

01173 7
29

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELACION DE UNA CARCAZA
DE TRANSMISION CON ELEMENTO FINITO.

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE

POSTGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POR

ABRAHAM ROJANO AGUILAR

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER

EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

MODELACIÓN DE UNA CARCAZA DE
TRANSMISION CON ELEMENTO FINITO

Resumen

En este trabajo se presenta un panorama completo para abordar el problema de una carcaza de transmisión de velocidades propiedad de la empresa "Transmisiones y equipos mecánicos S.A. de C.V" con sede en Querétaro, Querétaro". Dicho trabajo es llevado a cabo dentro de los planteamientos teóricos de la elastostática y siguiendo una formulación variacional primal identificada con el método de los desplazamientos se obtienen esquemas numéricos cuyo manejo implica un tratamiento computacional especializado, como es el manejo de archivos de acceso aleatorio para resolver un gran sistema de ecuaciones lineales.

Abrahám Rojano A.
Julio 1992

INDICE	
NOMENCLATURA	
INTRODUCCION	1
I.-PROBLEMA DE LA ELASTOSTATICA	3
1.-Descripción general	3
II.-FORMULACION VARIACIONAL EN ELASTOSTATICA	6
1.-Generalidades	6
2.-Formulación variacional primal	6
3.-Formulación variacional primal discreta	8
III.-ELEMENTOS FINITOS PARA FORMULACIONES VARIACIONALES EN ELASTOSTATICA	10
1.-Generalidades	10
2.-Definiciones básicas	10
3.-Familia de elementos finitos	12
4.-Construcción de elementos finitos	23
IV.-MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL, VECTOR DE CARGAS Y ENSAMBLE	16
1.-Matriz de rigidez local	16
2.-Vector de cargas local	17
3.-Matriz de rigidez global	19
4.-Vector de cargas global	20
V.-SOLUCION DE UN GRAN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	22
1.-Aspectos básicos	22
2.-Método de Gauss adaptado	22
VI.-ASPECTOS COMPUTACIONALES	25
1.-Generalidades	25
2.-Descripción del lenguaje	25
3.-Manejo de archivos	25
4.-Utilerias	29
5.-Proceso	33
6.-Posproceso	37
RESULTADOS	39

CONCLUSIONES	43
RECOMENDACIONES	43
REFERENCIAS	44
APENDICE A.-INTEGRACION NUMERICA	47
1.-Generalidades	47
2.-Integración unidimensional	47
3.-Integración tridimensional	49

NOMENCLATURA

V	Espacio vectorial
$a(\cdot, \cdot)$	Forma bilineal
H	Espacio de Hilbert
Card A	Cardinalidad A
Diam (A)	Diámetro del conjunto A
μ, λ	Coefficientes de Lamé
E	Módulo de Young
ν	Relación de Poisson
(E, P, Σ)	Elemento finito
\mathcal{T}	Triangulación
b	Fuerzas de cuerpo
δ_{ij}	Delta de Kronecker
\forall	Para todo
\exists	Existe
$l.e$	Esto es (id est)
$\{x \in E : P\}$	Conjunto de elementos de E con la propiedad P
$E \times F$	Producto cartesiano de los conjuntos E y F
$E \longrightarrow F$	Aplicación de E en F
$f \circ g$	Composición de f con g
f^{-1}	Inversa de f
a_{ij}	Componente ij de la matriz A
$L^q(\Omega)$	El espacio de funciones definidas sobre Ω con $ f ^q$ integrable
$H^m(\Omega)$	Espacio de Hilbert de Sobolev de orden m
Ω	Subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n
$\hat{\Omega}, \hat{E}$	Dominios de referencia
$B(x, \alpha)$	Bola abierta con centro en x y radio α
\bar{A}	Cerradura del conjunto A
\dot{A}	Interior del conjunto A
Γ ó $\partial\Omega$	Frontera de Ω
A^{-1}	Inversa de la matriz A
$Adj(A)$	Adjunta de la matriz A
$tr A$	Trasa de la matriz A
\mathbb{R}	Espacio de números reales
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$

$ \alpha $	Módulo de α
$u \times v$	Producto vectorial de los vectores u, v
$u \cdot v$	Producto escalar de los vectores u, v
$ u $	Norma euclidiana de u
$f'(a)$	Derivada de f en el punto a
$f^n(a)$	Derivada de orden n en el punto a
∇u	Gradiente de u
$\text{div } u$	Divergencia de u
Δu	Laplaciano de u

INTRODUCCION

Esta tesis tiene como objetivo el encontrar la distribución de esfuerzos, cuando se le aplica un par motriz en la flecha principal de 500 N-m, en la carcaza de una caja velocidades para vehiculos automotrices modelo TR2750 fabricada por la compañía TREMEC S. A. de la ciudad de Querétaro, Querétaro. (Ver figura 1).

Este, como muchos problemas de la ingeniería, puede ser modelados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para este caso particular se toma el modelo dado por la teoría de la elastostática lineal; el cual se considera apropiado para el desarrollo de este trabajo. Gurtin [1].

En la actualidad, el modelo matemático que arroja la teoría de la elastostática en el caso particular de la carcaza de la caja de velocidades modelo TR2750, se puede resolver de dos maneras, empleando: los métodos numéricos y los métodos experimentales.

Para esta tesis se plantea el obtener una solución empleando métodos numéricos con equipo computacional del tipo PC, mediante la siguiente secuencia:

- a).-Formular el problema de valores en la frontera de acuerdo a la teoría de la elastostática.
- b).-Transformar el problema anterior a una versión integral equivalente, mediante la fórmula de Green correspondiente vía formulación variacional primal.
- c).-Obtener la formulación variacional primal discreta asociada a la formulación variacional primal.
- d).-Construir subespacios de dimensión finita, mediante el método del elemento finito.
- e).-Obtener los campos de deformación, esfuerzo y criterios de

falla.

f).-Presentar resultados.

Los pasos anteriores se llevan a cabo considerando una condiciones de frontera proporcionadas por la empresa TREMEC S.A.; en el análisis de la carcaza de la caja de velocidades, y como puede observarse en el desarrollo del trabajo, los pasos anteriores son agrupados en capítulos que facilitan la organización del trabajo.

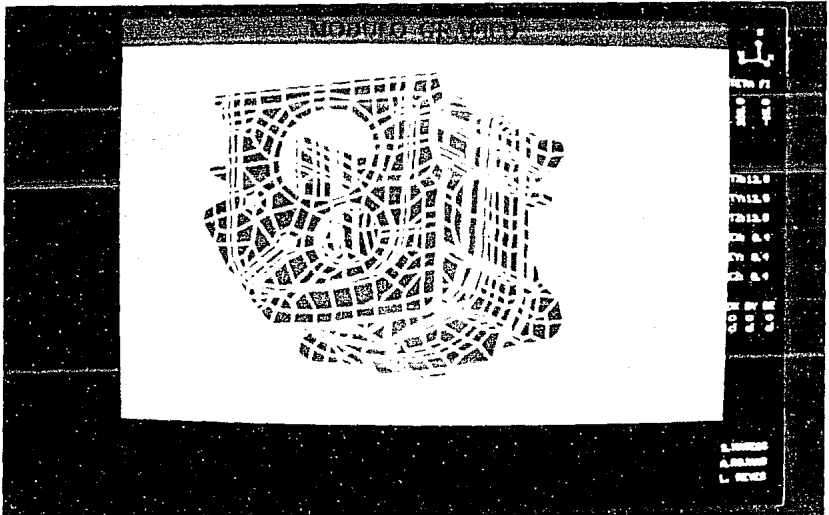


Figura 1.- Configuración de referencia

I.-PROBLEMA DE LA ELASTOSTÁTICA.

En esta sección se muestra el marco teórico aceptado para el estudio de la carcaza de una caja de velocidades, generando así, a partir de dos configuraciones y el uso de la ley de Hooke como ecuación constitutiva, el problema de valores en la frontera a resolver.

1.-Descripción general

En el área de la elastostática, los campos de interés no son dependientes del tiempo. Una forma sencilla de construir los campos involucrados es partiendo de dos configuraciones cualesquiera asociadas a un cuerpo regular y deformable con configuración de referencia Ω ; posteriormente. Si $f : \Omega \subset E \rightarrow E$ es la función de deformación, donde E representa el espacio Euclidiano de puntos, el campo de desplazamiento:

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

y el gradiente de la función de deformación,

$$F(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Los tensores de deformación finita de Cauchy-Green son:

$$C(\mathbf{x}) = F^T(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) + \nabla u^T(\mathbf{x}) + \nabla u^T(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}),$$

$$B(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})F^T(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) + \nabla u^T(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x})\nabla u^T(\mathbf{x}),$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

lo cual, junto con la definición de tensor de deformación infinitesimal, $E(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow L(V, V)$, con regla de correspondencia

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla u(\mathbf{x}) + \nabla u^T(\mathbf{x})),$$

producirán las versiones de los tensores de deformación finita de Cauchy-Green

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}(\mathbf{x}) + 2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$B(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{I}(\mathbf{x}) + 2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x}),$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

El problema de la Ley constitutiva del material es resuelto construyendo una función $\hat{C}(\mathbf{x}) : L(V, V) \longrightarrow L(V, V)$, la cual, para efectos de algún material nuevo, debe elaborarse siguiendo una metodología que es ajena a los propósitos de este trabajo.

Además de las condiciones cinemáticas y de constitutividad del material, los problemas de la elastostática lineal deben satisfacer los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y angular.

Para encontrar la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S})$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \hat{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}(\hat{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \text{ en } \Omega, \\ -\text{Div } \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \mathbf{b}_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2)$$

con condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad \text{sobre } \mathbf{x} \in \partial\Omega_D, \\ \mathbf{S}_n(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), \quad \text{sobre } \mathbf{x} \in \partial\Omega_N, \end{aligned}$$

donde \mathbf{S} denota el campo de esfuerzos, \mathbf{b}_0 las fuerzas de cuerpo, \mathbf{E} el campo de deformaciones, \mathbf{u} el campo de desplazamientos, $\hat{\mathbf{u}}$ la condición de desplazamiento prescrito del tipo Dirichlet, $\hat{\mathbf{g}}$ la condición prescrita del tipo Neumann.

Para problemas particulares, se necesita explicitar la relación existente entre los campos de esfuerzos, y deformaciones;

relación que para materiales elásticos, lineales, isótropos, y homogéneos, resulta ser la siguiente :

$$S(x) = 2\mu E(x) + \lambda \operatorname{tr}(E(x)) I, \quad x \text{ en } \Omega.$$

donde μ , λ son los coeficientes de Lamé del material.

1.-Generalidades

Una vez conocido el problema de valores en la frontera expresado como un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se construye, siguiendo las reglas establecidas por el principio variacional de la energía potencial, la versión integral equivalente al problema original. En esta sección se presenta la formulación variacional como un caso particular del presentado por Alduncin [2].

2.-Formulación variacional primal

Considerando las características del problema de valores en la frontera a resolver es preciso definir el conjunto para desplazamientos cinemáticamente admisibles

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^3; \hat{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D\}.$$

Ahora con la ecuación de cantidad de movimiento lineal proporcionada por la teoría de la elastostática, se multiplica por una función prueba $v - u$, para posteriormente integrar directamente, obteniendo la formulación variacional fuerte

$$\int_{\Omega} \text{div } S \cdot \{v - u\} \, d\Omega + \int_{\Omega} b \cdot \{v - u\} \, d\Omega = 0,$$

$$\{v - u\} \in V$$

Con la aplicación de la fórmula de Green que se presenta a continuación

$$\int_{\Omega} \text{div } S \cdot \{v - u\} \, d\Omega + \int_{\Omega} S \cdot \{\hat{\nabla}v - \hat{\nabla}u\} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{g} \cdot \{v - u\} \, d\partial\Omega,$$

$$\{v - u\} \in V$$

se llega a la obtención de la formulación variacional que incluye las condiciones de frontera del tipo Neumann y que para fines de este trabajo representa el problema a resolver, dejando así el camino preparado para emprender las estrategias de solución. De esta manera, el problema de valores en la frontera, que hasta ahora se viene presentando, puede ya plantearse con una estructura bien definida como el problema de:

Encuentre $u \in V$:

$$\int_{\Omega} S \cdot \{\hat{\nabla}v - \hat{\nabla}u\} d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \{v - u\}d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \hat{g} \cdot \{v - u\}d\partial\Omega,$$

$$\forall v \in V.$$

con el siguiente dominio de definición para desplazamientos admisibles

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^3 : \hat{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Asimismo, para el caso de la elasticidad lineal tridimensional la forma bilineal está dada por

$$a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

y la forma lineal por

$$g(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

quedando

$$a(u, v - u) = \int_{\Omega} S \cdot \{\hat{\nabla}v - \hat{\nabla}u\} d\Omega,$$

$$g(v - u) = \int_{\Omega} b \cdot \{v - u\}d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \hat{g} \cdot \{v - u\}d\partial\Omega.$$

Por tanto, el problema variacional asociado puede

escribirse como:

Encuentre $u \in V$:

$$a(u, v - u) = g(v - u), \quad \forall v \in V,$$

o sustituyendo $w = v - u$,

$$a(u, w) = g(w), \quad \forall w \in V,$$

3.-Formulación variacional primal discreta

La formulación variacional primal discreta es obtenida en forma directa de la formulación variacional continua, generando así el problema:

Encuentre $u_h \in V_h$:

$$\int_{\Omega} S_h \cdot \{\hat{\nabla} v_h - \hat{\nabla} u_h\} d\Omega = \int_{\Omega} b_h \cdot \{v_h - u_h\} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \hat{g}_h \cdot \{v_h - u_h\} d\partial\Omega,$$

$$\forall v_h \in V_h.$$

con el siguiente dominio de definición para desplazamientos admisibles

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Omega)^3: u_h^{\wedge} = 0\}.$$

Asimismo, se puede usar, al igual que en la forma bilineal usada en la etapa anterior sobre espacios de dimensión infinita, $a(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$, y $g(\cdot) : V_h \longrightarrow \mathbb{R}$, de tal suerte que

$$a(u_h, v_h - u_h) = \int_{\Omega} S_h \cdot \{\hat{\nabla} v_h - \hat{\nabla} u_h\} d\Omega,$$

$$g(v_h - u_h) = \int_{\Omega} f_h \cdot \{v_h - u_h\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \hat{g}_h \cdot \{v_h - u_h\} d\partial\Omega.$$

quedando establecido el problema

Encontrar $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v_h - u_h) = g(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

de igual forma que en la formulación variacional primal, sustituyendo $w_h = v_h - u_h$ se obtiene el problema

Encontrar $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, w_h) = g(w_h), \quad \forall w_h \in V_h.$$

Una observación pertinente estriba en hacer notar que, en los componentes de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ figura el campo de desplazamientos justificando así el hecho de llamarse, en el mundo de la ingeniería, método de los desplazamientos.

III.-ELEMENTOS FINITOS PARA FORMULACIONES VARIACIONALES EN ELASTOSTATICA.

1.-Generalidades

Como puede observarse en la sección anterior, una de las tareas que se tienen enfrente es la de construir el subespacio V_h , lo cual se realiza con el uso del método del elemento finito. Para ello se recogen del libro de Claret [3] las ideas fundamentales, mismas que son expuestas en las subsiguientes subsecciones

2.-Definiciones básicas

El método de elemento finito es entendido en su forma más simple, como un proceso sistemático de construir subespacios V_h , los cuales son llamados espacios globales de elemento finito. Dicha construcción de espacios de elemento finito es realizada de acuerdo a tres aspectos fundamentales, los cuales son descritos a continuación:

Aspecto I).-Consiste en realizar una triangulación \mathcal{T}_h sobre un dominio $\bar{\Omega}$, de tal manera que Ω es subdividido en un número finito de subconjuntos E llamados elementos finitos geométricos que satisfacen :

$$i) \quad \Omega = \bigcup_{E_i \in \mathcal{T}_h} E_i,$$

$$ii) \quad \dot{E} \neq \emptyset, \forall E \in \mathcal{T}_h,$$

$$iii) \quad \dot{E}_i \cap \dot{E}_j = \emptyset, \forall E_i, E_j \in \mathcal{T}_h, i \neq j,$$

$$iv) \quad \partial E \text{ es regular, } \forall E \in \mathcal{T}_h.$$

Por supuesto, la triangulación no es única, desde el punto de vista de particionar un dominio Ω .

Continuando con el planteamiento de Claret [3], existe una condición final, relacionada con elementos finitos adyacentes; y esto se establece para una triangulación sobre el conjunto

Ω , un espacio global de elemento finito $X_h = [w_k]_v$, $k = 1, \dots, m_h$,

donde m_h es la dimensión del espacio X_h

Aspecto II).-Estriba en encontrar un espacio $P_k(E)$, ($E \in \mathcal{T}_h$), de tal forma que $P_k(E)$, está compuesto de funciones polinomiales, pues

i).- Los espacios polinomiales son la clave para los resultados de convergencia,

ii).-El cálculo de los coeficientes en el sistema de ecuaciones lineales es sencillo.

Puesto que para encontrar las funciones polinomiales se requiere conocer la dimensión del espacio $P_k(E)$, $E \in \mathcal{T}_h$, y, la cardinalidad o número de elementos que lo componen, entonces, para elementos n-simplex se tiene que, [3]

$$\dim P_k(E) = \frac{(n+k)!}{n!k!},$$

donde n es el número de variables y k es el grado del polinomio. Para el caso de elementos geométricos rectangulares, los cuales serán usados en este trabajo, la dimensión del espacio $Q_k(E \in \mathcal{T}_h)$ es, [3]

$$\dim Q_k(E) = (k+1)^n.$$

Para el caso particular de elementos finitos lagrangianos, la dimensión del espacio de polinomios coincide con la cardinalidad o número de elementos que componen dicho espacio.

Aspecto III).-Reside en explotar la propiedad del espacio V_h , donde existe al menos una base "canónica", cuyas funciones base tienen un soporte tan "pequeño" como sea posible.

3.-Familia de elementos finitos

Generalmente, los elementos finitos que componen un dominio Ω no son iguales, por lo tanto surge la necesidad de construir una idea que permita hacer una descripción adecuada de dicho conjunto de elementos finitos. Esta idea consiste en plantear una función invertible y única con la regla de correspondencia

$$f : \hat{\Omega} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

para poder obtener cualquier elemento finito, de la siguiente manera

$$E = f(\hat{E}),$$

$$P_E = \{ p : E \longrightarrow \mathbb{R}; \quad p = \hat{p} \cdot f^{-1}; \quad \hat{p} \in \hat{P} \},$$

$$\Sigma_E = \{ \phi_i(P_E, \mathbb{R}) : \phi_i(p) = p(a_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \in \mathbb{R}, \quad a_i \text{ son los nodos del elemento finito} \}.$$

$$\phi_i(a_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

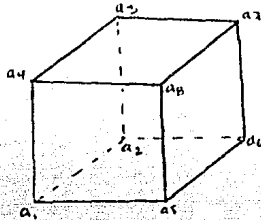
Esta técnica es llamada método del elemento finito de referencia $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$, y cualquier elemento finito (E, P_E, Σ_E) que es obtenido con el procedimiento anterior es llamado equivalente afín, si f es afín del elemento finito de referencia $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$. El motivo que justifica la presentación de el elemento finito equivalente afín, está dado según Ciarlet [3], por:

- i).- La fácil evaluación de los coeficientes del sistema lineal.
- ii).- La teoría de interpolación desarrollada para el análisis de convergencia.

23.- Construcción de espacios de elemento finito

En esta parte, la tarea consiste en dar una descripción

adecuada para la construcción de algunos elementos finitos de referencia (E, P_E, Σ_E) , relacionados con el desarrollo de este trabajo. Por razones de simplicidad, se ha restringido a elementos finitos lagrangianos, sobre dominios poligonales. Por supuesto, es aprovechado el planteamiento del método del elemento finito de referencia, quedando para el elemento hexaedro:



$\hat{E} = \text{hexaedro,}$

$$\hat{P}_k(\hat{E}) = \left\{ \hat{p} : \hat{E} \rightarrow \mathbb{R}; \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z} + \alpha_4 \hat{x} \hat{y} + \alpha_5 \hat{x} \hat{z} + \alpha_6 \hat{y} \hat{z} + \alpha_7 \hat{x} \hat{y} \hat{z} \right\},$$

$$\hat{\Sigma}_E = \left\{ \phi_1(\hat{P}_E, \mathbb{R}) : \phi_1(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_1), 1 \leq 1 \leq 8 \right\},$$

La base de elemento finito se construye de $w_j \in \hat{P}_k(\hat{E})$ y

$$\phi_1(\hat{a}_j) = \begin{cases} 1, & 1 = j, \\ 0, & 1 \neq j. \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 8.$$

Dado \hat{E} con vértices $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6, \hat{a}_7, \hat{a}_8$, y posiciones

$$\hat{a}_1 = (1, -1, -1),$$

$$\hat{a}_2 = (-1, -1, -1),$$

$$\hat{a}_3 = (-1, -1, 1),$$

$$\hat{a}_4 = (1, -1, 1),$$

$$\hat{a}_5 = (1, 1, -1),$$

$$\hat{a}_6 = (-1, 1, -1),$$

$$\hat{a}_7 = (-1, 1, 1),$$

$$\hat{a}_8 = (1, 1, 1),$$

y las funciones de tipo polinomial $w_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) =$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z} + \alpha_4 \hat{x} \hat{y} + \alpha_5 \hat{x} \hat{z} + \alpha_6 \hat{y} \hat{z} + \alpha_7 \hat{x} \hat{y} \hat{z}.$$

$$j = 1, \dots, 8.$$

Entonces sustituyendo los valores de los puntos de acuerdo a la definición de elemento finito de referencia, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora, una vez encontrados los coeficientes α_i se tiene la primer función base w_1 , de la misma manera, resolviendo para los siguientes $\phi_1(\hat{a}_j)$, se llega a:

$$w_1 = (1 + x - y - z - xy + xz - yz + xyz)/8,$$

$$w_2 = (1 - x - y - z + xy + xz + yz - xyz)/8,$$

$$w_3 = (1 - x - y + z + xy - xz - yz + xyz)/8,$$

$$w_4 = (1 + x - y + z - xy - xz + yz - xyz)/8,$$

$$w_5 = (1 + x + y - z + xy - xz - yz - xyz)/8,$$

$$w_6 = (1 - x + y - z - xy - xz + yz + xyz)/8,$$

$$w_7 = (1 - x + y + z - xy + xz - yz - xyz)/8,$$

$$w_8 = (1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz)/8.$$

Para obtener el problema matricial asociado es suficiente observar que

$$u_h = \alpha_j w_{j_g}$$

$$w_h = \beta_i w_{i_g}$$

Consecuentemente, con las últimas dos expresiones sustituidas en la formulación variacional primal discreta $a(u_h, w_h) = g(w_h)$, se genera

$$a(\alpha_j w_{j_g}, \beta_i w_{i_g}) = g(\beta_i w_{i_g}),$$

equivalente a

$$\underline{\beta} \cdot \{ K \underline{\alpha} - g \} = 0,$$

lo cual conduce al sistema matricial a resolver

$$K \underline{\alpha} = g$$

IV.-MATRIZ DE RIGIDEZ, VECTOR DE CARGA Y ENSAMBLE

En esta parte se presentan las formas explícitas de la matriz de rigidez y del vector de cargas locales asociadas con el problema de la elastostática lineal, continuando posteriormente con la matriz de rigidez global y el vector de cargas global

1). Matriz de rigidez local

$$K_{j,1} = \int_{E_k} \{ (2\mu + \lambda) w_{1,1} w_{j,1} + \mu (w_{1,2} w_{j,2} + w_{1,3} w_{j,3}) \} dE_k,$$

$$K_{j+8,1+8} = \int_{E_k} \{ (2\mu + \lambda) w_{1,2} w_{j,2} + \mu (w_{1,1} w_{j,1} + w_{1,3} w_{j,3}) \} dE_k,$$

$$K_{j+16,1+16} = \int_{E_k} \{ (2\mu + \lambda) w_{1,3} w_{j,3} + \mu (w_{1,1} w_{j,1} + w_{1,2} w_{j,2}) \} dE_k,$$

$$K_{j,1+8} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,2} w_{j,1} + \mu w_{1,1} w_{j,2} \} dE_k,$$

$$K_{j,1+16} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,3} w_{j,1} + \mu w_{1,1} w_{j,3} \} dE_k,$$

$$K_{j+8,1} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,1} w_{j,2} + \mu w_{1,2} w_{j,1} \} dE_k,$$

$$K_{j+8,1+16} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,3} w_{j,1} + \mu w_{1,1} w_{j,3} \} dE_k,$$

$$K_{j+16,1} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,1} w_{j,3} + \mu w_{1,3} w_{j,1} \} dE_k,$$

$$K_{j+16,1+8} = \int_{E_k} \{ \lambda w_{1,2} w_{j,3} + \mu w_{1,3} w_{j,2} \} dE_k.$$

$1, j \in [1..8]$; $E_k \in \mathcal{T}_h$; w_i es la base local.

2).-Vector de cargas local

Ahora, el vector de cargas local puede ser representado si se considera que las tracciones de superficie \hat{g} ejercidas sobre cada elemento finito $\varepsilon_j \in \mathcal{T}_h$ pueden ser escritas por componentes como:

$$g^{ij}$$

donde i : representa la cara i -ésima de $\varepsilon_k \in \mathcal{T}_h$.
 j : representa la dirección j -ésima.

De esta manera se puede encontrar la forma desarrollada del vector de cargas, como puede verse a continuación, en una forma expandida, al igual que la matriz de rigidez.

$$f_1 = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_1 g^{11} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_1 g^{51} d\text{caraE}_{k5} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_1 g^{61} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_2 = \int_{\text{caraE}_{k4}} w_2 g^{41} d\text{caraE}_{k4} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_2 g^{51} d\text{caraE}_{k5} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_2 g^{61} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_3 = \int_{\text{caraE}_{k3}} w_3 g^{31} d\text{caraE}_{k3} + \int_{\text{caraE}_{k4}} w_3 g^{41} d\text{caraE}_{k4} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_3 g^{51} d\text{caraE}_{k5}$$

$$f_4 = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_4 g^{11} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k3}} w_4 g^{31} d\text{caraE}_{k3} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_4 g^{51} d\text{caraE}_{k5}$$

$$f_5 = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_5 g^{11} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k2}} w_5 g^{21} d\text{caraE}_{k2} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_5 g^{61} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_6 = \int_{\text{caraE}_{k2}} w_6 g^{21} d\text{caraE}_{k2} + \int_{\text{caraE}_{k4}} w_6 g^{41} d\text{caraE}_{k4} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_6 g^{61} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_7 = \int_{\text{caraE}_{k2}} w_7 g^{21} d\text{caraE}_{k2} + \int_{\text{caraE}_{k3}} w_7 g^{31} d\text{caraE}_{k3} + \int_{\text{caraE}_{k4}} w_7 g^{41} d\text{caraE}_{k4}$$

$$f_8 = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_8 g^{11} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k2}} w_8 g^{21} d\text{caraE}_{k2} + \int_{\text{caraE}_{k3}} w_8 g^{31} d\text{caraE}_{k3}$$

$$f_9 = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_1 g^{12} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_1 g^{52} d\text{caraE}_{k5} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_1 g^{62} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_{10} = \int_{\text{caraE}_{k4}} w_2 g^{42} d\text{caraE}_{k4} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_2 g^{52} d\text{caraE}_{k5} + \int_{\text{caraE}_{k6}} w_2 g^{62} d\text{caraE}_{k6}$$

$$f_{11} = \int_{\text{caraE}_{k3}} w_3 g^{32} d\text{caraE}_{k3} + \int_{\text{caraE}_{k4}} w_3 g^{42} d\text{caraE}_{k4} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_3 g^{52} d\text{caraE}_{k5}$$

$$f_{12} = \int_{\text{caraE}_{k1}} w_4 g^{12} d\text{caraE}_{k1} + \int_{\text{caraE}_{k3}} w_4 g^{32} d\text{caraE}_{k3} + \int_{\text{caraE}_{k5}} w_4 g^{52} d\text{caraE}_{k5}$$

$$f = \int w g^{12} d\text{caraE} + \int w g^{22} d\text{caraE} + \int w g^{62} d\text{caraE}$$

$$f_{14} = \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_6 g^{22} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_6 g^{42} d\text{caraE}_{k_4} + \int_{\text{caraE}_{k_6}} w_6 g^{62} d\text{caraE}_{k_6}$$

$$f_{15} = \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_8 g^{22} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_8 g^{32} d\text{caraE}_{k_3} + \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_8 g^{42} d\text{caraE}_{k_4}$$

$$f_{16} = \int_{\text{caraE}_{k_1}} w_8 g^{12} d\text{caraE}_{k_1} + \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_8 g^{22} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_8 g^{32} d\text{caraE}_{k_3}$$

$$f_{17} = \int_{\text{caraE}_{k_1}} w_1 g^{13} d\text{caraE}_{k_1} + \int_{\text{caraE}_{k_5}} w_1 g^{53} d\text{caraE}_{k_5} + \int_{\text{caraE}_{k_6}} w_1 g^{63} d\text{caraE}_{k_6}$$

$$f_{18} = \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_2 g^{43} d\text{caraE}_{k_4} + \int_{\text{caraE}_{k_5}} w_2 g^{53} d\text{caraE}_{k_5} + \int_{\text{caraE}_{k_6}} w_2 g^{63} d\text{caraE}_{k_6}$$

$$f_{19} = \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_3 g^{33} d\text{caraE}_{k_3} + \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_3 g^{43} d\text{caraE}_{k_4} + \int_{\text{caraE}_{k_5}} w_3 g^{53} d\text{caraE}_{k_5}$$

$$f_{20} = \int_{\text{caraE}_{k_1}} w_4 g^{13} d\text{caraE}_{k_1} + \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_4 g^{33} d\text{caraE}_{k_3} + \int_{\text{caraE}_{k_5}} w_4 g^{53} d\text{caraE}_{k_5}$$

$$f_{21} = \int_{\text{caraE}_{k_1}} w_5 g^{13} d\text{caraE}_{k_1} + \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_5 g^{23} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_6}} w_5 g^{63} d\text{caraE}_{k_6}$$

$$f_{22} = \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_6 g^{23} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_6 g^{43} d\text{caraE}_{k_4} + \int_{\text{caraE}_{k_6}} w_6 g^{63} d\text{caraE}_{k_6}$$

$$f_{23} = \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_7 g^{23} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_7 g^{33} d\text{caraE}_{k_3} + \int_{\text{caraE}_{k_4}} w_7 g^{43} d\text{caraE}_{k_4}$$

$$f_{24} = \int_{\text{caraE}_{k_1}} w_8 g^{13} d\text{caraE}_{k_1} + \int_{\text{caraE}_{k_2}} w_8 g^{23} d\text{caraE}_{k_2} + \int_{\text{caraE}_{k_3}} w_8 g^{33} d\text{caraE}_{k_3}$$

No Has Hoja

TR

~

donde la cara E_{k1} es la cara 1 -ésima del elemento $E_k \in \mathcal{T}_h$.

Ahora, como puede verse, el problema se ha convertido en encontrar los componentes de la matriz de rigidez y del vector de cargas, los cuales resultan de evaluar integrales múltiples con un esquema de integración apropiado, detalle que es abordado en el apéndice A, con un poco de mayor detenimiento.

3).-Matriz de rigidez global

Una vez obtenida la matriz de rigidez local y el vector de cargas local, entonces surge la necesidad de ensamblarlos para obtener las formas globales de la matriz de rigidez y del vector de cargas, quedando así definido un nuevo problema de importancia, debido a que se abren varias alternativas. Primero, la opción mas inmediata es construir por separado las matrices locales y posteriormente establecer un algoritmo de ensamble, sin embargo, desde el punto de vista computacional, esta alternativa es inmanejable para una gran cantidad de elementos finitos; segundo, otra posibilidad es ir construyendo el ensamble a medida que se generan las matrices y vector de cargas locales. Además, la segunda versión permite incorporar las condiciones de frontera del tipo Dirichlet de una manera sencilla que evita el hecho de cancelar hileras y columnas asociadas a los desplazamientos prescritos, actividad que lejos de resultar sencilla es complicada. A continuación se presenta el mecanismo de ensamble usado para este trabajo, aunque cabe mencionar que no es el único de los ensayados.

- 1.-Abrir archivo de elementos finitos geométricos originales E , etiquetado con la extensión ELM.
- 2.-Abrir archivo de elementos finitos geométricos modificados E' , etiquetado con la extensión EMD.
- 3.-Abrir archivo de coordenadas, etiquetado con la extensión COO.
- 4.-Abrir archivo de condiciones de desplazamiento prescrito, etiquetado con la extensión DRT.
- 5.-Abrir archivo para la matriz de rigidez con la extensión STF.

- 6.-Leer elementos finitos geométricos originales E.
- 7.-Leer elementos finitos modificados E' con etiqueta iguala cero en los nodos con condiciones de desplazamiento prescrito.
- 8.-Leer las coordenadas de los elementos finitos geométricos originales.
- 9.-Calcular la matriz de rigidez local asociada al elemento finito geométrico en turno.
- 10.-Ensamble de la matriz, con los elementos finitos modificados E'.

```

j = 1 .. 8,
k = 1 .. 8,
  if(E'_j <> 0)
  if(E'_k <> 0)
  if(E'_j < E'_k)
    l = 1 .. 3,
    m = 1 .. 3,
      --se calcula la posición en el archivo de
      la matriz de rigidez.
      --se lee el valor existente en el archivo
      de la matriz de rigidez.
      --se escribe la suma del valor leído con
      la cantidad correspondiente en la
      matriz local, en el archivo de la
      matriz de rigidez.

termina m
termina l
termina k
termina j

```

- 11.-Cerrar todos los archivos.

4).-Vector de cargas global

Para el caso del vector de cargas global sucede un hecho similar y el algoritmo de obtención expresado en términos de pseudocódigo se representa así:

- 1.-Abrir archivo de coordenadas
- 2.-Abrir archivo de condiciones Dirichlet
- 3.-Abrir archivo para almacenar las cargas
- 4.-Abrir archivo de elementos modificados
- 5.-Abrir archivos de elementos originales
- 6.-Abrir archivo de condiciones Neumann

```

i = 1 a numero de elemento
  lee registro para condiciones Neumann
  lee registro de elemento
  lee registro de elemento modificado
  lee registro de coordenadas
  integra la carga
  j = 1 a 8
    if(E' <> 0)
      l = 1 a 3
        lee valor del archivo de cargas
        escribe en el archivo de cargas el valor
        leído, junto con el valor en turno.
      termina l
    termina j
  termina i.

```

- 7.-Cerrar todos los archivos.

Como puede observarse, en esta fase empieza a aparecer en los algoritmos el uso de archivos; mismos que en la sección de aspectos computacionales se describen con amplitud.

V.-SOLUCION DE UN GRAN SISTEMA. DE ECUACIONES LINEALES

1.-Aspectos básicos

La solución numérica del sistema de ecuaciones lineales juega un papel importante dentro de la técnica del método de elemento finito, y por lo tanto se presenta la alternativa dada por el método directo de Gauss, aún cuando se conoce que no es el único, se obtiene un algoritmo adaptado para matrices simétricas y bandedas.

2.-Método de Gauss adaptado

El algoritmo de Gauss es el método mas antiguo, aunque para fines específicos como el de este trabajo pueden realizarse modificaciones especiales, que permitan obtener un camino eficiente, en el propósito de encontrar $\alpha \in \mathbb{R}^N$:

$$K \alpha = f,$$

y cuyo algoritmo de solución es:

$$K_{ij} = K_{ij} - K_{ik} K_{kj} / K_{kk}$$

$$f_i = f_i - K_{ik} f_k / K_{kk}$$

$$k, i, j \in \{1..N\}, \forall k \neq i$$

$$\alpha_i = f_i / K_{ii} \quad i \in \{1..N\}.$$

Ahora resulta evidente que el algoritmo anterior requiere una gran cantidad de operaciones, por lo que una forma de mejorarlo es modificando los límites de las sumatorias de acuerdo al ancho de banda de la matriz de rigidez K , esto es:

$$K_{1j} = K_{1j} - K_{1k} K_{kj} / K_{kk}$$

$$f_1 = f_1 - K_{1k} f_k / K_{kk}$$

$$k \in [1..N-1], \quad l \in [k+1..LIM],$$

$$j \in [1..LIM],$$

$$LIM = \begin{cases} K+AB-1 & \text{si } K+AB-1 < N, \\ N & \text{si } K+AB-1 > N, \end{cases}$$

$$\alpha_N = f_N / K_{NN}$$

LIM

$$\alpha_1 = (f_1 - \sum_{i=1}^{LIM} K_{1j} \alpha_j) / K_{11}$$

donde AB es el ancho de banda, y debido a que la matriz K es con muchos ceros, entonces no es necesario almacenarlos y ésto se consigue simplemente por medio de un cambio de índices, es decir, el problema anterior es transformado a:

$$K_{1,j-1+1} = K_{1,j-1+1} - K_{k,1-k+1} K_{k,j-k+1} / K_{k1}$$

$$f_1 = f_1 - K_{k,1-k+1} f_k / K_{k1}$$

$$k \in [1..N-1], \quad l \in [k+1..LIM],$$

$$j \in [1..LIM],$$

$$LIM = \begin{cases} K+AB-1 & \text{si } K+AB-1 < N \\ N & \text{si } K+AB-1 > N \end{cases}$$

$$\alpha_N = f_N / K_{N1}$$

LIM

$$\alpha_1 = (f_1 - \sum_{i=1}^{LIM} K_{1j-1+1} \alpha_j) / K_{11}$$

$$i \in [N-1..1].$$

Como se sabe, el máximo número de valores que pueden mantenerse en RAM no debe rebasar los 64 Kbytes, por tanto, el manejo de grandes matrices como la matriz K resultante se facilita con el uso de archivos binarios. En la sección subsecuente se hace una presentación mas amplia de las características asociadas con el manejo de archivos y, de la misma forma, se describen los procedimientos ligados con el problema de la carcaza.

VI. -ASPECTO COMPUTACIONAL

1. -Generalidades

Una vez que se tienen los modelos integrales (capítulo II), equivalentes a las ecuaciones diferenciales que modelan el problema de la elastostática (capítulo I), y se sabe la forma de construir espacios de dimensión finita (capítulo III), y, por último, se opta por el método de Gauss con modificaciones ya que permite el uso de archivos binarios, entonces, se procede a describir el aspecto computacional.

Considerando la naturaleza dinámica de la informática y teniendo en cuenta la diversidad de lenguajes empleados por los programadores, en este trabajo solamente se presentan los pseudocódigos de los programas empleados. El autor considera que, con el auxilio de ellos, cualquier persona versada en programación puede construir sus propios programas para resolver problemas similares al resuelto en este trabajo.

Hay que recordar que el propósito de esta tesis es el de encontrar una solución numérica aproximada al problema de la distribución de esfuerzos en la carcasa de una caja de velocidades sujeta a condiciones de frontera Dirichlet y Neumann prescritas. Para lograr ese fin, en este trabajo se utilizan un conjunto de subrutinas ya existentes, y se crean programas en donde hay necesidad de ello. El resultado final es un programa que resuelve el problema y permite presentar los resultados en forma gráfica [9]. Cabe mencionar, que la fase computacional cubre temas cuyo soporte teórico no ha sido rigurosamente establecido. Aún cuando se reconoce que esta fase debe tener la misma consistencia teórica que las fases previas, la labor que implica justificar dicha consistencia para todos los programas y subrutinas empleados claramente rebasa los alcances del presente trabajo.

2.-Descripción del lenguaje de programación

Turbo Pascal al igual como Fortran, Basic y otros, está clasificado dentro de la categoría de los lenguajes de programación de alto nivel, y ha tenido un gran impacto sobre la programación de microcomputadoras debido a su gran rapidez en compilación, a su agradable manejo de editor, y sus facilidades para construir ambientes gráficos.

En este caso particular, el lenguaje Turbo Pascal es usado extensivamente para resolver todas las etapas involucradas en el problema en curso, quedando remarcada la importancia del manejo de archivos, como se expresa a continuación.

3.-Manejo de archivos

El manejo de archivos constituye una de las herramientas fundamentales para el manejo de grandes cantidades de información y como se sabe, el manejo de archivos puede llevarse a cabo, utilizando principalmente unidades de disco duro, cintas magnéticas o discos ópticos. En este caso específico, se usa la opción de disco duro y como se sabe existen dos tipos de archivos.

a.-Archivos tipo texto

Este tipo de archivos es el de mayor facilidad de uso y consiste en una serie de líneas que termina con control de carro y un salto de línea y la información es almacenada con delimitadores que definen el final de un campo, registro, o, en su defecto, el final de una línea. Una manera de saber si se está trabajando un archivo de tipo texto consiste en usar la orden del DOS llamada TYPE, en caso afirmativo, debe aparecer en la pantalla un documento en formato legible.

Regresando al problema de almacenar números, resulta importante conocer el funcionamiento de este tipo de archivos para

poder usarlos y, a manera de ejemplo, si se piensa en el número 100 se conoce que la forma de almacenarlo en la memoria RAM es con 2 bytes mientras que almacenado en un archivo del tipo texto necesita 3 bytes, generando así, una idea del problema de almacenar miles de números.

b.-Archivos binarios

Los archivos binarios o también conocidos como archivos de acceso aleatorio tienen la característica de que trabajan igual que la memoria RAM en el proceso de almacenamiento, y la organización no está realizada en líneas, por lo cual, se requiere conocer las direcciones donde se localizan los números a manejar y una forma de conocer si se está trabajando con archivos del tipo binario es si con el uso de la orden TYPE se obtiene un despliegue en la pantalla de un código ilegible, detalle que no permite al usuario conocer el contenido de la información a menos que conozca el tipo de formato con el que han sido almacenados.

Continuando con la descripción de este tipo de archivos, se sabe que los tiempos de acceso a la información es de mayor rapidez que los archivos de tipo texto, debido a no existir la necesidad de conversión y la transferencia de datos es inmediata; característica que los hace indispensables en aplicaciones que requieren grandes velocidades de entrada y salida.

En este punto, cuando los archivos del tipo binario resultan ser la opción para el manejo de información generada en miles de elementos finitos con relativa rapidez, entonces cabe reflexionar un poco sobre velocidades en el manejo de información, conociendo de antemano que las velocidades de acceso en RAM son del orden de 15 veces más rápido que el acceso a disco duro, debido a la necesidad de movilizar dispositivos mecánicos. En este sentido podrá entenderse que el factor de 100 veces ganado en almacenamiento nos refleja una pérdida de 15 veces en las velocidades de acceso.

4.-Utilerias.

Los procedimientos de un uso frecuente generalmente se convierten en subrutinas llamadas utilerias, y es una buena estrategia después de programarlos, ponerlos en unidades de acceso para cualquier otro programa, para el caso, se construyen las unidades para el manejo de archivos, menús y gráficos.

a) Unidad Archivo.-Conjunto de procedimientos y funciones que están orientados al manejo de entrada/salida de información en la unidad de disco, estos son presentados a continuación:

REG_ELEM.-Registro diseñado para almacenar los ocho puntos nodales de cada elemento finito así como etiqueta que nos indica el tipo de material con el que está definido.

REG_LNRC.-Registro diseñado para almacenar los puntos nodales que definen cada cara de cada elemento finito.

REG_COO.-Registro diseñado para almacenar las coordenadas de cada punto nodal.

REG_DES.-Registro diseñado para almacenar los desplazamientos de cada punto nodal.

REG_NEW.-Registro diseñado para almacenar las condiciones de frontera tipo tracciones prescritas.

PROCEDURE OPEN_FILE_REWRITE.-Abre un archivo tipo aleatorio.

PROCEDURE OPEN_FILE_RESET.-Abre un archivo tipo aleatorio ya existente.

PROCEDURE OPEN_TEXT_REWRITE.-Abre un archivo tipo texto.

PROCEDURE OPEN_TEXT_REST.-Abre un archivo tipo texto ya existente.

FUNCTION PUNTA.-Dada la posición (i,j) en un arreglo bidimensional

de i hileras y j columnas, en punta se almacena la posición correspondiente en un arreglo unidimensional.

PROCEDURE READREG_ELEM [WRITEREG_ELEM].-Lee de [escribe en] un archivo tipo file la variable tipo reg_elem en la posición i-ésima.

PROCEDURE READREG_COO [WRITEREG_COO].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo reg_coo en la posición i-ésima.

PROCEDURE READREG_DES [WRITEREG_DES].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo reg_des en la posición i-ésima.

PROCEDURE READREG_NEW [WRITEREG_NEW].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo reg_new en la posición i-ésima.

PROCEDURE READREG_LNRC [WRITEREG_LNRC].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo reg_lnrc en la posición i-ésima.

PROCEDURE READSINGLE [WRITESINGLE].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo single en la posición i-ésima.

PROCEDURE READINTEGER [WRITEINTEGER].-Lee de [escribe en] un archivo tipo aleatorio la variable tipo integer en la posición i-ésima.

b) Unidad Math.-Conjunto de procedimiento donde se encuentran programadas operaciones matemáticas. Estos son:

PROCEDURE INVERSEW.-Dada una matriz de 8X8 tipo single se obtiene su inversa.

PROCEDURE TRANSPOSEW.-Dada una matriz de 8x8 tipo single se obtiene su transpuesta.

PROCEDURE INVERSEW.-Dada una matriz de 8x8 tipo single se obtiene su inversa.

c) Unidad Menu.-Conjunto de procedimientos que forman la interface con el usuario. Estos son:

PROCEDURE PON_VIDEO.-Da el color de la letra y el fondo en modo texto.

PROCEDURE LIMPIA_REGLON.-Limpia el renglón i-ésimo.

PROCEDIMIENTO LIMPIA_INTERIOR.-Limpia la pantalla.

PROCEDIMIENTO PON_CADENA.-Imprime en el monitor una cadena en el renglón y columna indicado.

PROCEDIMIENTO PON_CADENA_CENTRADA.-Imprime en el monitor una cadena centrada en el renglón indicado.

PON_SINGLE.-Imprime en el monitor una variable tipo single en el renglón y columna indicados.

PON_ENTERO.-Imprime en el monitor una variable tipo entero en el renglón y columna indicados.

PON_MARCO.-Imprime en el monitor un marco dando como dato la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha.

VISUALIZAR_MENU.-Imprime en el monitor una variable tipo menu, centrada en la pantalla.

CONMUTA_MENU.-Dadas dos posiciones el cursor se cambia de la

primera a la segunda.

PON_MARCO_PRINCIPAL.-Imprime en el monitor el marco de presentación del paquete.

d) Unidad Graph.-Conjunto de procedimientos que facilitan el manejo del modo gráfico. Estos son:

INITIALIZE.-Inicia el modo gráfico.

GRPHFINISH.-Termina el modo gráfico.

SCR.-Realiza la transformación a coordenadas de pantalla.

PUT_INT.-Imprime en pantalla un número entero en modo gráfico en la posición indicada.

PUN_SINGLE.-Imprime en pantalla un número tipo single en modo gráfico en la posición indicada.

GRAPHVIEW.-Activa la ventana donde se dibuja la figura.

TOTALVIEW.-Activa toda la pantalla.

RANGE.-Dados los límites superior e inferior y un valor se selecciona del código de colores el color con el cual se realizara la gráfica.

FILLRECTANGLE.-Dibuja un rectángulo lleno en la pantalla.

FRAMEWORK.-Da la presentación del paquete en modo gráfico.

SCALE.-Dibuja el código de colores en la parte inferior de la pantalla.

SQRC.-Grafica un polígono de 4 lados en la pantalla.

TRG.-Grafica un poligono de 3 lados en la pantalla.

GRAPHSQR.-Grafica las curvas de nivel en un poligono de 4 lados.

PARAMETERS.-Calcula los parámetros de graficación.

GRAPHSQRREAL.-Grafica las curvas de nivel en un poligono de 4 lados descrito tridimensionalmente.

GRAPHTR.-Grafica las curvas de nivel en un poligono de 3 lados.

GRAPHTRREAL.-Grafica las curvas de nivel en un poligono de 3 lados descrito tridimensionalmente.

AXIS.-Grafica con orientación los ejes de referencia.

5.-Proceso

Los programas de proceso son aquellos cuya función es la de resolver el esquema numérico y con la información obtenida calcular las cantidades matemáticas y físicas de interés.

Los programas de proceso son:

- a).- file_emd,
- b).- file_stf,
- c).- file_lod,
- d).- file_sol,
- e).- file_des,
- f).- file_esf,

a) file_emd.-Este programa genera a partir del archivo de elementos un archivo el cual contiene ya las condiciones de frontera con desplazamiento prescrito. A continuación se describe la lógica de éste:

PROGRAM FILE_EMD.

- Se abre y se lee el archivo de datos.
- Se abren los archivos con extensión ELM, EMD y DRT.
- Se calcula el número de condiciones de desplazamiento prescrito.
- Se almacena en el arreglo unidimensional ORDEN los puntos nodales con desplazamiento prescrito.
- Se calcula el número de elementos finitos.
- Se da la presentación visual al programa.
- Se itera desde 1 hasta el número de elementos
- Se lee los puntos nodales de cada elemento finito, si éste coincide con un punto contenido en ORDEN, a este punto se le asigna el valor cero, si no coincide entonces se cuenta cuantas condiciones tipo Dirichlet se han encontrado hasta el punto indicado, y a éste se le resta dicho número. Así se genera el registro de salida y se escribe en el archivo con extensión EMD.

b) file_stf.-La función de este programa es la de generar la matriz de rigidez global asociado al problema en estudio.

PROGRAM FILE_STF.

- Se realiza la lectura del archivo de datos.
- Se lee los pesos para la integración numérica.
- Se lee las funciones base del elemento finito de referencia.
- Se calcula el ancho de banda y los grados de libertad totales.
- Se limpia el archivo de salida (STF) que posee dimensionalmente el tamaño de un arreglo bidimensional de ancho de banda por grados de libertad totales.
- Se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de elementos
- Se lee el registro de elementos del archivo con extensión ELM y EMD.
- Se realiza la integración numérica y se genera la matriz de rigidez local.
- Una vez que se tiene la matriz de rigidez local, cada elemento de ésta es almacenado en la de rigidez global basándose en el

registro leído de EMD. Sólo se realiza para los elementos de la matriz de rigidez local que corresponden a la matriz triangular superior de la global.

c) file_lod.-Este programa ensambla el vector de cargas global.

PROGRAM FILE_LOD.

- Se realiza la lectura del archivo de datos.
- Se leen los "pesos" para realizar la integración numérica.
- Se leen las funciones base del elemento finito de referencia.
- Se abren los archivos con extensión COO, DRT, LOD.
- Se calcula el número de grados de libertad totales.
- Se calcula el número de condiciones de tracciones prescritas.
- Se limpia el archivo de cargas LOD.
- Se abren los archivos con extensión EMD, ELM y NEW.
- Se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de condiciones de tracciones prescritas.
- Se lee el registro tipo reg_new.
- Se leen las coordenadas de los punto del elemento con condición prescrita.
- Se realiza la integración numérica y se genera el vector de cargas local.
- Se realiza el ensamble en la matriz de rigidez global.

d) file_sol.-La función de este programa es la de resolver el sistema de ecuaciones lineales algebraicas con el algoritmo presentado en la solución de un gran sistema de ecuaciones , esto se realiza auxiliándose de un archivo temporal declarado en la memoria extendida de la computadora

e) file_des.-Una vez que se obtiene la solución del sistema de ecuaciones, este programa se encarga de introducir las

condiciones de desplazamiento prescrito obteniéndose así un archivo donde se encuentran los desplazamientos de todos los puntos nodales que forman el cuerpo. Esto se realiza simplemente con un programa de ordenación.

f) file_esf.-Evidentemente no solamente es necesario conocer los desplazamientos del cuerpo sino también otras cantidades físicas que intervienen en el fenómeno, este programa calcula en cada punto nodal las componentes del tensor de esfuerzos, cada uno de los componentes del tensor de deformaciones infinitesimales, los tres esfuerzos principales, los criterios de falla de Mises, Tresca, según referencia [6], y, finalmente, los tres desplazamientos.

PROGRAM FILE_ESF

- Se abre y se lee el archivo de datos del paquete.
- Se abren los archivos con extensión ELM, COO, DES, ESF.
- Se calcula el número de elementos.
- Se calcula el número de puntos nodales totales.
- Se da la presentación del paquete.
- Se limpia el archivo de salida ESF con dimensión número de grados totales más dos por veinte.
- Se realiza un ciclo desde 1 hasta número de elementos
- * Se leen los puntos nodales del elemento finito en cuestión.
- * Se leen las coordenadas y desplazamientos de cada punto nodal que definen al elemento finito en turno.
- * Se calculan las funciones base espaciales del elemento finito.
- * Se calculan los coeficientes de los polinomios que describen el campo de desplazamiento en su configuración espacial.
- * Se itera para cada punto nodal.
- # Se almacenan las componentes del desplazamiento en la localidad 18, 19, 20 del arreglo unidimensional SALIDA.
- # Se calcula el gradiente de desplazamiento y posteriormente el tensor de deformaciones infinitesimales, y estos

valores se almacenan en el vector SALIDA.

Se calcula el tensor de esfuerzos, y se almacena en SALIDA.

Se calculan los esfuerzos principales y se almacenan en SALIDA.

Se calculan los criterios de falla de Mises y Tresca, y, también se almacenan, en SALIDA.

Se leen del archivo ESF, en la posición del punto en cuestión, los 20 valores, estos son almacenados en ENTRADA; ENTRADA es comparada con SALIDA y el mayor en valor absoluto componente a componente es almacenado en el archivo ESF.

6.-Posproceso

Los programas de postproceso son aquellos con los que, por medio de una salida gráfica, se visualiza el fenómeno en estudio así como el de las variables de interés. Para el caso, los programas de posproceso son: a) file_grf y b) file_img.

a) file_grf.-Cuando dos elementos tienen una cara en común, dicha cara no se grafica debido a que siempre permanecerá oculta, por lo tanto este programa genera un código donde se han eliminado caras adyacentes.

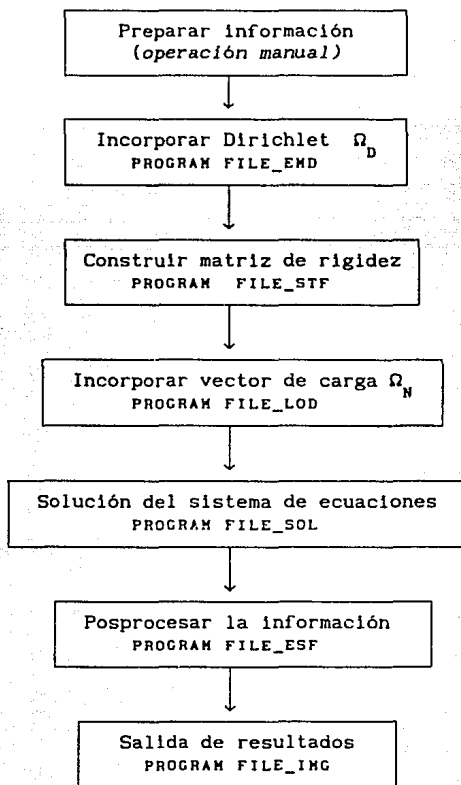
b) file_img.-Este programa tiene por objeto generar una salida gráfica mostrando cualitativamente, a través de un código de colores, las variables físicas de interés.

PROGRAM FILE_IMG

- Se abre y se lee el archivo de datos del paquete.
- Se abren los archivos con extensión GRF, COO, ESF y DES.
- Se dan los parámetros de entrada en graficación.
- Se da la opción de cambiar los parámetros de graficación.
- Se calcula el número de puntos nodales.
- Se lee los valores máximo y mínimo de cada cantidad física a mostrar.
- Se calcula el número de caras a graficar.

- Se llena el arreglo ORDEN con el número de cara y su distancia al observador.
- Se ordena con respecto a la distancia el arreglo ORDEN.
- Se inicia el modo gráfico y se da la presentación de salida.
- Se van gráficamente las caras de los cubos del más lejano al observador al más cercano.
- Se termina el modo gráfico.

Un resumen, asociado a la estrategia computacional llevada a cabo para efectuar el trabajo aquí descrito, puede observarse en el siguiente diagrama.



RESULTADOS

Los resultados de la carcaza de transmisión son presentados con fotografías que muestran las diferentes cantidades físicas de interés como son: esfuerzos, deformaciones, desplazamientos y criterios de falla. De esta manera tomando en cuenta la información proporcionada por la empresa " Transmisiones y Equipos Mecánicos S. A. de C. V. " se tiene:

Material	: Aluminio.
Módulo de Young	: $\beta = 6.9 \times 10^{10}$ Pa.
Relación de Poisson	: $\nu = 0.3$.
Coefficientes de Lamé	: $\mu = 4.84 \times 10^{10}$ Pa.
	: $\lambda = 3.63 \times 10^{10}$ Pa.
Esfuerzo de fluencia	: $Y_p = 2.14 \times 10^8$ Pa.
Par del motor(laboratorio)	: 500 N-m.

Esfuerzo permisible(Mpa).

$$\text{Ref. [6] (Criterio de Mises) : } \tau_{\max} = 0.57 Y_p = 120.5$$

$$\text{Ref. [6] (Criterio de Tresca) : } \tau_{\max} = 0.5 Y_p = 107.0$$

Ahora de acuerdo al estudio que se lleva a cabo se genera la siguiente información:

Elementos finitos geométricos del tipo Lagrange	1896
Grados de libertad	10503
Nodos con condiciones Dirichlet	210
Caras de elementos con condición Neumann	18
Criterio de Tresca(MPa)	58.3

Las condiciones de empotramiento (condiciones Dirichlet o de desplazamiento prescrito) son sugeridas por la empresa

"Transmisiones y Equipos Mecánicos S. A. de C. V. ", como una primera aproximación a las condiciones reales de apoyo, de tal manera que los siguientes nodos se consideran de desplazamiento nulo

Número	punto	Número	punto	Número	punto
1	1	2	15	3	16
4	17	5	18	6	33
7	34	8	35	9	36
10	37	11	44	12	45
13	46	14	47	15	48
16	49	17	50	18	51
19	52	20	53	21	57
22	58	23	59	24	67
25	76	26	77	27	78
28	89	29	90	30	104
31	105	32	114	33	115
34	116	35	117	36	124
37	130	38	131	39	132
40	137	41	138	42	139
43	147	44	148	45	160
46	161	47	172	48	173
49	182	50	183	51	188
52	189	53	190	54	191
55	192	56	206	57	207
58	210	59	213	60	214
61	215	62	216	63	217
64	230	65	231	66	232
67	233	68	246	69	247
70	248	71	266	72	280
73	281	74	282	75	283
76	298	77	299	78	300
79	301	80	302	81	309
82	310	83	311	84	312
85	313	86	314	87	315
88	316	89	317	90	318
91	322	92	323	93	324

94	332	95	341	96	342
97	343	98	354	99	355
100	369	101	370	102	379
103	380	104	381	105	382
106	389	107	395	108	396
109	397	110	402	111	403
112	404	113	412	114	413
115	425	116	426	117	437
118	438	119	447	120	448
121	453	122	454	123	455
124	456	125	457	126	471
127	472	128	475	129	478
130	479	131	480	132	481
133	482	134	495	135	496
136	497	137	498	138	511
139	512	140	513	141	552
142	566	143	567	144	568
145	569	146	584	147	585
148	586	149	587	150	588
151	595	152	596	153	597
154	598	155	599	156	600
157	601	158	602	159	603
160	604	161	608	162	609
163	610	164	618	165	627
166	628	167	629	168	640
169	641	170	655	171	656
172	665	173	666	174	667
175	668	176	675	177	681
178	682	179	683	180	688
181	689	182	690	183	698
184	699	185	711	186	712
187	723	188	724	189	733
190	734	191	739	192	740
193	741	194	742	195	743
196	757	197	758	198	761
199	764	200	765	201	766
202	767	203	768	204	781

205	782	206	783	207	784
208	797	209	798	210	799

Las condiciones de tracción prescritas son una al igual que las condiciones Dirichlet son proporcionadas por la empresa, como una primera aproximación a los valores de la realidad, y están basadas en experimentos realizados con trazadores sobre las zonas de posibles tracciones. De acuerdo al criterio de los técnicos de TREMEC S. A., se aplican las siguientes cargas sobre las caras de los siguientes elementos

Elemento	Cara	Carga(N)
1591	4	480.69
1579	4	640.59
1572	4	961.18
1567	4	640.59
1561	4	480.69
1845	4	480.69
1833	4	640.59
1826	4	961.18
1821	4	640.59
1815	4	480.69
1524	1	640.59
1522	1	961.18
1508	1	961.19
1506	1	640.59
1778	1	640.59
1776	1	961.18
1762	1	961.18
1760	1	640.59

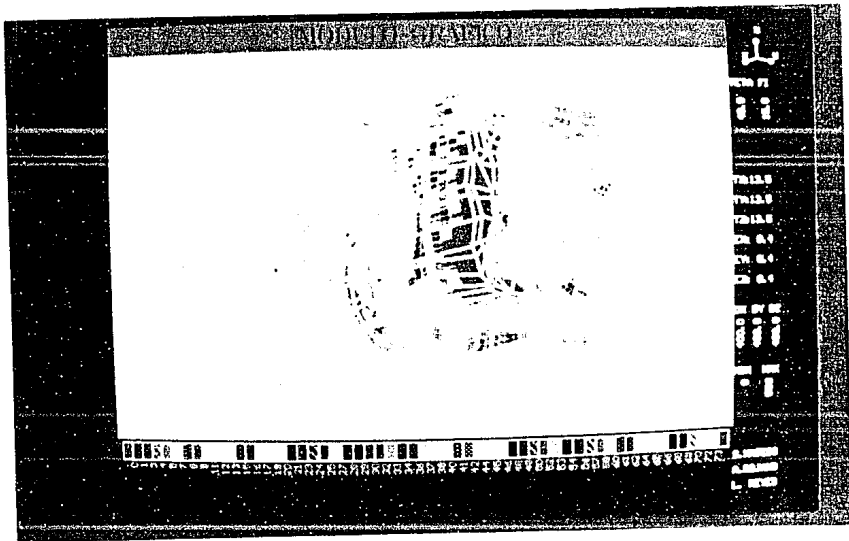


Figura 2.- Criterio de Tresca

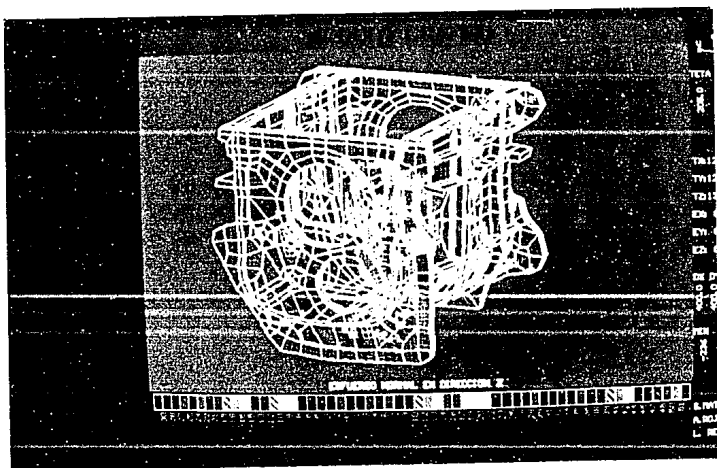


Figura 3.- Esfuerzo normal en dirección Z

CONCLUSIONES

1).-En este trabajo se obtiene una solución numérica del problema de la carcaza de transmisión de velocidades, para las condiciones de frontera establecidas como una primera aproximación a las condiciones reales de la carcaza, con el uso de una computadora del tipo PC, obteniendo resultados como los presentados en las figuras 2 y 3.

2).-La estrategia computacional es llevada a cabo con el uso de procedimientos y funciones que permiten obtener una programación estructurada en el ambiente de programación Turbo-Pascal 5.5.

3).-Las zonas de mayor esfuerzo se presentan, como puede verse en la figura 2, en las juntas de la tapa con el cuerpo de la carcaza, sin embargo los mayores valores de esfuerzo están por debajo del esfuerzo permisible.

4).-El estudio de problemas de gran magnitud requiere un equipo computacional igual o superior a un 80386, junto con una buena habilidad operativa.

5).-El lenguaje Turbo-Pascal constituye una buena alternativa para el manejo numérico y gráfico, sin embargo puede reforzarse si se hace un uso adecuado de interrupciones al sistema operativo o se enriquece con el manejo de bits para aspectos gráficos.

RECOMENDACIONES

1.-Determinar las cargas reales y condiciones de frontera.

2.-Variar el estado de cargas para observar el comportamiento de los estados de esfuerzo en las zonas críticas de la carcaza.

3.-Realizar observaciones de tipo experimental con el objeto de comparar los resultados.

REFERENCIAS.

- 1.-Gurtin M. [1981], *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press.
- 2.-Alduncin, G., *Formulaciones variacionales duales y lagrangianas de problemas de valores sobre la frontera*. Comunicaciones técnicas del Instituto de Geofísica, UNAM, S. Investigación, No. 35, Noviembre.
- 3.-Ciarlet P. [1989], *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland Publishing Company.
- 4.-Glowinski, R. [1980], *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Lecture Notes in Math. and Physics, Vol. 62, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Springer-Verlag.
- 5.-Bathe K. & Wilson E.L. [1976], *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall Englewood Cliffs . N. J.
- 6.-Boresi P. Arthur & Sidebottom M. Omar. *Advanced Mechanics of Materials*. Jhon Wiley & Sons. Fourth Edition. U.S.A.
- 7.-R.M. Bowen and C.C. Wang [1976] *Introduction to vectors and Tensors*. Vol. 1, New York: Plenum.
- 8.-M.E. Gurtin [1974]. *The Linear Theory of Elasticity*. Handbook of Physics. Berlin. Springer-Verlag.
- 9.-Mateos H.S. *Modelación matemática y computacional del problema de la elasticidad tridimensional lineal*. Tesis [En proceso].

1.-Generalidades

La integración numérica juega un aspecto importante en la evaluación de las integrales múltiples, como las requeridas para evaluar las componentes de la matriz de rigidez y del vector de cargas, y, por lo tanto, en este trabajo se le dedica una sección que pretende hacer una descripción de los diferentes esquemas de cuadratura encontrados, y, como es que se decide por usar una en especial. Además resulta pertinente comentar que en un principio cuando se trabajan elementos finitos geométricos cuya equivalencia afín con el elemento de referencia está dada por una función $f(x, y, z) = (\alpha_0 + \alpha_1 x, \beta_0 + \beta_1 y, \gamma_0 + \gamma_1 z)$, entonces, los esquemas de cuadratura resultan ser un caso particular de relativa sencillez; sin embargo cuando los elementos finitos a trabajar tienen una relación con el elemento finito de referencia con una función de mayor complejidad que la anteriormente propuesta, entonces la evaluación de las integrales adquiere una complejidad digna de tomarse en cuenta, razón fundamental por lo que a continuación se le dedica una descripción con mayor generalidad.

2.-Integración unidimensional

Empezando por el caso unidimensional puede observarse que, la evaluación de una integral como $\int f(x)dx$, puede transformarse por medio de un cambio de dominio en la integral $\int_{-1}^1 \phi(x)dx$, o en otra integral si se prefiere; sin embargo, para fines de mostrar la efectividad del procedimiento usado para llevar a cabo la integración se explicita con una gran sencillez la obtención de fórmulas tan conocidas como la de Simpson y otras. De esta manera, tomando un ejemplo donde se aproxima la función $\phi(x)$ con una función de primer grado, queda

$$\int_{-1}^1 \phi(x)dx = \int_{-1}^1 (\alpha_1 + \alpha_2 x) dx = l\alpha_1, \quad (1)$$

donde l es la longitud del dominio, y el problema es evaluar los

coeficientes α_i ; los cuales se conocen de manera general como los pesos. Dichos pesos se obtienen sustituyendo los puntos extremos del dominio 1 en la función ϕ , generando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \phi(x_1), \quad (2)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \phi(x_2),$$

introduciendo (2) en (1) se tiene

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx = \frac{1}{2}(\phi(x_1) + \phi(x_2)). \quad (3)$$

Una vez encontrado el camino, se procede a buscar esquemas de cuadratura que usen funciones de segundo grado o mayores, obteniendo

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx = \int_{-1}^1 (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) dx = 1(\alpha_1 + \alpha_3 / 3), \quad (4)$$

y con la sustitución de los puntos -1, 0, y 1, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \phi(x_1),$$

$$\alpha_1 = \phi(x_2), \quad (5)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \phi(x_3),$$

cuya solución arroja

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx = \frac{1}{6} \left\{ \phi(x_1) + 4\phi(x_2) + \phi(x_3) \right\}. \quad (6)$$

De esta manera se pueden hacer evaluaciones de integrales con la ayuda del siguiente cambio de dominio

$$\int_{-1}^1 \phi(x) \det(\nabla f(x)) dx = \int \phi'(x) dx \quad (7)$$

3.-Integración tridimensional

La integración tridimensional es obtenida con el mismo enfoque que la integración unidimensional, logrando los siguientes esquemas.

Dados los puntos

$$\begin{array}{ll} a_1 = (-1, -1, -1), & a_5 = (-1, 1, -1), \\ a_2 = (-1, -1, 1), & a_6 = (-1, 1, 1), \\ a_3 = (1, -1, 1), & a_7 = (1, 1, 1), \\ a_4 = (1, -1, -1), & a_8 = (1, 1, -1), \end{array}$$

y función

$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 xyz$,
entonces se genera el siguiente sistema de ecuaciones

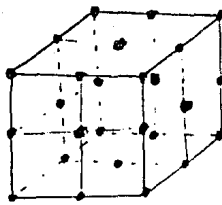
$$\begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 = \phi(a_1), \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8 = \phi(a_2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 = \phi(a_3), \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = \phi(a_4), \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 + \alpha_8 = \phi(a_5), \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 = \phi(a_6), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = \phi(a_7), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 = \phi(a_8), \end{array}$$

cuya solución produce el siguiente esquema de cuadratura

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(x) dx = \frac{Vol}{8} \left(\phi(a_1) + \phi(a_2) + \phi(a_3) + \phi(a_4) + \phi(a_5) \right. \\ \left. + \phi(a_6) + \phi(a_7) + \phi(a_8) \right),$$

Continuando con esquemas de cuadratura para una mayor cantidad de puntos, hecho que implica usar funciones en tres variables con mayor complejidad, se tiene para:

a).-Un cubo con los siguientes 27 puntos de interés



$a_1 = (-1.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_2 = (-1.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_3 = (-1.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_4 = (-1.00000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_5 = (-1.00000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_6 = (-1.00000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_7 = (-1.00000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_8 = (-1.00000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_9 = (-1.00000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{10} = (0.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{11} = (0.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{12} = (0.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{13} = (0.00000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{14} = (0.00000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{15} = (0.00000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{16} = (0.00000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{17} = (0.00000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{18} = (0.00000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{19} = (1.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{20} = (1.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{21} = (1.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{22} = (1.00000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{23} = (1.00000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{24} = (1.00000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{25} = (1.00000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{26} = (1.00000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{27} = (1.00000, 1.00000, 1.00000),$

el esquema de cuadratura

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} =$$

$$\frac{\text{vol}}{216} \left\{ \begin{aligned} &\phi(a_1) + 4\phi(a_2) + 1\phi(a_3) + 4\phi(a_4) + 16\phi(a_5) + 4\phi(a_6) + \\ &1\phi(a_7) + 4\phi(a_8) + 1\phi(a_9) + 4\phi(a_{10}) + 16\phi(a_{11}) + \\ &4\phi(a_{12}) + 16\phi(a_{13}) + 64\phi(a_{14}) + 16\phi(a_{15}) + 4\phi(a_{16}) + \\ &16\phi(a_{17}) + 4\phi(a_{18}) + 1\phi(a_{19}) + 4\phi(a_{20}) + 1\phi(a_{21}) + \\ &4\phi(a_{22}) + 16\phi(a_{23}) + 4\phi(a_{24}) + 1\phi(a_{25}) + 4\phi(a_{26}) + \\ &1\phi(a_{27}) \end{aligned} \right\}.$$

b).-Un cubo con 64 puntos, como puede ser notado en el dibujo abajo presentado; se puede observar el crecimiento razonable de los valores de los pesos, lo cual resulta ser un aspecto importante para la evaluación de integrales

$$a_1 = (-1.00000, -1.00000, -1.00000),$$

$$a_2 = (-1.00000, -1.00000, -0.33333),$$

$$a_3 = (-1.00000, -1.00000, 0.33333),$$

$$a_4 = (-1.00000, -1.00000, 1.00000),$$

$$a_5 = (-1.00000, -0.33333, -1.00000),$$

$$a_6 = (-1.00000, -0.33333, -0.33333),$$

$$a_7 = (-1.00000, -0.33333, 0.33333),$$

$$a_8 = (-1.00000, -0.33333, 1.00000),$$

$$a_9 = (-1.00000, 0.33333, -1.00000),$$

$$a_{10} = (-1.00000, 0.33333, -0.33333),$$

$$a_{11} = (-1.00000, 0.33333, 0.33333),$$

$$a_{12} = (-1.00000, 0.33333, 1.00000),$$

$$a_{13} = (-1.00000, 1.00000, -1.00000),$$

$$a_{14} = (-1.00000, 1.00000, -0.33333),$$

$a_{15} = (-1.00000, 1.00000, 0.33333),$
 $a_{16} = (-1.00000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{17} = (-0.33333, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{18} = (-0.33333, -1.00000, -0.33333),$
 $a_{19} = (-0.33333, -1.00000, 0.33333),$
 $a_{20} = (-0.33333, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{21} = (-0.33333, -0.33333, -1.00000),$
 $a_{22} = (-0.33333, -0.33333, -0.33333),$
 $a_{23} = (-0.33333, -0.33333, 0.33333),$
 $a_{24} = (-0.33333, -0.33333, 1.00000),$
 $a_{25} = (-0.33333, 0.33333, -1.00000),$
 $a_{26} = (-0.33333, 0.33333, -0.33333),$
 $a_{27} = (-0.33333, 0.33333, 0.33333),$
 $a_{28} = (-0.33333, 0.33333, 1.00000),$
 $a_{29} = (-0.33333, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{30} = (-0.33333, 1.00000, -0.33333),$
 $a_{31} = (-0.33333, 1.00000, 0.33333),$
 $a_{32} = (-0.33333, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{33} = (0.33333, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{34} = (0.33333, -1.00000, -0.33333),$
 $a_{35} = (0.33333, -1.00000, 0.33333),$
 $a_{36} = (0.33333, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{37} = (0.33333, -0.33333, -1.00000),$
 $a_{38} = (0.33333, -0.33333, -0.33333),$
 $a_{39} = (0.33333, -0.33333, 0.33333),$
 $a_{40} = (0.33333, -0.33333, 1.00000),$
 $a_{41} = (0.33333, 0.33333, -1.00000),$
 $a_{42} = (0.33333, 0.33333, -0.33333),$
 $a_{43} = (0.33333, 0.33333, 0.33333),$
 $a_{44} = (0.33333, 0.33333, 1.00000),$
 $a_{45} = (0.33333, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{46} = (0.33333, 1.00000, -0.33333),$
 $a_{47} = (0.33333, 1.00000, 0.33333),$
 $a_{48} = (0.33333, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{49} = (1.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{50} = (1.00000, -1.00000, -0.33333),$
 $a_{51} = (1.00000, -1.00000, 0.33333),$

$$\begin{aligned}
a_{52} &= (1.00000, -1.00000, 1.00000), \\
a_{53} &= (1.00000, -0.33333, -1.00000), \\
a_{54} &= (1.00000, -0.33333, -0.33333), \\
a_{55} &= (1.00000, -0.33333, 0.33333), \\
a_{56} &= (1.00000, -0.33333, 1.00000), \\
a_{57} &= (1.00000, 0.33333, -1.00000), \\
a_{58} &= (1.00000, 0.33333, -0.33333), \\
a_{59} &= (1.00000, 0.33333, 0.33333), \\
a_{60} &= (1.00000, 0.33333, 1.00000), \\
a_{61} &= (1.00000, 1.00000, -1.00000), \\
a_{62} &= (1.00000, 1.00000, -0.33333), \\
a_{63} &= (1.00000, 1.00000, 0.33333), \\
a_{64} &= (1.00000, 1.00000, 1.00000),
\end{aligned}$$

el esquema de cuadratura

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(x) dx =$$

$$\frac{vol}{512} \left\{ \begin{aligned}
&1\phi(a_1) + 3\phi(a_2) + 3\phi(a_3) + 1\phi(a_4) + 3\phi(a_5) + 9\phi(a_6) + \\
&9\phi(a_7) + 3\phi(a_8) + 3\phi(a_9) + 9\phi(a_{10}) + 9\phi(a_{11}) + 3\phi(a_{12}) + \\
&1\phi(a_{13}) + 3\phi(a_{14}) + 3\phi(a_{15}) + 1\phi(a_{16}) + 3\phi(a_{17}) + \\
&9\phi(a_{18}) + 9\phi(a_{19}) + 3\phi(a_{20}) + 9\phi(a_{21}) + 27\phi(a_{22}) + \\
&27\phi(a_{23}) + 9\phi(a_{24}) + 9\phi(a_{25}) + 27\phi(a_{26}) + 27\phi(a_{27}) + \\
&9\phi(a_{28}) + 3\phi(a_{29}) + 9\phi(a_{30}) + 9\phi(a_{31}) + 3\phi(a_{32}) + \\
&3\phi(a_{33}) + 9\phi(a_{34}) + 9\phi(a_{35}) + 3\phi(a_{36}) + 9\phi(a_{37}) + \\
&27\phi(a_{38}) + 27\phi(a_{39}) + 9\phi(a_{40}) + 9\phi(a_{41}) + 27\phi(a_{42}) + \\
&27\phi(a_{43}) + 9\phi(a_{44}) + 3\phi(a_{45}) + 9\phi(a_{46}) + 9\phi(a_{47}) + 3\phi(a_{48}) \\
&+ 1\phi(a_{49}) + 3\phi(a_{50}) + 3\phi(a_{51}) + 1\phi(a_{52}) + 3\phi(a_{53}) \\
&+ 9\phi(a_{54}) + 9\phi(a_{55}) + 3\phi(a_{56}) + 3\phi(a_{57}) + 9\phi(a_{58}) + \\
&9\phi(a_{59}) + 3\phi(a_{60}) + 1\phi(a_{61}) + 3\phi(a_{62}) + 3\phi(a_{63}) + \\
&1\phi(a_{64}) \end{aligned} \right\}.$$

c).-Un cubo con 125 puntos, como se presenta a continuación, se nota un crecimiento en los valores de los pesos.

$a_1 = (-1.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_2 = (-1.00000, -1.00000, -0.50000),$
 $a_3 = (-1.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_4 = (-1.00000, -1.00000, 0.50000),$
 $a_5 = (-1.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_6 = (-1.00000, -0.50000, -1.00000),$
 $a_7 = (-1.00000, -0.50000, -0.50000),$
 $a_8 = (-1.00000, -0.50000, 0.00000),$
 $a_9 = (-1.00000, -0.50000, 0.50000),$
 $a_{10} = (-1.00000, -0.50000, 1.00000),$
 $a_{11} = (-1.00000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{12} = (-1.00000, 0.00000, -0.50000),$
 $a_{13} = (-1.00000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{14} = (-1.00000, 0.00000, 0.50000),$
 $a_{15} = (-1.00000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{16} = (-1.00000, 0.50000, -1.00000),$
 $a_{17} = (-1.00000, 0.50000, -0.50000),$
 $a_{18} = (-1.00000, 0.50000, 0.00000),$
 $a_{19} = (-1.00000, 0.50000, 0.50000),$
 $a_{20} = (-1.00000, 0.50000, 1.00000),$
 $a_{21} = (-1.00000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{22} = (-1.00000, 1.00000, -0.50000),$
 $a_{23} = (-1.00000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{24} = (-1.00000, 1.00000, 0.50000),$
 $a_{25} = (-1.00000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{26} = (-0.50000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{27} = (-0.50000, -1.00000, -0.50000),$
 $a_{28} = (-0.50000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{29} = (-0.50000, -1.00000, 0.50000),$
 $a_{30} = (-0.50000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{31} = (-0.50000, -0.50000, -1.00000),$
 $a_{32} = (-0.50000, -0.50000, -0.50000),$

$a_{33} = (-0.50000, -0.50000, 0.00000),$
 $a_{34} = (-0.50000, -0.50000, 0.50000),$
 $a_{35} = (-0.50000, -0.50000, 1.00000),$
 $a_{36} = (-0.50000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{37} = (-0.50000, 0.00000, -0.50000),$
 $a_{38} = (-0.50000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{39} = (-0.50000, 0.00000, 0.50000),$
 $a_{40} = (-0.50000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{41} = (-0.50000, 0.50000, -1.00000),$
 $a_{42} = (-0.50000, 0.50000, -0.50000),$
 $a_{43} = (-0.50000, 0.50000, 0.00000),$
 $a_{44} = (-0.50000, 0.50000, 0.50000),$
 $a_{45} = (-0.50000, 0.50000, 1.00000),$
 $a_{46} = (-0.50000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{47} = (-0.50000, 1.00000, -0.50000),$
 $a_{48} = (-0.50000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{49} = (-0.50000, 1.00000, 0.50000),$
 $a_{50} = (-0.50000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{51} = (0.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{52} = (0.00000, -1.00000, -0.50000),$
 $a_{53} = (0.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{54} = (0.00000, -1.00000, 0.50000),$
 $a_{55} = (0.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{56} = (0.00000, -0.50000, -1.00000),$
 $a_{57} = (0.00000, -0.50000, -0.50000),$
 $a_{58} = (0.00000, -0.50000, 0.00000),$
 $a_{59} = (0.00000, -0.50000, 0.50000),$
 $a_{60} = (0.00000, -0.50000, 1.00000),$
 $a_{61} = (0.00000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{62} = (0.00000, 0.00000, -0.50000),$
 $a_{63} = (0.00000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{64} = (0.00000, 0.00000, 0.50000),$
 $a_{65} = (0.00000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{66} = (0.00000, 0.50000, -1.00000),$
 $a_{67} = (0.00000, 0.50000, -0.50000),$
 $a_{68} = (0.00000, 0.50000, 0.00000),$
 $a_{69} = (0.00000, 0.50000, 0.50000),$

$a_{70} = (0.00000, 0.50000, 1.00000),$
 $a_{71} = (0.00000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{72} = (0.00000, 1.00000, -0.50000),$
 $a_{73} = (0.00000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{74} = (0.00000, 1.00000, 0.50000),$
 $a_{75} = (0.00000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{76} = (0.50000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{77} = (0.50000, -1.00000, -0.50000),$
 $a_{78} = (0.50000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{79} = (0.50000, -1.00000, 0.50000),$
 $a_{80} = (0.50000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{81} = (0.50000, -0.50000, -1.00000),$
 $a_{82} = (0.50000, -0.50000, -0.50000),$
 $a_{83} = (0.50000, -0.50000, 0.00000),$
 $a_{84} = (0.50000, -0.50000, 0.50000),$
 $a_{85} = (0.50000, -0.50000, 1.00000),$
 $a_{86} = (0.50000, 0.00000, -1.00000),$
 $a_{87} = (0.50000, 0.00000, -0.50000),$
 $a_{88} = (0.50000, 0.00000, 0.00000),$
 $a_{89} = (0.50000, 0.00000, 0.50000),$
 $a_{90} = (0.50000, 0.00000, 1.00000),$
 $a_{91} = (0.50000, 0.50000, -1.00000),$
 $a_{92} = (0.50000, 0.50000, -0.50000),$
 $a_{93} = (0.50000, 0.50000, 0.00000),$
 $a_{94} = (0.50000, 0.50000, 0.50000),$
 $a_{95} = (0.50000, 0.50000, 1.00000),$
 $a_{96} = (0.50000, 1.00000, -1.00000),$
 $a_{97} = (0.50000, 1.00000, -0.50000),$
 $a_{98} = (0.50000, 1.00000, 0.00000),$
 $a_{99} = (0.50000, 1.00000, 0.50000),$
 $a_{100} = (0.50000, 1.00000, 1.00000),$
 $a_{101} = (1.00000, -1.00000, -1.00000),$
 $a_{102} = (1.00000, -1.00000, -0.50000),$
 $a_{103} = (1.00000, -1.00000, 0.00000),$
 $a_{104} = (1.00000, -1.00000, 0.50000),$
 $a_{105} = (1.00000, -1.00000, 1.00000),$
 $a_{106} = (1.00000, -0.50000, -1.00000),$

$$\begin{aligned}
a_{107} &= (1.00000, -0.50000, -0.50000), \\
a_{108} &= (1.00000, -0.50000, 0.00000), \\
a_{109} &= (1.00000, -0.50000, 0.50000), \\
a_{110} &= (1.00000, -0.50000, 1.00000), \\
a_{111} &= (1.00000, 0.00000, -1.00000), \\
a_{112} &= (1.00000, 0.00000, -0.50000), \\
a_{113} &= (1.00000, 0.00000, 0.00000), \\
a_{114} &= (1.00000, 0.00000, 0.50000), \\
a_{115} &= (1.00000, 0.00000, 1.00000), \\
a_{116} &= (1.00000, 0.50000, -1.00000), \\
a_{117} &= (1.00000, 0.50000, -0.50000), \\
a_{118} &= (1.00000, 0.50000, 0.00000), \\
a_{119} &= (1.00000, 0.50000, 0.50000), \\
a_{120} &= (1.00000, 0.50000, 1.00000), \\
a_{121} &= (1.00000, 1.00000, -1.00000), \\
a_{122} &= (1.00000, 1.00000, -0.50000), \\
a_{123} &= (1.00000, 1.00000, 0.00000), \\
a_{124} &= (1.00000, 1.00000, 0.50000), \\
a_{125} &= (1.00000, 1.00000, 1.00000),
\end{aligned}$$

el siguiente esquema de cuadratura

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} =$$

$$\frac{\text{vol}}{729000} \left\{ \begin{aligned}
&343\phi(a_1) + 1568\phi(a_2) + 588\phi(a_3) + 1568\phi(a_4) + 343\phi(a_5) \\
&+ 1568\phi(a_6) + 7168\phi(a_7) + 2688\phi(a_8) + 7168\phi(a_9) + \\
&1568\phi(a_{10}) + 588\phi(a_{11}) + 2688\phi(a_{12}) + 1008\phi(a_{13}) + \\
&2688\phi(a_{14}) + 588\phi(a_{15}) + 1568\phi(a_{16}) + 7168\phi(a_{17}) + \\
&2688\phi(a_{18}) + 7168\phi(a_{19}) + 1568\phi(a_{20}) + 343\phi(a_{21}) + \\
&1568\phi(a_{22}) + 588\phi(a_{23}) + 1568\phi(a_{24}) + 343\phi(a_{25}) + \\
&+ 1568\phi(a_{26}) + 7168\phi(a_{27}) + 2688\phi(a_{28}) + 7168\phi(a_{29}) + \\
&1568\phi(a_{30}) + 7168\phi(a_{31}) + 32768\phi(a_{32}) + 12288\phi(a_{33}) + \\
&32768\phi(a_{34}) + 7168\phi(a_{35}) + 2688\phi(a_{36}) + 12288\phi(a_{37}) + \\
&4608\phi(a_{38}) + 12288\phi(a_{39}) + 2688\phi(a_{40}) + 7168\phi(a_{41}) \\
&+ 32768\phi(a_{42}) + 12288\phi(a_{43}) + 32768\phi(a_{44}) + 7168\phi(a_{45})
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 1568\phi(a_{46}) + 7168\phi(a_{47}) + 2688\phi(a_{48}) + 7168\phi(a_{49}) + \\
& 1568\phi(a_{50}) + 588\phi(a_{51}) + 2688\phi(a_{52}) + 1008\phi(a_{53}) + \\
& 2688\phi(a_{54}) + 588\phi(a_{55}) + 2688\phi(a_{56}) + 12288\phi(a_{57}) \\
& + 4608\phi(a_{58}) + 12288\phi(a_{59}) + 2688\phi(a_{60}) + 1008\phi(a_{61}) + \\
& 4608\phi(a_{62}) + 1728\phi(a_{63}) + 4608\phi(a_{64}) + 1008\phi(a_{65}) \\
& + 2688\phi(a_{66}) + 12288\phi(a_{67}) + 4608\phi(a_{68}) + 12288\phi(a_{69}) \\
& + 2688\phi(a_{70}) + 588\phi(a_{71}) + 2688\phi(a_{72}) + 1008\phi(a_{73}) \\
& + 2688\phi(a_{74}) + 588\phi(a_{75}) + 1568\phi(a_{76}) + 7168\phi(a_{77}) \\
& + 2688\phi(a_{78}) + 7168\phi(a_{79}) + 1568\phi(a_{80}) + 7168\phi(a_{81}) \\
& + 32768\phi(a_{82}) + 12288\phi(a_{83}) + 32768\phi(a_{84}) + 7168\phi(a_{85}) \\
& + 2688\phi(a_{86}) + 12288\phi(a_{87}) + 4608\phi(a_{88}) + 12288\phi(a_{89}) + \\
& 2688\phi(a_{90}) + 7168\phi(a_{91}) + 32768\phi(a_{92}) + 12288\phi(a_{93}) \\
& + 32768\phi(a_{94}) + 7168\phi(a_{95}) + 1568\phi(a_{96}) + 7168\phi(a_{97}) + \\
& 2688\phi(a_{98}) + 7168\phi(a_{99}) + 1568\phi(a_{100}) + 343\phi(a_{101}) + \\
& 1568\phi(a_{102}) + 588\phi(a_{103}) + 1568\phi(a_{104}) + 343\phi(a_{105}) + \\
& 1568\phi(a_{106}) + 7168\phi(a_{107}) + 2688\phi(a_{108}) + 7168\phi(a_{109}) + \\
& 1568\phi(a_{110}) + 588\phi(a_{111}) + 2688\phi(a_{112}) + 1008\phi(a_{113}) + \\
& 2688\phi(a_{114}) + 588\phi(a_{115}) + 1568\phi(a_{116}) + 7168\phi(a_{117}) + \\
& 2688\phi(a_{118}) + 7168\phi(a_{119}) + 1568\phi(a_{120}) + 343\phi(a_{121}) + \\
& 1568\phi(a_{122}) + 588\phi(a_{123}) + 1568\phi(a_{124}) + 343\phi(a_{125}) \}.
\end{aligned}$$