



22
2ej.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Sobre la existencia
de geodésicas cerradas**

Tesis

que para obtener el título de

matemática

presenta

Déborah Oliveros Braniff

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCIÓN

SOBRE LA EXISTENCIA DE GEODÉSICAS CERRADAS

Dado un espacio euclidiano \mathbf{R}^n es bien sabido que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, en la esfera $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ la distancia más corta entre dos puntos cercanos es el segmento de círculo máximo que los une.

En general, una geodésica en una variedad Riemanniana, es una curva que minimiza la distancia entre dos puntos cercanos. De esta manera las geodésicas en \mathbf{R}^n son las líneas rectas y en la n -esfera las geodésicas son los círculos máximos. Las geodésicas cerradas son precisamente aquellas que son difeomorfas al círculo.

El problema de la existencia de geodésicas cerradas en variedades Riemannianas ha sido objeto de numerosos estudios desde fines del siglo pasado. En 1898 Hadamard demostró que toda curva cerrada, no homotópicamente trivial, se puede deformar en una geodésica. Él mismo probó también que una variedad Riemanniana completa simplemente conexa, de dimensión n , con curvatura seccional $K \leq 0$ es difeomorfa a \mathbf{R}^n , lo que implica que

en tales variedades no existen geodésicas cerradas. Después a principios de siglo, Birkhoff y Morse por un lado y Liusternik y Schnirelmann por otro, desarrollaron métodos poderosos para atacar este problema. En 1927, Birkhoff demostró la existencia de una geodésica cerrada para cualquier métrica en la n -esfera, y en 1951 Liusternik y Fet probaron que toda variedad Riemanniana compacta tiene al menos una geodésica cerrada. En esta tesis probaremos precisamente este resultado usando métodos variacionales.

Las geodésicas resultarán precisamente los puntos críticos de la función energía, la cual está definida en un espacio de lazos de la variedad M , es decir, si encontramos puntos críticos de la función energía encontraremos geodésicas cerradas (Cap. 3).

Para este hecho es necesario que la función energía sea diferenciable, para lo cual es indispensable dotar al espacio de lazos en M de una estructura de variedad diferenciable de Hilbert, más aún darle una métrica Riemanniana (Cap. 2).

Una vez traducido el problema a uno variacional, el objetivo es probar que realmente en una variedad Riemanniana compacta la energía tiene un punto crítico (Cap. 4) y esto se hace encontrando un elemento no trivial en la clase de homotopía de la pareja de lazos en M y puntos en M , todo esto usando fuertemente el teorema de deformación y la condición de Palais-Smale (Cap. 3).

NOCIONES BÁSICAS

1.1 **DEFINICIÓN:** Sea \mathbf{H} un espacio vectorial sobre el campo de los números reales \mathbf{R} . La función $S : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ es un *producto escalar* si para todo $f, g, h \in \mathbf{H}$ y $a \in \mathbf{R}$ se tiene que:

- i) $S(f, g + h) = S(f, g) + S(f, h)$
- ii) $S(f, ag) = aS(f, g)$
- iii) $S(f, g) = S(g, h)$
- iv) $S(f, f) \geq 0$
- v) $S(f, f) > 0$ si $f \neq 0$

1.2 **DEFINICIÓN:** Una función $P : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ se llama *norma* en \mathbf{H} si para todo $f, g \in \mathbf{H}$ y $a \in \mathbf{K}$ tenemos que:

- i) $P(f) \geq 0$
- ii) $P(af) = |a|P(f)$
- iii) $P(f+g) \leq P(f) + P(g)$ (desigualdad del triángulo)
- iv) $P(f) > 0$ si $f \neq 0$

1.3 *Observación:* Si S es un producto escalar en H entonces $P(f) = (S(f, f))^{1/2}$ define una norma en H .

Denotaremos con \langle, \rangle un producto escalar S y con $\| \cdot \|$ una norma.

EJEMPLOS:

Consideremos el conjunto $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ de curvas $c : I = [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ de clase C^∞ en el espacio euclidiano n -dimensional. Definimos las siguientes normas:

A) Consideremos la función:

$$\|c\|_\infty = \sup_{t \in I} |c(t)|$$

Esta es una norma en $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ ya que:

- i) $\|c\|_\infty \geq 0$ puesto que $|c(t)| \geq 0$ para toda $t \in I$
- ii) $\|\alpha c\|_\infty = \sup_{t \in I} |\alpha c(t)| = \sup_{t \in I} |\alpha| |c(t)|$
 $= |\alpha| \sup_{t \in I} |c(t)| = |\alpha| \|c\|_\infty$
- iii) $\|c_1 + c_2\|_\infty = \sup_{t \in I} |c_1(t) + c_2(t)| \leq \sup_{t \in I} |c_1(t)| + |c_2(t)|$
 $\leq \sup_{t \in I} |c_1(t)| + \sup_{t \in I} |c_2(t)|$
 $= \|c_1\|_\infty + \|c_2\|_\infty$
- iv) $\|c\|_\infty > 0$ si $t \neq 0$ pues $|c(t)| > 0$ si $t \neq 0$

B) Otra norma en $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es la norma $\|c\|_0$ obtenida del siguiente producto escalar:

$$\langle c, c_1 \rangle_0 = \int_I \langle c(t), c_1(t) \rangle dt$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar usual en \mathbf{R}^n . \langle, \rangle_0 es, en efecto, un producto escalar pues cumple:

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle c_1, c_2 + c_3 \rangle_0 &= \int_I \langle c_1(t), c_2(t) + c_3(t) \rangle dt \\ &= \int_I \langle c_1(t), c_2(t) \rangle dt + \int_I \langle c_1(t), c_3(t) \rangle dt \\ &= \langle c_1, c_2 \rangle_0 + \langle c_1, c_3 \rangle_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \langle c_1, \alpha c_2 \rangle_0 &= \int_I \langle c_1(t), \alpha c_2(t) \rangle dt = \alpha \int_I \langle c_1(t), c_2(t) \rangle dt \\ &= \alpha \langle c_1, c_2 \rangle_0 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle c_1, c_2 \rangle_0 = \langle c_2, c_1 \rangle_0$$

$$\text{iv) } \langle c, c \rangle_0 \geq 0 \text{ pues } \|c(t)\|^2 \geq 0$$

$$\text{v) } \langle c, c \rangle_0 > 0 \text{ si } c \neq 0$$

por lo tanto \langle, \rangle_0 es un producto escalar.

C) Y por último consideremos la norma $\|c\|_1$ obtenida del siguiente producto escalar:

$$\langle c, c_1 \rangle_1 = \langle c(0), c_1(0) \rangle + \langle c', c_1' \rangle_0$$

donde \langle, \rangle es el producto escalar usual en \mathbf{R} y c' es la derivada de c . \langle, \rangle_1 es un producto escalar, pues cumple:

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle c_1, c_2 + c_3 \rangle_1 &= \langle c_1(0), c_2(0) + c_3(0) \rangle + \langle c_1', (c_2 + c_3)' \rangle_0 \\ &= \langle c_1(0), c_2(0) \rangle + \langle c_1(0), c_3(0) \rangle \\ &\quad + \langle c_1', c_2' \rangle_0 + \langle c_1', c_3' \rangle_0 \\ &= \langle c_1, c_2 \rangle_1 + \langle c_1, c_3 \rangle_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \langle c_1, \alpha c_2 \rangle_1 &= \langle c_1(0), \alpha c_2(0) \rangle + \langle c_1', (\alpha c_2)' \rangle_0 \\ &= \alpha \langle c_1(0), c_2(0) \rangle + \alpha \langle c_1', c_2' \rangle_0 \\ &= \alpha \langle c_1, c_2 \rangle_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \langle c_1, c_2 \rangle_1 &= \langle c_1(0), c_2(0) \rangle + \langle c_1', c_2' \rangle_0 \\ &= \langle c_2(0), c_1(0) \rangle + \langle c_2', c_1' \rangle_0 = \langle c_2, c_1 \rangle_1 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle c, c_1 \rangle_1 \geq 0 \text{ pues } \langle c(0), c_1(0) \rangle \geq 0 \text{ y } \langle c', c_1' \rangle_1 \geq 0$$

$$\text{v) } \langle c, c_1 \rangle_1 > 0 \text{ si } c, c_1 \neq 0 \text{ por lo mismo.}$$

Por lo tanto \langle, \rangle_1 es también un producto escalar.

1.4 **DEFINICIÓN:** Si \mathbf{H} es un espacio vectorial y \langle, \rangle es un producto escalar en \mathbf{H} , entonces diremos que la pareja $(\mathbf{H}, \langle, \rangle)$ es un *espacio pre-Hilbert* o un *espacio vectorial con producto escalar*. Si $\| \cdot \|$ es una norma en \mathbf{H} entonces llamaremos a la pareja $(\mathbf{H}, \| \cdot \|)$ *espacio normado*. Por la observación 1.3, la norma $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ está definida de manera natural en un espacio pre-Hilbert, y de esta forma todo espacio pre-Hilbert es un espacio normado.

1.5 **DEFINICIÓN:** Sea $(\mathbf{H}, \| \cdot \|)$ un espacio normado. Una sucesión (f_n) en \mathbf{H} se dice que *converge* si existe un $f \in \mathbf{H}$ tal que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, si dado $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbf{N}$ tal que, para toda $n > N$, $\|f_n - f\| < \epsilon$. Esto se denotará por $f = \lim f_n$, $f_n \rightarrow f$ o $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. Nosotros diremos que una sucesión (f_n) en un espacio normado $(\mathbf{H}, \| \cdot \|)$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe una $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ con $n, m \in \mathbf{N}$, se cumple que $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$.

1.6 **DEFINICIÓN:** Un espacio normado $(\mathbf{H}, \| \cdot \|)$ se dice que es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge. Un espacio normado completo se llama *espacio de Banach*. Un espacio pre-Hilbert completo se llama *espacio de Hilbert*.

EJEMPLOS:

Los espacios $L_p = \{f : I \rightarrow \mathbf{R}^n \mid \|f\|_{L_p} < \infty\}$ son espacios de Banach [Rudin 3.6., 3.11.] con la norma asociada:

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \sup |f(t)|, & \text{si } p = \infty; \\ (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 0 \leq p < \infty. \end{cases}$$

donde *supes* es el *supremo esencial* de f , es decir, el menor número M tal que $|f| \leq M$ casi dondequiera. El espacio L_2 es un espacio de Hilbert [Rudin 3.11.].

1.7 **TEOREMA:** Un espacio de Banach \mathbf{H} puede ser convertido en un espacio de Hilbert con la misma norma si y sólo si se cumple la identidad del

paralelogramo [Heuser 57.1]

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathbf{H}$$

1.8 **DEFINICIÓN:** \mathbf{H} un espacio normado completo es la *completación* del espacio normado \mathbf{E} , si y sólo si \mathbf{E} es isomorfo a un subespacio denso de \mathbf{H} .

1.9 **PROPOSICIÓN:** Todo espacio normado (pre-Hilbert) tiene una única completación a un espacio de Banach (resp. Hilbert) [Heuser 12.1].

1.10 **DEFINICIÓN:** Sea $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ el conjunto de curvas continuas $c: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ donde $I = [0, 1]$ y \mathbf{R}^n es el espacio euclideo n -dimensional.

1.11 **PROPOSICIÓN:** $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es la completación del espacio $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ con respecto a la norma $\|c\|_\infty$.

Demostración:

1) Por demostrar que $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es completo. Sea $\{C_n\}_1^\infty$ sucesión de Cauchy en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe una $N(\epsilon)$ tal que $n, m \geq N(\epsilon)$, $\|C_n(t) - C_m(t)\|_\infty = \sup_{t \in I} |C_n(t) - C_m(t)| < \epsilon$ para toda $t \in I$, lo que implica que $\{C_n(t)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbf{R}^n .

Sea $C(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t)$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que si $n \geq N(\epsilon)$ tenemos $|C_n(t) - C(t)| < \epsilon$, para toda $t \in I$, por lo que

$$\sup_{t \in I} |C_n(t) - C(t)| < \epsilon$$

Entonces $\|C_n(t) - C(t)\|_\infty < \epsilon$, pero la norma $\|C\|_\infty$ es la norma uniforme, es decir, si $\|C_n(t) - C(t)\|_\infty \rightarrow 0$ tenemos que $C_n(t) \rightarrow C(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente, pero como $C_n(t)$ es una sucesión de funciones continuas y $C_n(t) \rightarrow C(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente, entonces $C(t)$ es continua, por lo tanto, $C(t) \in C^0(I, \mathbf{R}^n)$ y $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es completo.

2) Por demostrar que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass si f es una función continua en un intervalo compacto de \mathbf{R} y con valores en \mathbf{R} entonces f se puede aproximar uniformemente por polinomios. Como en particular los polinomios son diferenciables entonces tenemos que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ puede ser aproximada por funciones diferenciables. Entonces, dada una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ podemos encontrar funciones $f_{i_k} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciables tales que $f_{i_k} \rightarrow f_i$ uniformemente, $i = 1, \dots, n$. De tal forma que

$$g_1 = (f_{1_1}, \dots, f_{n_1})$$

$$g_2 = (f_{1_2}, \dots, f_{n_2})$$

$$g_k = (f_{1_k}, \dots, f_{n_k})$$

$\{g_k\}_{k=1}^\infty$ converga uniformemente a f . por lo tanto $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$. ■

1.12 **DEFINICIÓN:** Consideremos el espacio de Hilbert $L_2(I, \mathbf{R}^n) = H_0(I, \mathbf{R}^n)$ de los mapeos cuadrado integrables, es decir, el conjunto de funciones $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ tales que $\int_0^1 |\lambda(t)|^2 dt < \infty$. Entonces su producto interior y su norma

$$\langle \rho, \lambda \rangle_0 = \int_0^1 \langle \rho(t), \lambda(t) \rangle dt$$

$$\|\rho\|_0^2 = \langle \rho, \rho \rangle$$

con $\lambda, \rho \in H_0(I, \mathbf{R}^n)$ extienden a los definidos en el ejemplo B.

1.13 **PROPOSICIÓN:** $H_0(I, \mathbf{R}^n)$ es la completación de $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_0$ del ejemplo B.

Demostración: $H_0(I, \mathbf{R}^n) = L_2(I, \mathbf{R}^n)$ es completo [Rudin 3.11.], por lo que es suficiente probar que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_0$. Para probar esto son necesarios los siguientes lemas.

1.14 **LEMA:** $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$ donde $L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$ es el

conjunto de las funciones $g \in L_2(I, \mathbf{R}^n)$ tal que g está acotada.

Demostración:

Sea $g \in L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$ entonces $g \in L_2(I, \mathbf{R}^n)$ y $|g| \leq M$. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe una función $h : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua, tal que $|g-h| < \epsilon$, salvo en $S \subset [0, 1]$ y $\mu(S) < \epsilon$, $S = \{x \in I : |g(x) - h(x)| \geq \epsilon\}$ [Royden]. Consideremos entonces

$$\begin{aligned} \|g - h\|_{L_2}^2 &= \int_S |g - h|^2 dx + \int_{I-S} |g - h|^2 dx \\ &\leq 2M^2 \mu(S) + \epsilon^2 \mu(I) \\ &< 2M^2 \epsilon + \epsilon^2 \end{aligned}$$

(por ser h continua en un compacto, h es acotada, podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que esta acotada por M). Por lo tanto $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$. ■

1.15 LEMA: $L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $L_2(I, \mathbf{R}^n) = H_0(I, \mathbf{R}^n)$

Demostración: Bastará probar la afirmación para $n = 1$

Sea $g \in L_2(I, \mathbf{R})$ por demostrar que existe $h_m \in L_{ac}^2(I, \mathbf{R})$ tal que $\|h_m - g\|_{L_2} \rightarrow 0$ si $m \rightarrow \infty$. Sea

$$h_m = \begin{cases} g(t) & \text{si } |g(t)| \leq m \\ m & \text{si } g(t) \geq m \\ -m & \text{si } g(t) \leq -m \end{cases}$$

entonces $h_m \in L_{ac}(I, \mathbf{R})$, $h_m(x) \rightarrow g(x)$ cuando $m \rightarrow \infty$ para cada $t \in I$ y $\|h_m\|_{L_2} \leq \|g\|_{L_2}$. Por el teorema de la convergencia dominada [Royden 11.3.16.] $\|h_m - g\|_{L_2} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Por lo tanto $L_{ac}^2(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $L_2(I, \mathbf{R}^n) = H_0(I, \mathbf{R}^n)$. ■

Por la proposición 1.11 tenemos que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ entonces por los lemas anteriores podemos concluir que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$ ■

1.16 **DEFINICIÓN:** Un mapeo $\rho : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ es llamado *absolutamente continuo* si ρ' existe casi donde quiera y si está en $L_1(I, \mathbf{R}^n)$ (es decir, $\int_0^1 |\rho'(t)| dt < \infty$).

1.17 **Observación:** La desigualdad de Schwarz [Royden 3.5] afirma que $\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}$ donde $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$ son las normas de L_1 y L_2 respectivamente, por lo que $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2}$ y por lo tanto $H_0(I, \mathbf{R}^n) = L_2(I, \mathbf{R}^n) \subset L_1(I, \mathbf{R}^n)$.

1.18 **DEFINICIÓN:** $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es el conjunto de las curvas $\sigma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, σ absolutamente continua, tal que $\sigma' \in H_0(I, \mathbf{R}^n)$, y se llama *espacio de Sobolev*.

1.19 **PROPOSICIÓN:** $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle \lambda, \sigma \rangle_1 = \langle \lambda(0), \sigma(0) \rangle + \langle \lambda'(t), \sigma'(t) \rangle_0.$$

Para la demostración de esta proposición es necesario el siguiente Lema.

1.20 **Lema:** Si $(\mathbf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}})$ y $(\mathbf{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}})$ son dos espacios de Hilbert entonces $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$ es un espacio de Hilbert.

Demostración:

Consideremos $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$ las normas asociadas a los productos interiores correspondientes, y sea

$$\|(f, g)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} = \sqrt{\|f\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g\|_{\mathbf{F}}^2}$$

Por demostrar que $\|\cdot\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}$ es norma.

i) $\|(f, g)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} \geq 0$ pues $\|f\|_{\mathbf{E}}^2 \geq 0$ y $\|g\|_{\mathbf{F}}^2 \geq 0$

iv) $\|(f, g)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} = 0$ lo que implica $\|f\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g\|_{\mathbf{F}}^2 = 0$ por lo que $\|f\|_{\mathbf{E}}^2 = 0$ y $\|g\|_{\mathbf{F}}^2 = 0$, y por lo tanto $f = 0$ y $g = 0$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \|(f_1, g_1) + (f_2, g_2)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} &= \sqrt{\|f_1 + f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1 + g_2\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&\leq \sqrt{\|f_1\|_{\mathbf{E}}^2 + \|f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1\|_{\mathbf{F}}^2 + \|g_2\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&\leq \sqrt{\|f_1\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1\|_{\mathbf{F}}^2} + \sqrt{\|f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_2\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&= \|(f_1, g_1)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} + \|(f_2, g_2)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \|\alpha(f, g)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} &= \sqrt{\|\alpha f\|_{\mathbf{E}}^2 + \|\alpha g\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2 \|f\|_{\mathbf{E}}^2 + \alpha^2 \|g\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&= |\alpha| \sqrt{\|f\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g\|_{\mathbf{F}}^2} \\
&= |\alpha| \|(f, g)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$ es un espacio normado.

Por demostrar que $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$ es completo.

Sea $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces:

$$\|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} < \epsilon$$

y

$$\|(f_n, f_m) - (g_n, g_m)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}} < \epsilon$$

por lo que

$$\sqrt{\|f_n - f_m\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_n - g_m\|_{\mathbf{F}}^2} < \epsilon,$$

lo que implica $\|f_n - f_m\|_{\mathbf{E}}^2 < \epsilon$ y $\|g_n - g_m\|_{\mathbf{F}}^2 < \epsilon$. Por lo tanto, f_n y g_n son sucesiones de Cauchy en \mathbf{E} y \mathbf{F} respectivamente, y como \mathbf{E} y \mathbf{F} son espacios de Hilbert, entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathbf{E} y $g_n \rightarrow g$ en \mathbf{F} lo que implica que

$$(f_n, g_n) \rightarrow (f, g) \text{ en } \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$$

por lo tanto $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$ es completo. Más aún,

$$\begin{aligned}
\|(f_1, g_1) + (f_2, g_2)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}^2 &+ \|(f_1, g_1) - (f_2, g_2)\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}^2 = \\
&= \|f_1 + f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1 + g_2\|_{\mathbf{F}}^2 + \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{F}}^2 \\
&= 2(\|f_1\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_1\|_{\mathbf{F}}^2) + 2(\|f_2\|_{\mathbf{E}}^2 + \|g_2\|_{\mathbf{F}}^2) \\
&= 2\|f_1, g_1\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}^2 + 2\|f_2, g_2\|_{\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}}^2
\end{aligned}$$

por lo que la identidad del paralelogramo se satisface, entonces $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$ es un espacio de Hilbert. ■

Ahora sí, continuemos con la demostración de la proposición 1.16. Consideremos la siguiente función φ

$$\varphi : H_1(I, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^n \oplus H_0(I, \mathbf{R}^n)$$

$$\lambda \rightarrow (\lambda(0), \lambda')$$

Sea

$$\psi : \mathbf{R}^n \oplus H_0(I, \mathbf{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbf{R}^n)$$

$$(p, \sigma) \mapsto \lambda$$

donde

$$\lambda(t) = p + \int_0^t \sigma(s) ds$$

λ es tal que $\lambda(0) = p$ y $\lambda'(t) = \sigma(t)$, más aún, esta curva es absolutamente continua y su derivada $\lambda' = \sigma \in H_0(I, \mathbf{R}^n)$, por lo que $\lambda \in H_1(I, \mathbf{R}^n)$ y $\varphi\psi = \text{identidad}$. Además $\psi\varphi = \text{identidad}$ y ψ es claramente continua, por lo tanto tenemos que $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es isomorfo al espacio de Hilbert $\mathbf{R}^n \oplus H_0(I, \mathbf{R}^n)$, lo que implica que $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es un espacio de Hilbert. ■

1.21 PROPOSICIÓN: $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es la completación de $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ con la norma $\| \cdot \|_1$.

Demostración:

Por la proposición anterior $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es completo. Entonces solo queda probar que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ con la norma $\| \cdot \|_1$.

Sea $c \in H_1(I, \mathbf{R}^n)$ entonces c es absolutamente continua y $c' \in H_0(I, \mathbf{R}^n)$ pero por la proposición 1.13 tenemos que $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$, por lo tanto existe $f_n \in C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ tal que $\|f_n - c'\|_0 \rightarrow 0$.

Sea

$$g_n(t) = \int_0^t f_n(s) ds + c(0)$$

entonces $g_n \in C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ y además

$$\begin{aligned}\|c - g_n\|_1^2 &= \langle c(0) - g_n(0), c(0) - g_n(0) \rangle + \langle c' - g'_n, c' - g'_n \rangle \\ &= \|c' - g'_n\|_{L_2}^2 \rightarrow 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ es denso en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$. ■

1.22 *TEOREMA* (desigualdad de Sobolev): Si σ esta en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ entonces:

$$\begin{aligned}\|\sigma(t) - \sigma(s)\| &\leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\sigma'\|_0 \\ &\leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\sigma\|_1\end{aligned}$$

Demostración:

Sea χ la función característica del intervalo $[s, t]$, entonces

$$\|\chi\|_{L_2}^2 = \int_0^1 \chi^2(t) dt = \int_s^t 1 dt = |t - s|$$

y además,

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\| = \left\| \int_t^s \sigma'(x) dx \right\| = \left\| \int_0^1 \chi(x) \sigma'(x) dx \right\|$$

por la desigualdad de Schwarz ($\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}$), por lo que

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\| \leq \left(\int_0^1 \chi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (\sigma'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

lo que implica $\|\sigma(s) - \sigma(t)\| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\sigma'\|_0$.

Por otro lado,

$$\|\sigma'\|_0 = \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle_0^{\frac{1}{2}} \leq (\langle \sigma(0), \sigma(0) \rangle + \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle_0)^{\frac{1}{2}} = \|\sigma\|_1$$

y por lo tanto

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\sigma\|_1$$

1.23 *COROLARIO*: $\|\sigma\|_\infty \leq 2\|\sigma\|_1$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|\sigma(0)\| &\leq \|\sigma\|_1 \\ \|\sigma(t)\| &\leq \|\sigma(0)\| + \|\sigma(t) - \sigma(0)\| \\ &\leq \|\sigma(0)\| + |t|^{\frac{1}{2}}\|\sigma\|_1 \\ &\leq \|\sigma\|_1 + |t|^{\frac{1}{2}}\|\sigma\|_1 \\ &\leq 2\|\sigma\|_1 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $\sup_{t \in I} \|\sigma(t)\| \leq 2\|\sigma\|_1$. ■

1.24 *TEOREMA*: Las inclusiones de $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ y de $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$ son continuas. Más aún, estas inclusiones son compactas, es decir, si $S \subset H_1(I, \mathbf{R}^n)$ es acotado, entonces $CL(S)$ la cerradura de S en $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es compacta y, análogamente, si $S \subset C^0(I, \mathbf{R}^n)$ es acotado entonces $CL(S)$ es compacto en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$.

Demostración:

$H_1(I, \mathbf{R}^n) \subset C^0(I, \mathbf{R}^n)$ pues toda curva absolutamente continua es continua. Y la inclusión es continua por el corolario anterior ya que $\|\sigma\|_\infty \leq 2\|\sigma\|_1$. Por otra parte, $C^0(I, \mathbf{R}^n) \subset H_0(I, \mathbf{R}^n)$ pues si $\sigma \in C^0(I, \mathbf{R}^n)$ entonces la imagen de σ , $im\sigma(t)$, es compacta pues la imagen continua de compactos es compacta, por lo que $\{\|\sigma(t)\|\}$ es acotado y entonces $\int_0^1 \|\sigma\|^2 dt < \infty$, es decir, es de cuadrado integrable. Por lo tanto $\sigma \in H_0(I, \mathbf{R}^n)$ y la inclusión es continua pues $\|\xi\|_0 \leq \|\xi\|_\infty$.

Demostraremos ahora que la primera inclusión es compacta. Sea $S \subset H_1(I, \mathbf{R}^n)$, $(S, \|\cdot\|_1)$ acotado, entonces por el corolario anterior S es $\|\cdot\|_\infty$ acotado. Demostraremos ahora que S es equicontinuo, es decir, que para toda $\epsilon > 0$ existe una $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t - s| < \delta(\epsilon)$ entonces $\|\sigma(t) - \sigma(s)\| < \epsilon$ para toda $\sigma \in S$.

Sea $\epsilon > 0$ como S es acotado entonces existe $M > 0$ tal que $\|\sigma\|_1 < M$ para toda $\sigma \in S$, por la desigualdad de Sobolev $\|\sigma(t) - \sigma(s)\| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}}\|\sigma\|_1 \leq$

$|t-s|^{\frac{1}{2}}M$ entonces, sea $\delta = (\frac{\epsilon}{M})^2$, lo que implica $\|\sigma(t)-\sigma(s)\| \leq |t-s|^{\frac{1}{2}}M \leq ((\frac{\epsilon}{M})^2)^{\frac{1}{2}}M < \epsilon$, por lo tanto S es equicontinuo.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli tenemos que toda sucesión en S tiene una subsucesión convergente en S si y sólo si $CL(S)$ es compacto por sucesiones, si y sólo si $CL(S)$ es compacto (por estar en espacios métricos). Análogamente se prueba que la inclusión de $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ en $H_0(I, \mathbf{R}^n)$ es compacta. ■

LA VARIEDAD DE H_1 -CURVAS

Sea M una variedad Riemanniana.

2.1 **DEFINICIÓN:** Denotaremos por $C^\infty(I, M)$ el conjunto de curvas diferenciables $c : I \rightarrow M$.

Por $C^0(I, M)$ el espacio de curvas continuas $c : I \rightarrow M$ junto con la métrica $d_\infty(c, c_1) = \sup_{t \in I} d_M(c(t), c_1(t))$ donde $d_M(c(t), c_1(t))$ es la distancia definida en M [Doc VII, 2.5], es decir, el infimo de las longitudes de todas las curvas en M que unen a $c(t)$ con $c_1(t)$.

Una curva $c : I \rightarrow M$ es llamada H_1 -curva, si para cada carta (u, M') de M , $I' = C^{-1}(M')$ el mapeo $u \circ c : I' \rightarrow \mathbf{R}^n$ está en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$.

2.2 **PROPOSICIÓN:** La definición de la H_1 -curva no depende de la elección de la carta:

Sea $c : I \rightarrow M$ una H_1 -curva y sea (u, M') una carta de M tal que $u \circ c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ esté en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$, sea (u', M'') otra carta de M tal que $M' \cap M'' = W \neq \emptyset$. Sabemos entonces, que existe un difeomorfismo $\phi : u(W) \subset \mathbf{R}^n \rightarrow u'(W) \subset \mathbf{R}^n$ por lo que $\phi \circ (u \circ c) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ está en L_2 pues $\phi'(u \circ c(t))(u \circ c)'(t)$ existe casi donde quiera y $\int_0^1 |\phi'(u \circ c(t))(u \circ c)'(t)|^2 dt < \infty$ ya que $(u \circ c)'$ está en $L_1(I, \mathbf{R}^n)$ y $\phi'(u \circ c(t))$ es continua en un compacto.

2.3 DEFINICIÓN: Definimos a $H_1(I, M)$ como el conjunto de H_1 -curvas $c : I \rightarrow M$. Y de manera análoga, definimos $H_0(I, M)$ como el conjunto de curvas $c : I \rightarrow M$ tal que para cada carta (u, M') de M $u \circ c : I' := c^{-1}(M') \rightarrow \mathbf{R}^n$ esta en $H_0(I, M)$

2.4 Observación: Tenemos las siguientes inclusiones canónicas.

$$C^\infty(I, M) \hookrightarrow H_1(I, M) \hookrightarrow C^0(I, M)$$

2.5 PROPOSICIÓN: $C^\infty(I, M)$ es un subespacio denso del espacio métrico completo $(C^0(I, M), \|\cdot\|_\infty)$

Demostración:

Una curva $c \in C^0(I, M)$ puede ser cubierta por un número finito de cartas ya que I es compacto y c es continua, entonces para carta (u, M') , $u \circ c|_{I'}$ es aproximable por una curva $\sigma \in C^\infty(I', \mathbf{R}^n)$, $I' = c^{-1}(u)$, véase 1.11. Es decir c es aproximable por una curva γ que es diferenciable por partes ya que puede ser que γ no sea diferenciable en la intersección de las cartas. Supongamos que γ no es diferenciable en t_1 , sea (u_1, M'') una carta que contenga a $\gamma(t_1)$ entonces $u_1(\gamma)$ es continua. Por medio de una convolución [Rudin 8.14] podemos aproximar a $u_1(\gamma)$ por una curva diferenciable de tal forma que coincida con $u_1(\gamma)$ en toda $t \notin (u_1(\gamma(t_1)) - \epsilon, u_1(\gamma(t_1)) + \epsilon)$ de esta forma c es aproximable por una curva diferenciable. ■

El propósito de este capítulo es probar el siguiente teorema:

2.6 **TEOREMA:** $H_1(I, M)$ es una variedad (diferenciable) de Hilbert.

Para la demostración resultará conveniente emplear el lenguaje de haces fibrados.

2.7 **DEFINICIÓN:** Sean F, E, B variedades diferenciables y sea $\pi : E \rightarrow B$ un mapeo diferenciable, (F, E, B, π) se llama *haz fibrado diferenciable* si existe una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de B y para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un difeomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow \pi|_F & \downarrow \pi|_{U_\alpha} \\ & & U_\alpha \end{array}$$

F es llamado *la fibra*, E es llamado *espacio total*, B es llamado *espacio base*.

Un morfismo de haces fibrados diferenciables es una pareja de funciones f, g , con $f : B' \rightarrow B, g : E' \rightarrow E$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

y tal que $(\pi')^{-1}\{b'\} \rightarrow \pi^{-1}\{f(b')\}$ es un difeomorfismo para toda $b' \in B'$.

Dado un haz fibrado diferenciable (F, E, B, π) , un mapeo diferenciable $\sigma : B \rightarrow E$ es llamado *sección*, si $\pi(\sigma(b)) = b$ para toda $b \in B$. Un haz (F, E, B, π) es un *haz trivial* si existe un isomorfismo de haces $\phi : F \times B \rightarrow B$ sobre la identidad de B .

El *haz inducido* (F^*, f^*E, B^*, π^*E) de (F, E, B, π) por $f : B^* \rightarrow B$ está dado por $f^*E = \{(b, e) \in B^* \times E | f(b) = \pi(e)\}$ donde $\pi^*E(b, e) = b$ para toda $b, e \in f^*E$, y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^*E^* & \longrightarrow & E \\ \downarrow \pi^*E & & \downarrow \pi \\ B^* & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Análogamente un *haz vectorial diferenciable* es un haz fibrado (V, E, B, π) cuya fibra es un espacio vectorial y tal que las funciones Φ_α son lineales en cada fibra.

Cuando no se preste a confusión denotaremos un haz sólomente por π especificando a que tipo de haz se refiera.

2.8 DEFINICIÓN: Sea $c \in C^\infty(I, M)$ y consideremos el haz tangente sobre M y el haz inducido por $c: I \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} c^*TM & \longrightarrow & TM \\ \downarrow c^*\tau & & \downarrow \tau \\ I & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

denotaremos por $\tau_c := c^*\tau$ y por $V_c := c^*TM$. $\tau_c: V_c \rightarrow I$ se llama el haz tangente a lo largo de la curva c .

2.9 PROPOSICIÓN Y DEFINICIONES:

- i) El conjunto de secciones diferenciables de τ_c es un espacio vectorial que denotaremos por $C^\infty(\tau_c)$
- ii) La métrica Riemanniana \langle, \rangle_M de M induce en $C^\infty(\tau_c)$:
 - a) La norma $\|\xi\|_\infty = \sup_{t \in I} |\xi(t)|_M$
 - b) El producto escalar $\langle \xi, \eta \rangle_0 = \int_0^1 \langle \xi(t), \eta(t) \rangle_M dt$
 - c) El producto escalar $\langle \xi, \eta \rangle_1 = \langle \xi(0), \eta(0) \rangle_M + \langle \frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{dt} \eta \rangle_0$ donde $\frac{\nabla}{dt}$ denota la derivada covariante.

Las normas derivadas de los productos escalares \langle, \rangle_0 , \langle, \rangle_1 se denotan por $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$.
- iii) Las completaciones de $C^\infty(\tau_c)$ con respecto a las normas $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ serán denotadas por $H_0(\tau_c)$, $H_1(\tau_c)$ y $C^0(\tau_c)$ respectivamente.

Demostración: La demostración es análoga a la de los ejemplos del capítulo 1. ■

2.10 PROPOSICIÓN: Existe un isomorfismo $C^\infty(\tau_c) \cong C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ que

induce isometrías

$$C^0(\tau_c) \cong C^0(I, \mathbf{R}^n)$$

$$H_0(\tau_c) \cong H_0(I, \mathbf{R}^n)$$

$$H_1(\tau_c) \cong H_1(I, \mathbf{R}^n)$$

Demostración: Sea $\{X_i | i = 1, \dots, n\}$ un marco ortonormal diferenciable a lo largo de una curva c , es decir $X_i(c(t))$ $i = 1, \dots, n$ es una base ortonormal de $T_{c(t)}M$ para cada t [Klin 1.4.4]. Podemos pensar a cada X_i como la sección $t \mapsto X_i(c(t))$ de τ_c . Entonces cada $X \in C^\infty(\tau_c)$ tiene una expresión única

$$X = \sum x_i X_i$$

donde $x_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ es diferenciable, $i = 1, \dots, n$

Definimos entonces

$$\Theta : C^\infty(\tau_c) \rightarrow C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$$

$$X \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

1) Θ resulta ser biyectiva, pues para cada curva $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ $c = (c_1, \dots, c_n)$ $\Theta^{-1}(c) = \sum c_i X_i$, más aún Θ es lineal, por consiguiente Θ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

2) Θ es una isometría en cada una de las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$. Pues para cada $t \in I$ Θ manda $\{X_i(c(t))\}$ $i = 1, \dots, n$ en $\{e_i(t)\}$ la base estándar de \mathbf{R}^n , lo que implica que $\|\Theta X(c(t))\| = \|X(c(t))\|_M$ para todo $t \in I$ y por lo tanto $\|\Theta X\|_\infty = \|X\|_\infty$, $\langle \Theta X, \Theta Y \rangle_0 = \langle X, Y \rangle_0$ y $\langle \Theta X, \Theta Y \rangle_1 = \langle X, Y \rangle_1$

2.11 PROPOSICIÓN: Sea $B_\epsilon \subset \mathbf{R}^n$ la bola abierta de radio ϵ y centro en 0. Entonces

$$H_1(I, B_\epsilon) := \{c \in H_1(I, \mathbf{R}^n) | c(t) \in B_\epsilon \text{ para toda } t \in I\}$$

es abierto en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$.

Demostración:

Sea $\sigma \in H_1(I, B_\epsilon)$ entonces σ es una curva continua en I , por lo que $\sigma(I)$ es compacto.

Más aún $A := \mathbf{R}^n - B_\epsilon$ es cerrado. Sea $\delta = \frac{d(A, \sigma(I))_{\mathbf{R}^n}}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$ definamos

$W_c = \{\eta : \text{sección de } \tau_c \text{ con } \|\eta - \sigma\|_1 < \delta\}$. Tomemos $\eta \in W_c$ esto implica que $\|\eta - \sigma\|_1 < \delta$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} |\eta(t) - \sigma(t)| &= \frac{\|\eta - \sigma\|_\infty}{2} \\ &\leq \|\eta - \sigma\|_1 \\ &< \delta \end{aligned}$$

Lo que implica que $\eta(t) \in B_\epsilon$ para toda $t \in I$ entonces $W_c \in H_1(I, B_\epsilon)$ ■

Consideremos el haz trivial $\pi_M : I \times M \rightarrow I$, y sea $H_1(\pi_M)$ el conjunto de secciones $\sigma : I \rightarrow I \times M$ de π_M tales que $pr_2 \circ \sigma \in H_1(I, M)$, donde $pr_2 : I \times M \rightarrow M$ es la proyección en la segunda entrada. Entonces, la composición con pr_2 da una biyección natural

$$H_1(\pi_M) \cong H_1(I, M)$$

. A continuación construiremos un atlas diferenciable para $H_1(\pi_M)$ modelado en $H_1(I, \mathbf{R}^n) \cong H_1(\pi_{\mathbf{R}^n})$.

Sea $c \in C^\infty(I, M)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\exp_{c(t)}|_{B_\epsilon(0)}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, para toda $t \in I$. Aquí $B_\epsilon(0)$ denota la bola abierta de radio ϵ y centro en 0 en $T_{c(t)}M$. Tal $\epsilon > 0$ existe porque I es compacto y existe para cada $t \in I$. [Doc III, 3.7]

Sea

$$U_c = \{v \in V_c : \|v\|_M < \epsilon\}$$

y sea

$$\begin{aligned} \varphi_c : U_c &\rightarrow I \times M \\ \varphi_c(v) &:= (\tau_c(v), \exp_{c(\tau_c(v))}(v)) \end{aligned}$$

2.12 PROPOSICIÓN: φ_c es un difeomorfismo de haces fibrados sobre su imagen.

La demostración es inmediata de la definición ■

Sea $H_1(\tau_c, U_c) := \{\sigma \in H_1(\tau_c) \mid \sigma(t) \in U_c \text{ para toda } t \in I\}$. Entonces $H_1(\tau_c, U_c)$ corresponde a $H_1(I, \mathbf{B}_c)$ bajo la isometría de 2.10 y por 2.11 es abierito en $H_1(\tau_c) \cong H_1(I, \mathbf{R}^n)$.

La composición por la izquierda con φ_c define una función

$$\Phi_c : H_1(\tau_c, U_c) \longrightarrow H_1(\pi_M)$$

$$\sigma \longmapsto \varphi_c \sigma$$

Φ_c es inyectiva, ya que φ_c lo es.

2.13 TEOREMA:

$$\{\Phi_c : H_1(\tau_c, U_c) \longrightarrow H_1(\pi_M) \mid c \in C^\infty(I, M)\}$$

Es un atlas diferenciable para $H_1(\pi_M) \cong H_1(I, M)$ modelado en $H_1(I, \mathbf{R}^n)$, es decir

- i) $H_1(I, M) \cong H_1(\pi_M) = \cup \Phi_c(H_1(\tau_c, U_c))$
- ii) $\Phi_{c_2}^{-1} \Phi_{c_1} : \Phi_{c_1}^{-1} \Phi_{c_2}(H_1(\tau_{c_2}, U_{c_2})) \longrightarrow H_1(\tau_{c_2}, U_{c_2})$
es diferenciable.

Demostración:

i) Sea $c \in H_1(I, M)$. Como c es continua en un compacto, se sigue de [Doc III, 3.7] que existe $\epsilon > 0$ tal que si $p \in M$ y $d_\infty(p, c(t)) < \epsilon$ para alguna $t \in I$, entonces $\exp_p|_{\mathbf{B}_\epsilon(0)}$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Por 2.5 existe una curva $\hat{c} \in C^\infty(I, M)$ tal que $d_\infty(\hat{c}(t), c(t)) < \epsilon$ para toda $t \in I$. Por lo tanto; usando esta ϵ para definir $U_{\hat{c}}$ tenemos que $(t, c(t))$ está en la imagen de $\varphi_{\hat{c}} : U_{\hat{c}} \longrightarrow I \times M$ para cada $t \in I$. Esto define un elemento $\sigma \in H_1(\tau_{\hat{c}}, U_{\hat{c}})$ tal que $\varphi_{\hat{c}} \sigma = c$.

ii) Se sigue del siguiente lema y del hecho de que

$$\Phi_{c_2}^{-1} \Phi_{c_1} \mid \Phi_{c_1}^{-1} \Phi_{c_2}(H_1(\tau_{c_2}, U_{c_2}))$$

es la función inducida por

$$\varphi_{c_2}^{-1} \varphi_{c_1} : \varphi_{c_1}^{-1} \varphi_{c_2}(U_{c_2}) \longrightarrow V_{c_2}$$

$$v \longmapsto \exp_{c_2(\tau_{c_1}, v)}^{-1} \exp_{c_1(\tau_{c_1}, v)} v$$

que es un morfismo diferenciable de haces. ■

2.14 LEMA: Sea $U \subset I \times \mathbf{R}^n$ abierto y $\varphi : U \rightarrow I \times \mathbf{R}^m$ una función diferenciable sobre I , es decir, $\varphi(t, x) = (t, \hat{\varphi}_t(x))$ con $\hat{\varphi} : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferenciable. Entonces las funciones inducidas por φ :

$$\Phi^0 : C^0(U) \rightarrow C^0(\pi_{\mathbf{R}^n}), \quad \Phi_1 : H_1(U) \rightarrow H_1(\pi_{\mathbf{R}^n})$$

Son diferenciables, donde $C^0(U) = \{\sigma \in C^0(\pi_{\mathbf{R}^n}) : \sigma(t) \in U \text{ para toda } t \in I\}$ y $H_1(U) = C^0(U) \cap H_1(\pi_{\mathbf{R}^n})$.

Demostración:

a) Sea $D\Phi^0 : C^0(U) \rightarrow \mathcal{L}(C^0(\pi_{\mathbf{R}^n}), C^0(\pi_{\mathbf{R}^n}))$ dada por $(D\Phi^0(\sigma)\zeta)(t) = (t, D\hat{\varphi}_t(\sigma(t))\zeta(t))$ donde $\sigma : I \rightarrow U$ y $\zeta : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ son continuas. (Aquí estamos identificando a $C^0(\pi_{\mathbf{R}^n})$ con $C^0(I, \mathbf{R}^n)$). Existe $t_0 \in I$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{\|\Phi^0(\sigma + \zeta) - \Phi^0(\sigma) - D\Phi^0(\sigma)\zeta\|_\infty}{\|\zeta\|_\infty} \\ & \leq \frac{|\hat{\varphi}_{t_0}(\sigma(t_0) - \zeta(t_0)) - \hat{\varphi}_{t_0}(\sigma(t_0)) - D\hat{\varphi}_{t_0}(\sigma(t_0))\zeta(t_0)|}{|\zeta(t_0)|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $\|\zeta\|_\infty \rightarrow 0$.

por lo tanto $D\Phi^0$ es la derivada de Φ^0 .

De manera analoga se hace para Φ_1 ■

De las proposiciones anteriores se sigue que $\{\hat{U}_c, \phi_c\}$ es un atlas para $H_1(I, M)$ modelado en el espacio de Hilbert $H_1(I, \mathbf{R}^n)$ [Klin 1.1.2], con lo que queda demostrado el teorema 2.5.

EL HAZ TANGENTE A $H_1(I, M)$

2.15 Sea $\chi^r(I, M) = \{\xi \in H_r(I, TM) \mid \tau_M \xi \in H_1(I, M)\}$ $r = 0, 1$ el conjunto los H_r -campos vectoriales a lo largo de las H_1 -curvas en M . Recordemos (véase apéndice) que la conexión Riemanniana K de M permite expresar a $TTM \rightarrow TM$ como la suma directa de sus partes "vertical" y "horizontal", es decir K escinde a la sucesión exacta de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \Gamma \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 TM \times_M TM & \xrightarrow{i} & TTM & \xrightarrow{\rho} & TM \times_M TM \\
 \text{pr}_1 \searrow & & \downarrow \tau_{TM} & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & & TM & &
 \end{array}$$

Expresando a la derivada $d \exp_c : TTM \rightarrow TM$ en términos de esta descomposición, definimos

$$d^v \exp_c := d \exp_c \circ i : TM \times_M TM \rightarrow TM$$

$$d^h \exp_c := d \exp_c \circ \Gamma : TM \times_M TM \rightarrow TM$$

Usaremos la notación

$$d^v_{\xi} \exp_c := d^v \exp_c |_{\{\xi\} \times T_c M} : T_c M \rightarrow T_{\exp_c \xi} M$$

$$d^h_{\xi} \exp_c := d^h \exp_c |_{\{\xi\} \times T_c M} : T_c M \rightarrow T_{\exp_c \xi} M$$

2.16 PROPOSICIÓN:

$$\tau^r : \chi^r(I, M) \rightarrow H^1(I, M)$$

$$\xi \mapsto \tau_M \xi$$

es un haz vectorial con fibra $H_r(I, \mathbf{R}^n)$ donde n es la dimensión de M y $r = 0, 1$.

Demostración: Definimos un morfismo de haces vectoriales como sigue:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\tau_c, U_c) \times H^r(\tau_c) & \xrightarrow{\hat{\Phi}_c} & \chi^r(I, M) \\ \downarrow p_{r1} & & \downarrow r^r \\ \hat{H}_1(\tau_c, U_c) & \xrightarrow{\Phi_c} & H_1(I, M) \end{array}$$

$$\hat{\Phi}_c(\xi, \eta) := d^v \exp_c(\xi, \eta)$$

Es claro que el diagrama conmuta y que este es un isomorfismo de haces vectoriales sobre su imagen. ■

2.17 **COROLARIO:** $\tau^1 : \chi^1(I, M) \rightarrow H^1(I, M)$ es el haz tangente a $H^1(I, M)$

2.18 **PROPOSICIÓN:** La función

$$\begin{array}{c} H^1(I, M) \rightarrow \chi^0(I, M) \\ e \mapsto e' \end{array}$$

Es una sección diferenciable de τ^0 . En términos de las cartas se ve como sigue:

$$\begin{array}{c} H_1(\tau_c, U_c) \rightarrow H_1(\tau_c, U_c) \times H_0(\tau_c) \\ \xi \mapsto (\xi, \frac{\nabla}{dt} \xi + \theta \xi) \end{array}$$

donde $\Phi_c \xi = e$ y $\theta \xi = (d_\xi^v \exp_c)^{-1} (d_\xi^h \exp_c)(c')$. (Nótese que $\exp_c|_{U_c}$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Por lo tanto $d_\xi^v \exp_c : T_c M \rightarrow T_{\exp_c \xi} M$ es un isomorfismo).

Demostración: Sea $\xi \in H_1(\tau_c, U_c)$ tal que $\Phi_c(\xi) = \exp_c \xi = e$. Entonces $d_\xi \exp_c(\xi') = e'$. Ahora, por A.6, $\xi' = iK\xi' + \Gamma\rho\xi'$. Por lo tanto,

$$e' = d^v \exp_c(\xi, \frac{\nabla}{dt} \xi) + d^h \exp_c(\xi, c')$$

$$= d^v \exp_c(\xi, \frac{\nabla}{dt} \xi + \Theta \xi).$$

■

MÉTRICA RIEMANNIANA EN $H_1(I, M)$

Sean $\xi_1, \xi_2 \in \chi^1(I, M)$ campos vectoriales a lo largo de $e \in H_1(I, M)$.
 Definimos

$$2.19 \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_1(I, M)} := \langle \xi_1(0), \xi_2(0) \rangle_M + \int_0^1 \langle \frac{\nabla}{dt} \xi_1, \frac{\nabla}{dt} \xi_2 \rangle_M$$

En términos de las cartas, $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_1(I, M)}$ se ve como sigue:

Sea $\xi \in H_1(\tau_c, U_c)$ con $\exp_c \xi = e$.

Sean $\eta_1, \eta_2 \in H_1(\tau_c)$. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1(I, M)}$ induce en $H_1(\tau_c)$ el producto

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_1^c := \langle d_\xi^v \exp_c \eta_1, d_\xi^v \exp_c \eta_2 \rangle_1$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ es el producto escalar de $H_1(\tau_e)$.

De aquí se sigue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1(I, M)}$ es una métrica Riemanniana $H_1(I, M)$.

2.20 PROPOSICIÓN: Dada una carta $\Phi_c : H_1(\tau_c, U_c) \rightarrow H_1(I, M)$, la métrica inducida

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_1^c := \langle d_\xi^v \exp_c \eta_1, d_\xi^v \exp_c \eta_2 \rangle_1$$

en $H_1(\tau_c, U_c)$ es equivalente a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ definida en 2.9.

Demostración: U_c se escogió de tal manera que $(\tau_c, \exp_c) : U_c \rightarrow I \times M$ fuera un difeomorfismo sobre su imagen. De modo que para todo $\xi \in U_c$, $d_\xi^v : T_\xi U_c \rightarrow T_{\exp_c \xi} M$ es un isomorfismo lineal, que además varía continuamente con ξ . Usando además la compacidad de I se obtiene el resultado. ■

SUBVARIEDAD DE LAZOS ΛM

Consideremos el subconjunto $\Lambda M \subset H_1(I, M)$ de H_1 -curvas cerradas en M , es decir que $\sigma(0) = \sigma(1)$. M .

Nos gustaría probar que ΛM es una subvariedad de $H_1(I, M)$.

2.21 DEFINICIÓN: Un mapeo $f : M \rightarrow N$ diferenciable diremos que es transversal a una subvariedad S de N si $f^{-1}(S) = \emptyset$ o si para toda $m \in f^{-1}(S)$ tenemos que

$$(d_m f)(T_m M) + T_{f(m)} S = T_{f(m)} N$$

2.22 TEOREMA: Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable y sea S una subvariedad de N si f es transversal a S entonces $f^{-1}(S)$ es una subvariedad diferenciable de M [Mard 3.5.11].

2.23 PROPOSICIÓN: ΛM es una subvariedad de $H_1(I, M)$

Demostración:

Sea $F : H_1(I, M) \rightarrow M \times M$ dada por $\sigma \mapsto (\sigma(0), \sigma(1))$ y consideremos $T_\sigma H_1(I, M) = \{\mathcal{X} \in H_1(I, TM) \mid \mathcal{X}(t) \in T_{\sigma(t)} M\}$ el espacio tangente a $H_1(I, M)$ en σ , (véase 2.16), entonces

$$d_\sigma F : T_\sigma H_1(I, M) \rightarrow T_{\sigma(0)} M \times T_{\sigma(1)} M$$

está dada por $d_\sigma F(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}(0), \mathcal{X}(1))$. Esto implica que F es una función transversal a toda subvariedad S en particular para $S = \Delta$ donde $\Delta =$

$\{(x, y) \in M \times M | x = y\}$.

Por el teorema anterior $F^{-1}(\Delta) = \Lambda M$ es una subvariedad diferenciable de $H_1(I, M)$. Más aún es una variedad Riemanniana con la métrica inducida de $H_1(I, M)$. ■

Si $\sigma \in \Lambda M$ entonces $\sigma \in H_1(I, M)$ y es tal que $\sigma(0) = \sigma(1)$, lo que implica que el plano tangente a ΛM está dado por

$$T_\sigma \Lambda M = \{\mathcal{X} \in H_1(I, TM) | \mathcal{X}(t) \in T_{\sigma(t)} M, \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}(1)\}.$$

CAPÍTULO 3

GEODÉSICAS Y FUNCIÓN ENERGÍA

El propósito del presente capítulo es expresar el problema de la existencia de geodésicas cerradas en una variedad Riemanniana M como un problema variacional. Veremos que las geodésicas cerradas, corresponden a los puntos críticos de la función energía. Demostraremos que esta función satisface la condición C de Palais Smale y que, por tanto, podemos aplicar los métodos usuales para demostrar la existencia de puntos críticos con energía positiva.

Empezaremos el capítulo con la condición de Palais-Smale y su consecuencia importante: el teorema de deformación.

CONDICIÓN DE PALAIS SMALE

Consideremos una función real diferenciable $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ definida en una variedad diferenciable de Hilbert \mathcal{M} , de dimensión finita o infinita.

De ahora en adelante supondremos:

- a) (Completez) \mathcal{M} es una variedad Riemanniana completa
- b) La función f es acotada por abajo en \mathcal{M} . Denotaremos por B la máxima cota inferior de f donde $B > -\infty$
- c) (Condición C o condición de Palais Smale) Si $\{X_n\}$ es una sucesión en \mathcal{M} tal que $|f(X_n)|$ es acotada y $\|df_{X_n}\| \rightarrow 0$ entonces $\{X_n\}$ tiene una sub-sucesión convergente, $X_{n_k} \rightarrow p$

3.1 DEFINICIÓN: Diremos que un punto p en \mathcal{M} es un punto crítico de f si la diferencial de f en p es igual a cero, $df_p = 0$. Los otros puntos son llamados puntos regulares. Un punto $c \in \mathbf{R}$ es un valor crítico si $f^{-1}(c)$ contiene al menos un punto crítico de f . Los otros puntos $c \in \mathbf{R}$ son llamados valores regulares ($f^{-1}(c)$ puede ser vacío). Denotaremos por \mathcal{M}_c ó $\mathcal{M}_c(f)$ la parte de \mathcal{M} abajo de c es decir $f^{-1}((-\infty, c])$. Denotaremos por C el conjunto de todos los puntos críticos de f y por C_c el conjunto $C \cap f^{-1}(c)$ de puntos críticos con valor c .

Observación El punto límite p del inciso c) arriba es un punto crítico de f , ya que, por continuidad $\|df_p\| = 0$

3.2 LEMA: C_c es compacto para toda $c \in \mathbf{R}$

Demostración: $C_c = f^{-1}(c) \cap C$. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de puntos críticos tales que $f(X_n) = c$, entonces $\{X_n\}$ tiene una sub-sucesión convergente por la condición C , pues $df_{X_n} = 0$. Esto implica que C_c es compacto por sucesiones, pero compacto por sucesiones implica compacto en espacios métricos. ■

3.3 DEFINICIÓN: El gradiente de $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ es un campo denotado por

∇f sobre \mathcal{M} tal que

$$\langle \nabla f(u), e \rangle = df(u).e$$

donde $df(u).e$ significa la diferencial de f aplicada a un vector e .

3.4 Observación: Dado un campo vectorial F en \mathcal{M} podemos encontrar una curva φ que pase por x en $t = 0$ para toda $x \in \mathcal{M}$, y tal que $F(\varphi(t)) = \varphi'(t)$, es decir, que sea curva integral de F [Mard].

Entonces dado el campo $-\nabla f$ y $x \in \mathcal{M}$ podemos encontrar $t \mapsto \varphi_t(x)$ curva integral de $-\nabla f$, para cada x en \mathcal{M} ; $\varphi_t(x)$ esta definida en $\alpha(x) < t < \beta(x)$ y $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = -\nabla f(\varphi_t(x))$ donde $\frac{d}{dt}f(\varphi_t(x)) = \langle \frac{df}{dt}(v), \frac{d}{dt}\varphi_t(x) \rangle = \langle \nabla f, -\nabla f \rangle = -\|\nabla f\|^2$, es decir $f(\varphi_t(x))$ es decreciente en t y como f está acotado por abajo por B tenemos que $f(\varphi_t(x))$ tiene un límite cuando $t \rightarrow \beta(x)$.

TEOREMA DE DEFORMACIÓN

3.5 LEMA: Si O es una vecindad del conjunto C_c de puntos críticos de f en el nivel c , entonces, existe una $\epsilon > 0$ tal que $\|\nabla f\|$ está acotado lejos del cero, (es decir, $0 < \delta < \|\nabla f\|$) en $f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus O$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ tal que $f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus O$ no tiene puntos críticos tal ϵ existe, pues de lo contrario existiría una sucesión $\{X_n\}$ de puntos críticos tal que $X_n \rightarrow p$ para $p \in f^{-1}(c) \setminus O$ pero esto implicaría que $df_p = 0$ contradiciendo el hecho de que p no esta en O .

Supongamos ahora que $\|\nabla f\|$ no está acotado lejos del cero en $f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus O$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus O$ tal que $\|\nabla f\| < \frac{1}{n}$. Por la condición C existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a un punto crítico p de f con $p \in f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus O$. Esto es una contradicción. ■

3.6 TEOREMA(de Deformación): Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ una función difer-

enciable, \mathcal{M} variedad Riemanniana completa, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ satisface la condición C y supongamos que φ_t la curva integral de $-\nabla f$ existe para toda $t \rightarrow \mathbf{R}$, sea U vecindad de C_c . Entonces existe una $\epsilon > 0$ tal que $\varphi_1(\mathcal{M}_{c+\epsilon} \setminus U) \subseteq \mathcal{M}_{c-\epsilon}$

Demostración: Dada cualquier vecindad U de C_c podemos construir una vecindad de la forma

$N_{\delta_1}(C_c) = \{x \in \mathcal{M} \mid \rho(x, C_c) < \delta_1\} \subset U$ donde ρ es la distancia de x al compacto C_c y donde $\delta_1 > 0$, consideremos δ_2 tal que $0 < \delta_2 < \delta_1$, por lo que tenemos $N_{\delta_2}(C_c) \subseteq N_{\delta_1}(C_c)$. Por el lema anterior, existe ϵ_1 y $\mu > 0$ tal que $0 < \mu \leq \|\nabla f\|$ para toda $p \in f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus N_{\delta_2}(C_c)$

Sea entonces $\epsilon \leq \min(\frac{1}{2}\mu^2, \frac{1}{2}\mu^2(\delta_1 - \delta_2))$

Por demostrar que $f(\varphi_1(\mathcal{M}_{c+\epsilon} \setminus U)) \subset (-\infty, c - \epsilon]$. Sea $p \in \mathcal{M}_{c+\epsilon} \setminus U$ es decir $p \in f^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \setminus U$. Es suficiente con tomar una $p \in f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \setminus U$ pues $f(\varphi_t)$ es decreciente y probar que $f(\varphi_1(p)) \leq c - \epsilon$.

Supongamos que $\varphi_t(p)$ no está en $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ para alguna $0 \leq t < 1$ entonces habríamos terminado, pues $f(\varphi_t(p))$ es decreciente. Entonces supongamos que $\varphi_t(p) \in f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ para toda $0 \leq t < 1$.

Como $\varphi_0(p) = p$ y $\frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) = -\|\nabla f_{\varphi_t(p)}\|^2$ entonces

$$\begin{aligned} f(\varphi_1(p)) &= f(\varphi_0(p)) + \int_0^1 -\|\nabla f_{\varphi_t(p)}\|^2 dt \\ &\leq c + \epsilon + \int_0^1 -\|\nabla f_{\varphi_t(p)}\|^2 dt \end{aligned}$$

Por demostrar que $\int_0^1 \|\nabla f_{\varphi_t(p)}\|^2 dt \geq 2\epsilon = \min\{\mu^2, \mu^2(\delta_1 - \delta_2)\}$

Caso 1: Si $\rho(\varphi_t(p), C_c) > \delta_2$ para toda $t \in [0, 1]$

si $\rho(\varphi_t(p), C_c) > \delta_2$ entonces tendríamos que $\|\nabla f_{\varphi_t(p)}\| \geq \mu$ para toda $0 \leq t \leq 1$ por el lema anterior, y esto implicaría que $\int_0^1 \|\nabla f_{\varphi_t(p)}\|^2 dt \geq \mu^2 \geq \min(\mu^2, \mu^2(\delta_1 - \delta_2)) = 2\epsilon$

Caso 2: Si $\rho(\varphi_t(p), C_c) \leq \delta_2$ para algún $t \in I$

Sea t_2 la primera t tal que $\rho(\varphi_{t_2}(p), C_c) \leq \delta_2$ como p no está en U entonces p no está en $N_{\delta_1}(C_c)$. Sea t_1 el último tiempo t tal que $\rho(\varphi_{t_1}(p), C_c) \geq \delta_1$

y $0 < t_1 < t_2 < 1$.

Tenemos que $\delta_1 \geq \rho(\varphi_{t_1}(p), C_c) \geq \delta_2$ en el intervalo $[t_1, t_2]$.

Notemos que $\rho(\varphi_{t_1}(p), C_c) \geq \delta_1$ y $\rho(\varphi_{t_2}(p), C_c) \leq \delta_2$, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_{t_1}(p), \varphi_{t_2}(p)) + \delta_2 &\geq \rho(\varphi_{t_1}(p), \varphi_{t_2}(p)) + \rho(\varphi_{t_2}(p), C_c) \\ &\geq \rho(\varphi_{t_1}(p), C_c) \geq \delta_1 \end{aligned}$$

entonces $\rho(\varphi_{t_1}(p), \varphi_{t_2}(p)) \geq (\delta_1 - \delta_2)$ lo que implica que $\int_0^1 \|\nabla f\|^2 dt \geq \mu^2 l(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}) \geq \mu^2(\delta_1 - \delta_2) \geq 2\epsilon$. ■

3.7 COROLARIO: Si c es un valor regular de f , entonces $\varphi_1(\mathcal{M}_{c+\epsilon}) \subseteq \mathcal{M}_{c-\epsilon}$ para ϵ pequeña.

Demostración: Tomamos $U = \emptyset = C_c$. ■

GEODESICAS Y FUNCIÓN ENERGÍA

3.8 DEFINICIÓN: Dado $\sigma : I \rightarrow M$ definimos $\mathcal{E} : H_1(I, M) \rightarrow \mathbf{R}$ la función energía de σ como

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt$$

y la función longitud de arco \mathcal{L} como

$$\mathcal{L}(\sigma) = \int_0^1 |\sigma'| dt$$

nótese que $\mathcal{L}(\sigma)^2 \leq 2\mathcal{E}(\sigma)$

3.9 PROPOSICIÓN: La función energía está bien definida, es decir

$\int_0^1 \langle \sigma', \sigma' \rangle dt < \infty$ para toda $\sigma \in H_1(I, M)$, y es diferenciable.

Demostración: Si consideramos el haz vectorial $\tau^0 : \chi^0(I, M) \rightarrow H_1(I, M)$ y la aplicación $\sigma \mapsto \sigma'$ sabemos que es una sección diferenciable de τ^0 por consiguiente si $\sigma' \in \chi^0(I, M) = \{\xi \in H_0(I, TM) \mid \tau_M \xi \in H_1(I, M)\}$ entonces σ' es cuadrado integrable es decir $\int_0^1 |\sigma'(t)|^2 dt < \infty$ por lo tanto la energía está bien definida. Además σ' en términos de cartas se ve como

$$\xi \mapsto \left(\xi, \frac{\nabla}{dt} \xi + \theta \xi \right) \subset H_1(\tau_c, U_c) \times H_0(\tau_c)$$

donde $(H_1(\tau_c, U_c), \Phi_c)$ es una carta de ΛM , $\Phi_c \xi = \sigma$ y $\theta \xi = (d_\xi^v \exp_c)^{-1} d_\xi^h \exp_c(c')$ (véase 2.18) entonces \mathcal{E} es diferenciable vista como función de $H_1(I, \mathbf{R}^n) \times H_0(I, \mathbf{R}^n)$. ■

3.9 PROPOSICIÓN: Si $\sigma \in \Lambda M$ entonces

$$d_\sigma \mathcal{E}(\xi) = \int_0^1 \langle \sigma', \frac{\nabla}{dt} \xi \rangle = \langle \sigma', \frac{\nabla}{dt} \xi \rangle_0$$

para todo $\xi \in T_\sigma \Lambda M$.

Demostración: Bastará probar esto para σ y ξ diferenciables.

Como $\xi \in T_\sigma \Lambda M$ entonces ξ es un campo vectorial a lo largo de σ con $\xi(0) = \xi(1)$. Sea $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Lambda M$ una curva tal que $\varphi(0) = \sigma$ y $\varphi'(0) = \xi$.

Sea $\tilde{\varphi} : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$, $\tilde{\varphi}(s, t) := \varphi(s)(t)$.

$$d_\sigma \mathcal{E}(\xi) = \frac{d}{ds} \mathcal{E}\varphi|_{s=0}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{E}\varphi &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{2} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_\sigma \mathcal{E}(\xi) = \frac{d}{ds} \mathcal{E}\varphi|_{s=0} = \int_0^1 \left\langle \frac{\nabla}{dt} \xi(t), \sigma'(t) \right\rangle dt$ ■

3.10 TEOREMA: $\sigma \in \Lambda M$ es una geodésica si y solo si σ es un punto crítico de $\mathcal{E} : \Lambda M \rightarrow \mathbf{R}$.

Demostración: Supongamos que σ es una geodésica, entonces $\sigma'(0) = \sigma'(1)$ y $\frac{\nabla}{dt} \sigma' = 0$ por lo tanto $d_\sigma \mathcal{E}(\xi) = 0$.

Supongamos ahora que $d_\sigma \mathcal{E} = 0$, definamos $\zeta(t)$ y $\eta(t)$ H_1 -campos vectoriales a lo largo de $\sigma(t)$ tales que $\frac{\nabla}{dt} \zeta(t) = \sigma'(t)$, $\zeta(0) = 0$, $\frac{\nabla}{dt} \xi(t) = 0$, $\xi(1) = \zeta(1)$. y consideremos $\eta(t) = \zeta(t) - t\xi(t)$ entonces se cumple que $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 0$ y $\frac{\nabla}{dt} \eta(t) = \frac{\nabla}{dt} \zeta(t) - \xi(t)$ entonces

$\langle \xi, \sigma' - \xi \rangle_0 = \langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \eta(t) \rangle_0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle dt = 0$ y además $0 = d_\sigma \mathcal{E}(\eta) = \langle \sigma', \frac{\nabla}{dt} \eta \rangle_0 = \langle \sigma', \sigma' - \xi \rangle_0$ por lo anterior. Y como $\|\sigma' - \xi\|_0^2 = 0$ tenemos que $\sigma' = \xi$ está en H_1 por lo tanto

$$\frac{\nabla \sigma'}{dt} = \frac{\nabla}{dt} \xi(t) = 0$$

Ahora como para todo, $\xi \in T_\sigma \Lambda M$,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 \left\langle \frac{\nabla}{dt} \xi, \sigma' \right\rangle dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \xi, \sigma' \rangle dt - \int_0^1 \left\langle \xi, \frac{\nabla}{dt} \sigma' \right\rangle dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\nabla}{dt} \langle \xi, \sigma' \rangle dt \\
 &= \langle \xi(0), \sigma'(1) - \sigma'(0) \rangle
 \end{aligned}$$

De aqui que $\sigma'(1) = \sigma'(0)$. Es decir, σ es una geodésica cerrada. ■

En el teorema anterior se hace una caracterización de las geodésicas cerradas como puntos críticos de la función energía (las geodésicas son la solución de un problema variacional), más aún la energía satisface la condición de Palais Smale en ΛM .

3.11 *LEMA* : Sea $c \in H_1(I, M)$ entonces

$$d_M^2(c(t_0), c(t_1)) \leq |t_1 - t_0| 2\mathcal{E}(c)$$

Demostración: Consideremos la siguiente función η dada por

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq t_0 ; \\ 1, & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 ; \\ 0, & \text{si } t_1 \leq t \leq 1 ; \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 d_M^2(c(t_0), c(t_1)) &\leq \left(\int_{t_0}^{t_1} |c'(t)| dt \right)^2 \\
 &= \left(\int_0^1 \eta(t) |c'(t)| dt \right)^2 \\
 &\leq \int_0^1 |\eta| dt \int_0^1 |c'(t)|^2 dt \\
 &= |t_1 - t_0| 2\mathcal{E}(c)
 \end{aligned}$$

3.12 **PROPOSICIÓN:** Sean $c, c_1 \in \Lambda M$ entonces

$$d_\infty(c, c_1) \leq 2d_{\Lambda M}(c, c_1)$$

donde $d_{\Lambda M}$ es la distancia en ΛM derivada de la métrica Riemanniana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1(I, M)}.$$

Demostración: Sea $f(s)$, $0 \leq s \leq 1$ una curva diferenciable en ΛM tal que $f(0) = c$ y $f(1) = c_1$, supondremos que c y c_1 están en la misma componente conexa, pues de lo contrario la distancia sería ∞ . Sea $\tilde{f} : I \times I \rightarrow M$ dado por $(t, s) \mapsto f(s)t$. Para un punto fijo $t = t_0$ $f(s)t_0$ es una curva diferenciable, lo que implica que el mapeo $c \mapsto c(t)$ de $\Lambda M \rightarrow M$ es diferenciable.

Elegimos una t_0 tal que $d_\infty(c, c_1) = d_M(c(t_0), c_1(t_0))$. Entonces

$$\begin{aligned} d_\infty^2(c, c_1) &= d_M^2(c(t_0), c_1(t_0)) \leq \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(t_0, s) \right| ds \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 \sup_t \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(t, s) \right| ds \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \|f'(s)\|_\infty ds \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 2\|f'(s)\|_1 ds \right)^2 \\ &= (2\mathcal{L}(f))^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_\infty^2 \leq 4d_{\Lambda M}^2(c, c_1)$ ■

3.13 **PROPOSICIÓN:** Sea $c, c_1 \in \Lambda M$. Entonces

$$|\sqrt{2\mathcal{E}(c)} - \sqrt{2\mathcal{E}(c_1)}| \leq d_{\Lambda M}(c, c_1)$$

Demostración: Sea $f : I \rightarrow \Lambda M$ una curva diferenciable, tal que $f(0) = c$ y $f(1) = c_1$, y sea $\tilde{f} : I \times I \rightarrow M$ dado por $\tilde{f}(s, t) = f(s)(t)$.

Consideremos primero

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{ds} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\rangle dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\rangle dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} 2 \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\rangle dt \\
 &\leq \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left\| \frac{df}{dt} \right\|_1
 \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq \int_0^1 \left\| \frac{df}{dt} \right\|_1 ds$$

por lo tanto

$$\left[\left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(s, t) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \leq d_{\Lambda M}(c, c_1)$$

■

3.14 PROPOSICIÓN: La inclusión $\Lambda M \hookrightarrow C^0(\mathbf{S}, M)$ es continua y es compacta (es decir, la imagen de un conjunto acotado en ΛM tiene cerradura compacta o bien que es relativamente compacto), donde $C^0(\mathbf{S}, M)$ denota el subespacio de curvas cerradas de $C^0(I, M)$, es decir, de funciones continuas del círculo \mathbf{S} en M .

Demostración: Por la proposición 3.12 y 2.4 la inclusión es continua. Sea $k \subset \Lambda M$ acotado, por la proposición 3.12 $k \subset C^0(\mathbf{S}, M)$ también es acotado. Por demostrar que $k \subset C^0(\mathbf{S}, M)$ es equicontinuo, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t_0 - t_1| < \delta(\epsilon)$ entonces $d_M(c(t_0), c(t_1)) < \epsilon$ para

toda $c \in k$. Consideremos un $c_0 \in k$ fijo, entonces, existe $M_1 > 0$ tal que $d_{\Lambda M}(c, c_0) < M_1$ para toda $c \in \Lambda k$. Pero por la proposición anterior $|\sqrt{2\mathcal{E}(c)} - \sqrt{2\mathcal{E}(c_0)}| \leq d_{\Lambda M}(c, c_0) < M_1$ lo que implica que existe un M_2 tal que $\mathcal{E}|_k < M_2$, pero $d_M^2(c(t_0), c(t_1)) \leq |t_1 - t_0|2\mathcal{E}(c) < |t_1 - t_0|2M_2$ entonces consideremos $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2M_2}$ por lo tanto $d_M^2(c(t_0), c(t_1)) \leq |t_1 - t_0|2M_2 < \frac{\epsilon}{2M_2}2M_2 = \epsilon$ es decir k es equicontinua. Por el teorema de Arzela-Azcoli, toda sucesión en $k \subset \Lambda M$ tiene una subsucesión convergente, si y solo si la cerradura de k , $Cl(k)$, es compacto por sucesiones si y solo si $Cl(k)$ es compacta. ■

3.15 TEOREMA: ΛM es un espacio métrico completo con respecto a la métrica d_Λ

Demostración: Sea $\{C_m\}$ una sucesión de Cauchy en $(\Lambda M, d_{\Lambda M})$, entonces, para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d_{\Lambda M}(C_m, C_n) < \epsilon$ tomando $n > m = N$ y $M = \max\{d_{\Lambda M}(C_1, C_m), \dots, d_{\Lambda M}(C_{m-1}, C_m), \epsilon\}$ tenemos que $d_{\Lambda M}(C_n, C_m) < M$ de donde se deduce que $\{C_m\}$ es acotada, por la proposición anterior, la inclusión de esta sucesión al espacio completo $C^0(\mathbb{S}, M)$ es relativamente compacto, lo que implica que existe $c_0 \in C^0(\mathbb{S}, M)$, tal que $C_m \rightarrow c_0$. Por la proposición 2.5 c_0 puede ser aproximable por una curva $c \in C^\infty(\mathbb{S}, M)$ por lo que podemos suponer que para m suficientemente grande $\{C_m\} \subset \Phi_c(\dot{U}_c)$ en una carta que contiene a c , entonces, por 2.20, la sucesión $\Phi_c^{-1}(C_m) = \xi_m \subset H_1(\tau_c, U_c) \cong H_1(\pi_{\mathbb{R}^n})$ es de Cauchy en $H_1(\tau_c, U_c)$, pero $H_1(\tau_c)$ es completo. Por lo tanto ξ_m converge, lo que implica que $\{C_m\}$ converge. ■

3.16 TEOREMA: La energía \mathcal{E} satisface la condición C en ΛM si M es compacta.

Demostración: Sea $\{C_m\}$ una sucesión en ΛM tal que $\{\mathcal{E}(C_m)\}$ es acotada y $\|\nabla \mathcal{E}(C_m)\|_1 \rightarrow 0$. $\{C_m\}$ es de Cauchy en $C^0(\mathbb{S}, M)$, por la proposición 3.11 y usando el hecho

que M es compacta, tenemos que existen k, \bar{k} tales que

$$\begin{aligned} d_\infty(C_m, C_l) &= d_M(C_m(t_m^l), C_l(t_m^l)) \\ &\leq d_M(C_m(t_m^l), C_m(0)) + d_M(C_m(0), C_l(0)) + d(C_l(0), C_l(t_m^l)) \\ &\leq 2\mathcal{E}(C_m) + k + 2\mathcal{E}(C_l) \leq \bar{k} \end{aligned}$$

Como $C^0(\mathbf{S}, M)$ es completo (demostración análoga a la de 1.11) $\{C_m\}$ converge a $c_0 \in C^0(\mathbf{S}, M)$ y como en el teorema anterior, podemos suponer que para una m suficientemente grande $\{C_m\}$ está en la imagen de una carta

$$\Phi_c : H_1(\tau_c, U_c) \longrightarrow H_1(I, M)$$

es decir, que existe $\xi_m \in H_1(\tau_c, U_c)$ tal que $c_m = \exp_c \xi_m$, $m = 1, 2, \dots$

Como $H_1(\tau_c)$ es completo es suficiente probar que ξ_m tiene una subsecución, que denotaremos nuevamente por ξ_m que es $\|\cdot\|_1$ -Cauchy. Es decir

$$\|\xi_n - \xi_m\|_1 \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

tenemos que

$$\|\xi_n - \xi_m\|_1^2 = \|\xi_n(0) - \xi_m(0)\|_M^2 + \left\| \frac{\nabla}{dt} \xi_n - \frac{\nabla}{dt} \xi_m \right\|_0^2$$

Pero $\|\xi_n - \xi_m\|_\infty \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$ (1)
entonces en particular tenemos que $\|\xi_n(0) - \xi_m(0)\|_0 \rightarrow 0$ por consiguiente es suficiente probar que $\left\| \frac{\nabla}{dt} \xi_n - \frac{\nabla}{dt} \xi_m \right\|_0 \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$.

Ahora bien por, A.6, $\xi'_m = \frac{\nabla}{dt} \xi_m + \Gamma c'$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla}{dt} \xi_m - \frac{\nabla}{dt} \xi_n \right\|_0^2 &= \|\xi'_m - \xi'_n\|_0^2 \\ &= \langle \xi'_m, \xi'_m - \xi'_n \rangle_0 + \langle \xi'_n, \xi'_n - \xi'_m \rangle_0 \end{aligned}$$

Pero, por [Klin, 1.9.8]

$$\begin{aligned} \langle \xi'_m, \xi'_m - \xi'_n \rangle_0 &\doteq \langle d_{\xi_m} \exp_c \xi'_m, d_{\xi_m}^v \exp_c(\xi'_m - \xi'_n) \rangle_0 \\ &\doteq \langle C'_m, \frac{\nabla}{dt}(\eta_m - \eta_n) \rangle_0 \\ &= d_{C_m} \mathcal{E}(\eta_m - \eta_n) \end{aligned}$$

donde $\eta_m = d_{\xi_m}^v \exp_c \xi_m$ y $\eta_n = d_{\xi_n}^v \exp_c \xi_n$ y usando el hecho que que d_{ξ_m} varia diferenciablemente con respecto a ξ_m .

Ahora bien,

$$|d_{C_m} \mathcal{E}(\eta_m - \eta_n)| \leq \|\nabla \mathcal{E}(C_m)\|_1 \|\eta_m - \eta_n\|_1$$

pero $\|\nabla \mathcal{E}(C_m)\|_1 \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ y $\|\eta_m - \eta_n\|_1$ está acotado, ya que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla}{dt} \eta_m - \frac{\nabla}{dt} \eta_n \right\|_0 &\doteq \|C'_m - C'_n\|_0 \leq \|C'_m\|_0 + \|C'_n\|_0 \\ &= \mathcal{L}(C'_m) + \mathcal{L}(C'_n) \leq \sqrt{2}(\sqrt{\mathcal{E}(C_m)} + \sqrt{\mathcal{E}(C_n)}) \end{aligned}$$

■

3.17 TEOREMA: Sea $\mathcal{E} : \Lambda M \rightarrow \mathbf{R}$ la función energía y sea φ_s la curva integral de $-\nabla \mathcal{E}$. Entonces φ_s está definido para toda $s \geq 0$.

Demostración: Supongamos que existe $c \in \Lambda M$ tal que $\varphi_s(c)$ esta definido para $s < \eta < \infty$ sea $\{s_m\}$ una sucesión de numeros reales en $[0, \eta)$ tal que el $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \eta$ entonces, afirmamos que $\{\varphi_{s_m}(c)\}$ es una sucesión de Cauchy. Ya que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{s_m}(c) - \varphi_{s_n}(c)\|_1^2 &\leq \left(\int_{s_n}^{s_m} \left\| \frac{d\varphi_s}{ds} c \right\|_1 ds \right)^2 \\ &= \left(\int_{s_n}^{s_m} \| -\nabla \mathcal{E}(\varphi_s c) \|_1 ds \right)^2 \\ &\leq \left| \int_{s_n}^{s_m} -\|\nabla \mathcal{E}(\varphi_s c)\|_1^2 ds \right| |s_m - s_n| \\ &\leq \left| \int_{s_n}^{s_m} \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\varphi_s c) ds \right| |s_m - s_n| \\ &= |\mathcal{E}(\varphi_{s_m} c) - \mathcal{E}(\varphi_{s_n} c)| |s_m - s_n| \\ &\leq \mathcal{E}(c) |s_m - s_n| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$ Por lo que $\{\varphi_{s_m} c\}$ es una sucesión de Cauchy, pero ΛM es completo por lo tanto converge, de donde φ_{s_c} está definido en $[0, \eta + \epsilon)$ para alguna $\epsilon > 0$ ■

CAPÍTULO 4

EXISTENCIA DE GEODÉSICAS CERRADAS

En este capítulo demostraremos el resultado central de la tesis que es el siguiente.

4.1 TEOREMA: En toda variedad Riemanniana compacta existe una geodésica cerrada.

Reduciremos la demostración de este resultado a la existencia de un elemento no trivial en la clase de homotopía de la pareja $(\Lambda M, \Lambda^0 M)$ donde M es una variedad Riemanniana compacta, ΛM es el conjunto de H_1 -curvas cerradas en M y $\Lambda^0 M := \mathcal{E}^{-1}(0)$ es el conjunto de curvas constantes en M .

4.2 **DEFINICIONES:** Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio topológico de X . Entonces decimos que (X, A) es una *pareja de espacios topológicos*.

Sean (X, A) y (Y, B) dos parejas de espacios topológicos, decimos que $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una *aplicación de parejas*, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y es tal que $f(A) \subset B$.

Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ dos aplicaciones de parejas, decimos que f es *homotópica a g* , $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, si existe una homotopía de parejas

$F : (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ y tal que $F(-, t) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Esto implica que f es homotópico a g y que $f|_A$ es homotópico a $g|_A$.

Denotaremos a la clase de homotopía de f como

$$[f] = \{g \mid f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)\}$$

Decimos que $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es *homotópicamente trivial o nul-homotópica* si $f \simeq h$ donde $h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ y es tal que $h(X) \subset B$

4.3 **PROPOSICIÓN:** Sea (X, A) una pareja de espacios con X compacto y $f : (X, A) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$ una aplicación de parejas. Entonces

- i) $K_f := \inf_{g \in [f]} \max_{x \in X} \mathcal{E}(g(x))$ es un valor crítico de \mathcal{E}
- ii) $K_f > 0$ si y sólo si f no es homotópicamente trivial.

Demostración:

i) Supongamos que K_f es un valor regular, entonces, por 3.6 existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi_1(\Lambda^{K_f + \epsilon} M) \subset \Lambda^{K_f - \epsilon} M$ donde $\Lambda^{K_f} M = \mathcal{E}^{-1}(-\infty, K_f]$. Además existe $f' \in [f]$ tal que $\max \mathcal{E}|_{f'} < K_f + \epsilon$ (por ser ínfimo) entonces $\varphi_1(f'(x)) \subset \Lambda^{K_f - \epsilon} M$ para toda $x \in X$

Definamos $F' : (X, A) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$, $F'(x) = \varphi_1(f'(x))$.

Sea $H : X \times I \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$ una homotopía de parejas dada por $H(x, s) = \varphi_s(f'(x))$ nótese $H(x, 1) = \varphi_1(f'(x)) = F'(x)$ y que $H(x, 0) = \varphi_0(f'(x)) =$

$f'(x)$ lo que implica que $F' \simeq f' \simeq f$ por lo que $F' \in [f]$ y la $Im(F'(x)) \subset \Lambda^{K_f - \epsilon} M$ (contradicción)

Para la demostración de *ii*) es necesario el siguiente lema.

4.4 **LEMA:** Si M es una variedad Riemanniana compacta entonces existe $\rho > 0$ tal que la retracción

$$r : \Lambda^\rho M \longrightarrow \Lambda^0 M \subset \Lambda M$$

$$c \longmapsto c(0)$$

es homotópica la inclusión $\Lambda^\rho M \subset \Lambda M$ en Λ mediante una homotopía que deja fijo a $\Lambda^0 M$

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que, para toda $p \in M$ la exponencial

$$\exp_p : B_\delta(0) \longrightarrow M$$

es un difeomorfismo sobre su imagen [Doc III,3.7].

Sea ρ tal que $0 < \rho < 2\delta^2$. Si $c \in \Lambda^\rho M$ entonces

$$2\mathcal{E}(c) < 4\delta^2$$

y como $\mathcal{L}(c) \leq \sqrt{2\mathcal{E}(c)}$ tenemos $\mathcal{L}(c) < 2\delta$, entonces $c \in B_\delta(c(0)) := \exp_{c(0)} B_\delta(0)$.

Consideremos la siguiente homotopía

$$H : \Lambda^\rho M \times I \longrightarrow \Lambda M$$

dada por $H(c, s)(t) := \exp_{c(0)}(s \exp_{c(0)}^{-1} c(t))$, H continua pues \exp lo es y $H(c, 0)(t) = c(0)$, $H(c, 1) = c(t)$ por lo tanto H es la homotopía buscada. ■

Demostración del inciso *ii*) de la proposición 4.3

Supongamos que existe $g \in [f]$ con $g(X) \subset \Lambda^0 M$ (es decir que f es homotópicamente trivial) entonces $\mathcal{E}g(X) = 0$ y por lo tanto, $K_f = 0$.

Si $K_f = 0$ entonces existe $g \in [f]$ con $g(X) \subset \Lambda^\rho M$, donde ρ es como en el lema 4.4 pero dicho lema implica que la composición

$$(X, A) \xrightarrow{g} (\Lambda^\rho M, \Lambda^0 M) \xrightarrow{\tau} (\Lambda^0 M, \Lambda^0 M) \subset (\Lambda M, \Lambda M)$$

es homotópica a g lo que implica que $[g] = [f]$ es trivial. ■

4.5 PROPOSICIÓN: Si M es una variedad Riemanniana compacta, entonces para alguna $0 \leq k < \dim M$, existe una aplicación no homotópicamente

$$f : (\mathbf{B}^k, \partial\mathbf{B}^k) \longrightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$$

donde $\mathbf{B}^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$

Demostración:

Caso I: $\pi_1(M) \neq 0$

Si $\pi_1(M) \neq 0$ entonces existe un $c_0 \in \Lambda M$ no nulhomotópica, por lo que su componente conexa en ΛM no intersecta a $\Lambda^0 M$. Tomemos $k = 0$, es decir $\mathbf{B}^k = q$ un punto. f como la función cuya imagen es el lazo c_0 .

Caso II: $\pi_1(M) = 0$

Como M es una variedad cerrada, existe k , $0 < k < \dim M$ tal que $\pi_{k+1} M$ es no trivial; Supongamos que $\pi_k M = 0$ para toda $k \leq n = \dim M$, entonces M es n -conexa entonces por [Spanier, cap7,sec5,2]) $0 = \pi_k M \cong \mathbf{Z}$ donde \mathbf{Z} son los números enteros. (contradicción) por lo tanto,

existe $f : \mathbf{S}^{k+1} \longrightarrow M$ tal que f es no nulhomotópica, podemos suponer [Bróker 14.8, 12.9] que f es una función diferenciable. (donde \mathbf{S}^{k+1} denota la $k+1$ -esfera) Entonces dada f le asociaremos una...

$$F = F(f) : (\mathbf{B}^k, \partial\mathbf{B}^k) \longrightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$$

de la siguiente manera:

Definiremos primero una aplicación

$$\alpha : (\mathbf{B}^k, \partial\mathbf{B}^k) \longrightarrow (\Lambda \mathbf{S}^{k+1}, \Lambda^0 \mathbf{S}^{k+1})$$

donde $\Lambda^0 \mathbf{S}^{k+1}$ denota las funciones constantes en \mathbf{S}^{k+1} . α , se define como

$$\alpha(x_1, \dots, x_k)(t) = \alpha_x(t) = (x, \rho(x) \cos 2\pi t, \rho(x) \sin 2\pi t)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_k)$, $\rho(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$. De tal manera que podemos definir F como

$$F(x) := f \circ \alpha_x$$

$F(x)$ es una curva continua, cerrada, diferenciable en M pues tanto α como f lo son y de hecho $F(\partial \mathbf{B}^k) \subset \Lambda^0 M$.

Inversamente, dada $F : (\mathbf{B}^k, \partial \mathbf{B}^k) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$ podemos determinar $f : \mathbf{S}^{k+1} \rightarrow M$ como $f(\alpha_x) = F(x)$.

Por demostrar que F no es homotópicamente trivial.

Supongamos que existe H , una homotopía

$$H : (\mathbf{B}^k, \partial \mathbf{B}^k) \times I \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$$

tal que $H(x, 0) = F(x)$ y $H(\mathbf{B}^k, \{1\}) = \Lambda^0 M$ y sea

$$G : \mathbf{S}^{k+1} \times I \rightarrow M$$

dada por $G(y, s) = H(x, s)(t)$, donde si $y = (x_1, x_2, \dots, x_{k+2})$ x , será la proyección de y sobre \mathbf{R}^k es decir $x = (x_1, \dots, x_k)$ entonces

$$G(y, 0) = H(x, 0)(t) = F(x)(t) = f(\alpha(x)) \quad y$$

$$G(y, 1) = H(x, 1)(t) = cte, \text{ en } C_y.$$

Esto implica que f es homotópica a una función f_1 que es constante en las curvas α .

Sea $\Phi : \mathbf{B}^k \times I \rightarrow \mathbf{B}^k$ dado por $\Phi(x, s) = sx$ y

sea $\Psi : \mathbf{S}^{k+1} \times I \rightarrow M$ dado por $\Psi(y, s) = f_1(1, 0, \Phi(x, s))$ donde x es nuevamente la proyección de y sobre \mathbf{R}^k .

Entonces

$$\Psi(y, 0) = f_1(1, 0, \Phi(x, 0)) = f_1(1, 0, \bar{0}) = cte.$$

$$Y \Psi(y, 1) = f_1(1, 0, \Phi(x, 1)) = f_1(1, 0, x)$$

lo que implica que $f \simeq f_1 \simeq cte$ por lo tanto f es nulhomotópica. (contradicción).

■

4.6 Demostración del teorema 4.1:

Por la proposición 4.6 si M es una variedad Riemanniana compacta existe una función no homotópicamente trivial

$$f : (\mathbf{B}^k, \partial \mathbf{B}^k) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$$

entonces por la proposición 4.3, $K_f > 0$ y por lo tanto, existe un valor crítico de \mathcal{E} distinto de cero, es decir existe una geodésica cerrada no trivial en M ■

CONEXIONES

Consideremos un caso muy particular, S una subvariedad de \mathbf{R}^n y sea $c : I \rightarrow S$ $I = [0, 1]$, una curva parametrizada en \mathbf{R}^n , si $V : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ es un campo de vectores tangentes a lo largo de la curva c , entonces el vector $\frac{dV}{dt}(t)$, $t \in I$ no pertenece en general a $T_{c(t)}S$, esto querrá decir en general que la derivada de un campo vectorial no es una noción intrínseca de la superficie, entonces si consideramos en vez de la derivada usual $\frac{dV}{dt}$ la llamada derivada covariante del campo V a lo largo de la curva c , $\frac{\nabla}{dt}V$, que es la proyección ortogonal de $\frac{dV}{dt}$ sobre $T_{c(t)}S$, tendremos una “derivación” del campo V como “vista desde S ”.

Para definir la derivación covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva $c \in M$ en una variedad Riemanniana, M sera suficiente con definir la noción de conexión en el haz TM sobre M , que en el caso particular mencionado arriba resulta ser, esencialmente, la proyección ortogonal sobre T_pS .

A.1 Sea M una variedad Riemanniana y sea $\tau_M : TM \rightarrow M$ el haz tangente sobre M .

Dado $x \in M$ consideremos

$$\begin{array}{ccccc}
 T_x M \times T_x M & \equiv & TT_x M & \subset & TTM \\
 \searrow \text{pr}_1 & & \downarrow & & \downarrow \tau_{TM} \\
 & & T_x M & \hookrightarrow & TM
 \end{array}$$

donde $TT_x M$ es el haz de vectores tangentes en $T_x M$.

Denotaremos por

$$\begin{array}{c}
 TM \times_M TM := \cup_{x \in M} (T_x M \times T_x M) \equiv \cup_{x \in M} TT_x M \\
 \downarrow \text{pr}_1 \\
 TM
 \end{array}$$

Este es un haz vectorial, el haz vectorial inducido por τ_M

$$\begin{array}{ccccc}
 TM \times_M TM & = & \tau_M^* TM & \longrightarrow & TM \\
 \searrow \text{pr}_1 & & \downarrow & \xrightarrow{\tau_M} & \downarrow \tau_M \\
 & & TM & & M
 \end{array}$$

Y se llama el haz de vectores tangentes a lo largo de las fibras. La inclusión en TTM es un morfismo de haces vectoriales. ya que:

$$\begin{array}{ccccc}
 TM \times_M TM & \xrightarrow{\text{pr}_2} & TTM & \xrightarrow{d\tau_M} & TTM \\
 \searrow \text{pr}_1 & & \downarrow \tau_{TM} & & \downarrow \tau_M \\
 & & TM & \xrightarrow{\tau_M} & M
 \end{array}$$

conmuta y, por la propiedad universal de las identificaciones, i es continua.

Quisieramos tener una "proyección"

$$\begin{array}{ccc}
 \beta : TTM & \longrightarrow & TM \times_M TM \\
 \searrow \tau_{TM} & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & & TM
 \end{array}$$

con $\beta i = id$

La primera componente automáticamente es τ_{TM} . Lo que nos lleva a la siguiente definición.

A.2 **DEFINICIÓN:** Una conexión K en $\tau_M : TM \rightarrow M$ es un morfismo de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{K} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{\tau_M} & M \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \tau_{TM} \\ \leftarrow \tau_M \end{array}$$

tal que $K|_{TM \times_M TM} = pr_2$.

A.3 **DEFINICIÓN:** Una sucesión de morfismos de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 & \xrightarrow{g} & E_3 \\ \pi_1 \searrow & & \downarrow \pi_2 & & \swarrow \pi_3 \\ & & X & & \end{array}$$

Se llama *sucesión exacta corta* si para toda $x \in X$ la sucesión

$$0 \rightarrow E_{1,x} \xrightarrow{f_x} E_{2,x} \xrightarrow{g_x} E_{3,x} \rightarrow 0$$

es exacta, es decir $\ker g_x = \operatorname{im} f_x$.

A.4 **PROPOSICIÓN:** Sea $E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3$ una sucesión exacta corta, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- Existe un morfismo de haces vectoriales $\tilde{g} : E_3 \rightarrow E_2$ sobre X tal que $\tilde{g}g = id_{E_3}$
- Existe un morfismo de haces vectoriales $\tilde{f} : E_2 \rightarrow E_1$ sobre X tal que $\tilde{f}f = id_{E_1}$
- Existe un isomorfismo $F : E_1 \oplus E_3 \rightarrow E_2$.

Demostración: supongamos que existe $\tilde{g} : E_3 \rightarrow E_2$ tal que $\tilde{g}g = id$

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 & \xrightarrow{g} & E_3 \\ \pi_1 \searrow & & \downarrow \pi_2 & & \swarrow \pi_3 \\ & & X & & \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \tilde{g} \\ \leftarrow \tilde{g} \end{array}$$

Definamos

$$\begin{array}{ccc} \Phi : E_1 \oplus E_3 & \longrightarrow & E_2 \\ \searrow & & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

dado por $\Phi = f \oplus \tilde{g}$ que es continua pues f y \tilde{g} lo son.

Φ resulta ser isomorfismo pues

- i) Φ es monomorfismo. Demostración: Supongamos que $\Phi(a, c) = 0$ entonces $f(a) + \tilde{g}(c) = 0$ lo que implica que $g(f(a) + \tilde{g}(c)) = 0$ pero $g(f(a)) = 0$ pues es exacta en cada fibra, por lo que $g\tilde{g}(c) = c = 0$ entonces $f(a) = 0$ pero f es monomorfismo en cada fibra por lo tanto $a = 0$
- ii) Φ es epimorfismo. Demostración: Sea $b \in E_2$ y consideremos $b - \tilde{g}g(b) \in E_2$ entonces $g(b - \tilde{g}g(b)) = g(b) - g\tilde{g}g(b) = 0$ por lo tanto $b - \tilde{g}g(b) \in \text{Nuc}g = \text{im}f$ lo que implica que existe $a \in E_1$ tal que $f(a) = b - \tilde{g}g(b)$ Consideremos entonces el siguiente elemento $(a, g(b)) \in E_1 \oplus E_3$

$$\begin{aligned}\Phi(a, g(b)) &= f(a) + \tilde{g}g(b) \\ &= b - \tilde{g}g(b) + \tilde{g}g(b) = b\end{aligned}$$

por lo tanto Φ es suprayectiva.

De esta manera definimos $\tilde{f} : E_2 \rightarrow E_1$ como $\text{pr}_1 \circ \Phi^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$ y satisface que $\tilde{f} \circ f(b) = \text{id}$ pues $\Phi(b, 0) = f(b)$ lo que implica que $\tilde{f}(f(b)) = \text{pr}_1 \circ \Phi^{-1} \circ \Phi(b, 0) = \text{pr}_1(b, 0) = b$.

Supongamos ahora que existe $\tilde{f} : E_2 \rightarrow E_1$ tal que $\tilde{f}f = \text{id}_{E_1}$ entonces por demostrar que existe

$$F : E_1 \oplus E_3 \rightarrow E_2$$

donde F es un isomorfismo de haces vectoriales.

Demostración: si consideramos el siguiente diagrama conmutativo de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{F'} & E_1 \times E_3 \\ \cdot E_1 \oplus E_3 \longrightarrow & & \downarrow \pi_1 \times \pi_2 \\ & \Delta & X \times X \\ & & \uparrow \end{array}$$

donde Δ es la diagonal dada por $x \mapsto (x, x)$

si definimos $F' : E_2 \rightarrow E_1 \times E_3$ continua y π_2 de tal manera que hagan conmutar el diagrama; es decir $(\pi_1 \times \pi_2) \circ F' = \Delta \circ \pi_2$ entonces por la propiedad universal de las identificaciones, existe $F : E_2 \rightarrow E_1 \oplus E_3$ continua que hace conmutar los correspondientes triángulos.

Sea $F' : E_2 \longrightarrow E_1 \times E_3$ dada por $F'(b) = (\tilde{f}(b), g(b))$; F' es continua, pues por hipotesis tanto \tilde{f} como g son continuas. Más áun $(\pi_1 \times \pi_3) \circ F'(b) = \pi_1 \times \pi_3(\tilde{f}(b), g(b)) = (\pi_2(b), \pi_2(b)) = \Delta\pi_2(b)$ por lo tanto existe $F : E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_3$ que es continua.

Afirmación F' es un isomorfismo en cada fibra

i F' es un epimorfismo.

Supongamos que $F'(b) = (\tilde{f}(b), g(b)) = (0, 0)$ entonces $g(b) = 0$ lo que implica que existe una $a \in E_1$ tal que $f(a) = b$ entonces $\tilde{f} \circ f(a) = \tilde{f}(b) = 0$ por lo tanto $a = 0$ concluyendo así que $b = 0$

ii) F' es un epimorfismo.

sea $(a, c) \in E_1 \times E_3$ y sea $b' \in E_2$ tal que $g(b') = c$ y sea $b = f(a) + b' - f \circ \tilde{f}(b')$ entonces $F'(b) = (\tilde{f}(b), g(b)) = (f f(a) + b' - f \circ \tilde{f}(b'), g(f(a) + b' - f \circ \tilde{f}(b')))$ Por lo tanto F' es epimorfismo. y ademas $F'^{-1}(a, c) = f(a) + b' - f \circ \tilde{f}(b')$ donde b es tal que $g(b) = c$ que es continua. Como F' es epimorfismo en cada fibra y F' es continua entonces F es isomorfismo.

Definamos $\tilde{g} : E_3 \longrightarrow E_2$ como la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccc} E_3 & \xrightarrow{i} & E_1 \oplus E_3 & \xrightarrow{F'^{-1}} & E_2 \\ & & & \searrow & \swarrow \\ & & & X & \end{array}$$

$\tilde{g} = F'^{-1} \circ i$ es continua yq que F'^{-1} es continua e i es continua, pues por la propiedad universal de las identificaciones

$$\begin{array}{ccc} E_3 & \xrightarrow{\iota} & E_1 \times E_3 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ E_1 \oplus E_3 & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi_1 \times \pi_3 \\ \downarrow \end{array}$$

$\iota : E_3 \longrightarrow E_1 \oplus E_3$ dada por $\iota = (\sigma_0 \pi_3, id_{E_3})$ donde σ_0 es la sección 0 de π_3 , es continua y $\pi_1 \times \pi_3 \circ \iota(c) = \pi_1 \times \pi_3(\sigma_0 \pi_3(c), c) = \pi_1 \sigma_0 \pi_3(c), \pi_3(c) = (\pi_3, \pi_3) = \Delta\pi_3(c)$ por lo tanto ι es continua. así \tilde{g} definida de esta manera es continua más áun $g \circ \tilde{g}(c) = g \circ (F'^{-1}(0, c)) = g(b' - f\tilde{f}(b')) = c$ ■

A.5 PROPOSICIÓN: La sucesión

$$\begin{array}{ccccc}
 TM \times TM & \xrightarrow{i} & TTM & \xrightarrow{\rho} & TM \times TM \\
 \begin{array}{c} M \\ \text{pr}_1 \end{array} \searrow & & \downarrow \tau_{TM} & & \begin{array}{c} M \\ \text{pr}_1 \end{array} \swarrow \\
 & & TM & &
 \end{array}$$

es una sucesión exacta corta, donde $\rho := (\tau_{TM}, T\tau_M)$.

Demostración: Inmediata de la definición. ■

A.6 PROPOSICIÓN DEFINICIÓN: Dada $\tau_M : TM \rightarrow M$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- Existe una conexión K en TM
- Existe un morfismo de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccc}
 TM \times TM & \xrightarrow{\Gamma} & TTM \\
 \begin{array}{c} M \\ \text{pr}_1 \end{array} \searrow & & \swarrow \tau_M \\
 & & TM
 \end{array}$$

tal que $(\tau_{TM}, T\tau_M) \circ \Gamma(x, v) = (x, v) \quad (x, v) \in TM \times TM$

Γ se llama *función de Christoffel*.

- $\tau_{TM} : TTM \rightarrow TM$ es la suma directa de haces $\tau_{TM}^v : T^v TM \rightarrow TM$ y $\tau_{TM}^h : T^h TM \rightarrow TM$ llamadas su *parte vertical* y su *parte horizontal* tales que $i : TM \times TM \cong T^v TM$ y $\rho : T^h TM \cong TM \times TM$, $T^v TM = \text{imi}$ y $T^h TM = \text{im}\Gamma$. ■

Sea M es una variedad Riemanniana con conexión K , $c : I \rightarrow M$ una curva en M , y V un campo vectorial a lo largo de la curva c .

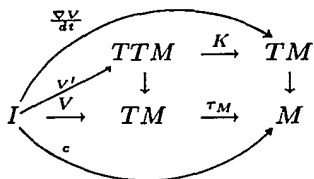
A.7 DEFINICIÓN: Sea $\tau_M : TM \rightarrow M$ el haz tangente. Definimos

$$\frac{\nabla}{dt} : \mathcal{X}(c) \rightarrow \mathcal{X}(c)$$

donde \mathcal{X} denota el conjunto de campos vectoriales a lo largo de la curva c como

$$V \mapsto \frac{\nabla V}{dt} := K \circ V'$$

$\frac{\nabla V}{dt}$ se llama derivada covariante del campo V a lo largo de c



$\frac{\nabla V}{dt}$ es lineal, y es una derivación. [Klin 1.5.12]

BIBLIOGRAFÍA

Atiyah, M.

K-Theory

Ed. Benjamin.

New York. (1967)

[Brocker] Brocker and Jannich.

Introduction to Differential Topology

Cambridge University Press.

Cambridge. (1982)

[Doc] Do Carmo, M.

Geometría Riemanniana

Gráfica Editora Hamburg Ltda.

Brasil. (1979)

DuGundji, J.

Topology

Ed. Allyn and Bacon.

Boston. (1966)

[Heuser] Heuser, Harro G.

Functional Analysis

A Wiley- Interscience publications.

Inglaterra. (1982)

Hu, S.

Elements of General Topology

Ed. Hoden-Day, Inc.
California. (1967)

Husemoller, D.;

Fiber Bundles

Ed. Mc. Graw-Hill.
New York. (1966)

Klingenberg, W.

Lectures on Closed Geodesics

Springer Verlag.
Berlin. (1978)

[Klin] Klingenberg, W.

Rimannian Geometry

Ed. Walter de Gruyter.
Berlin. (1982)

[Mard] Marsden, J.E., Abraham, R.H., Ratiu, T.

Manifolds, Tensor Analysis, and applications

Ed. Addison-Wesley.
Massachusetts. (1983)

Milnor, J.,Stasheff J.

Characteristic Classes

Princeton University Press.
New York. (1974)

Palais, R.S., Chuu-Lian Terng

Critical Point Theory and Submanifold geometry

Springer Verlag.
Berlin. (1988)

Porter, R.

Introduction to fiber bundles.

Ed. Marcel Dekker. Ink.

New York. (1977)

Royden, H.

Real Analysis

Ed. Macmillan.

New York. (1968)

Rudin, W.

Análisis Real y Complejo

Ed. Mc. Graw-Hill.

Madrid. (1988).

[Spanier] Spanier, E.

Algebraic Topology

Ed. Mc. Graw-Hill.

California (1966).