

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

113
20/2

CONTROL DISTRIBUIDO
DE UN MANIPULADOR
ROBOTICO

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A

SAMUEL RAMOS SOSA

DIRECTOR DE TESIS
LUIS AGUSTIN ALVAREZ ICAZA LONGORIA

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D.F. 1992.



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN	1
II. CINEMÁTICA	7
III. DINÁMICA	43
IV. CONTROL	61
V. ALGORITMOS	77
VI. CONCLUSIONES	99
VII. BIBLIOGRAFÍA	103

Cuando por primera vez se lee el título de este trabajo, posiblemente la palabra que más llame la atención sea robótico, pues parece sacada de un libro de ciencia ficción. Esto es verdad. Isaac Asimov, un famoso escritor de este género, ocupó el término para referirse a la ciencia que estudia los robots, originalmente definidos para la fantasía como máquinas que se quieren parecer al hombre, en funciones y movimientos. Asimov planteaba en sus historias diversas situaciones en la que los robots salían de control por haber violado alguna de las Tres Leyes Básicas de la Robótica. Estas son, por orden de importancia:

- i) Un robot no puede lastimar a un ser humano, o por inactividad permitir que un ser humano se haga daño.
- ii) Un robot debe obedecer las ordenes que le dé un ser humano, a no ser que esto entre en conflicto con la primera ley.
- iii) Un robot debe proteger su propia existencia, a no ser que esto entre en conflicto con la primera y segunda leyes.

De aquí desprendemos un dato importante: Un robot es una máquina creada para servir y ayudar al hombre.

Fuera de la ciencia ficción, los robots no son tan populares; en un importante contexto sociológico, el hecho de que un robot haga de manera eficiente el trabajo de varios hombres divididos en turnos, tiene como consecuencia problemas graves como el desempleo y la deshumanización del trabajo. Sin embargo, desde un punto de vista optimista, el robot busca librar de tareas tediosas al hombre para dejarlo ocuparse de otras más importantes o trascendentes y así elevar tanto nivel de educación como nivel tecnológico y de producción. Es este el contexto en el que mi tesis se va a basar. Se trata de atacar el elemento robótico más comúnmente usado, el manipulador, y mejorar su eficiencia para que de esta manera se puedan cumplir los objetivos antes mencionados.

Pero, ¿qué es un manipulador?

Un manipulador es un émulo de un brazo humano con todo y mano. Es el resultado de la idea de sustituir las tareas que el hombre realiza con sus manos, y la fuerza y estabilidad de sus brazos. Un manipulador se distingue por el tipo, arreglo y número de grados de libertad y por la función de su mano. Curiosamente, la mano es lo que menos vamos a estudiar aquí, pues la función de la mano depende directamente de la aplicación que se le dé al manipulador, de tal manera que nos vamos a concentrar en el brazo y la muñeca.

El número de grados de libertad de un manipulador se define como la cantidad de movimientos independientes que este es capaz de realizar. Es decir, un manipulador que solo consta de una base con un pivote eje de un brazo y al extremo de éste una mano fija, solo tiene 1 grado de libertad, pues únicamente puede moverse como un péndulo. Entre más grados de libertad tenga un manipulador robótico, más preciso y útil será. Además, como veremos más adelante, un robot de seis o más grados de libertad puede alcanzar cualquier punto de un cierto espacio de trabajo, con excepción del volumen que ocupa la base. Por lo tanto, este tipo de manipuladores será el objeto de mi estudio.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. El primero es una breve semblanza del proyecto, sus objetivos y su estructura. El segundo empieza con la mecánica del manipulador, enfocándose en la cinemática del mismo, los tipos de articulaciones y sus modelos matemáticos. El tercero habla de la dinámica del manipulador; una vez que hemos logrado posicionar la mano y conocer el estado de sus juntas, es hora de empezar a preocuparnos por la masa de los elementos y las fuerzas interactuantes. En el cuarto capítulo se ataca el problema final. Es decir, el de control del movimiento del manipulador.

La eficiencia de un manipulador depende de la rapidez y precisión de sus movimientos. Como veremos en los capítulos dos y tres, el modelo matemático del manipulador es bastante complejo, de aquí que la dificultad para controlarlo resida principalmente en la gran cantidad

de cálculos que se deben hacer. La idea es que estas operaciones estén repartidas en las diferentes articulaciones para establecer en paralelo las decisiones de control del robot, agilizando así el proceso. El sistema de control que se plantea en el cuarto capítulo es el modelo que sirve como punto de partida a la programación, que bloque por bloque se va describiendo en el capítulo cinco.

En su sentido clásico, la mecánica, como una de las cinco divisiones fundamentales de la física, se divide en dos partes: Estática y Dinámica. La estática se encarga del estudio de los cuerpos en reposo y la dinámica de los cuerpos en movimiento, siendo en ésta última donde reside nuestro interés. La dinámica a su vez se divide en cinemática y cinética. La primera es el estudio de la geometría del movimiento y relaciona el desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo haciendo caso omiso de las causas que provocan el movimiento, en tanto que la segunda se encarga de la relación existente entre las fuerzas actuantes en un cuerpo, su masa y su movimiento.

En este capítulo nos vamos a ocupar de la cinemática, como un paso preliminar al estudio de las fuerzas actuantes en un manipulador. Para poder indicarle a un manipulador que es lo que queremos que haga, necesitamos primero definir la posición del manipulador en un instante de tiempo dado para poder empezar a pensar en el trabajo final.

Estableceré primero algunas definiciones básicas para hacer más comprensibles las explicaciones posteriores.

El manipulador se compone de tres elementos básicos (se manejan dos, pero yo incluyo al órgano terminal): articulaciones, eslabones, y órgano terminal. Las articulaciones son los elementos que con base en su movimiento logran el cambio de posición del órgano terminal, y son de dos tipos: rotatorias y prismáticas. Las primeras tienen como variable un ángulo de rotación y las segundas originan un desplazamiento lineal variable del eslabón ligado a la junta y

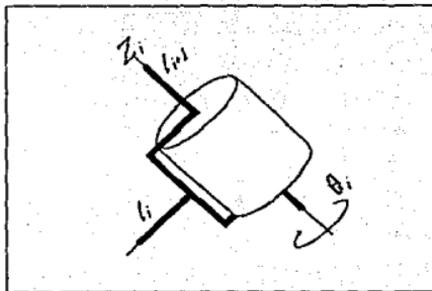


Fig. 1: Junta Rotatoria

tienen como variable dicho desplazamiento. (ver Figs. 1 y 2)

Los eslabones se conectan a través de las articulaciones, siendo el órgano terminal el último eslabón, y el único unido al objeto de trabajo.

El número de articulaciones nos define el de grados de libertad y el número de variables que vamos a tener en el manipulador, en el espacio cartesiano tridimensional se requieren tres grados de libertad para posicionarse y otros tres para orientar el órgano terminal.

Cuando un manipulador tiene menos de seis grados de libertad se habla de una limitación del robot, y es que con menos de seis grados el robot no puede alcanzar cualquier punto arbitrario en el volumen que el órgano terminal puede abarcar, denominado su espacio de trabajo, razón que como más adelante vamos a ver se refleja en el desarrollo matemático del modelo del robot e imposibilitando así su control. Cuando el manipulador tiene un número mayor que seis de grados de libertad se habla de un robot cinemáticamente redundante. Se diseña de ésta manera para facilitar el desplazamiento en su espacio de trabajo.

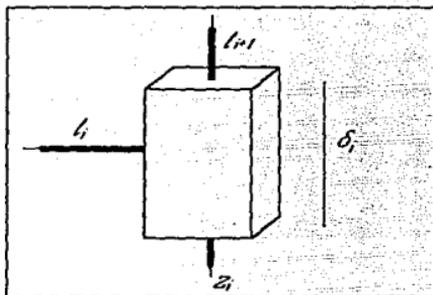


Fig. 2 Junta Prismática

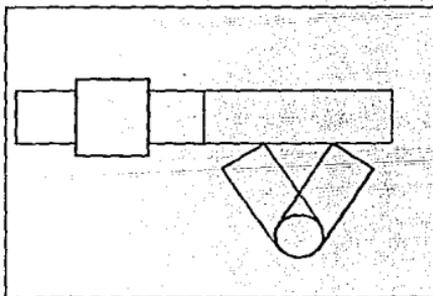


Fig. 3 Junta Rotatoria Vs. Prismática

Es importante definir precisión y repetibilidad. La precisión es la medida de que tan cerca de un punto predeterminado de su espacio de trabajo se puede posicionar el manipulador, y la repetibilidad es la precisión con que el manipulador puede repetir un mismo movimiento. Se habla también de la resolución del manipulador, que es el incremento más pequeño que el

controlador puede detectar.

Hasta ahora no hemos hecho ninguna diferencia entre los dos tipos de articulación, y realmente depende mucho de la aplicación la decisión de diseño sobre que juntaura aplicar. Sin embargo un parámetro de diseño importante es que aunque la estructura prismática es más precisa y más exacta en el sentido de la facilidad matemática, la ventaja

práctica de la juntaura rotativa es el hecho de que ocupa menor área para un movimiento equivalente al alcanzar un mismo objetivo (Fig. 3).

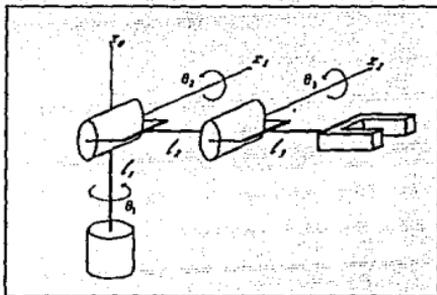


Fig. 4. Manipulador Articulado

De acuerdo a la geometría del espacio de trabajo que abarcan las primeras tres articulaciones de un manipulador, los dividiremos en cinco grupos:

Articulado (RRR)

Esférico (RRP)

SCARA (RRP)

Cilíndrico (RPP)

Cartesiano (PPP)

Las letras entre paréntesis nos indican el orden y el tipo de articulación de la que consta cada tipo de manipulador, P por articulación prismáticas y R por articulaciones rotatorias. Así pues, el primero de ellos, el manipulador articulado, consta de tres articulaciones rotacionales (Fig. 4).

Este tipo de manipulador, también llamado rotatorio o antropomórfico se puede encontrar con dos variantes: manipulador de codo y manipulador de articulación paralelográfica. Los ejes

de rotación de las dos últimas articulaciones son paralelos entre sí y perpendiculares al eje de la primera articulación.

La característica del manipulador esférico (Fig.5) es que, con sus dos articulaciones rotacionales y la última prismática, los ejes de las tres se intersectan. El nombre de éste tipo de manipulador viene de la forma volumétrica de su espacio de trabajo.

Por otro lado está el Selective Complaint Articulated Robot for Assembly (SCARA), diseñado específicamente para las plantas de ensamble automatizada, aunque como todos los tipos de manipulador que veremos aquí es de uso universal. Al igual que el esférico la distribución de las articulaciones es rotacional-rotacional-prismática, sin embargo en este caso los ejes de sus articulaciones son paralelos entre sí (Fig.6).

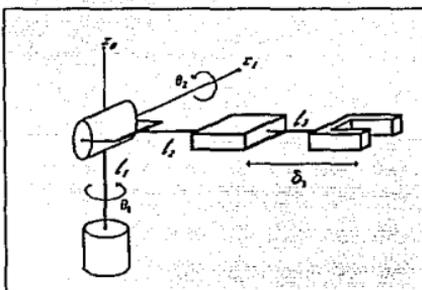


Fig. 5 Manipulador esférico

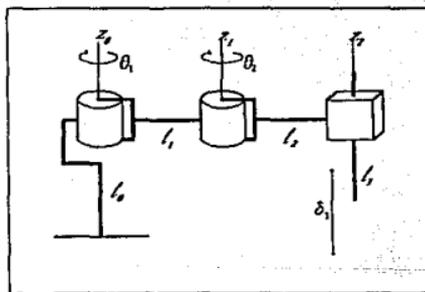


Fig. 6 Manipulador SCARA

Al igual que el manipulador esférico, el manipulador cilíndrico recibe su nombre por la forma que describe su espacio de trabajo, pero éste logra esto con una distribución de articulaciones rotacional-prismática-prismática (Fig.7).

El tipo más simple de manipulador es el manipulador cartesiano, que describe un cubo en su espacio de trabajo porque sus variables de articulación describen las coordenadas cartesianas (x, y, z) del órgano terminal, pues todas sus articulaciones son prismáticas (Fig.8).

Para efectos de modelado vamos a encontrar que sin importar la distribución de las articulaciones de un manipulador, para cada eslabón podemos asignar un sistema de ejes coordenados basado a su vez en un sistema de referencia base, que podemos situar en la base del manipulador por ejemplo, en tanto que los sistemas coordenados secundarios sirven exclusivamente para establecer de manera relativa la posición de un eslabón, ya sea su ángulo de inclinación con respecto al eslabón anterior o su desplazamiento relativo, dependiendo del tipo de articulación que los una. Así pues, vamos a tener una serie de variables, una por articulación, que nos van a representar la posición de cada uno de los eslabones en un momento dado. Sin embargo, para poder saber la posición del órgano terminal es necesario hacer una composición de todos estos movimientos.

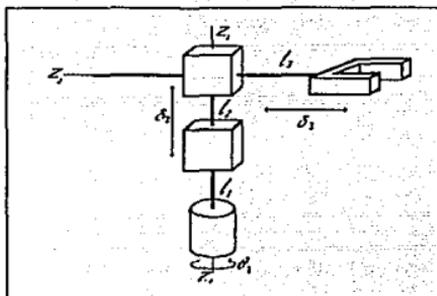


Fig. 7: Manipulador Cilíndrico

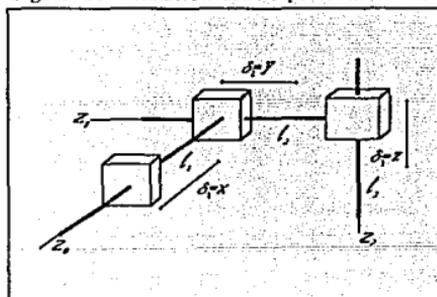


Fig. 8: Manipulador Cartesiano

Empezando por alguno de los extremos, ya sea el órgano terminal o la base, vamos a ir "transformando" esas variables relativas a su sistema coordenado local hacia el sistema de referencia base, de una en una y hasta llegar al otro extremo.

En la Fig.9 se establece un marco de referencia base (coordenadas con subíndice cero) donde se lleva a cabo la rotación de un paralelepípedo, movimiento referido a un marco de referencia local fijo al mismo (coordenadas con subíndice 1) y el cual depende exclusivamente del ángulo de rotación de la junta. En caso de tener una junta prismática no cambia el ángulo

entre los marcos, tan solo existirá una traslación constante que dependa de cómo estén asignados los ejes coordenados.

Vamos a definir al vector P_0 como aquél que parte del origen del marco base de referencia hacia un punto en el paralelepípedo $P_0 = \langle p_0x, p_0y, p_0z \rangle$. Llamaremos P_1 al vector que parte del origen del sistema coordenado local y va hacia el mismo punto $P_1 = \langle p_1x, p_1y, p_1z \rangle$. Así pues tenemos los siguientes vectores:

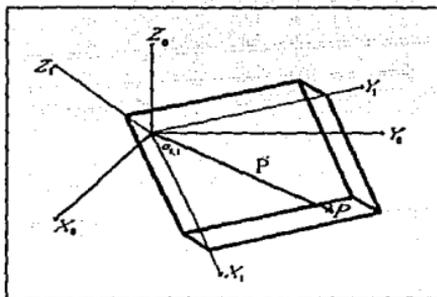


Fig. 9. Rotación

$$P_0 = p_0x_0i_0 + p_0y_0j_0 + p_0z_0k_0 \quad (2.1)$$

$$P_1 = p_1x_1i_1 + p_1y_1j_1 + p_1z_1k_1 \quad (2.2)$$

donde podemos observar que los vectores unitarios para los marcos de referencia base y local son $\{i_0, j_0, k_0\}$ y $\{i_1, j_1, k_1\}$ respectivamente. Ahora bien, como estamos refiriendonos al mismo punto en el espacio, $P_1 = P_0$, entonces tenemos las siguientes relaciones vectoriales:

$$p_0x = P_0i_0 = P_1i_1 = p_1x_1i_0 + p_1y_1j_0 + p_1z_1k_0 \quad (2.3)$$

$$p_0y = p_1x_1j_0 + p_1y_1j_0 + p_1z_1k_0 \quad (2.4)$$

$$p_0z = p_1x_1k_0 + p_1y_1k_0 + p_1z_1k_0 \quad (2.5)$$

De donde existe una relación entre los vectores P_0 y P_1 a través de una matriz de transformación llamada matriz de rotación R , pues el objetivo es transformar una rotación local

en una rotación general:

$$P_0 = R_{01} P_1 \quad (2.6)$$

donde los subíndices de R nos indican hacia donde se realiza la transformación. En éste caso:

$$R_{01} = \begin{bmatrix} i_0 i_1 & j_0 i_1 & k_0 i_1 \\ i_0 j_1 & j_0 j_1 & k_0 j_1 \\ i_0 k_1 & j_0 k_1 & k_0 k_1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Además sabemos que el producto punto de dos vectores cualquiera a y b se puede expresar como:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (2.8)$$

donde theta es el ángulo entre ambos vectores. De la misma manera sucede con los productos escalares de la matriz R , pero como se trata de vectores unitarios el producto de sus módulos es 1 y por lo tanto el producto se limita al coseno del ángulo existente entre estos vectores, que va a ser una función de la variable de articulación.

Entonces hemos descrito la forma de transformación de un sistema coordenado de referencia a otro marco base fijo. Sin embargo, un manipulador se compone de varias juntas y éstas transformaciones se pueden manejar para situar al órgano terminal referido al sistema coordenado base.

Así pues, de la transformación original:

$$P_0 = R_{01} P_1 \quad (2.9)$$

denotaremos como inversa de la matriz R :

$$[R_{01}]^{-1} = R_{10} \quad (2.10)$$

Por lo tanto

$$P_1 = R_{10} P_0 \quad (2.11)$$

análogamente para un nuevo sistema de referencia con subíndice 2:

$$P_0 = R_{02} P_2 \quad (2.12)$$

$$P_2 = R_{20} P_0 \quad (2.13)$$

$$P_1 = R_{12} P_2 \quad (2.14)$$

combinando (2.9), (2.12) y (2.14):

$$P_0 = R_{01} R_{12} R_{20} P_0 \quad (2.15)$$

y por lo tanto

$$R_{01} R_{12} R_{20} = I \quad (2.16)$$

Ecuación que nos da finalmente la identidad que buscamos

$$R_{01}R_{12}=R_{02} \quad (2.17)$$

que es lo que finalmente da la pauta para poder hacer la composición de transformaciones como la multiplicación de las transformaciones independientes de un sistema a otro.

Cuando una junta prismática se mueve, el efecto que se genera, en oposición a la rotación de las juntas rotatorias, es una traslación, representada gráficamente en la Fig. 10.

Para transformar las diferencias en distancias ocasionadas por la traslación definire el vector d_{01} como el que, partiendo del origen del marco base de referencia, va hacia el marco actual en uso, o marco local. Así pues tenemos que el vector de distancia nos indica el conjunto de distancias, eje por eje, que separa a los orígenes respectivos de los marcos de referencia en uso.

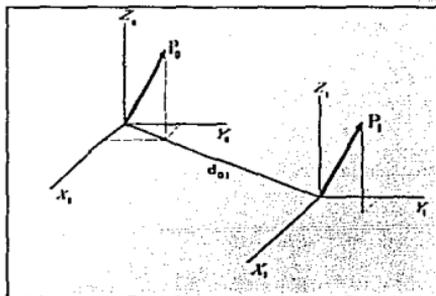


Fig. 10: Traslación

Partiendo de esto se puede definir una matriz general de transformación H que encierra tanto la rotación como la traslación del eslabón en estudio, de tal manera que:

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Esta es la matriz que nos va a dar la transformación total (rotacional y traslacional) de un marco de referencia a otro, cumpliéndose también lo demostrado para la matriz rotacional; al multiplicar una transformación con otra se obtiene la transformación total de coordenadas.

Para el empleo eficiente de las transformaciones vistas es necesario poseer un modelo práctico para representar los manipuladores que vamos a estudiar. Un modelo eficiente que facilita los cálculos matemáticos es la representación *Denavit-Hartenberg*.

Sean dos marcos de referencia, i y $i+1$ respectivamente. Existe una única matriz de transformación A que toma las coordenadas referidas al marco $i+1$ y las refiere al marco i , si seguimos las siguientes condiciones fundamentales:

1. El eje X_{i+1} debe ser perpendicular al eje Z
2. El eje X_{i+1} debe intersectar al eje Z

Podemos entonces establecer una serie de números únicos:

$$a, \delta, \theta, \alpha$$

y dos operaciones básicas, una de rotación (rot) y una de traslación (tras), cuyos subíndices indican el eje sobre el cual se realiza el movimiento y la variable de articulación.

de tal manera que:

$$A = \text{rot}_{z, \theta} \text{tras}_{z, \delta} \text{tras}_{x, a} \text{rot}_{x, \alpha} \quad (2.19)$$

Esto es, por convención vamos a denominar a la matriz A como matriz de transformación, definida como la composición de cuatro movimientos: dos rotaciones y dos traslaciones, primero una rotación alrededor del eje Z con el ángulo indicado, luego una traslación sobre ese mismo eje, con la distancia indicada; a continuación se efectúa otra traslación, pero esta vez sobre el eje X una distancia a y finalmente una rotación sobre ese mismo eje.

Así pues, cuando se realizan las rotaciones y traslaciones en el orden indicado y sobre los ejes definidos, algunos son perpendiculares entre sí, haciendo que su coseno sea cero, y eliminando el término que implicaría su producto escalar de la matriz de rotaciones, en conjunto esto implica una reducción en la información de la matriz R que pasa de nueve cosenos directores

a sólo cuatro parámetros, los números únicos vistos anteriormente, conocidos como los parámetros Denavit-Hartenberg.

Los sistemas de ejes coordenados se completan con la regla de la mano derecha para formalizar una convención (ver Fig. 11).

Es interesante observar que esta asociación de ejes, aunada a la descomposición geométrica del vector de distancia d , con los parámetros Denavit-Hartenberg, nos completan la matriz de transformación A .

Denominando como q , a la variable de articulación, estableceremos, basados en la

representación Denavit-Hartenberg, una matriz de transformación general obtenida al realizar simbólicamente las multiplicaciones correspondientes de rotaciones y traslaciones involucradas en la matriz A , que no es sino un caso particular de la matriz H , pero para los movimientos previamente establecidos. De esta manera, a cada articulación se le puede asociar una matriz de transformación que tiene como variables los parámetros Denavit-Hartenberg.

Para fines de nomenclatura a cada matriz A se le va a diferenciar con dos índices, uno superior que señala el eslabón previo a la articulación y otro inferior para el eslabón próximo, o sobre el que se esta efectuando el movimiento. Es importante observar que para cada articulación sólo uno de los parámetros va a ser variable, y se denotaría como q , el conjunto de todos ellos se agrupa en un vector que se llama de coordenadas **internas** del manipulador. El vector de posición y orientación en el espacio al que tenemos que orientar y posicionar al órgano terminal es llamado las coordenadas **externas**.

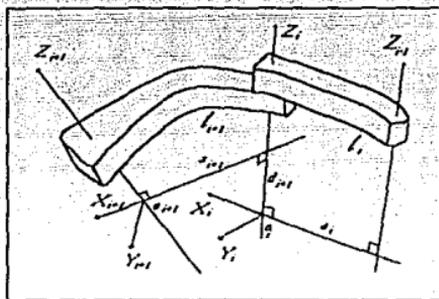


Fig. 11 Representación Denavit-Hartenberg

De esta manera, para una junta prismática, la matriz A queda:

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i & 0 \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

y para una junta rotacional:

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\text{sen} q_i \cos\alpha_i & \text{sen} q_i \text{sen}\alpha_i & a_i \cos q_i \\ \text{sen} q_i & \cos q_i \cos\alpha_i & -\cos q_i \text{sen}\alpha_i & a_i \text{sen} q_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & \delta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Las matrices anteriores, obtenidas al efectuar simbólicamente las operaciones antes descritas, son un resultado primario para analizar la cinemática del manipulador. Apenas hemos logrado obtener, por articulación, las coordenadas externas aplicables a la posición del manipulador, la última columna de la matriz A está compuesta de cuatro elementos: tres coordenadas y un 1. Las coordenadas son, en orden de renglón, X, Y, y Z. Según hemos visto la posición final del manipulador se obtiene con la composición de las matrices de transformación para todas las articulaciones.

Siguiendo la misma línea se pueden encontrar las coordenadas internas que determinan la orientación del órgano terminal. Es de particular interés analizar el problema de orientación para manipuladores con muñeca, es decir, para aquellos que tienen las tres últimas articulaciones rotacionales y con los tres ejes de movimiento intersectándose en un punto, ya que como sucede con la mayoría de los manipuladores robóticos, en este caso las coordenadas internas de la muñeca coinciden con los ángulos de orientación.

Para la orientación del órgano terminal es necesario construir una matriz de rotaciones R compuesta por una serie de rotaciones, movimientos de acercamiento, elevación y giro. A esta composición de rotaciones la veremos como la multiplicación matricial de esos tres movimientos, cada uno de ellos representado por su propia matriz de rotación, cada movimiento con su variable respectiva de junta, las tres últimas

variables para completar las coordenadas internas y completar el análisis de los seis grados de libertad. En la Fig. 12 se observan los ángulos de las juntas rotatorias de las cuales se compone la muñeca del manipulador.

Otra vez el objetivo de estos movimientos es hacer que los sistemas coordenados coincidan y lograr una disminución en el número de variables del sistema completo, ahorrandonos ecuaciones y tiempo.

Sea entonces la matriz rotacional dada por sus componentes r_{ij} , entonces la matriz R será igual a la composición de rotaciones:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

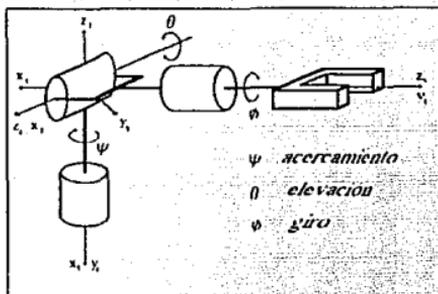


Fig. 12 Acercamiento, Elevación y Giro

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

de donde haciendo las multiplicaciones matriciales se obtienen:

$$r_{11} = \cos\psi \cos\theta \quad (2.24)$$

$$r_{21} = \text{sen}\psi \cos\theta \quad (2.25)$$

$$r_{31} = -\text{sen}\theta \quad (2.26)$$

$$r_{12} = \cos\psi \text{sen}\theta \text{sen}\phi - \text{sen}\psi \cos\phi \quad (2.27)$$

$$r_{22} = \text{sen}\psi \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \cos\psi \cos\phi \quad (2.28)$$

$$r_{32} = \cos\theta \text{sen}\phi \quad (2.29)$$

$$r_{13} = \cos\psi \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\psi \text{sen}\phi \quad (2.30)$$

$$r_{23} = \text{sen}\psi \text{sen}\theta \cos\phi - \cos\psi \text{sen}\phi \quad (2.31)$$

$$r_{31} = \cos\theta \cos\phi \quad (2.32)$$

De estas ecuaciones es relativamente simple obtener las variables angulares de junta, los ángulos de Euler. Así pues, para el ángulo de acercamiento:

de (2.24):

$$r_{11}(\sin\psi) = \cos\psi \cos\theta(\sin\psi) \quad (2.33)$$

de (2.25):

$$r_{21}(\cos\psi) = (\cos\psi) \cos\theta \sin\psi \quad (2.34)$$

restando (2.33)-(2.34):

$$r_{11} \sin\psi = r_{21} \cos\psi \quad (2.35)$$

$$\frac{r_{21}}{r_{11}} = \tan\psi \quad (2.36)$$

$$\psi = \arctan \frac{r_{21}}{r_{11}} + 2K\pi \quad (2.37)$$

Para el ángulo de elevación seguimos un razonamiento similar:

de (2.24):

$$r_{11}(\cos\psi) = (\cos\psi)\cos\psi\cos\theta = \cos^2\psi\cos\theta \quad (2.38)$$

de (2.25):

$$r_{21}(\text{sen}\psi) = (\text{sen}\psi)\text{sen}\psi\cos\theta = \text{sen}^2\psi\cos\theta \quad (2.39)$$

De acuerdo a la Fig. 14, si el vector que va del origen del marco de referencia es el vector unitario que gira alrededor de Z, entonces el radio del círculo mostrado es 1. De acuerdo a la figura, y es igual al seno del ángulo, en tanto que x es el coseno del mismo, por lo tanto, de acuerdo al Teorema de Pitágoras, y sumando (2.38) y (2.39):

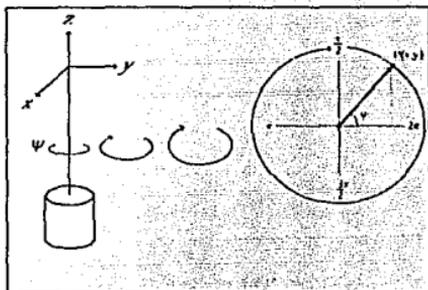


Fig. 15. Identidad Trigonométrica

$$r_{11}\cos\psi + r_{21}\text{sen}\psi = \cos\theta(\text{sen}^2\psi + \cos^2\psi) \quad (2.40)$$

pero

$$\text{sen}^2\psi + \cos^2\psi = 1 \quad (2.41)$$

de (2.26):

$$\frac{r_{31}}{(\cos\theta)} = -\frac{\text{sen}\theta}{(\cos\theta)} \quad (2.42)$$

$$\cos\theta = -\frac{r_{31}}{\tan\theta} \quad (2.43)$$

sustituyendo (2.45) y (2.47) en (2.44):

$$r_{11}\cos\psi + r_{21}\operatorname{sen}\psi = -\frac{r_{31}}{\tan\theta} \quad (2.44)$$

finalmente:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{r_{31}}{r_{11}\cos\psi + r_{21}\operatorname{sen}\psi}\right) + 2K\pi \quad (2.45)$$

Y para el ángulo de giro, de (2.30):

$$r_{13}(\operatorname{sen}\psi) = \cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi (\operatorname{sen}\psi) + \operatorname{sen}^2\psi \operatorname{sen}\phi \quad (2.46)$$

de (2.31):

$$r_{23}(\cos\psi) = \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi (\cos\psi) - \cos^2\psi \operatorname{sen}\phi \quad (2.47)$$

restando (2.46) - (2.47) y usando la identidad trigonométrica mostrada en la Fig. 13:

$$r_{13}\operatorname{sen}\psi - r_{23}\cos\psi = \operatorname{sen}\phi \quad (2.48)$$

ahora, de (2.27):

$$r_{12}(-\operatorname{sen}\psi) = (-\operatorname{sen}\psi)\cos\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\psi \cos\phi \quad (2.49)$$

y de (2.28):

$$r_{22}(\cos\psi) = (\cos\psi)\text{sen}\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \cos\psi^2\cos\phi \quad (2.50)$$

sumando (2.49) + (2.50):

$$r_{22}\cos\psi - r_{12}\text{sen}\psi = \cos\phi \quad (2.51)$$

usando (2.48) y (2.51) de tal modo que

$$\tan\phi = \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} \quad (2.52)$$

se obtiene finalmente:

$$\phi = \arctan \frac{r_{12}\text{sen}\psi - r_{23}\cos\psi}{r_{22}\cos\psi - r_{12}\text{sen}\psi} + 2k\pi \quad (2.53)$$

Una vez resuelto el problema de la posición de los elementos, hay también hay que hallar la velocidad y aceleración con que se mueven.

La velocidad como parámetro cinemático se descompone en dos: Velocidad angular y Velocidad lineal. La velocidad es la distancia recorrida en un instante de tiempo dado, pero para poder aplicar este concepto al manipulador se plantea la siguiente relación:

$$X_e = f(q) \quad (2.54)$$

donde X_e es el vector de coordenadas externas del órgano terminal de tamaño 6×1 , los primeros tres elementos dados por las coordenadas (x,y,z) del órgano terminal y los últimos dados por los tres ángulos de orientación: acercamiento, elevación y giro. Es decir:

$$X_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

q es el vector de coordenadas internas, el conjunto de las variables de articulación. Para un manipulador con n grados de libertad será de tamaño $n \times 1$. Es decir:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Como el vector de coordenadas externas describe una posición, entonces el saber el cambio de esa posición con respecto al tiempo, derivando el vector X_e , obtendremos el vector de velocidades que se requiere, de tal forma que, al derivar con respecto al tiempo (2.54):

$$\frac{d}{dt} X_e = \frac{\partial}{\partial q} f(q) \frac{dq}{dt} \quad (2.57)$$

donde a la matriz de derivadas parciales se le denomina Jacobiano de la función, identificada por J :

$$J(q) = \frac{\partial}{\partial q} f(q) = J \quad (2.58)$$

Podemos reescribir (2.57) como:

$$\dot{X}_e = J\dot{q} \quad (2.59)$$

Ahora bien, el vector de velocidad estará compuesto por:

$$\dot{X}_e = \begin{bmatrix} v_0^n \\ \omega_0^n \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

donde respetando la notación introducida anteriormente, los índices se refieren a la posición del órgano terminal (n) tomando como referencia el marco base (0).

La matriz jacobiana también se descompondrá angular y linealmente.

$$J = J_0^n = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Entonces se forman las siguientes ecuaciones. Para la velocidad lineal:

$$v_0^n = J_v \dot{q} \quad (2.62)$$

y para la velocidad angular:

$$\omega_0^n = J_\omega \dot{q} \quad (2.63)$$

Es cierto que la velocidad es el cambio de posición de un objeto con respecto al tiempo,

el diferencial de distancia recorrida entre el diferencial de tiempo que se tardó en hacerlo. De este modo podemos ver a la velocidad angular como la razón de cambio *angular* de posición de un objeto que gira a través de ese ángulo en un tiempo determinado. Ahora bien, se puede definir el eje de rotación de un cuerpo rígido que gira como la línea de partículas que permanecen estacionarias durante la rotación. Usando la representación Denavit-Hartenberg, para una articulación rotacional dada, su eje de rotación será siempre Z, por lo cual el vector de velocidad angular sólo va a tener componentes en k . Es claro entonces que si la articulación es prismática su velocidad angular será 0. La velocidad angular estará dada por un vector k cuyo módulo es, por articulación, el valor del cambio angular que sufre el eslabón unido a esa articulación por unidad de tiempo. Es decir, para cada articulación:

$$\dot{q}_i = \frac{d\theta_i}{dt} \quad (2.64)$$

donde i indica que articulación es y el ángulo theta es la variable de articulación.
Vectorialmente:

$$\omega_{i-1}^i = \dot{q}_i k \quad (2.65)$$

La ecuación anterior muestra el vector que describe la velocidad angular del eslabón $i + 1$ respecto al eslabón anterior. Si generalizamos para todas las juntas tendremos:

$$\omega_0^n = p_1 \dot{q}_1 k + p_2 \dot{q}_2 R_0^1 k + \dots + p_n \dot{q}_n R_0^{n-1} k \quad (2.66)$$

donde p_i indica el tipo de articulación, será 0 si es prismática y 1 si es rotacional, y R es la matriz de rotaciones que nos transforma las coordenadas de un eslabón a otro, de manera que la velocidad angular que obtenemos es total del órgano terminal referida a la base. Tendremos finalmente:

$$\omega_{i-1}^i = \sum_{i=1}^n p_i \dot{z}_{i-1} \quad (2.67)$$

donde

$$z_{i-1} = R_0^{i-1} k \quad (2.68)$$

y usando la nomenclatura de la representación Denavit-Hartenberg:

$$z_0 = k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

entonces de la ecuación (2.63) podemos deducir que:

$$J_\omega = p_1 z_0 \quad p_2 z_1 \quad p_3 z_2 \quad \dots \quad p_n z_{n-1} \quad (2.70)$$

Aunque la velocidad angular sólo se afecta por las articulaciones rotatorias, al hablar de velocidad lineal hay que considerar ambas articulaciones. En una articulación prismática, la matriz de rotaciones es independiente al desplazamiento prismático. Es decir, R es independiente de la variable de articulación q .

Por lo tanto, para conocer la velocidad lineal del eslabón i -ésimo se establece un vector d que representa el desplazamiento, dirección y sentido, del eslabón en cuestión. La variable de articulación es el tamaño de la componente de dicho vector en k , que siguiendo la representación Denavit-Hartenberg es el eje de desplazamiento de la articulación prismática, z . Este vector puede tener componente i , pues si existe alguna diferencia entre los ejes z_{i-1} y z_i entonces existirá el parámetro a_i , que al ser la traslación efectuada sobre x_i , representa la distancia entre los ejes z medida sobre x . Sin embargo, al escribir:

$$d_{i-1}^i = (R_{i-1}^i \alpha_i) i + (\delta_i) k \quad (2.71)$$

nos damos cuenta de que la componente i es constante pues la articulación es prismática y R es constante, y α por definición también lo es. Por lo tanto, al derivar (2.71):

$$v_{i-1}^i = \dot{d}_{i-1}^i = \dot{\delta}_i k = \dot{q}_i k \quad (2.72)$$

Otra vez, y respetando la nomenclatura, la velocidad lineal de un eslabón ligado a una articulación prismática es un vector que sólo tiene componentes en el eje de desplazamiento que en la representación Denavit-Hartenberg es Z , y cuyo módulo es el valor del cambio de la variable de articulación con respecto al tiempo. Sin embargo, al igual que con la velocidad angular, la velocidad total del eslabón i -ésimo desde el origen del marco base de referencia se compone de la suma de las velocidades de cada uno de los eslabones visto independientemente desde ese origen. Como la ecuación (2.72) se refiere al marco local de referencia, basta usar la matriz de rotaciones:

$$v_0^n = R_0^{n-1} \dot{d}_{n-1}^n k = R_0^{n-1} \dot{q}_n k \quad (2.73)$$

Así, similarmente a la velocidad angular en la ecuación (2.66); la velocidad lineal es:

$$v_0^i = \dot{q}_1 k + \dot{q}_2 R_0^1 k + \dots + \dot{q}_i R_0^{i-1} k \quad (2.74)$$

Siguiendo la misma nomenclatura que nos llevó a la ecuación (2.69):

$$z_{i-1} = R_0^{i-1} k \quad (2.75)$$

de manera que para articulaciones *prismáticas*, comparando los elementos de la ecuación (2.74) con los de la ecuación (2.62) y tomando en cuenta la ecuación (2.75) tendremos

finalmente, para el eslabón i -ésimo:

$$J_v = z_{i-1} \quad (2.76)$$

Sin embargo, para las articulaciones rotacionales no pasa lo mismo. Existen tres vectores relacionados: El vector desplazamiento que parte del origen del marco base de referencia hacia el origen del sistema local de la última articulación analizada, la i -ésima articulación (en éste caso rotatoria), el vector desplazamiento que parte también desde el origen del marco base de referencia pero que va hacia el punto de aplicación del órgano terminal, y finalmente el vector desplazamiento que va desde el sistema local de referencia al punto de aplicación. Se tiene entonces la siguiente relación vectorial:

$$d_0^i = d_0^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^i \quad (2.77)$$

La matriz de rotaciones está presente para transformar las coordenadas locales al sistema base (los otros dos vectores ya están referidos a ese sistema).

Una vez más veremos solamente el efecto en la articulación en cuestión (los jacobianos obtenidos hasta el momento son *por articulación*), y entonces tanto la matriz de rotaciones como el vector que va desde el origen hasta la articulación, son constantes. Para poder obtener el cambio de desplazamiento de esa articulación con respecto al tiempo derivamos (2.77) con las consideraciones anteriores:

$$v_0^i = \dot{d}_0^i = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i \quad (2.78)$$

La diferencia aquí es que por tratarse de una articulación rotacional, la variable de articulación no interviene en esta ecuación. Sin embargo, como en el producto vectorial entre dos vectores, el vector resultante es ortogonal a ambos factores, al usar la representación Denavit-Hartenberg, el eje de rotación de la articulación rotacional es perpendicular al eje x del sistema de referencia i -ésimo, entonces:

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{q} z_i \times d_{i-1}^i \quad (2.79)$$

sustituyendo (2.79) en (2.78):

$$v_0^i = R_0^{i-1} (\dot{q} z_i \times d_{i-1}^i) \quad (2.80)$$

de (2.77):

$$d_{i-1}^i = R_{i-1}^0 (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (2.81)$$

por lo tanto

$$v_0^i = R_0^{i-1} \dot{q} z_i \times R_{i-1}^0 (d_0^i - d_0^{i-1}) = R_0^{i-1} \dot{q} z_i \times (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (2.82)$$

donde por transformación de coordenadas podemos simplificar usando la ecuación (2.68)

$$v_0^i = \dot{q} z_i \times (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (2.83)$$

y de acuerdo a (2.62), para articulaciones rotatorias:

$$J_v = z_i \times (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (2.84)$$

De esta forma, para cada articulación existe una matriz jacobiana representativa. Así pues, en (2.61) tenemos que

$$J_0^n = \begin{bmatrix} J_{v_0} & J_{v_1} & \dots & J_{v_{n-1}} & J_{v_n} \\ J_{\omega_0} & J_{\omega_1} & \dots & J_{\omega_{n-1}} & J_{\omega_n} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

donde n es el número de grados de libertad del manipulador. Es decir, para cada articulación se establece un jacobiano que es un vector con 6 elementos, los primeros tres correspondientes a la velocidad lineal (coordenadas xyz) y los otros a la velocidad angular (coordenadas xyz). Estos vectores representan las columnas de la matriz jacobiana "total" del manipulador. Las articulaciones rotatorias tienen los seis elementos definidos, mientras que en las prismáticas los elementos correspondientes a la velocidad angular son cero. Bajo este razonamiento, un robot con dos grados de libertad tendrá una matriz Jacobiana de dos columnas; uno de tres grados de libertad, tres columnas; y así sucesivamente.

Sin embargo, de acuerdo a (2.59), se nos presenta un problema: El tamaño de la matriz de jacobianos es crítico para la resolución matemática del sistema. En ésta matriz, el número de renglones es fijo, referente a las velocidades lineal y angular, en tanto que el número de grados de libertad puede variar. Esto no presenta un problema en sí pues el vector que representa el cambio en las variables de articulación con respecto al tiempo es de tamaño $n \times 1$, coherente entonces para la multiplicación matricial, pues en un producto de dos matrices cualesquiera A y B , el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B , y el resultado se reflejará en la cantidad de coordenadas externas que se van a conocer. De cualquier forma, en el caso general, si conocemos el valor de cada una de las variables de articulación conoceremos la posición y orientación del órgano terminal. Para conocer la velocidad de desplazamiento tanto lineal como angular nos valdremos de la matriz de jacobianos J :

$$J_0^n = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_i \ \dots \ J_{n-1} \ J_n] \quad (2.86)$$

donde, para articulaciones prismáticas:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

y para articulaciones rotatorias:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (d_0^{i-1} - d_0^{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Lo que hasta ahora se ha podido analizar es lo que se conoce como el *problema cinemático directo* en la solución analítica de un manipulador robótico. El problema más difícil es el inverso, en el que es necesario preestablecer una trayectoria, una serie de puntos finales o coordenadas externas del órgano terminal, para de allí obtener las condiciones de sus articulaciones: Posición, Velocidad y Aceleración. Es necesario entonces resolver el *problema cinemático inverso*. De (2.54):

$$q = f^{-1}(X_p) \quad (2.89)$$

El verdadero problema es matemático. Si bien ya se conocen las ecuaciones necesarias para la solución del problema directo, éstas implican funciones trigonométricas no lineales que hacen que las soluciones a los sistemas de ecuaciones no sean únicas y sea necesario recurrir a los métodos numéricos. Cuando los sistemas de ecuaciones son lo suficientemente simples como para llegar a una solución analítica, el método de solución siempre es único y es imposible llegar a un procedimiento general. No obstante, aplicando el método numérico más sencillo, el método de Newton, se puede llegar a una solución cuya exactitud dependerá de la resolución de las iteraciones hechas. El método de Newton es un proceso iterativo que consiste en plantear una solución inicial, averiguar que tanto satisface a las ecuaciones y volver a efectuar la operación con el nuevo resultado hasta que el error entre la solución real y la propuesta sea mínimo: nulo o menor a un valor preestablecido.

De este modo, planteando una solución q_0 inicial, la solución real q será función tanto del vector de coordenadas externas como de ésta solución:

$$q = f^{-1}(X_e, q_0) \quad (2.90)$$

Entonces planteamos una función de error, es decir, dada la ecuación (2.54), se puede decir que:

$$F(q) = f(q) - X_e \quad (2.91)$$

donde al obtener el cero de la función $F(q)$ hemos llegado a la solución correcta, al vector de coordenadas internas.

q_0 es la solución propuesta. En la primera iteración $k=0$ y por lo tanto la solución propuesta inicial, es q_0 . Si expandemos (2.91) en series de Taylor:

$$F(q) = F(q_0) + \frac{\partial F(q_0)}{\partial q} (q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(q_0)}{\partial q^2} (q - q_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F(q_0)}{\partial q^n} (q - q_0)^n + \dots \quad (2.92)$$

Si se toman en cuenta tan solo los dos primeros términos y además usamos (2.58):

$$F(q) = F(q_0) + J(q_0)(q - q_0) \quad (2.93)$$

como $F(q)$ es una función de error y nuestro objetivo es minimizarla, es decir, hacerla nula, entonces obteniendo la raíz q cuando $F(q) = 0$:

$$F(q_0) + J(q_0)(q - q_0) = 0 \quad (2.94)$$

de donde

$$q = q_k - J^{-1}(q_k) F(q_k) \quad (2.95)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (2.91) en términos de q :

$$q = q_k - J^{-1}(q_k) [f(q_k) - X_{e_k}] \quad (2.96)$$

donde se define

$$X_{e_k} - f(q_k) = \Delta X_{e_k} = \epsilon \quad (2.97)$$

La diferencia entre las coordenadas externas reales y las obtenidas con la solución propuesta q , nos da una diferencia en coordenadas externas para la iteración k , igual al error que se tuvo al elegir esa solución. De este modo

$$q = q_k + J^{-1}(q_k) \epsilon \quad (2.98)$$

Sin embargo lo que se busca es un proceso iterativo, y si suponemos que la trayectoria está dada como una serie de puntos en el espacio muy cercanos uno del otro, se considera que la posición actual sirve de "solución propuesta" q_k para el punto siguiente en el espacio de la trayectoria, obteniendo así no sólo rapidez en el cómputo, sino también asegurando un camino óptimo de un punto a otro de la trayectoria. Si la cercanía entre los puntos es tal que su diferencia es menor al error planteado, se puede obtener la solución en una sola iteración:

$$\Delta X_{e_k} = X_{e_{k+1}} - X_{e_k} < \epsilon \quad (2.99)$$

entonces (2.97) se convierte en:

$$\Delta X_{e_k} = X_{e_{k+1}} - f(q_k) \quad (2.100)$$

y finalmente:

$$q_{k+1} = q_k + J^{-1}(q_k) \Delta X_{e_k} \quad (2.101)$$

donde k es el punto de la trayectoria. Como para cada punto el proceso iterativo se reduce a una iteración, entonces cada uno de los puntos en la trayectoria define valores distintos de las coordenadas internas del manipulador, dada la trayectoria punto a punto del órgano terminal. En la ecuación (2.101) se entiende que es necesario establecer aparte de esta trayectoria una posición inicial de las articulaciones del manipulador, con sus variables bien definidas formando el vector q_0 , y llamada la posición "de reposo". En la ecuación (2.100), $X_{e_{k+1}}$ representa el punto de la trayectoria dada correspondiente al vector de coordenadas internas que se va a calcular en ese punto.

La trayectoria del órgano terminal está dada discretamente, esto es, se establecen los puntos por donde tiene que pasar, sin embargo no se aclara el camino que deba seguir de un punto al otro. Esto carece de importancia por lo que antes se dijo: los puntos están muy cercanos unos de otros. La trayectoria del órgano terminal puede ser considerada, entonces, como una trayectoria continua. Para cuando los puntos están muy cerca uno del otro:

$$X_{e_k} = X_e(t) \quad (2.102)$$

Una función discreta se aproxima a una función continua. Para obtener desde la etapa del diseño de la trayectoria, su velocidad y su aceleración. Para la función continua $X_e(t)$:

$$\frac{dX_e(t)}{dt} = \dot{X}_e(t) \quad (2.103)$$

representa la función que describe el cambio de posición del vector de coordenadas externas con respecto al tiempo: la velocidad; y

$$\frac{d\dot{\vec{X}}_e(t)}{dt} = \ddot{\vec{X}}_e(t) \quad (2.104)$$

representa la función que describe el cambio de *velocidad* del vector de coordenadas externas con respecto al tiempo: la aceleración.

Cuando discretizamos (2.103) y (2.104) encontramos los vectores de velocidad y aceleración, ambos de tamaño 6×1 . Es decir, muestreando ambas funciones podemos volver a la ecuación (2.101) con t vectores de velocidad y aceleración, uno para cada punto de la trayectoria, donde t es el número de puntos de la misma, y derivándola para obtener la velocidad del vector de coordenadas internas se obtendrá:

$$\dot{\vec{q}}_{k+1} = J^{-1}(\vec{q}_k) \dot{\vec{X}}_{e,k+1} \quad (2.105)$$

dado que el único elemento variable es el vector de coordenadas externas correspondiente a la iteración $k+1$, dejando a la \vec{q}_k como constante, pues se obtuvo en la iteración anterior, en el punto anterior de la trayectoria. Sin embargo gracias a la discretización de la ecuación (2.104) lo único que resta por hacer son simples operaciones matemáticas.

De manera semejante, para obtener la aceleración del vector de coordenadas internas volvemos a derivar. Pero ahora la derivación no arroja resultados tan simples, pues

$$\ddot{\vec{X}}_{e,k+1} = J(\vec{q}_{k+1}) \ddot{\vec{q}}_{k+1} + \left[\frac{d}{dt} J(\vec{q}_{k+1}) \right] \dot{\vec{q}}_{k+1} \quad (2.106)$$

Donde la única complicación reside en establecer b , definido por

$$b = \frac{d}{dt} J(\vec{q}_{k+1}) \quad (2.107)$$

Siguiendo esta metodología podemos resolver el problema cinemático inverso de manera sencilla, pero existe un último punto que considerar.

Se ha establecido la matriz de jacobianos como un elemento muy importante en la resolución del problema, pero el tamaño de esta matriz resulta crítico para este fin. Es decir, para que este método trabaje es necesario obtener la matriz jacobiana inversa, para que esto suceda tenemos que tener una matriz jacobiana *cuadrada*, seis grados de libertad para tener un jacobiano con seis columnas, para estar acorde con los seis renglones, tres de la velocidad angular y tres de la velocidad lineal. Si el manipulador con el que trabajamos tiene *menos* de seis grados de libertad, la solución del problema cinemático inverso debe realizarse de otra forma, pero si es un manipulador redundante se introduce el concepto de *matriz jacobiana pseudoinversa*. El artificio matemático consiste en obligar a la matriz de jacobianos a la cuadratura:

$$J_{\text{pseudoinversa}} = J^T(JJ^T)^{-1} \quad (2.108)$$

donde J es la matriz jacobiana del manipulador en cuestión siempre y cuando el número de grados de libertad sea mayor a seis.

Pero quizá el punto más importante a considerar con esta matriz es el que todas sus columnas y renglones sean linealmente independientes. Cualquier dependencia lineal en sus elementos reduciría el rango de la matriz, y esta dejaría de tener inversa. Físicamente esto sucede cuando el robot se acerca a un punto inalcanzable en su espacio de trabajo, para el cual no existe combinación de posiciones de coordenadas internas factible. A estos puntos se les conoce como singularidades. El efecto que esto tiene en la geometría del desplazamiento del robot es que dependiendo de que punto se trate, al ser un punto único, algunos elementos de la matriz de transformación van a ser cero.

Las singularidades se consideran desde el diseño. Estas caen generalmente cuando el brazo

se encuentra totalmente estirado, y la solución a ese nivel consiste en evitar esos puntos en el diseño de la trayectoria.

La totalidad de los cálculos que se han analizado en éste capítulo sirven de base para estudiar que es lo que motiva dichos movimientos, cuales fuerzas intervienen y cuales son las variables que hay que considerar. Al igual que en éste capítulo, el enfoque de la Dinámica del Manipulador va a ser completamente analítico. Los parámetros de diseño de los que he hablado no se estudian con la idea de armar un manipulador, sino con el fin de comprender completamente su funcionamiento para lograr, una vez comprendida la dinámica del sistema, un modelo lo suficientemente confiable para utilizarlo como planta en mi esquema de control.

El problema que se aborda ahora es el "cómo" y el "porqué" el manipulador va a llegar a la posición estipulada.

Para que el brazo mecánico entre en movimiento es necesario ejercer una fuerza que venza a la inercia que lo mantiene estático. Para cada una de las articulaciones la situación es la misma: es necesario que cada una tenga la fuerza suficiente para mover al eslabón correspondiente a la posición deseada. Es decir, ahora que se conocen las coordenadas internas que corresponden a cierta posición del órgano terminal, es necesario encontrar las fuerzas que cada una de las articulaciones tiene que ejercer para el efecto; a este proceso se le denomina problema *dinámico* inverso.

Para el análisis dinámico del manipulador se usan dos leyes fundamentales de la mecánica:

- A cada acción corresponde una reacción de igual magnitud, pero en sentido contrario.
- En sus dos versiones:
 - . La razón de cambio del momentum lineal es igual a la fuerza total aplicada al cuerpo.
 - . La razón de cambio del momentum angular es igual al par total aplicado al cuerpo.

Esta última ley se reconoce como la segunda ley de Newton, en sus versiones lineal y angular, y la primera de ellas definiéndola como:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (3.1)$$

Para las aplicaciones de la robótica la masa permanece constante, y como la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración de la partícula en cuestión, se

puede afirmar que:

$$F=ma \quad (3.2)$$

El principio de momentum angular establece que, como nos indica el tercer punto:

$$\tau_0 = \frac{d}{dt}(I_0 \omega_0) \quad (3.3)$$

donde I es la matriz de momentos de inercias del manipulador y, al igual que la velocidad angular, está tomada alrededor del centro de masa. En el caso angular, ni la matriz de inercias ni la velocidad angular son constantes con respecto al tiempo. Esto presenta un problema que en el movimiento lineal no se tuvo que considerar; para eliminarlo se establece un marco de referencia rígidamente atado al eslabón con respecto al cual se valúan tanto la matriz de momentos de inercia como la velocidad angular. Ambos pueden referirse después al marco correspondiente mediante la matriz de rotación apropiada, esto es:

Se define como matriz antisimétrica S a aquella que cumple que

$$S^T + S = 0 \quad (3.4)$$

si definimos a $S(a)$ como

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con las siguientes propiedades:

1. Para un vector P cualquiera tenemos que:

$$S(a)p = a \times p \quad (3.6)$$

2. Sea R una matriz ortogonal (al igual que las matrices rotacionales estudiadas), y sean a y b dos vectores cualesquiera, entonces:

$$R(a \times b) = Ra \times Rb \quad (3.7)$$

Juntando estas dos propiedades podemos concluir que, de manera general:

$$RS(a)R^T b = R(a \times R^T b) = (Ra) \times (RR^T b) = (Ra) \times b = S(Ra)b \quad (3.8)$$

de donde, finalmente

$$RS(a)R^T = S(Ra) \quad (3.9)$$

sea R una matriz que denota la orientación de un sistema coordinado unido fijamente al cuerpo, variante con el tiempo, donde el momento de inercia está representado en forma matricial por:

$$I_0 = RIR^T \quad (3.10)$$

Sin perder de vista que para la matriz R su inversa es igual a su traspuesta, entonces, como R depende del tiempo

$$R(t)R^T(t) = I \quad (3.11)$$

se deriva con respecto al tiempo

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \quad (3.12)$$

y se define una matriz S tal que

$$S = -\dot{R}R^T \quad (3.13)$$

que al transponerla

$$S^T = R\dot{R}^T \quad (3.14)$$

por lo tanto la ecuación (3.12) se puede leer:

$$S + S^T = 0 \quad (3.15)$$

De la expresión (3.15) queda claro que la matriz S es antisimétrica, y por lo tanto postmultiplicando por R ambos lados de (3.13) tomando en cuenta la ecuación (3.11) entonces tendremos:

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t) \quad (3.16)$$

Es válido entonces decir que si $S(t)$ es antisimétrica, entonces puede ser representada como:

$$S(t) = S(\omega(t)) \quad (3.17)$$

para un vector único $\omega(t)$ que representa a la velocidad angular de un marco en rotación con respecto al marco fijo de referencia en un tiempo t .

De tal forma que si aplicamos lo anterior a la ecuación (3.13) tendremos:

$$\dot{R}R^T = S(\omega_0) \quad (3.18)$$

que representa la velocidad angular del eslabón expresada en un marco fijo de referencia, pero el mismo vector expresado en términos del sistema local de referencia depende de la matriz de rotaciones para ese eslabón:

$$\omega_0 = R\omega \quad (3.19)$$

y por lo tanto

$$\omega = R^T\omega_0 \quad (3.20)$$

Sabemos también que el momentum angular h está dado por:

$$h = I_0\omega_0 \quad (3.21)$$

entonces, junto con (3.10)

$$h = RIR^T R\omega = RI\omega \quad (3.22)$$

Al diferenciar (3.22) con I constante se obtiene una expresión de la razón de cambio del momentum angular de tal manera que:

$$\dot{h} = \dot{R}I\omega + RI\dot{\omega} \quad (3.23)$$

De (3.18) tenemos que

$$\dot{R} = S(\omega_0)R \quad (3.24)$$

y (3.24) en (3.23)

$$\dot{h} = S(\omega_0) R I \omega + R I \dot{\omega} \quad (3.25)$$

Así pues, con respecto al marco rígidamente atado al cuerpo, la razón de cambio del momentum angular es:

$$R^T \dot{h} = R^T S(\omega_0) R I \omega + I \dot{\omega} - S(R^T \omega_0) I \omega + I \dot{\omega} - S(\omega) I \omega + I \dot{\omega} \quad (3.26)$$

finalmente

$$R^T \dot{h} = \omega \times (I \omega) + I \dot{\omega} \quad (3.27)$$

y de (3.3)

$$\dot{h} = \tau_0 = \frac{d}{dt} (I_0 \omega_0) \quad (3.28)$$

Además, por transformación de coordenadas:

$$\tau_0 = R \tau \quad (3.29)$$

y

$$\tau = R^T \tau_0 = R^T \dot{h} \quad (3.30)$$

como consecuencia

$$\tau = I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \quad (3.31)$$

que es precisamente la ecuación que resuelve el problema de tener un momento de inercia alrededor del centro de masa, obteniendo una ecuación de movimiento angular en términos del marco fijo de referencia en el eslabón correspondiente.

Entonces, con ayuda de (3.31) y (3.2) se establece el comportamiento dinámico del manipulador. Empezaré por modelar el i -ésimo eslabón con las ecuaciones mencionadas, haciendo un estudio de cuerpo libre de un eslabón, como se muestra en la Fig. 14.

Para el balance de fuerzas:

$$\sum f_i = 0 \quad (3.32)$$

Y para el balance de momentos:

$$\sum \tau_i = 0 \quad (3.33)$$

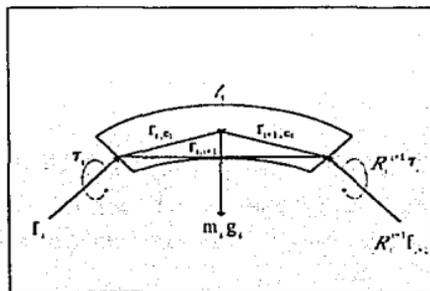


Fig. 14: Diagrama de Cuerpo libre de un eslabón

En la figura tenemos:

- l_i eslabón i -ésimo
- m_i masa del eslabón i -ésimo
- I_i matriz de inercia de l_i alrededor de un sistema de coordenadas paralelo al sistema i -ésimo, pero cuyo origen está en el centro de masa de l_i .
- $r_{i,s}$ vector que va de la unión i -ésima al centro de masa de l_i .
- $r_{i+1,s}$ vector que va de la unión $i+1$ al centro de masa de l_i .
- $r_{i,c}$ vector que va de la unión i a la unión $i+1$.

Del balance de fuerzas en la Fig. 14 según (3.2) y (3.32):

$$f_i - R_{i,i-1} f_{i-1} + m_i g_i = m_i a_{ci} \quad (3.34)$$

donde a_{ci} es la aceleración del centro de masa de i .

De igual forma, de acuerdo a la misma figura y según (3.31) y (3.33), en un balance de momentos:

$$\tau_i - R_{i,i-1} \tau_{i-1} + (f_i \times r_{i,ci}) - [(R_{i,i-1} f_{i-1}) \times r_{i-1,ci}] = \alpha_i + (\omega_i \times I_i \omega_i) \quad (3.35)$$

donde

$$\alpha_i \text{ y } \omega_i$$

son respectivamente la aceleración y velocidad angulares del sistema coordinado de referencia i -ésimo; $(f \times r)$ es el momento causado por una fuerza f alrededor de un punto a una distancia r desde el punto de aplicación hasta el punto en cuestión; $m_i g_i$ es el término debido a la fuerza de gravedad, que no aparece en la ecuación de pares pues se aplica directamente al centro de masa.

Con la idea de iniciar un método iterativo donde se vayan calculando las fuerzas y pares por eslabón para cada punto de la trayectoria del órgano terminal se plantea la siguiente ecuación, de (3.34):

$$f_i = R_{i,i-1} f_{i-1} + m_i a_{ci} - m_i g_i \quad (3.36)$$

y para el balance de momentos, también de forma iterativa, de (3.35):

$$\tau_i = R_{i,i+1} \tau_{i+1} - (f_i \times r_{i,c}) + (R_{i,i+1} f_{i+1} \times r_{i+1,c}) + \alpha_i + (\omega_i \times J_i \omega_i) \quad (3.37)$$

La diferencia en estas ecuaciones es que para poner en marcha el proceso iterativo es necesario conocer las fuerzas y los momentos partiendo *del órgano terminal*. Es decir, al hablar de momentos y fuerzas los valores iniciales conocidos van a ser los que la "mano" ejerza sobre la carga, y como la carga no la estamos tomando en cuenta, para un manipulador con n grados de libertad el eslabón $n+1$ es inexistente, de tal forma que

$$f_{n+1} = 0 \quad (3.38)$$

y

$$\tau_{n+1} = 0 \quad (3.39)$$

Tanto en (3.36) como en (3.37)

$$i = n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1$$

En el capítulo anterior se calcularon los vectores de coordenadas internas, sus velocidades y aceleraciones. Con esta información se calculan tanto la aceleración del centro de masa del eslabón referido como la velocidad y aceleración angulares del marco de referencia atado a él, pero es necesario primero hacer ciertas consideraciones.

En lo sucesivo, el subíndice i será usado para indicar las cantidades referidas a la base del sistema. Se puede inferir que la velocidad angular del eslabón i es igual a la velocidad angular del eslabón $i-1$ más la rotación de la articulación i -ésima sobre el marco local de referencia:

$$\omega_{i_0} = \omega_{i-1_0} + z_{i-1} \dot{q}_i \quad (3.40)$$

y por lo tanto de manera general

$$\omega_i = R_{i-1,0}^T \omega_{i-1} + b_i \dot{q}_i \quad (3.41)$$

donde

$$b_i = R_{01}^T z_{i-1} \quad (3.42)$$

que se define como el eje de rotación de la articulación i expresada en el marco de referencia i -ésimo.

Para articulaciones lineales, al no haber desplazamiento angular, la rotación de la articulación i -ésima vale cero, de tal modo que la ecuación (3.41) se transforma en

$$\omega_i = R_{i-1,0}^T \omega_{i-1} \quad (3.43)$$

Ahora bien, con la misma lógica podemos ver que la aceleración angular del eslabón i -ésimo no es sino la derivada de la velocidad angular del mismo eslabón, que referida a la base del sistema se escribe:

$$\alpha_i = R_{01}^T \dot{\omega}_{i_0} \quad (3.44)$$

donde, al derivar (3.40)

$$\dot{\omega}_{i_0} = \dot{\omega}_{i-1_0} + z_{i-1} \ddot{q}_i + (\omega_{i_0} \times z_{i-1} \dot{q}_i) \quad (3.45)$$

y al sustituir (3.45) en (3.44) tomando en cuenta (3.42) finalmente queda

$$\alpha_i = R_{i-1,j}^T \alpha_{i-1} + b \ddot{q}_i + (\omega_i \times b, q_i) \quad (3.46)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que para (3.43) notamos que para articulaciones lineales la aceleración angular sólo depende de la aceleración angular del eslabón anterior, pues su aceleración angular es cero. Así pues

$$\alpha_i = R_{i-1,j}^T \alpha_{i-1} \quad (3.47)$$

El siguiente paso es obtener la aceleración lineal tal cual aparece en (3.36). Para esto es necesario obtener primero la velocidad del centro de masa del eslabón i -ésimo. Se introduce el subíndice r para indicar los valores relacionados con el *extremo* del eslabón en cuestión, de tal manera que

$$v_{r,i} = v_{r,i-1} + (\omega_{i-1} \times r_{r,i}) \quad (3.48)$$

Esto se explica considerando al punto de aplicación visto desde dos posiciones distintas, un vector que va desde el origen del marco base de referencia y otro desde el punto de vista local del eslabón, como lo habíamos hecho en la Fig. 9 pero planteándolo en forma real con la distancia atribuida al eslabón, como en la Fig. 10. Se plantea entonces que la relación entre estos dos vectores p_0 y p_1 es

$$p_0 = R p_1 + d \quad (3.49)$$

que al diferenciarla

$$\dot{p}_0 = \dot{R} p_1 + \dot{d} = S(\omega) R p_1 + \dot{d} = (\omega \times r) + v \quad (3.50)$$

que además de explicarnos directamente a (3.49), al relacionar los términos uno a uno,

podemos inferir que

$$\dot{p}_0 - \dot{d} = \dot{R}p_1 = \omega \times R p_1 \quad (3.51)$$

donde al diferenciar ambos lados:

$$\ddot{p}_0 - \ddot{d} = \dot{\omega} \times R p_1 + (\omega \times \dot{R} p_1) = (\dot{\omega} \times r) + \omega \times (\omega \times r) \quad (3.52)$$

finalmente:

$$\ddot{p}_0 = (\dot{\omega} \times r) + \omega \times (\omega \times r) + a \quad (3.53)$$

Volviendo a la nomenclatura planteada en la Fig. 14 encontramos que (3.53) representa la aceleración del centro de masa del eslabón i -ésimo en la siguiente ecuación:

$$a_{\epsilon, j_0} = a_{\epsilon, j-1_0} + (\dot{\omega}_{j_0} \times r_{i, \epsilon, j_0}) + \omega_{j_0} \times (\omega_{j_0} \times r_{i, \epsilon, j_0}) \quad (3.54)$$

y si ahora definimos

$$a_{\epsilon, j} = R_{0j}^T a_{\epsilon, j_0} \quad (3.55)$$

$$a_{\epsilon, j-1} = R_{0, j-1}^T a_{\epsilon, j-1_0} \quad (3.56)$$

aprovechando que R es ortogonal aplicamos la propiedad:

$$R(a \times b) = (Ra) \times (Rb) \quad (3.57)$$

a (3.56) nos queda:

$$a_{e,j} = R_{i-1,j}^T a_{e,j-1} + (\dot{\omega}_i \times r_{i,j}) + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,j}) \quad (3.58)$$

y para encontrar la aceleración en el extremo del eslabón basta sustituir el vector r que teníamos desde el extremo del eslabón anterior hasta el centro de masa del eslabón en cuestión por el vector r que abarca todo el eslabón, de tal manera que, de acuerdo a la notación de la Fig. 14:

$$a_{e,j} = R_{i-1,j}^T a_{e,j-1} + (\dot{\omega}_i \times r_{i,j,1}) + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,j,1}) \quad (3.59)$$

Ahora bien, para poder aplicar lo anterior a articulaciones prismáticas de acuerdo a (3.51), como p_i está cambiando con respecto a su marco de referencia, entonces la diferenciación plasmada en (3.52) se ve modificada, de tal modo que:

$$\ddot{p}_0 - \ddot{d} = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times R\dot{p}_1 + R\ddot{p}_1 \quad (3.60)$$

además podemos definir de (3.50)

$$a = R\ddot{p}_1 + \ddot{d} \quad (3.61)$$

entonces

$$\ddot{p}_0 = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times R\dot{p}_1 + a \quad (3.62)$$

Seguendo la misma notación que al obtener (3.54) encontramos que (3.62) se puede escribir como

$$a_{e,j} = \dot{\omega}_i \times r_{i,j} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,j}) + 2\omega_i \times R_{i-1,0}^T b \dot{A}_i + R_{i-1,j}^T a_{e,j-1} + b \ddot{A}_i \quad (3.63)$$

y en consecuencia

$$a_{e,i} = \dot{\omega}_i \times r_{i,i+1} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,i+1}) + 2\omega_i \times R_{i-1,0}^T b_i \bar{q}_i + R_{i-1,0}^T a_{e,i-1} + b_i \bar{q}_i \quad (3.64)$$

Con las ecuaciones anteriores se define un algoritmo para encontrar las fuerzas y los pares que intervienen, por articulación, en el movimiento del manipulador.

Empezamos con condiciones iniciales:

$$\omega_0 = 0$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$a_{e,0} = 0$$

$$a_{e,0} = 0$$

Empezando con estos datos se inicia un proceso iterativo para encontrar

$$\omega_i$$

$$\alpha_i$$

$$a_{e,i}$$

desde $i=1$ hasta $i=n$, es decir, de manera progresiva desde la posición inicial.

Finalmente se calculan las fuerzas o pares por articulación, pero basándonos en las condiciones *finales* , es decir

$$f_{n+1} = 0$$

$$\tau_{n+1} = 0$$

Esta vez desde $i=n$ hasta $i=1$.

Este algoritmo conforma la herramienta matemática para resolver el problema dinámico inverso, pues con lo visto en los capítulos anteriores, dada una posición o trayectoria deseadas del manipulador, podemos obtener un vector de fuerzas generalizadas para saber, de manera teórica, cómo y cuánto se necesitan mover los actuadores para llevar al manipulador a la posición deseada. Sin embargo es necesario tomar en cuenta los efectos causados por las condiciones reales, condiciones que hasta ahora no se han considerado. En el próximo capítulo se planteará el problema de control con la solución que esta tesis propone, estableciendo un sistema de malla cerrada para minimizar el error de posición de los actuadores a través de correcciones sobre condiciones cinemáticas y dinámicas reales, para optimizar el tiempo de operación del robot.

Hasta este punto, hemos logrado que con una trayectoria, velocidad y aceleración dadas, el órgano terminal se posicione en los puntos de la trayectoria moviendo los eslabones con los pares o fuerzas requeridos. Sin embargo, en un plano real, esto no va a ocurrir, o por lo menos no con la misma precisión que deseamos.

Se debe entonces conocer la posición real y compararlas con su contraparte planeada. Es decir, encontrar la diferencia entre ambas. Para poder corregir este error, o por lo menos minimizarlo, es necesario hacer paso a paso esta comparación. A cada movimiento del manipulador corresponde un movimiento preestablecido, y para garantizar que ambos se parezcan con la precisión y exactitud requeridas es necesario un Sistema de Control.

Es necesario primero identificar los aspectos a considerar en el proceso de control. Por una parte esta el problema cinemático inverso, considerado en el capítulo II, que se encarga de la posición del manipulador. Para obtener información más precisa acerca de los movimientos del mismo se estudia la dinámica involucrada por un proceso dinámico inverso (capítulo III) para determinar con mayor exactitud las causas de un posible comportamiento de la planta.

Es decir, lo que se esta manejando son niveles de información, donde el control básico involucra únicamente la información básica, en este caso la información de posición, y conforme la aplicación lo requiera en una relación costo-beneficio, se puede ir complicando para incrementar la precisión en la respuesta, de manera que si a esa información básica se le aumenta la información acerca de la masa de los eslabones, momentos de inercia, etc., que modifican esa posición calculada, entonces se tendría mayor precisión en la predicción del resultado. Tradicionalmente no es costeable ir mas allá y se plantea directamente un control directo sobre las variables de articulación. Lo que va a decir que profundidad de control se aplique siempre va a ser la precisión que se requiera en el uso práctico del manipulador.

Sin embargo para obtener los mejores resultados es necesario plantear dos niveles de

control, esto es, ver el robot que se va a controlar tanto como una sola planta como un conjunto de n plantas donde n es el número de articulaciones del manipulador. De aquí el nombre de Control Distribuido, porque vamos a repartir la responsabilidad del controlador en cada una de las articulaciones proponiendo un control en paralelo para ellas mientras se sigue estableciendo un control general sobre la planta. Lo que realmente va a suceder es que el control más periódico de cada una de las articulaciones va a ayudar a un control menos frecuente del sistema global a precisar los resultados sin cargar con el trabajo matemático que, como ya hemos visto en los capítulos anteriores, los problemas cinemático y dinámico inversos suponen.

Se plantea a continuación un sistema global de control del robot visto como una planta única con parámetros inherentes a ella. Después agregará el sistema de control secundario *sobre* el sistema de control general para establecer finalmente el sistema distribuido de control, explicando cual es la interacción entre los dos y las ventajas que el esquema puede llegar a ofrecer.

En los capítulos anteriores, al hablar de la cinemática del manipulador, encontramos una matriz que describe la orientación y posición del órgano terminal, a la cual llamaremos simplemente A .

$$A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde R es la matriz de rotación ortogonal que nos describe la orientación y d es el vector de coordenadas externas que nos define la posición.

Así pues, podemos descomponer a A en cuatro vectores:

$$A = \begin{bmatrix} n(t) & s(t) & a(t) & p(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde n , s y a son los vectores unitarios de la rotación, respectivamente: Vector normal, de deslizamiento y de acercamiento, y son equivalentes con los ángulos de Euler de giro.

elevación y acercamiento.

Dado que los ángulos de Euler definen a R como una composición de rotaciones sucesivas alrededor de los ejes principales x_0 , y_0 , z_0 , una rotación alrededor x_0 , luego una rotación alrededor de y_0 para finalizar con la última rotación sobre z_0 , definidas respectivamente por

$$\phi, \theta, \psi$$

podemos definir a los tres vectores n , s , y a como ortonormales, y aplicando la regla de la mano derecha (Fig. 15):

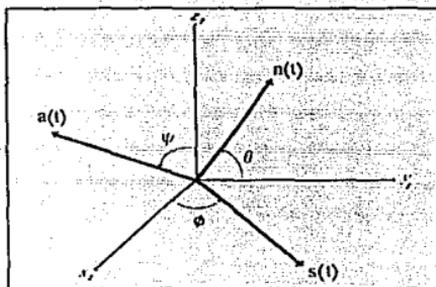


Fig. 15: Vectores Ortonormales n , s y a

$$s = a \times n \quad (4.3)$$

El vector restante, $p(t)$ es el vector de posición, o sea las coordenadas x, y, z que definen el lugar en el marco base de referencia donde se encuentra el órgano terminal.

El error que puede existir en los movimientos del manipulador es simplemente la diferencia existente entre los valores deseados con los valores reales de orientación y posición.

Así, teniendo una matriz de valores preestablecidos, valores deseados, A_d :

$$A_d = \begin{bmatrix} n_d & s_d & a_d & p_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

formada con los valores calculados, entonces el error de posición se define como:

$$e_p(t) = p_d(t) - p(t) = \begin{bmatrix} p_{x_d}(t) - p_x(t) \\ p_{y_d}(t) - p_y(t) \\ p_{z_d}(t) - p_z(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El error de orientación se ve como una diferencia angular entre los vectores n , s , a y los vectores deseados n_d , s_d , a_d , de acuerdo a la Fig. 16, la cual muestra solamente a los vectores n y n_d , pues debido a la relación existente entre estos vectores y el resto de acuerdo a (4.3), encontramos que la misma diferencia angular existe con todos los demás.

Puede verse que el error se dibuja de forma tal que el vector r representa el eje alrededor del cual gira el sistema n , s , a cuando existe error de orientación.

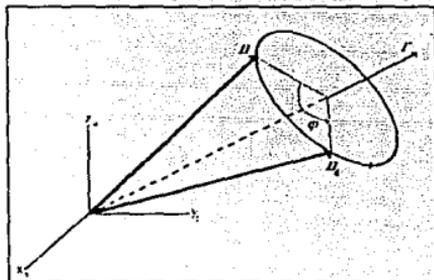


Fig. 16 Error de Orientación

De esta manera podemos apreciar un distanciamiento angular, por vector, en términos del alineamiento de sus ejes. Sin embargo es importante señalar que en cualquier caso el punto de partida de ambos vectores es el mismo, es decir, los dos parten del mismo origen en el mismo marco base de referencia.

$$[n_d(t_0), s_d(t_0), a_d(t_0)] = [n(t_0), s(t_0), a(t_0)] \quad (4.6)$$

donde t_0 es el tiempo de inicio del movimiento.

Otra vez guiándonos por la Fig. 16 podemos definir el error de orientación, siendo éste muy pequeño como:

La restricción en el rango angular se justifica por la anticipación de un error pequeño para cada t , pues los torques van a ser calculados con una frecuencia mayor (5 o más veces) a la

$$a_d(t) = r(t) \operatorname{sen} \varphi(t) \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi(t) < \frac{\pi}{2} \quad (4.7)$$

frecuencia de resonancia del manipulador:

Ahora bien. Si expresamos al vector n_d como:

$$n_d = e^{Q\varphi} n = [f \cos \varphi + r r^T (1 - \cos \varphi) + Q \operatorname{sen} \varphi] n \quad (4.8)$$

donde:

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

con Q como matriz antisimétrica.

Si además notamos que s_d y a_d coinciden con s y a respectivamente cuando n_d coincide con n gracias a la rotación, entonces se puede generalizar:

$$[n_d \ s_d \ a_d] = e^{Q\varphi} [n \ s \ a] \quad (4.11)$$

donde n , s , y a son mutuamente ortogonales y $[n \ s \ a]$ es no singular, de tal manera que:

$$e^{Q\varphi} = [n_d \ s_d \ a_d] [n \ s \ a]^{-1} = [n_d \ s_d \ a_d] [n \ s \ a]^T \quad (4.12)$$

Por otro lado, si definimos

Podemos combinar (4.13) con (4.8) para obtener

$$e^{i\varphi} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$r \operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho_{32} - \rho_{23} \\ \rho_{13} - \rho_{31} \\ \rho_{21} - \rho_{12} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Como los vectores n , s , y a son ortogonales entre sí, al recordar la definición del producto vectorial o producto cruz de dos vectores encontramos que el vector resultante de esta operación es un vector normal al plano descrito por los dos vectores multiplicados. Sin embargo estos vectores son unitarios, módulo igual a 1, y entonces combinando (4.12) y (4.13) deducimos que:

$$\begin{bmatrix} \rho_{32} - \rho_{23} \\ \rho_{13} - \rho_{31} \\ \rho_{21} - \rho_{12} \end{bmatrix} = (n \times n_d) + (s \times s_d) + (a \times a_d) \quad (4.15)$$

Entonces, igualando (4.15) con (4.14) encontramos que

$$(n \times n_d) + (s \times s_d) + (a \times a_d) = 2r \operatorname{sen} \theta \quad (4.16)$$

de (4.7):

$$(n \times n_d) + (s \times s_d) + (a \times a_d) = 2e_o \quad (4.17)$$

donde e_o es el error de orientación. Finalmente

$$e_o = \frac{1}{2} [(n \times n_d) + (s \times s_d) + (a \times a_d)] \quad (4.18)$$

que es la expresión que nos permite calcular directamente el error de orientación con las coordenadas deseadas y reales del órgano terminal.

Una vez definidos los errores de posición (4.5) y orientación (4.18) procedemos a efectuar la propuesta de control, y para esto es necesario recordar la existencia de la matriz J tal que:

$$\dot{X}_e = J\dot{q} \quad (4.19)$$

$$\ddot{X}_e = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (4.20)$$

donde (4.19) nos define la velocidad y (4.20) la aceleración del vector de coordenadas externas.

Ahora bien, este control de malla cerrada se basa en la idea de reducir los errores de posición y orientación del órgano terminal a cero. Como habíamos dicho antes, si la trayectoria del manipulador está planeada, entonces se conocen los valores para la posición deseada X_w así como su velocidad y su aceleración con respecto al marco base de referencia en todos los puntos de esa trayectoria, de manera que para reducir el error de posición es necesario aplicar torques y fuerzas de corrección al manipulador de manera que se satisfaga

$$\ddot{X}_e(t) = \ddot{X}_{e_d}(t) + K_1[\dot{X}_{e_d}(t) - \dot{X}_e(t)] + K_2[X_{e_d}(t) - X_e] \quad (4.21)$$

donde K_1 y K_2 son constantes escalares.

Si K_1 y K_2 se escogen para que el polinomio característico de (4.21) tenga partes reales negativas, entonces podemos asegurar una convergencia asintótica del error de posición del órgano terminal. Esto se ve más claro si la reescribimos como:

$$\frac{d^2}{dt^2}(X_{e_d} - X_e) + K_1 \frac{d}{dt}(X_{e_d} - X_e) + K_2(X_{e_d} - X_e) = 0 \quad (4.22)$$

donde

$$e_p = (X_{e_d} - X_e) \quad (4.23)$$

es el error de posición.

Si ahora nos ocupamos de las velocidades angulares, encontramos que para una trayectoria planeada el valor de la velocidad angular deseada es conocido, entonces, de acuerdo a (4.7) el error de orientación se corrige si el órgano terminal es rotado theta radianes alrededor de r , y por lo tanto la velocidad angular real llega a tener la misma dirección que e_o para satisfacer:

$$\dot{\omega}(t) = -\dot{\omega}_d(t) + K_1[\omega_d(t) - \omega(t)] + K_2 e_o(t) \quad (4.24)$$

Visto de manera generalizada:

$$V_d = \begin{bmatrix} \dot{X}_{e_d} \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$E = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

De tal manera que el vector aceleración, según (4.21) y (4.24) de acuerdo a la notación de (4.25) y (4.26) quedaría:

$$\dot{V} = V_d + K_1(V_d - V) + K_2 E \quad (4.27)$$

Generalizando (4.20) tenemos que

$$\dot{V} = J\dot{q} + \dot{J}q \quad (4.28)$$

que se puede reescribir como

$$\dot{q} = J^{-1}[\dot{V} - \dot{J}q] \quad (4.29)$$

y al sustituir (4.27) en (4.29) obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}[\dot{\mathbf{V}}_d + \mathbf{K}_1(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}) + \mathbf{K}_2\mathbf{E} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}] \quad (4.30)$$

Ahora, si generalizamos (4.19)

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.31)$$

que se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \quad (4.32)$$

y al sustituir (4.32) en (4.30) obtenemos finalmente:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}_1\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{V}}_d + \mathbf{K}_1\mathbf{V}_d + \mathbf{K}_2\mathbf{E} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.33)$$

Esta ecuación es la que nos sirve como base para el algoritmo de control global malla cerrada descrito en diagrama de bloques en la fig. 17. Las constantes \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son parámetros asignados, variables según condiciones externas al sistema por medio de potenciómetros o cualquier otro elemento de control manual. El vector de coordenadas externas deseado, su velocidad y aceleración, son entradas conocidas, en tanto que el vector de coordenadas internas real, su velocidad y aceleración, se conocen gracias a instrumentos como decodificadores ópticos, tacómetros o cualquier otro mecanismo de medición, pero esto no es importante en nuestro estudio. Conociendo las coordenadas internas, los vectores de orientación n , s y a se pueden conocer, así como el vector de posición p . De este modo obtenemos tanto la matriz de jacobianos como la matriz de transformación lineal A real, que al compararla con la matriz A deseada, calculada a partir de los parámetros de trayectoria planeada, nos da el vector de error E . Obtenemos entonces la aceleración de coordenadas internas con (4.33) que junto con los valores obtenidos

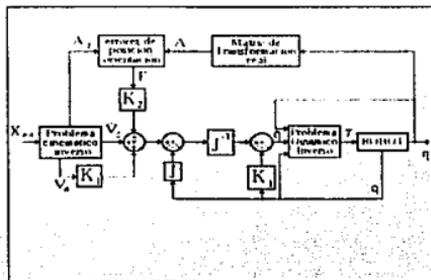


Fig. 17- Diagrama de Bloques del Sistema de Control Global

por medición directa constituyen la entrada al método Newton-Euler para resolver el problema dinámico inverso, y obtener así finalmente el vector de fuerzas generalizadas que va a mover los eslabones para llevar al órgano terminal a la posición estipulada.

Sin embargo la carga de trabajo del proceso de control es demasiado grande. El algoritmo de control es preciso, pero se puede optimizar si ahora dividimos la planta en n entidades independientes, cada una de ellas respondiendo a la entrada vectorial del sistema global con el vector de fuerzas generalizadas y realimentada localmente por medio de sensores en la planta. Entonces, si tomamos la planta y la realimentamos localmente en paralelo con el sistema general según la Fig. 18, tendremos n sistemas locales de control donde n es el número de articulaciones, número de grados de libertad.

Cada una de las articulaciones esta asociada a un sistema básico de control realimentado que solo consta de un controlador, un sensor, y la planta (Fig. 19). El sensor monitorea el estado de la articulación, que es la planta de cada uno de los sistemas locales de control. Esta información pasa al controlador para luego amplificarse, añadirse a las perturbaciones e introducir la nueva información a la planta. Las perturbaciones en este esquema distribuido son las interacciones con las demás articulaciones y sus actuadores.

El objetivo de diseño en esta estructura básica de control realimentado con una sola entrada y una sola salida es escoger al controlador de tal manera que la salida de la planta siga una salida ideal, dada por una señal de referencia. Sin embargo la señal de control no es la única entrada del sistema, existen perturbaciones, que no son sino entradas fuera de nuestro control,

que también influyen en la salida del sistema. Así pues, el controlador debe estar diseñado de

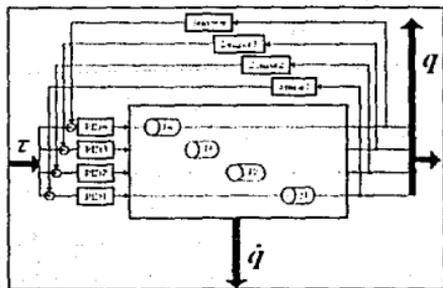


Fig. 18 Diagrama de Control Distribuido

modo que los efectos que las perturbaciones tengan en la salida sean mínimos. Si esto se logra, se dice que la planta "rechaza" estas señales. Tanto el seguimiento de la señal de referencia como el rechazo de perturbaciones deben ser los objetivos centrales de cualquier metodología de control.

El controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) es ideal tanto por su capacidad para rechazar perturbaciones como por su facilidad para conseguirlo, siendo el más común de los disponibles comercialmente. En la Fig. 18 se muestran unos pequeños bloques denotados PID_n , refiriéndose a este tipo de controlador según el esquema básico de la Fig. 19, en tanto que las articulaciones del robot están denotadas por J_n , refiriéndose a la planta del sistema básico de control de la misma figura. La entrada al sistema es un vector de fuerzas generalizadas con n elementos ($n = N^\circ$ de articulaciones), cada uno de ellos correspondiente a un sistema de control independiente. Cada uno de estos sistemas de control está controlado por un procesador independiente a los demás, y la comunicación entre ellos se puede lograr con una red de información.

La idea básica es que al estar manejando dos niveles de control se eviten operaciones matemáticas y la carga de trabajo en el procesador central no sea demasiada. Es decir, si dejáramos el control en un nivel global, al definir la cantidad de operaciones o procesos que globalmente se tienen que hacer como P_G , y que se realizan un determinado número de veces por unidad de tiempo, es decir, con una frecuencia f_G , entonces tendríamos la carga de trabajo definida por la ecuación:

$$T_G = P_G f_G \quad (4.34)$$

Como se ha planteado en los primeros tres capítulos, la carga de trabajo T_G es muy grande

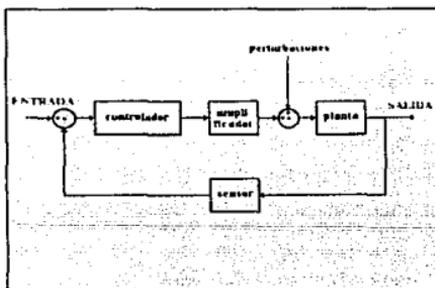


Fig. 19 Estructura básica de un sistema regulado.

uesto que la cantidad de operaciones a realizar P_G es muy grande, aparte de que al contar solamente con un control global tendr a que realizarse con la mayor frecuencia posible (f_c muy grande) para hacer uso de las ventajas que en precisión ofrece la metodología de control.

Sin embargo, al tener un sistema de control paralelo distribuido tendríamos, por una menor cantidad de operaciones a realizar por articulación para el control local que aparte se realiza al mismo tiempo que las demás articulaciones, y coordinado por el sistema de control global. La frecuencia con la que el sistema de control distribuido debe trabajar tiene que ser mayor a la frecuencia con la que trabaje el sistema global, de tal modo que como todas los sistemas locales de las articulaciones trabajan al mismo tiempo con procesadores distintos como sistemas monovariables realizando un mínimo de operaciones por la simplicidad del sistema de control, entonces este número de procesos P_M va a ser mucho menor que P_G . Así pues, encontramos que al efectuar este proceso distribuido con una frecuencia f_M mayor a f_c manteniendo a T_M bastante menor a T_c , se puede entonces plantear una frecuencia muy pequeña para el sistema global, facilitando el trabajo al procesador central, que va a realizar la misma cantidad de operaciones, pero con menor frecuencia, en tanto que el sistema distribuido va a funcionar con una frecuencia bastante mayor, pero trabajando con un número menor de operaciones. Se plantean dos frecuencias: Una de operación normal del sistema de control, f_1 que es muy grande y es la necesaria para mantener los datos del manipulador actualizados de manera satisfactoria; y una mas lenta, una frecuencia de supervisión de la frecuencia de operación f_2 . Usando unicamente el sistema global, la frecuencia de operación tendr a que ser f_1 , con una carga de trabajo muy pesada en el procesador central. En el sistema distribuido, la frecuencia de operación f_1 estar a destinada a los sistemas de control PID por articulación, en tanto que el sistema global trabajar a a una frecuencia f_2 . La idea es que se cumpla que:

$$P_G f_2 \cdot P_M f_1 < P_G f_1 \quad (4.35)$$

Así acoplado al sistema global el sistema distribuido trabaja como una serie de sistemas monovariables con una sola entrada y una sola salida, donde la entrada al sistema es el elemento del vector de fuerzas generalizadas correspondientes a la articulación en cuestión según (3.38) y (3.39). La planta del sistema esta definida por articulación, y se refiere al elemento de control

que es el motor que mueve al eslabón asociado a la articulación y a la carga correspondiente del manipulador.

La razón del uso de uno u otro tipo de controlador para los sistemas monovariantes que conforman el sistema distribuido se basan principalmente en la búsqueda de un dispositivo de ajuste para que el sistema se comporte según especificaciones dadas. El dispositivo en cuestión debe satisfacer algún criterio de diseño (lugar de las raíces, respuesta en frecuencia, tiempo, etc.). En la práctica no siempre es posible encontrar o construir el dispositivo que satisfaga las necesidades de un sistema dado, sino que se trata de acoplar lo ya existente para abaratar costos en la implementación de un diseño dado. Es por esto que comercialmente ya existen controladores con diversas especificaciones, dependiendo de su utilización. Es importante definir el uso de un compensador PID pues esto facilita la etapa de diseño limitando las posibilidades a una sola función de transferencia compensadora.

La función de transferencia de un compensador PID es, con sus constantes proporcional (K_p), derivativa (K_D) e integral (K_I).

$$C(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} \quad (4.36)$$

En el siguiente capítulo se plantearán los algoritmos de control para el sistema de bloques del sistema global de control, pero no se debe perder de vista que no existe ninguna complicación al sintetizar el sistema local de control monovariante en una computadora, quedando como único problema a resolver el de las comunicaciones entre las distintas computadoras, pero que como ya dije antes, un sistema en red puede encargarse de ello.

Hasta ahora se han definido métodos generales para el control de manipuladores mecánicos. Se han definido los procesos que intervienen en el diagrama de control (Fig. 17), pero el objetivo real de todo este análisis no es solamente obtener una fórmula base de un sistema, sino el definir un sistema físico que pueda ser procesado de una manera óptima, para agilizar el tiempo de respuesta de la planta, el robot.

Como se planteó en la introducción, se trata de que los pesados cálculos vistos en los capítulos II y III puedan ser realizados por varios procesadores a la vez. A esta enfoque de control se le conoce como *distribuido* porque las tareas que tradicionalmente estarían a cargo de un solo procesador, se distribuyen en varios para acelerar la obtención del resultado.

De acuerdo al diagrama de bloques de la Fig. 17, la entrada al sistema es el vector de coordenadas externas para el punto de la trayectoria previamente concebida. Es decir, la entrada básica al sistema es el conjunto de vectores de coordenadas externas que definen la trayectoria del manipulador, de tal manera que se puede obtener con base en dicha trayectoria la velocidad y aceleración deseadas. Para hacer esto es necesario dar al sistema una definición completa de la planta a controlar, es decir, proporcionar para cada una de las articulaciones del robot el tipo de articulación y los parámetros de Denavit-Hartenberg que vimos en el capítulo II, el número de grados de libertad, y el número de puntos a considerar en la trayectoria, así como el vector de coordenadas internas en estado de reposo del robot.

BLOQUE I

DEFINICIÓN DEL ROBOT

K \triangleq Número de puntos de la trayectoria

n \triangleq Número de grados de libertad

Para cada Articulación:

Para $i = 1, 2, 3, \dots, i, \dots, n$

$$\xi_i \triangleq \text{Tipo de Juntura} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = 1 \quad \text{rotatoria} \\ \xi_i = 0 \quad \text{prismática} \end{array} \right.$$

Parámetros de Denavit-Hartenberg

$a_i \triangleq$ distancia entre Z_i y Z_{i-1} medido sobre X_i

$d_i \triangleq$ distancia entre o_{i-1} y el punto de intersección entre X_i y Z_{i-1} medido sobre Z_{i-1}

$\alpha_i \triangleq$ ángulo entre Z_i y Z_{i-1} medido en el plano normal a X_i

$\theta_i \triangleq$ ángulo entre X_i y X_{i-1} medido en el plano normal a Z_{i-1}

Condiciones Iniciales o de Reposo

$$q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ q_{03} \\ \vdots \\ q_{0i} \\ \vdots \\ q_{0n} \end{bmatrix}$$

Vector de Coordenadas internas deseado:

Para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, K :$

$$X_{ek} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \\ \Psi_k \\ \theta_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}$$

Según lo expuesto en los capítulos anteriores, para poder encontrar de manera directa el vector de fuerzas generalizadas necesario para mover los actuadores del manipulador a partir de una trayectoria dada, es necesario resolver primero el problema cinemático inverso para encontrar el vector de coordenadas internas para cada punto de la trayectoria.

De acuerdo a (2.101) la solución al problema cinemático inverso se realiza por medio de una aproximación basada en el método de Newton empezando con las condiciones iniciales dadas en el Bloque 1 de definición del manipulador y el primer punto de la trayectoria diseñada.

Como requisito para que este método trabaje es absolutamente necesario que la distancia entre los puntos de la trayectoria sea muy pequeña, pues con esta condición establecemos que el método converge en una sola iteración y que la diferencia de posición entre un punto y otro de la trayectoria es, aunque muy pequeño, suficiente para garantizar un error menor durante la aplicación del método de convergencia de Newton, forzando así a un seguimiento eficiente de la trayectoria. De este modo usamos la diferencia existente entre el vector de coordenadas externas obtenido por medio de la solución del problema cinemático directo y el vector de coordenadas externas correspondiente al punto que le sigue en la trayectoria. Con esto nos

ahorramos en notación un subíndice indicando el número de iteración en el método de Newton.

En una primera iteración, tendríamos:

$$q_1 = q_0 + J^{-1}(q_0)[X_{r_1} - f(q_0)] \quad (5.1)$$

Es claro entonces que de aquí el proceso es directo hasta la convergencia que define la posición del órgano terminal para todo punto de la trayectoria k . Sin embargo tenemos que hallar la matriz de jacobianos ($J(q_k)$) invertida para resolver el problema cinemático inverso. En el bloque con el que se define la operación para obtener la matriz de jacobianos nos basamos en valores de la matriz de transformación, es por eso que primero debemos obtener dicha matriz por medio de la solución del problema cinemático directo, y que además utilizaremos en otros bloques.

Las ecuaciones (2.24) a la (2.32) nos dan los términos correspondientes a la matriz de rotaciones de acuerdo a (2.18), utilizando las tres coordenadas externas de orientación, en tanto que las tres coordenadas externas de posición nos dan directamente el vector d .

BLOQUE II

PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESEADA

Dado un vector de coordenadas externas X , para cada punto de la trayectoria, de tal forma que:

$$XE[n] \triangleq \text{Elemento } n\text{-ésimo del vector de coordenadas externas } X,$$

y basados en que para cada articulación i se genera una matriz de transformación de coordenadas $A_n(i)$:

$$AD[i] = \begin{bmatrix} AD[i][1][1] & AD[i][1][2] & AD[i][1][3] & AD[i][1][4] \\ AD[i][2][1] & AD[i][2][2] & AD[i][2][3] & AD[i][2][4] \\ AD[i][3][1] & AD[i][3][2] & AD[i][3][3] & AD[i][3][4] \\ AD[i][4][1] & AD[i][4][2] & AD[i][4][3] & AD[i][4][4] \end{bmatrix}$$

Como notación, vamos a indicar la transformación de las coordenadas de la articulación (i-1) a la articulación (i) con un solo índice, pues las matrices van a ser acumulativas, esto es, al indicar la matriz de transformación AD(i) nos estamos refiriendo a la composición de transformaciones desde la base hasta la articulación i-ésima, de acuerdo a (2.17) de manera que:

$$AD[i] = A_0^{-1} = A_0^{-1} A_1^{-2} A_2^{-3} \dots A_{i-1}^{-1}$$

donde, para referirme a la matriz completa de transformación desde la base hasta el órgano terminal:

AD Δ *Matriz de Transformación obtenida a partir de valores deseados A_D*

y como notación adicional:

i Δ *Nº de Articulación en el manipulador*

Q[i] Δ *Elemento del vector de coordenadas internas para la articulación i-ésima q_i*

FQ Δ *Vector de coordenadas externas en función de q $f(q)$*

Por medio de la representación de Denavit-Hartenberg encontramos, basados en una serie de movimientos preestablecidos, que la estructura de estas matrices es fija y dependiendo del tipo de articulación se trata de (2.20) o (2.21).

La composición de rotaciones no es sino la multiplicación de estas matrices dependiendo del tipo de articulación, y a través de estas multiplicaciones encontramos la matriz *A* deseada basados en el vector de coordenadas externas correspondiente al punto de la trayectoria.

Las funciones que componen la matriz de transformación tienen como variable a algún parámetro de Denavit-Hartenberg, y como son funciones no lineales es necesario recurrir a algún método numérico para obtener estas variables, que en conjunto componen al vector de coordenadas internas. Sin embargo al efectuar la solución al problema cinemático directo dado un vector de coordenadas internas, la obtención del vector de coordenadas externas correspondiente no tiene ninguna complicación.

Para un vector de coordenadas internas q , al resolver el problema cinemático directo encontramos un vector de coordenadas externas $f(q)$ cuyos primeros tres elementos corresponden a la posición, las coordenadas x , y , z del órgano terminal, y están dados por:

for $(m = 1 ; m = 3 ; m + +)$

$$FQ[m] = AD[m][4]$$

donde m identifica al elemento del vector FQ

Para obtener los tres elementos restantes, de acuerdo a (2.37):

$$FQ[4] = \text{ATAN}(AD[2][1]/AD[1][1])$$

de acuerdo a (2.45):

$$FQ[5] = \text{ATAN}(-AD[3][1] / ((AD[1][1]*\text{COS}(FQ[4]) - AD[2][1]*\text{SIN}(FQ[4])))$$

finalmente, de acuerdo a (2.53):

$$FQ[6] = \text{ATAN}((AD[1][2]*\text{SIN}(FQ[4]) - AD[2][3]*\text{COS}(FQ[4])) / (AD[2][2]*\text{COS}(FQ[4]) - AD[1][2]*\text{SIN}(FQ[4])))$$

Es necesario ahora encontrar un algoritmo eficaz que nos permita obtener la matriz de Jacobianos tal y como lo indicamos en el capítulo II, según (2.90).

La matriz de Jacobianos tiene como elementos los jacobianos que representan tanto la

velocidad lineal como angular de cada uno de los eslabones, por junta. Así pues, si el robot tiene 6 juntas, tiene 6 grados de libertad y la matriz de jacobianos tiene 6 columnas. Posee 6 renglones siempre, los primeros tres se refieren a la velocidad lineal y los restantes a la angular.

Encontramos dos términos a considerar en los Jacobianos según (2.91) y (2.92): El eje de rotación o traslación de la junta que mueve al eslabón en cuestión y el producto vectorial de este eje con la distancia que marca al eslabón. Afortunadamente es posible hacer una relación directa entre estos dos conceptos y los términos obtenidos en el bloque II, de tal manera que obtener el algoritmo del Jacobiano es tan solo un reacomodo de valores ya obtenidos.

BLOQUE III OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE JACOBIANOS

Notación:

$J_{j|i}$ Término j -ésimo del Jacobiano del eslabón i -ésimo J_j

$$\xi = 0$$

For ($j=1$; $j=3$; $j++$)

$$J_{j|i} = AD[3][j]$$

For ($j=4$; $j=6$; $j++$)

$$J_{j|i} = 0$$

$$\xi = 1$$

For ($j=1$; $j=3$; $j++$)

$$ARn[i][j] = AD[2][j] * \cos(a[i]) - AD[3][j] * \sin(a[i])$$

$$APn[i] = AD[1][4] + a[i]$$

$$J[j][i] = APn[i] * ARn[i][j] - AD[1][j] * ARn[i][4]$$

For (j=4 ; j=6 ; j++)

$$J[j][i] = AD[(j-3)][j]$$

La matriz de Jacobianos por sí sola no es de interés para el sistema de control. Para que pueda ser útil es necesario invertirla y derivarla, según el diagrama de bloques de la Fig. 17 basado en (4.33).

La inversión de la matriz se realiza con cualquier algoritmo (a veces de librería) creado para este efecto, sin embargo el truco reside en tener siempre una matriz cuadrada para evitar errores. Es importante notar en este punto que aquí es donde la trayectoria puede enseñar sus fallas, pues en caso de que algún punto de ésta caiga en una singularidad (capítulo II), alguna columna o renglón se va a eliminar "descuadrando" la matriz, pero esto es problema de trayectoria.

En caso de que no haya singularidades en la trayectoria y que el manipulador sea de más de 6 grados de libertad, tendremos que recurrir a (2.112) para preparar la matriz para la inversión. En caso contrario la inversión será directa.

A partir del siguiente bloque hago uso de funciones no definidas en este trabajo, funciones simples de inversión, multiplicación y derivación numérica de matrices. El objetivo de la tesis es encontrar un algoritmo eficiente de control, no detallar rutinas que pueden variar dependiendo del sistema, y de quien lo aplique. Sin embargo procuro mantenerme dentro del rigor del código real del lenguaje de programación C en cuanto a sintaxis, pero omitiendo los detalles estructurales del programa como la definición de variables y la creación de funciones especiales.

BLOQUE IV

INVERSION DE LA MATRIZ DE JACOBIANOS

Notación:

$J[i][j]$ \triangleq Término j -ésimo de la matriz de Jacobianos Inversa del eslabón i -ésimo

n \triangleq Número de grados de libertad

$INVERS()$ \triangleq Rutina normal para la inversión de matrices

$MULT(,)$ \triangleq Rutina para la multiplicación de matrices

De acuerdo a (2.112) y recordando que la matriz transpuesta se obtiene

$$J_{ji}^T = J_{ij}$$

if ($n > 6$)

$J[i][j] = MULT(J[i][j] , INVERS(MULT(J[j][j] , J[i][j])))$

else

$J[i][j] = INVERS(J[i][j])$

Cuando tenemos la matriz de Jacobianos tenemos una matriz cuadrada de números reales. Para obtener su derivada simplemente hay que adoptar un algoritmo existente para la derivación discreta.

BLOQUE V

DERIVACION DE LA MATRIZ DE JACOBIANOS

Notación:

$JD[j][i]$ Δ Término j -ésimo de la matriz de Jacobianos derivada del eslabón i -ésimo

$DERNUM()$ Δ Rutina para la Derivación Numérica de matrices

$$JD[j][i] = DERNUM(J[j][i])$$

Para incrementar el control que se tiene de las variables de salida del sistema, en (4.33) vamos a utilizar las condiciones reales arrojadas por el bloque III para determinar el jacobiano y manipularlo según los bloques IV y V.

Es ahora posible calcular el problema cinemático inverso con la matriz de jacobianos inversa del bloque IV basado en la estructura de (5.1).

BLOQUE VI

SOLUCIÓN AL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

Con la notación empleada en el bloque II y (2.101)

$$k = 1, 2, \dots, K$$

for ($k=1$; $k=K$; $k++$)

$$Q[k] = Q[k-1] + \text{MULT}(J[k], (XE[k] - FQ[k]))$$

La solución propuesta en el bloque VI es una aproximación según el método numérico de Newton para la solución de ecuaciones, dado que se trata de expresiones no lineales.

Para cada punto de la trayectoria k va a existir un vector de coordenadas internas representado por la solución al bloque anterior del lado teórico. Ahora necesitamos obtener el error de posición y orientación para satisfacer el diagrama de bloques de la Fig. 18, primero obteniendo una matriz de transformación, ahora basada en parámetros reales de realimentación.

El algoritmo para encontrar la matriz de transformación deseada a partir de las coordenadas externas indicadas por la trayectoria establecida es exactamente el mismo que se debe utilizar para encontrar la matriz de transferencia generada por los valores *reales* de coordenadas internas del manipulador. Es decir, refiriendonos a la Fig. 17 encontramos que la salida del sistema es el vector de coordenadas internas reales, medido a partir del robot mismo con instrumentos específicos en cada una de las articulaciones. Es posible usar un potenciómetro para medir el ángulo entre dos eslabones para encontrar las variables de articulaciones angulares y un LVDT (Linear Voltage Differential Transformer) para medir los desplazamientos lineales entre articulaciones en el caso de variables de articulaciones prismáticas.

BLOQUE VII

OBTENCIÓN DE MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN REAL

$$A_r = \begin{bmatrix} R_r & d_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AR a Matriz de Transformación medida A_r

Donde la única diferencia con el algoritmo descrito en el bloque II es la variable de junta a introducir al algoritmo, pues en este caso la información viene directamente de los instrumentos de medición.

$qr[k][i]$ Δ Variable de Juntura medida q_{rk}

Para fines prácticos ni siquiera importa el subíndice de la matriz A en la rutina.

Cuando tenemos por un lado los vectores de orientación y posición n , s , a , y p que calculamos teóricamente a raíz de la trayectoria planeada y por otro lado los que obtuvimos por la matriz de transformación obtenida con base en valores medidos directamente entonces podemos pensar en encontrar un factor de error, que como vimos en el capítulo IV está definido tanto en posición como en orientación.

El error de posición es una simple resta de componentes vectoriales de los vectores teórico y real de posición según lo expuesto en (4.5). El error de orientación es una combinación de los productos vectoriales de los vectores involucrados, reales y deseados, según (4.18)

BLOQUE VIII

OBTENCIÓN DEL FACTOR DE ERROR: POSICIÓN Y ORIENTACIÓN

De acuerdo a la notación presentada en el bloque II encontramos, que basados en (4.26) el factor de error es un vector de $[6 \times 1]$ dividido en dos vectores de $[3 \times 1]$: Los vectores de error de posición y de orientación.

donde, de acuerdo a (4.5) el error de posición está dado por:

$$E[1] = AD[1][4] - AR[1][4]$$

$$E[2] = AD[2][4] - AR[2][4]$$

$$E[3] = AD[3][4] - AR[3][4]$$

$$E = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[1] \\ E[2] \\ E[3] \\ E[4] \\ E[5] \\ E[6] \end{bmatrix}$$

Los tres elementos restantes que determinan el error de orientación no se calculan tan directamente, pues de acuerdo a (4.18):

For (m=3 ; m==6 ; m++)

$$E[m] = (1/2) |EN + ES + EA|$$

donde:

m = elemento del vector E

y

$$EN = \begin{bmatrix} EN[1] \\ EN[2] \\ EN[3] \end{bmatrix} ; \quad ES = \begin{bmatrix} ES[1] \\ ES[2] \\ ES[3] \end{bmatrix} ; \quad EA = \begin{bmatrix} EA[1] \\ EA[2] \\ EA[3] \end{bmatrix}$$

Para un producto vectorial entre dos vectores a y b:

$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$EN[1] = AR[2][1] * AD[3][1] - AR[3][1] * AD[2][1]$$

$$EN[2] = AR[3][1] * AD[1][1] - AR[1][1] * AD[3][1]$$

$$EN[3] = AR[1][1] * AD[2][1] - AR[2][1] * AD[1][1]$$

$$ES[1] = AR[2][2] * AD[3][2] - AR[3][2] * AD[2][2]$$

$$ES[2] = AR[3][2] * AD[1][2] - AR[1][2] * AD[3][2]$$

$$ES|3| = AR|1||2| * AD|2||2| - AR|2||2| * AD|1||2|$$

$$EA|1| = AR|2||3| * AD|3||3| - AR|3||3| * AD|2||3|$$

$$EA|2| = AR|3||3| * AD|1||3| - AR|1||3| * AD|3||3|$$

$$EA|3| = AR|1||3| * AD|2||3| - AR|2||3| * AD|1||3|$$

Finalmente hemos obtenido el valor buscado para la aceleración del vector de coordenadas internas como salida del sistema de control, para poder utilizar las ecuaciones dinámicas vistas en el capítulo III para determinar los pares o fuerzas necesarias para mover cada una de las juntas del robot.

Al calcular el vector de fuerzas generalizadas para mover el robot se va a iniciar el mecanismo que va a mover los actuadores correspondientes en la planta. Este movimiento NO va a ser el previsto. Va a haber cierto error a la salida del sistema que se va a corregir con la realimentación de información para funcionar como un sistema de control.

Además de la información referente al robot descrita en el bloque I, es necesario en este punto tener un archivo con la información referente a las características físicas del mismo: Tamaño, Peso, Materiales, etc. que nos ayuden a establecer la matriz de inercias que va a jugar un papel importante en la solución del problema dinámico.

BLOQUE IX

OBTENCIÓN DEL VECTOR DE FUERZAS GENERALIZADAS

Notación:

$OM[i]$ Δ Velocidad angular del eslabón i -ésimo ω_i

$OMV[i]$ Δ Primera derivada de la velocidad angular del eslabón i -ésimo $\dot{\omega}_i$

$AL[i]$ Δ Aceleración angular del eslabón i -ésimo α_i

$AC[i]$ Δ Aceleración Lineal del centro de gravedad del eslabón i -ésimo $a_{c,i}$

$AE[i]$ Δ Velocidad Lineal del extremo del eslabón i -ésimo $a_{e,i}$

$F[i]$ Δ Fuerza necesaria para mover el eslabón i -ésimo (Juntura Prismática) f_i

$T[i]$ Δ Par necesario para mover el eslabón i -ésimo (Juntura Rotacional) τ_i

$M[i]$ Δ Masa del eslabón i -ésimo m_i

$I[i]$ Δ Matriz de Inercia del eslabón i -ésimo I_i

$R[i-1][i]$ Δ Matriz de Rotaciones del eslabón $(i-1)$ al eslabón i -ésimo $R_{i-1,i}$

$RC[i]$ Δ Vector desde la junta i -ésima al centro de masa del eslabón i -ésimo $r_{i,c}$

$RAC[i]$ Δ Vector desde la junta $(i+1)$ al centro de masa del eslabón i -ésimo $r_{i+1,c}$

$RL[i]$ Δ Vector desde un extremo al otro del eslabón i -ésimo $r_{i,l,r}$

$Q[i]$ Δ Vector de coordenadas internas q_i

$QV[i]$ Δ Velocidad del vector de coordenadas internas \dot{q}_i

$QA[i]$ Δ Aceleración del vector de coordenadas internas \ddot{q}_i

n Δ Número de grados de libertad

$CRUZ(,)$ Δ Rutina que realiza el producto vectorial entre dos vectores

G Δ Aceleración de la Gravedad g

De notación prestada del Bloque II:

$$Z[i-1] = \begin{bmatrix} AD[3][1] \\ AD[3][2] \\ AD[3][3] \end{bmatrix}$$

Condiciones Iniciales:

$$OM[0] = AL[0] = AC[0] = AE[0] = 0$$

$$F[n+1] = T[n+1] = 0$$

$$\xi = 1$$

For ($i=1$; $i \leq n$; $i++$)

Término Común según (3.44):

$$B[i] = R[i][0] * Z[i-1]$$

Según (3.41):

$$OM[i] = R[i][i-1] * OM[i-1] + B[i] * QV[i]$$

Según (3.46):

$$AL[i] = R[i][i-1] * AL[i-1] + B[i] * QA[i] + CRUZ(OM[i], (B[i] * Q[i]))$$

Término Común manipulando (3.44):

$$OMV[i] = R[i][0] * AL[i]$$

Según (3.59):

$$AE[i] = R[i][i-1] * AE[i-1] + CRUZ(OMV[i], RL[i]) +$$

$$\text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{CRUZ}(\text{OM}(i), \text{RL}(i)))$$

Según (3.58):

$$\text{AC}[i] = \text{R}[i][i-1] * \text{AE}[i-1] + \text{CRUZ}(\text{OMV}[i], \text{RC}[i]) + \\ \text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{CRUZ}(\text{OM}(i), \text{RC}(i)))$$

$$\xi = 0$$

Término Común según (3.42):

$$\text{B}[i] = \text{R}[i][0] * \text{Z}[i-1]$$

Según (3.43):

$$\text{OM}[i] = \text{R}[i][i-1] * \text{OM}[i-1]$$

Según (3.47):

$$\text{AL}[i] = \text{R}[i][i-1] * \text{AL}[i-1]$$

Término Común manipulando (3.44):

$$\text{OMV}[i] = \text{R}[1][0] * \text{AL}[i]$$

Según (3.64):

$$\text{AE}[i] = \text{CRUZ}(\text{OMV}[i], \text{RL}[i]) + \text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{RL}[i])) +$$

$$\text{CRUZ}(2 * \text{OM}[i], (\text{R}[0][i-1] * \text{B}[i] * \text{QV}[i])) + \text{R}[i][i-1] * \text{AE}[i-1] + \text{B}[i] * \text{QA}[i]$$

Según (3.63):

$$\text{AC}[i] = \text{CRUZ}(\text{OMV}[i], \text{RC}[i]) + \text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{CRUZ}(\text{OM}[i], \text{RC}[i])) + \\ \text{CRUZ}(2 * \text{OM}[i], (\text{R}[0][i-1] * \text{B}[i] * \text{QV}[i])) + \text{R}[i][i-1] * \text{AE}[i-1] + \text{B}[i] * \text{QA}[i]$$

For (i = n ; i = 1 ; i -)

Según (3.36):

$$\text{F}[i] = \text{R}[i][i+1] * \text{F}[i+1] + \text{M}[i] * \text{AC}[i] - \text{M}[i] * \text{G}$$

Según (3.37):

$$T[i] = R[i] \cdot |i + 1| \cdot T[i + 1] - \text{CRUZ}(F[i], RC[i]) + \\ \text{CRUZ}((R[i] \cdot |i + 1| \cdot F[i + 1]), RAC[i]) + AL[i] + \text{CRUZ}(OM[i], (|i| \cdot OM[i]))$$

Finalmente la entrada a la planta es la información para poder mover los actuadores. Esta información sólo tiene que ser convertida a la forma de energía que genera el movimiento, por ejemplo: Con esta información de la fuerza necesaria para mover un eslabón aunado a un motor, entonces habrá que verificar las especificaciones del motor para saber cuanta corriente necesita el motor para poder generar tal fuerza, y entonces establecer una fuente de corriente acorde a las necesidades del movimiento.

El resultado de ese movimiento va a ser medido por los sensores y la información que de ellos nos den va a ser usada directamente para generar otra matriz de transferencia real como lo vimos en el bloque III, cerrando así la malla del sistema de control planteado en el capítulo IV.

ALGORITMO DE CONTROL

notación adicional:

$K \triangleq N^\circ$ de puntos en la trayectoria

$XED[k] \triangleq$ Vector velocidad de coordenadas externas $\dot{X}_{e,k}$

$XEA[k] \triangleq$ Vector aceleración de Coordenadas Externas $\ddot{X}_{e,k}$

$FI \triangleq$ Frecuencia de Trabajo del Sistema Global f_1

$F2 \triangle$ Frecuencia de Trabajo de los Sistemas Monovariantes f_2

$K1, K2 \triangle$ Factores de Ganancia en el Sistema Global

$FG[k] \triangle$ Vector de Fuerzas Generalizadas

$QR[k] \triangle$ Vector de Coordenadas Internas Reales

$QRV[k] \triangle$ Vector velocidad de Coordenadas Internas Reales

$J[k] \triangle$ Matriz de Jacobianos Inversa

NOTA: Al usar minúsculas me estaré refiriendo a un elemento del vector correspondiente, denotado en mayúsculas.

Planteando un ciclo general para toda la trayectoria:

for ($k=1$; $k=K$; $k++$)

En el sistema global con una frecuencia $F1$:

de acuerdo a (4.33):

$$QA[k] = -K1 * QV[k] + \text{MULT}(J[k], (XED[k] + (K2 * XE[k])))$$

del Bloque IX:

$$FG[k] = f(QA[k], Q[k], QV[k])$$

y por lo tanto al registrar los valores reales con sensores tenemos como salida del sistema de control que:

$$QR[k] = f(FG[k])$$

$$QRV[k] = g(FG[k])$$

Paralelamente, en los sistemas monovariantes pero con frecuencia $F2 > F1$:

Adaptando el Bloque IX localmente de acuerdo a la Fig. 18:

$$fg[k] = f(qa[k], q[k], qv[k])$$

Si, de acuerdo a (4.36) para un controlador PID:

$$C(s) = KP + KD*s + KI/s$$

entonces finalmente también tendremos, pero localmente, que:

$$qr[k] = f(fg[k], C(s))$$

$$qr[k] = g(fg[k], C(s))$$

La salida del sistema de control entonces se va a realimentar de acuerdo a la Fig. 17 para volver a empezar el proceso iterativo que empieza en el bloque I y termina en el IX para obtener el vector de fuerzas generalizadas que sirve de entrada al sistema local de control, pero no se debe perder de vista que en el sistema global ya se esta tomando en cuenta una señal de error pues también existe realimentación globalmente. Es el conjunto de las salidas locales supervisadas por un procesador central que controla el sistema global lo que conforman un vector de salida equivalente al vector de realimentación del sistema general.

A pesar del enfoque general y teórico que se le ha dado a este trabajo, no es difícil darse cuenta las ventajas que este tipo de control supone para un sistema constituido por un manipulador robótico. Cada vez las aplicaciones y las exigencias a las que se somete un robot son mayores, y es necesario tratar de encontrar soluciones que no requieran siempre la invención de un microprocesador de más bits. Es necesario adaptarse a los recursos existentes con ideas innovadoras.

Si bien es cierto que el planteamiento no es del todo original, también es cierto que el enfoque es necesario para cualquier planteamiento posterior viendo el trabajo como el primer módulo de un proyecto total. Analizar matemáticamente a un manipulador y proponer una metodología de control acorde con las necesidades de la industria que los utiliza es la base necesaria para lograr un avance en la filosofía de diseño que involucra estos elementos.

Como se ha demostrado, es posible tener un control muy preciso sobre la posición de un manipulador sobre un valor estipulado a manera de trayectoria desde el principio con poco costo computacional para la aplicación.

Como cualquier método general, para poder implantarlo es necesario contar con un conocimiento del manipulador, y de la metodología del diseño que aquí planteo, además de conocimientos suficientes de teoría de control para poder implementar el sistema distribuido.

Estos defectos en realidad son ventajas. Se trata de un sistema abierto a modificaciones y versátil según la aplicación que se le pueda dar. Es, por lo tanto, una idea para solucionar un problema, no la solución en sí.

Se ha tratado de ejemplificar el método general pero nunca se ha impuesto una metodología precisa para tal o cual actuador, tal o cual manipulador. Como base para un proyecto general es necesario detallar todos esos aspectos para controlar un robot definido totalmente, y lograr así una mayor eficiencia. Sin embargo es claro que no solo un proyecto

puede evolucionar de este trabajo, y eso permite que la vigencia del mismo prevalezca a avances en la tecnología, si no de ideología.

Sin embargo no se puede decir que Terminator utilice control distribuido en sus movimientos. No me imagino que se pueda optimizar un sistema a tal grado de responder de la manera que la ficción propone, principalmente por la tecnología existente actualmente. Sin embargo lo que esta tesis aporta es un ladrillo más en una estructura que va desarrollandose muy rapidamente. Ni lejos ni cerca de R2D2 o C3PO, la ficción se está convirtiendo en realidad.

- ANGULO, José Ma.. Curso de Robótica; editorial Paraninfo, España, 1985.
- HOLLERBACH, U.M. -A recursive Lagrangian formulation of manipulator, dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity-; IEEE Transactions on systems, man and cybernetics (vol. S. M. C.-10); Estados Unidos, nov.1980. pp. 730-736.
- LUH, J. Y. S.; Walker M. W. and Paul R. P. C. -On line computational scheme for mechanical manipulators-; Transactions of the ASME, journal of dynamic systems measurement and control (vol. 102) Estados Unidos, junio 1980. pp 69-76.
- MERIAM, J. I. Dinámica; editorial Reverté S. A.; España, 1978.
- OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna; editorial Prentice Hall; Argentina, 1970.
- SCHILLING, Robert J. Fundamentals of Robotics, Analysis and Control; editorial Prentice Hall; Estados Unidos, 1990.
- SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo con Geometría Analítica; editorial Wadsworth International-Iberoamérica; México, 1982.
- VUKOBRATOVIC M; Kircanski. Kinematics and Trajectory Synthesis of Manipulation Robots; Col. Scientific Fundamentals of Robotics (vol. 3); editorial Springer-Verlag; Alemania, 1986.
- WALKER M. W; Orin D. E. -Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms-; Transactions of the ASME, Journal of Dynamics systems, measurement and control (vol 104); Estados Unidos, sept. 1982. pp 205-211.
- WHITNEY D. E. -Force feedback control of manipulator, fine motions-; Transactions of the ASME, journal of dynamics systems, measurement and control; Estados Unidos, junio 1977. pp91-97
- WU C. H.; Paul R. P.-Resolved motion force control of robot manipulator; -IEEE Transactions on systems, man and cybernetics (vol. SMC-12 No. 3); Estados Unidos, junio 1982. pp 266-275.