pasa por algún vértice $y(P_i)$. Sea Y' el conjunto formado por la unión de los vértices $y(P)$ o $y^*(P)$ si el anterior no existe. Por la observación anterior, se tiene que $S' = T \cup Y'$ es un conjunto que satisface $(u, S', v)_G^2$ y $|S'| = 2t$.

b) $|S| = 3t - 1$. Recuerde que $S = Y \cup T \cup (R_v - T)$ y que se sabe que $|T| = t$.

Supóngase que $|Y| = t$, eso implica que

$$|R_v| = t - 1,$$

es decir, a lo mas una trayectoria $P_k \in U$ no tiene como último punto interior a un punto de M y por lo tanto para cada par de trayectorias P_i, P_j existe una con un vértice $m \in M - T$. Utilizando la simetría que existe, con respecto a u y v , representada en el Lema 3.2, se sabe que $|R_u| \geq t - 1$. Debido a esto, se tiene que al igual que en el caso (a), sólo existen trayectorias entre P_i, P_j diferentes, si éstas pasan por $y(P_i)$ o $y(P_j)$ pues, en estas circunstancias, los argumentos usados anteriormente siguen siendo válidos. Por lo tanto existe un separador de cardinalidad a lo mas $2t$, a saber $T \cup Y'$, con Y' definido como en el caso a.

Supóngase ahora que $|Y| = t - 1$, entonces como $|S| = 3t - 1$, se tiene que $|R_v| = t$ y por simetría se sabe que $|R_u| = t$. En este caso, toda uv -trayectoria $\Gamma \notin U$, debe tener como puntos internos inicial y final a algún punto de M o una vez mas, se contradice la minimalidad de $|M \cap U|$. Suponga además que sólo una trayectoria, digamos P_1 , no tiene vértice $y^*(P_1)$ ni $y(P_1)$. Sea m el último punto interior de P_1 y $m \in R_v$.

Si P_1 es aislada, entonces $S - \{m\}$ es un conjunto separador con $3t - 2$ elementos, ya que cualquier uv -trayectoria, no contenida en U , que pase por m , debe intersectar algún otro punto de M y se ha visto que bajo estas hipótesis, eso no es posible.

Si P_1 no es aislada, sea \tilde{P} una trayectoria entre P_1 y $P_k \in U$. Se puede suponer que \tilde{P} no pasa por $y(P_k)$, pues de ser así, $S - \{m\}$ es también un separador.

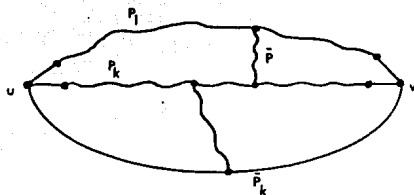


Figura 3.5.

Sea \tilde{P}_k la trayectoria formada por el tramo de P_k que va de u a $y(P_k)$, seguida de los vértices $y^*(P_k)$ y v . (figura 3.5), entonces cambiando P_k por \tilde{P}_k se obtiene un nuevo sistema $(U - P_k) \cup \tilde{P}_k$, en el que existe al menos una trayectoria entre P_1 y un punto de M , pues P_k empieza y termina en puntos de M . Claramente en este sistema existe al menos alguno de los puntos $y^*(P_1)$ o $y(P_1)$, de tal forma que si se toma el conjunto S para este nuevo sistema, se tiene que $|S| = 3t$ y este caso ya se tiene resuelto.

La única otra posibilidad para tener $|Y| = t - 1$, es que existan 2 trayectorias P_i, P_j tales que $y^*(P_i) = y^*(P_j)$.

En este caso, $S - \{y^*(P_i)\}$ es un conjunto separador con $3t - 2$ elementos, pues cada uv -trayectoria que no interseca $T \cup (M - M^*) = T \cup (M \cap U)$ tiene que interseccionar M^* dos veces, o se contradice nuevamente la minimalidad de $|M \cap U|$.

III. Se ha probado que cada gráfica con t , uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos 3, contiene un conjunto S con $|S| \leq \max\{3t - 2, 2t\}$, tal que S intersecciona toda uv -trayectoria de longitud al menos 3, de tal suerte que para $t = 1, 2$, $|S| \leq 2t$, y para $t \geq 3$, $|S| \leq 3t - 2$.

Se tiene que para $t \in \{1, 2\}$ existe un conjunto S con cardinalidad a lo mas $2t$ y tal que $(u, S, v)_G^3$ por lo tanto, sólo falta probar que existe un conjunto de estas características en el caso en que $t = 3$. Para demostrar ésto, se estudian sucesivamente los casos $|Y| = 3$, $|Y| = 1$ y $|Y| = 2$, agotando de esta manera todas las posibilidades.

Es importante notar que en las secciones anteriores de la prueba se analizaron los casos en que se tenía un separador S con $|S| \in \{3t, 3t - 1\}$, por esta razón para el caso $t = 3$, cuando se suponga que $|S| = 3t - 2$ habrá que considerar todas las posibilidades,

mientras que de aquellos casos estudiados en la sección anterior, sólo falta revisar cuando $|S| = 3t - 1$ y $|Y| = t - 1$ que es cuando se obtuvo un separador con $3t - 2$ vértices.

a) $|Y| = 3$.

En éste caso, se ha probado que siempre que $|S| = 3t$ o $3t - 1$, existe un separador de cardinalidad $2t$, por lo tanto, sólo falta el caso en el que $|S| = 3t - 2$. Esto implica que $|M \cap U| \leq 4$, pues sólo puede haber un vértice de $M \cap U$ que sea vecino de v en $G(U)$, de no ser así, la cardinalidad del separador que ya se tiene no sería $3t - 2$. Mas aún, debido a que se vio que el análisis era válido tanto para u como para v , con los Lemas 3.1 y 3.2, únicamente falta considerar el caso en que $|M \cap U| = 2$ y se sabe que bajo estas suposiciones, se tiene la situación descrita en la figura 3.6.

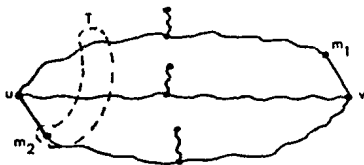


Figura 3.6.

Sean $m_1, m_2 \in M \cap U$, se elige a x_1 y x_2 como aquellos vértices de P_1 y P_2 que están conectados con $m_1^*, m_2^* \in M^*$ y que se encuentran a menor distancia de u sobre P_1 y P_2 respectivamente. Claramente si $y^*(P_1)$ y $y^*(P_2)$ existen, entonces $y^*(P_1) = m_1^*$ y $y^*(P_2) = m_2^*$, de la misma manera, si $y(P_1)$ y $y(P_2)$ existen, entonces $x_1 = y(P_1)$ y $x_2 = y(P_2)$. Sean z_1, z_2 los vértices mas cercanos a x_1 y x_2 , que son extremos de una trayectoria directa entre P_1 y P_2 . Si dicha trayectoria no existe, entonces $S - \{m\}$ es un conjunto separador.

Se elige ahora el conjunto \hat{T} con $m_2 \in \hat{T}$, de tal manera que z_1, z_2 queden separados de x_1, x_2 . Es importante notar que \hat{T} no necesariamente es un separador estricto de z_1, z_2 y x_1, x_2 en G , así, debe existir un conjunto de tales características pues de otra manera, la gráfica tendría un circuito que pasa por $u_1, z_1, \dots, x_1, w_1$ y no interseca a $V(P_2) \cup V(P_3) \cup M^* \cup \{m_1\}$. La existencia de un circuito como éste, implica que la gráfica tendría 4 trayectorias internamente disjuntas

de longitud al menos 3, lo cual contradice la maximalidad de t ; por ejemplo : Si el circuito es

$C = (z_1, u_1, \dots, w_1, x_1, \dots, z_1)$, como se ilustra en la figura 3.7, existen las trayectorias :

$$(u, \dots, u_1, \dots, w_1, \dots, v), (u, \dots, z_2, z_1, \dots, x_1, \dots, m_1^*, v), (u, m_2^*, x_2, \dots, v) \text{ y } P_3.$$

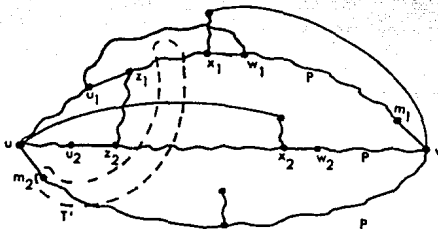


Figura 3.7.

Otro caso interesante es el ilustrado en la figura 3.8 donde, de hecho, se forman 2 circuitos, no ajenos, que pasan por algunos de esos vértices, a saber: $C_1 = (z_1, \dots, a, \dots, w_1, x_1, \dots, z_1)$ y $C_2 = (u_1, \dots, b, \dots, x_1, \dots, z_1, u_1)$. Este es un ejemplo interesante pues la existencia de dos trayectorias, Γ_1, Γ_2 , como las presentadas en esta figura, sería la única forma de evitar que existiera un separador (incluso estricto) de z_1, z_2 y x_1, x_2 , pero esto no es posible ya que se contradice la maximalidad de t .

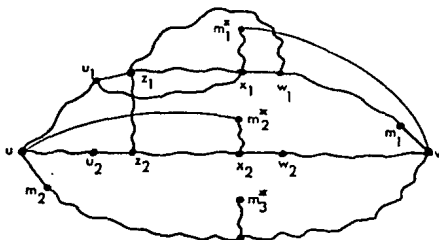


Figura 3.8.

De tal suerte que \hat{T} existe y además, sigue siendo un u, v -separador en $G(u)$. Note que \hat{T} contiene un punto de cada trayectoria de U

y por lo tanto, $|\bar{T}| = 3$. Mas aún, $T \cup Y$ es un separador en G con a lo mas 6 puntos.

b) $|Y| = 1$.

Igual que en (a), se sabe que si $|S| \in \{3t, 3t - 1\}$ entonces existe un separador de tamaño $2t$, por esta razón se puede suponer que $|S| = 3t - 2$. Pero esto implica que $|T| = t$ y $|R_v| = t$ por lo tanto existe al menos un vértice $m \in M \cap U$ con $mv \in E(U)$, note que de hecho, utilizando una vez mas la simetría que existe para u y v , podemos garantizar que $|M \cap U| = 6$. Se afirma que $S - \{m\}$ separa a u y v , pues de no ser así, existiría una uv -trayectoria de longitud al menos 3, digamos Γ , en $G - (S - \{m\})$ pero como el conjunto S sí es un separador, dicha trayectoria debe pasar por m . Además, una trayectoria como ésta no puede estar contenida en $G(U)$, ya que $T \subset S - \{m\}$ y T es un separador en $G(U)$, tampoco puede pasar por vértices de M^* , ya que no puede usar el vértice de Y . Se sabe entonces que la trayectoria en cuestión, debe usar la arista um . Por otra parte, cualquier uv -trayectoria de longitud mayor o igual que 3 en G , que no intersekte al conjunto $T \cup Y$, debe pasar por dos vértices de $M \cap U$, de otro modo, se puede encontrar un nuevo sistema de uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos 3 con menor cardinalidad de $M \cap U$. En la figura 3.9, se ilustran los diferentes casos que se deben analizar para mostrar esta contradicción.

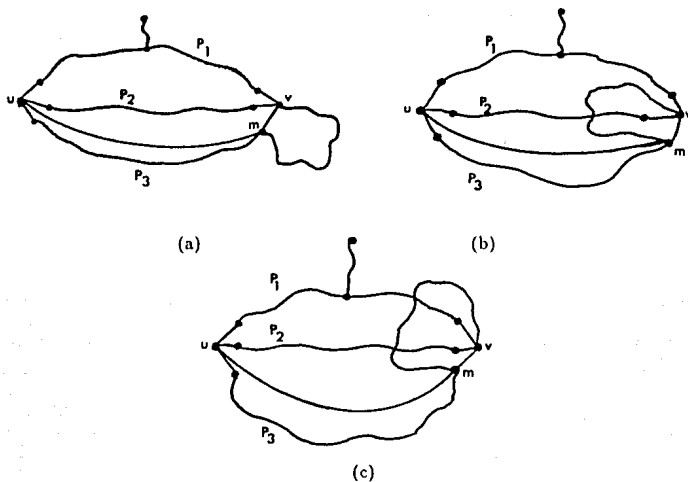


Figura 3.9.

Si Γ no intersecciona ninguna trayectoria P_i , en puntos que no pertenecan a M , (figura 3.9.a) entonces $U' = U - \{P_3\} \cup \Gamma$ es un sistema de uv -trayectorias internamente disjuntas, con $|M \cap U'| < |M \cap U|$, contradiciendo la eleccion de U .

Si Γ intersecciona a U en otros puntos, adem6s de m (figuras 3.9.b, 3.9.c) sea γ el 6ltimo punto sobre Γ que pertenece a U y sea $P_i \in U$ tal que $\gamma \in P_i$. Sustituyendo P_i por la trayectoria formada por el segmento de P_i , que va de u a γ y la seccion de Γ que va de γ a v , se obtiene un nuevo sistema U' que nuevamente contradice la maximalidad de $|M \cap U|$.

c) $|Y| = 2$.

En este caso, existen al menos dos puntos $m_1, m_2 \in R_v$ (v6ase figura 3.10) pues de no ser asi, $|S| = 6$. Es posible que exista un tercer v6rtice, digamos $m_3 \in R_v$, pero la existencia de 6ste no puede ser garantizada y no tiene consecuencias para el desarrollo de la prueba.

Por otra parte, como se analiza el caso en que $|Y| = 2$, se sabe que o bien una de las trayectorias de U no tiene v6rtices $y(P)$ ni $y^*(P)$, o dos de estas trayectorias tienen como $y^*(P)$ al mismo v6rtice.

Supóngase que ocurre el primer caso, es decir, existe una trayectoria, digamos $P_1 \in \mathcal{U}$, para la cual no existen ni $y(P_1)$ ni $y^*(P_1)$. No puede haber trayectorias entre P_2 y P_3 , que no pasen por $y(P_2)$ ni por $y(P_3)$, además, utilizando nuevamente que la situación es simétrica para u y v , se puede garantizar que hay al menos dos vértices de M vecinos de u en $G(\mathcal{U})$.

Si m_1 está en P_1 , entonces el conjunto $S - \{m_2, m_3\} = T \cup Y \cup \{m_1\}$, separa a u y v .

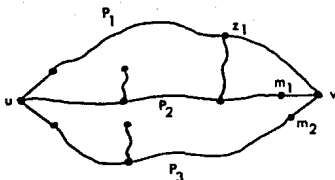


Figura 3.10.

De no ser así, existiría una uv -trayectoria, Γ , que no interseca a este separador, Γ necesariamente pasa por m_2 o m_3 . Haciendo un análisis similar al hecho en el caso III b), se concluye que la existencia de dicha trayectoria contradice la maximalidad de t o la minimalidad de $|M \cap U|$.

Si m_1 no está en P_1 , es decir, si la trayectoria P_1 no termina con un vértice de M , entonces se elige el vértice z_1 como el más cercano a v , de entre los puntos de P_1 que son el extremo de una trayectoria entre P_1 y P_2 , (P_3 respectivamente) y se denota por u_1 a su vecino sobre P_1 , en dirección a u . Véase la figura 3.11.

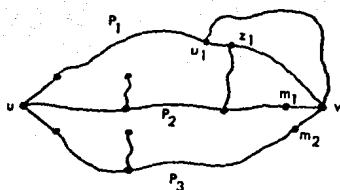


Figura 3.11.

De la misma manera como se hizo en el inciso (a), se sabe que no hay circuitos en G , que pasen por u_1, z_1, v y que no contengan ningún otro punto de $P_1 \cup P_2 \cup M$, figura 3.11. Por lo tanto existe un vértice z que separa a z_1 de v , en $G - (P_1 \cup P_2 \cup M)$. Nótese que z puede ser el mismo vértice z_1 . Por lo tanto, $T \cup Y \cup \{z\}$ forma un separador de cardinalidad 6.

Considere ahora el otro caso, cuando dos uv -trayectorias tienen el mismo vértice $y^*(P)$, digamos $y^*(P_1) = y^*(P_2)$, y se puede suponer que existe al menos una trayectoria entre P_3 y $P_1 \cup P_2$, ya que si P_3 está aislada de $P_1 \cup P_2$, el mismo conjunto, $T \cup Y'$ es un separador con no mas de 6 puntos. Esta trayectoria que conecta P_3 y $P_1 \cup P_2$, debe de pasar por un vértice $y(P_i)$, pues de otra forma, existiría un sistema de 4 trayectorias independientes. Observe que también en este caso, se tiene una situación simétrica para u y v , por lo tanto se sabe que $|R_u| \geq 2$. Utilizando el mismo argumento, no puede existir ninguna trayectoria entre P_1 y P_2 que no pase por $y(P_i)$. Así el conjunto $T \cup Y'$, donde Y' es la unión de los vértices $y(P_i)$ o $y^*(P_i)$ si el anterior no existe, tiene la propiedad deseada.

□

Con este Teorema se obtiene una mejor cota que la dada por el Teorema 1.1, pero este resultado sólo se aplica a este caso particular. El Teorema 3.1 parte de gráficas con un número fijo de trayectorias y calcula la cardinalidad del conjunto separador, pero al igual que con el Teorema de Menger, también es posible tener un resultado equivalente si se fija la cardinalidad de un conjunto separador y se calcula el número

máximo de trayectorias siguiendo el enfoque de los resultados del capítulo anterior. A continuación se enuncia esta versión del Teorema.

Teorema 3.2.

Sea G una gráfica, $u, v \in V(G)$ y $S \subseteq V(G) - \{u, v\}$. Si $(u, S, v)_G^2$ implica $|S| \geq h$, Entonces existen $\lceil \frac{h+2}{3} \rceil$ (respectivamente $\lceil \frac{h}{2} \rceil$) Para $h \in \{1, \dots, 8\}$, uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos 3 en G .

Demostración :

La prueba se hace por contradicción. Sea G una gráfica con $u, v \in V(G)$, tal que G satisfase las hipótesis del Teorema 3.2.

a) Suponga que $h > 8$ y G no cumple el teorema 3.2, es decir, G tiene a lo mas t uv -trayectorias, de longitud mayor o igual que 3 y $t < \frac{h+2}{3}$.

Aplicando el Teorema 3.1, a esta gráfica se sabe que G tiene un separador, S^* tal que $|S^*| < 3\frac{h+2}{3} - 2$, pero esto implica que dicho separador, tenga cardinalidad

$$|S^*| < h,$$

lo que constituye una contradicción.

b) Supóngase ahora, que $h \in \{1, 2, \dots, 8\}$. En forma similar al caso a, se sabe que $t < 4$.

Utilizando el Teorema 3.1, se sabe que G tiene un separador, S^* tal que $|S^*| < 2t$, pero bajo las hipótesis actuales, dicho separador tendría $|S^*| < 8$, lo que representa una contradicción.

□

Haciendo analogía con la definición de $a_n(h)$, dada en el capítulo anterior, se define $a'_n(G, u, v)$ al número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas, de longitud al menos n en la gráfica G y $a'_n(h)$ al mínimo valor de $a_n(G, u, v)$ sobre todas las ternas (G, u, v) donde G es una gráfica, $u, v \in V(G)$ y G tiene un conjunto separador con h vértices.

En el caso en que h es menor o igual que 8, con el Teorema 3.2 y la cota obtenida a través de las gráficas construidas al inicio de este capítulo, es posible encontrar una expresión para $a'_3(h)$. Este hecho se puede establecer como el siguiente corolario.

Corolario 3.1.

Para $h \leq 8$, $a'_3 = \lceil \frac{h}{2} \rceil$.

Demostración :

Por el Teorema 3.2, se tiene que $a'_3 \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil$. Además, se ha visto que $a'_3 \geq \frac{h}{n-1}$, por lo tanto, $a'_3 = \frac{h}{2}$.

□

M. Hager, en su artículo [2], conjeturó que esta relación se cumple para toda h y $n = 3$. Mas aún, en una segunda conjetura, expuesta en el mismo artículo, generaliza esta relación al conjeturar que $\frac{h}{n-1}$, es una cota estricta para toda h y n arbitraria.

CAPITULO IV

RESULTADOS RELACIONADOS CON TRAYECTORIAS LARGAS

En este capítulo se estudia el trabajo de W. Mader [3], en el cual se obtienen mejores cotas para el caso $n = 3$ que las expuestas en el capítulo anterior. En esta parte se obtiene el valor exacto para la función $a_3(h)$, en gráficas en las cuales $h \leq 8$. Finalmente se presenta una aplicación de los resultados de Mader, al problema de determinar cuándo una gráfica tiene un 1-factor.

En el artículo base de esta parte, se estudia el siguiente problema sobre trayectorias, planteado por T. Gallai en [1]. Este problema es más general que el problema que se presentó en el capítulo anterior. Se trata de un problema sobre el número máximo de trayectorias, con ciertas propiedades, en una multigráfica valuada, éste puede enunciarse como sigue:

Problema 4.1.

Sea G una multigráfica finita y sean e y p funciones de $V(G)$, en los enteros no negativos. Encontrar el número máximo de trayectorias disjuntas en aristas, $\mu(G_e^p)$ tales que cada vértice x es punto final de a lo más $e(x)$ y punto intermedio de a lo más $p(x)$ de estas trayectorias.

Dados G una gráfica finita y un conjunto de vértices $A \subseteq V(G)$, considere el caso particular de este problema que se obtiene al definir las funciones $e(x)$ y $p(x)$ como sigue :

$$e(x) = 0 \quad \text{si } x \in V(G) - A \text{ y}$$

$$e(x) \geq \text{val}(x, G) \quad \text{si } x \in A.$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } x \in A, \\ 1 & \text{para todo } x \in V(G) - A. \end{cases}$$

Para estas funciones e y p , $\mu(G_e^p)$ es el máximo número de trayectorias internamente disjuntas que comienzan y terminan en puntos diferentes de A , pero todos sus puntos internos están fuera de A , a tales trayectorias se les llama A -trayectorias y a $\mu(G_e^p)$ se le denota $\mu(A; G)$.

Observe que si $A = \{u, v\} \subset V(G)$, entonces $\mu(G_2^e)$ es el número máximo de uv -trayectorias internamente disjuntas en G . Nuevamente la versión original del Teorema de Menger proporciona la solución.

Este caso particular del problema 4.1, al cual se llamará problema 4.1.1, fué resuelto por W. Mader en [4]. Se incluye en este trabajo el teorema que proporciona una expresión para $\mu(A; G)$, pues es necesario para el desarrollo de este capítulo. La demostración puede ser consultada en el artículo original de W. Mader a que se hizo mención. Considere, primero, la siguiente definición :

Dado $X \subset V(G)$ se define $B(X; G)$ como el conjunto de vértices de X que están unidos por una arista a al menos un punto de $V(G) - X$.

Teorema 4.1.

Sea G una gráfica, si $A \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente de vértices de ésta, entonces

$$\mu(A; G) = \min \left\{ |C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B(C_i; G - C_0)|}{2} \right\rfloor \right\},$$

donde el mínimo se toma sobre las particiones $P = (C_0, C_1, \dots, C_n)$ de $V(G) - A$ tales que $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ no contiene A -trayectorias. □

Antes de continuar, observe que cualquier A -trayectoria contribuye con al menos una unidad a la expresión dada en el teorema, ya que por la construcción de la partición, ninguna A -trayectoria puede estar totalmente contenida en algún conjunto C_i (note que los puntos de A no están contenidos en ningún elemento de la partición) de tal manera que si un conjunto C_i contiene una porción de una A -trayectoria entonces, o bien $|B(C_i; G - C_0)| \geq 2$ o C_0 contiene al menos 2 puntos de dicha trayectoria, es decir, la desigualdad

$$\mu(A; G) \leq \min \left\{ |C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B(C_i; G - C_0)|}{2} \right\rfloor \right\},$$

claramente se cumple. El teorema establece entonces, que es posible elegir la partición P , de tal manera que el número máximo de A -trayectorias sea, en efecto, determinado por la expresión:

$$|C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B(C_i; G - C_0)|}{2} \right\rfloor.$$

Al considerar más conjuntos de vértices se tiene un problema semejante al anterior que puede ser enunciado de la siguiente forma :

Problema 4.2.

Dados una gráfica G y $A_1, \dots, A_k \subseteq V(G)$, encontrar el número máximo de $A_i A_j$ -trayectorias, con $i \neq j$, mutuamente ajenas en G , se denota a este número por:

$$\bar{\mu}(A_1, A_2, \dots, A_k).$$

Observe que si $k = 2$, el número $\bar{\mu}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ se puede obtener a través del Teorema de Menger, pues el problema se reduce a encontrar el número máximo de $A_1 A_2$ -trayectorias disjuntas en una gráfica G , donde $A_1, A_2 \subseteq V(G)$.

Por otra parte los dos problemas anteriores, 4.1.1 y 4.2, son equivalentes. Esta equivalencia se demuestra vía la siguiente transformación:

Dados una gráfica G y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V(G)$ se define la gráfica \tilde{G} como sigue:

Se sustituye cada vértice $a_i \in A$ por un conjunto independiente A_i con r_i vértices de grado 1, donde $r_i = \text{val}_G(a_i)$, de tal manera que cada uno de éstos puntos es adyacente a uno de los vecinos de a_i en G .

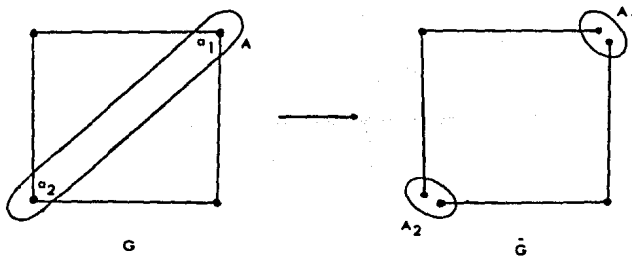


Figura 4.1.

A cada trayectoria de G que une dos puntos a_i y a_j diferentes en A , corresponde una trayectoria en \tilde{G} con puntos inicial y final en diferentes subconjuntos A_i y viceversa. Por esta razón $\mu(A; G) = \bar{\mu}(A_1, A_2, \dots, A_k; \tilde{G})$.

Análogamente, dados una gráfica G y A_1, \dots, A_k subconjuntos de vértices, mutuamente ajenos en G se define la gráfica \tilde{G} como sigue:

Se toma G junto con k nuevos vértices $\{a_1, \dots, a_k\} = A$ y se une cada vértice a_i con todos los elementos del conjunto A_i .

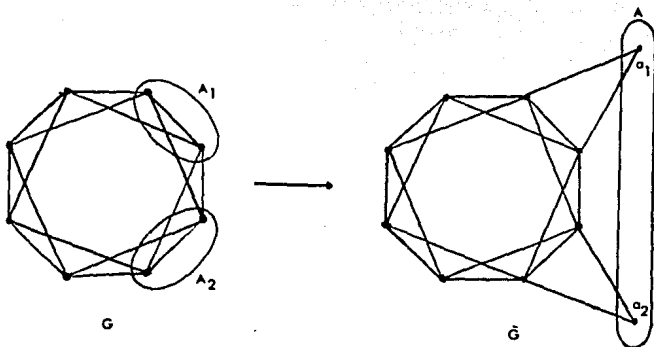


Figura 4.2.

A cada $A_i A_j$ -trayectoria en G le corresponde de manera canónica una $a_i a_j$ -trayectoria en \tilde{G} y viceversa, se sigue que:

$$\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G) = \mu(A; \tilde{G}).$$

De esta manera se ha probado la equivalencia de estos problemas.

□

El problema de determinar $\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G)$, fue resuelto por W. Mader en [4] donde demostró un Teorema que da una fórmula para $\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G)$ sin la restricción de que los conjuntos A_i ; $1 \leq i \leq k$, sean ajenos dos a dos. En dicho artículo se publicó la prueba para el caso $k = 2$. A continuación se incluye la versión general de dicho Teorema. Recuerde que al conjunto de *componentes conexas* de una gráfica G , se le denota por $\mathcal{L}(G)$.

Teorema 4.2.

Sea G una gráfica y $A_1, \dots, A_k \subseteq V(G)$, subconjuntos de vértices de ésta, entonces

$$\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G) = \min \left\{ |C_0| + \sum_{i=1}^n \left[\frac{|B(C_i; G - C_0) \cup (C_i \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i))|}{2} \right] \right\},$$

donde el mínimo se toma sobre las particiones $P = (C_0, C_1, \dots, C_n)$ de $V(G)$ tales que: para todo $C \in \mathcal{L}(G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i])))$ no trivial, se cumple:

$$|C \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)| \geq 2 \text{ y } C \cap A_i = \emptyset \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Para demostrar este resultado se hace una transformación a la gráfica mediante la cual se reduce este problema, a aquel resuelto por el Teorema 4.1.

Demostración:

Sea $A = \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{a_x; x \in \bigcup (A_i \cap A_j); i \neq j, 1 \leq i, j \leq k\}$ un conjunto de vértices que no pertenecen a G . Se define la gráfica \tilde{G} tomando una copia de G , unión el conjunto A . Los nuevos puntos de \tilde{G} tienen las siguientes adyacencias:

- a_i es adyacente a los vértices de $A_i - \bigcup_{i \neq j} A_j$,
- a_x es adyacente al vértice $x \in A_i \cap A_j; i \neq j; 1 \leq i, j \leq k$.

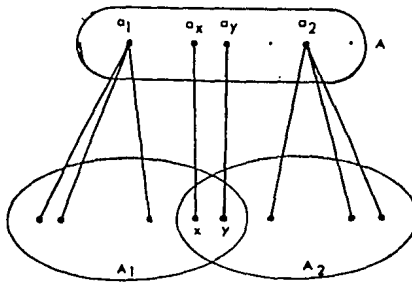


Figura 4.3.

Una A -trayectoria en esta gráfica \tilde{G} , corresponde a una $A_i A_j$ -trayectoria en G y viceversa, por lo tanto,

$$\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G) = \mu(A; \tilde{G}).$$

Observe además que con esta construcción de \tilde{G} , las trayectorias consideradas tienen puntos extremos diferentes, como en el caso en que los conjuntos A_i son mutuamente ajenos.

Aplicando ahora el Teorema 4.1 a la gráfica \tilde{G} , se sabe que existe una partición $P = (C_0, C_1, \dots, C_n)$ de $V(G)$ tal que $\tilde{G} - \left(C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]) \right)$ no contiene A -trayectorias y

$$\mu(A; \tilde{G}) = \min \left\{ |C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{B(C_i; \tilde{G} - C_0)}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Se elige de entre las particiones que cumplen lo anterior, aquella en la que n es mínima posible.

Observe que los vértices de $C_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right)$ necesariamente pertenecen a $B(C_i; \tilde{G} - C_0)$ pues tienen como vecino en \tilde{G} a algún vértice de A y estos puntos no pertenecen a C_i pues no fueron considerados al tomar la partición. Por esta razón es claro que $B(C_i; \tilde{G} - C_0) = B(C_i; G - C_0) \cup \left(C_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right)$.

Hasta este momento, se ha trabajado con particiones que cumplen la condición de que $\tilde{G} - \left(C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]) \right)$ no contiene A -trayectorias, ahora se probará por contradicción, que estas particiones cumplen las condiciones establecidas en el Teorema 4.2, es decir, que para todo $C \in \mathcal{L}(G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i])))$ no trivial, se tiene que

$$\left| C \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| \geq 2 \quad \text{y} \quad C \cap A_i = \emptyset \quad \text{para alguna} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Antes de buscar una contradicción, se hace un análisis de las particiones consideradas en el Teorema y de las características de las componentes conexas generadas por éstas en $\tilde{G} - \left(C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]) \right)$.

Sea C una componente no trivial de $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ digamos que

$$C \cap C_i = \emptyset \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, r \quad \text{y}$$

$$C \cap C_j \neq \emptyset \quad \text{para} \quad j = r+1, \dots, n,$$

como C es no trivial, sabemos que $r \leq n-2$, pues como se han eliminado las aristas que unen puntos contenidos en un mismo C_i , ninguna C puede contener mas de un vértice de cada elemento de la partición y por lo tanto cada componente conexa debe intersectar a mas de un conjunto C_i , $1 \leq i \leq n$. Es claro que los conjuntos :

$$C'_i = C_i \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{y} \quad C'_{r+1} = \bigcup_{i=r+1}^n C_i,$$

forman una partición de $V(G) - C_0$ tal que $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C'_i]))$ no contiene A -trayectorias. Como $\mu(A; \tilde{G})$ es el mínimo, se tiene que :

$$\mu(A; \tilde{G}) \leq |C_0| + \sum_{i=1}^{r+1} \left\lfloor \frac{|B(C'_i; \tilde{G} - C_0)|}{2} \right\rfloor,$$

como además

$$B(C'_{r+1}; \tilde{G} - C_0) \subseteq \bigcup_{i=r+1}^n B(C_i; \tilde{G} - C_0),$$

entonces :

$$\mu(A; \tilde{G}) \leq |C_0| + \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{|B(C'_i; \tilde{G} - C_0)|}{2} \right\rfloor \leq |C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B(C_i; \tilde{G} - C_0)|}{2} \right\rfloor = \mu(A; \tilde{G}).$$

Pero como C es una componente conexa de $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ y

$$C \subseteq C'_{r+1} = \bigcup_{i=r+1}^n C_i,$$

los únicos vértices que tienen vecinos en $\tilde{G} - C_0$ fuera de C'_r , son los de $\bigcup_{i=1}^k A_i$ que tienen como vecinos a los puntos de A , de tal suerte que

$$B(C'_{r+1}; \tilde{G} - C_0) \subseteq \bigcup_{i=r+1}^n B(C_i; \tilde{G} - C_0) - \left(C - \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \right).$$

Se procede ahora con la última parte de la demostración. Supóngase que $\left| C \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \right| \leq 1$, como

$$B(C'_{r+1}; \tilde{G} - C_0) \subseteq \bigcup_{i=r+1}^n B(C_i; \tilde{G} - C_0) - \left(C - \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \right),$$

entonces :

$$|B(C'_{k+1}; \tilde{G} - C_0)| \leq \sum_{i=k+1}^n |B(C_i; \tilde{G} - C_0)| - (n - k - 1).$$

lo que contradice la hipótesis de que n es mínima, por lo tanto:

$$\left| C \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \right| \geq 2 \text{ y } C \cap A_i = \emptyset \text{ para alguna } i, 1 \leq i \leq n.$$

Es posible obtener resultados tipo Menger a partir de los teoremas anteriores, utilizando el concepto de separador obtenido via la siguiente definición :

Sea G una gráfica y $A \subseteq V(G)$, un conjunto independiente de vértices, se define $\tau(A; G) = \min\{|T| / T \text{ es } A\text{-separador}\}$.

Fué conjeturado por T. Gallai que $\mu(A; G) \geq \frac{1}{2}\tau(A; G)$. Esta es ya una relación Mengeriana, observe que si $A = \{u, v\}$ lo que se tiene es el problema resuelto por Menger en su Teorema original. Por supuesto la relación se cumple en este caso.

Esta conjetura se deduce del Teorema 4.1 como el siguiente Corolario.

Corolario 4.1.

Sea G una gráfica, para todo conjunto independiente $A \subseteq V(G)$ se cumple :

$$\mu(A; G) \geq \frac{1}{2} \tau(A; G).$$

Demostración :

Aplicando el Teorema 4.1. a la gráfica G y al conjunto independiente A , se obtiene una partición $P = (C_0, \dots, C_n)$ de $V(G) - A$ tal que $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ no contiene A -trayectorias y para la cual se satisface :

$$\mu(A; G) = \min\{|C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B(C_i; G - C_0)|}{2} \right\rfloor\} \dots (*)$$

Es fácil ver que $C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n B(C_i; G - C_0)$, es un separador en G , pues $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ no contiene A -trayectorias. Por lo tanto :

$$|C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n B(C_i; G - C_0)| \geq \tau(A; G) \text{ y}$$

$$|C_0| + \sum_{i=1}^n |B(C_i; G - C_0)| \geq \tau(A; G),$$

de (*) se tiene :

$$2\mu(A; G) = 2|C_0| + \sum_{i=1}^n |B(C_i; G - C_0)|.$$

De estas últimas relaciones se concluye que :

$$2\mu(A, G) \geq |C_0| + \sum_{i=1}^n |B(C_i; G - C_0)| \geq |C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n B(C_i; G - C_0)| \geq \tau(A, G),$$

y finalmente :

$$\mu(A, G) \geq \frac{1}{2}\tau(A, G).$$

□

Por otra parte, si se define $\bar{\tau}(A_1, \dots, A_k; G)$ de manera análoga a $\tau(A; G)$ como :

$$\bar{\tau}(A_1, \dots, A_k; G) = \min\{|T| \subseteq V(G) / G - T \text{ no contiene } A_i A_j \text{- trayectorias } i \neq j\},$$

se obtiene un Corolario similar a partir del Teorema 4.2.

Corolario 4.2.

Dados G , una gráfica y cualesquiera conjuntos de vértices $A_1, \dots, A_k \subseteq V(G)$, se cumple:

$$\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G) \geq \frac{1}{2}\bar{\tau}(A_1, \dots, A_k; G).$$

Demostración :

Aplicando el Teorema 4.2. se sabe que existe una partición $P = (C_1, \dots, C_k)$ de $V(G)$ tal que $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$ no contiene $A_i A_j$ -trayectorias y además P satisface la relación :

$$\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G) = |C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor,$$

donde $B_i = B(C_i; G - C_0) \cup (C_i \cap (\bigcup_{i=1}^k A_i))$ para $i = 1, \dots, n$.

Claramente $C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n B_i$ es un separador de todas las $A_i A_j$ - trayectorias en G , pues de no ser así, la partición P no cumpliría las condiciones establecidas en el Teorema 4.2. Observe que cualquier $A_i A_j$ - trayectoria en G debe contener un punto de C_0 o una arista de algún C_i .

Defínase, para $1 \leq i \leq n$:

$$B'_i = \begin{cases} B_i & \text{si } |B_i| \text{ es par,} \\ B_i - \{b_i\} & \text{si } |B_i| \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde b_i es un vértice arbitrario en B_i .

Nuevamente $T = C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n B'_i$ es un $A_i A_j$ -separador en G , pues al suprimir un vértice de cada B_i , $1 \leq i \leq n$ con cardinalidad impar, no se incluyen aristas de ninguna C_i ni puntos de C_0 en $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$, de tal manera que de haber $A_i A_j$ - trayectorias en $G - T$, las habría en $G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i]))$.

De aquí se tiene:

$$\bar{\tau}(A_1, A_2; G) \leq |T| \leq 2|C_0| + \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{1}{2} |B'_i| \right\rfloor = 2\bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G),$$

por lo que se concluye que

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}(A_1, A_k; G) \leq \bar{\mu}(A_1, \dots, A_k; G).$$

□

Con este resultado es posible retomar el problema central de este trabajo. En el capítulo anterior se mencionó la conjetura de M. Hager sobre que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ es una cota estricta para el caso $n = 3$, en el problema de encontrar el número máximo de trayectorias de longitud al menos n .

Aplicando este resultado al problema de trayectorias de longitud al menos 3, se puede obtener una prueba de dicha conjetura, propuesta en [2], y enunciada aquí como el siguiente corolario.

Corolario 4.3.

Sea G una gráfica no dirigida y $u, v \in V(G)$ no adyacentes, entonces

$$a_3(G; u, v) \geq \frac{1}{2} h_3(G; u, v).$$

Demostración :

Sean $A_1 = N(u; G)$ y $A_2 = N(v; G)$, entonces :

$$a_3(G; u, v) = \bar{\mu}(A_1, A_2; G - \{u, v\}) \quad \text{y}$$

$$h_3(G; u, v) = \bar{\tau}(A_1, A_2; G - \{u, v\}),$$

por el Corolario 4.2.

$$\bar{\mu}(A_1, A_2; G - \{u, v\}) \geq \frac{1}{2} \bar{\tau}(A_1, A_2; G - \{u, v\}),$$

y por lo tanto :

$$a_3(u, v; G) \geq \frac{1}{2} h_3(G; u, v).$$

□

Con este corolario y el Teorema 3. , se puede concluir, de manera similar a como se hizo en el capítulo anterior, que para $n = 3$ y $h_3(G; u, v) \in \{1, \dots, 8\}$,

$$a_3(G; u, v) = \frac{1}{2} h_3(G; u, v) = \frac{1}{n-1} h_3(G; u, v).$$

Esta es otra vía para resolver completamente este caso particular del problema sobre trayectorias de longitud mayor o igual que n .

Resulta interesante mencionar algunas aplicaciones de los teoremas aquí expuestos, a otros problemas de la Teoría de Gráficas.

Considere el caso en que $k = 2$ y $A = A_1 = A_2$ en el teorema 4.2. las particiones $P = (C_0, \dots, C_n)$ deben ser tales que todas las componentes de

$$G - (C_0 \cup \bigcup_{i=1}^n E(G[C_i])),$$

sean triviales, pues si existiera una componente no trivial, C se tendría :

$$|C \cap A| \geq 2 \text{ y } C \cap A = \emptyset.$$

Por lo tanto, toda C_i debe ser una componente conexa de $G - C_0$ y $B(C_i; G - C_0) = \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$, es decir, la partición P está determinada únicamente por el conjunto C_0 . De ésto se sigue que si : $A = A_1 = A_2 \subseteq V(G)$, entonces :

$$\bar{\mu}(A, A; G) = \min \left\{ |C_0| + \sum_{C \in \mathcal{C}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C \cap A|}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Donde se toma el mínimo sobre todos los subconjuntos C_0 de $V(G)$, pues como se dijo antes, dado C_0 todos lo demás elementos de la partición quedan automáticamente determinados.

Esta es la generalización del Teorema de W. Tutte del 1-factor dada por T. Gallai en [1]. Observe que en el caso en que se toma $A_1 = A_2 = V(G)$; $\bar{\mu}(A_1, A_2; G)$ es el tamaño de un acoplamiento máximo. Esto es bastante claro pues al maximizar el número de $A_1 A_2$ -trayectorias en G , se minimiza en consecuencia, la longitud de las mismas, de tal forma que si se satisface :

$$\bar{\mu}(V(G), V(G); G) = \frac{|V(G)|}{2} \text{ y } |V(G)| \text{ es par,}$$

entonces G tiene un 1-factor y viceversa.

Se puede probar que este resultado es equivalente al mencionado teorema sobre 1-factores. Para demostrar ésto, dados una gráfica G y un conjunto $S \subseteq V(G)$, de vértices, se define $I(G - S)$ como el número de componentes conexas de $G - S$ con cardinalidad impar.

Con esta definición se puede enunciar la versión original del Teorema de W. Tutte del 1-factor como sigue :

Teorema 4.3.

Sea G una gráfica, G tiene un 1-factor si y sólo si, para todo subconjunto S , de los vértices de G , se satisface :

$$I(G - S) \leq |S|.$$

□

Se probará que las condiciones del Teorema 4.3 se cumplen si y sólo si se tiene que: $\mu(V(G), V(G); G) = \frac{|V(G)|}{2}$ y $|V(G)|$ es par.

Observe que para todo subconjunto de vértices C_0 ,

$$I(G - C_0) = \left\lceil \frac{|V(G - C_0)|}{2} \right\rceil - \sum_{C \in \mathcal{L}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \quad \dots (1)$$

ya que al hacer correr la suma sobre todas las componentes de $G - C_0$, se consideran todos los vértices de $G - C_0$, la expresión en la sumatoria aporta $1/2$ por cada uno de estos puntos, pero al tomar la parte entera, se pierde $1/2$ por cada componente conexa de cardinalidad impar en $G - C_0$. Por lo anterior, la expresión (1) en efecto se satisface.

Primero se probará que si

$$\min \left\{ |C_0| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \right\} = \frac{|V(G)|}{2},$$

entonces para todo conjunto $S \subseteq V(G)$ se cumple que $|S| \geq I(G - S)$, es decir, que $|S| - I(G - S) \geq 0$.

Se sabe, por hipótesis, que para todo $C_0 \subseteq V(G)$

$$|C_0| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \geq \frac{|V(G)|}{2} = \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor,$$

y claramente :

$$|C_0| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{|V(G - C_0)|}{2} \right\rceil.$$

De aquí se tiene que :

$$|C_0| - \left(\left\lceil \frac{|V(G - C_0)|}{2} \right\rceil - \sum_{C \in \mathcal{L}(G - C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \right) \geq 0$$

y utilizando la relación (1) se puede concluir que :

$$|C_0| \geq I(G - C_0).$$

Ahora falta demostrar que si G es una gráfica tal que para todo conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ se cumple que $|S| \geq I(G - S)$, entonces,

$$\mu(V(G), V(G); G) = \min \left\{ |C_0| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G-C_0)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \right\} = \frac{|V(G)|}{2},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los subconjuntos $C_0 \subseteq V(G)$.

Observe que si se toma $S = \emptyset$, entonces $|S| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor = \frac{|V(G)|}{2}$, y por lo tanto:

$$\mu(V(G), V(G); G) \leq \frac{|V(G)|}{2}.$$

Por otra parte, para cada conjunto $S \subseteq V(G)$,

$$|V(G-S)| = \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} |C|,$$

$$|V(G-S)| = 2 \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \frac{|C|}{2},$$

las componentes conexas se pueden separar en aquellas que tienen cardinalidad par y las de cardinalidad impar. Suponga que $G-S$ tiene m componentes conexas, C_i $1 \leq i \leq m$ y que $|C_i|$ es par si $1 \leq i \leq k$ y $|C_i|$ es impar si $k+1 \leq i \leq m$. Se tiene entonces que :

$$|V(G-S)| = 2 \sum_{i=1}^k \frac{|C_i|}{2} + 2 \sum_{i=k+1}^m \frac{|C_i|}{2},$$

de donde :

$$|V(G-S)| = 2 \sum_{i=1}^k \frac{|C_i|}{2} + 2 \sum_{i=k+1}^m \frac{|C_i| - 1}{2} + I(G-S),$$

claramente :

$$|V(G-S)| = 2 \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{|C_i|}{2} \right\rfloor + 2 \sum_{i=k+1}^m \left\lfloor \frac{|C_i|}{2} \right\rfloor + I(G-S),$$

$$|V(G-S)| = 2 \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + I(G-S).$$

Por otra parte es claro que

$$|V(G)| = |V(G-S)| + |S|.$$

De lo anterior se obtiene que :

$$\begin{aligned} |V(G)| &= |V(G-S)| + |S| = 2 \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + I(G-S) + |S|, \\ \frac{|V(G)|}{2} &= \frac{|V(G-S)| + |S|}{2} = \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}I(G-S) + \frac{1}{2}|S|, \\ \frac{|V(G)|}{2} - \frac{1}{2}I(G-S) &= \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}|S|, \\ \frac{|V(G)|}{2} - \frac{1}{2}I(G-S) + \frac{1}{2}|S| &= \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + |S|. \end{aligned}$$

finalmente se obtiene la relación :

$$|S| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor = \frac{|V(G)|}{2} - \frac{1}{2}I(G-S) + \frac{1}{2}|S| \quad \dots (2)$$

Se sabe por hipótesis, que $|S| \geq I(G-S)$, de donde se tiene que $|S| - I(G-S) \geq 0$, y por lo tanto,

$$\frac{1}{2} (|S| - I(G-S)) \geq 0.$$

Utilizando la relación (2), se concluye que para cada $S \subseteq V(G)$,

$$|S| + \sum_{C \in \mathcal{L}(G-S)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \geq \frac{|V(G)|}{2},$$

por lo tanto

$$\mu(V(G), V(G); G) \geq \frac{|V(G)|}{2},$$

con lo que finalmente se obtiene el resultado.

$$\mu(V(G), V(G); G) = \frac{|V(G)|}{2}.$$

□

CONCLUSIONES

El objetivo de esta tesis ha sido exponer los resultados conocidos hasta la fecha sobre el problema de encontrar el número máximo de trayectorias largas y disjuntas, entre dos vértices de la gráfica. El estado actual del estudio de este problema es el siguiente:

Se conocen cotas superiores e inferiores para el número $a_n(h)$, para el caso en que n y h son arbitrarias. Estas cotas sólo han sido mejoradas para el caso $n = 3$, h arbitraria en gráficas no dirigidas, en esta caso se ha probado también que la cota que se tiene es estricta.

Se tienen además, algunos resultados para variantes de este problema, como el caso en el que se consideran trayectorias entre dos conjuntos de puntos.

En el capítulo II, se introdujo la definición de h_n , que fué utilizada para mostrar una de las cotas. Como se mencionó entonces, no se conoce el valor exacto de h_n , para cualquier n y quedan algunas preguntas por resolver, en este contexto.

Establecer cotas estrictas para el caso general, ya sea mejorando las que se conocen o probando que se tienen las óptimas, es un proyecto mas ambicioso y desde luego mas interesante, que deberá ser abordado en un futuro.

Aún conociendo el valor exacto de $a_n(h)$, no es posible determinar la cardinalidad de un sistema máximo de uv -trayectorias disjuntas, de longitud al menos n . Esto inevitablemente sugiere el preguntarse por una caracterización de las digráficas (o gráficas) y pares de puntos en los cuales se alcanza el valor de $a_n(h)$. Mas aún, se puede plantear la pregunta de si es posible determinar el tamaño de un sistema máximo de uv -trayectorias disjuntas, de longitud al menos n , en una digráfica (o gráfica) en términos no sólo de n y h , sino incluyendo también otros parámetros de la gráfica.

La contribución de esta tesis es pues, la divulgación tanto del problema, como de los resultados que se tienen y las relaciones que se conocen entre este y otros problemas de la teoría de gráficas, con el objetivo de fomentar el estudio del problema.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. T. Gallai. "Maximum-Minimum-Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen." *Acta Mathematica Acad. Sci. Hunagar.* Vol 12, 1961.
- [2]. M. Hager. "A Mengerian Theorem for Paths of Length al Least Three." *Journal of Graph Theory*, Vol. 10, 1986.
- [3]. W. Mader. "On Disjoint Paths in Graphs." *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 41, 1989.
- [4]. W. Mader. "Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege." *Arch. der Math.* Vol. 31, 1978.
- [5]. L. Lovász, V. Neumann-Lara, M. Plummer. "Mengerian Theorems For Paths of Bounded Length." *Periodica Mathematica Ungarica*, Vol. 9(4), 1978.
- [6]. L. Montejano, V. Neumann-Lara. "A Variation of Menger's Theorem for Long Paths. " *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, vol. 36, 1984.
- [7]. V. Neumann Lara. *Introducción a la Teoría de Gráficas*, CONACYT, México. 1985.

Bibliografía

- [1]. T. Gallai. "Maximum-Minimum-Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen." *Acta Mathematica Acad. Sci. Hunagar.* Vol 12, 1961.
- [2]. M. Hager. "A Mengerian Theorem for Paths of Length al Least Three." *Journal of Graph Theory*, Vol. 10, 1986.
- [3]. W. Mader. "On Disjoint Paths in Graphs." *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 41, 1989.
- [4]. W. Mader. "Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege." *Arch. der Math.* Vol. 31, 1978.
- [5]. L. Lovász, V. Neumann-Lara, M. Plummer. "Mengerian Theorems For Paths of Bounded Length." *Periodica Mathematica Ungarica*, Vol. 9(4), 1978.
- [6]. L. Montejano, V. Neumann-Lara. "A Variation of Menger's Theorem for Long Paths." *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, vol. 36, 1984.
- [7]. V. Neumann Lara. *Introducción a la Teoría de Gráficas*, CONACYT, México. 1985.