

1  
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**FUNDAMENTACION VARIACIONAL DE  
ONDAS TERMICAS EN SOLIDOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**F I S I C O**

**PRESENTA**

**ALBERTANO ALFREDO AGUIRRE VILLA**

Directores

DR. JESUS ANTONIO DEL RÍO PORTILLA

M. en C. FEDERICO VÁZQUEZ HURTADO

**FALLA DE ORIGEN**

**MEXICO, D. F.**

**1992**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

|  |    |
|--|----|
| PRESENTACIÓN.  | 1  |
| CAPÍTULO I. ECUACIONES CLÁSICAS DE CONDUCCIÓN DEL CALOR.                                     | 7  |
| 1.1- Ley fundamental de conducción del calor.  | 8  |
| 1.2.-La ecuación de difusión.  | 11 |
| CAPÍTULO II. SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LAS ECUACIONES DE<br>ONDAS Y DE DIFUSIÓN.             | 14 |
| 2.1.-Método de las características.  | 15 |
| 2.2.-Estabilidad de las soluciones ondulatorias y los problemas<br>planteados correctamente. | 23 |
| CAPÍTULO III. TERMODINÁMICA EXTENDIDA.   | 34 |
| 3.1.-La termostática.  | 36 |
| 3.2.-La termodinámica irreversible lineal.   | 37 |
| 3.3.-La termodinámica irreversible extendida.  | 40 |
| 3.4.-El conductor de calor no lineal en el marco de la TIE.                                  | 42 |
| 3.5.-Teoría ondulatoria de Gyarmati.   | 47 |
| 3.6.-Planteamientos integrales para el flujo de calor.                                       | 49 |
| 3.7.-El modelo no lineal de Morro y Ruggeri.   | 50 |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CAPÍTULO IV. FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LA TERMODINÁMICA</b>                              |           |
| <b>IRREVERSIBLE EXTENDIDA</b>  | <b>52</b> |
| 4.1.-Los principios variacionales.   | 54        |
| 4.2.-Principios variacionales en la termodinámica irreversible                               | 55        |
| 4.3.-Inexistencia de un principio variacional clásico para el<br>conductor rígido de calor   | 61        |
| 4.4.-Formulación variacional dentro del marco de la TIE para el<br>conductor rígido de calor | 64        |
| <b>CONCLUSIONES.</b>   | <b>73</b> |
| <b>REFERENCIAS.</b>  | <b>76</b> |

## PRESENTACION.

En este trabajo nos ocuparemos del proceso de conducción del calor, el cual durante mucho tiempo ha tenido un papel central en la investigaciones de los procesos irreversibles.

Su estudio sistemático comienza en los primeros años del siglo XVIII a partir de las especulaciones de la teoría del calórico. Durante el presente siglo está jugando un papel central, pero ahora en el marco del desarrollo de la termodinámica de los procesos irreversibles.

En este largo y complejo trayecto las transformaciones conceptuales y las bases experimentales de este proceso han dado lugar a un sinnúmero de realizaciones científicas y tecnológicas universalmente reconocidas. De modo que, sin temor a equivocarnos podemos decir que muchos de los avances tecnológicos de los cuales disfrutamos hoy en día han sido el resultado de una adecuada aplicación del conocimiento acerca del comportamiento térmico de los materiales.

Sin embargo, en la actualidad se reconoce que existen ciertos problemas con respecto a la concepción de este proceso, lo que ha traído como consecuencia la atención de la comunidad científica que demanda un cambio de las ideas acerca de la propagación del calor, planteando que debe propagarse a través de ondas [*Joseph y Preziosi*, 1989; 1990] y no como pulsos aleatorios, tal como ha sido estudiado desde *Fourier*.

El principal problema se refiere a la violación a las leyes básicas de la relatividad especial, pues en la formulación clásica de éste proceso debida a *Fourier*, se predice una velocidad de propagación infinita [*Meixner*, 1970].

El reconocimiento de este problema, aunado al hecho de haberse encontrado sistemas que parecen estar en contradicción con los postulados

de la termodinámica irreversible en su aproximación lineal ha dado lugar a una crisis en este campo de la física planteando la necesidad de desarrollar las herramientas teóricas que eviten las inconsistencias físicas del modelo propuesto por *Fourier* y extiendan el alcance de la termodinámica irreversible lineal [García-Calín, 1988].

Este desafío fué recogido por diversos autores. Entre ellos podemos mencionar a *Cattanea* [1948], *Morse & Feshbach* [1953], *Vernotte* [1958], *Nettleton* [1960], *Kalisky* [1965], *Meixner* [1970], *Syarmati* [1977], *Coleman* [1982], *Morra* [1988], *García-Calín* y colaboradores [1984], etc.

En este trabajo nuestro propósito esencial será: en primer lugar, desarrollar un modelo general de conducción de calor en sólidos a partir de una formulación variacional de la termodinámica irreversible extendida, y en segundo lugar, mostrar que este modelo sirve como un marco teórico que engloba las ecuaciones fenomenológicas reportadas en la literatura que describen el transporte de calor por medio de ondas térmicas en sólidos, es decir, consideraremos exclusivamente la descripción hiperbólica del problema de conducción del calor, pues es la que predice una velocidad finita de propagación de las perturbaciones térmicas.

Para ello se usará un formalismo variacional termodinámico desarrollado por F. Vázquez y J.A. del Río [Rev. Méx. Fis. (1990)] donde se llega a una ecuación de *Euler-Lagrange* para el flujo de calor.

Para lograr este objetivo, en el capítulo I comenzamos haciendo una revisión de las características generales de la teoría clásica de conducción del calor debida a *J.B. Fourier*. El propósito de este capítulo es doble. Por un lado, se pretende mostrar el significado físico de la ecuación de conducción del calor, y por otro, plantear las posibilidades de esta teoría para describir el proceso de transferencia de calor en un sólido y dar ejemplos en donde se utiliza satisfactoriamente.

En el capítulo II, se analizan las soluciones de las ecuaciones de ondas y de difusión mediante el *método de D'Alembert*, el cual nos permitirá, por un lado, mostrar que la ecuación de difusión propuesta por *Fourier* conduce a una velocidad infinita de las perturbaciones térmicas producidas en un sólido, y por otro, a partir del análisis de la solución de la ecuación de ondas introducir el concepto de *problema planteado correctamente*. Esto nos dará un criterio para analizar cuándo un modelo matemático es consistente tanto desde el punto de vista físico como matemático. Este criterio, aplicado a la ecuación de difusión nos indicará que el modelo es inconsistente y por tanto necesita replantearse para evitar entre otras cosas, la velocidad infinita de propagación de las perturbaciones en el medio. Otra de las razones para usar el método de *D'Alembert* es que pone de manifiesto algunas de las características físicas asociadas a la ecuación de ondas, que en la discusión posterior aparecerá como la forma alternativa adecuada para evitar la inconsistencia física asociada a la ecuación de *Fourier*. Para concluir, se muestra la ecuación de relajación para el flujo de calor propuesta por *Vernotte* y *Cattaneo*, que da cuenta de la inercia del sistema y cuyas soluciones son aproximadamente las que predice el modelo de *Fourier* cuando el tiempo de observación sea mayor que el tiempo de relajación del sistema.

En el capítulo III, se esquematiza la estructura lógico-formal de la termodinámica irreversible en sus diversas etapas de desarrollo, mostrando en particular los alcances y limitaciones para describir el proceso de transporte de calor en sólidos en cada una de ellas. En este sentido hacemos notar que debido a que la termodinámica clásica no incorpora en su formalismo al tiempo como variable resulta incapaz de explicar cualquier proceso irreversible. En seguida, en el contexto de la revisión de la termodinámica irreversible lineal, se retoma el análisis de la

inconsistencia física asociada a la ecuación de difusión. Se muestra cómo la ecuación de *Battanea-Vernotte* da lugar a la ecuación del *telegrafo* como una alternativa para describir el proceso de conducción de calor en el sólido, haciendo énfasis en que estas ecuaciones describen el transporte de calor a través de ondas con velocidad finita y que el problema central en el estudio del proceso de conducción es la comprensión de las escalas de tiempo en los que transcurren los distintos mecanismos de transmisión de las perturbaciones

Se dan entonces los fundamentos de los principales planteamientos teóricos que claman ser la generalización adecuada de la termodinámica irreversible lineal. En el primero de ellos, conocido como termodinámica irreversible extendida se deduce la ecuación de evolución temporal para el flujo de calor, que junto con la ecuación de balance de energía, describen adecuadamente el proceso de transporte de calor. En el segundo, conocido como la teoría ondulatoria de *Syarmati*, se deduce la ecuación de transferencia de lo que en la teoría se conocen como los campos locales, los cuales predicen la propagación de las perturbaciones en el sistema. En seguida, aún cuando no poseen la generalidad de los planteamientos anteriores para estudiar los procesos irreversibles, se detallan lo que podemos llamar las extensiones particulares de la termodinámica irreversible, puesto que tales planteamientos se dedican exclusivamente a estudiar el transporte de calor. Ellos son, los planteamientos integrales para el transporte de calor y el modelo no lineal propuesto por *Morra* y *Ruggeri*.

En el capítulo IV, trataremos la formulación variacional de la termodinámica irreversible extendida dada por Vázquez y del Río [1990]; comenzamos haciendo el planteamiento general con que se tratan los problemas de variaciones. A continuación se muestra una cuestión de

importancia fundamental en el marco de la aplicación de los principios variacionales y que consiste en establecer las condiciones bajo las cuales un problema determinado admite tal formulación. Para esto se hace un tratamiento sistemático de la derivadas de Fréchet. Se aplica este procedimiento para el caso particular de un conductor rígido de calor, mostrando que el análisis del flujo de calor en éste conductor no admite tal formulación. Se pasa entonces a establecer el principio variacional del tipo restringido dentro del marco de la termodinámica irreversible extendida, encontrándose que las variaciones de la parte no conservada del espacio termodinámico extendido conducen a las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen completamente la evolución temporal del flujo de calor. Esta ecuación plantea de manera natural que la evolución temporal del flujo de calor depende de las condiciones anisotrópicas del transporte, de las inhomogeneidades del flujo de calor, así como de las inhomogeneidades de todo el espacio extendido. Por último, mostramos que cada uno de los modelos para describir el transporte de calor en el sólido rígido desarrollados hasta la fecha, se puede deducir de este principio variacional mediante una identificación de los coeficientes de las ecuaciones hiperbólicas con los coeficientes de la ecuación de evolución temporal deducida de la formulación variacional.

Según García-Colín la pregunta hecha a principios de este siglo acerca de cual será la estructura lógica de una teoría que incorpore los logros fragmentarios alcanzados hasta ahora y que permita el estudio adecuado de los procesos irreversibles, todavía está por construirse. Por lo que como un segundo propósito de este trabajo es contribuir al debate que nos permita llegar a establecer este marco teórico. En este sentido, en el capítulo V, damos las conclusiones de este trabajo y comentamos algunas perspectivas para el trabajo futuro.

## CAPÍTULO I

### ECUACIONES CLÁSICAS DE CONDUCCIÓN DEL CALOR.

Es un hecho bien conocido que cuando en un sistema la temperatura varía de punto a punto se produce una transferencia de calor de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura. La energía transferida es difícil de ser medida directamente, pero el concepto tiene significado físico porque está relacionado con una cantidad medible; la *temperatura* del sistema.

En el estudio de la transferencia de calor es esencial conocer entonces la distribución de temperatura en el sistema. Para el caso de los sólidos, esto da lugar al planteamiento de una teoría para la descripción de este flujo de calor basada en observaciones experimentales, desarrollada por *Biot*, pero que generalmente es conocida como la teoría de conducción del calor de *Fourier* [Özişik, 1979].

Sus aplicaciones en los campos de la ciencia y de la ingeniería son múltiples y de carácter diverso. En el caso de la ingeniería, el análisis de la transferencia de calor por conducción usando las ecuaciones clásicas de *Fourier* ha hecho posible el diseño de material y equipo en varias ramas de esta disciplina. Como ejemplos mencionamos: 1) equipos de refrigeración para la conservación de alimentos [Plank, 1963], 2) sistemas de enfriamiento de motores de combustión interna y eléctricos, transformadores, transistores [Marrique & Cárdenas, 1981], 3) dimensionamiento de barras de combustible de los reactores nucleares [Glasstone & Sesonke, 1975], etc. Además de ser útiles para el estudio de 4) el flujo de calor en depósitos de desechos nucleares [Estrada-Gasca &

Cobble, 1987; 1988], 5) el estudio de la conducción de calor en el suelo [Marshall & Holmes, 1979], 6) la transferencia de calor en un medio poroso [Whitaker, 1977], etc.

Veamos a continuación cuales son las principales características de esta teoría.

### 1.1.-Ley fundamental de conducción del calor.

Para que la transferencia de calor en un sólido se realice, necesariamente el sólido debe estar en un estado fuera de equilibrio termodinámico. Sin embargo supondremos aquí, que el sólido se encuentra en un estado de *equilibrio local*, esto es, el estado termodinámico del sólido puede ser descrito localmente por las variables de estado de equilibrio, las cuales están relacionadas entre sí de la misma manera que en la teoría de equilibrio [García-Colín, 1990]. Esto significa que la temperatura, en general, es una función de la posición  $r$  y del tiempo. En estas condiciones se ha propuesto que la relación entre la densidad de flujo de calor  $q$  y la temperatura  $T$  es de la forma

$$q = q(r, T, \nabla T) \quad (1.1)$$

donde la presencia de  $r$  se refiere a cuerpos inhomogeneos. En esta ecuación no aparece explícitamente el tiempo  $t$  debido a la suposición de *equilibrio local* [Farkas, 1975].

Evidentemente, la primera propuesta para explicar el mecanismo de transferencia de calor por conducción en un sólido debida a *Fourier* y que es descrita por la relación :

$$q = -k\nabla T \quad (1.2)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica, es un caso particular de(1.1).

La ec.(1.2) muestra que  $q$  es una función lineal del gradiente de temperatura, pero esto se cumple si el gradiente varía muy poco en todo el sistema; existiendo considerable evidencia experimental que para las condiciones de estado permanente en materiales rígidos homogéneos e isotrópicos la transferencia de calor por conducción puede ser acertadamente descrita por esta ecuación. [Nunziata, 1971].

La hipótesis básica para la formulación matemática de esta ley tiene su fundamento en el resultado de un experimento muy simple. Una placa de un sólido homogéneo e isotrópico es intercalada entre dos planos, suficientemente grandes comparados con las dimensiones de la placa, de manera que podamos suponerlos infinitos en extensión, los cuales son mantenidos a temperaturas diferentes. También sobre las temperaturas se impone que la diferencia no sea grande. Inicialmente la temperatura en puntos del interior cambiará rápidamente, pero después de un cierto tiempo el flujo de calor y la distribución de temperaturas serán invariantes con el tiempo, es decir, se alcanzará el régimen permanente. Bajo estas condiciones se encuentra que el flujo de calor por unidad de tiempo está dado por

$$Q = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1.3)$$

donde se muestra que  $Q$  es proporcional al area transversal de la placa  $A$  y a la diferencia de temperatura  $\Delta T$  e inversamente proporcional al grosor de la placa  $\Delta x$ . Estrictamente hablando la conductividad térmica  $k$  no es una constante pues depende de la temperatura .

En un punto en el interior de la placa la ec.(1.3) puede ser transformada mediante un proceso matemático de límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q}{A} + k \frac{\Delta T}{\Delta x} = 0 \quad (1.4)$$

y ser escrita más generalmente como:

$$q_x + k \frac{dT}{dx} = 0. \quad (1.5)$$

En general la temperatura varía también en las direcciones  $y$  y  $z$ , en consecuencia hay un flujo de calor en estas direcciones, de modo que, existen ecuaciones semejantes a (1.5) para la descripción del flujo de calor en las direcciones mencionadas. De manera general podemos escribir la ec. (1.2) para el flujo de calor en un punto cualquiera [Byron *et al.*, 1976].

Esta ley de conducción del calor es una generalización de los resultados de las experiencias acerca del flujo lineal del calor a través de una placa perpendicularmente a las caras. Por consiguiente el resultado encontrado no debe ser considerado como probado por éste experimento. Más bien experimentos de éste tipo sugieren esta ley más que verificarla. La más exacta verificación será encontrada en el acuerdo del experimento con los cálculos obtenidos a partir de la teoría matemática basada sobre la suposición de la validez de esta ley [Carstlaw & Jaeger, 1959; Zemansky & Dittman, 1981].

El signo negativo en la ec. (1.2) indica que el calor fluye en la dirección negativa del gradiente de temperatura y sirve para hacer positivo el flujo en ese sentido y de este modo hacer el flujo consistente con la segunda ley de la *termostática*.

Las ecs. (1.2) y (1.3) propuestas en la segunda década del siglo XIX son generalmente atribuidas al francés *Jean Baptiste Fourier* y en su honor son designadas como las ecuaciones clásicas de conducción de calor de Fourier [Fourier, 1822].

Analizando la ec. (1.2) desde el punto de vista de la teoría cinética-molecular se deduce que el proceso de conducción del calor es un proceso aleatorio. Veamos porqué: la energía calorífica no entra por un

extremo de la placa y viaja directamente hacia el otro lado, sino que se mueve aleatoriamente a través de la placa como resultado de los choques de los portadores de energía térmica. Si esta energía fuera propagada a través de la placa sin el carácter aleatorio la expresión para el flujo de calor en la ec. (1.2) debería mostrar sólo una dependencia con respecto a la diferencia de temperatura, siendo de este modo independiente del grosor de la placa  $\Delta x$ . Por lo que es precisamente el carácter aleatorio del proceso de conducción lo que trae como consecuencia que aparezca el gradiente en la expresión para el flujo de calor. De acuerdo con esto decimos que el proceso descrito por la ec. de *Fourier* es un proceso de difusión [Sckert & Drake, 1972].

## 1.2. -La ecuación de difusión.

Otra forma equivalente para describir el proceso de difusión se puede deducir si combinamos adecuadamente la ec. (1.2), con la expresión para la conservación de la energía en un sólido [García-Salín, 1990]

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot q \quad (1.6)$$

y la expresión usada en la *Termodinámica* para describir el cambio de la energía interna con respecto de la temperatura,

$$de = \gamma dT \quad (1.7)$$

( $\gamma$  es la capacidad calorífica y  $\rho$  la densidad del sólido). El resultado es la otra forma de la ecuación clásica de conducción de calor conocida generalmente como ecuación de difusión [Joseph & Preziosi, 1989]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (k/\rho\gamma)\nabla^2 T. \quad (1.8)$$

Hemos supuesto en esta parte que no existe ninguna fuente de calor en

el sistema. La ecuación (1.8), sin embargo sólo es válida para conductividad de calor constante, de otra manera ella debe ser reescrita como [Carslaw *et al*, 1959; Farkas, 1975]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (1.9)$$

Así, usando esta última expresión se pueden analizar aquellos casos dónde la conductividad térmica se supone depende del espacio -ya sea explícitamente considerando un medio inhomogéneo, ó implícitamente, considerando que  $k$  depende del valor local de la temperatura- y aún más, la combinación de ambos casos, es decir, cuando  $k$  dependa de la temperatura y del espacio simultáneamente [Koff, 1985].

Tomando en cuenta la dependencia de  $k$  en la temperatura local nos encontramos con ecuaciones no lineales de conducción del calor cuya complejidad ha originado que estos casos no sean investigados en los primeros tratamientos de los procesos irreversibles.

Con esta teoría la comunidad científica logró desarrollar importantes innovaciones tecnológicas de las cuales nos beneficiamos en la actualidad. Sin embargo, esta imagen de sencillez y de potencialidad para resolver un considerable número de problemas vino a ser rebasada hace algunos años con los trabajos de Cattanea y Verratte [García-Colín, 1990; Joseph & Preziosi, 1989; 1990]; quienes encontraron en sus investigaciones que esta teoría sobre la propagación del calor tenía ciertas inconsistencias físicas que la hacían inadecuada para constituir una descripción admisible del proceso.

A pesar de esto, actualmente se acepta que seguirá proporcionando soluciones adecuadas a muchos de los problemas planteados por la conducción del calor. En este sentido pasa a ocupar un papel semejante a la mecánica clásica después de los trabajos de Einstein a principio de

este siglo [Hawking, 1988].

La teoría que pretenda ser una extensión adecuada de la teoría clásica de *Fourier*, debe ser construida de manera tal que en el límite adecuado sea compatible con ésta.

En el siguiente capítulo veremos precisamente cuáles son las propiedades que hacen que las ecuaciones clásicas de *Fourier* ya no resultan adecuadas en la descripción del flujo de calor.

## CAPITULO II

### SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LAS ECUACION DE ONDAS Y DE DIFUSIÓN

En las investigaciones para generalizar la ley de conducción de *Fourier* se obtiene una ecuación de onda amortiguada para la descripción de la propagación del calor. Esto surge, debido a que la teoría de *Fourier* es incapaz de dar cuenta de los efectos de memoria, los cuales pueden prevalecer en algunos materiales, particularmente a baja temperatura. Además, dentro de este esquema teórico, se predice una velocidad infinita de propagación de las perturbaciones térmicas y por lo tanto contradice las leyes básicas de la relatividad especial [*Nunziata*, 1971; *Meianer*, 1970].

Al respecto, se han realizado una gran cantidad de trabajos para revisar el desarrollo de la expresión matemática que gobierna la propagación del calor en un sólido, dando como consecuencia el reemplazo de la ecuación de *Fourier*

$$\nabla \cdot (k\nabla T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

por la ecuación hiperbólica,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T \quad (2.2)$$

la cual predice la propagación de las perturbaciones térmicas como ondas amortiguadas con rapidez finita  $a$ ; aquí  $\tau$  es el tiempo de relajación del sistema [*Torkington*, 1985].

Este capítulo se dedicará por un lado, al análisis, mediante el *método de las características*, de algunas consecuencias físicas deducidas de las soluciones de estas ecuaciones alternativas para la descripción de la transferencia de calor por conducción y por otro lado, a establecer un

criterio para analizar la validez de un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales parciales asociadas al fenómeno físico, al cual denominaremos como "*criterio de los problemas planteados correctamente*". Para lograr esto último, en lugar de la ec. (2.2), usaremos una ecuación de ondas no amortiguada, pues las consecuencias físicas deducidas serán completamente válidas para las ondas amortiguadas.

Por lo común, muchas de las ecuaciones en derivadas parciales utilizadas en el estudio de los fenómenos de la Naturaleza, se pueden resolver por un procedimiento ampliamente difundido, conocido como *separación de variables*. Pero existe también otro método especial y muy elegante conocido como el método de *D'Alembert* [Wylie, 1969], el cual resulta especialmente útil para resolver la ecuación de ondas porque esclarece el significado físico del parámetro  $a$  que aparece en ésta ecuación. Para el caso de la ecuación de difusión este método nos permite poner de manifiesto que la velocidad de propagación de la perturbación es infinita. Es aquí donde aparece una ecuación de ondas como alternativa para la descripción correcta del proceso de transporte de calor, punto que trataremos con más detalle en el próximo capítulo.

En realidad, el método de *D'Alembert*, llamado así en honor del matemático francés *Jean Le Rond D'Alembert*, no es un método especial, sino más bien una aplicación especial de un método general conocido *método de las características* [Tijonov & Samarsky, 1980; Gudanov, 1978], el cual debido a la importancia de las ecuaciones de ondas y de difusión para nuestro trabajo trataremos con cierto detalle.

## 2.1.-Método de las características.

En este procedimiento lo que se quiere esencialmente es simplificar una ecuación parcial de segundo orden a su forma canónica. Para lograrlo

se hace uso de una transformación adecuada de las variables independientes. Una vez alcanzado ésto, la solución de esta ecuación se obtiene mediante un procedimiento normal de integración.

Comenzaremos por establecer las definiciones necesarias de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes.

Llamaremos ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden a una relación entre la función incógnita  $u(x, \psi)$  y sus derivadas parciales de la forma:

$$F(x, \psi, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (2.3)$$

donde  $x$  y  $\psi$  son las variables independientes y el subíndice indica diferenciación parcial.

La ecuación se llama *lineal con respecto a las derivadas de orden mayor*, si tiene la forma:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F_1(x, \psi, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.4)$$

donde los coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  son sólo funciones de  $x$  y  $\psi$ , además por conveniencia para desarrollos posteriores se ha puesto el coeficiente de  $u_{xy}$  igual  $2a_{12}$ .

Para llevar la ec. (2.4) a una forma equivalente, acorde a nuestros propósitos, comencemos por hacer la siguiente transformación de variables

$$\xi = \phi(x, \psi), \quad \mu = \psi(x, \psi), \quad (2.5)$$

en donde suponemos que el determinante funcional (Jacobiano) es diferente de cero, ésto da como resultado que las derivadas de orden mayor sean de la forma siguiente

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\mu \mu_x, \quad (2.6)$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\mu \mu_y, \quad (2.7)$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\mu} \xi_x \mu_x + u_{\mu\mu} \mu_x^2 + u_{\xi\xi} \xi_{xx} + u_{\mu\mu} \mu_{xx}, \quad (2.8)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\mu} (\xi_x \mu_x + \xi_y \mu_y) + u_{\mu\mu} \mu_x \mu_y + u_{\xi\xi} \xi_{xy} + u_{\mu\mu} \mu_{xy}, \quad (2.9)$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\mu} \xi_y \mu_y + u_{\mu\mu} \mu_y^2 + u_{\xi\xi} \xi_{yy} + u_{\mu\mu} \mu_{yy}. \quad (2.10)$$

Substituyendo estas expresiones en la ec. (2.4) se tiene

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\mu} + \bar{a}_{22} u_{\mu\mu} + \bar{F}_1(\xi, \mu, u, u_\xi, u_\mu) = 0 \quad (2.11)$$

donde

$$\bar{a}_{11} = a_{11} (\xi_x)^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} (\xi_y)^2, \quad (2.12)$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \mu_x + a_{12} (\xi_x \mu_y + \xi_y \mu_x) + a_{22} \xi_y \mu_y, \quad (2.13)$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} (\mu_x)^2 + 2a_{12} \mu_x \mu_y + a_{22} (\mu_y)^2. \quad (2.14)$$

Si se hace el coeficiente  $\bar{a}_{11}$  igual a cero esto implica que la ecuación en derivadas parciales de primer orden (2.12) es idénticamente cero. De modo que su solución general representa una de las funciones de la transformación (2.5).

Sea  $z = \phi(x, y) = C$  una solución particular de esta ecuación,

$$a_{11} (z_x)^2 + a_{12} z_x z_y + a_{22} (z_y)^2 = 0. \quad (2.15)$$

Esto implica que existe una función  $\psi$  dada por  $\psi = f(x, C)$ , que cumple con

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\phi_x(x, \psi)}{\phi_y(x, \psi)} \Big|_{y=f(x, C)} \quad (2.16)$$

donde el paréntesis y el subíndice  $y=f(x, C)$  indican que en el segundo miembro de la expresión (2.16) la variable  $\psi$  no es independiente, sino que su valor es igual a  $f(x, C)$ .

Como  $z = \phi(x, y)$  satisface a la ec. (2.15) entonces se tiene

$$\left(a_{11} \left[ \frac{\phi_x}{\phi_y} \right]^2 - 2a_{12} \left[ -\frac{\phi_x}{\phi_y} \right] + a_{22} \right) = 0. \quad (2.17)$$

De (2.16) y (2.17) se deduce que

$$a_{11} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2 - 2a_{12} \frac{d\psi}{d\alpha} + a_{22} = \left( a_{11} \left[ -\frac{\phi_x}{\phi_y} \right]^2 - 2a_{12} \left[ -\frac{\phi_x}{\phi_y} \right] + a_{22} \right)_{y=f(x,C)}. \quad (2.18)$$

Pero de acuerdo a (2.15) el segundo miembro de esta ecuación es igual a cero para todo  $\alpha$  y  $\psi$ , y no solo para  $y=f(x,C)$ .

Por lo tanto

$$a_{11} \left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2 - 2a_{12} \frac{d\psi}{d\alpha} + a_{22} = 0. \quad (2.19)$$

Esto lo podemos reescribir como

$$a_{11} d\psi^2 - 2a_{12} d\alpha d\psi + a_{22} d\alpha^2 = 0. \quad (2.20)$$

Denominaremos a la ec. (2.20) como la *ecuación característica* de la ec. (2.4) y a sus soluciones como *características*.

Haciendo  $\xi = \phi(x, \psi)$  donde  $\phi(x, \psi) = \text{const}$  es una integral general de la ec. (2.20), el coeficiente de  $u_{\xi\xi}$  se reduce a cero. Si  $\psi(x, \psi) = \text{const}$  es otra integral general de la ec. (2.20) independiente de  $\phi(x, \psi)$  y haciendo  $\mu = \psi(x, \psi)$  se anulará también el coeficiente de  $u_{\mu\mu}$ . Es decir  $\bar{a}_{11}$  y  $\bar{a}_{22}$  se anularán, teniendo como consecuencia que la ec. (2.11) se reduce a una forma en la cual sólo contiene como derivada de orden mayor a la derivada cruzada.

Resolviendo la *ecuación característica* (2.20) para  $\frac{d\alpha}{d\psi}$  se tiene

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = \frac{a_{12} + \left( (a_{12})^2 - a_{11} a_{22} \right)^{1/2}}{a_{11}}, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = \frac{a_{12} - \left( (a_{12})^2 - a_{11} a_{22} \right)^{1/2}}{a_{11}}. \quad (2.22)$$

El signo de la expresión dentro del radical determina el tipo de la ec. (2.4), dando como resultado que para cada punto P del dominio de definición la llamaremos:

1.- *hiperbólica*, si en el punto P:  $(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) > 0$ ,

2.-*parabólica* si en el punto P:  $(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) < 0$ .

3.-*elíptica* si en el punto P:  $(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) = 0$ .

Consideremos la región R en la cual la función pertenece a un mismo tipo, de acuerdo a las expresiones (2.21) y (2.22) por cada punto de ésta región pasan dos *características*;

1.-Para las ecuaciones de tipo *hiperbólica*, la expresión  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$  es mayor que cero y los segundos miembros de las ecs. (2.21) y (2.22) son reales y diferentes. Sus integrales generales  $\phi(x, y) = C$  y  $\psi(x, y) = C$  determinan familias reales de características. Haciendo  $\xi = \phi(x, y)$  y  $\mu = \psi(x, y)$  la ec. (2.11) se transforma en

$$u_{\xi\mu} = \bar{F}_1 / 2\bar{a}_{12} \quad (2.23)$$

ésta es la llamada forma *canónica* de las ecuaciones de tipo *hiperbólica*.

2.-Para las ecuaciones de tipo *parabólica*  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$  es igual a cero y las expresiones (2.21) y (2.22) coinciden y obtenemos una integral general de la ec. (2.20)  $\phi(x, y) = C$ . Hagamos en este caso  $\xi = \phi(x, y)$  y  $\mu = \psi(x, y)$  siendo en este caso  $\mu = \psi(x, y)$  una función cualquiera independiente de  $\phi$ , bajo ésta elección de las variables los coeficientes  $\bar{a}_{11}$  y  $\bar{a}_{12}$  se anularán y la ec. (2.11) toma la forma

$$u_{\mu\mu} = \bar{F}_1 / 2\bar{a}_{22}. \quad (2.24)$$

Esta es la llamada forma canónica para las ecuaciones de tipo *parabólico*.

3.-En el caso de las ecuaciones de tipo *elíptica*,  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$  es negativo y las expresiones (2.21) y (2.22) son números complejos, la forma canónica de la ec. (2.11) toma la forma

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \bar{F}_1 / 2\bar{a}_{22}. \quad (2.25)$$

Una vez establecido el procedimiento general de este método determinemos ahora las soluciones de dos ecuaciones que nos servirán como

punto de partida para el desarrollo de nuestro trabajo, éstas son: 1) la ecuación de ondas

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (2.26)$$

y 2) la ecuación de difusión

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad (2.27)$$

las cuales de acuerdo con la clasificación establecida previamente las ubicaremos como ecuaciones de tipo *hiperbólica* y *parabólica* respectivamente.

Consideremos primeramente la ecuación de ondas que describe las vibraciones de una cuerda no acotada con condiciones iniciales

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (2.28)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (2.29)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2.30)$$

El poner como ejemplo a la cuerda es simplemente cuestión de comodidad y cualquier función que verifique la ecuación de ondas tiene las mismas propiedades que desarrollaremos para la cuerda. Para este trabajo será particularmente importante, puesto que en el desarrollo de las ideas acerca de la propagación del calor aparece como la ecuación que describe adecuadamente este proceso; esto será evidente en la discusión posterior.

Transformemos esta ecuación a la forma canónica (2.23).

La ecuación de las *características* es

$$d\alpha^2 - a^2 dt^2 = 0. \quad (2.31)$$

cuyas soluciones son

$$\alpha + at = C_2, \quad \alpha - at = C_1. \quad (2.32)$$

Aclaremos en este punto que la expresión (2.31) contiene implícitamente la idea de dos velocidades dadas por  $d\alpha/dt = a$  y  $d\alpha/dt = -a$ .

Haciendo

$$\xi = x + at, \quad \mu = x - at \quad (2.33)$$

la ecuación de las oscilaciones de la cuerda se transforma en

$$u_{\xi\mu} = 0. \quad (2.34)$$

Una solución de ésta ecuación es inmediata, y debe tener la forma

$$u_{\mu}(\xi, \mu) = g(\mu). \quad (2.35)$$

Integrando esta función con respecto a  $\mu$  para  $\xi$  fija, se obtiene:

$$u(\xi, \mu) = \int g(\mu) d\mu + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\mu), \quad (2.36)$$

o de manera equivalente

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (2.37)$$

Hemos construido así, la solución general de la ecuación de ondas ec.(2.28), la cual consiste de la superposición de dos ondas que se desplazan a izquierda y derecha respectivamente, como se verá más adelante.

Sólo resta encontrar la forma explícita que debe tener, y esto se logra tomando en cuenta las condiciones iniciales, esto es

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x), \quad (2.38)$$

$$u_t(x, 0) = a(f_1'(x) - f_2'(x)) = \psi(x), \quad (2.39)$$

aquí el superíndice ' denota diferenciación con respecto al tiempo.

Integrando la segunda igualdad se tiene

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_x^x \psi(\alpha) d\alpha + C \quad (2.40)$$

donde  $x$  y  $C$  son constantes.

Resolviendo las ecs. (2.38) y (2.40) se encuentra que

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \psi(x) + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \quad (2.41)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \psi(x) - \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \quad (2.42)$$

De este modo quedan determinadas las funciones en términos de las funciones  $\phi$  y  $\psi$  las cuales representan las condiciones iniciales para la cuerda.

De tal forma, la solución de la ec. (2.37) es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x + at) + \phi(x - at)) + \frac{1}{2a} \left( \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \right). \quad (2.43)$$

Consideremos ahora los aspectos físicos relacionados con este problema: la función  $u(x, t)$  determinada por la fórmula (2.43) nos permite describir el proceso de propagación de la perturbación gobernado por la ecuación de ondas. Para  $t=t_0$ , la función  $u(x, t_0)$  da el perfil de la cuerda en el momento  $t_0$ , si  $x=x_0$  obtenemos la función  $u(x, t)$  que da el proceso del movimiento del punto  $x$ . Supongamos a un observador, que se hallaba en el punto  $x=0$  en el momento  $t=0$ , y que se mueve con velocidad  $a$  en la dirección positiva del eje de las  $x$ . Introduzcamos ahora, un sistema de coordenadas relacionado con este observador, haciendo  $x'=x-at$  y  $t'=t$  ( $'$  no indica derivada respecto a  $t$ ). En este sistema móvil de coordenadas, la función  $u(x, t)=f(x-at)$  se determinará mediante la expresión  $u=f(x')$ , y el observador verá todo el tiempo el mismo perfil que en el momento inicial. Por lo tanto,  $u(x, t)=f(x-at)$  es el perfil invariable  $f(x)$ , que se desplaza hacia la derecha con velocidad constante  $a$ , en tanto que la función  $u(x, t)=f(x+at)$  representará una onda que se desplaza hacia la izquierda con velocidad  $-a$ .

De modo que la solución para la ecuación de la cuerda infinita es la superposición de las ondas  $f(x-at)$  y  $f(x+at)$ , una de las cuales se desplaza hacia la derecha con velocidad  $a$  y la otra se desplaza hacia la izquierda con velocidad  $-a$ .

Por otro lado, tenemos que la solución (2.43) se puede escribir como

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (2.44)$$

donde

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + at) + \phi(x - at)), \quad (2.45)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \left( \int_x^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_x^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right). \quad (2.46)$$

Si la velocidad inicial es cero, la desviación  $u = u_1(x, t)$  es la suma de las ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda. Si en cambio,  $\phi(x) = 0$ , entonces  $u = u_2(x, t)$  es la desviación de la cuerda causada por la velocidad inicial. De acuerdo con esto, la ec. (2.43) representa el proceso de propagación de la desviación y velocidad iniciales.

Para esclarecer un poco más el carácter de la solución (2.43), consideremos el plano  $(x, t)$  y en éste consideremos las *características* de la ecuación de ondas, es decir, las rectas  $x - at = C_1$  y  $x + at = C_2$ . En este plano tenemos que la función  $f(x - at)$  se mantiene constante a lo largo de la *característica*  $x - at = C_1$ , en tanto que la función  $f(x + at)$  tiene un comportamiento semejante pero ahora a lo largo de la *característica*  $x + at = C_2$ , esto puede verse claramente en la fig. 2.1.

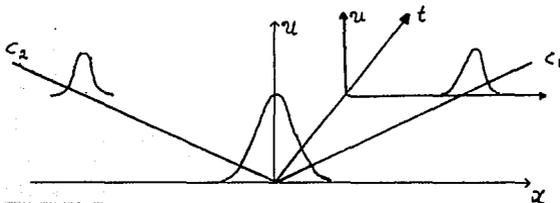


fig. 2.1

## 2.2.- Estabilidad de las soluciones ondulatorias y los problemas planteados correctamente.

Demostremos ahora, que estas soluciones ondulatorias son estables; en otros términos esto significa que dado un cambio en las condiciones

iniciales menor o igual a un factor  $\delta(\epsilon)$ , ( $\epsilon$  el grado de precisión  $\epsilon$  con que se desee la solución) se producirá un cambio en la solución menor o igual que  $\epsilon$ . Para ver esto consideremos que las condiciones iniciales cambian en la forma siguiente

$$u_1(x, 0) = \phi_1(x) \longrightarrow u_2(x, 0) = \phi_2(x), \quad (2.47)$$

$$u_{1,t}(x, 0) = \psi_1(x) \longrightarrow u_{2,t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad (2.48)$$

y además que la magnitud de este cambio está dado por

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta, \quad (2.49)$$

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \quad (2.50)$$

Por otro lado se tiene de manera general que:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)|. \quad (2.51)$$

Entonces tomando en cuenta la solución dada por (2.45) se tiene

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\phi_1(x + at) - \phi_2(x + at)| + \\ &\frac{1}{2} |\phi_1(x - at) - \phi_2(x - at)| + \frac{1}{2a} \left( \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Pero como los cambios en las condiciones iniciales son menores o iguales que  $\delta$ , ésta última expresión se transforma en

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\delta \ 2at. \quad (2.53)$$

Por último, dado que  $t \in (0, t)$  entonces

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\delta \ 2at \leq \delta(1 + t) \quad (2.54)$$

y si se hace  $\epsilon = \delta(1 + t)$  se comprueba que las soluciones son estables en  $(0, t)$  [Tijonov & Samarsky, 1980].

El análisis anterior muestra que un cambio en las soluciones menor que un cierto número prestablecido  $\epsilon$  corresponde a un cambio en las condiciones iniciales del mismo orden.

Hagamos aquí una pequeña pausa para comentar los modelos matemáticos

en los cuales se tienen ecuaciones diferenciales parciales que describen fenómenos físicos junto con un conjunto de condiciones iniciales.

En el desarrollo de estos diferentes modelos se parte de diversas suposiciones tanto de índole matemática como física. Un ejemplo excelente de esto es presentado por *Weinberger* [1970], quien nos muestra cómo se construye el modelo matemático para describir las oscilaciones de una cuerda infinita en extensión.

El primer problema relacionado con cualquier modelo propuesto para describir la evolución temporal de las variables involucradas en un determinado proceso físico, es que no podemos asegurar que el problema matemático correspondiente tenga solución. Además, aun cuando físicamente el sistema llegue a un estado final determinado sólomente por las condiciones iniciales, no podemos asegurar que el problema matemático tenga solución única. Sin embargo, si el modelo es adecuado debe proporcionar una solución única.

De acuerdo con esto diremos que cualquier proceso físico que se desarrolle en el transcurso del tiempo debe caracterizarse por funciones que dependan en forma continua de las condiciones iniciales, es decir que estas funciones deben de ser estables.

En relación con estos modelos determinados físicamente se dice que el problema matemático está planteado correctamente si

- 1.-la solución existe
- 2.-la solución es única
- 3.-la solución es estable.

De esto se desprende que el modelo para la descripción de las oscilaciones de la cuerda es un modelo que corresponde a un problema planteado correctamente [*Tijonov & Samarsky*, 1980; *Sudonov*, 1978; *Weinberger*, 1970].

Veamos ahora el problema de la difusión del calor en un sólido no

acotado.

Para el caso de flujo permanente la derivada temporal de la temperatura desaparece, la ecuación de difusión se reduce a

$$u_{xx} = 0. \quad (2.55)$$

En este caso la ecuación de las *características* nos indica que

$$\frac{dt}{dx} = 0 \quad (2.56)$$

lo cual implica que la velocidad de propagación de la perturbación es infinita, pues como se mencionó antes,  $dx/dt$  nos indica precisamente la velocidad de la perturbación.

A partir de (2.56) se tiene que las nuevas variables se pueden definir como

$$\xi = t, \quad \mu = x \quad (2.57)$$

y la forma de la ecuación permanece invariante, es decir

$$u_{\mu\mu} = 0. \quad (2.58)$$

Integrando con respecto a  $\mu$  manteniendo constante  $\xi$  se tiene

$$u_{\mu}(\xi, \mu) = n(\xi) \quad (2.59)$$

donde  $n(\xi)$  es cierta función de la variable  $\xi$ . Una segunda integración con respecto a  $\mu$  para  $\xi$  fija proporciona

$$u(\xi, \mu) = \int n(\xi) d\mu + f_1(\xi) = \mu q(\xi) + p(\xi) \quad (2.60)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones de las variables  $\xi$ .

De modo que la solución general de la ecuación de difusión ec. (2.55), es

$$u(\xi, \mu) = \mu q(\xi) + p(\xi). \quad (2.61)$$

Un primer comentario de ésta solución es que no tiene la forma general de una onda que viaja con velocidad finita como lo muestra la ec. (2.45) [Hecht & Zayac, 1977]. Además, de acuerdo con la ecuación de las

características  $dt/dx = 0$ , ésta solución puede interpretarse como una onda de forma fija que se mueve con velocidad infinita, junto con otra onda que crece linealmente con la posición y que se mueve también con velocidad infinita. Esto nos indica que el modelo de difusión propuesto tiene las inconsistencias físicas ya señaladas y por lo tanto lo hacen inadecuado para hacer una descripción correcta del proceso, puesto que es inaceptable que una perturbación sea sentida instantáneamente en todos los puntos del sistema en consideración.

Veamos ahora qué pasa con esta velocidad cuando el flujo de calor no es estable, es decir cuando los estados del sistema son estados transitorios.

Consideremos la ecuación diferencial parabólica que describe la conducción del calor

$$\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ k \frac{\partial T}{\partial X} \right] \quad (2.62)$$

y supongamos que en el intervalo de temperaturas considerado los parámetros  $k$  y  $\gamma$  son constantes, esto implica que esta ecuación la podemos reescribir como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k/\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} . \quad (2.63)$$

Modificando esta ecuación mediante la definición de una nueva coordenada espacial dada por  $x = \sqrt{\gamma/K} X$ , se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} . \quad (2.64)$$

Esta ecuación tiene como soluciones particulares a la sucesión de términos dados por

$$T(x, t) = A_n \exp(-n^2 t) \sin nx \quad (2.65)$$

Podemos convenir que en  $t_0 \leq t \leq 0$  y  $0 \leq x \leq \pi$  la fórmula puede ser tratada como la solución de la historia térmica de un cuerpo calentado desde un estado inicial hasta el momento presente.

Hemos demostrado previamente que existe solamente una *línea característica* para una ecuación de este tipo y además que sobre esta línea el perfil de la perturbación se mantiene constante.

La sucesión de soluciones del tipo de la ec. (2.65) fue construido en 1904 por el matemático francés *Hadamard*, quién llegó a conclusiones muy importantes partiendo de su análisis [Gudonov, 1978].

Aquí seguiremos esta vía clásica para demostrar que el problema en consideración esta planteado incorrectamente, en otras palabras, demostraremos que el modelo de difusión propuesto tiene inconsistencias físicas que lo hacen inadecuado para describir al proceso [Luitov et al. 1976].

Respecto de la solución (2.65) se tiene que ésta tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , de modo que si la condición inicial en  $x = 0$  es  $T(0,0)=0$ , entonces para  $n$  muy grande  $T(x,t)$  es un valor próximo a cero.

Con el fin de evaluar  $A_n$ , tomemos un valor inicial cercano a cero ( $n \rightarrow \infty$ ) dado por

$$T(x,0) = A_n \text{ sen}(nx) \quad (2.66)$$

y calculemos la norma entre este valor y  $T=0$ , esto es

$$\|T(x,0) - 0\| = \|A_n \text{ sen} nx - 0\| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} |A_n \text{ sen} nx| \leq A_n. \quad (2.67)$$

Escojamos  $A_n = \exp(-\sqrt{n})$ , teniendo en cuenta que la expresión anterior debe ser cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Habiendo encontrado el valor para  $A_n$  consistente con los valores iniciales consideremos ahora la norma entre una solución cualquiera  $T(x,t)$  y  $T = 0$  y veamos el comportamiento cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \|\exp(-\sqrt{n} - n^2 t) \text{ sen } nx - 0\| &\leq \max_{0 \leq x \leq \pi, t \leq t_0} |\exp(-\sqrt{n} - n^2 t) \text{ sen } nx| \\ &\leq |\exp(-\sqrt{n} - n^2 t)| \leq \frac{\exp(n^2 |t|)}{\exp(\sqrt{n})}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , la norma no tiende a cero como cabía esperar sino que viene a ser infinitamente grande para  $t_0$  finito, esto significa que la solución no es estable. Por lo tanto se muestra que el modelo de difusión no es adecuado físicamente para describir al proceso de transporte de calor.

Además de la inestabilidad de la solución, ésta posee otra característica que nos muestra la inconsistencia física de estas soluciones ondulatorias.

Sobre la *línea característica* consideremos el perfil constante  $T(X,t)=\text{constante}$  que se mueve con velocidad  $a$ . Aquí  $X$  representa la posición de este perfil.

Dado el carácter constante del perfil podemos establecer a partir del cálculo diferencial que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial X} \frac{dX}{dt} = 0. \quad (2.69)$$

Designemos la velocidad de la isoterma por

$$a = \frac{dX}{dt}. \quad (2.70)$$

Con esta definición podemos reescribir (2.69) como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial X} a = 0, \quad (2.71)$$

lo cual implica que la velocidad de la isoterma está dada por

$$a = - \frac{\partial T / \partial t}{\partial T / \partial X}. \quad (2.72)$$

Por otro lado, a partir de la solución de *Hadamard* (ec. (2.65)) se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -n^2 A_n \exp(-n^2 t) \text{ sen } n\sqrt{\gamma/K} X, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = n\sqrt{\gamma/K} A_n \exp(-n^2 t) \text{ cos } n\sqrt{\gamma/K} X, \quad (2.74)$$

las cuales al sustituirse en (2.72) dan la velocidad de la isoterma en los siguientes términos:

$$a(X, t) = \sqrt{K/\gamma} \operatorname{ntan}(n\alpha\sqrt{\gamma/K}) = \sqrt{K/\gamma} \operatorname{ntan}(n\alpha). \quad (2.75)$$

Dado el comportamiento de la función tangente en  $n\pi$  para  $n=1, 2, 3, \dots$  es evidente que la velocidad de la isoterma tiene un comportamiento oscilante donde toma valores que van desde cero hasta infinito, y esto desde el punto de vista físico no es aceptable, ya que los puntos pertenecen a una misma isoterma.

Para superar esta dificultad, *Vernotte* y *Cattaneo*, independientemente, sugirieron que la ecuación de *Fourier* fuera convenientemente modificada para dar cuenta de la inercia del sistema y evitar así el inconveniente de una propagación infinita y propusieron sustituirla por una ecuación de relajación para  $q$  dada por

$$-\tau \frac{\partial q}{\partial t} = q + kVT \quad (2.76)$$

donde  $\tau$  es el *tiempo de relajación del sistema*, es decir el tiempo que cada sistema necesita para alcanzar el equilibrio local después de que ha sido perturbado térmicamente y en consecuencia se alcanza la linealidad entre flujo y fuerza termodinámica asociada. Este tiempo de relajación, característico del sistema, puede ser bastante pequeño en una gran cantidad de sistemas, de modo que puede ser adecuado usar la ley de *Fourier*, aún en las escalas pequeñas de tiempo de nuestra vida diaria.

El tiempo de relajación para metales monovalentes es del orden de  $10^{-14}$  seg. Por consiguiente, como inicialmente fue anticipado, el tiempo de relajación para el flujo de calor es extremadamente pequeño, lo cual explica el éxito del modelo de *Fourier* para la conducción del calor [*Maurer*, 1969].

Una comparación entre el modelo de relajación y el modelo de *Fourier* para el caso de problemas de conducción de calor en estado transitorio con valores a la frontera conduce a la conclusión de que, en general, las temperaturas predichas por los dos modelos son aproximadamente las mismas

después de un periodo inicial del orden de magnitud del *tiempo de relajación*. Esto es, mientras que el tiempo de observación sea mayor que el tiempo de relajación, las soluciones obtenidas usando el modelo de relajación se reducirán idénticamente a las soluciones obtenidas usando el modelo de *Fourier* [Maurer, 1969]. Tal como lo plantean *Joseph y Preziosi* [1989, 1990], una compresión de las escalas de tiempo es el tema central de las investigaciones científicas de las ondas de calor descritas por la ecuación propuesta por *Gattaneo y Verrotte*.

El cuestionamiento de la validez del modelo de difusión ya era planteado desde 1860 en el marco de un reconsideración general de la física clásica por Maxwell, quién propuso que la solución del problema podría pensarse en términos de escalas de tiempo del sistema, o sea, si el equilibrio del sistema se perturba, la relación funcional entre los flujos y las fuerzas termodinámicas va a cambiar según observemos al sistema en diferentes intervalos de tiempo, a partir del instante en que apliquemos la perturbación. Sin embargo, estas ideas estuvieron sumergidas en el olvido, hasta 1948, fecha en que fueron revividas por *Gattaneo* e independientemente por *Verrotte* en 1958. Esto ha conducido a llamar a la ec.(2.76) con justa razón como la ecuación de *Maxwell-Gattaneo-Verrotte (MEV)* [Sarcía-Galín, 1990].

No está de más insistir en el hecho de que, mientras más progresa la investigación científica más se esclarece que acercándonos al objeto a diferentes escalas de tiempo y espacio, nuestras investigaciones pueden dar como resultado que tengamos una perspectiva diferente sobre los mismos objetos.

Para el caso de proceso de conducción del calor esto último es altamente ilustrativo, ya que percibimos el fenómeno bajo aspectos tan diferentes, dependiendo de la escala de tiempo a la que hagamos la observación, que no podemos ya pasar libremente del uno al otro, las

reglas del objeto ya no son iguales en las diferentes escalas de presentación. Los resultados de este acercamiento científico de ninguna manera se oponen, existen puntos donde unen sus dominios respectivos, pero conservan su autonomía [Hamburger, 1984].

Por otro lado, este fenómeno nos muestra que debemos protegernos de las trampas de una extrapolación sin sentido. Podemos considerar válido que en algunos campos de la ciencia la transferencia de calor por conducción sea tratada con la ecuación clásica de difusión, sin embargo, esa extrapolación pudiera no tener sentido en otros, perdiéndose el rigor científico y dando lugar a una conceptualización errónea del fenómeno.

No se trata de negar la ley de Fourier, pues ésta ha demostrado ampliamente y en diversos escenarios su validez, sino que debemos tener claro que sus limitaciones no la hacen aceptable para el estudio para el flujo de calor a cualquier escala de tiempo. Sin embargo, en la literatura técnica se encuentra que estas limitaciones no son explicitadas en modo alguno, dejando de lado el hecho de que las reglas del fenómeno ya no son iguales en las diferentes escalas de presentación.

Debemos puntualizar que las "acciones a distancia" implicadas en la Física Newtoniana fueron trasladadas de manera natural a otros campos en desarrollo de la física y el caso de la conducción del calor no fue la excepción; de modo que fué natural también trasladar las ideas iniciadas por Faraday y sistematizadas maravillosamente por Maxwell [Nikolsky, 1976]; por doquier la acción a distancia del paradigma Newtoniano [Kuhn, 1986] dió paso a campos que se propagan con velocidad finita [Einstein, 1984].

Sin embargo, el contexto en el cual resurgieron estas ideas de rechazo a la conducción instantánea del calor era diferente al del siglo pasado, pues ahora se daban en el marco del cuestionamiento de la termodinámica irreversible lineal (TIL), en la cual se deducen un conjunto

completo de ecuaciones diferenciales con las que se pretende hacer la descripción de la variación temporal de las propiedades termodinámicas de un sistema que se halla fuera de equilibrio. Para el caso de la conducción de calor en un cuerpo rígido, la ecuación de evolución es precisamente la ecuación de difusión.

Este rechazo sistemático de diversos investigadores a la idea de la velocidad de propagación infinita del calor hizo que ésta perdiera su anclaje y su atractiva apariencia, dando lugar a planteamientos que se consideran como extensiones de la TIL para el estudio de los procesos irreversibles.

Esta investigación *emergente* [Kuhn, 1986], la cual va aparejada con el avance tecnológico de este siglo, ha dado lugar a un acercamiento diferente al problema, demostrando que la ciencia no ha progresado sólo mediante observaciones y herramientas nuevas con las cuales se pueden señalar los alcances y limitaciones de una teoría, sino que ha progresado también en la conceptualización de los diversos problemas que tal marco teórico pretende resolver.

En el siguiente capítulo, trataremos precisamente con dos de los planteamientos que se han establecido para dar una extensión de la TIL y de cómo se deducen las ecuaciones de evolución temporal de las variables de un conductor rígido de calor, las cuales mostrarán que el proceso de conducción de calor se da a través de ondas con rapidez finita.

Esto, como se verá, representa un cambio fundamental en la conceptualización del fenómeno, puesto que ahora el proceso de conducción en un sólido ya no será un proceso difusivo a velocidad infinita, sino un proceso ondulatorio a velocidad finita.

## CAPÍTULO III

### TERMODINAMICA EXTENDIDA.

En la Naturaleza existen una gran cantidad de fenómenos espontáneos que desde siempre ha llamado la atención del hombre, y por lo tanto, se han dado una gran cantidad de teorías para tratar de caracterizarlos; pero no es sino hasta el siglo XIX cuando se empieza una investigación sistemática de ellos, dando como consecuencia la formulación de un conjunto de leyes empíricas para tratar de describirlos. Sin embargo, estas leyes no es posible ubicarlas en un contexto teórico que pueda ser aplicado a toda la problemática. Ante esto, surge la necesidad de desarrollar el marco teórico que permita englobar el conocimiento parcial adquirido en el estudio de estos procesos.

Desde un punto de vista fenomenológico, en la tercera década de este siglo surge un primer intento que se conoce generalmente como *Termodinámica Irreversible Lineal*.

En el proceso de maduración de este marco teórico se encontró que contenía ciertas inconsistencias físicas, además de que, la gran mayoría de estos procesos era imposible explicarlos con las herramientas teóricas propuestas, cumpliendo su cometido de dar una descripción temporal de estos procesos solamente si dichos procesos difieren poco de las condiciones de equilibrio. A pesar de ésto, en algunos casos se llegaba a buenos resultados en la práctica pero que representaban una limitante en el conocimiento preciso de los diversos procesos estudiados. Por ello en la década de los setenta se inició el proceso de construcción del planteamiento termodinámico que permitiera comprender más ampliamente los procesos irreversibles que rebasan el marco de la TIL.

Como es de suponerse, han sido varias las propuestas que pretenden ser la ampliación adecuada de la Termodinámica en su aproximación lineal y que están compitiendo en el escenario científico por ocupar el espacio que la TIL es incapaz de hacerlo.

Dentro de los marcos teóricos para describir los procesos irreversibles, y en particular para la descripción del proceso de conducción del calor, podemos mencionar los siguientes:

1.-La teoría de *García-Eolín* y colaboradores.

2.-La teoría Ondulatoria (TO) de *Gyarmati*,

y en un contexto más particular, puesto que exclusivamente tratan el transporte de calor, encontramos a:

3.-Los planteamientos integrales para el flujo de calor.

4.-El modelo no lineal de *Morra* y *Ruggeri*.

En este capítulo, veremos los aspectos más relevantes de cada una de ellas, con el fin de sentar las bases de nuestra meta principal en este trabajo, que consiste en mostrar que la formulación variacional de la teoría de *García-Eolín* y colaboradores [1988], desarrollada por *Vázquez y del Río* [1990], representa un marco teórico más general para tratar algunos procesos de no-equilibrio, en particular, el proceso de conducción del calor en un sólido rígido.

Comenzaremos por establecer los antecedentes inmediatos de estas teorías, con el fin de entender el contexto en el cual, los diversos autores consideran sus planteamientos como extensiones adecuados de la TIL.

### 3.1.-La termostática.

Una mirada retrospectiva del desarrollo de la termodinámica nos muestra tres grandes momentos de este complejo proceso. En el primero de ellos, que comienza en Francia a finales del siglo XVIII, se emprende seriamente el estudio científico de la máquina de vapor, fue además una época de grandes realizaciones debido al empeño de hombres de la talla de *Rumford, Carnot, Mayer, Joule, Thompson, Gibbs* etc. [García-Galín, 1986, 1987; *Holton & Roller*, 1968; *Bernal J D*, 1979]. En esta etapa, la termodinámica se caracteriza por el estudio de los fenómenos en equilibrio razón por la cual la denominaremos *termostática*. En ella se deducen a partir de los experimentos tres hipótesis básicas a partir de las cuales se pueden establecer las relaciones que se dan entre el conjunto de variables que describe a un sistema dado y a partir de esto obtener otros parámetros útiles en el conocimiento del propio sistema [García-Galín, 1970]

La termodinámica clásica trata con los estados de un sistema desde un punto de vista macroscópico y no hace ninguna hipótesis acerca de la estructura de la materia. Para desarrollar un análisis termodinámico es necesario describir los estados de un sistema en términos de las características macroscópicas, las cuales pueden ser medidas directamente. Estas variables son de significación para el sistema como un todo, solamente cuando ellas son uniformes a través de él, es decir, cuando el sistema se encuentra en equilibrio. Así la termodinámica clásica no está relacionada con los detalles de un proceso, sino más bien, con los estados de equilibrio y la relación entre ellos. A partir de la carencia del tiempo como variable, es evidente que éste tipo de análisis es incapaz de considerar los procesos fuera de equilibrio. Los procesos empleados en la termodinámica clásica son procesos idealizados, pensados principalmente

para dar información concerniente con los estados de equilibrio [Krelth, 1973].

Se comprende entonces la necesidad de desarrollar un marco teórico que permita ubicar la gran cantidad de procesos irreversibles que se dan en nuestro entorno.

### 3.2.-La termodinámica irreversible lineal.

El segundo momento de esta evolución de la termodinámica lo constituye el acercamiento al estudio de los procesos irreversibles. Aquí el trabajo de los investigadores se centra en el estudio de las fenómenos de la naturaleza que dependen del tiempo.

La termodinámica de procesos irreversibles en su aproximación lineal tiene sus antecedentes inmediatos en los trabajos de *T. de Donder* y *L. Onsager* y su estructura lógica formal se basa en cuatro postulados; en los dos primeros 1) mediante la postulación de los estados de *equilibrio local* y 2) la generalización de la segunda ley de la *termostática* a procesos fuera de equilibrio, traslada las ideas de ésta a la vecindad de un punto pretendiendo describir los estados del sistema, cuando se está dando la transición de un estado de equilibrio a otro; en los siguientes se postula que: 3) dentro de cierto intervalo de las fuerzas termodinámicas (gradientes de temperatura, de concentración, de potencial eléctrico, etc.) existe una relación lineal entre éstos y los flujos correspondientes (flujo de calor, flujo de masa, flujo de carga eléctrica, etc.). De aquí que si  $\vec{g}$  es un vector columna cuyas componentes son los flujos y  $\vec{F}$  es otro definido por las Fuerzas, entonces

$$\vec{g} = A \vec{F} \quad (3.1)$$

donde A es una matriz cuyos elementos dependen únicamente de las variables

de estado. 4) la matriz A es simétrica; este último planteamiento de la TIL es el famoso principio de reciprocidad que demostró *Onsager* en 1931 y que le valió obtener el premio nobel de física.

Estos cuatro postulados combinados con las ecuaciones que describen la evolución en el tiempo de las variables locales, llamadas ecuaciones de conservación permiten deducir un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, en general no lineales, para las variables de estado. Ellas permiten describir exitosamente fenómenos que se desvían muy poco de las condiciones de equilibrio; teniendo ampliamente documentado en cada caso particular las condiciones experimentales bajo las cuales la descripción del fenómeno es adecuada [García-Colín, 1983; 1990].

Una de las principales objeciones a la TIL es que al retomar los resultados empíricos propuestas por *Fourier*, *Fick*, *Ohm*, etc como base para establecer uno de sus postulados (relación lineal entre fuerzas termodinámicas y flujos), implícitamente está aceptando las inconsistencias físicas asociados a ellos, entre las que se encuentra la velocidad infinita de propagación de las perturbaciones. Hemos visto el caso de la ecuación clásica de conducción de calor, pero idéntico resultado se deduce de las relaciones para los flujos de carga eléctrica, masa, etc.

Para el caso del flujo de calor *Vernotte* [1958] y *Cattanea* [1948, 1958] propusieron que, con el fin de evitar esta dificultad se debía sustituir la ecuación de *Fourier* por una ecuación de relajación para  $q$  dada por

$$-\tau \frac{\partial q}{\partial t} = q + kVT \quad (3.2)$$

donde  $\tau$  es un tiempo finito de relajamiento.

Al sustituir la ecuación de balance de energía para un sólido obtenida en el marco de la TIL [García-Colín, 1990]

$$\rho \frac{dq}{dt} = -\nabla \cdot q \quad (3.3)$$

en la ec. (3.2), se obtiene la llamada *ecuación del telégrafo* [Joseph & Preziosi, 1989]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T \quad (3.4)$$

la cual es de tipo *hiperbólica* y representa una ecuación de ondas atenuadas como resultado de la relajación. Aquí  $a = (k/\tau\gamma)^{1/2}$  es la velocidad de las *ondas térmicas*.

La ecuación del *telégrafo*, introduce un elemento nuevo que debe ser considerado en la investigación del proceso de conducción del calor y que viene representado por la derivada temporal de  $q$ , el cual puede ser descrito como un término inercial [Bubnov, 1976; Joseph & Preziosi, 1989].

Esto significa que en el medio se produce un fenómeno de inercia como respuesta a las perturbaciones externas, de modo tal que cualquier teoría que pretenda ser una extensión de la TIL debe incorporar este concepto de *inercia térmica* para tener la posibilidad de dar una interpretación adecuada de los procesos irreversibles, además de que debe reducirse a las relaciones empíricas que la TIL incorpora en su desarrollo, en el límite apropiado.

Como consecuencia de la introducción de la inercia del medio nuestra perspectiva del fenómeno de conducción de calor en un sólido sufre un cambio radical puesto que ahora debemos considerar el transporte de calor como pulsos de calor los cuales son transmitidos por ondas con velocidad finita. En consecuencia los trabajos de Cattanea y Vernotte marcan el inicio de una nueva etapa en el desarrollo de la Termodinámica.

De manera general, podemos decir que el tercer momento en el desarrollo de la Termodinámica lo marca el reconocimiento de que la TIL es incapaz de dar una respuesta satisfactoria a las investigaciones de la gran mayoría de los fenómenos no lineales que suceden en nuestro entorno,

y por lo tanto, se plantea el reto de construir el marco teórico que permita describir con mayor precisión las correpondientes no linealidades, lo cual hasta la fecha no ha sido realizado completamente.

En las últimas dos décadas se han desarrollado varios formalismos termodinámicos para generalizar tal teoría con el objeto de subsanar sus limitaciones. Estos planteamientos teóricos han alcanzado éxitos en remover algunas de las restricciones inherentes a la TIL.

Aunque el propósito de todas las versiones es muy similar, ellas difieren tanto en contenido físico como en metodología [García-Colín, 1988; Márkus & Sambár, 1989].

### 3.3.-Termodinámica Irreversible Extendida.

La extensión de la TIL desarrollada por García-Colín y sus colaboradores, a pesar de que existen en la literatura una gran variedad de propuestas con el mismo título o parecidos, la llamaremos *Termodinámica Irreversible Extendida*.

Dentro de los procesos que caen fuera del contexto de la TIL el primer problema que se tiene es que la hipótesis de equilibrio local es insatisfactoria, por lo tanto, en la TIE se amplía el espacio de variables termodinámicas. Así el espacio de variables de estado consistirá ahora en la unión de dos subconjuntos, el subconjunto formado por las densidades localmente conservadas y el subconjunto de las variables no conservadas o rápidas.

Debe ser comentado que en general, en tanto que el número y elección de las variables conservadas son dictadas por las leyes de conservación planteadas en el marco de la TIL, el número y elección de las variables rápidas depende muy fuertemente del sistema y de la situación de no equilibrio que se está analizando.

Los fundamentos de la TIE están dados en términos de dos postulados:

1.-Existe una función  $\eta$ , que no sólo depende del conjunto de las densidades localmente conservadas sino también del conjunto de variables rápidas o no conservadas, es decir,

$$\eta = \eta(\{c\}, \{r\}) \quad (3.5)$$

donde por hipótesis  $\eta$  es una función continua y dos veces diferenciable.

Esta función juega el papel de un potencial termodinámico para los estados de no equilibrio y cuya evolución temporal es gobernada por una ecuación de *Gibbs* generalizada:

$$d\eta = \sum \left( \frac{\partial \eta}{\partial c_i} \right) dc_i + \sum \left( \frac{\partial \eta}{\partial r_i} \right) dr_i \quad (3.6)$$

2.- La función  $\eta$  satisface una ecuación de balance dada por

$$\sigma_\eta = \rho \frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\eta \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{J}_\eta$  y  $\sigma_\eta$ , son un vector y un escalar respectivamente y representan el flujo y la producción del potencial termodinámico  $\eta$ . Mientras que  $\mathbf{J}_\eta$  es solamente función de las variables termodinámicas definidas en el espacio extendido,  $\sigma_\eta$  la cual no es necesariamente positiva definida, puede contener parámetros relevantes adicionales para la descripción de los estados de no equilibrio del sistema, puesto que es resultado de la aplicación de operadores espaciales y temporales sobre  $\eta$  y sobre  $\mathbf{J}_\eta$ . Esta suposición de *cerradura* es una característica particular distintiva de la TIE [Rodríguez & López de Hara, 1989].

3.4.-El conductor de calor no lineal en el marco de la TIE. [García-Colín y Rodríguez, 1988].

Consideremos el conductor rígido infinito en reposo y con una densidad constante, el cual está en un estado de no equilibrio descrito

por una variable conservada localmente, la densidad de energía interna  $e(r,t)$  y la variable rápida o variable que relaja  $q(r,t)$ , el flujo de calor.

Veamos entonces cual es el conjunto completo de ecuaciones de evolución temporal para las variables del espacio extendido.

Las ecuaciones de evolución temporal para las variables conservadas son conocidas, por lo que solamente deben ser derivadas aquellas ecuaciones de evolución temporal para las variables rápidas.

De acuerdo con los postulados de la TIE, partiremos de la ecuación de *Tabla extendida* para el potencial termodinámico  $\eta$

$$\frac{d\eta}{dt} = \alpha_1 \frac{de}{dt} + \bar{\alpha}_2 \cdot \frac{dq}{dt} \quad (3.8)$$

donde las  $\alpha_i$  son las ecuaciones de estado

$$\alpha_1 = \frac{\partial \eta}{\partial e}, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{\partial \eta}{\partial q} \quad (3.9)$$

las cuales pueden representarse como funciones de los invariantes escalares y variables del espacio extendido.

Esto es,

$$\alpha_1 = \beta_1(e, q^2, \dots) \quad (3.10)$$

$$\bar{\alpha}_2 = \beta_2(e, q^2, \dots)q \quad (3.11)$$

Desarrollando estas funciones en series de potencias de las variables no conservadas alrededor de un estado de equilibrio local dado por  $q=0$  se tiene

$$\beta_1(e, q^2, \dots) = \beta_1(e) + \left(-\frac{\partial}{\partial q} \beta_1\right)_{e,1} q^2 + \dots \quad (3.12)$$

$$\beta_2(e, q^2, \dots)q = \beta_2(e)q + \left(-\frac{\partial}{\partial q} \beta_2\right)_{e,1} q^2 q + \dots \quad (3.13)$$

El objeto de estos desarrollos es, por un lado, definir la ec. (3.8) y por otro, mediante el truncamiento de las expansiones con algún criterio de orden hacerla manejable, ya que de lo contrario se llega inmediatamente

a ecuaciones altamente no lineales cuyo significado es aún oscuro [García-Colín, 1988].

Una manera conveniente de obtener ecuaciones aproximadas para la evolución temporal de la variable rápida es mediante la asignación de criterio de orden a  $\frac{d\eta}{dt}$ . Hasta el momento se encuentran en la literatura dos criterios, en el primero de ellos, conocido como el criterio del gradiente, las variables conservadas son de orden cero, en tanto que las variables rápidas son de orden uno, lo mismo que los operadores gradiente y divergencia y ningún orden es asignado al operador derivada temporal. En el segundo de ellos, el criterio de las variables rápidas, el orden es asignado de acuerdo a las potencias de las variables rápidas. Comparaciones hechas por *del Río y López de Haro* [1990] usando la ecuación de Boltzmann en el estudio de un gas monoatómico diluido sugieren que el criterio que asigna orden de acuerdo a las potencias de las variables no conservadas debe ser preferido sobre el criterio del gradiente. En consecuencia, este criterio será usado para truncar las expansiones hechas dentro del marco de la TIE.

Recordando que en el equilibrio local

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial e}\right)_{e,1} = \left(\frac{\partial s}{\partial e}\right) = T^{-1} \quad (3.14)$$

donde  $T$  y  $s$  son la temperatura y entropía de equilibrio local respectivamente, podemos escribir la ec. (3.8) como sigue

$$\frac{d\eta}{dt} = (T^{-1} + \left(-\frac{\partial}{\partial q^2}\beta_1\right)_{e,1} q^2) \frac{de}{dt} + \beta_2(e) q \frac{dq}{dt} \quad (3.15)$$

Esta es ahora la versión extendida de la ec. (3.8), en la cual el término  $((\partial\beta_1/\partial q^2)_{e,1} q^2)$  proporciona la corrección de segundo orden en términos de las variables rápidas del coeficiente  $\beta_1(e, q^2, \dots)$ .

Si requerimos que la ec. (3.15) sea una diferencial exacta, entonces la igualdad de las dos derivadas cruzadas implica que el coeficientes  $(\partial\beta_1/\partial q^2)_{e,1} q^2$  esté relacionado con  $\beta_2(e)$  a través de la expresión

$$\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial q^2}\right)_{e,1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial T} \beta_2(e)\right) \frac{dT}{de}. \quad (3.16)$$

Si usamos la ecuación constitutiva de  $= C_v dT$  podemos escribir esta última expresión como

$$\left(\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial q^2}\right)_{e,1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial T} \beta_2(e)\right) C_v^{-1} \quad (3.17)$$

De modo que considerando la ec.(3.17), la expresión de *Entropía extendida* sólo contiene un parámetro indeterminado.

Por otro lado tenemos que  $\eta$ , cumple con la ec.(3.7), por lo que para obtener la producción de este potencial necesitamos conocer además de la ec. (3.15) la divergencia de  $J_\eta$ .

Procediendo de la misma que en párrafos anteriores, tenemos que si  $J_\eta$  es función de los invariantes escalares definidos en el espacio extendido entonces

$$J_\eta = \beta_3(e, q^2, \dots)q. \quad (3.18)$$

Desarrollando la función  $\beta_3$  en series de potencias de las variables no conservadas alrededor del estado de equilibrio local

$$J_\eta = \beta_3(e)q + \left(-\frac{\partial^2 \beta_3}{\partial q^2}\right)_{e,1} q^2 + \dots \quad (3.19)$$

Puesto que  $\eta$  debe reducirse a la *entropía local*  $s$  se debe tener, al más bajo orden:

$$J_\eta = \frac{1}{T} q. \quad (3.20)$$

Por lo tanto la producción del potencial termodinámico  $\eta$  es

$$\sigma_\eta = (\rho T^{-1} + \rho \left(-\frac{\partial^2 \beta_3}{\partial q^2}\right)_{e,1} q^2) \frac{dq}{dt} + \rho \beta_2(e)q \cdot \frac{dq}{dt} + \nabla \cdot (T^{-1}q). \quad (3.21)$$

Sustituyendo en ésta la ecuación de balance de energía y desarrollando la divergencia del último término se obtiene finalmente

$$\sigma_\eta = -\rho \left(\frac{\partial^2 \beta_3}{\partial q^2}\right)_{e,1} q^2 \nabla \cdot q + \rho \beta_2(e)q \cdot \frac{dq}{dt} + q \cdot \nabla T^{-1}. \quad (3.22)$$

Por otro lado  $\sigma_\eta$  es el escalar más general que puede construirse en

el espacio extendido por lo que las operaciones indicadas en el lado izquierdo de la ecuación de balance deben llevar a cantidades definidas en este espacio (hipótesis de cerradura). Matemáticamente esto quiere decir que:

$$\sigma_{\eta} = X_q \cdot q \quad (3.23)$$

Desarrollando  $X_q$  se tiene

$$\sigma_{\eta} = \mu(e, q^2, \dots) q \cdot q \cong \mu(e) q \cdot q. \quad (3.24)$$

Comparando esta última expresión para  $\sigma_{\eta}$  con la obtenida anteriormente, ec. (3.22), se tiene

$$-\rho \left( \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial q^2} \right)_{e,1} q^2 \nabla \cdot q + \rho \beta_2(e) q \frac{dq}{dt} + q \cdot \nabla T^{-1} = \mu(e) q \cdot q. \quad (3.25)$$

Debido a que  $q^2 = q \cdot q$ , de aquí obtenemos la ecuación de evolución temporal para la variable rápida que resulta ser

$$\beta_2(e) T^{-1} \frac{dq}{dt} = \mu(e) q + \left( \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial q^2} \right)_{e,1} q \nabla \cdot q - \nabla T^{-1}. \quad (3.26)$$

Esta ecuación junto con la ecuación de conservación de la energía representan el conjunto de ecuaciones que describen la evolución temporal de las variables extendidas  $e$  y  $q$ .

Si consideramos que el sistema ha alcanzado el estado permanente, y además que no existen inhomogeneidades del flujo de calor entonces el término de la izquierda desaparece lo mismo que  $\nabla \cdot q$ , por lo que la expresión se reduce a

$$\nabla T^{-1} + \mu(e) q = 0, \quad (3.27)$$

ecuación que podemos escribir como

$$q = \frac{1}{\mu(e) T^2} \nabla T. \quad (3.28)$$

que es precisamente la ecuación de Fourier si  $\mu(e) = (k T^2)^{-1}$ .

Para el estado transitorio, considerando nuevamente que no existen inhomogeneidades del flujo se tiene la siguiente expresión

$$\beta_2(e) \frac{dq}{dt} = \frac{1}{T} \nabla T + (kT^2)^{-1} q. \quad (3.29)$$

Si hacemos  $-\tau = \beta_2(e) k T^2$  al cual llamamos tiempo de relajación del flujo de calor, obtenemos la ecuación de Maxwell-Gattaneo-Vernotte

$$-\tau \frac{dq}{dt} = k \nabla T + q, \quad (3.30)$$

que remueve el inconveniente de la velocidad infinita que se obtiene del formalismo de la TIL.

Por lo que la ec. (3.26) puede ser reescrita como

$$-\tau \frac{dq}{dt} = q + a \nabla \cdot q + k \nabla T \quad (3.31)$$

donde  $a = \left( -\frac{\partial}{\partial q} \frac{\beta_1}{e} \right)_{e,1} k T^2$ .

Esta ecuación nos muestra que el cambio en el flujo de calor  $q$  es debido al flujo mismo, a sus inhomogeneidades y al gradiente de temperatura.

En la aproximación cuasistática, cuando

$$-\tau \frac{dq}{dt} \cong 0 \quad (3.32)$$

se obtiene la ecuación constitutiva para el flujo de calor

$$q(1 + a \nabla \cdot q) = -k \nabla T. \quad (3.33)$$

Según García-Colín (1988), en el marco teórico de la TIE quedan aún algunas cuestiones por resolver para hacer mayor el poder de este formalismo. En este sentido, Vázquez y del Río [1990], han propuesto una formulación variacional de esta teoría, la cual pretende continuar con el interés permanente y sistemático en la formulación variacional de los procesos irreversibles que se ha dado en las diferentes etapas del desarrollo de la termodinámica y que abarca ya las teorías que amplían el campo de las aplicaciones de la termodinámica irreversible lineal.

### 3.5.-Teoría ondulatoria de Gyarmati.

De manera semejante a la TIE, el enfoque ondulatorio para la termodinámica propuesto por Gyarmati [1970; 1977] tiene como propósito esencial la descripción de los estados de un sistema termodinámico que caen fuera del marco teórico de la TIL. Para ello también propone ampliar el espacio termodinámico. Aquí, sin embargo, encontramos una diferencia con respecto a la TIE, ya que aunque en la teoría ondulatoria las variables dinámicas adicionales, son también introducidas para describir las desviaciones con respecto de su estado de equilibrio local, sus ecuaciones de evolución temporal no son explícitamente obtenidas ni pretendidas. En vez de ello, se propone derivar ecuaciones de transporte de tipo *hiperbólica* para los campos locales  $\Gamma$  que predicen la propagación de las perturbaciones en el sistema.

El postulado básico de la teoría es que cuando los cambios impuestos sobre las variables dinámicas, las cuales son identificadas como flujos disipativos, son lo suficientemente rápidos, la energía cinética asociada con ellos contribuye apreciablemente a la *entropía* del sistema. En consecuencia la densidad local de  $s$  es dividida en una parte en equilibrio y en una parte cinética, esto es;

$$s(\{\alpha\}, \{J\}) = s_{\text{eq}}(\{\alpha\}) + s_{\text{cin}}(\{J\}). \quad (3.34)$$

En analogía con la TIL, se propone que

$$s(\{\alpha\}, \{J\}) = \sum \alpha_i \Gamma_i + \frac{1}{2} \sum m_{ik} J_i \cdot J_k \quad (3.35)$$

donde  $\alpha_i$  son las coordenadas generalizadas,  $\Gamma_i$  las fuerzas termostáticas conjugadas generalizadas,  $J_i$  los flujos y  $m_{ik}$  una matriz simétrica.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.35) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} s(\{\alpha\}, \{J\}) = \sum \Gamma_i \frac{\partial}{\partial t} \alpha_i + \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_i + \sum m_{ik} J_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_k, \quad (3.36)$$

con el segundo término del lado derecho igual a cero, como es derivado consistentemente por Gyarmati.

Por otro lado, tenemos que para todas las teorías de tipo local las ecuaciones de balance pueden ser formuladas como

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \alpha_1 + \nabla \cdot J_1^0 = \nu_1 \quad (3.37)$$

donde  $J_1^0 = J_1 + \rho \alpha_1 v$ ,  $v$  la velocidad del fluido, y  $\nu_1$  las fuentes de calor. Luego si consideramos un sistema disipativo sin fuentes de calor y libre de movimientos convectivos, la ecuación (3.37) se reduce a

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \alpha_1 + \nabla \cdot J_1 = 0 \quad (3.38)$$

Por consiguiente si sustituimos (3.38) en (3.36) se tiene la ecuación de balance para el potencial  $s$ , esto es

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} s(\{\alpha\}, \{J\}) + \sum \operatorname{div}(\Gamma_1 J_1) &= \sum J_1 \cdot (\nabla \Gamma_1 + \sum m_{ik} \frac{\partial}{\partial t} J_k) \\ &= \sum J_1 \cdot \mathcal{E}_1 = \sigma \geq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde se han definido las *fuerzas termodinámicas generalizadas*

$$\mathcal{E}_1 = (\nabla \Gamma_1 + \sum m_{ik} J_k \frac{\partial}{\partial t} J_k) \quad (3.40)$$

que incorporan los efectos inerciales y disipativos.

Si suponemos una relación *cuasilineal* entre estas fuerzas y los flujos dada por

$$J_1 = \sum L_{ik} \mathcal{E}_k \quad (3.41)$$

la producción de *entropía*  $\sigma$  puede ser escrita como

$$\sigma = E^t J = E^t L E \quad (3.42)$$

donde  $E^t$  y  $J$  son matrices formadas con los flujos y las fuerzas y  $L$  la matriz de transformación de *Onsager*.

Si introducimos las matrices no negativas

$$\tau_{ik}^* = - \sum L_{il} m_{lk} \quad (3.43)$$

entonces podemos poner las ecuaciones constitutivas (3.41) como sigue ,

$$J_i = \sum L_{ik} \nabla \Gamma_k - \sum \tau_{ik}^* \frac{\partial}{\partial t} J_k \quad (3.44)$$

Esta ecuación generaliza la ecuación de *MEV* y conduce a un conjunto de ecuaciones *hiperbólicas* de transporte, que representan el resultado más importante de esta teoría.

Esta ecuación es de la forma

$$\sum (\tau_{ji}^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma_i + \delta_{ji} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_i - k_{ik}^* \nabla^2 \Gamma_k) = 0. \quad (3.45)$$

Para el caso del sólido isotrópico esta ecuación se reduce a la ecuación del *telegrafo* [Slyarmati, 1977], la cual como ya hemos visto, describe la propagación de ondas térmicas en el sólido.

### 3.6.-Planteamientos integrales para el flujo de calor.

Existen otros planteamientos fenomenológicos [Surtin & Pipkin, 1968; Nunziata, 1971] en los cuales el flujo de calor es determinado mediante una integral sobre la historia del gradiente de temperatura de la forma

$$q = - \int_{-\infty}^t \frac{k}{\tau} Q(t-t') \nabla T(r, t') dt', \quad (3.46)$$

donde  $Q(s)$  es una función de relajación, positiva, decreciente que tiende a cero cuando  $s \rightarrow \infty$  y acotada en el intervalo  $[0, \infty)$ , comúnmente conocida como el *Kernel* del flujo de calor.

Una diversidad de modelos constitutivos para la conducción del calor surgen de la consideración de formas diferentes para  $Q(s)$ . En particular si  $Q(s) = k\delta(s)$ , donde  $\delta(s)$  es la función *delta de Dirac*, se obtiene  $q = -k\nabla T$ , el modelo clásico de *Fourier*.

La expresión (3.47) no es más que generalización de la forma integral de la ecuación de *Maxwell-Gattaneo-Vernotte* [Joseph y Preziosi, 1989]

$$q = - \int_{-\infty}^t \frac{k}{\tau} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \nabla T(r, t') dt'. \quad (3.47)$$

Usando la fórmula de Leibnitz [Arfken, 1981] para la derivada de una integral

$$\frac{d}{dt} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(\alpha, t') dt' = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} (f(\alpha, t')) dt' + f(h(\alpha), \alpha) \frac{d}{dt} (h(\alpha)) - f(g(\alpha), \alpha) \frac{d}{dt} (g(\alpha)) \quad (3.48)$$

donde  $f(t, t') = \exp\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \nabla T(r, t')$ ,  $h(t) = t$  y  $g(t) = -\infty$ , se muestra que la ec. (3.48) se transforma en la ecuación diferencial de MGV para el flujo de calor.

Lo importante para nuestro trabajo es que la formulación integral de las ondas térmicas es equivalente al planteamiento diferencial introducido por Cattanea [Joseph & Preziosi, 1989].

### 3.7.-El modelo no lineal de Morra y Ruggeri.

Otro modelo para la conducción del calor en sólidos, pero válido exclusivamente para dieléctricos anisotrópicos a baja temperatura es propuesto por Morra y Ruggeri [1988], el cual consideran corrige ciertos defectos de algunos modelos que surgen como generalizaciones de la ecuación de MGV. Ellos proponen que el flujo en el sólido debe regirse por la ecuación

$$\frac{d}{dt} (\alpha q) + \nabla \cdot (\gamma I + \beta q q) = -\nu q \quad (3.49)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  son funciones escalares y  $I$  el tensor unitario.

Esta ecuación se reduce a la ecuación de MGV cuando  $\beta=0$ ,  $\alpha=\text{cte.}$  y  $\gamma$  y  $\nu$  son funciones de la temperatura. Ellos muestran que su modelo ajusta los datos experimentales sobre la rapidez del *segunda onda* en sólidos dieléctricos a baja temperatura.

De lo anterior observamos que los modelos anteriores tienen las siguientes limitantes: 1) son modelos semiempíricos, Morra y Ruggeri

[1988], 2) no están sustentados en una teoría termodinámica, [Surtin & Pipkin, 1968; Nunziata, 1971] y 3) deducen ecuaciones aproximadas para las ondas térmicas [García-Colín, 1988; Syarmati, 1977].

En el siguiente capítulo exponemos la formulación variacional de la TIE, a partir de la cual trataremos de remover las limitantes arriba mencionadas.

## CAPITULO IV

### FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LA TERMODINAMICA IRREVERSIBLE

#### EXTENDIDA.

Los principios variacionales que conducen a las ecuaciones de la física matemática han sido durante mucho tiempo un tema de interés para numerosos investigadores.

Una de las aplicaciones más importantes en el marco teórico de los principios variacionales se presentó cuando *Hamilton*, dentro del estudio del movimiento de la partícula clásica, mostró que estos principios son de gran significación teórica para una derivación sistemática y exacta de las ecuaciones de evolución temporal de las variables del sistema.

Esta técnica pronto fué trasladada al estudio del movimiento de los fluidos, comenzando una tradición que se extiende hasta nuestros días y que abarca ya las teorías que amplían el campo de aplicaciones de la TIL.

Debido a la importancia de los principios variacionales mencionada en las líneas precedentes y a que seguiremos el mismo planteamiento en términos generales para la formulación variacional de la TIE es que comenzaremos éste capítulo estableciendo los fundamentos [*Arfken*, 1981] con los cuales son tratados los problemas de variaciones.

#### 4.1.-Los principios variacionales.

En esta descripción alternativa el objetivo es determinar los valores extremos de una cantidad que aparece en la forma de una integral, por ejemplo; sea  $\mathcal{L}$  la cantidad que adquiere un extremo y que viene dado por la integral

$$\mathcal{L} = \int f(x, y, y_x) dx \quad (4.1)$$

aquí  $y$  es desconocida y se trata de encontrar esta función de modo que el valor de  $\mathcal{L}$  sea un extremo, en un intervalo de la variable  $x$ . El subíndice indica derivada con respecto a  $x$ .

En la búsqueda de  $y$  se utiliza una función de prueba  $w(x)$  la cual proporciona un valor que se aproxima al valor extremo de  $\mathcal{L}$ , la diferencia entre la función de prueba  $w(x)$  y  $y(x)$  para un  $x$  cualquiera se denomina la *variación* de  $y$  la denotamos como  $\delta y$ . Esta diferencia se da en términos de una nueva función arbitraria  $v(x)$ , la cual debe ser diferenciable y anularse en los límites del intervalo de  $x$  que se esté considerando. Se introduce además un factor de escala  $\alpha$  para proporcionar la magnitud de la variación, el cual desaparecerá durante el proceso.

Redefiniendo las funciones  $w(x)$  y  $y(x)$  en términos del parámetro  $\alpha$  se tiene

$$w(x) = y(x, \alpha) \quad \text{y} \quad y(x, 0) = y(x), \quad (4.2)$$

luego, la diferencia entre las funciones puede ser expresada como

$$y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha v(x). \quad (4.3)$$

También en términos de este parámetro la funcional  $\mathcal{L}$  es

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int f(x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha)) dx \quad (4.4)$$

y la condición para que  $\mathcal{L}(\alpha)$  sea un extremo es que

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (4.5)$$

De aquí se sigue que

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right) dx \quad (4.6)$$

y usando (4.3) esta expresión se transforma en:

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial y} v(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{dv}{dx} \right) dx. \quad (4.7)$$

Integrando el segundo término por partes

$$\int \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{dv}{dx} \right) dx = v(x) \frac{\partial f}{\partial y_x} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) dx \quad (4.8)$$

y usando el hecho de que la función  $v(x)$  se anula en los límites del intervalo se tiene que la parte integrada desaparece, por lo que la expresión (4.7) queda como

$$\int \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) v(x) dx = 0. \quad (4.9)$$

Puesto que  $v(x)$  es arbitraria la única manera en que la integral sea cero es que el integrando sea idénticamente cero.

La condición para que la funcional  $\mathcal{L}$  sea un extremo es precisamente una ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0 \quad (4.10)$$

la cual se conoce como *ecuación de Euler*, y en el contexto de la mecánica lagrangiana como *ecuación de Euler-Lagrange*.

El uso de de los principios variacionales en la física tomaron carta de naturalidad cuando se demostró que el *principio de Hamilton* [Goldstein, 1980] es una condición necesaria y suficiente para derivar las ecuaciones de movimiento de una partícula. Este principio plantea que cuando el integrando de la funcional es un lagrangiano el movimiento es tal que la funcional tiene un valor estacionario.

Las ecuaciones de *Euler-Lagrange* resultantes son de la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (4.11)$$

generalmente conocidas como ecuaciones lagrangianas del movimiento, las cuales resultan ser equivalentes a las ecuaciones de *Newton* en la descripción de la evolución temporal de los sistemas de la mecánica clásica, pero, con la ventaja de que son ecuaciones que implican solamente cantidades escalares. Además, éstas ecuaciones se adaptan mucho mejor al tratamiento de los sistemas complejos y por extensión a otras ramas de la física, tal como la termodinámica de procesos irreversibles que es nuestro objeto de estudio.

#### 4.2.-Principios variacionales en la termodinámica irreversible.

Los logros de este planteamiento alternativo de la mecánica clásica pronto indujeron a la formulación variacional del movimiento de los fluidos, la cual estuvo limitada inicialmente a los fluidos ideales y dió origen a dos líneas caracterizadas por la forma de establecer el principio: la de Lagrange y la de Euler. En la primera las variaciones se realizan sobre las coordenadas espaciales que describen el fluido y en la segunda sobre las variables de campo del sistema: velocidad, densidad, etc. [Vázquez, 1990].

Al intentar hacer una caracterización de los fenómenos de transporte que incluyan efectos disipativos, mediante principios variacionales clásicos, se encontró que tales problemas no admitían tal formulación [Finlayson, 1972]; esto dió como resultado un conjunto de enfoques conocidos como principios variacionales no clásicos, los cuales tienen sus raíces en la formulación de *Onsager* de la ley de *Faurier* de conducción del

calor.

Una cuestión de importancia fundamental en el marco de la aplicación de los principios variacionales es saber cuándo determinado problema admite tal formulación.

Un tratamiento sistemático de esto se basa en las derivadas de Fréchet [Finlayson, 1972], las cuales determinan las condiciones para que el conjunto de ecuaciones de evolución temporal de las variables que describen al sistema sean deducidas de un principio variacional.

Con el fin de comprender más claramente el análisis basado en las derivadas de Fréchet, haremos una analogía con las condiciones que se deben cumplir para que un campo vectorial sea derivado de un campo escalar.

Consideremos la integral del campo vectorial conservativo  $\vec{v}$ :

$$\int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{x} \quad (4.12)$$

a lo largo de las trayectorias

$$\vec{x} \longrightarrow x + \epsilon \vec{\phi} \longrightarrow \vec{x} + \epsilon \vec{\phi} + \nu \vec{\psi}, \quad (4.13)$$

$$\vec{x} \longrightarrow x + \nu \vec{\psi} \longrightarrow \vec{x} + \epsilon \vec{\phi} + \nu \vec{\psi}, \quad (4.14)$$

donde  $\epsilon \vec{\phi}$  y  $\nu \vec{\psi}$  son vectores infinitesimales. De acuerdo con esto y teniendo en cuenta que el integrando debe ser el mismo para las dos trayectorias se tiene lo siguiente

$$\vec{v}(\vec{x}) \cdot \epsilon \vec{\phi} + \vec{v}(x + \epsilon \vec{\phi}) \cdot \nu \vec{\psi} = \vec{v}(\vec{x}) \cdot \nu \vec{\psi} + \vec{v}(\vec{x} + \nu \vec{\psi}) \cdot \epsilon \vec{\phi} \quad (4.15)$$

el cual es equivalente a

$$\frac{\vec{v}(\vec{x} + \epsilon \vec{\phi}) - \vec{v}(\vec{x})}{\epsilon} \cdot \vec{\psi} = \frac{\vec{v}(\vec{x} + \nu \vec{\psi}) - \vec{v}(\vec{x})}{\nu} \cdot \vec{\phi}. \quad (4.16)$$

En términos de coordenadas cartesianas y utilizando el concepto de

derivada direccional [Fulks, 1986] ésto puede ser escrito como

$$\sum \psi_k \frac{\partial v}{\partial \alpha_1^k} \phi_i = \sum \phi_k \frac{\partial v}{\partial \alpha_1^k} \psi_i. \quad (4.17)$$

Esta expresión representa una condición equivalente para obtener el campo vectorial  $v$  como el gradiente de un potencial.

En términos de lo anterior, podemos llevar esta línea de pensamiento hacia la formulación variacional de algunos problemas de interés en la física, considerando que las ecuaciones de *Euler* pueden ser obtenidas como el gradiente de una funcional, entonces esperaríamos que no cualquier ecuación diferencial sea derivable de una funcional como no cualquier campo vectorial es derivable de un potencial.

El soporte matemático riguroso de este planteamiento fué hecho por *Vainberg* [1964], donde se parte de la definición del gradiente de una funcional y de la derivada de un operador diferencial [Finlayson, 1972].

Aquí seguiremos cercanamente este procedimiento y por brevedad trataremos una sola ecuación diferencial, pudiéndose extender a un sistema de ecuaciones.

Consideremos la ecuación diferencial, no necesariamente lineal, tal que

$$N(u) = 0. \quad (4.18)$$

Definamos la derivada de este operador en la dirección  $\phi$  como

$$N'_u \phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(u + \epsilon \phi) - N(u)}{\epsilon} = \left. \frac{\partial N(u + \epsilon \phi)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (4.19)$$

$N'_u \phi$  es llamado la *diferencial de Fréchet* del operador en la dirección  $\phi$  en tanto que  $N'_u$  es simplemente llamado la *derivada de Fréchet* del operador. El subíndice  $u$  indica que la diferenciación del operador es hecha con respecto al argumento  $u$ .

El gradiente de una funcional se define de manera similar.

Consideremos una funcional dada por

$$F(u) = \int L(u)dv. \quad (4.20)$$

La diferencial de *Fréchet* en la dirección  $\phi$  está dada por

$$\begin{aligned} F'_u \phi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(u + \epsilon\phi) - F(u)}{\epsilon} \\ &= \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(u + \epsilon\phi) - L(u)}{\epsilon} = \int L'_u \phi \, dv, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $L'_u \phi$  depende tanto de  $u$  como de  $\phi$ .

Integrando por partes para remover el operador derivada sobre  $\phi$  se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\epsilon} = \int L'_u \phi \, dv = \int \phi N(u) \, dv + \text{términos de frontera} \quad (4.22)$$

donde el operador  $N(u)$  es el gradiente de la funcional  $F(u)$ .

De la misma manera que para el caso de campos vectoriales, debemos probar que si el operador  $N(u)$  es el gradiente de una funcional, entonces la integral de la ecuación anterior es independiente de la trayectoria de integración.

Consideremos la integral

$$\int \phi N(u) \, dv \quad (4.23)$$

a lo largo de las trayectorias

$$u \longrightarrow u + \epsilon\phi \longrightarrow u + \epsilon\phi + \nu\psi$$

$$u \longrightarrow u + \nu\psi \longrightarrow u + \epsilon\phi + \nu\psi$$

donde  $\epsilon\phi$  y  $\nu\psi$  representan cambios infinitesimales.

De acuerdo con esto, si la integral es independiente de la trayectoria, entonces se debe cumplir

$$\int N(u)\epsilon\phi \, dv + \int N(u+\epsilon\phi)\nu\psi \, dv = \int N(u)\nu\psi \, dv + \int N(u+\nu\psi)\epsilon\phi \, dv, \quad (4.24)$$

expresión que puede también ser dada como

$$\int \frac{N(u+\epsilon\phi) - N(u)}{\epsilon} \psi dv = \int \frac{N(u+\nu\phi) - N(u)}{\nu} \phi dv. \quad (4.25)$$

En el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $\nu \rightarrow 0$  esta expresión se reduce a

$$\int \psi N'_u \phi dv = \int \phi N'_u \psi dv \quad (4.26)$$

Esta es la extensión de la ec. (4.17) y expresa el hecho de que el operador  $N'_u$  es simétrico y por tanto que  $N_u$  es el gradiente de una funcional, tal como en el caso de campos vectoriales. Esto último como ya lo hemos mencionado se sigue del teorema dado por *Vainberg* en 1964.

En resumen, la cuestión de la existencia de un principio variacional del tipo clásico para un operador dado depende de que el operador tenga una diferencial de *Fréchet* simétrica, ec. (4.26).

Veamos ahora la forma que toma esta condición de simetría cuando el operador diferencial es de la forma

$$f^l(u, u_{,j}, u_{,jk}) = 0, \quad l=1, \quad (4.27)$$

donde  $u_{,j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$  y  $u_{,jk} = \frac{\partial u}{\partial x_{jk}}$ , suponiendo  $u = u(x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

A partir de la definición para la diferencial de *Fréchet* ec. (4.20) se tiene

$$\begin{aligned} N'_u \phi &= \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(u + \epsilon\phi, u_{,j} + \epsilon\phi_{,j}, u_{,jk} + \epsilon\phi_{,jk}) \right)_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \phi + \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \phi_{,j} + \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \phi_{,jk}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Llevando esto a la primera integral de la condición de simetría e integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}
\int \psi N'_u \phi dv &= \int \psi \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \nabla_j + \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \nabla_j \nabla_k \right] \phi dv \\
&= \int \phi \left\{ \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \nabla_j \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \right) + \nabla_j \nabla_k \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \right) \right) \right] \psi \right. \\
&\quad \left. + \left[ - \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} + 2 \nabla_k \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \right) \right] \nabla_j \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \nabla_j \nabla_k \psi \right\}. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Esta expresión debe cumplir con el requerimiento de simetría con

$$N'_u \psi = \frac{\partial f}{\partial u} \psi + \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \psi_{,j} + \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \psi_{,jk}. \tag{4.30}$$

De acuerdo con la ec. (4.30) esta condición de simetría toma la forma

$$\int \psi N'_u \phi dv = \int \phi \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \nabla_j + \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \nabla_j \nabla_k \right] \psi dv. \tag{4.31}$$

Si esto es válido para funciones arbitrarias  $\phi$  y  $\psi$  entonces una identificación de términos conduce a

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial f}{\partial u} + \nabla_j \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \right) + \nabla_j \nabla_k \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \right) \right) &= \frac{\partial f}{\partial u} \\
- \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} + 2 \nabla_k \left( \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} \right) &= \frac{\partial f}{\partial u_{,j}} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} = \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a

$$\frac{\partial f}{\partial u_{,j}} - \nabla_k \frac{\partial f}{\partial u_{,jk}} = 0, \tag{4.33}$$

ecuación que representa la condición para que la ec. (4.27) sea derivable de una funcional y por tanto se exista un principio variacional para ella.

Mediante un procedimiento similar se tiene que si el operador

representa un conjunto de ecuaciones diferenciales, esto es,

$$f^1(u, u_{,j}, u_{,jk}) = 0, \quad (4.34)$$

y  $u_a$  representa también un conjunto de funciones de  $n$ -parámetros

$$u_a = u_a(x_1, \dots, x_n), \quad (4.35)$$

la condición de simetría toma la forma [Finlayson, 1972]

$$\frac{\partial f^1}{\partial u_{a,jk}} = \frac{\partial f^a}{\partial u_{1,jk}} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial u_{a,j}} = - \frac{\partial f^a}{\partial u_{1,j}} + 2 \nabla_k \left( \frac{\partial f^a}{\partial u_{1,jk}} \right) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial u_a} = \frac{\partial f^a}{\partial u_1} - \nabla_j \left( \frac{\partial f^a}{\partial u_{1,j}} \right) + \nabla_j \nabla_k \left( \frac{\partial f^a}{\partial u_{1,jk}} \right) \quad (4.38)$$

donde  $f^1 = 0$  son las ecuaciones diferenciales de  $N(u) = 0$ , los índices latinos van de 1 a 4 y el subíndice coma denota diferenciación parcial, como se ha mencionado antes.

#### 4.3.-Inexistencia de un principio variacional clásico para el conductor rígido de calor [Vázquez y del Río, 1990].

Mostremos ahora este procedimiento para el caso particular de un conductor de calor rígido, infinito, en reposo y con densidad constante  $\rho(r,t)$ .

Para este sistema el potencial termodinámico  $\eta$  dependerá de una cantidad localmente conservada, la energía interna  $e$ , y una cantidad no conservada, el flujo de calor  $q$ , es decir:

$$\eta = \eta(e, q). \quad (4.39)$$

Sabemos que dentro del marco de la TIE, la ecuación de evolución

temporal a primer orden para el flujo de calor esta dada por la ecuación de *Maxwell-Gattanea-Vernotte*

$$-\tau \frac{dq}{dt} = kVT + q. \quad (4.40)$$

Además la ecuación para la variable conservada es simplemente la ecuación de balance de energía

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot q = 0. \quad (4.41)$$

Para verificar si estas ecuaciones satisfacen las condiciones de simetría, introduzcamos un espacio vectorial de cuatro dimensiones en el cual los cuadvectores tendrán como primeras coordenadas a las componentes de  $q$  y a la temperatura como la cuarta componente, esto es:

$$\Gamma = (W_1, W_2, W_3, W_4) = (q, T). \quad (4.42)$$

De acuerdo con esto las ecuaciones que describen los estados del sistema se transforman en:

$$f^\alpha = \tau W_{\alpha,4} + W_{4,\alpha} + W_\alpha = 0 \quad (4.43)$$

$$f^4 = \rho cv W_{4,4} + W_{\alpha,\alpha} = 0 \quad (4.44)$$

Donde se ha utilizado la igualdad  $\frac{d}{dt} W_{1,4} = W_{1,4}$ , los indices griegos corren de 1 a 3.

Consecuentemente, si las ecs. (4.43) y (4.44), o bien ecs. (4.40) y (4.41), satisfacen las condiciones de simetría (4.36-4.38), entonces existe un principio variacional clásico para ellas.

Las derivadas para la ec. (4.36) son

$$\frac{\partial f^1}{\partial W_{s,jk}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f^s}{\partial W_{1,jk}} = 0 \quad (4.45)$$

puesto que  $f^1$  no contiene términos de segundo orden, de modo que la primera condición se satisface.

La segunda ecuación en (4.45) reduce las ecs. (4.37) y (4.38) al

eliminar el segundo y tercer término, respectivamente, de estas ecuaciones.

La ec. (4.37) se reduce a

$$\frac{\partial f^1}{\partial W_{s,j}} = - \frac{\partial f^s}{\partial W_{1,j}} \quad (4.46)$$

Las derivadas para  $l=1,2,3$  son

$$\frac{\partial f^1}{\partial W_{s,j}} = \begin{cases} \tau \delta_{1s} \delta_{j4} & \text{si } s=1,2,3. \\ k \delta_{1j} & \text{si } s=4. \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial W_{1,j}} = \begin{cases} \tau \delta_{1s} \delta_{j4} & \text{si } s=1,2,3. \\ \delta_{1j} & \text{si } s=4. \end{cases} \quad (4.48)$$

Por consiguiente la ec. (4.37) no se satisface cuando  $s=4$ .

Las derivadas restantes para  $l=4$  son:

$$\frac{\partial f^1}{\partial W_{s,j}} = \begin{cases} \delta_{sj} & \text{si } s=1,2,3. \\ \rho c v \delta_{j4} & \text{si } s=4. \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial W_{1,j}} = \begin{cases} k \delta_{sj} & \text{si } s=1,2,3. \\ \rho c v \delta_{1j} & \text{si } s=4. \end{cases} \quad (4.50)$$

y la ec. (4.37) de nuevo no se satisface.

La ec. (4.38) se reduce a

$$\frac{\partial f^1}{\partial u_s} = \frac{\partial f^s}{\partial u_1} \quad (4.51)$$

ya que el tercer término del lado derecho es cero y  $\frac{\partial f^s}{\partial u_{1,j}}$  es una constante.

Por último se tiene que la ec. (4.38) se satisface para todos los índices.

De este modo se tiene que por no satisfacerse la condición (4.37) no existe un principio variacional clásico para las ecuaciones de evolución temporal de un conductor rígido de calor para las condiciones impuestas en

el marco de la TIE. Se justifica así la formulación de principios no clásicos para el sistema que estudiamos en este trabajo.

#### 4.4.-Formulación variacional dentro del marco de la TIE para el conductor rígido de calor.

En vista de que el problema de conducción de calor en un conductor rígido no lo podemos tratar mediante un principio variacional clásico, en esta parte se expone un principio variacional restringido [Vázquez y del Río, 1990] que describe los estados de no equilibrio dentro del marco de la termodinámica irreversible extendida para éste conductor en las condiciones descritas en la sección anterior.

Se ha encontrado [del Río, 1991; del Río et al. 1991] que bajo variaciones de la parte no conservada del espacio termodinámico extendido, la funcional

$$\mathcal{L} = \int ( \rho \frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} - \sigma_{\eta} ) dv, \quad (4.52)$$

donde  $\mathbf{J}$  y  $\sigma_{\eta}$  son el flujo y la producción del potencial termodinámico  $\eta$  respectivamente, conduce a ecuaciones de *Euler-Lagrange*, que describen completamente la evolución temporal de las variables no conservadas.

En este proceso se usan como condiciones subsidiarias a las ecuaciones de balance del sistema, y las cantidades desconocidas se generan con los teoremas de representación de *Truesdell y Noll* [1965].

Como se ha apuntado antes, el potencial termodinámico generalizado  $\eta$  es de la forma  $\eta = \eta(e, q)$  la cual lleva a la ecuación de Gibbs

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = \alpha_1 \frac{de}{dt} + \bar{\alpha}_2 \frac{dq}{dt} \quad (4.53)$$

donde las  $\alpha$ 's son las ecuaciones de estado

$$\alpha_1 = \rho \frac{\partial \eta}{\partial e}, \quad \bar{\alpha}_2 = \rho \frac{\partial \eta}{\partial q} \quad (4.54)$$

En términos de los teoremas de representación las cantidades  $\alpha_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\sigma$  y  $J$  están dados por:

$$\alpha_1 = \rho \beta_1(e, g) \quad (4.55)$$

$$\bar{\alpha}_2 = \beta_2(e, g)q \quad (4.56)$$

$$\sigma_\eta = \beta_3(e, g) \quad (4.57)$$

$$J = \beta_4(e, g)q \quad (4.58)$$

donde  $g = q \cdot q$  es el único invariante escalar del espacio y las  $\beta_i$  son funciones escalares. Por conveniencia en (4.55) se ha dejado a  $\rho$  fuera de la función  $\beta_1$ .

Llevando (4.55) y (4.56) a la ec. (4.53) se obtiene

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = \beta_1 \rho \frac{de}{dt} + \beta_2 q \cdot \frac{dq}{dt} \quad (4.59)$$

Sustituyendo en ésta la ecuación de balance de energía resulta

$$\rho \frac{d\eta}{dt} = -\beta_1 \nabla \cdot q + \beta_2 q \cdot \frac{dq}{dt} \quad (4.60)$$

Si sustituimos las ecuaciones (4.57), (4.58) y (4.60) en la funcional (4.52) se tiene:

$$\int (-\beta_1 \nabla \cdot q + \beta_2 q \cdot \frac{dq}{dt} + \nabla \cdot (\beta_4 q) - \beta_3) dv. \quad (4.61)$$

Simplificando se obtiene:

$$\int (\beta_4 - \beta_1) \nabla \cdot q + \beta_2 q \cdot \frac{dq}{dt} + q \cdot \nabla \beta_4 - \beta_3) dv. \quad (4.62)$$

Lo que sigue ahora es investigar las consecuencias para la funcional cuando la componente no conservada del espacio termodinámico extendido es ligeramente variada. Las variaciones que se llevan a cabo son independientes del espacio-tiempo y esto implica que las derivadas temporales y gradientes permanecen fijos durante el proceso de variación,

es decir, estas variaciones restringidas toman lugar en el espacio termodinámico exclusivamente.

Entonces la variación de la funcional  $\mathcal{L}$  es

$$\delta' \mathcal{L} = \delta' \int (\beta_4 - \beta_1) \nabla \cdot \mathbf{q} + \beta_2 \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q} \cdot \nabla \beta_4 - \beta_3) dv \quad (4.63)$$

(donde el superíndice indica el sentido restringido de la variación).

Puesto que las variaciones restringidas toman lugar en el espacio termodinámico exclusivamente, podemos intercambiar el orden de los operadores que actúan sobre el integrando conduciéndonos a

$$\delta' \mathcal{L} = \int \delta' ((\beta_4 - \beta_1) \nabla \cdot \mathbf{q} + \beta_2 \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q} \cdot \nabla \beta_4 - \beta_3) dv \quad (4.64)$$

$$\delta' \mathcal{L} = \int (\nabla \cdot \mathbf{q} \delta' (\beta_4 - \beta_1) + (\delta' \beta_2 \mathbf{q}) \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + (\delta' \mathbf{q}) \cdot \nabla \beta_4 - \delta' \beta_3) dv \quad (4.65)$$

Como las funciones  $\beta_i$  son funciones de la temperatura y del invariante  $g = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$  la variación de la funcional se transforma en

$$\delta' \mathcal{L} = \int (\nabla \cdot \mathbf{q} (2\mathbf{q} \frac{\partial \beta}{\partial g} \delta' g) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial g} 2\mathbf{q} \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \beta_2 \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \nabla \beta_4 - 2\mathbf{q} \frac{\partial \beta}{\partial g} \delta' g) dv \quad (4.66)$$

aquí  $\beta_5 = \beta_4 - \beta_1$ .

Igualando la variación restringida  $\delta'$  de la funcional a cero encontramos la ecuación de evolución de la variable no conservada

$$2\mathbf{q} \frac{\partial \beta}{\partial g} \nabla \cdot \mathbf{q} + 2 \frac{\partial \beta}{\partial g} 2\mathbf{q} \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \beta_2 \frac{d\mathbf{q}}{dt} - 2\mathbf{q} \frac{\partial \beta}{\partial g} + \nabla \beta_4 = 0 \quad (4.67)$$

Esta es la forma general de la ecuación no aproximada para describir la evolución temporal del flujo de calor en el conductor rígido infinito, en el marco de la TIE y junto con la ecuación de balance para la energía describen completamente el transporte de calor en este sistema. Este es un resultado que no se ha encontrado en la literatura.

Con el fin de hacer un análisis de los términos de esta ecuación la

reescribiremos como

$$-\left\{2\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial g}\right)qq + \beta_2 I\right\} \cdot \frac{dq}{dt} = 2\left(\frac{\partial \beta_5}{\partial g}\right)(\nabla \cdot q)q - 2q\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial g}\right) + \nabla \beta_4, \quad (4.68)$$

donde I es el tensor unitario de segundo orden.

De este modo tenemos que

$$-\left\{2\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial g}\right)qq + \beta_2 I\right\} \quad (4.69)$$

es un tensor de tiempos de relajación, que nos indica que el flujo relaja de diferente manera en las diferentes direcciones. Esto significa que la velocidad de propagación de las perturbaciones en el medio es fuertemente dependiente de la anisotropía introducida por el flujo.

Por otro lado, esta ecuación muestra que el cambio temporal del flujo depende de varios factores; ellos son,

1) las inhomogeneidades espaciales del flujo

$$2\left(\frac{\partial \beta_5}{\partial g}\right)(\nabla \cdot q)q \quad (4.70)$$

2) el flujo mismo

$$-2q\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial g}\right) \quad (4.71)$$

además este término es particularmente importante, puesto que nos indica que si  $\frac{\partial \beta_3}{\partial g} > 0$  esta ecuación es precisamente una ecuación de relajación,

3) las inhomogeneidades espaciales de todas las variables termodinámicas

$$\nabla \beta_4 \quad (4.72)$$

esto es así, ya que  $\beta$  depende de T y del invariante escalar.

En este punto debe resaltarse que el resultado

$$\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial g}\right) > 0 \quad (4.73)$$

representa una condición adicional sobre la producción del potencial

termodinámico  $\eta$  ( $\sigma_\eta = \beta_3$ ), pues hasta ahora en la literatura se pedía como condición sobre  $\beta_3$  que su integral sobre el volumen del sistema fuera mayor que cero, es decir,

$$\int_V \beta_3 dv > 0. \quad (4.74)$$

Con el objeto de mostrar que bajo las condiciones adecuadas la ecuación de evolución temporal para  $q$ , ec. (4.68) se reduce a la ecuación de MEV, hagamos lo siguiente: por una parte, consideremos que el sistema ha alcanzado el estado de flujo estable, entonces el término de la izquierda en la ec (4.68) desaparece. Si además consideramos que  $\nabla \cdot q = 0$ , la ecuación se reduce a

$$-2 \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial g} \right) q + \nabla \beta_4 = 0. \quad (4.75)$$

En compatibilidad con TIL pongamos  $\beta$  igual a  $T^{-1}$ ,

$$\nabla T^{-1} - 2 \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial g} \right) q = 0, \quad (4.76)$$

ecuación que podemos escribir como

$$q = -\frac{1}{\mu T^2} \nabla T. \quad (4.77)$$

que es precisamente la ecuación de Fourier si  $2 \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial g} \right) = \mu = (k T^2)^{-1}$ .

Por otra parte, para el estado transitorio, considerando nuevamente que no existen inhomogeneidades espaciales de  $q$  y que relaja de la misma manera en todas direcciones, se tiene la siguiente expresión

$$\beta \frac{dq}{2dt} = \frac{1}{T} 2 \nabla T + (k T^2)^{-1} q. \quad (4.78)$$

Si hacemos  $-\tau = \beta_2 k T^2$  al cual llamamos tiempo de relajación del flujo de calor, obtenemos la ecuación de Maxwell-Gattanea-Vernotte

$$-\tau \frac{dq}{dt} = k \nabla T + q., \quad (4.79)$$

que remueve el inconveniente de la velocidad infinita que se obtiene del

formalismo de la TIL.

Así, a partir de la formulación variacional de la TIE se ha elaborado un modelo general de conducción del calor. Mostramos ahora que sirve como marco teórico que engloba las ecuaciones formuladas por distintos autores. De acuerdo con esto, podemos ver, que este modelo se reduce a la ecuación de *M&V*

$$-\tau \frac{dq}{dt} = k \nabla T + q, \quad (4.80)$$

a la ecuación propuesta por *García-Galín y Rodríguez* en el marco de la metodología tradicional de la TIE

$$-\tau \frac{dq}{dt} = k \nabla T + q + a(\nabla \cdot q)q \quad (4.81)$$

y a la ecuación de transporte de *Gyarmati*,

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \tau \frac{d}{dt} T = a^2 \nabla^2 T, \quad (4.82)$$

que se obtiene partir de la ecuación de *M&V* y de la ecuación de balance de energía, si se hace la siguiente identificación de coeficientes en la ecuación (4.68):

|                                      | $\beta_1$                         | $\beta_2$                  | $\beta_3$                        | $\beta_4$     |
|--------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------------|---------------|
| Vernotte                             | $\rho T^{-1}$                     | $-\rho \tau k^{-1} T^{-2}$ | $\frac{\rho g k^{-1} T^{-2}}{2}$ | $\rho T^{-1}$ |
| García-C.                            | $\rho T^{-1} + a g k^{-1} T^{-2}$ | $-\rho \tau k^{-1} T^{-2}$ | $\frac{\rho g k^{-1} T^{-2}}{2}$ | $\rho T^{-1}$ |
| Gyarmati +<br>balance de<br>energía. | $\rho T^{-1}$                     | $-\rho \tau k^{-1} T^{-2}$ | $\frac{\rho g k^{-1} T^{-2}}{2}$ | $\rho T^{-1}$ |

Este resultado muestra la compatibilidad de los distintos modelos con la termodinámica irreversible extendida. En este sentido la formulación variacional de la TIE ha venido a reforzar a la teoría. El modelo hiperbólico no-lineal de *Morro y Ruggeri* que surge como una generalización

de la ecuación de *MGV* reemplazándola por

$$(\alpha \dot{q}) + \nabla \cdot (\kappa \mathbf{1} + u \mathbf{q}) = -\zeta \mathbf{q}, \quad (4.83)$$

no es posible deducirlo de la formulación variacional de la TIE para un medio isotrópico. Para sustentar termodinámicamente este modelo debe desarrollarse una formulación variacional para medios no isotrópicos.

Volviendo a la ec.(4.68), debemos aclarar que ésta representa una solución formal del problema de conducción del calor, pues en la forma en que está planteada no contiene la forma explícita de las funciones  $\beta_i$ . Una forma de definirla y hacerla manejable es proponer expresiones para estas funciones en términos de cantidades medibles del sistema, tal como las deducidas anteriormente. Otro procedimiento que ha sido de gran utilidad es desarrollar las funciones  $\beta_i$  en términos del invariante escalar  $g = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$ , alrededor de un estado de equilibrio local dado por  $\mathbf{q} = 0$ , para deducir ecuaciones aproximadas a distintos órdenes. Es decir, hacemos

$$\beta_i(\mathbf{e}, g) = \beta_{i0} + \beta_{i1} g + \beta_{i2} g^2 + \dots \quad (4.84)$$

donde los coeficientes  $\beta_{ij}$  son funciones de las variables de equilibrio local, con la temperatura y la presión definidas como

$$T^{-1} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{e}} \right)_{\mathbf{e}, 1} = \left( \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \right) \quad \text{y} \quad P = T \left( \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)_{\mathbf{e}, 1} = T \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right). \quad (4.85)$$

En términos generales se tiene que, si el integrando de la funcional  $\mathcal{L}$  ha de ser expandida a un orden dado en la potencias de la variable no conservada, entonces las series correspondientes a las funciones  $\beta_i$  deben desarrollarse hasta un orden consistente [del Ría y López de Haro, 1990].

En particular, cuándo el integrando de la funcional  $\mathcal{L}$ , ec.(4.61), es desarrollado a orden 2, las funciones  $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5$  son requeridas del mínimo orden, en tanto que  $\beta_3$  (la producción del potencial termodinámico  $\eta$ ) se requiere de orden 2, esto es  $\beta_1 = \beta_{10}$ ,  $\beta_2 = \beta_{20}$ ,  $\beta_4 = \beta_{40}$ ,  $\beta_5 = \beta_{50}$ .

$\beta_3 = \beta_{30} + \beta_{31}g$ , con  $\beta_{30} = 0$  en compatibilidad con TIL. Entonces la ec. (4.68) se reduce a la ecuación MEV, si se hace la identificación de parámetros de la tabla anterior. Mientras que si el integrando es desarrollado a orden 3, las funciones  $\beta_1, \beta_4, \beta_5$  son requeridas del mínimo orden 2,  $\beta_2$  de orden cero, en tanto que  $\beta_3$  (la producción del potencial termodinámico  $\eta$ ) se requiere de orden 3, esto es  $\beta_1 = \beta_{10} + \beta_{11}g$ ,  $\beta_2 = \beta_{20}$ ,  $\beta_4 = \beta_{40} + \beta_{41}g$ ,  $\beta_5 = \beta_{50} + \beta_{51}g$ ,  $\beta_3 = \beta_{30} + \beta_{31}g$ , entonces la ec. (4.68) se reduce a la forma propuesta por R. Rodríguez y García-Galín.

De lo anteriormente anotado, se observa que si queremos conservar el el carácter tensorial del coeficiente de  $\frac{dq}{dt}$  los desarrollos del integrando de la funcional  $\mathcal{L}$ , deben llevarse a orden 4; esto conduce a una ecuación de evolución temporal para  $q$ , la cual contiene coeficientes indeterminados que pueden modelarse buscando ajustar resultados experimentales que no hayan podido ser descritos usando los modelos usuales. En este sentido, pensamos que la ecuación de evolución temporal para  $q$ , deducida en este trabajo es más general que las ecuaciones expuestas en el capítulo III, pues como se ha visto, la ec. (4.68) proviene de dos postulados generales (sobre la estructura del espacio termodinámico y un criterio variacional sobre las variables rápidas) y no introduce aproximación alguna sobre la estructura matemática de las cantidades desconocidas.

Finalmente se debe mencionar que, como el integrando de la funcional  $\mathcal{L}$  es la ecuación de balance del potencial termodinámico  $\eta$ , podemos interpretar este principio variacional como aquel que deja invariante a la ecuación de balance para  $\eta$ , pero no postula su validez. De modo que, la formulación variacional de la TIE quedaría constituida por el postulado acerca de la existencia de la función  $\eta = \eta(\{c\}\{r\})$  y por el principio variacional restringido sobre la funcional  $\mathcal{L}$ .

## CAPITULO V

### CONCLUSIONES.

Hemos visto que el modelo de conducción del calor propuesto por *Faurier* (en vista de la inestabilidad de sus soluciones) corresponde a un modelo matemático planteado incorrectamente; aunado a esto, este modelo conduce a una velocidad de propagación de los pulsos de calor, que oscila entre cero e infinito; hecho que plantea su reconsideración para evitar esta inconsistencia física.

Como alternativa para la descripción adecuada del proceso de transporte de calor *Gallanea y Vernotte* propusieron una ecuación de relajación para  $q$ , la cual introduce, en primer término, el concepto de *inercia térmica*, y con esto, una perspectiva completamente nueva del fenómeno de conducción de calor, pues ahora el proceso de conducción en un sólido ya no será un proceso difusivo a velocidad infinita, sino un proceso ondulatorio a velocidad finita. Esta alternativa también permite indagar sobre la existencia de distintas escalas de tiempo en fenómenos térmicos en sólidos.

Tomando como base el hecho de que no existe un principio variacional clásico para la ecuaciones que describen la evolución de un sistema no ideal en estados de no equilibrio, se ha postulado en este trabajo un principio variacional de tipo restringido donde el papel de la funcional es jugado por la expresión

$$\mathcal{L} = \int (\rho \frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} - \sigma_r) dV.$$

El principio variacional  $\delta I=0$  nos permitió encontrar la ecuación de

Euler para el flujo de calor, dada por

$$\left( 2 \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial g^2} \right) q q + \beta_2 I \right) \frac{dq}{dt} = - 2 \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial g^2} \right) (\nabla \cdot q) q + 2q \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial g^3} \right) - \nabla \beta_4$$

que es una ecuación exacta para la evolución temporal del flujo de calor en el sólido. Esta ecuación junto con la ecuación de balance de energía describen completamente el fenómeno. Además, se puede comentar -que es representativa de la generalidad que existe en los postulados de la TIE, puesto que ésta reproduce, mediante una identificación adecuada de los coeficientes respectivos, los modelos hiperbólicos más importantes para la descripción de  $q$ , incluyendo en esto a las formas integrales.

La ventaja de formular la TIE desde una perspectiva variacional es que, en primer lugar, ha permitido encontrar ecuaciones exactas para la evolución temporal de las variables rápidas, además de elucidar la naturaleza de los coeficientes fenomenológicos. En efecto, esto nos ha permitido identificar en el sólido rígido al coeficiente

$$\left( 2 \left( \frac{\partial \beta}{\partial g^2} \right) q q + \beta_2 I \right)$$

con un tensor de tiempos de relajación, además de mostrarnos que la evolución temporal del flujo de calor depende de términos de la forma:

$$- 2 \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial g^2} \right) (\nabla \cdot q) q, 2q \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial g^3} \right), \nabla \beta_4$$

que están asociados, respectivamente, con las inhomogeneidades espaciales de  $q$ , la relajación del sistema y las contribuciones de las inhomogeneidades espaciales de todas las variables termodinámicas. En segundo lugar, ha aportado un esquema formal para la teoría en el que ha sido posible investigar la compatibilidad de distintos modelos de la conducción del calor con la TIE y en tercer lugar ha permitido deducir una condición adicional sobre la producción del potencial termodinámico  $\eta$  dado

por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial g} \eta > 0.$$

En cuanto a las perspectivas que se desprenden de este trabajo, podemos mencionar por un lado que, en la ecuación de evolución temporal para la variable rápida  $q$  se pueden modelar expresiones para los coeficientes indeterminados que aparecen en ella buscando ajustar resultados experimentales que no hayan podido ser descritos desde los formalismos usuales. En sentido contrario también se tiene un reto importante en el desarrollo de técnicas experimentales para determinar tiempos de relajación efectivos, lo que permitiría investigar algunas propiedades adicionales del modelo general no-lineal propuesto para la conducción del calor.

Finalmente, se tiene que trabajar la posibilidad de utilizar el principio variacional para establecer un método numérico para solucionar las ecuaciones de evolución temporal de sistemas fuera de equilibrio local.

## REFERENCIAS.

- 1.- Arfken G. *Mathematical Methods for Physicist* (Academic Press, N.Y, 1981).
- 2.- Bernal John D. *La ciencia en la historia.* (Ed. Nueva Imagen & UNAM. México D.F. 1979)
- 3.- Bubnov, B.A. "Wave concepts in the theory of heat". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19 (1976) 175.
- 4.- Byron Bird R, Steward W.E and Lightfoot E. N. *Transport Phenomena* (John Wiley & Sons, Inc N.Y. 1976).
- 5.- Carslaw H.S and Jaeger J.C. *Conductions of heat in solids* (Oxford University Press, London, G.britain, 1959 ).
- 6.- Cattaneo C. "Sulla conduzione de calore". *Atti del Semin. Mat. Fis. Univ. Modena* 3,3, 1948.
- 7.- Cattaneo C. "Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée", *C.R. Acad. Sci.* 247 (1958) 431.
- 8.- Coleman, B.D. M. Fabrizio, and D.R. Owen, "On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals", *Arch. Ration. Mech. Anal.* 80 (1982) 135.
- 9.- de Groot S.R and Mazur P. *Non-equilibrium Thermodynamics* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969).
- 10.- del Rio J.A and Lopez de Haro M. "On the criteria for deriving approximations off different orders in Extended Irreversible Thermodynamics" *J. Non-equilibrium Thermodynamics*, 15(1990)59.

- 11.- del Río P, J.A. Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. (Tesis Doctoral. Fac. de Ciencias. UNAM. México, D.F. 1991).
- 12.- del Río J.A., M. Lopez de Haro and F. Vázquez. "The Non-equilibrium Thermodynamics of the soil water system: a variational approach" J. Non-equilibrium Thermodynamics, 17 (1992) 67.
- 13.- Eckert R G. and Drake R M. Analysis of heat and mass transfer. (International student edition. McGraw Hill, N.Y. 1972).
- 14.- Einstein A. De mi vida y pensamiento. Libro publicado por Editorial Dante/Quincenal. Mrida, Yuc. Mwx. 1984.
- 15.- Estrada-Gasca C A and Cobble M H. "Linear and nonlinear transient heat conduction in nuclear waste repositories". Journal of Engineering. 21 (1987) 287.
- 16.- Estrada-Gasca C A and Cobble M H. "Theoretical approximations to transient heat conduction in nuclear waste repositories". Mathl. Comput. Modelling 10 (1988) 739.
- 17.- Farkas H, "On the Phenomenological Theory of heat conduction ". Int. J. Engng Sci., 13 (1975) 1035.
- 18.- Finlayson, B.A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. (Academic Press, N. Y., 1972)
- 19.- Finlayson, B.A. Physics fluids 15 (1972) 963.
- 20.- Fourier, J.B. Theorie analytique de la chaleur. Paris 1822 (Traducido al Ingles por A. Freeman, Dover Publications Inc., N.Y, 1955)
- 21.- Fulks W. Cálculo Avanzado. (Edit. Limusa, México D.F. 1986).
- 22.- García-Colín, L. Introducción a la Termodinámica Clásica (Edit. Trillas, México D.F. 1980).
- 23.- García-Colín, L. Termodinámica de Procesos Irreversibles. Colección CBI. UAM-I, México D.F. 1980).

- 24.- García-Colín, L. Cap 7. "Procesos irreversibles". La Física Contemporánea. (Colección: Las ciencias del siglo XX. UNAM (1983), México D.F).
- 25.- García-Colín L.S., López de Haro M., Rodríguez R.F., Casas-Vázquez J. and Jou D. "On the Foundations of Extended Irreversible thermodynamics" J. Stat. Phys., 37 (1984) 465.
- 26.- García-Colín, L. De la maquina de vapor al cero absoluto (calor y entropía). (Colección: La ciencia desde México. vol 5 SEP, Fondo de Cultura Economica, CONACYT. México D.F. 1986).
- 27.- García-Colín, L. Y sin embargo se mueven. ( Teoría cinética de la materia ). (Colección: La ciencia desde México. vol 36. SEP, Fondo de Cultura Economica, CONACYT . México D.F.1987).
- 28.- García-Colín, L. "Extended non-equilibrium Thermodynamics, scope and limitations ".Rev. Mex. Fis, 34 (1988) 344.
- 29.- García-Colín L S and Rodriguez R F. "On the relationship Between Extended Thermodynamics and the Wave Approach to Thermodynamics" J. Non-equilibrium Thermodynamics, 13(1988)81.
- 30.- Glasstone S. y Sesonke A. Ingeniería de los Reactores Nucleares. (Edit Revertw, Barcelona, Esp. 1975)
- 31.- Goldstein H., Classical Mechanics. (Edit. Addison-Wesley Pub. Comp. 1981, segunda edición).
- 32.- Gudonov S.F. Ecuaciones de la Física-Matemática (Editorial Mir, Moscú, 1978).
- 33.- Gurtin M.E., and Pipkin A.C., " A general theory of heat conduction with finite wave speeds" Arch. Ration. Mech. Anal., 31 (1968) 113.
- 34.- Gyarmati, I. Non-equilibrium Thermodynamics (Springer-Verlag, N.Y 1970).

- 35.- Gyarmati, I. " On the Wave Approach of Thermodynamics and some problems of Non-Linear Theories." J. Non-equilibrium Thermodynamics, 2(1977)233.
- 36.- Hawking S. W. Historia del tiempo (Edit. Critica, Grijalbo, México D.F. 1986).
- 37.- Hecht E y Zajac A. Optica ( Fondo Educativo Interamericano, S.A México D.F. 1986).
- 38.- Hoff H. "Asymmetrical heat Conduction in inhomogeneous materials" Physica, 131A(1985)449.
- 39.- Holton G. & Roller D.H.D. Foundations of Modern Physical Science (Addison-Wesley Publ. Inc. Mass.E.U.A. 1958).
- 40.- Kalinsky, S, "Wave equation for heat conduction", Bull. Acad. Pol.Sci. XIII(4) (1965) 211.
- 41.- Kreit F. Principles of heat transfer. (Intex Press, N.Y. 1973 )
- 42.- Josept D. D. and Preziosi L. "Heat Waves" Reviews of Modern Physics, 61(1989)41.)41.
- 43.- Joseph D. D and Preziosi L. Addendum to the paper "Heat Waves " Reviews of Modern Physics, 62(1990)375.
- 44.- Kuhn T, S. La Estructura de las revoluciones científicas.(F.C.E, México.D.F. 1986)
- 45.- Luikov A.V, Bubnov B.A. and Soloviev I.A. "On Wave solutions of the heat conduction equation". Int. J. Heat Mass Transfer, 19 (1976) 245.
- 46.- Manrique J.A y Cárdenas R.S. Termodinámica. (Harla México D.F.1981.
- 47.- Márkus F and Gambár K. Comments "On the relationship Between Extended Thermodynamics and the Wave Approach to Thermodynamics" Non-equilibrium Thermodynamics, 14(1989)355.
- 48.- Marshall T,J. and Holmes J,W. Soil Physics ( Cambridge University Press, Cambridge, 1979).

- 49.- Maurer M.J. "Relaxation Model for Heat Conductions in metals" Journal of applied Physics, 40 (1969) 5123.
- 50.- Meixner, J. "On the linear theory of heat conduction", Arch. Ration. Mech. Anal. 39 (1970) 108.
- 51.- Morse, P.M. and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics I, (McGraw-Hill, N.Y. 1953)
- 52.- Necati Ozisik. Transferencia de calor. (McGraw-Hill latinoamericana, Bogota colombia, 1979).
- 53.- Nettleton, R.E. "Relaxation theory of thermal conduction in liquids", Phys.Fluids 3 (1960) 216.
- 54.- Nikolski V.V. Electrodinámica y propagación de ondas de radio (Editorial Mir, Moscú, 1976).
- 55.- Nunziato J.W. "On Heat Conductions in materials with memory", Quarterly of applied Mathematics, 29 (1971) 187.
- 56.- Plank R. Industria de la alimentación. (Editorial Revertw, Barcelona, 1963)
- 57.- Rodriguez, R.F., López de Haro, M. " On the closure assumption in Extended Irreversible Thermodynamics", J. Non-Equilib. Thermodyn, 14 (1989) 37.
- 58.- Sieniutycz, S. "The variational principles of clasical type for non-coupled non-stationary irreversible transport processes with convective motion and relaxation". Int. J. Heat Mass Transfer, 20 (1977) 1221.
- 59.- Tijonov A,N y Samarsky A, A. Ecuaciones de la Fisica-Matematica (Editorial Mir, Moscy, 1980).
- 60.- Torkington P. "Solution of a modified wave equation for diffusion". J. Chem. Phys. 82 (1985) 3472.472.
- 61.- Vernotte, P. "La véritable équation de la chaleur", C.R. Acad. Sci.

246 (1958a) 2103.

- 62.- Vernotte, P. "Les paradoxes de la théorie continue de l'équation del chaleur", C.R. Acad. Sci. 247 (1958b) 3154.
- 63.- Vázquez H, F. Principios variacionales en Termodinámica de procesos irreversibles. (Tesis de Maestría. Fac. de Ciencias. UNAM. México, D.F. 1990).
- 64.- Vázquez, F. and del Rio, J. A. "A variational approach to the time evolution equations for nonconserved variables in extended irreversible Thermodynamics". Rev. Mex. Fis, 36 (1990) 71.
- 65.- Weinberger, H. F. Ecuaciones en derivadas parciales (Ed. Barcelona, Esp. 1970)
- 66.- Whitaker S. Advances in Heat Transfer Vol 13 (Academic Press, N.Y, 1977).
- 67.- Zemansky M, W y Dittman Calor y Termodinámica (McGraw-Hill latinoamericana, México, D.F., 1985).