

21  
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONVECCION NATURAL EN UNA CAPA DE FLUIDO  
EN ROTACION CON DEFORMACION SUPERFICIAL

T E S I S

Que para obtener el Título de

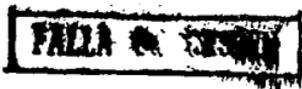
F I S I C O

presenta

PEDRO GILBERTO LOPEZ MARISCAL

México, D. F.

1992





## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

### RESUMEN

INTRODUCCION..... 1

### I INTRODUCCION A LA MECANICA DE FLUIDOS Y LA ESTABILIDAD HIDRODINAMICA

1.1 Descripción del movimiento de un fluido..... 6

1.2 Teorema de Transporte de Reynolds y conservación de la  
masa..... 8

1.3 Fuerzas sobre un fluido..... 11

1.4 Esfuerzos sobre un punto y conservación del momento  
lineal..... 13

1.5 Ecuación de Navier Stokes..... 17

1.6 Sistema de Referencia que rota..... 22

1.7 Rapidez de disipación viscosa..... 25

1.8 La ecuación de Conducción de Calor..... 27

1.9 Conceptos básicos de la Estabilidad Hidrodinámica..... 30

### II CONVECCION NATURAL DE UNA CAPA DE FLUIDO EN ROTACION CON DEFORMACION SUPERFICIAL

2.1 Ecuaciones básicas.....	34
2.2 Aproximación de Boussinesq.....	36
2.3 Condiciones de Frontera.....	38
2.4 Ecuaciones lineales para las perturbaciones.....	42
2.5 Modos Normales.....	47
2.6 Caso estacionario.....	50

### III RESULTADOS NUMERICOS

3.1 Caso 1a.....	56
3.2 Caso 1b.....	72
3.3 Caso 2a.....	84
3.4 Caso 2b.....	91
3.5 Caso 3a.....	95
3.6 Caso 3b.....	98
3.7 Caso 4a.....	101
3.8 Caso 4b.....	111

CONCLUSIONES.....	122
-------------------	-----

### BIBLIOGRAFIA

## INTRODUCCION

Cuando un fluido bajo la acción de la gravedad es calentado no uniformemente se puede observar un equilibrio mecánico bajo ciertas condiciones. Si este calentamiento es grande y marcadamente no uniforme el equilibrio se vuelve inestable y las perturbaciones resultantes producen un movimiento convectivo. Por otra parte, si las condiciones son tales que imposibilitan el equilibrio, la convección se presentará aunque la no uniformidad del calentamiento sea pequeña. En este caso también el aumento en el calentamiento del fluido lleva a una crisis, debida a la inestabilidad misma del movimiento convectivo. Estas situaciones representan casos especiales de uno de los fenómenos más interesantes en el estudio de la Hidrodinámica: la Estabilidad Hidrodinámica.

La investigación de la inestabilidad debido a la convección comienza con las primeras descripciones del fenómeno hechas por James Thomson (hermano menor de Lord Kelvin) en 1882 /1/. Bénard en 1900 /2/, realiza los primeros experimentos cuantitativos sobre convección en una capa de fluido calentada por abajo. Rayleigh en 1916 /3/, resuelve el problema teórico de la estabilidad de una capa de fluido calentada por abajo con las dos superficies libres, sin incluir el efecto de la tensión superficial. Posteriormente

algunos otros autores realizaron estudios teóricos y experimentales acerca de la inestabilidad de una capa de fluido calentada por abajo. Se cambiaron las condiciones de frontera en las superficies y se incluyeron los efectos de la tensión superficial. A partir de los años cincuenta la investigación de la Estabilidad Hidrodinámica y de la Convección Natural en particular, resurgió debido a sus múltiples aplicaciones, en fenómenos relacionados a la transferencia de calor, la Geofísica y la Astrofísica. Después se hicieron estudios teóricos y experimentales de la manera en que la estabilidad de una capa de fluido calentada por abajo se afectaba al incluir los efectos de la rotación y el campo magnético. Chandrasekhar en 1953 /4/, fué el primero en hacer estudios teóricos de los efectos de la rotación en una capa de fluido calentada por abajo, para los casos de dos superficies libres (de fricción), dos rígidas (con fricción) y de una rígida y la otra libre, manteniéndolas a temperatura constante. Posteriormente incluyó también el efecto del campo magnético y el efecto de los dos fenómenos combinados /5/.

Este trabajo de tesis se inspiró precisamente en estos estudios teóricos realizados por Chandrasekhar, así como en un artículo publicado por Benguria y Depassier en 1987 /6/, en donde se estudian las inestabilidades de un fluido calentado por abajo con la superficie de arriba libre, pero ahora, a diferencia de los casos estudiados por Rayleigh y Chandrasekhar, ésta última se puede deformar. En el presente trabajo se incluye esta condición de frontera para estudiar la estabilidad lineal de una capa de

fluido calentada por abajo que rota con velocidad angular constante en dirección perpendicular a la superficie del fluido. Para ésto, se plantearon las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera del problema, derivando las ecuaciones lineales. Se hizo un análisis en términos de modos normales. La inestabilidad se presenta cuando el gradiente adverso de temperatura es lo suficientemente grande para que el parámetro adimensional:  $R = g\alpha\beta d^4/\kappa\nu$ , llamado número de Rayleigh, exceda un cierto valor crítico, en donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica,  $\beta = -d\theta/dz$  la magnitud del gradiente vertical de temperatura del estado básico en reposo, " $d$ " el grosor de la capa de fluido,  $\kappa$  su difusividad térmica y  $\nu$  su viscosidad cinemática. Este parámetro es la razón del efecto desestabilizador de la flotación y de los efectos estabilizadores de la difusión y la disipación de calor. Como nuestro sistema se encuentra en rotación, aparece el parámetro representativo de ella, llamado el número de Taylor  $T$ , el cual está definido por:  $T = 4\Omega^2 d^4/\nu^2$ , siendo  $\Omega$  la magnitud de la velocidad angular en dirección perpendicular a la superficie del fluido. Al considerar el efecto de la deformación de la superficie aparecen otros números adimensionales característicos del problema. Ellos son el número de Prandtl  $\sigma = \nu/\kappa$  y el número de Galileo  $G = gd^3/\nu^2$ . Entonces el objetivo del problema es encontrar los valores propios del número de Rayleigh y del número de onda de la perturbación a la cual está sujeta el sistema, en función de los demás parámetros, que satisfagan una condición de solubilidad impuesta por las condiciones de frontera. Esto se

realizó numéricamente, buscando el valor del número de Rayleigh crítico  $R_c$  (a partir del cual comienza la convección) y su número de onda crítico correspondiente, variando el número de Taylor y los parámetros característicos de la deformación, que en el caso estacionario se presentan como el producto  $G\sigma$ .

Resumiendo, se estudian las inestabilidades termoconvectivas que aparecen al calentar por abajo una capa de fluido en rotación, considerando los efectos que surgen al introducir la deformación superficial. Se calcularon numéricamente las curvas de inestabilidad estacionaria para diferentes condiciones de frontera, tanto mecánicas como térmicas. Se encontraron resultados nuevos al hacer los cálculos de las curvas de inestabilidad, que generalizan los de Izakson y Yudovich //, para el caso sin rotación.

En el primer capítulo, se presenta un resumen de los conceptos básicos de la mecánica de fluidos necesarios para poder establecer las ecuaciones de movimiento. El objetivo es simplemente mostrar algunos conceptos generales y deducir las ecuaciones básicas que permitan realizar nuestro análisis posterior dentro de un marco formal. Se incluye además una descripción de las ideas más importantes de la Estabilidad Hidrodinámica.

En el segundo capítulo se obtienen las ecuaciones de movimiento y se establecen las condiciones de frontera del problema. Con estas se hace un análisis lineal en términos de modos normales.

En el tercer capítulo se muestran los resultados numéricos

para el caso estacionario. Cuando es posible mostramos algunas aproximaciones analíticas que confirman los resultados.

En el cuarto y último capítulo se obtienen las conclusiones de los resultados numéricos, tratando de establecer las limitaciones de los resultados encontrados.

## I

### INTRODUCCION A LA MECANICA DE FLUIDOS Y LA ESTABILIDAD HIDRODINAMICA

- 1.1 Descripción del movimiento de un fluido
- 1.2 Teorema de Transporte de Reynolds y conservación de la masa
- 1.3 Fuerzas sobre un fluido
- 1.4 Esfuerzos sobre un punto y conservación del momento lineal
- 1.5 Ecuación de Navier Stokes
- 1.6 Sistema de Referencia que rota
- 1.7 Rapidez de disipación viscosa
- 1.8 La ecuación de Conducción de Calor
- 1.9 Conceptos básicos de la Estabilidad Hidrodinámica

#### 1.1 Descripción del movimiento de un fluido

Existen dos maneras distintas de describir el movimiento de un fluido. En la *descripción Lagrangiana* se sigue a una partícula del fluido por una cierta trayectoria; esta trayectoria se identifica con las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  correspondientes al tiempo  $t_0$ , se sigue la trayectoria de esta partícula en el tiempo  $t$ . En este sistema las coordenadas de la partícula  $(x, y, z)$  no son independientes, ya que al dar un intervalo de tiempo  $t - t_0$ , las componentes de la velocidad determinan los cambios de coordenadas  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ . Por lo tanto las variables independientes son  $(x_0, y_0, z_0)$  y el tiempo.

Por otra parte la *descripción Euleriana* se concentra en un

pequeño volumen por donde pasa el fluido y observa el cambio que ocurre en el tiempo, de todas las variables de flujo. Por lo que, dentro de esta descripción, las variables independientes son el tiempo y las coordenadas espaciales.

La velocidad  $\bar{u}$  y la aceleración  $\bar{a}$  en la descripción Lagrangiana son simplemente las derivadas temporales del vector de posición  $\bar{x}$ :

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2},$$

ya que la identidad de la partícula se mantiene constante durante la diferenciación. En la descripción Euleriana, sin embargo, la derivada parcial  $\partial / \partial t$  nos dá tan sólo la razón de cambio local en el punto  $\bar{x}$ , y no la razón total de cambio, vista por una partícula de fluido.

Tomemos a  $F$  como cualquier variable de campo, empleando coordenadas Eulerianas  $(x, y, z, t)$ , tratamos de calcular la razón de cambio de  $F$  en cada punto, siguiendo a un partícula de identidad fija. Lo que se quiere es representar un concepto esencialmente Lagrangiano en términos del lenguaje Euleriano.

Para incrementos arbitrarios e independientes  $d\bar{x}$  y  $dt$ , los incrementos en  $F(\bar{x}, t)$  son:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \quad (1.1)$$

en donde se supone una suma sobre el índice repetido  $i$ . Supongamos ahora que los incrementos no son arbitrarios, salvo los asociados con el seguimiento de una partícula de identidad fija. Los

Incrementos  $d\bar{x}$  y  $dt$  no son independientes ya que están relacionados con las componentes de la velocidad por las tres relaciones representadas por:

$$dx_1 = u_1 dt.$$

Sustituyendo en (1.1):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad (1.2)$$

Sin embargo la notación  $dF/dt$  es muy general, entonces para enfatizar que se trata del hecho de que la derivada temporal se toma mientras uno sigue a una partícula, usamos una notación especial, en lugar de  $d/dt$ , utilizamos:  $D/Dt$  y (1.2) se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad (1.3)$$

La razón de cambio total  $D/Dt$  la llamaremos entonces *derivada material*.

## 1.2 Teorema de Transporte de Reynolds y Conservación de la masa

Al derivar las leyes de conservación, frecuentemente se encuentra con el problema de buscar la derivada temporal de integrales tales como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV,$$

en donde  $F(\bar{x}, t)$  es una variable de flujo y  $V(t)$  cualquier región fija o moviéndose con el fluido.

Consideremos primero el caso en donde  $V(t)$  no es ni un volumen fijo, ni un volumen material. Las superficies del fluido se están moviendo, pero no con la velocidad local del fluido. Tomando una generalización del teorema de Leibnitz para diferenciar una integral en una dimensión de una función  $F$  que al igual que los límites de integración son funciones de la variable con respecto de la cual vamos a diferenciar, pero para una función de varias variables y en un volumen  $V$  tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{A(t)} F \vec{u}_A \cdot d\vec{A}, \quad (1.4)$$

en donde  $\vec{u}_A$  es la velocidad de la frontera y  $A(t)$  es la superficie de  $V(t)$ .

Para un volumen fijo  $V_1$  tenemos  $\vec{u}_A = 0$  por lo que (1.4) se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} F(\vec{x}, t) dV = \int_{V_1(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV. \quad (1.5)$$

Para un volumen material  $V_2(t)$  la superficie se mueve con el fluido, de tal manera que  $\vec{u}_A = \vec{u}$ , es la velocidad del fluido; entonces (1.4) se convierte en:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_2(t)} F(\vec{x}, t) dV_2 = \int_{V_2(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV_2 + \int_{A(t)} F \vec{u} \cdot d\vec{A}. \quad (1.6)$$

En donde escribimos  $d\vec{A}$  en vez de  $\hat{n}dA$  con  $\hat{n}$  el vector normal unitario saliente de la superficie.

Este es comunmente llamado el *teorema de transporte de Reynolds*. Hemos usado el símbolo  $D/Dt$  para enfatizar el hecho de

que estamos siguiendo al volumen material  $V_2$ . Usando el teorema de Gauss tenemos que:

$$\int_{A(t)} \bar{F} \cdot d\bar{A} = \int_{V_2(t)} \frac{\partial}{\partial x_1} (F u_1) dV_2$$

por lo que el teorema de transporte nos queda como:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(\bar{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (F u_1) \right] dV \quad (1.7)$$

en donde cambiamos  $V_2$  por  $V$ .

Consideremos ahora un volumen fijo en el espacio y tomemos a  $\rho$  como la densidad, entonces el aumento de la masa dentro del volumen está dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

puesto que el volumen está fijo se aplica (1.5).

Ahora, la rapidez de flujo de masa que sale del volumen está dada por:

$$\int_A \rho \bar{u} \cdot d\bar{A}.$$

Entonces la ley de la conservación de la masa nos dice que:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \bar{u} \cdot d\bar{A} \quad (1.8)$$

Usando el teorema de la divergencia tenemos que (1.8) se convierte en:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dV = 0.$$

La relación anterior es válida para cualquier volumen por lo que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 . \quad (1.9)$$

ó

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0 . \quad (1.10)$$

Esta ecuación no sólo expresa en forma diferencial la conservación de la masa sino también nos dice que la velocidad es continua, de aquí que a (1.9) ó a la forma (1.10) se le llame ecuación de continuidad.

Un fluido es incompresible si no sólo la masa se conserva sino que el volumen tampoco cambia, por lo que la densidad se mantiene constante; esto se expresa como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 , \quad (1.11)$$

y de acuerdo a (1.10):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (1.12)$$

### 1.3 Fuerzas sobre un fluido

Antes de que podamos proseguir con las leyes de conservación es necesario clasificar a los diferentes tipos de fuerzas que actúan sobre una masa de fluido:

- (1) *Fuerzas de Cuerpo*: Son aquellas que aparecen por "acción a distancia", es decir sin contacto físico directo. Estas resultan de que se sumerge al medio en algún campo de

fuerzas, cuyo origen puede ser gravitacional, magnético, electrostático o electromagnético. Estas están distribuidas entre toda la masa del fluido y son proporcionales a la masa. Las fuerzas de cuerpo pueden ser conservativas ó no conservativas; las conservativas son aquellas que se pueden expresar como el gradiente de una función potencial:

$$f = - \nabla \Pi \quad (1.13)$$

en donde  $\Pi$  es lo que se conoce como una función potencial. Las no conservativas no cumplen con una relación como la (1.13).

- (2) *Fuerzas de Superficie:* Son aquellas que se aplican sobre un elemento de área, por los alrededores mediante contacto directo. Son proporcionales al área sobre la cual actúan, y son convenientemente expresadas por unidad de área. Pueden descomponerse en componentes normal y tangencial al área. Consideremos un elemento de área  $dA$  en un fluido (figura 1.1). La fuerza  $dF$  en el elemento se puede descomponer en una componente  $dF_n$  normal al área y una componente  $dF_s$  cortante a la misma. Los esfuerzos normales y cortantes en el elemento se definen como:

$$\tau_n = \frac{dF_n}{dA} \quad \tau_s = \frac{dF_s}{dA}$$

- (3) *Fuerzas de línea:* Las fuerzas de tensión superficial son llamadas fuerzas de línea ya que actúan en una línea y tienen una magnitud proporcional a la extensión de la línea. Aparecen en la interface entre dos fluidos. Las fuerzas de

tensión superficial no aparecen directamente en las ecuaciones de movimiento, aparecen solamente en las condiciones de frontera.

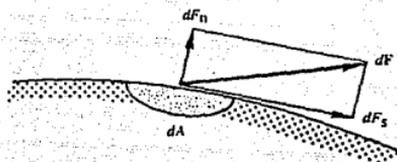


Fig. 1.1 Fuerzas normales y cortantes sobre un elemento de área.

#### 1.4 Esfuerzos sobre un punto y conservación del momento lineal

Consideremos por un momento un paralelepípedo rectangular infinitesimal cuyas caras son perpendiculares a los ejes coordenados (figura 1.2). En cada una de las seis caras hay un esfuerzo normal y uno cortante que posteriormente se puede descomponer en dos componentes paralelos a los ejes. La figura muestra la dirección de los esfuerzos positivos en cuatro de las seis caras; los dos que restan han sido omitidos por claridad. El primer índice en  $\tau_{ij}$  indica la dirección de la normal a la superficie, en donde se está considerando el esfuerzo, y el

segundo indice indica la dirección en que actúa. Los elementos de la diagonal  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  y  $\tau_{33}$  de la matriz de esfuerzos son los esfuerzos normales, los que están fuera de ésta son los esfuerzos tangenciales o cortantes. No es difícil comprobar que el tensor de esfuerzos es simétrico, al considerar la conservación del momento angular, por lo que tiene tan sólo seis componentes diferentes, es decir que:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ .

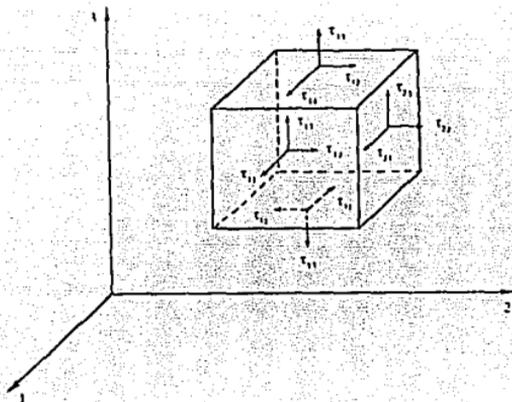


Fig. 1.2 Esfuerzos en un punto. Para mayor claridad, solo se muestran los esfuerzos en cuatro de las seis caras.

Antes de derivar la ley de conservación del momento lineal conviene hablar un poco del movimiento relativo de un elemento de fluido cercano a un punto, en donde se definirán algunos conceptos nuevos. Sea  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  la velocidad en el punto O (posición del

vector  $\bar{x}$ ), y sea  $\bar{u} + d\bar{u}$  la velocidad al mismo tiempo en un punto vecino P (posición del vector  $\bar{x} + d\bar{x}$ ). La velocidad relativa al tiempo t está dada por:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (1.14)$$

El término  $\partial u_i / \partial x_j$  en la ecuación (1.14) es el tensor gradiente de velocidades, que puede ser descompuesto en una parte simétrica y una antisimétrica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Que se puede escribir como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \frac{1}{2} r_{ij}. \quad (1.15)$$

En donde  $e_{ij}$  es el vector rapidez de deformación definido por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.16)$$

y

$$r_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (1.17)$$

es llamado el tensor de rotación. Ya que  $r_{ij}$  es antisimétrico, su diagonal es toda cero, por lo que podemos escribir  $r_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k$ , de donde a su vez  $\bar{\omega}$  es el vector vorticidad:

$$\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{u} \quad \text{ó} \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (1.18)$$

Consideremos el movimiento de un elemento de fluido

infinitesimal (figura 1.3). La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza total neta en el elemento de fluido debe ser igual a la masa por la aceleración del elemento. La suma de las fuerzas de superficie en la dirección  $x_1$  es igual a:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} - \tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 \\ & + \left( \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} - \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} \right) dx_1 dx_3 \\ & + \left( \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} - \tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

lo cual se simplifica en:

$$\left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j} dV,$$

en donde  $dV$  es el volumen del pequeño elemento de fluido. Generalizando, la  $i$ -ésima componente de la fuerza de superficie por unidad de volumen es:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

en donde se usó la propiedad de simetría del tensor de esfuerzos. Sea  $\bar{f}$  la fuerza de cuerpo por unidad de masa, entonces  $\rho \bar{f}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen. Entonces según la Segunda Ley de Newton se expresa así:

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} = \rho f_1 + \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j}. \quad (1.19)$$

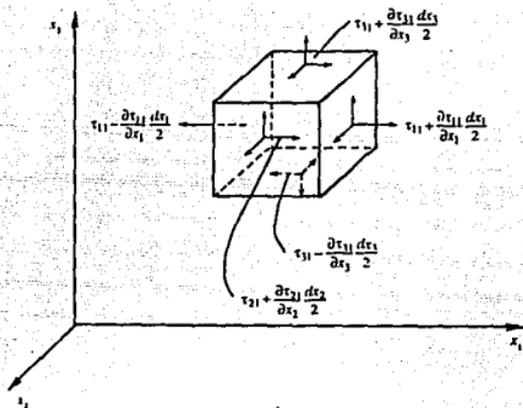


Fig. 1.3 Esfuerzos superficiales de un elemento del fluido. Solamente se muestran los esfuerzos en la dirección  $x_1$ .

La ecuación (1.19) es la ecuación de movimiento que relaciona la aceleración a la fuerza neta en un punto. Expresa también la conservación del momento lineal.

### 1.5 Ecuación de Navier Stokes

La relación entre el esfuerzo y la deformación en un medio continuo es llamada *ecuación constitutiva*. En este momento examinaremos una ecuación que relaciona al esfuerzo con la

rapidez de deformación en un fluido.

En un fluido en reposo solo existen componentes normales del esfuerzo en la superficie y este esfuerzo no depende de la orientación de la superficie. En otras palabras, decimos que el esfuerzo es *isotrópico*. Un tensor isotrópico se define como aquel tensor cuyas componentes no cambian bajo la acción de una rotación del sistema de coordenadas. El único tensor isotrópico de segundo orden es la delta de Kronecker:

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que todo tensor isotrópico de segundo orden debe ser proporcional a  $\delta$ . Por lo tanto el esfuerzo en un fluido en reposo debe ser de la forma:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.20)$$

donde  $p$  es la presión termodinámica relacionada a  $\rho$  y a  $\theta$  (la temperatura) por una ecuación de estado. Se incluye el signo menos en la ecuación (1.20) por que las componentes normales de  $\tau_{ij}$  se consideran como positivas si indican una tensión en vez de una compresión.

Un fluido en movimiento desarrolla componentes adicionales del tensor de esfuerzos debido a la viscosidad. Los términos en la diagonal de  $\tau$  ahora no son iguales y aparecen esfuerzos cortantes. Para un fluido en movimiento podemos partir el tensor

de esfuerzos en dos partes: una  $-p\delta_{ij}$ , que existiría si el fluido se encontrara en reposo, y otra  $\sigma_{ij}$  debida al movimiento del mismo:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (1.21)$$

La parte no isotrópica  $\sigma$ , está relacionada con el gradiente de velocidades  $\partial u_i / \partial x_j$ , el cual por (1.15) puede ser descompuesto en una parte simétrica y otra antisimétrica. La parte antisimétrica representa el movimiento de rotación sin deformación del fluido, y por lo tanto no puede generar esfuerzo por sí sola. Entonces los esfuerzos deben estar generados por el tensor rapidez de deformación  $e_{ij}$ . Por lo tanto, suponemos una relación lineal del tipo:

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} e_{mn} \quad (1.22)$$

en donde  $K_{ijkl}$  es un tensor de cuarto orden con 81 componentes que dependen del estado termodinámico del medio. Si suponemos un medio isotrópico sin ninguna dirección privilegiada, la relación entre esfuerzo y deformación es independiente de rotaciones de los ejes coordenados. Esto será posible solo si  $K_{ijkl}$  es un tensor isotrópico. Un tensor isotrópico de cuarto orden debe tener la forma (ver por ejemplo Aris página 30 /8/):

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu \delta_{im} \delta_{jn} + \gamma \delta_{in} \delta_{jm} \quad (1.23)$$

en donde  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\gamma$  son escalares que dependen del estado termodinámico local. Dado que  $\sigma_{ij}$  es simétrico  $K_{ijkl}$  debe también ser simétrico en  $i$  y en  $j$ . Esto es consistente con (1.23) solo

si

$$\gamma = \mu .$$

Por lo tanto solo dos constantes  $\mu$  y  $\lambda$  han sobrevivido y después de sustituir (1.22) queda como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij} .$$

Sustituyendo en (1.21) tenemos que:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij} . \quad (1.24)$$

Si ahora tomamos  $i = j$ , sumando sobre los índices repetidos y notando que  $\delta_{ii} = 3$  tenemos que:

$$\tau_{ii} = -3p + (2\mu + 3\lambda)e_{mm} ,$$

de donde la presión resulta ser:

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii} + \left( \frac{2}{3} \mu + \lambda \right) e_{ii} , \quad (1.25)$$

en donde  $e_{ii} = \nabla \cdot \bar{u}$ . Los términos de la diagonal de  $e_{ij}$  pueden ser diferentes, en tal caso el tensor de esfuerzos  $\tau_{ij}$  puede tener términos diferentes en la diagonal, debido al término de proporcionalidad  $\mu$  en (1.24). Por lo tanto podemos tomar el promedio de los términos en la diagonal de  $\tau$  y definir una presión promedio (que no es la presión termodinámica) como:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \tau_{jj} . \quad (1.26)$$

Sustituyendo en (1.25):

$$p - \bar{p} = \left( \frac{2}{3} \mu + \lambda \right) e_{11} . \quad (1.27)$$

Para un fluido incompresible sólo podemos definir una presión mecánica o una presión promedio, ya que no hay una ecuación de estado para determinar una presión termodinámica. El término  $\lambda$  en la ecuación constitutiva (1.24) se hace cero ya que  $e_{mm} = 0$ . Por lo tanto la ecuación (1.24) toma la forma simple:

$$\tau_{1j} = -p\delta_{1j} + 2\mu e_{1j} , \quad (1.28)$$

en donde  $p$  sólo puede ser interpretada como la presión promedio. Para un fluido compresible una presión termodinámica puede ser definida y al parecer es, en general, diferente a la presión promedio.

La ecuación constitutiva (1.24) toma la forma:

$$\tau_{1j} = - \left[ p + \lambda(\nabla \cdot \bar{u}) \right] \delta_{1j} + 2\mu e_{1j} . \quad (1.29)$$

La relación lineal entre  $\tau$  y  $e$  es consistente con la definición de Newton del coeficiente de viscosidad en un flujo paralelo  $u(y)$ , para el cual (1.29) da un esfuerzo cortante de  $\tau = \mu(du/dy)$ . Un fluido que es regido por la ecuación anterior es llamado un *fluido Newtoniano*. Sustituyendo la ecuación (1.29) en la ecuación de movimiento (1.19) obtenemos:

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} = \rho f_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\mu e_{1j} + \lambda(\nabla \cdot \bar{u})\delta_{1j} \right] - \frac{\partial p}{\partial x_1} , \quad (1.30)$$

que es la forma general de la ecuación de *Navier-Stokes*.

Para flujos incompresibles  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$  por lo que (1.30) se convierte en:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \nabla p. \quad (1.31)$$

### 1.6 Sistema de referencia que rota

Tomemos un sistema de referencia  $(x_1, x_2, x_3)$  rotando con una velocidad angular  $\bar{\omega}$  con respecto a un sistema fijo  $(X_1, X_2, X_3)$ . Cualquier vector  $\bar{P}$  es representado en el sistema que rota por:

$$\bar{P} = P_1 \hat{i}_1 + P_2 \hat{i}_2 + P_3 \hat{i}_3.$$

Para un observador fijo las direcciones de los vectores unitarios  $\hat{i}_1$ ,  $\hat{i}_2$  e  $\hat{i}_3$  cambian en el tiempo. Para este observador la derivada temporal de  $\bar{P}$  es:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dP}{dt} \right)_F &= \frac{d}{dt} ( P_1 \hat{i}_1 + P_2 \hat{i}_2 + P_3 \hat{i}_3 ) \\ &= \hat{i}_1 \frac{dP_1}{dt} + \hat{i}_2 \frac{dP_2}{dt} + \hat{i}_3 \frac{dP_3}{dt} + P_1 \frac{d\hat{i}_1}{dt} + P_2 \frac{d\hat{i}_2}{dt} + P_3 \frac{d\hat{i}_3}{dt}. \end{aligned}$$

Para el observador que rota la razón de cambio de  $\bar{P}$  es la suma de los primeros tres términos, de tal forma que:

$$\left( \frac{dP}{dt} \right)_F = \left( \frac{dP}{dt} \right)_R + P_1 \frac{d\hat{i}_1}{dt} + P_2 \frac{d\hat{i}_2}{dt} + P_3 \frac{d\hat{i}_3}{dt}. \quad (1.32)$$

Cada vector unitario  $\hat{i}$  traza un cono de radio  $\sin \alpha$ , en donde  $\alpha$  es un ángulo constante (figura 1.4). La magnitud del cambio de  $\hat{i}$  en

un tiempo  $dt$  es  $|d\hat{i}| = \sin \alpha d\theta$ . Por lo tanto la magnitud de la razón de cambio es  $|d\hat{i}/dt| = \sin \alpha (d\theta/dt) = \Omega \sin \alpha$  y su dirección es perpendicular al plano  $(\bar{n}, \hat{i})$ . Por lo tanto  $d\hat{i}/dt = \bar{n} \times \hat{i}$ , para cualquier vector unitario que rota  $\hat{i}$ . La suma de los tres últimos términos en (1.32) es:

$$P_1 \bar{n} \times \hat{i}_1 + P_2 \bar{n} \times \hat{i}_2 + P_3 \bar{n} \times \hat{i}_3 = \bar{n} \times \bar{P}.$$

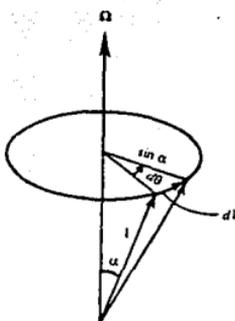


Fig. 1.4 Rotación del vector unitario.

por lo que (1.32) se convierte en:

$$\left(\frac{d\bar{P}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\bar{P}}{dt}\right)_R + \bar{n} \times \bar{P}. \quad (1.33)$$

Aplicando esta regla al vector de posición  $\bar{r}$ , las velocidades de los dos sistemas de referencia quedan relacionadas de la siguiente manera:

$$\bar{u}_F = \bar{u}_R + \bar{n} \times \bar{r}. \quad (1.34)$$

aplicando de nueva cuenta la regla (1.33) a  $\bar{u}_F$ , tenemos que:

$$\left(\frac{d\bar{u}_F}{dt}\right) = \left(\frac{d\bar{u}_F}{dt}\right)_R + \bar{\Omega} \times \bar{u}_F,$$

que usando (1.34) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_F}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{u}_R + \bar{\Omega} \times \bar{r})_R + \bar{\Omega} \times (\bar{u}_R + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \\ &= \left(\frac{d\bar{u}_R}{dt}\right)_R + \bar{\Omega} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_R + \bar{\Omega} \times (\bar{u}_R + \bar{\Omega} \times \bar{r}). \end{aligned}$$

Esto muestra que las aceleraciones en los dos marcos de referencia están relacionadas por:

$$\bar{a}_F = \bar{a}_R + 2\bar{\Omega} \times \bar{u}_R + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}). \quad (1.35)$$

Si ahora tomamos un vector  $\bar{r}$  perpendicular al eje de rotación la ecuación anterior, sin el índice  $n$ , se convierte en:

$$\bar{a}_F = \bar{a} + 2\bar{\Omega} \times \bar{u} - \Omega^2 \bar{r}. \quad (1.36)$$

Esta ecuación nos dice que la verdadera aceleración o la aceleración inercial es igual a la aceleración medida en el sistema en rotación más la aceleración de Coriolis  $2\bar{\Omega} \times \bar{u}$  y la aceleración centrípeta  $-\Omega^2 \bar{r}$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.30), la ecuación de movimiento en un sistema de referencia que rota se convierte en:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \bar{u}) \delta_{ij} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \left( \Omega^2 R_i - 2c_{ijk} \Omega_j u_k \right), \quad (1.37)$$

donde los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación son las fuerzas de Coriolis y centrífuga respectivamente.

### 1.7 Rapidez de disipación viscosa

La ecuación de movimiento la podemos escribir como:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Multiplicando esta ecuación por  $u_i$  e integrando sobre el volumen  $V$ , obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^2 dV = \int_V \rho u_i f_i dV + \int_V u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} dV. \quad (1.38)$$

Integrando por partes la segunda ecuación del lado izquierdo, aplicando el teorema de Gauss y haciendo lo mismo para la integral que contiene a  $\tau_{ij}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i^2 dV - \frac{1}{2} \int_V u_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) dV + \frac{1}{2} \int_S \rho u_i^2 u_j dS_j = \\ = \int_V \rho u_i f_i dV - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i dV + \int_S u_i \tau_{ij} dS_j. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad en su forma (1.9) encontramos que las primeras dos integrales del lado izquierdo se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} u_1^2 - u_1^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right) dV &= \frac{1}{2} \int_V \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} u_1^2 + u_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_1^2 dV \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (1.38) es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_1^2 dV &= \\ = \int_V \rho u_1 f_1 dV + \int_S u_1 \tau_{1j} dS_j - \frac{1}{2} \int_S \rho u_1^2 u_j dS_j - \int_V \tau_{1j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_1 dV \end{aligned} \quad (1.39)$$

De la ecuación (1.39) obtenemos la rapidez con la que la energía cinética contenida en un volumen  $V$  cambia, siendo esta la suma de cuatro términos. Los primeros tres representan, respectivamente, la razón mediante las cuales las fuerzas de cuerpo hacen trabajo en el elemento de fluido contenido en  $V$ ; la rapidez mediante la cual los esfuerzos  $\tau_{1j}$  hacen trabajo en la superficie  $S$  que contiene a  $V$ ; y finalmente, la rapidez mediante la cual la energía fluye de  $V$ , a través de  $S$ .

Resta interpretar el último término de (1.39); este es una integral sobre todo el volumen de la cantidad:

$$- \tau_{1j} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \quad (1.40)$$

Usando la definición de  $e_{1j}$  y  $\tau_{1j}$  (ecuaciones (1.16) y (1.29) respectivamente), podemos escribir:

$$\tau_{1j} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = \tau_{1j} e_{1j} = (-p\delta_{1j} + 2\mu e_{1j} + \lambda\delta_{1j} e_{kk}) e_{1j}$$

$$= -pe_{jj} + 2\mu e_{ij}^2 + \lambda(e_{jj})^2. \quad (1.41)$$

el primer término del lado derecho en esta ecuación es:

$$-pe_{jj} = \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}; \quad (1.42)$$

la integral de volumen de esta cantidad, representa el aumento de la energía interna, debido a la compresión que sufre el fluido; que para un fluido incompresible sería cero. El término que sobra:

$$\phi = 2\mu e_{ij}^2 + \lambda(e_{jj})^2, \quad (1.43)$$

en (1.41), representa la velocidad a la cual la energía se disipa irreversiblemente debido a la viscosidad en cada elemento de volumen del fluido. Para un fluido incompresible la expresión correspondiente para  $\phi$  es:

$$\phi = 2\mu e_{ij}^2. \quad (1.44)$$

## 1.8 La ecuación de Conducción de Calor

Hasta el momento, hemos visto que las leyes de conservación de la masa y del momento nos han llevado a las ecuaciones de continuidad y movimiento respectivamente. Nos queda encontrar la ley de la *conservación de la energía*.

Si consideramos una constante aditiva, la energía  $\epsilon$  por unidad de masa del fluido la podemos escribir como:

$$\epsilon = \frac{1}{2} u_1^2 + c_v T, \quad (1.45)$$

en donde  $c_v T$  es la energía interna de un gas perfecto y para un líquido es  $cT$ , donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante,  $c$  el calor específico y  $T$  su temperatura. La primera ley de la termodinámica nos dice que el cambio de energía interna es igual a la suma del trabajo hecho más el aumento de calor a un volumen material. Esto es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \epsilon \, dV = \int_V \rho f_i + \int_A \tau_{ij} u_i \, dA_j - \int_A q_i \, dA_i.$$

Por lo tanto, si registramos las ganancias y pérdidas de energía que ocurren en el fluido por unidad de tiempo, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \epsilon \, dV = \begin{array}{l} \text{la rapidez con la que se hace trabajo en la frontera} \\ \text{S de V por los esfuerzos } \tau. \\ \\ + \text{ la rapidez a la cual se hace trabajo en cada} \\ \text{elemento del fluido dentro de V por las fuerzas} \\ \text{externas.} \\ \\ - \text{ rapidez con la que la energía en forma de calor} \\ \text{es conducida a través de S.} \\ \\ - \text{ rapidez con la que la energía es transportada a} \\ \text{través de S debido a movimientos de masa.} \end{array}$$

$$= \int_S u_i \tau_{ij} \, dS_j + \int_V \rho u_i f_i \, dV + \int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} \, dS_j - \int_V \rho e u_j \, dS_j, \quad (1.46)$$

siendo  $k$  el coeficiente de conducción térmica.

En donde el flujo de calor obedece la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T.$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.39), (1.41), (1.42) y (1.43) podemos escribir el primer término de (1.46) como:

$$\int_S u_i \tau_{ij} dS_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i^2 dV + \frac{1}{2} \int_S \rho u_i^2 u_j dS_j - \int_V \rho u_i f_i dV - \int_V p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV + \int_V \phi dV, \quad (1.47)$$

los siguientes, son también formas alternativas del tercero y cuarto términos de (1.46):

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} dS_j = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV \quad (1.48)$$

$$y \quad \int_V \rho e u_j dS_j = \int_S \rho \left( \frac{1}{2} u_i^2 + c_v T \right) u_j dS_j \quad (1.49)$$

$$= - \frac{1}{2} \int_S \rho u_i^2 u_j dS_j - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j c_v T) dV. \quad (1.50)$$

Combinando estas ecuaciones tenemos que:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_v T) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV - \int_V p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV + \int_V \phi dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_v T u_j) dV. \quad (1.51)$$

Como la ecuación debe prevalecer para todo volumen V, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_v T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_v T u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \phi \quad (1.52)$$

y con ayuda de la ecuación de continuidad, se convierte en:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (c_v T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (c_v T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \phi \quad (1.53)$$

La ecuación (1.53), junto con la ecuación (1.43) constituyen en forma analítica una descripción de como se conduce el calor en un sistema hidrodinámico. A lo anterior debemos añadir la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento, que obtuvimos anteriormente. De esta manera podemos describir a nuestro sistema completamente. Todos los desarrollos hechos anteriormente pueden ser encontrados con detalle en /9/ y /10/ y de una forma condensada en /5/.

## 1.9 Conceptos básicos de la Estabilidad Hidrodinámica

Para analizar la estabilidad de cualquier flujo laminar, se debe encontrar la velocidad  $\bar{u}(\bar{x}, t)$  así como otros campos, tales como la presión  $P(\bar{x}, t)$  y la temperatura  $T(\bar{x}, t)$ , necesarios para describir el flujo laminar en cada punto  $\bar{x}$  y tiempo  $t$ . Estos campos definen el *flujo básico*. Los campos pueden ser estacionarios o no estacionarios, y deben satisfacer las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera respectivas.

Spongamos por un momento que el flujo que queremos

analizar se encuentra en un estado estacionario, es decir en un estado en que ninguna de las variables que lo describen es función del tiempo. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_j$  un conjunto de parámetros que definen al sistema. Al tratar de describir la estabilidad de dicho sistema, lo que se quiere es encontrar la reacción de este a pequeñas perturbaciones. Es decir, uno se pregunta lo que ocurrirá al perturbar el estado básico de este sistema: ¿esta perturbación desaparecerá gradualmente o la perturbación crecerá en amplitud de tal manera que el sistema nunca pueda volver a su estado original? En el primer caso decimos que el sistema es estable con respecto a esa perturbación en particular y en el segundo decimos que es inestable. Es claro que debemos considerar al sistema como inestable aunque solamente exista un modo particular de la perturbación para la cual el sistema es inestable. De la misma manera un sistema no puede ser considerado como estable al menos que sea estable con respecto a cualquier perturbación a la que pueda ser sometido. En otras palabras, la estabilidad implica que no existe ningún modo de la perturbación para el cual el sistema sea inestable.

En el espacio de los parámetros  $X_1, X_2, \dots, X_j$  hay un estado que separa al sistema entre la estabilidad y la inestabilidad, definiendo un estado de *estabilidad marginal*. De acuerdo a esto, un *estado marginal* es un estado de *estabilidad neutral*, definido por una función de la forma:

$$F(X_1, \dots, X_j) = 0 \quad (1.54)$$

Encontrar  $F$  es uno de los objetivos principales de una

investigación en estabilidad hidrodinámica.

Los estados de estabilidad marginal, pueden ser de dos tipos, dependiendo de la forma en que las amplitudes de una pequeña perturbación puedan crecer o amortiguarse: pueden crecer (o amortiguarse) aperiódicamente; ó pueden crecer (o amortiguarse) por oscilaciones de amplitud creciente (ó decreciente). En el primer caso, la transición de la estabilidad a la inestabilidad toma lugar vía un estado marginal, exhibiendo un patrón estacionario de movimiento. En el segundo, la transición toma lugar vía un estado marginal exhibiendo movimientos oscilatorios con una frecuencia característica.

Para hacer un tratamiento completo de un problema de estabilidad uno comienza por un flujo básico, que representa un estado estacionario del sistema. Se supone que las variables físicas que describen al flujo sufren pequeños (infinitesimales) incrementos. Al obtener las ecuaciones a partir de las ecuaciones de movimiento relevantes, ignoramos todos los términos que no sean lineales, derivando una teoría lineal de la estabilidad.

De acuerdo a lo dicho anteriormente, para hacer una investigación completa de la estabilidad, debemos examinar la reacción del sistema a todas las perturbaciones posibles. Para poder hacer esto, debemos expresar una perturbación como una superposición de modos posibles y examinar la estabilidad del sistema con respecto a cada uno de estos modos. Por un momento consideremos un sistema confinado entre dos planos paralelos, en donde las variables físicas son funciones sólo de una de las coordenadas espaciales ( $z$  por ejemplo), normal a los planos. En

este caso, podemos analizar una perturbación arbitraria en términos de ondas periódicas en dos dimensiones. Entonces, si  $A(x,y,z,t)$  representa una amplitud típica que describe a la perturbación, la desarrollamos como:

$$A(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y A_k(z,t) \exp[i(k_x x + k_y y)],$$

donde  $k = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$ , es el número de onda asociado con la perturbación  $A_k(z,t)$ . Como las ecuaciones para las perturbaciones son lineales, la reacción del sistema a una perturbación general puede ser determinada si conocemos la reacción del sistema a perturbaciones de todos los números de onda. En particular, la estabilidad del sistema dependerá de su reacción a perturbaciones de todos los números de onda. Entonces, en un problema de este tipo, el estado marginal será de estabilidad neutral para perturbaciones de un número de onda particular  $k_c$ , que presentarán un patrón celular, en donde las dimensiones horizontales de la celda, están dadas por la longitud de onda crítica:  $\lambda_c = 2\pi/k_c$ .

En problemas con otras geometrías, la perturbación tendría que ser analizada de diferente manera; pero el punto esencial es que en cualquier caso la perturbación debe expandirse en términos de *modos normales*.

## II

### CONVECCION NATURAL DE UNA CAPA DE FLUIDO EN ROTACION CON DEFORMACION SUPERFICIAL

- 2.1 Ecuaciones básicas
- 2.2 Aproximación de Boussinesq
- 2.3 Condiciones de Frontera
- 2.4 Ecuaciones lineales para las Perturbaciones
- 2.5 Modos Normales
- 2.6 Caso estacionario

#### 2.1 Ecuaciones básicas

Con la información del capítulo anterior, estamos en posición de hacer una descripción matemática del problema. Consideremos pues a un fluido Newtoniano infinito, que en reposo se encuentra entre los planos  $z = 0$  y  $z = -d$  (figura 2.1), que rota con velocidad angular constante  $\bar{\omega} = \hat{\omega}k$  (en donde tomaremos a  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  como los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente), y en el cual actúa un campo gravitacional constante:  $-g\hat{k}$ . Teniendo en cuenta ésto, podemos volver a escribir las ecuaciones que obtuvimos en el capítulo anterior.

La ecuación de continuidad (1.9):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (2.1)$$

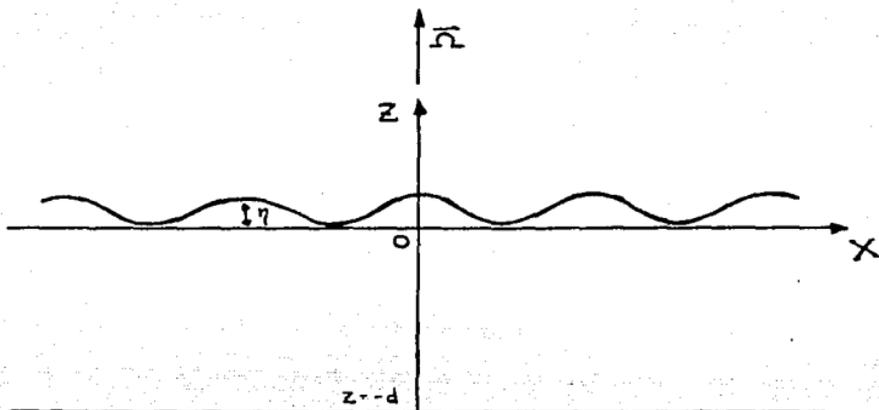


Fig. 2.1 Capa de Fluido infinita, contenida entre los planos  $z=0$  y  $z=d$ .

La ecuación de movimiento en un sistema de referencia que rota con velocidad angular  $\bar{\Omega}k$ :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \bar{u}) \delta_{ij} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho (\bar{\Omega}^2 R_i - 2c_{ijk} \bar{\Omega}_j u_k), \quad (2.2)$$

en este caso  $\bar{R} = (x, y, 0)$  y  $\bar{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ , tomamos a  $\bar{u} = (u, v, w)$ , y la ecuación de transferencia de calor, la escribimos como:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (c_v T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (c_v T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial}{\partial x_j} u_j + \phi. \quad (2.3)$$

A estas tres ecuaciones debemos agregar una ecuación de estado, que para las sustancias en las que estamos interesados es:

$$\rho = \rho_0 \{1 - \alpha(T - T_0)\}, \quad (2.4)$$

en donde  $\alpha$ , es el coeficiente de expansión volumétrica y  $T_0$  es la temperatura a la cual  $\rho = \rho_0$ . Esta una buena aproximación para diferencias de temperatura pequeñas entre las dos superficies del fluido.

## 2.2 Aproximación de Boussinesq

Hasta el momento, al derivar las primeras tres ecuaciones, tan sólo hemos hecho la suposición de que se trata de un fluido Newtoniano. Para poder continuar debemos tomar en cuenta algunas otras situaciones que aparecen en la práctica, en que las ecuaciones se simplifican considerablemente. El primero en señalar esta situación fué Boussinesq en 1903 [11]. La base para tomar en cuenta esta aproximación es el hecho de que como señalamos anteriormente, las diferencias de temperatura son pequeñas y por lo tanto las diferencias en la densidad son también pequeñas. El origen de tales simplificaciones es el hecho de que el coeficiente de expansión volumétrica  $\alpha$  es pequeño: para gases y líquidos está en el rango de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$ , por lo que para variaciones en la temperatura de orden uno, las variaciones en la densidad serán a lo sumo del uno por ciento. Por lo tanto, las variaciones en los demás coeficientes deben ser del mismo orden, a excepción del término de flotación  $g(\rho - \rho_0)$  en la ecuación de movimiento, el cual es del mismo orden de magnitud que el término de inercia  $u_j \partial u_i / \partial x_j$ . Para la mayoría de los fluidos  $d\mu / (\mu dT)$ ,  $dk / (k dT)$  y  $dc / (c dT)$  ó  $c_v$ , son de órdenes menores a  $\alpha$ , de tal manera que  $\mu$ ,  $k$  y  $c$  ó  $c_v$ , se toman como constantes dentro de esta

aproximación.

De acuerdo a lo que hemos dicho, lo primero que hacemos, es sustituir la ecuación de continuidad, por

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.5)$$

igual que para un flujo incompresible.

El tensor de esfuerzos se convierte en:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.6)$$

que por la misma razón  $\mu$  es constante, y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \left( 1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{p}{\rho_0} - \frac{1}{2} \bar{u} \times \bar{u} \cdot^2 \right) + 2c_{ijkl} u_j \Omega_k \quad (2.7)$$

Donde  $\nu (= \mu/\rho_0)$ , la viscosidad cinemática, es considerada constante, y  $\rho_0$ , la densidad cuando la temperatura es  $T_0$ , otra constante. También tenemos que:

$$\delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \{\alpha(T - T_0)\} \quad (2.8)$$

Posteriormente debemos simplificar la ecuación de conducción de calor (2.3), antes que nada consideramos a  $k$  y a  $c_p$  (ó  $c$ ) como constantes, y por (2.5) eliminamos el término  $-p\nabla u$  del lado derecho. El término de disipación viscosa  $\Phi$  también puede ser ignorado; ya que si tomamos a  $V$  como la escala de velocidades, a  $d$  como la escala de longitud y a  $T-T_0$  como la escala de diferencia

de temperaturas, la razón de la disipación viscosa a la rapidez de transferencia de calor, será:

$$\frac{\frac{\phi}{D(cT)}}{\rho \frac{DT}{DT}} \sim \frac{\mu V d^{-2} / \rho_0 c (T-T_0) V d}{\rho_0 c (T-T_0) d} = \frac{\mu V}{\rho_0 c (T-T_0) d}$$

Para un gas típico  $\mu/c_v \sim 10^{-8} \text{ sK}$  y para un líquido  $\mu/c \sim 10^{-10} \text{ sK}$ , lo cual muestra que la razón anterior es muy pequeña a menos que las velocidades sean muy grandes. Por lo tanto la ecuación de conducción de calor (2.3) se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.9)$$

donde  $\kappa (= k/\rho_0 c_v)$ , es el coeficiente de difusividad térmica.

Las ecuaciones (2.4), (2.5), (2.7) y (2.9) son las ecuaciones de balance dentro de la aproximación de Boussinesq. La solución a las ecuaciones hidrostáticas es la siguiente:

De (2.9) tenemos que la solución a  $\nabla^2 T = 0$ , es:

$$T_s = T_0 + Az, \quad (2.10)$$

La de (2.4) y (2.10):  $\rho_s = \rho_0 \{1 - \alpha(T_s - T_0)\} = \rho_0 (1 - \alpha Az)$  (2.11)

y la de (2.7):  $p_s = p_0 - g\rho_0 (z - \alpha Az^2/2);$  (2.12)

donde  $p_0$  es la presión ejercida en la superficie de arriba y  $A$  es una constante por determinar de las condiciones de frontera.

### 2.3 Condiciones de Frontera

Vamos a tomar combinaciones de las condiciones de frontera. En la superficie de abajo las condiciones de frontera mecánicas pueden ser de dos tipos: podemos tener una superficie rígida (donde aparecen esfuerzos viscosos) ó una libre (donde los esfuerzos tangenciales son cero) pero plana, es decir una superficie indeformable. La condición de frontera mecánica en la superficie de arriba, es por supuesto, la condición de una superficie auténticamente libre, es decir con deformación. Las condiciones de frontera térmicas en ambas superficies también pueden ser de dos tipos, puede ser una superficie conductora a temperatura constante ó una superficie en la que el flujo de calor es constante.

Las condiciones de frontera mecánicas para la superficie de abajo en  $z = -d$  (figura 2.1) se pueden traducir en los siguientes casos:

a) Superficie rígida:

$$\vec{u} = (u, v, w) = 0 . \quad (2.13a)$$

Dado que esta condición ocurre para toda  $x$  y  $y$ , se sigue de la ecuación de continuidad (2.5) que:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (2.13b)$$

b) Superficie libre sin deformación:

$$w = 0 \quad (2.13c)$$

y la condición de que los esfuerzos tangenciales son cero:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad (2.13d)$$

debida a que  $w$  es igual a cero para toda  $x$  y  $y$  tenemos que (2.13d)

es equivalente a:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2.13e)$$

Que con la ayuda de la ecuación de continuidad se convierte en:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (2.13f)$$

Las condiciones de frontera térmicas son:

Temperatura constante (superficie buena conductora):

$$T = T_b \text{ constante y} \quad (2.14a)$$

flujo de calor constante (superficie mala conductora):

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -F/k \quad (2.14b)$$

donde F es el flujo de calor normal y k la conductividad térmica.

La superficie de arriba se encuentra en  $z = \eta(x, y, t)$ , con vector normal unitario:

$$\hat{n} = \frac{(-\eta_x, -\eta_y, 1)}{N} = (n_1, n_2, n_3),$$

cuyos subíndices indican derivadas parciales y

$$N = (\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1)^{1/2}.$$

Aquí, las condiciones de frontera son:

Condición cinemática:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.15a)$$

Diferencia de esfuerzos nulo:

$$(p - p_0)n_i = 2\mu e_{ij}n_j, \quad (2.15b)$$

aquí se ignora la tensión superficial y se considera que el fluido que está en contacto por arriba con nuestro sistema, juega un papel pasivo.

Multiplicando esta ecuación por  $n_i$  y sumando sobre los índices repetidos tenemos que:

$$(p-p_0)n_i n_i = 2\mu e_{ij} n_j n_i$$

que desarrollando y simplificando se convierte en:

$$p-p_0 = \frac{2\mu}{N^2} \{u_x \eta_x^2 + v_y \eta_y^2 + w_z + (u+v) \eta_x \eta_y - (u+w) \eta_x - (v+w) \eta_y\} \quad (2.15c)$$

tomando  $i = 1$  en (2.15b) y desarrollando:

$$(p-p_0) \frac{-\eta_x}{N} = \frac{2\mu}{N} \{-u_x \eta_x - \frac{1}{2}(u+v) \eta_y + \frac{1}{2}(u+w) \eta_x\}$$

usando (2.15c) y simplificando tenemos que:

$$\eta_x \{u_x \eta_x^2 + v_y \eta_y^2 + w_z + (u+v) \eta_x \eta_y - (u+w) \eta_x - (v+w) \eta_y\} + \frac{N^2}{2} \{-2u_x \eta_x - (u+v) \eta_y + (u+w) \eta_x\} = 0 \quad (2.15d)$$

si ahora tomamos  $i = 2$  en (2.15b) obtenemos:

$$\eta_y \{u_x \eta_x^2 + v_y \eta_y^2 + w_z + (u+v) \eta_x \eta_y - (u+w) \eta_x - (v+w) \eta_y\} + \frac{N^2}{2} \{-2v_y \eta_y - (u+v) \eta_x + (v+w) \eta_y\} = 0 \quad (2.15e)$$

Las condiciones de frontera térmica en la frontera de arriba son,

temperatura constante:

$$T = T_u \text{ constante,} \quad (2.16a)$$

y flujo de calor constante:

$$\hat{n} \cdot \nabla T = -F/kN. \quad (2.16b)$$

Ordenando, de acuerdo a las condiciones de frontera térmicas tenemos los siguientes 4 casos que determinarán la constante A dada en (2.10) como sigue:

Caso (i):

$$T(-d) = T_b, \quad T(\eta) = T_u, \quad A = (T_u - T_b)/d$$

Caso (ii):

$$\frac{\partial T(-d)}{\partial z} = -F/k, \quad n \cdot \nabla T(\eta) = -F/kN, \quad A = -F/k$$

Caso (iii):

$$T(-d) = T_b, \quad n \cdot \nabla T(\eta) = -F/kN, \quad A = -F/k$$

Caso (iv):

$$\frac{\partial T(-d)}{\partial z} = -F/k, \quad T(\eta) = T_u, \quad A = -F/k$$

#### 2.4 Ecuaciones lineales para las perturbaciones

En este momento estamos en posición de tomar una pequeña perturbación del estado inicial descrito en la sección 2.2. Sean estas perturbaciones las variables primadas, tenemos que:

$$\bar{u} = \bar{u}'(\bar{x}, t)$$

$$T = T_{\bar{u}}(z) + T'(\bar{x}, t)$$

$$p = p_{\bar{u}}(z) + p'(\bar{x}, t)$$

$$\rho = \rho_{\bar{u}}(z) + \rho'(\bar{x}, t).$$

Consideremos primero el problema dentro de la aproximación de

Boussinesq y veamos qué ecuaciones se obtienen. Ignorando términos de segundo o mayor grado, en primer lugar tenemos que la velocidad se mantiene solenoidal:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de movimiento y de transferencia de calor para las perturbaciones son, respectivamente:

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = -\frac{g\rho'}{\rho_0} \hat{k} + \nu \nabla^2 \bar{u}' - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - 2\bar{\eta} \times \bar{u}' \quad (2.18)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial T'}{\partial t} = \Lambda w' + \nabla^2 T', \quad (2.19)$$

siendo,

$$\rho' = -\alpha \rho_0 T' \quad (2.20)$$

la perturbación de la densidad.

Las ecuaciones (2.17)-(2.20) son nuestras ecuaciones básicas para las perturbaciones dentro de la aproximación de Boussinesq.

Si por otra parte, tomamos las ecuaciones básicas de movimiento (2.1)-(2.4) tenemos que en el estado no perturbado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \alpha \rho_0 \Lambda$$

y el cambio en la densidad  $\rho'$  causado por la perturbación  $T'$  en la temperatura, está dado por:

$$\rho' = -\alpha T' = -\alpha \rho_0 (1 + \alpha \Lambda z) T' .$$

Por lo tanto, mientras que los términos de primer orden en  $\partial \rho / \partial t$  y en  $u_j \partial \rho / \partial x_j$  en la ecuación (2.1) ocurren con el factor  $\alpha$ , el

término restante no lo tiene; de esta manera como  $\alpha$  es pequeño podemos ignorar el término  $\alpha \bar{w}$  y considerar a  $\bar{u}$  como solenoidal, es decir tenemos un flujo incompresible. De la ecuación de flujo de calor, lo primero es recordar que  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$  y lo segundo es ver que el término de disipación de calor  $\Phi$  es de segundo orden, por lo que recuperamos la ecuación (2.19). Considerando posteriormente la ecuación de movimiento (2.2) observamos que podemos tomar a  $\mu$  como constante, ya que las variaciones de  $\mu$  son del orden  $\alpha \rho'$  que al ser multiplicadas por  $u_j$  pueden ser ignoradas, y podemos escribir  $\rho_0$  en lugar de  $\rho$  salvo cuando está multiplicando a  $g$ .

Haciendo estas consideraciones hemos recuperado las ecuaciones para las perturbaciones dentro de la aproximación de Boussinesq (Chandrasekhar 1961, /5/). Por lo tanto, vamos a tomar a las ecuaciones (2.17)-(2.20) como nuestras ecuaciones lineales para las perturbaciones.

Si ahora tomamos al espesor de la capa "d" como la unidad de longitud, a  $d^2/\kappa$  como la unidad de tiempo, a  $Ad$  como la unidad de temperatura y a  $\rho_0 d^3$  como la unidad de masa, las ecuaciones adimensionales, toman la forma (donde ya quitamos las primas y no cambiamos de nombre a las variables que aparecen):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.21)$$

La ecuación de movimiento se convierte en:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{gd^3}{\kappa^2} \rho \hat{k} + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^2 \bar{u} - \nabla p + \frac{2\Omega d^2}{\kappa} (\hat{v}_i - u_j), \quad (2.22)$$

siendo  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados.

La ecuación de conducción de calor se convierte en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = w + \nabla^2 T \quad (2.23)$$

la ecuación de estado se convierte en:

$$\rho = -\alpha \Delta T \quad (2.24)$$

Si ahora definimos los números adimensionales:

$$\text{El número de Rayleigh: } R = \frac{(-A)d^4 g \alpha}{\kappa \nu}$$

$$\text{El número de Galleo: } G = \frac{gd^3}{\nu^2}$$

$$\text{El número de Prandtl: } \sigma = \frac{\nu}{\kappa}$$

$$\text{El número de Taylor: } T = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}$$

Por lo que las ecuaciones (2.21)-(2.24) se pueden escribir como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -G\sigma^2 \rho \hat{k} + \sigma \nabla^2 \bar{u} - \nabla p + T^{1/2} \sigma (\nu \hat{i} - u \hat{j}) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = w + \nabla^2 T \quad (2.23)$$

$$\rho = (R/G\sigma)T \quad (2.24)$$

tomando el rotacional de (2.22), con  $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u}$  el vector

vorticidad:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = -G\sigma^2 \left( \hat{i} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \hat{j} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \sigma \nabla^2 \bar{\omega} + T^{1/2} \sigma \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2.25)$$

Tomando nuevamente el rotacional de (2.25):

$$\frac{\partial \nabla^2 \bar{u}}{\partial t} = G\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} \nabla \rho - \hat{k} \nabla^2 \rho \right) + \sigma \nabla^4 \bar{u} - T^{1/2} \sigma \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \quad (2.26)$$

Sea  $\zeta$  la coordenada "z" de la vorticidad, si tomamos esta coordenada en las ecuaciones (2.25) y (2.26), tenemos que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sigma \nabla^2 \zeta + T^{1/2} \sigma \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} = -G\sigma^2 \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \sigma \nabla^4 w - T^{1/2} \sigma \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (2.28)$$

Entonces tenemos cuatro ecuaciones lineales adimensionales, (2.23), (2.24), (2.27) y (2.28). Falta encontrar las ecuaciones lineales para las perturbaciones de las condiciones de frontera.

En la superficie de abajo las condiciones de frontera toman la forma:

$$a) w(-1) = w_z(-1) = \zeta(-1) = 0 \quad (\text{superficie rígida}) \quad (2.29a)$$

ó

$$b) w(-1) = w_{zz}(-1) = \zeta_z(-1) = 0 \quad (\text{superficie libre}) \quad (2.29b)$$

$$y, \quad T(-1) = 0 \quad (\text{temperatura constante}) \quad (2.30a)$$

ó

$$T_z(-1) = 0 \quad (\text{flujo de calor constante}) \quad (2.30b)$$

En la superficie de arriba deformable:

$$\eta_t = w(0) \quad (2.31a)$$

$$u_z(0) + w_x(0) = 0 \quad (2.31b)$$

$$v_x(0) + w_y(0) = 0 \quad (2.31c)$$

$$-p(0) + G\sigma^2\eta + 2\sigma w_z(0) = 0 \quad (2.31d)$$

$$y, \quad T(0) = \eta \quad (\text{temperatura constante}) \quad (2.32a)$$

$$\delta \quad T_z(0) = 0 \quad (\text{flujo de calor constante}) \quad (2.32b)$$

En donde en este caso los subindices denotan derivadas parciales.

## 2.5 Modos Normales

Suponemos ahora que las perturbaciones se desarrollan de la siguiente manera:

$$w = W(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \lambda t\}$$

$$T = \Theta(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \lambda t\}$$

$$\zeta = Z(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \lambda t\}$$

$$\rho = \rho(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \lambda t\}$$

al igual que las demás variables que aparezcan en las condiciones de frontera. De esta manera tenemos que los operadores diferenciales que aparecen se convierten en:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = D$$

$$\nabla^2 = D^2 - k^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} = -k^2$$

$$\nabla^4 = D^4 - 2k^2 D^2 + k^4$$

$$\text{con } k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

De la ecuación de continuidad tenemos que:

$$ik_x u + ik_y v + DW = 0 \quad (2.33)$$

y la expresión para Z es:

$$Z = ik_x v - ik_y u \quad (2.34)$$

De esta manera las ecuaciones para las perturbaciones, después de algunas manipulaciones se convierten en:

$$(D^2 - k^2 - \lambda)\theta = -W \quad (2.35)$$

$$(D^2 - k^2 - \lambda/\sigma)Z = -T^{1/2} DW \quad (2.36)$$

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \lambda/\sigma)W = Rk^2\theta + T^{1/2} DZ \quad (2.37)$$

$$\{(D^2 - k^2 - \lambda)(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \lambda/\sigma)^2 + T(D^2 - k^2 - \lambda)D^2 + Rk^2(D^2 - k^2 - \lambda/\sigma)\}\theta = 0 \quad (2.38)$$

sujetas a las condiciones de frontera:

$$a) \quad W(-1) = DW(-1) = Z(-1) = 0 \quad (\text{superficie rígida}) \quad (2.39a)$$

$$\text{ó b) } W(-1) = D^2W(-1) = DZ(-1) = 0 \quad (\text{superficie libre}) \quad (2.39b)$$

en la superficie deformable de arriba tenemos:

$$\text{De (2.30a):} \quad W(0) = \lambda\eta \quad (2.40a)$$

$$\text{De (2.33):} \quad DZ(0) = 0 \quad (2.40b)$$

Combinando (2.31a) y (2.31b) obtenemos:

$$(D^2 + k^2)W(0) = 0 \quad (2.40c)$$

Para la última condición de frontera mecánica tenemos que la ecuación (2.31d), se convierte en:

$$-p(0) + G\sigma^2 W(0)/\lambda + 2\sigma DW(0) = 0 \quad (2.40d)$$

pero por otra parte si manipulamos las ecuaciones para las perturbaciones obtenemos:

$$p = \frac{\sigma}{k^2} \left[ (D^2 - k^2 - \lambda/\sigma)DW - T^{1/2}Z \right],$$

para toda  $z$ , por lo que (2.40d) se puede escribir como:

$$(D^2 - 3k^2 - \lambda/\sigma)DW - T^{1/2}Z - G\sigma k^2 W(0)/\lambda = 0 \quad (2.40e)$$

Las condiciones de frontera térmicas para los cuatro casos

son:

Caso (1) (temperatura constante arriba y abajo):

$$\Theta(-1) = 0, \quad \Theta(0) = \eta = W(0)/\lambda,$$

Caso (2) (flujo de calor constante arriba y abajo):

$$D\Theta(-1) = 0, \quad D\Theta(0) = 0,$$

Caso (3) (flujo de calor constante arriba y temperatura constante abajo):

$$\Theta(-1) = 0, \quad D\Theta(0) = 0,$$

Caso (4) (temperatura constante arriba y flujo de calor constante abajo):

$$D\Theta(-1) = 0, \quad \Theta(0) = \eta = W(0)/\lambda.$$

Al combinar cada uno de estos casos con las dos diferentes condiciones de frontera mecánicas en la frontera de abajo obtenemos un total de ocho casos.

Las ecuaciones son lineales por lo tanto la solución para  $\Theta$  en la ecuación (2.38) es de la forma:

$$\Theta = \sum_{i=1}^4 \{A_i \sinh [\alpha_i(z+1)] + B_i \cosh [\alpha_i(z+1)]\}$$

en donde las  $\alpha_i$ 's son las cuatro raíces diferentes (sin tomar en cuenta los cambios de signo) de la ecuación algebraica:

$$(\alpha^2 - k^2 - \lambda)(\alpha^2 - k^2)(\alpha^2 - k^2 - \lambda/\sigma)^2 + T(\alpha^2 - k^2 - \lambda)\alpha^2 + RK^2(\alpha^2 - k^2 - \lambda/\sigma) = 0$$

Tenemos, por lo tanto, ocho condiciones de frontera y una ecuación de octavo orden, cuya solución debe cumplir con estas condiciones de frontera para una  $\lambda$  y una  $k^2$  dados y esto nos dará una secuencia de valores de R. Tenemos pues un problema doble de valores característicos. Para una  $k^2$  y una  $\lambda$  debemos encontrar el valor de R que cumpla con las condiciones anteriores, pero debemos agregar la condición de R real. En general habrá una serie de valores de  $\lambda$  que hacen a R real (para una  $k^2$  dada y con T, G y  $\sigma$  también dados). Sin embargo nosotros estamos interesados solamente en el  $\lambda$  particular que nos dá el valor mínimo de R positivo, sean  $R_0(k^2)$  y  $\lambda_0(k^2)$  estos valores mínimos. El significado de estos parámetros es el siguiente: conforme aumentamos gradualmente el valor del número de Rayleigh, hay una perturbación caracterizada por el número de onda k que se hace inestable por sobrestabilidad cuando llega al valor  $R_0(k^2)$  con una frecuencia  $\lambda_0(k^2)$  de las oscilaciones. Para determinar el Rayleigh crítico debemos encontrar el mínimo de la función  $R_0(k^2)$ . El problema queda pues determinado, pero surgen complicaciones precisamente al tratar de encontrar este valor, ya que las funciones son en general complejas y el análisis numérico no es nada sencillo.

Nosotros encontramos los números de Rayleigh críticos en el caso estacionario  $\lambda = 0$  para los parámetros que aparecen en las ecuaciones.

## 2.6 Caso estacionario

Del caso general haciendo  $\lambda = 0$ , tenemos las siguientes ecuaciones para las perturbaciones:

$$(D^2 - k^2)\theta = -W \quad (2.41)$$

$$(D^2 - k^2)Z = -T^{1/2} DW \quad (2.42)$$

$$(D^2 - k^2)^2 W = Rk^2 \theta + T^{1/2} DZ \quad (2.43)$$

$$(D^2 - k^2)\{(D^2 - k^2)^3 + TD^2 + Rk^2\}\theta = 0 \quad (2.44)$$

sujetas a las condiciones de frontera:

$$a) \quad W(-1) = DW(-1) = Z(-1) = 0 \quad (\text{superficie rígida}) \quad (2.45a)$$

$$ó b) \quad W(-1) = D^2 W(-1) = DZ(-1) = 0 \quad (\text{superficie libre}) \quad (2.45b)$$

en la superficie de arriba tenemos que:

$$W(0) = D^2 W(0) = DZ(0) = 0 \quad (2.46)$$

$$G\sigma\eta k^2 + (D^2 - 3k^2)DW(0) - T^{1/2}Z(0) = 0 \quad (2.47)$$

Las condiciones de frontera térmicas son:

$$\text{Caso (1):} \quad \theta(-1) = 0, \quad \theta(0) = \eta, \quad (2.48a)$$

$$\text{Caso (2):} \quad D\theta(-1) = 0, \quad D\theta(0) = 0, \quad (2.48b)$$

$$\text{Caso (3):} \quad \theta(-1) = 0, \quad D\theta(0) = 0, \quad (2.48c)$$

$$\text{Caso (4):} \quad D\theta(-1) = 0, \quad \theta(0) = \eta, \quad (2.48d)$$

Nótese que cuando el problema es estacionario, el conjunto de parámetros se reduce en uno, ya que  $G$  y  $\sigma$  siempre aparecen como producto  $G\sigma$ .

Ahora traducimos las condiciones de frontera para  $\theta$  en cada uno de los ocho casos.

Caso 1a:

En la superficie de abajo,

$$\Theta(-1) = D^2\Theta(-1) = (D^2-k^2)D\Theta(-1) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}D\Theta(-1) = 0 \quad (2.49a)$$

En la superficie de arriba,

$$\begin{aligned} (D^2-k^2)\Theta(0) &= (D^2-k^2)D^2\Theta(0) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\Theta(0) = \\ &= G\sigma k^4\Theta(0) + \left\{ \{(D^2-k^2)^2 - k^2(D^2-3k^2) + \mathbb{T}\}(D^2-k^2) + Rk^2 \right\}D\Theta(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.49b)$$

Caso 1b:

En la superficie de abajo,

$$\Theta(-1) = D^2\Theta(-1) = D^4\Theta(-1) = D^6\Theta(-1) = 0 \quad (2.50a)$$

En la superficie de arriba,

$$\begin{aligned} (D^2-k^2)\Theta(0) &= (D^2-k^2)D^2\Theta(0) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\Theta(0) = \\ &= G\sigma k^4\Theta(0) + \left\{ \{(D^2-k^2)^2 - k^2(D^2-3k^2) + \mathbb{T}\}(D^2-k^2) + Rk^2 \right\}D\Theta(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.50b)$$

Caso 2a:

En la superficie de abajo,

$$D\Theta(-1) = (D^2-k^2)\Theta(-1) = D^3\Theta(-1) = (D^2-k^2)^3D\Theta(-1) = 0 \quad (2.51a)$$

En la superficie de arriba,

$$D\Theta(0) = (D^2-k^2)\Theta(0) = (D^2-k^2)D^2\Theta(0) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\Theta(0) = 0 \quad (2.51b)$$

Caso 2b:

En la superficie de abajo,

$$D\theta(-1) = (D^2 - k^2)\theta(-1) = (D^2 - k^2)D^2\theta(-1) = \{(D^2 - k^2)^3 + Rk^2\}\theta(-1) = 0$$

(2.52a)

En la superficie de arriba,

$$D\theta(0) = (D^2 - k^2)\theta(0) = (D^2 - k^2)D^2\theta(0) = \{(D^2 - k^2)^3 + Rk^2\}\theta(0) = 0$$

(2.52b)

Caso 3a:

En la superficie de abajo,

$$\theta(-1) = D^2\theta(-1) = (D^2 - k^2)D\theta(-1) = \{(D^2 - k^2)^3 + Rk^2\}D\theta(-1) = 0$$

(2.53a)

En la superficie de arriba,

$$D\theta(0) = (D^2 - k^2)\theta(0) = (D^2 - k^2)D^2\theta(0) = \{(D^2 - k^2)^3 + Rk^2\}\theta(0) = 0$$

(2.53b)

Caso 3b:

En la superficie de abajo,

$$\theta(-1) = D^2\theta(-1) = D^4\theta(-1) = D^6\theta(-1) = 0$$

(2.54a)

En la superficie de arriba,

$$D\theta(0) = (D^2 - k^2)\theta(0) = (D^2 - k^2)D^2\theta(0) = \{(D^2 - k^2)^3 + Rk^2\}\theta(0) = 0$$

(2.54b)

Caso 4a:

En la superficie de abajo,

$$D\theta(-1) = (D^2 - k^2)\theta(-1) = D^3\theta(-1) = (D^2 - k^2)^3 D\theta(-1) = 0$$

(2.55a)

En la superficie de arriba,

$$\begin{aligned}
 (D^2-k^2)\theta(0) &= (D^2-k^2)D^2\theta(0) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\theta(0) = \\
 &= G\sigma k^4\theta(0) + \left\{ \{(D^2-k^2)^2 - k^2(D^2-3k^2) + T\}(D^2-k^2) + Rk^2 \right\} D\theta(0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.55b}$$

Caso 4b:

En la superficie de abajo,

$$\begin{aligned}
 D\theta(-1) &= (D^2-k^2)\theta(-1) = (D^2-k^2)D^2\theta(-1) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\theta(-1) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.56a}$$

En la superficie de arriba,

$$\begin{aligned}
 (D^2-k^2)\theta(0) &= (D^2-k^2)D^2\theta(0) = \{(D^2-k^2)^3 + Rk^2\}\theta(0) = \\
 &= G\sigma k^4\theta(0) + \left\{ \{(D^2-k^2)^2 - k^2(D^2-3k^2) + T\}(D^2-k^2) + Rk^2 \right\} D\theta(0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.56b}$$

De acuerdo con resultados previos [12], al observar estas condiciones podemos ver que sólo en los casos 1 y 4, es decir cuando la temperatura es fija en la superficie de arriba, la deformación superficial vá a tener un efecto sobre la estabilidad, ya que cuando tenemos flujo de calor constante en la superficie de arriba no aparece el parámetro  $\eta$  en las condiciones de frontera: (2.51)-(2.54).

Las ecuaciones son lineales por lo tanto la solución para  $\theta$  es de la forma:

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \{A_i \sinh [\alpha_i (z+1)] + B_i \cosh [\alpha_i (z+1)]\} \tag{2.57}$$

en donde las  $\alpha_i$ s son las cuatro raíces diferentes (sin tomar en cuenta los cambios de signo) de la ecuación algebraica:

$$(\alpha^2 - k^2)\{(\alpha^2 - k^2)^3 + T\alpha^2 + Rk^2\} = 0 \tag{2.58}$$

cuyas soluciones son:

$$\alpha_1^2 = k^2 \text{ por lo que } (\alpha_1^2 - k^2)^3 + T\alpha_1^2 + Rk^2 = 0 \text{ para } i=2,3,4$$

sea  $x = \alpha_1^2 - k^2$ , la ecuación anterior se transforma en:

$$x^3 + Tx + (T+R)k^2 = 0.$$

Tomemos:

$$p = -\frac{T}{3}$$

y

$$q = -\frac{k^2}{2}(T+R),$$

entonces tenemos:

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

y

$$D = q^2 + p^3 = \frac{k^4}{4}(T+R)^2 + \frac{T^3}{27} \geq 0;$$

por lo que hay dos raíces imaginarias y una real. Sean

$$u = (-q + D^{1/2})^{1/3}, \quad v = (-q - D^{1/2})^{1/3},$$

$$y, \quad c_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{3^{1/2}}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{3^{1/2}}{2},$$

finalmente:

$$\alpha_2 = (u + v + k^2)^{1/2}, \quad \alpha_3 = (c_1 u + c_2 v + k^2)^{1/2}$$

$$y \quad \alpha_4 = (c_2 u + c_1 v + k^2)^{1/2}.$$

En el siguiente capítulo analizaremos la estabilidad estacionaria de cada uno de los ocho casos por separado. Se mostrarán los resultados analíticos en los casos en que esto sea posible, haciendo aproximaciones para números de onda  $k$  pequeños.

### III

#### RESULTADOS NUMERICOS

- 3.1 Caso 1a
- 3.2 Caso 1b
- 3.3 Caso 2a
- 3.4 Caso 2b
- 3.5 Caso 3a
- 3.6 Caso 3b
- 3.7 Caso 4a
- 3.8 Caso 4b

#### 3.1 Caso 1a

En este caso la superficie de abajo es rígida a temperatura constante, y la superficie de arriba es libre deformada a temperatura constante. Al tener esta condición de frontera térmica en la superficie de arriba, la deformación aparece y se tiene como parámetro al producto del número de Prandtl por el número de Galileo  $Gr$ .

Al considerar una solución para  $\theta$  de la forma (2.57), las condiciones de frontera (2.49a) y (2.49b), quedan como:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad (3.1a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.1b)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_1^2 - k^2) \alpha_1 A_1 = 0, \quad (3.1c)$$

$$Rk^2 A_1 - \sum_{i=2}^4 T \alpha_1^3 A_1 = 0, \quad (3.1d)$$

$$\sum_{i=2}^4 (\alpha_1^2 - k^2) \sinh(\alpha_1) A_1 + \sum_{i=2}^4 (\alpha_1^2 - k^2) \cosh(\alpha_1) A_1 = 0, \quad (3.1e)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - k^2) \sinh(\alpha_1) A_1 + \sum_{i=2}^4 \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - k^2) \cosh(\alpha_1) B_1 = 0, \quad (3.1f)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1) A_1 + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_1^2 \cosh(\alpha_1) B_1 = 0 \quad (3.1g)$$

$$\{Rk \cosh(k) - G\alpha k^2 \sinh(k)\} A_1$$

$$- \sum_{i=2}^4 \{(\Gamma + \alpha_1^4 - 4k^2 \alpha_1^2 + 3k^4) \alpha_1 \cosh(\alpha_1) - G\alpha k^2 \sinh(\alpha_1)\} A_1$$

$$+ \{Rk \sinh(k) - G\alpha k^2 \cosh(k)\} B_1$$

$$- \sum_{i=2}^4 \{(\Gamma + \alpha_1^4 - 4k^2 \alpha_1^2 + 3k^4) \alpha_1 \sinh(\alpha_1) - G\alpha k^2 \cosh(\alpha_1)\} B_1 = 0, \quad (3.1h)$$

El problema lo hemos convertido en un problema numérico, que en notación matricial tendría la forma:

$$AC = 0, \quad (3.2)$$

en donde A es una matriz de 8X8 que se forma al sustituir las soluciones a la ecuación (2.58) en las diferentes funciones que aparecen arriba, y C es la matriz de 8X1 formada con los coeficientes  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ . Para poder tener una solución distinta de cero debemos pedir que el determinante de A se haga cero. Para cada par de valores de  $\Gamma$  y de  $G\alpha$  fijos, tenemos una curva de valores de R y k, que cumplen con esta condición.

A continuación mostramos las gráficas de las curvas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$  para diferentes valores de  $G\sigma$  y del número de Taylor  $T$ . En la figura 3.1 se muestran estas curvas para  $G\sigma$  fijo ( $=137.5$ ), con diferentes valores del número de Taylor  $T$ . En la figura 3.2 mostramos estas curvas para  $T$  fijo ( $=100$ ) y diferentes valores del parámetro adimensional  $G\sigma$ . Estas curvas representan las curvas de estabilidad marginal, pero nuestra atención está fija en el número de Rayleigh crítico  $R_c$  y su correspondiente  $k_c$  para los cuales comienza la convección.

Para cualquier valor de  $T$  y de  $G\sigma$  el valor  $k = 0$  es un punto extremo. El valor correspondiente de  $R$  lo calcularemos analíticamente. En estas figuras podemos ver que sólo cuando la rotación es grande con respecto al parámetro  $G\sigma$ , el valor de  $R$  en  $k = 0$ , será un mínimo absoluto.

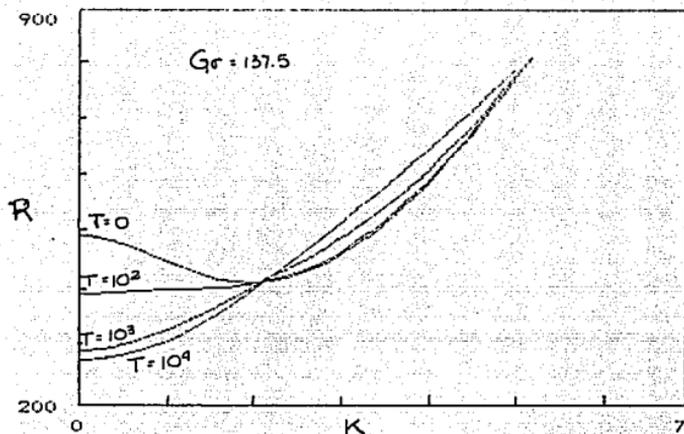


Fig. 3.1 Gráficas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$  para diferentes valores del número de Taylor  $T$ , con  $Gr = 137.5$ .

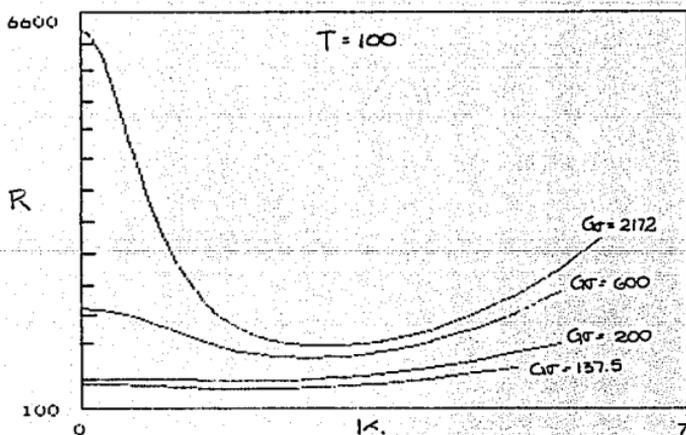


Fig. 3.2 Gráficas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$  para diferentes valores de  $Gr$  con  $T = 100$ .

En la figura 3.3 se muestran las curvas del número de onda crítico  $k_c$  contra el  $\text{Log}(1 + T)$  para diferentes valores de  $G\sigma$ . En la figura 3.4 tenemos las curvas del número de Rayleigh crítico  $R_c$  contra el  $\text{Log}(1 + T)$  para diferentes valores de  $G\sigma$ . En las figuras 3.5 y 3.6 mostramos las curvas del número de onda crítico  $k_c$  y del número de Rayleigh crítico  $R_c$ , respectivamente, contra el  $\text{Log}(G\sigma)$  para diferentes valores del número de Taylor  $T$ .

Observando la condición de frontera (2.49b) notamos que si  $G\sigma$  se hace suficientemente grande, la superficie se comporta como una superficie plana, puesto que  $\eta$  se hace muy chico y recuperamos la condición de frontera  $\theta(0) = 0$ . Esto concuerda con nuestros resultados numéricos para  $G\sigma$  grandes en las figuras 3.3 y 3.4 (éstos se pueden comparar con los de Chandrasekhar /5/ para el caso en que no hay deformación).

En el caso en que el  $G\sigma$  es pequeño, su efecto es grande, con respecto al caso en que no aparece en las condiciones de frontera. Como por ejemplo para una capa de un milímetro de glicerina, en donde  $G\sigma = 143$ .

Si por el momento nos concentramos en el tamaño de las celdas (el cuál vá como  $1/k_c$ ), se puede observar de las gráficas que aparecen en la figura 3.3, que si tenemos un fluido dado, con  $\nu$ ,  $\kappa$  y  $\alpha$  característicos y un grosor dado  $d$ , al comenzar sin rotación, el mínimo está dado para una  $k$  diferente de cero, es decir las celdas que aparecen son celdas finitas. Si ponemos a rotar un poco al fluido, tenemos dos casos: primero para  $G\sigma$  relativamente pequeños, gráficas con  $G\sigma = 137.5$ , 154 y 200, en la figura 3.3, la celda comienza a agrandarse, antes de hacerse

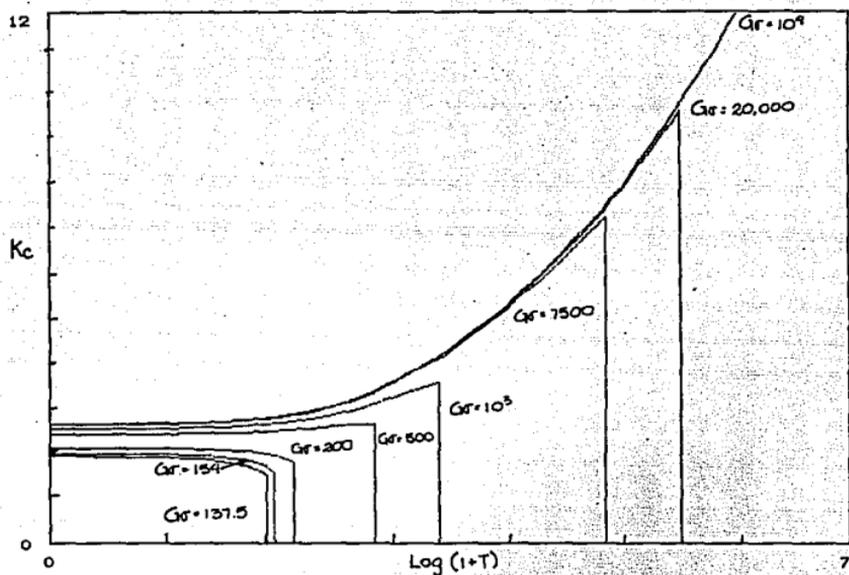


Fig. 3.3 Gráfica de  $k_c$  vs  $\text{log}(1 + T)$ , para  $Gr = 137.5, 154, 200, 500, 1000, 7500, 20000$  y  $100000$

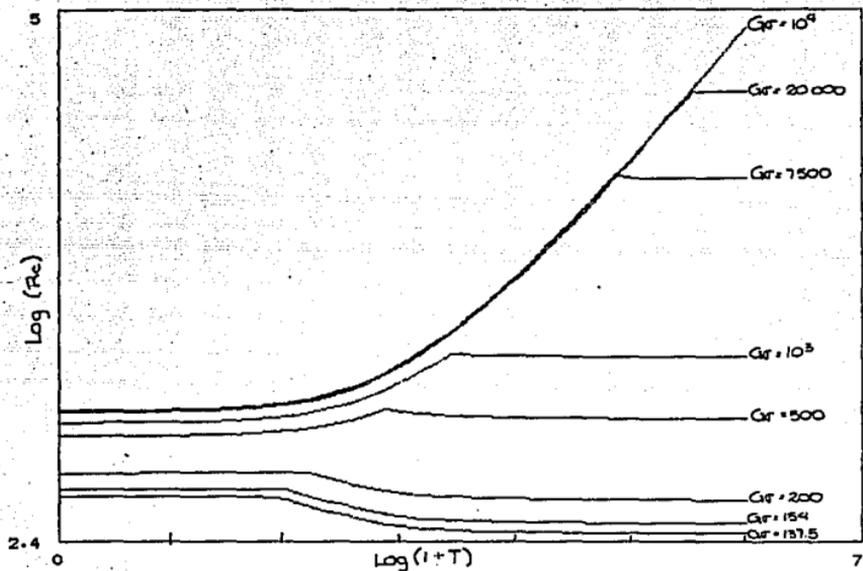


Fig. 3.4 Gráficas de  $\text{Log}(R_c)$  vs  $\text{Log}(1+T)$  para  $Gr = 137.5, 154, 200, 500, 1000, 7500, 20000$  y  $100000$ .

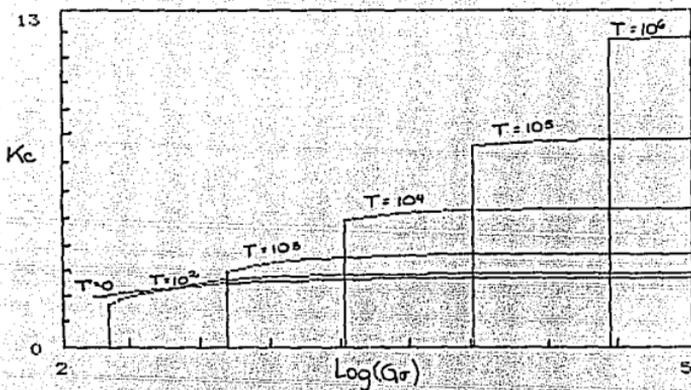


Fig. 3.5 Grafica de  $K_c$  contra  $\text{Log}(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

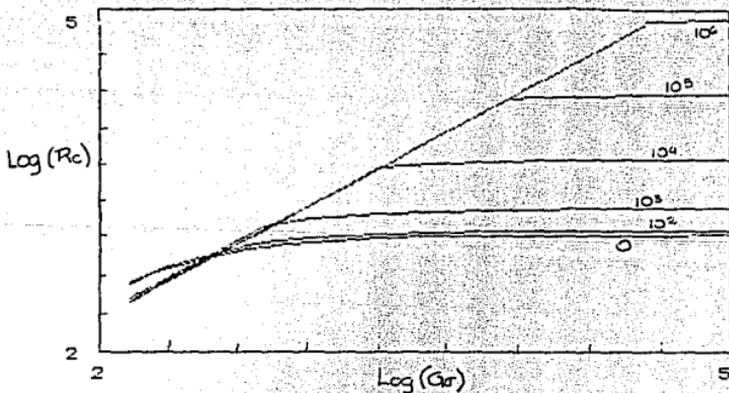


Fig. 3.6 Grafica de  $\text{Log}(R_c)$  contra  $\text{Log}(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

infinita conforme aumenta  $T$ ; en el caso contrario, para  $G\sigma$  grandes  $G\sigma = 500, 1000, 7500, 20000$  y  $10^5$ , en la figura 3.3, la celda comienza a hacerse más pequeña conforme aumenta  $T$ , es decir  $k_c$  aumenta al crecer  $T$ . En ambos casos, al seguir aumentando la rotación hasta un número de Taylor crítico  $T_c$ , para cada  $G\sigma$  aparecen dos tipos de celdas, unas muy largas y otras de tamaño regular. Para  $T > T_c$  sólo aparecen celdas infinitas. Esto lo podemos observar en las gráficas que aparecen en la figura 3.1, ya que para un  $G\sigma$  dado, cuando tenemos poca rotación, el mínimo de  $R$ , es decir  $R_c$ , está dado para  $k_c$  diferente de cero, pero llegamos a un número de Taylor, que hemos llamado  $T_c$  en el cual este valor de  $R_c$  coincide con el valor de  $R$  para  $k = 0$ . En nuestro ejemplo  $T_c = 78$ . También podemos ver en la figura 3.1 como para  $T$  grandes el mínimo está en  $k = 0$ , es decir a partir de este valor sólo aparecen celdas infinitas.

De la misma manera, para un  $T$  dado, si  $G\sigma$  es relativamente pequeño, el  $R_c$  estará en  $k = 0$ , pero llegamos a un  $G\sigma$  que podemos llamar  $G\sigma_c$  después del cual tenemos celdas infinitas (figura 3.2). Estos valores de  $T_c$  y  $G\sigma_c$  son precisamente los saltos que se observan en las gráficas de las figuras 3.3 y 3.5, respectivamente. Como se vé en la figura 3.5 el parámetro adimensional  $G\sigma$  influye sobre el tamaño de la celda, en el sentido de que la achica. Es decir al crecer  $G\sigma$  crece  $k_c$ .

En la figura 3.7 tenemos la gráfica de  $G\sigma_c$  contra  $T_c$ . Esta gráfica divide al plano  $G\sigma$ - $T$  en dos, una región en donde tenemos celdas finitas y otra con celdas infinitas. Cabe mencionar que en todas las gráficas llegamos a valores de  $G\sigma$  razonablemente

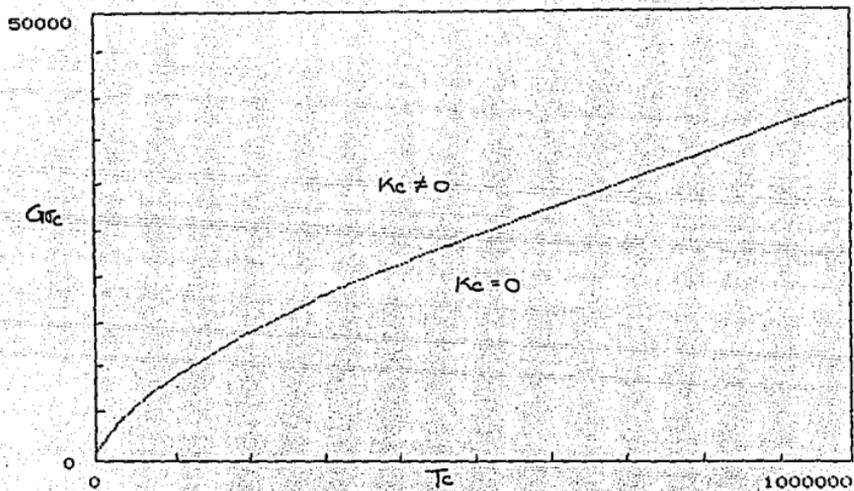


Fig. 3.7 Gráfica de  $G_{gc}$  contra  $T_c$  para cuando  $k_c$  se hace cero.

pequeños, pues no tiene ningún sentido el hablar de  $Gr$  muy pequeños.

También, con lo que respecta a la estabilidad, el hecho de considerar el efecto del parámetro adimensional  $Gr$  trae resultados sorprendentes. Como ya dijimos, si  $Gr$  es grande su efecto es muy pequeño, ya que  $\eta = \theta(0)$  tiende a cero y recuperamos las curvas calculadas en /5/. Por otra parte, podemos observar que para un  $Gr$  dado el punto donde  $k_c$  se hace cero también divide a cada una de las curvas  $T$  contra  $R_c$  (figura 3.2) en dos. De nueva cuenta, en la primera región con  $T$  pequeños (es decir menores que  $T_c$ , para cada  $Gr$ ), en donde tenemos celdas finitas se presentan dos casos, primero si  $Gr \leq 154$ , al crecer el número de Taylor  $T$ , el  $R_c$  comienza a disminuir, es decir que la rotación tiene un efecto desestabilizador sobre el sistema, contrario al caso en donde no se considera la deformación de la superficie. Aunque es preciso notar que en este caso el  $R_c$  disminuye muy poco. En el caso  $Gr > 154$  tenemos que conforme crece  $T$ ,  $R_c$  también crece, es decir la rotación tiene un efecto estabilizador sobre el fluido, como cuando la superficie es plana. En la segunda parte de las curvas de la figura 3.2, cuando las celdas son infinitas en donde  $k_c$  es cero, conforme crece  $T$ ,  $R_c$  vá disminuyendo, es decir que la rotación tiene un efecto desestabilizador, y tiende a  $2Gr$ , conforme el número de Taylor tiende a infinito para un  $Gr$  dado. Esto será claro cuando investiguemos el comportamiento de  $R$  para número de onda pequeños.

Para un número de Taylor fijo, el parámetro  $Gr$  tiene un efecto estabilizador, como podemos observar en la figura 3.6, ya

que conforme éste crece  $R_0$  también aumenta para todos los números de Taylor  $T$ . Si  $T$  es grande tenemos una relación lineal entre  $R_0$  y  $G_0$  que calcularemos al hacer la aproximación para números de onda pequeños.

Los resultados descritos anteriormente para  $T = 0$ , es decir para el caso en donde no hay rotación se pueden encontrar en /12/, y se verá que concuerdan completamente con los nuestros, mostrados en las figuras 3.1, 3.3 y 3.4.

La aproximación para números de onda pequeños, es muy parecida en todos los casos en donde se presenta, por lo que tan sólo en esta ocasión mostraremos todos los detalles:

Consideremos que  $W$ ,  $Z$  y  $\theta$  tienen la forma:

$$W = W_0 + k^2 W_1 + k^4 W_2 + \dots \quad (3.3)$$

Si combinamos las ecuaciones (2.42)-(2.44), considerándolas a orden cero y traducimos para  $W$  (se obtienen los mismos resultados si lo hacemos para la perturbación de la temperatura), tenemos que:

$$D^2 Z_0 = -T^{1/2} D W_0, \quad (3.4)$$

$$D^6 W_0 + T D^2 W_0 = 0, \quad (3.5)$$

sujeta a las condiciones de frontera dadas por (2.45a), (2.46) y (2.48a):

$$W_0(0) = D W_0(0) = Z_0(0) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\theta_0(0) = 0, \quad (3.6b)$$

$$W_0(1) = D^2 W_0(1) = D Z_0(1) = 0, \quad (3.6c)$$

$$y \quad \theta_0(1) = \eta; \quad (3.6d)$$

en donde tomamos la superficie de arriba en  $z = 1$  y la superficie

de abajo en  $z = 0$ , sin pérdida de generalidad. La condición (3.6b) con ayuda de 2.43 se convierte en:

$$D^4 W_0(0) = 0, \quad (3.6e)$$

y la condición (3.6d) (equivalente a (2.40e) pero a orden cero) es:

$$\frac{-G\sigma}{R} D^4 W_0(1) + D^3 W_0(1) - \bar{V}^{1/2} Z_0(1) = 0. \quad (3.6f)$$

La solución a (3.5) es:

$$W_0 = A_1 z + A_2 + e^{rz} (B_1 \cos(rz) + B_2 \operatorname{sen}(rz)) + e^{-rz} (B_3 \cos(rz) + B_4 \operatorname{sen}(rz)), \quad (3.7)$$

$$\text{en donde } r = \left( \frac{\bar{V}}{4} \right)^{1/4}. \quad (3.8)$$

De (3.4) tenemos que  $DZ_0 = -\bar{V}^{1/2} W_0 + \text{cte.}$ , pero de (3.6a):

$$W_0(1) = DZ_0(1) = 0,$$

por lo que la constante es cero, entonces:

$$DZ_0 = -\bar{V}^{1/2} W_0 \text{ y,}$$

$$Z_0 = -\bar{V}^{1/2} \left( \frac{1}{2} A_1 z^2 + A_2 z + C_1 + \frac{e^{rz}}{2r} \{ (B_1 - B_2) \cos(rz) + (B_1 + B_2) \operatorname{sen}(rz) \} - \frac{e^{-rz}}{2r} \{ (B_3 + B_4) \cos(rz) + (-B_3 + B_4) \operatorname{sen}(rz) \} \right) \quad (3.9)$$

Al sustituir las condiciones (3.6a)-(3.6f) en las soluciones para  $W_0$  y  $Z_0$  dadas por (3.7) y (3.8), respectivamente, tenemos que:

$$A_2 + B_1 + B_3 = 0, \quad (3.10a)$$

$$A_1 + r(B_1 + B_2 - B_3 - B_4) = 0, \quad (3.10b)$$

$$C_1 + \frac{1}{2r} (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) = 0, \quad (3.10c)$$

$$A_2 = 0, \quad (3.10d)$$

$$A_1 + A_2 + e^r(B_1 \cos(r) + B_2 \sin(r)) + e^{-r}(B_3 \cos(r) + B_4 \sin(r)) = 0, \quad (3.10e)$$

$$e^r(B_2 \cos(r) - B_1 \sin(r)) + e^{-r}(-B_4 \cos(r) + B_3 \sin(r)) = 0, \quad (3.10f)$$

$$\frac{-Gr}{R} A_1 + \frac{1}{2} A_1 + C_1 = 0; \quad (3.10g)$$

si definimos:

$$s = \frac{2Gr}{R} - 1,$$

(3.10g) se convierte en:

$$-sA_1 + 2C_1 = 0. \quad (3.10h)$$

Después de simplificar llegamos a un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$A_1 + 2rB_1 + rB_2 + rB_4 = 0$$

$$srA_1 + 2B_1 - B_2 - B_4 = 0$$

$$A_1 + B_1(e^r - e^{-r})\cos(r) + B_2 e^r \sin(r) + B_4 e^{-r} \sin(r) = 0$$

$$B_1(e^r + e^{-r})\sin(r) - B_2 e^r \cos(r) + B_4 e^{-r} \cos(r) = 0$$

y de la condición de solubilidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2r & r & r \\ sr & 2 & -1 & -1 \\ 1 & \cos(r)(e^r - e^{-r}) & e^r \sin(r) & e^{-r} \sin(r) \\ 0 & \sin(r)(e^r + e^{-r}) & -e^r \cos(r) & e^{-r} \cos(r) \end{vmatrix} = 0$$

Que después de despejar para para s, dá:

$$s = \frac{4\text{rcosh}(r)\cos(r) - \text{sen}(2r) - \text{senh}(2r)}{r^2(\text{senh}(2r) - \text{sen}(2r))}, \quad (3.11)$$

$$\text{de donde } R \text{ queda como: } R = \frac{2G\sigma}{s+1}. \quad (3.12)$$

Esta fórmula para  $R_c$  no sólo confirma nuestros resultados numéricos, sino que nos ha ayudado para determinar el momento en que  $k_c = 0$  es el mínimo absoluto, sin tener que calcular las curvas completas.

En ausencia de rotación,  $R$  quedaría como /12/:

$$R = \frac{40G\sigma}{11}, \quad (3.13)$$

que concuerda con lo (3.12), ya que el límite de  $s$  cuando  $r$  tiende a cero es  $-9/20$ . Por el contrario, si tomamos el límite cuando  $r$  es muy grande,  $s$  tiende a cero y el número de Rayleigh crítico tiende a  $2G\sigma$ . Lo cual concuerda con los resultados de las figuras 3.4 y 3.6.

Para un  $T$  lo suficientemente grande para que las celdas sean infinitas, el número de Rayleigh crítico estará dado por (3.12) (figura 3.4), es decir tenemos una relación lineal entre  $R_c$  y  $G\sigma$ . Esto no es sorprendente ya que por definición:

$$G\sigma = \frac{gd^3}{\nu\kappa} \quad (3.14)$$

$$\text{y } R = \frac{(-A)gd^4\alpha}{\nu\kappa} = (-A)d\alpha G\sigma. \quad (3.15)$$

Un fenómeno muy parecido a lo descrito en los párrafos anteriores sucede cuando consideramos la estabilidad de la

convección estacionaria de una capa de magnetofluido, en donde actúan campo magnético y rotación constantes, simultáneamente /5/. Cuando el campo magnético y la rotación actúan por separado, ambos inhiben la estabilidad y tienden a disminuir el tamaño de la celda, pero cuando actúan juntos los efectos para ciertos valores no se suman. En ese caso también hay una discontinuidad en la gráfica de  $Q$  (el número de Chandrasekhar), número adimensional característico del campo magnético, contra  $k_c$  en donde para una rotación dada, hay un valor de  $Q$  para el cual  $k_c$  disminuye mucho, antes de este valor el  $k_c$  es casi constante para todo  $Q$ . Además para una  $Q$  grande, al crecer la rotación el  $k_c$  disminuye. Esto muestra, como en nuestro caso, que conocer los efectos por separado de los dos parámetros, no garantiza que los dos efectos actuando juntos den resultados semejantes.

También cuando consideramos los efectos de la rotación actuando en una capa de fluido calentada por abajo entre paredes que son malas conductoras, tenemos una región en donde para números de Taylor, menores que un Taylor crítico (en nuestro caso son mayores) donde aparecen celdas infinitas. Esto fué primero expuesto por Dávalos en /13/; nosotros estudiaremos este fenómeno en las secciones 3.3 y 3.4, con diferentes condiciones de frontera (tanto mecánicas como térmicas), al problema estudiado por Dávalos.

Por otra parte, el número adimensional  $G_0$  puede ser considerado como un parámetro gravitacional. Si lo vemos de esta manera tenemos que la gravedad tiene un efecto de fuerza "restauradora", sobre la capa de fluido, que será controlada

precisamente por este parámetro  $G\sigma$ . Pero es en el momento en que interactúan la rotación y este parámetro gravitacional, que los efectos de éstos son desestabilizadores, a pesar de que los dos actuando por separado son estabilizadores, como en el caso del campo magnético y la rotación actuando juntos.

Si nosotros hiciéramos tender  $\nu$  a cero,  $G\sigma$  tendería a infinito, y recuperaríamos las curvas descritas en el libro de Chandrasekhar (por ejemplo curvas con  $G\sigma = 100000$  en las figuras 3.3 y 3.4), y  $R_c$  tendería a infinito, por lo que el fluido sería estable para cualquier gradiente adverso de temperatura. Esto vá de acuerdo con el teorema de Taylor-Proudman para un fluido sin viscosidad rotando: la distancia entre dos partículas de fluido no cambiará a lo largo del eje de rotación. Este resultado limita el movimiento convectivo cuando  $G\sigma$  es muy grande y  $T$  tiende a infinito.

### 3.2 Caso 1b

En este caso tenemos que la superficie de abajo es libre a temperatura constante, y la superficie de arriba es libre deformada a temperatura constante. Al tener esta condición de frontera térmica en la superficie de arriba, de nueva cuenta aparece el parámetro  $G\sigma$ . De hecho este caso es muy similar al anterior, como se verá en los resultados numéricos, ya que sólo cambiamos la condición de superficie libre sin deformación en la frontera de abajo, con respecto al caso anterior.

Al considerar una solución para  $\theta$  de la forma (2.57), las

condiciones de frontera (2.50a) y (2.50b) correspondientes a este caso, quedan como:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad (3.16a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.16b)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^4 B_i = 0, \quad (3.16c)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^6 B_i = 0, \quad (3.16d)$$

$$\sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + B_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0, \quad (3.16e)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + B_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.16f)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.16g)$$

$$\begin{aligned} & \{Rk \cosh(k) - G\alpha k^2 \sinh(k)\} A_1 \\ & - \sum_{i=2}^4 \{(\mathbb{T} + \alpha_i^4 - 4k^2 \alpha_i^2 + 3k^4) \alpha_i \cosh(\alpha_i) - G\alpha k^2 \sinh(\alpha_i)\} A_i \\ & + \{Rk \sinh(k) - G\alpha k^2 \cosh(k)\} B_1 \\ & - \sum_{i=2}^4 \{(\mathbb{T} + \alpha_i^4 - 4k^2 \alpha_i^2 + 3k^4) \alpha_i \sinh(\alpha_i) - G\alpha k^2 \cosh(\alpha_i)\} B_i = 0. \end{aligned} \quad (3.16h)$$

El procedimiento a seguir es completamente análogo al seguido anteriormente, y las gráficas se muestran como en la sección 3.1. En la gráfica 3.8 mostramos las gráficas del número de Rayleigh R contra el número de onda k, para diferentes valores

de  $V$  con  $G\sigma$  fijo ( $=100$ ). En la 3.9 mostramos las mismas curvas pero con  $V$  fijo ( $=1000$ ) con diferentes valores de  $G\sigma$ . Como en el caso anterior el punto  $k = 0$  es un punto extremo. En este caso para un  $G\sigma$  dado (figura 3.8), el valor correspondiente de  $R$ , para  $k = 0$  es el mismo, independientemente del número de Taylor y es  $3G\sigma$ . Esto lo demostraremos analíticamente al hacer el cálculo para número de onda pequeños. Como en el caso 1a, este punto con  $k = 0$  será el crítico sólo si la rotación es grande con respecto al  $G\sigma$ , como se puede observar en la figura 3.9.

En la figura 3.10 podemos observar como aparecen las celdas infinitas conforme crece  $V$ . Es decir cuando la rotación es pequeña, tenemos celdas finitas para todos los  $G\sigma$  con valores relativamente pequeños. Al seguir aumentando el número de Taylor  $V$  llegamos a un valor  $V_c$ , en el cual aparecen dos tipos de celdas, unas de tamaño infinito y otras de tamaño regular, es decir es el punto en que el mínimo de  $R$  mostrado en las figuras 3.8 y 3.9 en  $k$  diferente de cero, coincide con el valor de  $R$  para  $k = 0$ , que es independiente de  $V$  y vale  $3G\sigma$  como se vé en la figura 3.9. Para  $V > V_c$  el número de onda crítico  $k_c$  es siempre cero. Si aumentamos la rotación un poco, sin llegar al valor  $V_c$ , tenemos que para  $G\sigma$  relativamente chico, por ejemplo gráficas con  $G\sigma = 100, 150, 200$  e inclusive 500 en la figura 3.10, tenemos que el número de onda crítico  $k_c$  aumenta un poco conforme aumenta  $V$ , pero después comienza a disminuir, hasta que llega al valor de  $V_c$ , en donde se vá a cero. Este es precisamente el salto que se observa en esta figura. En el caso de  $G\sigma$  grandes en ( $= 1000, 5000, 20000$  y  $80000$  en la figura (3.10), conforme aumenta  $V$ , para valores menores que

el  $V_c$ , el  $k_c$  aumenta, es decir la celda disminuye en tamaño, hasta llegar a  $V_c$ , en donde la celda se hace infinita.

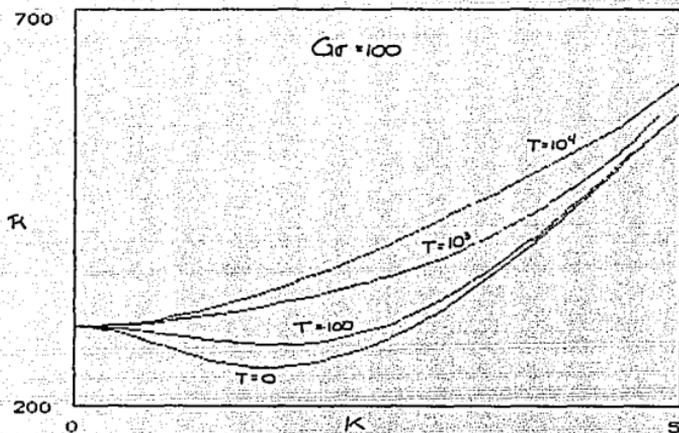


Fig. 3.8 Gráficas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$  para diferentes valores del número de Taylor  $T$ , con  $Gr = 100$

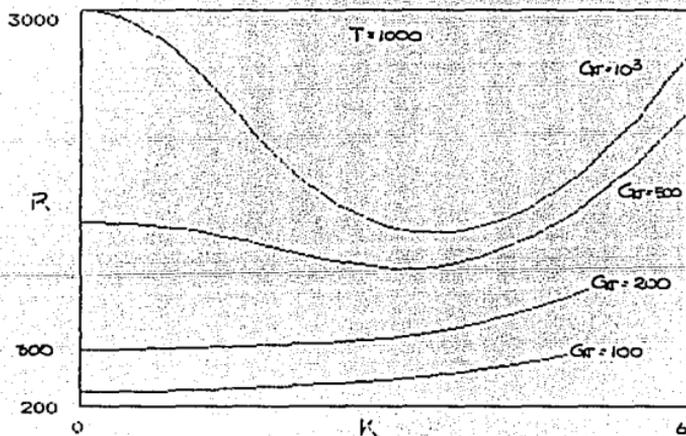


Fig. 3.9 Gráficas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$  para diferentes valores de  $Gr$  con  $T = 1000$ .

De una forma parecida, si tenemos un  $G\sigma$  grande la celda es de tamaño finito, pero al disminuir su valor, llegamos a un  $G\sigma_c$ , que podemos llamar  $G\sigma_c$ , en donde  $k_c$  se hace cero para cada  $V$ , que son precisamente los saltos en la figura 3.12. Para  $G\sigma < G\sigma_c$  el mínimo estará siempre en  $k = 0$ . También en esta figura podemos observar que el efecto del  $G\sigma$  es el de achicar las celdas, para todos los valores de  $V$ .

Si nos fijamos en la gráfica de  $G\sigma = 80000$  en la figura 3.10, veremos que esta coincide con la gráfica para el caso en donde no hay deformación superficial que también fué calculada por Chandrasekhar en /5/. Esto es claro, si volvemos a la condición de frontera (2.49b), en donde para  $G\sigma$  suficientemente grandes, recuperamos la condición de frontera  $\eta = \Theta(0) = 0$ . Una diferencia que debemos hacer notar, con respecto al caso anterior 1a, es que las curvas de  $R_c$  y  $k_c$  contra  $G\sigma$  para cuando  $V = 0$ , que mostramos en las figuras 3.12 y 3.13, no han sido presentados en la literatura.

Con lo que respecta a la estabilidad, podemos observar en la gráfica 3.11 que cuando la celda es finita el  $R_c$  comienza a crecer, conforme aumenta  $V$ , es decir, la rotación tiene un efecto estabilizador para todos los valores del  $G\sigma$  cuando el número de onda crítico es diferente de cero. Al tener una celda infinita, es decir para  $V > V_c$ , el  $R_c$  es constante, y vale  $3G\sigma$ , llegamos a un punto en que la rotación ya no tiene efecto sobre la estabilidad de nuestro sistema.

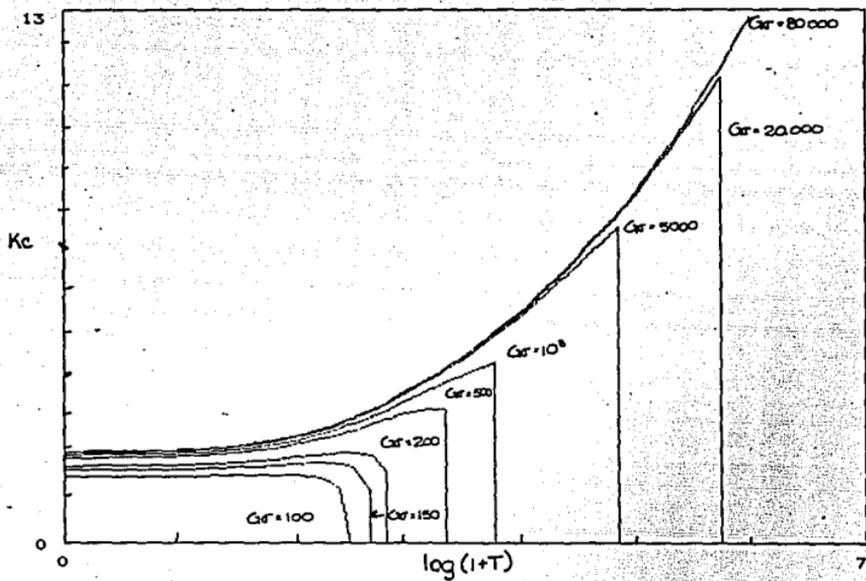


Fig. 3.10 Gráficas de  $kc$  contra  $\log(1+T)$  para  $Gr = 100, 150, 200, 500, 1000, 5000, 20000$  y  $80000$ .

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

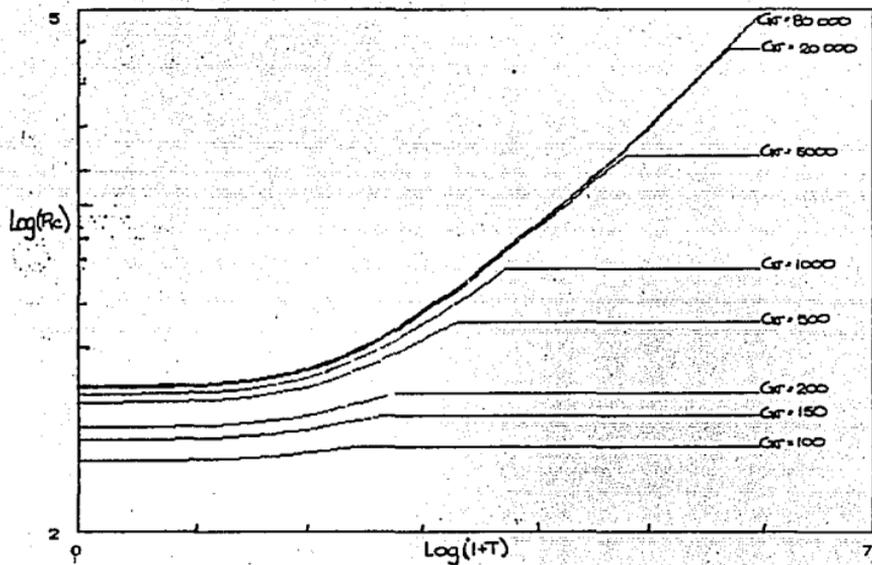


Fig. 3.11 Gráficas de  $\text{Log}(R_c)$  vs  $\text{Log}(1+T)$  para  $G_r = 100, 150, 200, 500, 1000, 5000, 20000$  y  $80000$ .

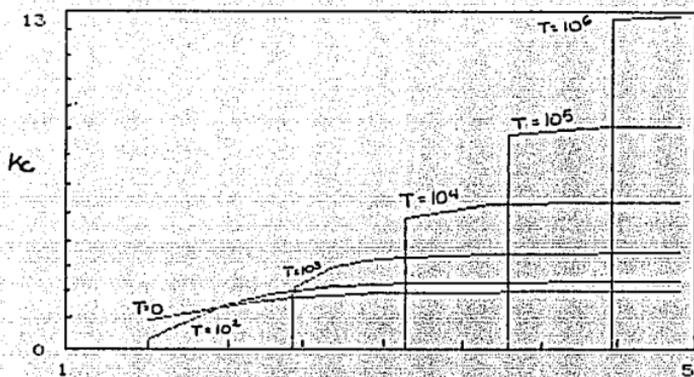


Fig. 3.12 Gráfica de  $k_c$  contra  $\log(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$

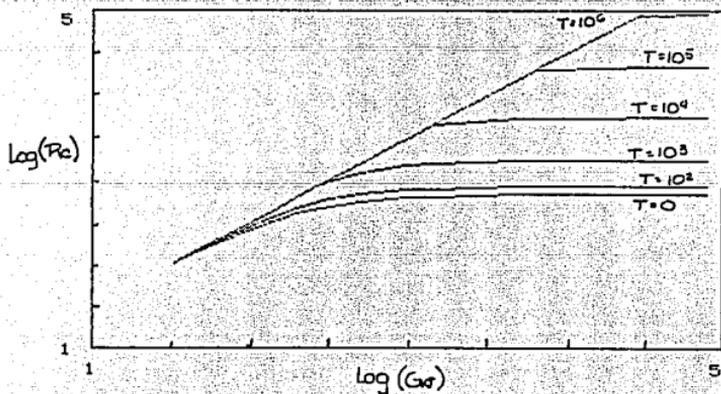


Fig. 3.13 Gráfica de  $\log(R_c)$  contra  $\log(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$

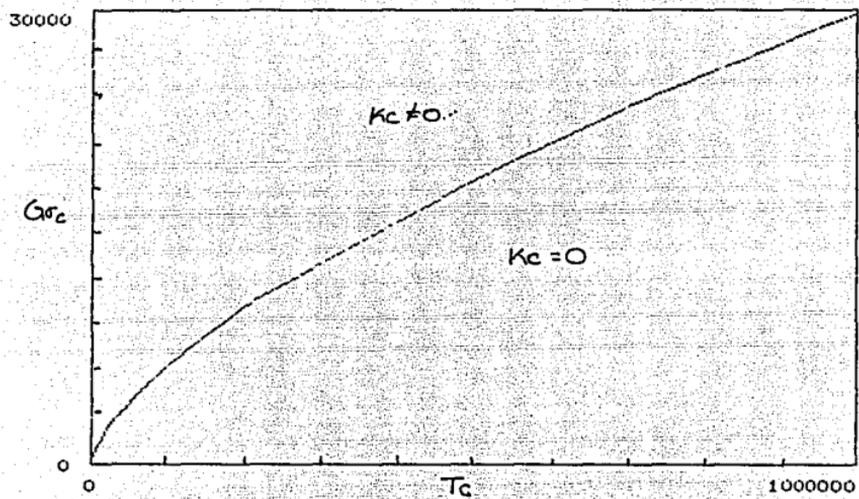


Fig. 3.14 Gráfica de  $Gr_c$  contra  $T_c$  para cuando  $k_c$  se hace cero.

De nueva cuenta, para un número de Taylor fijo el parámetro  $G\sigma$  (figura 3.13) tiene un efecto estabilizador y si estamos en la región con  $k = 0$  (figura 3.14) esta relación es:  $R_c = 3G\sigma$  como se verá al hacer la aproximación para números de onda pequeños.

La aproximación para números de onda pequeños, es muy parecida al caso anterior, por lo que  $W$ ,  $Z$  y  $\theta$  tienen la forma (3.3):

$$W = W_0 + k^2 W_1 + k^4 W_2 + \dots \quad (3.17)$$

y las ecuaciones que nos quedan a orden cero son (3.4) y (3.5):

$$D^2 Z_0 = -T^{1/2} D W_0, \quad (3.18)$$

$$D^6 W_0 + T D^2 W_0 = 0, \quad (3.19)$$

sujeta a las condiciones de frontera dadas por (2.45b), (2.46) y (2.48a):

$$W_0(0) = D^2 W_0(0) = D Z_0(0) = 0, \quad (3.20a)$$

$$\theta_0(0) = 0, \quad (3.20b)$$

$$W_0(1) = D^2 W_0(1) = D Z_0(1) = 0 \quad (3.20c)$$

y  $\theta_0(1) = \eta; \quad (3.20d)$

de la misma forma que en el caso anterior, las condiciones de frontera (3.20b) y (3.20d) se convierten en:

$$D^4 W_0(0) = 0, \quad (3.20e)$$

y  $\frac{-G\sigma}{R} D^4 W_0(1) + D^2 W_0(1) - T^{1/2} Z_0(1) = 0, \quad (3.20f)$

respectivamente.

La solución a (3.19) es:

$$W_0 = A_1 z + A_2 + e^{rz} \{B_1 \cos(rz) + B_2 \sin(rz)\} + e^{-rz} \{B_3 \cos(rz) + B_4 \sin(rz)\}$$

en donde  $r = \left(\frac{T}{4}\right)^{1/4}$ , (3.21)

De (3.18) tenemos que  $DZ_0 = -T^{1/2} W_0 + \text{cte.}$ , pero de (3.20a) y (3.20c):

$$W_0(0) = DZ_0(0) = W_0(1) = DZ_0(1) = 0,$$

por lo que:  $DZ_0 = -T^{1/2} W_0$  y,

$$Z_0 = -T^{1/2} \left[ \frac{1}{2} A_1 z^2 + A_2 z + C_1 + \frac{e^{rz}}{2r} \{ (B_1 - B_2) \cos(rz) + (B_1 + B_2) \sin(rz) \} - \frac{e^{-rz}}{2r} \{ (B_3 + B_4) \cos(rz) + (-B_3 + B_4) \sin(rz) \} \right] \quad (3.22)$$

Al sustituir las condiciones de frontera (3.20a)-(3.20f) en (3.21) y (3.22), tenemos:

$$A_2 + B_1 + B_3 = 0 \quad (3.23)$$

$$B_2 - B_4 = 0 \quad (3.24)$$

$$B_1 + B_3 = 0 \quad (3.25)$$

$$A_1 + A_2 + e^r \{B_1 \cos(r) + B_2 \sin(r)\} + e^{-r} \{B_3 \cos(r) + B_4 \sin(r)\} = 0 \quad (3.26)$$

$$e^r \{B_2 \cos(r) - B_1 \sin(r)\} + e^{-r} \{-B_4 \cos(r) + B_3 \sin(r)\} = 0 \quad (3.27)$$

De  $\theta_0(1) = \eta$  resulta:

$$-\frac{C\sigma}{R} A_1 + \frac{1}{2} A_1 + C_1 = 0 \quad (3.28)$$

Como se puede apreciar, hay seis ecuaciones homogéneas y siete

constantes por determinar, esto se debe a que la condición:

$$W_0(0) = DZ_0(0) = W_0(1) = DZ_0(1) = 0,$$

son en realidad dos en una, por lo que tenemos que tomar una segunda aproximación:

Sustituyendo en (2.42):

$$(D^2 - k^2)Z = -V^{1/2}DW, \text{ tenemos que:}$$

$$(D^2 - k^2)Z_0 + k^2 D^2 Z_2 = -V^{1/2}(DW_0 - k^2 DW_2)$$

$$\text{Entonces: } Z_0 + D^2 Z_2 + V^{1/2} DW_2. \quad (3.29)$$

Integrando en todo el rango de  $z$  obtenemos:

$$\int_0^1 Z_0 dz = \left[ DZ_2 + V^{1/2} W_2 \right]_0^1, \text{ pero } W_2 = DZ_2 = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } z = 1,$$

$$\text{por lo que } \int_0^1 Z_0 dz = 0.$$

Sustituyendo  $Z_0$  dado por (3.22):

$$\frac{A_1}{6} + C_1 + \frac{e^r}{2r^2} \{-B_2 \cos(r) + B_1 \sin(r)\} + \frac{e^{-r}}{2r^2} \{B_4 \cos(r) - B_3 \sin(r)\} + \frac{B_2 - B_4}{2r^2} = 0, \quad (3.30)$$

que simplificando con (3.23)-(3.27) llegamos a:

$$\frac{A_1}{6} + C_1 = 0, \text{ sustituyendo en (3.28):}$$

$$\frac{-G\sigma}{R} A_1 + \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{6} A_1 = 0 \quad (3.31)$$

De la condición de solubilidad tenemos que  $A_1$  es diferente de cero, por lo que despejando para  $R$  obtenemos:

$$R = 3G\sigma \quad (3.32)$$

Esta fórmula para  $R$  es consistente con los resultados

numéricos obtenidos. Todas las consideraciones que hicimos en la sección 3.1 son las mismas para este caso.

### 3.3 Caso 2a

En este caso la superficie de abajo es rígida con flujo de calor constante, y la superficie de arriba es libre con flujo de calor constante. Como se vé de las condiciones de frontera (2.51a) y (2.51b) el factor  $Gr$  no aparece. Considerando una solución del tipo, (2.57) las condiciones de frontera (2.51a) y (2.51b) se convierten en:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i = 0, \quad (3.33a)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0, \quad (3.33b)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^3 A_i = 0, \quad (3.33c)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i (\alpha_i^2 - k^2)^3 A_i = 0, \quad (3.33d)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \{ A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i) \} = 0, \quad (3.33e)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + B_i \cdot 0 + \sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0, \quad (3.33f)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + B_i \cdot 0 + \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.33g)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.33h)$$

En la figura 3.15 mostramos las gráficas del número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda crítico, para diferentes valores de  $T$ . Como se puede observar, para  $T = 0$  el mínimo está en  $k = 0$  y el número de Rayleigh crítico vale 320 lo cual está de acuerdo con resultados previos [14]. Conforme crece  $T$  el número de onda crítico seguirá siendo cero, es decir tenemos celdas infinitas, hasta que llegamos a un número de Taylor crítico  $T_c = 78$  cuya gráfica se muestra en la figura 3.16 en el cual el mínimo absoluto es diferente de cero (aunque no se pueda apreciar bien en la gráfica  $k_c = .102$ ). Para  $T > T_c$  el número de onda crítico es diferente de cero y aumenta con  $T$  (figura 3.17), es decir la celda se hace cada vez más pequeña. Esta  $T_c$  puede ser interpretado como el valor del número de Taylor en el cual la rotación comienza a afectar la convección, es decir se forman las celdas de convección.

Tenemos que al aumentar el número de Taylor el  $R_c$  aumenta (figura 3.16), es decir la rotación tiene un efecto estabilizador, aún cuando tenemos celdas infinitas, pero en la gráfica podemos apreciar que en esta región ( $T < T_c$ ) el número de Rayleigh crítico varía muy poco. Al no tener al factor  $G\sigma$  en las condiciones de frontera, era de esperarse que la rotación fuera un factor estabilizador. Si comparamos el presente caso con el caso 1a, en el cuál tenemos temperatura constante en ambas superficies pero para valores de  $G\sigma$  grandes, es decir cuando casi no se siente la deformación superficial y  $\eta$  es muy chico, (gráficas con  $G\sigma$  grandes en la figura 3.4) podemos ver que que en este caso el  $R_c$  es menor para todo número de Taylor  $T$ .

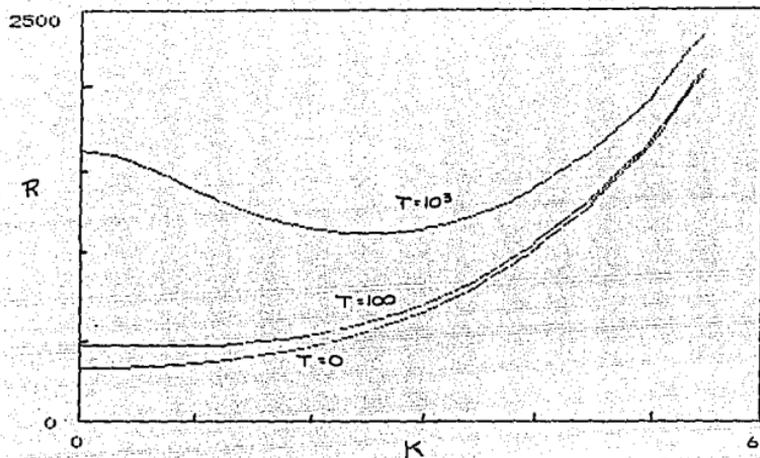


Figura 3.15 Gráficas del Número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$ , para diferentes valores del número de Taylor  $T$ .

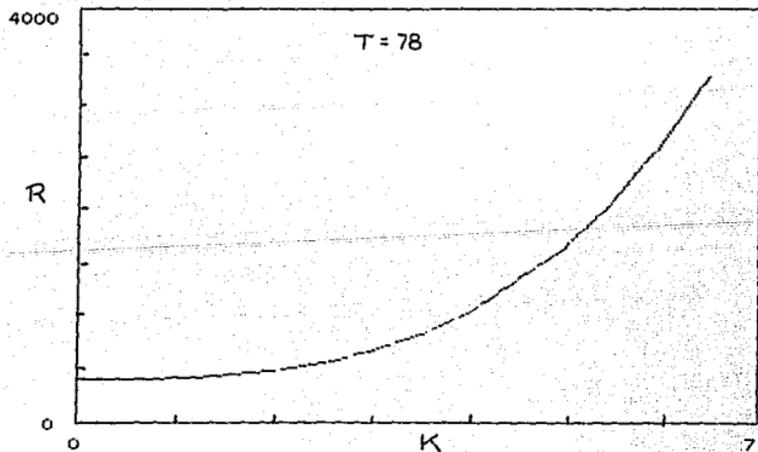


Figura 3.16 Gráficas del Número de Rayleigh  $R$  contra el número de onda  $k$ , para el número de Taylor crítico  $T_c = 77$ .

Hurle et al. /15/ hicieron cálculos para el caso en donde las superficies tienen diferentes conductividades térmicas pero con condiciones de frontera mecánicas diferentes, en ausencia de rotación. En el caso particular en que las superficies son malas conductoras, encontraron que el número de onda crítico es igual a cero. Dávalos /13/ hizo los cálculos para superficies rígidas no conductoras, incluyendo el efecto de la rotación y el campo magnético, los cuales concuerdan con nuestros resultados anteriores en el sentido de que aparecen celdas infinitas, para números de Taylor pequeños.

Para la región en donde  $k_c$  es igual a cero, podemos hacer una aproximación a orden cero, muy parecida a las hechas anteriormente y obtener la dependencia de  $R_c$  con respecto a  $T$ . De nueva cuenta tomamos una expansión de las variables de la forma (3.3):

$$W = W_0 + k^2 W_1 + k^4 W_2 + \dots, \quad (3.34)$$

de igual manera para  $Z$  y para  $\Theta$ . siguiendo a /15/, tomamos una nueva escala de velocidades como:

$$W = k^2 W', \quad (3.35a)$$

$$Z = k^2 Z', \quad (3.35b)$$

Tomando una aproximación a orden cero las ecuaciones de movimiento (2.35)-(2.37) se convierten en:

$$D^2 Z'_0 = -T^{1/2} D W'_0, \quad (3.36a)$$

$$D^4 W'_0 - T^{1/2} D Z'_0 = R \Theta_0, \quad (3.36b)$$

$$D^2 \Theta_0 = 0, \quad (3.36c)$$

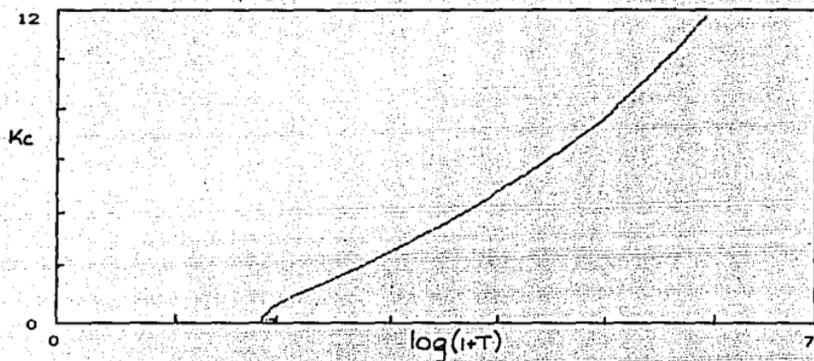


Fig. 3.17 Gráfica de  $kc$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

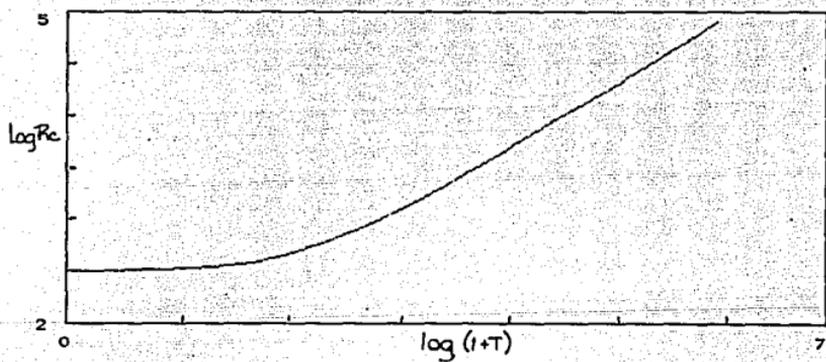


Fig. 3.18 Gráfica de  $\text{Log}(Rc)$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

Usando las condiciones de frontera (2.51a) y (2.51b) tenemos que:

De  $D\theta(1) = 0$  obtenemos que  $\theta_0 = \text{constante}$

De  $DZ(0) = W(0) = 0$  resulta:  $DZ'_0 = -\Gamma^{1/2}W'_0$

Por lo que (3.36b) se convierte en:

$$D^4W'_0 + \Gamma W'_0 = R\theta_0 \quad (3.37)$$

cuya solución es:

$$W'_0 = \frac{R\theta_0}{\Gamma} \left( 1 + e^{rz} \{B_1 \cos(rz) + B_2 \operatorname{sen}(rz)\} + e^{-rz} \{B_3 \cos(rz) + B_4 \operatorname{sen}(rz)\} \right)$$

$$\text{en donde } r = \left( \frac{\Gamma}{4} \right)^{1/4} \quad (3.38)$$

Aplicando las condiciones de frontera a (3.36), nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 + B_1 + B_3 = 0 \quad (3.39a)$$

$$B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 0 \quad (3.39b)$$

$$1 + e^r \{B_1 \cos(r) + B_2 \operatorname{sen}(r)\} + e^{-r} \{B_3 \cos(r) + B_4 \operatorname{sen}(r)\} \quad (3.39c)$$

$$e^r \{B_2 \cos(r) - B_1 \operatorname{sen}(r)\} + e^{-r} \{-B_4 \cos(r) + B_3 \operatorname{sen}(r)\} \quad (3.39d)$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$B_1 = -1 - B_3 \quad (3.40a)$$

$$B_2 = 1 + 2B_3 - B_4 \quad (3.40b)$$

$$B_3 = \frac{2\cos(r)\cosh(r) + \operatorname{sen}(2r) - \cos(2r) - e^{2r}}{2(\operatorname{senh}(2r) - \operatorname{sen}(2r))} \quad (3.40c)$$

$$B_4 = \frac{e^r \{\operatorname{sen}(r) + \cos(r) + 2B_3 \{(\operatorname{sen}(r)\cosh(r) + e^r \cos(r))\}\}}{2\cos(r)\cosh(r)} \quad (3.40d)$$

Al determinar estos cuatro coeficientes, hemos encontrado

la solución a (3.38) salvo la constante  $\theta_0$ . Por lo que para resolver el problema de valor propio tenemos que tomar una segunda aproximación:

$D^2\theta_2 = \theta_0 - W'_0$ , que integrando en el rango de  $z$  nos queda como:

$$\int_0^1 (\theta_0 - W'_0) dz = 0$$

$$\int_0^1 \theta_0 \left( 1 - \frac{R}{V} \left( 1 + e^{rz} (B_1 \cos(rz) + B_2 \sin(rz)) + e^{-rz} (B_3 \cos(rz) + B_4 \sin(rz)) \right) \right) dz = 0 \quad (3.41)$$

efectuando la integral y evaluando tenemos que:

$$\frac{R}{V} \left\{ 1 + \frac{e^r}{2r} \left\{ (B_1 - B_2) \cos(r) + (B_1 + B_2) \sin(r) \right\} - \frac{e^{-r}}{2r} \left\{ (B_3 + B_4) \cos(r) + (-B_3 + B_4) \sin(r) \right\} - \frac{1}{2r} (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) \right\} = 1$$

Con lo cual obtenemos que:

$$R = V \left\{ 1 + \frac{e^r}{2r} \left\{ (B_1 - B_2) \cos(r) + (B_1 + B_2) \sin(r) \right\} - \frac{e^{-r}}{2r} \left\{ (B_3 + B_4) \cos(r) + (-B_3 + B_4) \sin(r) \right\} - \frac{1}{2r} (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) \right\}^{-1} \quad (3.42)$$

La ecuación (3.42) nos da el valor de  $R$  para cuando  $k$  es cero, con  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$  dados por las ecuaciones (3.40a)-(3.40d). Este resultado confirma nuestros cálculos numéricos. Entonces para  $T < T_c$ , el número de Rayleigh crítico  $R_c$  puede ser calculado por

(3.42).

### 3.4 Caso 2b

En este caso tenemos que la superficie de abajo es libre con flujo de calor constante y la superficie de arriba es libre con flujo de calor constante. Como en el caso anterior, se vé de las condiciones de frontera (2.52a) y (2.52b), que la deformación de la superficie no aparece como una condición extra. Considerando una solución del tipo, (2.57) estas condiciones de frontera se convierten en:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i = 0, \quad (3.43a)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0, \quad (3.43b)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0, \quad (3.43c)$$

$$B_1 Rk^2 - \sum_{i=2}^4 \bar{v} \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.43d)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i (A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i)) = 0, \quad (3.43e)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.43f)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.43g)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 \bar{v} \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 \bar{v} \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.43h)$$

Este caso tan sólo difiere del anterior en la condición mecánica en la superficie de abajo, por lo que los resultados serán muy similares. En la figura 3.19 tenemos la gráfica del número de onda crítico  $k_c$  contra el  $\log(1 + T)$ , podemos observar que cuando no tenemos rotación el número de onda crítico  $k_c$  vale cero, por lo que tenemos celdas infinitas, de acuerdo con /15/. Al aumentar un poco  $T$  el  $k_c$  sigue valiendo cero, hasta que llegamos a un valor del número de Taylor crítico  $T_c$  igual a 181, en donde se forman las celdas de convección es decir tenemos que  $k_c$  es diferente de cero ( $= 0.129$ ), para el cuál el número de Rayleigh crítico vale 342.088. Al seguir aumentando el número de Taylor, tenemos que  $k_c$  crece, por lo que las celdas de convección se van achicando.

Con lo que respecta a la estabilidad, tenemos que al aumentar el número de Taylor, el  $R_c$  crece (figura 3.20), es decir la rotación tiene un efecto estabilizador, aún cuando tenemos celdas infinitas ( $T < T_c$ ) como en el caso anterior, para este caso en  $T_c = 181$  tenemos que  $R_c = 342.088$ . Hurie et al. /15/ hicieron los cálculos para el caso sin rotación y encontraron que:  $R_c = 120$ , lo cual está de acuerdo con nuestra gráfica. Tan sólo nos resta mostrar la aproximación para números de onda pequeños.

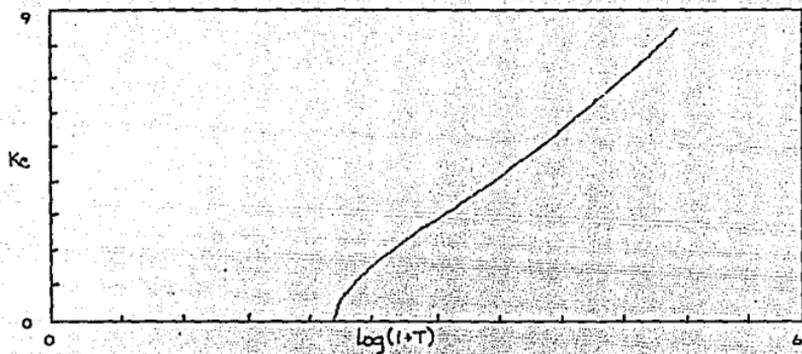


Fig. 3.19 Gráfica de  $kc$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

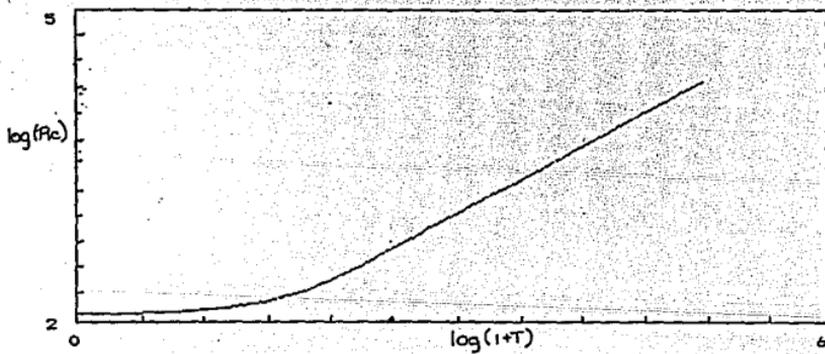


Fig. 3.20 Gráfica de  $\text{Log}(Rc)$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

El cálculo es muy similar al caso anterior, por lo que las ecuaciones (3.34)-(3.38) se mantienen idénticas al caso anterior, y sólo variarán las condiciones de frontera, por lo que de (2.52a) y (2.52b) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 + B_1 + B_3 = 0, \quad (3.44a)$$

$$B_2 - B_4 = 0, \quad (3.44b)$$

$$1 + e^r \{B_1 \cos(r) + B_2 \sin(r)\} + e^{-r} \{B_3 \cos(r) + B_4 \sin(r)\} \quad (3.44c)$$

$$e^r \{B_2 \cos(r) - B_1 \sin(r)\} + e^{-r} \{-B_4 \cos(r) + B_3 \sin(r)\} \quad (3.44d)$$

De estas ecuaciones obtenemos que:

$$B_1 = -1 - B_3 \quad (3.45a)$$

$$B_2 = B_4 \quad (3.45b)$$

$$B_3 = \frac{2\cos(r)\sinh(r) + \cos(2r) - e^{2r}}{2(\cosh(2r) - \cos(2r))} \quad (3.45c)$$

$$B_4 = \frac{-1 + e^r \cos(r) + 2B_3(\cos(r)\sinh(r))}{2\sinh(r)\cos(r)} \quad (3.45d)$$

A segundo orden obtenemos exactamente el mismo resultado (3.42),

pero ahora  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$  están dados por (3.45a)-(3.45d):

$$R = \mathbb{T} \left[ 1 + \frac{e^r}{2r} \{ (B_1 - B_2) \cos(r) + (B_1 + B_2) \sin(r) \} + \right. \\ \left. - \frac{e^{-r}}{2r} \{ (B_3 + B_4) \cos(r) + (-B_3 + B_4) \sin(r) \} - \frac{1}{2r} (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) \right]^{-1}. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.46) nos dá el valor de  $R_c$  cuando  $k_c$  es cero, con

$B_1, B_2, B_3$  y  $B_4$  dados por las ecuaciones (3.45a)-(3.45d). Este resultado analítico confirma nuestros cálculos numéricos.

Las curvas calculadas en los dos últimos casos: 2a y 2b aunque más sencillas que los anteriores, aportan resultados nuevos.

### 3.5 Caso 3a

En este caso tenemos que la superficie de abajo es rígida a temperatura constante, y la superficie de arriba es libre con flujo de calor constante. Como en el caso anterior, se vé de las condiciones de frontera (2.53a) y (2.53b) que el parámetro  $\zeta$  no aparece en las condiciones de frontera. Estas condiciones de frontera nos quedan como:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad (3.47a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.47b)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i (\alpha_i^2 - k^2) A_i = 0, \quad (3.47c)$$

$$A_1 R k^3 - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^3 A_i = 0, \quad (3.47d)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \{ A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i) \} = 0, \quad (3.47e)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.47f)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.47g)$$

$B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$  dados por las ecuaciones (3.45a)-(3.45d). Este resultado analítico confirma nuestros cálculos numéricos.

Las curvas calculadas en los dos últimos casos: 2a y 2b aunque más sencillas que los anteriores, aportan resultados nuevos.

### 3.5 Caso 3a

En este caso tenemos que la superficie de abajo es rígida a temperatura constante, y la superficie de arriba es libre con flujo de calor constante. Como en el caso anterior, se vé de las condiciones de frontera (2.53a) y (2.53b) que el parámetro  $Go$  no aparece en las condiciones de frontera. Estas condiciones de frontera nos quedan como:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad (3.47a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.47b)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i (\alpha_i^2 - k^2) A_i = 0, \quad (3.47c)$$

$$A_1 Rk^3 - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^3 A_i = 0, \quad (3.47d)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \{A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i)\} = 0, \quad (3.47e)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0, \quad (3.47f)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.47g)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.47h)$$

Dado que tenemos flujo de calor constante en la superficie de arriba, no aparece el  $G\sigma$ , pero a la vez como no tenemos flujo de calor fijo en las dos superficies, nunca llegamos a tener celdas infinitas. En la figura 3.21 se muestra la gráfica del número de onda crítico  $k_c$  contra el  $\log(1 + T)$ . El valor en  $T = 0$  de  $k_c$  es de 2.09, de acuerdo con /14/. Al no tener celdas infinitas la rotación tiende a achicar las celdas, para todos los valores de  $T$ .

En la figura 3.22 se muestra la gráfica del número de Rayleigh crítico contra el  $\log(1 + T)$ , de ésta se desprende que la rotación tiende a inhibir la inestabilidad. De nueva cuenta en la gráfica podemos observar que para  $T = 0$ ,  $R_c = 669$  (calculado en /14/).

A pesar de su simplicidad este caso es importante por el hecho de que en ausencia de rotación, en él se presenta la sobrestabilidad /6/. Esto se vé de las ecuaciones generales derivadas en el capítulo anterior, pues en el caso no estacionario la deformación si es un factor a considerar, que depende de los números adimensionales  $G$  y  $\sigma$  por separado. Además los cálculos para el caso estacionario con rotación que presentamos aquí no aparecen en la literatura.

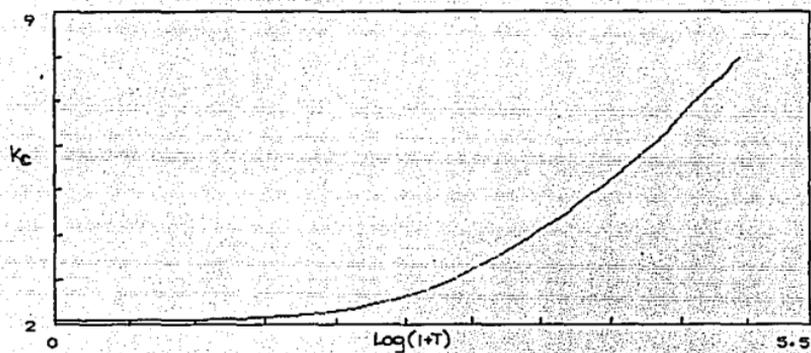


Fig. 3.21 Gráfica de  $k_c$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

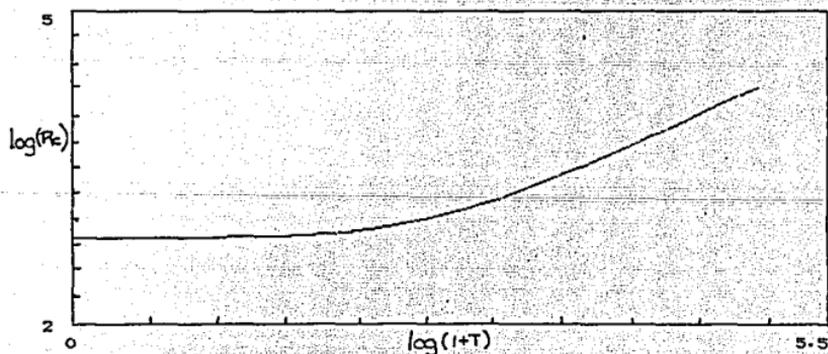


Fig. 3.22 Gráfica de  $\text{Log}(R_c)$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

### 3.6 Caso 3b

En este caso la superficie de abajo es libre a temperatura constante, y la superficie de arriba es libre con flujo de calor constante. Como era de esperarse, este caso es completamente análogo al anterior, sin el parámetro adimensional  $Gr$ . Como en los demás casos consideramos una solución del tipo (2.57), por lo que las condiciones de frontera (2.54a) y (2.54b) se convierten en:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = 0, \quad (3.48a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 B_i = 0, \quad (3.48b)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^4 B_i = 0, \quad (3.48c)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^6 B_i = 0, \quad (3.48d)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i \{A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i)\} = 0, \quad (3.48e)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 - k^2 \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0, \quad (3.48f)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.48g)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 \Gamma \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 \Gamma \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.48h)$$

A continuación en la figura 3.23 mostramos la gráfica del número de onda crítico  $k_c$  contra el  $\log(1 + \Gamma)$ . De aquí podemos observar que la rotación tiende a hacer cada vez más pequeñas las

celdas. Es decir  $k_c$  es una función creciente de  $T$ .

Como en el caso anterior, en la figura 3.24 mostramos la gráfica de  $\log(R_c)$  contra  $\log(1 + T)$ , de la cual podemos concluir que el número de Taylor es un factor estabilizador.

En este caso el punto con  $\bar{v} = 0$ , para el cual  $k_c = 1.76$  y  $R_c = 384.7$ , mostrado en las gráficas 3.23 y 3.24 respectivamente, fué calculado por Hurle et. al. /15/. En el trabajo de Benguria y Depassier /6/, es este el caso en que se hace más énfasis para encontrar la sobrestabilidad oscilatoria debida a la deformación superficial, en donde siempre se encuentra que el número de onda crítico es igual a cero, pero no se muestran los valores de la frecuencia crítica.

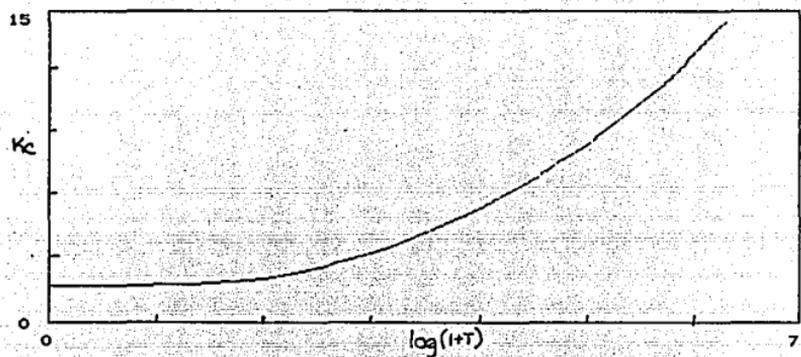


Fig. 3.23 Gráfica de  $kc$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

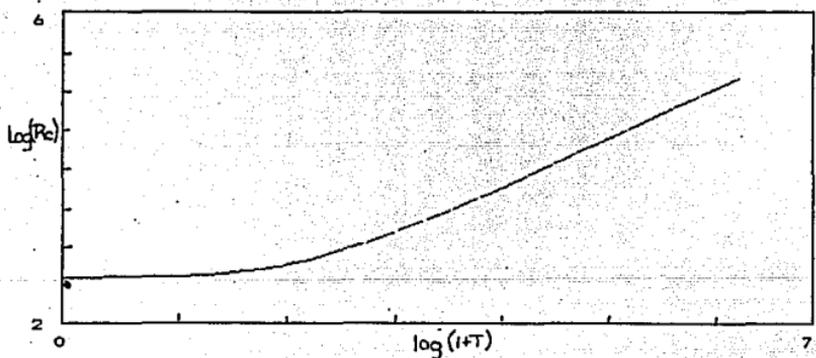


Fig. 3.24 Gráfica de  $\text{Log}(Rc)$  contra  $\text{Log}(1 + T)$

### 3.7 Caso 4a

En este caso tenemos que la superficie de abajo es rígida a flujo de calor constante y la superficie de arriba es libre deformada a temperatura constante. Al tener esta condición de frontera térmica en la superficie de arriba vuelven a aparecer los números adimensionales:  $G$  (número de Galileo) y  $\sigma$  (número de Prandtl) como producto  $G\sigma$ , en las condiciones de frontera. De hecho, este caso es similar al caso 1a, ya que sólo cambia la condición de frontera térmica en la superficie de abajo. De nueva cuenta tomamos una solución del tipo (2.57) y al introducir las condiciones de frontera (2.55a) y (2.55b) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i = 0, \quad (3.49a)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0, \quad (3.49b)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^3 A_i = 0, \quad (3.49c)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i (\alpha_i^2 - k^2)^2 A_i = 0, \quad (3.49d)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0, \quad (3.49e)$$

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0, \quad (3.49f)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 T \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.49g)$$

$$\begin{aligned}
& \{Rk \cosh(k) - G\sigma k^2 \sinh(k)\} A_1 \\
& - \sum_{i=2}^4 \{(\bar{T} + \alpha_1^4 - 4k^2 \alpha_1^2 + 3k^4) \alpha_1 \cosh(\alpha_1) - G\sigma k^2 \sinh(\alpha_1)\} A_i \\
& + \{Rk \sinh(k) - G\sigma k^2 \cosh(k)\} B_1 \\
& - \sum_{i=2}^4 \{(\bar{T} + \alpha_1^4 - 4k^2 \alpha_1^2 + 3k^4) \alpha_1 \sinh(\alpha_1) - G\sigma k^2 \cosh(\alpha_1)\} B_i = 0.
\end{aligned}
\tag{3.49h}$$

Primero mostramos las gráficas de las curvas del número de onda crítico  $k_c$  contra  $\log(1 + \bar{T})$ , para diferentes valores del parámetro adimensional  $G\sigma$  en la figura 3.25. Al estudiar estas gráficas observamos que si tenemos un fluido dado, sin rotación, aparecen celdas finitas como resultado de la convección, pero al aumentar la rotación tenemos que para cada valor de  $G\sigma$  hay un valor de  $\bar{T}$ , llamado número de Taylor crítico  $\bar{T}_c$ , para el cual aparecen dos tipos de celdas, unas de tamaño infinito, y otras de tamaño finito. Para valores de  $\bar{T} > \bar{T}_c$  sólo tenemos celdas infinitas, es decir  $k_c = 0$  para  $\bar{T} > \bar{T}_c$ . Por otra parte, en las gráficas con  $G\sigma$  chico (= 80, 150 y 200), en esta misma figura, observamos que antes de que la celda se haga infinita el número de onda crítico es una función decreciente de  $\bar{T}$ , por lo que el efecto de la rotación para  $\bar{T} < \bar{T}_c$  es el de hacer que las celdas crezcan. En la gráfica con  $G\sigma = 500$  cuando  $\bar{T} < \bar{T}_c$  tenemos que el  $k_c$  aumenta con  $\bar{T}$ , pero cerca del valor  $\bar{T}_c$  (que en ese caso es igual a 325) el  $k_c$  disminuye un poco, para después hacerse cero. Lo que tenemos es que la rotación tiende a disminuir el tamaño de la celda muy poco, pero antes de que esta se haga infinita tiende a agrandarla.

Para  $G\sigma$  grandes, la rotación tiende a hacer más chicas a las celdas, hasta el valor  $\bar{T}_c$  en donde encontramos celdas de tamaño

finito y celdas de tamaño infinito y para números de Taylor mayores, sólo tenemos celdas infinitas. Los valores de  $T_c$  para cada  $Gr$ , son precisamente los saltos que se observan en la figura 3.25.

Posteriormente en la figura 3.26 mostramos las gráficas de las curvas del número de Rayleigh crítico  $R_c$  contra el  $\log(1 + T)$ , para diferentes valores de  $Gr$ . En la región en que tenemos celdas finitas, es decir  $T < T_c$  tenemos que en las gráficas con  $Gr = 80$  y  $Gr = 150$  el  $R_c$  disminuye al aumentar  $T$ , es decir el número de Taylor tiene un efecto desestabilizador. En la gráfica con  $Gr = 200$  en la región  $T < T_c$  tenemos que al principio  $R_c$  aumenta muy poco y luego disminuye, también muy poco, pero su valor es casi constante y vale aproximadamente 433. Para  $Gr$  mayores,  $T$  tiene un efecto estabilizador, es decir  $R_c$  crece con  $T$  en la región  $T < T_c$ . En todas las gráficas mostradas en esta figura, llegamos al punto  $T_c$ , cuando aparecen las celdas infinitas para cada  $Gr$ , en donde la rotación tiende a desestabilizar el sistema. Como en los otros casos, esto lo demostraremos, haciendo una aproximación para números de onda pequeños.

Como en los casos 1a y 1b, tenemos que si el  $Gr$  es grande (igual a  $10^5$  en la figuras 3.25 y 3.26) tendríamos las curvas como si la superficie de arriba se comportara como una superficie plana, las cuales no se encuentran en la literatura. Los valores de  $k_c$  y de  $R_c$  en  $T = 0$ , es decir en la ausencia de rotación (2.21 y 816 respectivamente) fueron calculados en [15], los cuales están de acuerdo con nuestros cálculos.

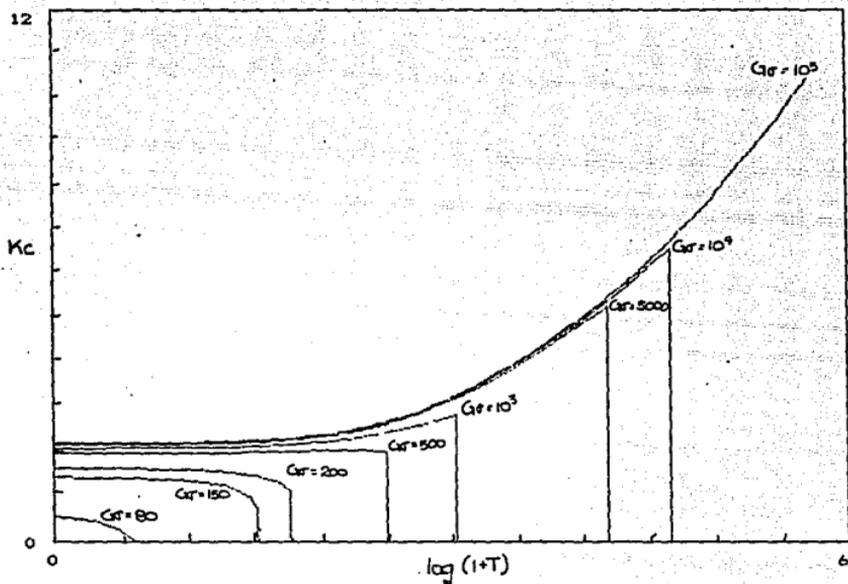


Fig. 3-25 Gráficas de  $K_c$  vs  $\log(1+T)$ , para  $Gr = 80, 150, 200, 500, 1000, 5000, 10000$  y  $100000$ .

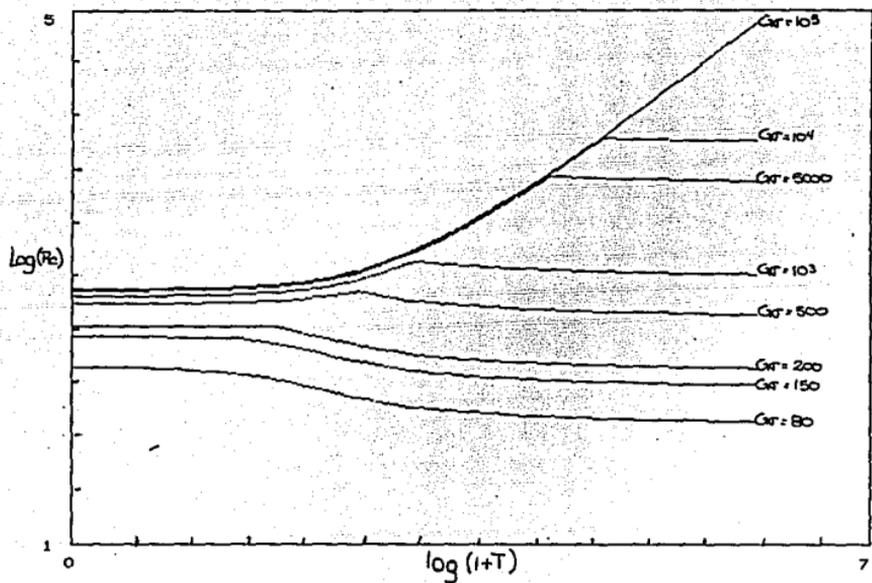


Fig. 3.26 Gráficas de  $\log(R_c)$  vs  $\log(1+T)$ , para  $G\sigma = 80, 150, 200, 500, 1000, 5000, 10000$  y  $100000$ .

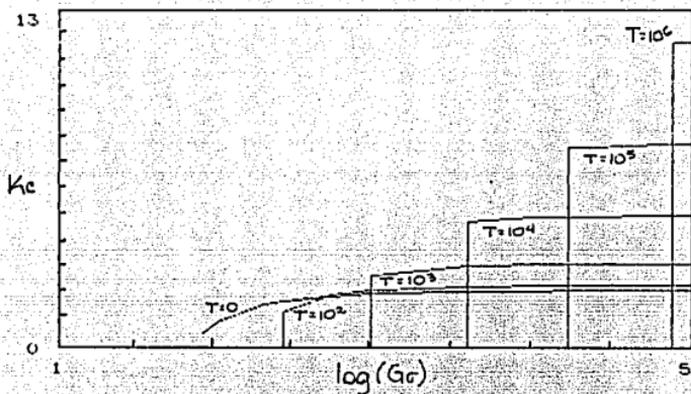


Fig. 3.27 Gráfica de  $k_c$  contra  $\text{Log}(Gr)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

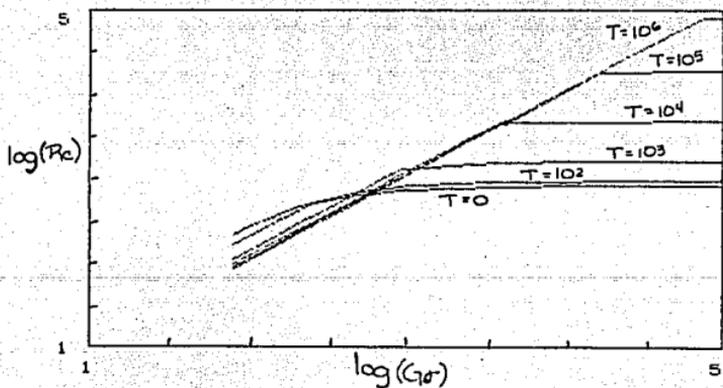


Fig. 3.28 Gráfica de  $\text{Log}(R_c)$  contra  $\text{Log}(Gr)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

Si por otra parte, fijamos el número de Taylor vemos que el  $k_c$  aumenta al aumentar el  $G\sigma$  (figura 3.27), es decir el efecto de este parámetro  $G\sigma$  es el de disminuir el tamaño de las celdas. Al principio para cada  $T$ , tenemos que las celdas son de tamaño infinito, pero al aumentar  $G\sigma$ , llegamos a un valor de este parámetro, que llamamos  $G\sigma_c$ , en el cual las celdas se vuelven de tamaño finito, para cada  $T$ . Análogamente al  $T_c$ , el  $G\sigma_c$  son los saltos que se observan en la figura 3.27, para cada  $T$ . Lo que tenemos es que para cada valor de  $G\sigma$  tenemos un  $T_c$  e inversamente para cada valor de  $T$  tenemos su correspondiente  $G\sigma_c$ . En la gráfica 3.29 mostramos la curva de  $G\sigma_c$  contra  $T_c$ , la cuál divide al plano en dos, una región con celdas finitas y otra con celdas infinitas.

Por otra parte, de la figura 3.28 podemos observar que para cada  $T$ ,  $R_c$  es una función creciente del  $G\sigma$ , es decir  $G\sigma$  es un factor estabilizador. Como podemos ver, para valores de  $T$  relativamente grandes, hay una relación lineal entre  $R_c$  y  $G\sigma$ , esto sucederá cuando tenemos celdas infinitas y lo demostraremos a continuación al hacer el cálculo para números de onda pequeños.

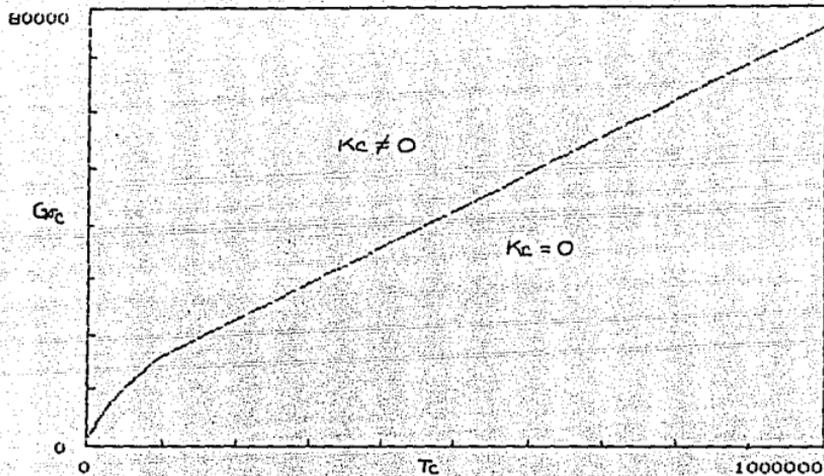


Fig. 3.29 Grafica de  $G_c$  contra  $T$  para cuando  $k_c$  se hace cero.

La aproximación para números de onda pequeños, es muy parecida al caso 1a, por lo que que  $W$ ,  $Z$  y  $\theta$  tienen la forma

(3.3):

$$W = W_0 + k^2 W_1 + k^4 W_2 + \dots \quad (3.50)$$

y las ecuaciones que nos quedan a orden cero son (3.4) y (3.5):

$$D^2 Z_0 = -T^{1/2} D W_0, \quad (3.51)$$

$$D^6 W_0 + T D^2 W_0 = 0, \quad (3.52)$$

sujeta a las condiciones de frontera dadas por (2.45a), (2.46) y (2.48d):

$$W_0(0) = D W_0(0) = Z_0(0) = 0, \quad (3.53a)$$

$$D \theta_0(0) = 0, \quad (3.53b)$$

$$W_0(1) = D^2 W_0(1) = D Z_0(1) = 0 \quad (3.53c)$$

y  $\theta_0(1) = \eta, \quad (3.53d)$

en donde tomamos la superficie de arriba en  $z = 1$  y la superficie de abajo en  $z = 0$ , sin pérdida de generalidad. Como en 1a, las condiciones (3.53b) y (3.53d) se convierten en:

$$D^5 W_0(0) + T D W_0(0) = 0, \quad (3.53e)$$

y  $\frac{-G\sigma}{R} D^4 W_0(1) + D^3 W_0(1) - T^{1/2} Z_0(1) = 0, \quad (3.53f)$

respectivamente.

La solución a (3.50) es como (3.7):

$$W_0 = A_1 z + A_2 + e^{rz} \{B_1 \cos(rz) + B_2 \operatorname{sen}(rz)\} + e^{-rz} \{B_3 \cos(rz) + B_4 \operatorname{sen}(rz)\}, \quad (3.54)$$

en donde  $r = \left( \frac{T}{4} \right)^{1/4}. \quad (3.55)$

De (3.51), tenemos que  $D Z_0 = -T^{1/2} W_0 + \text{cte.}$ , pero de (3.53a):

$$W_0(1) = DZ_0(1) = 0,$$

por lo que la constante es cero, entonces:

$$DZ_0 = -T^{1/2}W_0 \text{ y,}$$

$$Z_0 = -T^{1/2} \left( \frac{1}{2} A_1 z^2 + A_2 z + C_1 + \frac{e^{rz}}{2r} \{ (B_1 - B_2) \cos(rz) + (B_1 + B_2) \sin(rz) \} - \frac{e^{-rz}}{2r} \{ (B_3 + B_4) \cos(rz) + (-B_3 + B_4) \sin(rz) \} \right). \quad (3.56)$$

Al sustituir las condiciones (3.53a)-(3.53f) en las soluciones para  $W_0$  y  $Z_0$  dadas por (3.54) y (3.56), respectivamente, resulta el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$A_2 + B_1 + B_3 = 0 \quad (3.57a)$$

$$A_1 + r(B_1 + B_2 - B_3 - B_4) = 0 \quad (3.57b)$$

$$C_1 + \frac{1}{2r} (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) = 0 \quad (3.57c)$$

$$A_1 = 0 \quad (3.57d)$$

$$A_1 + A_2 + e^r \{ B_1 \cos(r) + B_2 \sin(r) \} + e^{-r} \{ B_3 \cos(r) + B_4 \sin(r) \} = 0 \quad (3.57e)$$

$$e^r \{ B_2 \cos(r) - B_1 \sin(r) \} + e^{-r} \{ -B_4 \cos(r) + B_3 \sin(r) \} = 0 \quad (3.57f)$$

$$\frac{-G\sigma}{R} A_2 + A_2 + C_1 = 0, \quad (3.57g)$$

definiendo:  $s = 2r \left( \frac{G\sigma}{R} - 1 \right); \quad (3.58)$

simplificando:

$$A_2 + B_1 + B_3 = 0$$

$$B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 0$$

$$sA_2 + B_1 - B_2 - B_3 - B_4 = 0$$

$$A_2 + B_1 e^r \cos(r) + B_2 e^r \sin(r) + B_3 e^{-r} \cos(r) + B_4 e^{-r} \sin(r) = 0$$

$$-B_1 e^r \sin(r) + B_2 e^r \cos(r) + B_3 e^{-r} \sin(r) - B_4 e^{-r} \cos(r) = 0$$

y de la condición de solubilidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ s & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & e^r \cos(r) & e^r \sin(r) & e^{-r} \cos(r) & e^{-r} \sin(r) \\ 0 & -e^r \sin(r) & e^r \cos(r) & -e^{-r} \sin(r) & -e^{-r} \cos(r) \end{vmatrix}$$

debe ser igual a cero.

Despejando para s, tenemos que:

$$s = \frac{4\cosh(r)\cos(r) - 2\cosh(2r) - 2\cos(2r)}{\sinh(2r) - \sin(2r)} \quad (3.59)$$

despejando (3.58) R queda como:

$$R = \frac{2r\zeta}{s + 2r} \quad (3.60)$$

Con esto hemos encontrado el valor de R para cuando el número de onda es cero, este valor será el crítico en la región con  $k_c = 0$  mostrada en la figura 3.29. Nótese que para un  $\gamma$  dado, la relación entre R y  $\zeta$  es lineal, como se vé en la figura 3.28. Si  $\gamma$  tiende a infinito, s tiende a cero y de (3.60) vemos que R tiende al valor  $\zeta$ , lo cuál es consistente con los resultados mostrados en las figuras 3.26 y 3.28.

Las consideraciones hechas en el caso la discutido en la Osección 3.1, son exactamente las mismas para este caso.

### 3.8 Caso 4b

En este caso tenemos que la superficie de abajo es libre a

flujo de calor constante y la superficie de arriba es libre deformada a temperatura constante. Al tener esta condición de frontera térmica en la superficie de arriba el parámetro adimensional  $Gr$  es un factor a considerar. Este caso es muy similar al caso 1b, ya que sólo cambia la condición de frontera térmica en la superficie de abajo.

Considerando una solución para  $\theta$  de la forma (2.57), las condiciones de frontera (2.56a) y (2.56b) correspondientes a este caso, toman la forma:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i = 0 \quad (3.61a)$$

$$\sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0 \quad (3.61b)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) B_i = 0 \quad (3.61c)$$

$$B_1 Rk^2 - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 B_i = 0 \quad (3.61d)$$

$$\sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=2}^4 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) A_i = 0 \quad (3.61e)$$

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \sinh(\alpha_i) A_i + \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 (\alpha_i^2 - k^2) \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.61f)$$

$$Rk^2 A_1 \sinh(k) - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 \sinh(\alpha_i) A_i + Rk^2 B_1 \cosh(k) - \sum_{i=2}^4 \alpha_i^2 \cosh(\alpha_i) B_i = 0 \quad (3.61g)$$

$$\{Rk \cosh(k) - Grk^2 \sinh(k)\} A_1$$

$$- \sum_{i=2}^4 \{(\alpha_i^4 - 4k^2 \alpha_i^2 + 3k^4) \alpha_i \cosh(\alpha_i) - Grk^2 \sinh(\alpha_i)\} A_i$$

$$+ \{Rk \sinh(k) - Grk^2 \cosh(k)\} B_1$$

$$- \sum_{i=2}^4 \{(\alpha_i^4 - 4k^2 \alpha_i^2 + 3k^4) \alpha_i \sinh(\alpha_i) - Grk^2 \cosh(\alpha_i)\} B_i = 0$$

$$(3.61h)$$

El procedimiento a seguir es completamente análogo al seguido anteriormente, y las gráficas se muestran de forma parecida a los casos 1a, 1b, y 4a. En la figura 3.30 mostramos las gráficas de las curvas del número de onda crítico  $k_c$  contra el  $\log(1 + \bar{V})$ , para diferentes valores de  $G\sigma$ . En esta figura podemos observar que cuando  $\bar{V}$  es pequeño tenemos celdas finitas para todos los valores de  $G\sigma$ . Al aumentar el número de Taylor llegamos a un valor de este, que llamamos número de Taylor crítico  $\bar{V}_c$ , para el cuál aparecen dos tipos de celdas, unas de tamaño finito y otras de tamaño infinito. Al aumentar  $\bar{V}$  a partir de este valor  $\bar{V}_c$ , tenemos tan solo celdas infinitas. En la región con  $\bar{V} < \bar{V}_c$ , es decir cuando se presentan celdas finitas, el comportamiento de  $k_c$  con respecto a  $\bar{V}$ , es diferente para diferentes valores de  $G\sigma$ . Cuando tenemos  $G\sigma$  relativamente chicos ( $=100$  y  $150$  en nuestra figura), tenemos que al aumentar  $\bar{V}$  antes de llegar a  $\bar{V}_c$  el  $k_c$  disminuye, es decir la rotación hace que las celdas crezcan. Para  $G\sigma = 300$  primero  $k_c$  crece con  $\bar{V}$ , pero a partir de  $\bar{V} = 370$ , comienza a disminuir un poco, hasta llegar a  $\bar{V}_c$ , donde se hace cero. Lo que tenemos es que al principio  $\bar{V}$  tiende a disminuir el tamaño de las celdas pero después las agranda un poco, hasta llegar al valor  $\bar{V}_c$ , a partir del cual se presentan celdas infinitas. En las curvas con  $G\sigma = 500, 1000, 5000, 10^4$  y  $10^5$ , tenemos que en la región con  $\bar{V} < \bar{V}_c$  el  $k_c$  crece con  $\bar{V}$ , es decir que cuando tenemos celdas finitas, el efecto de  $\bar{V}$ , es el de disminuir el tamaño de las celdas, hasta llegar a  $\bar{V}_c$ , en donde se presentan celdas de tamaño finito y a la vez una celda infinita.

al seguir aumentando  $\bar{V}$ , tenemos tan solo celdas infinitas.

De una forma similar, si tenemos  $G\sigma$  grandes, la celda es de tamaño finito (figura 3.32), pero al disminuir su valor, llegamos a un valor que llamamos  $G\sigma_c$  en donde  $k_c$  se hace cero para cada  $\bar{V}$ , que son precisamente los saltos en las gráficas mostradas en la figura 3.32. De esta figura podemos observar que para  $G\sigma > G\sigma_c$   $k_c$  aumenta para todo  $\bar{V}$ , es decir  $G\sigma$  tiende a disminuir el tamaño de las celdas. Para valores menores que este  $G\sigma_c$ , tan solo se presentan celdas infinitas.

En la figura 3.31 mostramos las gráficas del número de Rayleigh crítico contra el  $\log(1 + \bar{V})$ , para diferentes valores de  $G\sigma$ , en cada una de estas gráficas podemos observar que en la región en donde tenemos celdas finitas, es decir para números de Taylor menores que  $\bar{V}_c$  el número de Rayleigh crítico crece con  $\bar{V}$ , es decir la rotación tiene un efecto estabilizador, para todos los valores de  $G\sigma$ . Al aumentar el  $\bar{V}$  a partir de este valor  $\bar{V}_c$ , en donde tenemos celdas infinitas, el  $R_c$  es constante para cada  $G\sigma$  y vale  $2G\sigma$ , es decir llegamos a un punto en donde la rotación ya no tiene efecto sobre la estabilidad del sistema. Este valor de  $G\sigma$  lo encontraremos al hacer una aproximación para números de onda pequeños. Por otra parte, para un  $\bar{V}$  fijo, el  $R_c$  es una función creciente de  $G\sigma$ , como podemos ver la figura 3.33, es decir  $G\sigma$  tiene un efecto estabilizador. Por otra parte, si estamos en la región donde aparecen celdas infinitas  $R_c = 2G\sigma$ , como mencionamos anteriormente.

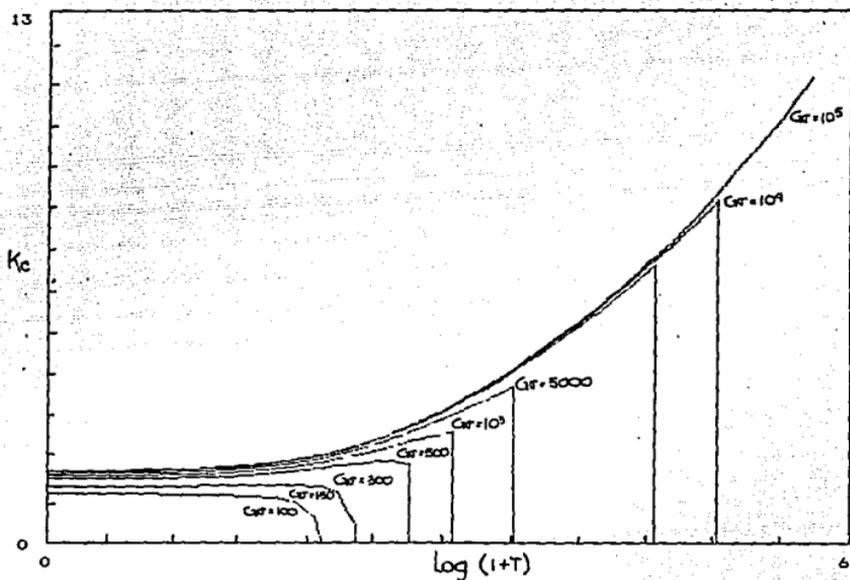


Fig. 3-30 Graficas de  $k_c$  vs  $\log(1+T)$ , para  $Gr = 100, 150, 300, 500, 1000, 5000, 10000$  y  $100000$ .

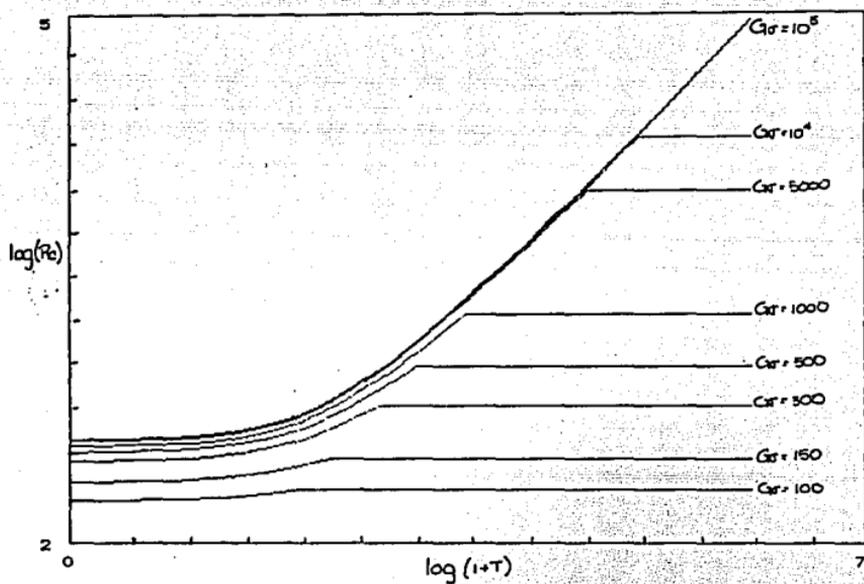


Fig. 3-31 Gráficas de  $\log(R_c)$  vs  $\log(1+T)$ , para  $G_e = 100, 150, 300, 500, 1000, 5000, 10000$  y  $100000$ .

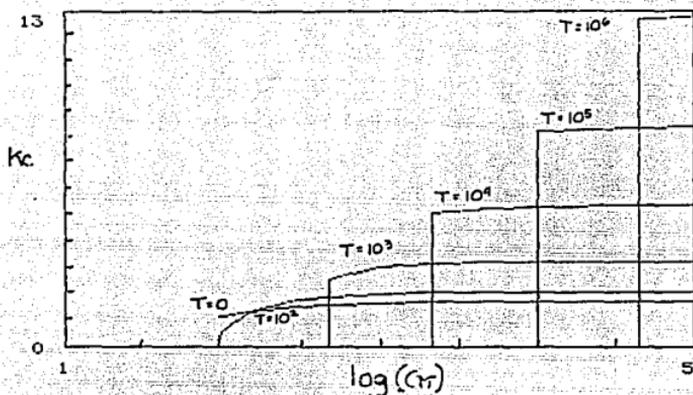


Fig. 3.32 Gráfica de  $k_c$  contra  $\text{Log}(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

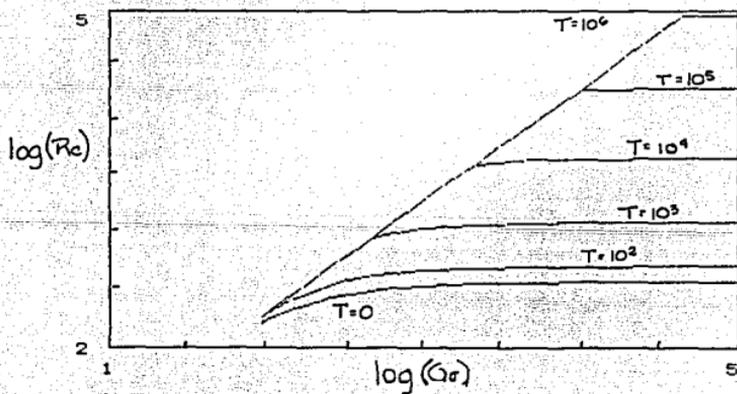


Fig. 3.33 Gráfica de  $\text{Log}(R_c)$  contra  $\text{Log}(G\sigma)$  para  $T = 0, 100, 1000, 10000, 100000$  y  $1000000$ .

Como en los casos 1a y 1b, tenemos que si el  $Gr$  es grande (igual a  $10^5$  en las figuras 3.30 y 3.31) tendríamos las curvas como si la superficie de arriba se comportara como una superficie plana, las cuales no se encuentran en la literatura. Los valores de  $k_c$  y de  $R_c$  en  $\Gamma = 0$ , es decir en la ausencia de rotación (1.76 y 384.7 respectivamente) fueron calculados en [15] y están de acuerdo con nuestros resultados.

La aproximación para números de onda pequeños, es muy parecida a los casos 1a y 1b, por lo que  $W$ ,  $Z$  y  $\Theta$  tienen la forma (3.3):

$$W = W_0 + k^2 W_1 + k^4 W_2 + \dots \quad (3.62)$$

y las ecuaciones que nos quedan a orden cero son (3.4) y (3.5):

$$D^2 Z_0 = -\Gamma^{1/2} W_0 \quad (3.63)$$

$$D^4 W_0 + \Gamma D^2 W_0 = 0 \quad (3.64)$$

sujetas a las condiciones de frontera dadas por (2.45b), (2.46) y (2.48d):

$$W_0(0) = D^2 W_0(0) = DZ_0(0) = 0, \quad (3.65a)$$

$$D\Theta_0(0) = 0, \quad (3.65b)$$

$$W_0(1) = D^2 W_0(1) = DZ_0(1) = 0 \quad (3.65c)$$

y  $\Theta_0(1) = \eta; \quad (3.65d)$

de la misma forma que en el caso 4a, las condiciones de frontera (3.65b) y (3.65d) se convierten en:

$$D^5 W_0(0) + \Gamma D W_0(0) = 0, \quad (3.65e)$$

y  $\frac{-Gr}{R} D^4 W_0(1) + D^3 W_0(1) - \Gamma^{1/2} Z_0(1) = 0, \quad (3.65f)$

respectivamente.

La solución a (3.62) es como (3.7):

$$W_0 = A_1 z + A_2 + e^{rz} (B_1 \cos(rz) + B_2 \operatorname{sen}(rz)) + e^{-rz} (B_3 \cos(rz) + B_4 \operatorname{sen}(rz)), \quad (3.66)$$

$$\text{en donde } r = \left(\frac{T}{4}\right)^{1/4}. \quad (3.67)$$

Por lo que  $Z_0$  estará dado por 3.56:

$$Z_0 = -T^{1/2} \left( \frac{1}{2} A_1 z^2 + A_2 z + C_1 + \frac{e^{rz}}{2r} \{ (B_1 - B_2) \cos(rz) + (B_1 + B_2) \operatorname{sen}(rz) \} - \frac{e^{-rz}}{2r} \{ (B_3 + B_4) \cos(rz) + (-B_3 + B_4) \operatorname{sen}(rz) \} \right). \quad (3.68)$$

Al sustituir las condiciones (3.65a)-(3.65f) en (3.67) y (3.69), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$A_2 + B_1 + B_3 = 0 \quad (3.69a)$$

$$B_2 - B_4 = 0 \quad (3.69b)$$

$$A_1 = 0 \quad (3.69c)$$

$$A_1 + A_2 + e^r \{ B_1 \cos(r) + B_2 \operatorname{sen}(r) \} + e^{-r} \{ B_3 \cos(r) + B_4 \operatorname{sen}(r) \} = 0 \quad (3.69d)$$

$$e^r \{ B_2 \cos(r) - B_1 \operatorname{sen}(r) \} + e^{-r} \{ -B_4 \cos(r) + B_3 \operatorname{sen}(r) \} = 0 \quad (3.69e)$$

$$\frac{-Gr}{R} A_2 + A_1 + C_1 = 0 \quad (3.69f)$$

Como en 1b, el cálculo a primer orden no es suficiente para resolver nuestro problema de valor propio, por lo que debemos tomar una aproximación a segundo orden:

Sustituyendo en (2.42):

$(D^2 - k^2)Z = -T^{1/2}DW$ , tenemos que:

$$(D^2 - k^2)Z_0 + k^2 D^2 Z_2 = -T^{1/2}(DW_0 - k^2 DW_2)$$

Entonces:  $Z_0 + D^2 Z_2 + T^{1/2} DW_2$  (3.70)

Integrando en todo el rango de  $z$  obtenemos:

$$\int_0^1 Z_0 dz = \left[ DZ_2 + T^{1/2} W_2 \right]_0^1, \text{ pero } W_2 = DZ_2 = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } z = 1,$$

por lo que  $\int_0^1 Z_0 dz = 0$ .

Sustituyendo  $Z_0$  dado por (3.68) y simplificando:

$$\frac{A_2}{2} + C_1 = 0, \text{ sustituyendo en (3.69f):}$$

$$\frac{-G\sigma}{R} A_1 + A_1 - \frac{1}{2} A_1 = 0$$

De la condición de solubilidad y despejando para  $R$  obtenemos:

$$R = 2G\sigma \quad (3.71)$$

Con esto hemos encontrado el valor de  $R$  para cuando el número de onda es cero, este valor será el crítico en la región con  $k_c = 0$  mostrada en la figura 3.34. Nótese que para un  $T$  dado, la relación entre  $R_c$  y  $G\sigma$  es lineal, como se vé en la figura 3.33.

Las consideraciones hechas en las secciones 3.1, 3.2, y 3.7, en donde aparece el  $G\sigma$  se aplican de igual forma para este caso.

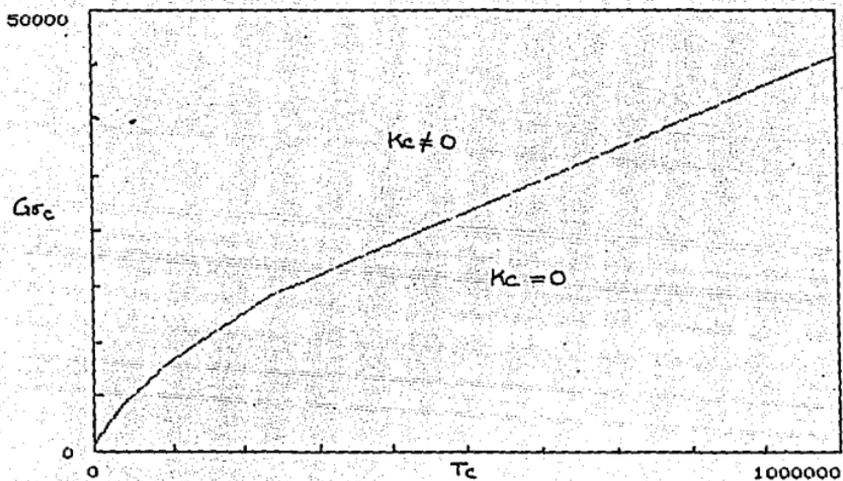


Fig. 3-34 Gráfica de  $Gr_c$  contra  $T_c$  para cuando  $k_c$  se hace cero.

#### IV

#### CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos examinado el efecto de la deformación superficial en la estabilidad lineal termoconvectiva de una capa de fluido calentada por abajo y bajo la acción de la rotación. Examinamos con detalle la convección estacionaria para la cual obtuvimos resultados numéricos y en algunos casos, aproximaciones analíticas. Aquí, el efecto de la deformación superficial se presenta como una modificación a la condición de frontera térmica en la superficie de arriba y sólo aparecerá en la condición de solubilidad final cuando tengamos temperatura fija en la superficie de arriba, independientemente de las condiciones de frontera mecánicas (Casos 1 y 4).

Hemos encontrado que la deformación superficial está caracterizada por los siguientes números adimensionales: el número de Galileo  $G$  y el número de Prandtl  $\sigma$ , que en el caso estacionario aparecen como producto  $G\sigma$ . Hemos encontrado que este parámetro adimensional  $G\sigma$  tiene un efecto estabilizador, es decir que el número de Rayleigh crítico crece al aumentar  $G\sigma$ . Si este parámetro  $G\sigma$  es muy grande, recuperamos la condición de frontera  $\theta(0) = 0$  y por lo tanto la superficie se comporta como una

superficie plana.

El resultado más importante de todos los cálculos que se hicieron, es el hecho de que al considerar el efecto de éste parámetro adimensional  $G\sigma$ , la rotación no siempre tiene un efecto estabilizador sobre el sistema, como lo tiene en el caso en que la superficie es plana (es decir cuando  $G\sigma$  es infinito). Para cada  $G\sigma$  tenemos que si comenzamos con una rotación relativamente pequeña, se presentan celdas de tamaño regular, pero al aumentar gradualmente el número de Taylor  $T$  llegamos a un valor de este, que hemos llamado número de Taylor crítico  $T_c$ , en donde se presentan dos tipos de celdas, unas finitas y unas infinitas y al seguir aumentando  $T$  a partir de este valor  $T_c$  tenemos tan sólo celdas infinitas. En la región en donde tenemos celdas finitas, el efecto de la rotación depende del parámetro  $G\sigma$ . Si  $G\sigma$  es relativamente pequeño, tenemos que la rotación tiende a aumentar el tamaño de las celdas y a desestabilizar al sistema. Si  $G\sigma$  es relativamente grande, el  $T$  en esta región,  $T < T_c$ , tiende a disminuir el tamaño de las celdas y a estabilizar el sistema. Para  $T$  mayores que  $T_c$  y para cada valor del parámetro  $G\sigma$ , en donde tenemos celdas infinitas, se presentan dos casos: primero cuando la superficie de abajo es rígida (casos 1a y 4a) tenemos que  $T$  tiende a desestabilizar el sistema, cuando la superficie de abajo es libre sin deformación (casos 1b y 4b), tenemos que el número de Rayleigh crítico es una constante para cada  $G\sigma$ , es decir que para  $T > T_c$ , la rotación no afecta a la estabilidad. En estos cuatro casos hicimos las aproximaciones analíticas para valores

pequeños del número de onda crítico correspondientes, que confirman los resultados obtenidos.

Para cada número de Taylor  $T$ , si el  $G\sigma$  es pequeño, se presentan celdas de tamaño infinito y al aumentar gradualmente este parámetro, llegamos a un valor  $G\sigma_c$  en el cuál las celdas se hacen finitas y comienzan a achicarse al crecer  $G\sigma$ . Para todos los valores de  $T$ , tenemos que  $G\sigma$  tiene un efecto estabilizador.

En estos casos, donde el  $G\sigma$  surgen resultados muy interesantes. Si nos fijamos bien en el efecto de  $T$  actuando sólo ( $G\sigma$  grandes en este trabajo ó como en /5/, para los casos 1a y 1b) y de  $G\sigma$  actuando sólo ( $T$  igual a cero en este trabajo ó en /7/ para el caso 1a) tenemos que ambos tienden a hacer crecer las celdas y a estabilizar el sistema, pero cuando actúan juntos los efectos no son los mismos. Algo muy parecido ocurre cuando actúan el campo magnético y la rotación juntos /5/. Con esto podemos pensar al parámetro  $G\sigma$  como regulador de una fuerza extra, que actúa sobre el sistema y esta es por supuesto la fuerza gravitatoria sobre la superficie.

Con lo que respecta a los casos con flujo de calor constante en las dos superficies (casos 2a y 2b), aunque finalmente no aparece el parámetro  $G\sigma$ , se presentan celdas infinitas para números de Taylor pequeños, de acuerdo con resultados anteriores /13/. La importancia de estos cálculos, radica en que aún cuando no aparece el parámetro  $G\sigma$  en las condiciones de frontera en el estado estacionario, si debe aparecer al investigar la sobrestabilidad, por lo que es importante conocer estas curvas

antes de estudiarla. Además las curvas de estabilidad marginal con estas condiciones de frontera mecánicas, no han sido presentadas en la literatura. Encontramos que la rotación tiende a estabilizar el sistema y a achicar el tamaño de las celdas. Para  $T < T_c$  en donde se presentan celdas infinitas, hicimos las aproximaciones analíticas correspondientes, para números de onda pequeños siguiendo el trabajo de Dávalos /13/.

En los casos en que tenemos flujo de calor constante arriba, pero la temperatura es fija en la superficie de abajo (casos 3a y 3b), tampoco aparece el parámetro  $G\sigma$  y nunca llegamos a tener celdas infinitas, de hecho la rotación es un factor estabilizador, como era de esperarse. A pesar de que en este caso los resultados son muy sencillos, estos cálculos son muy importantes, ya que en ausencia de rotación, la sobrestabilidad aparece antes que el estado estacionario como lo encontraron Benguria y Depassier /6/. Como la rotación induce sobrestabilidad para ciertos números de Prandtl /5/, se espera que también aparezca en estos casos.

Finalmente, debemos decir que las curvas marginales calculadas en este trabajo ayudarán a determinar en que regiones del espacio de parámetros deberá aparecer la sobrestabilidad antes que la convección estacionaria.

## BIBLIOGRAFIA

- /1/ Thomson, J. (1882). "On a changing tessellated structure in certain liquids". *Proc. Phil. Soc. Glasgow*. 13, 464-8.
- /2/ Bénard, H. (1900). "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide". *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* 11, 1261-71 y 1309-28.
- /3/ Rayleigh, Lord (1916). "On convection currents on a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". *Phil. Mag. London*. 32, 529-46.
- /4/ Chandrasekhar, S. (1953). "The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces". *Proc. Roy. Soc. London. A*, 217, 306-27.
- /5/ Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, Inc., New York.
- /6/ Benguria, R. D. y Depassier, M. C. (1987). "Oscillatory instabilities in the Rayleigh-Bénard problem with a free surface". *Phys. Fluids*. 30, (6), 1678-1682.
- /7/ Izakson, V. Kh. y Yudovich, V. I. (1968). "Convective Development in a liquid layer with a free boundry". *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidotsky; Gaza*. Vol. 3, No. 4. (pag. 23-28).
- /8/ Aris, R. (1962). "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics". *Prentice-Hall*. Engewood.
- /9/ Kundu Pijush K. (1990). "Fluid Mechanics and the Basic Equations of Fluid Mechanics". *Academic Press, Inc., San Diego*.

/10/ Currie Iaing. (1974). "Fundamental Mechanics of Fluids". Mc. Graw Hill New York.

/11/ Boussinesq, J. (1903). "Théorie Analytique de la Chaleur". Gauthier-Villars, Paris. 2, 172.

/12/ Gershuni, G. Z. y Zhukovitskii E. M. (1976). "Convective Stability of incompressible fluids". Keter. Jerusalem.

/13/ Dávalos Orozco L. A. (1984). "Magnetoconvection in a Rotating Fluid between Walls of Very Low Thermal Conductivity." *J. Phys. Soc. Japan.* 53, No. 7. (pag. 2173-2176).

/14/ Sparrow, E. M., Goldstein, R. J. y Jonsson V.K. (1964). "Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer; Effect of Boundry Condition and Nonlinear Temperature Profile". *J. Fluid Mech.* 18(4), (pág. 513).

/15/ Hurle D. T. J., Jakeman E. and Pici R. E. (1967). "On the Solution of the Bénard Problem with Boundries of Finite Conductivity. *Proc. R. Soc.. London* A296, (pág. 469).