44
2ej-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

Estudio de la ecuación de Dirac en un sistema en rotación

TESIS

Que para obtener el Título de:

Físico

Presenta:

Guillermo Sierra Juárez

México, D.F. 1992.

Índice

Introducción General 1

Capítulo I. Introducción 4

1.1 Espinores de Dirac en la formulación de la tetrada Nula 4

1.2 Matrices y ecuación de Dirac 5

1.3 Cálculo de la tetrada y de los coeficientes de la matriz de conexión en un sistema de coordenadas cilíndricas en rotación 8

1.4 Cuadripotencial de una partícula en un campo magnético constante 10

Capítulo II. Ecuación de Dirac para una partícula que gira dentro de un campo magnético constante 14

2.1 Planteamiento de la ecuación 14

2.2 Solución de la ecuación de Dirac 15

Capítulo III. Espín de la partícula 22

3.1 El operador de espín 22

3.2 Conmutador del Hamiltoniano y del Operador de espín 26

3.3 Valores propios del operador de espín 29

Apéndice 33
Conclusión 35
Referencias 37

Introducción General

Desde el estudio inicial de la ecuación de Dirac en 1928 por el mismo Dirac se han realizado una gran cantidad de estudios sobre ella, inclusive existen libros completos dedicados a las soluciones y aplicaciones a determinados casos particulares de la ecuación.

Sin embargo la generalización de la ecuación de Dirac en sistemas no Inerciales y sus aplicaciones es un tema que no ha sido tan ampliamente estudiado. No es sino hasta años recientes que su estudio ha cobrado interés por lo que la elección como tema de tesis representa una acertada oportunidad de estudiar un tema en cierta forma noveoso e interesante.

En este trabajo el estudio de la ecuación se desarrolla mediante el formalismo de la tetrada nula. El formalismo de la tetrada nula fue inicialmente introducido por E. Newman y R. Penrose en 1962,[11] ellos encontraron en el formalismo espinorial y tetradial una aproximación a la relatividad general. La idea esencial es la de utilizar ciertas combinaciones complejas de los coeficientes de Rotación de Ricci que tienen una conexión con los espinores,sus resultados los aplicaron a la solución de problemas de radiación gravitacional. Aunque el formalismo de la tetrada nula se utiliza principalmente como una herramienta util en el estudio de la gravitación, es posible obtener mediante este formalismo la ecuación general covariante de Dirac en un espacio curvo. Sobre este tema se han desarrollado algunos trabajos entre los que podemos mencionar el artículo del Dr. S. Hacyan [7] trabajo al cual que se apega el desarrollo de la tesis, en el capítulo I se presenta un breve resumen de su trabajo.

Existen otros trabajos sobre la generalización covariante de la ecuación de Dirac entre los que se puede mencionar el de T.C. Chapman y D.J. Leiter [9].En este artículo se definen unas tetradas, que serviran como los coeficientes de la transformación de un sistema de referencial inercial a uno que no lo es para calcular los coeficientes de Fock-Ivanenko de la generalización covariante de la ecuación de Dirac . Además se desarrolla un método para relacionar funciones de onda de un sistema no inercial con las de un sistema inercial y se proponen algunos ejemplos.

Acerca del estudio de una partícula en un campo magético existe una gran cantidad de trabajos.El primero en abordar este problema fue Landau en 1930 [6], en el encuentra que la energía de un electrón en un campo magnético homogéneo se cuantiza,este problema lo estudio en relación con el problema del diamagnetismo en los metales.

Otro trabajo podemos mencionar el artículo de A.A. Socolov y I.M. Ternov [8]que que habla sobre los efectos de espín y la polarización en la teoría de la radiación sincrotronica. En este trabajo se estudia la influencia de la orientación del espín en la polarización y la intensidad de la radiación para un electrón en un campo magnético homogéneo.Entre algunos de sus resultados encuentra que en la intensidad de radiación para la polarización longitudinal (a lo largo del movimiento)no depende de la orientación inicial del espín, sin embargo la intensidad de radiación para la polarización a lo largo del campo si depende de la orientación inicial del espín .

Existe un artículo de Bell y Leinaas [10]en cual puede encontrarse una aplicación de esta tesis.En este artículo se estudia la posibilidad de relacionar partículas aceleradas y temperatura.En principio la depolarización de electrones en un campo magnético puede ser utilizada como medidor de temperatura.Partículas aceleradas de esp´n un medio en un campo magnético externo miden las propiedades térmicas de las fluctuaciones del vacío en un sistema acelerado.La población de espines que no se polarizan y que se orientan en dirección contraria es provocada por interaciones con las fluctuaciones del vacío de la radiación de campo.Aunque es necesario tomar en cuenta otros efectos como por ejemplo el debido al movimiento circular de la partícula.

El presente trabajo de tesis es un estudio de la ecuación de Dirac para un sistema no inercial mediante el formalismo de la tetrada nula. En particular el problema que se estudia es el de una partícula de Dirac girando en un campo magnético constante.

El primer capítulo es una introducción a los conceptos elementales del formalismo de la tetrada nula . Además se calculan los elemento necesarios para plantear la ecuación, se elige una tetrada apropiada y se estudia el potencial de una partícula girando en un

Capítulo I

1 Introducción

1.1 Espinores de Dirac en la formulación de la Tetrada Nula

Esta sección es un breve resumen del formalismo de la tetrada nula[7].

Sea V_4 una variedad Riemaniana con la métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 2e^1 e^2 + 2e^3 e^4 \tag{1}$$

donde las formas- únicas $e^a = e^a_\mu dx^\mu (a = 1...4)$ definen una tetrada nula tales que

$$e^a_\mu e^b_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{ab} \tag{2}$$

donde

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

La inversa de la tetrada esta dada a través de $e^\mu_a e^b_\mu = \delta^b_a$.

En adelante los índices griegos y latinos se referíran a componentes tensoriales y tetradiales respectivamente. Para transformar un vector de índices tetradiales a índices tensoriales y viceversa se hará mediante la siguiente regla

$$V^\alpha = V^a e^\alpha_a$$

$$V^a = V^\alpha e^a_\alpha$$

Se suben y bajan los índices tensoriales con el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha\beta}$.

Y para subir y bajar índices tetradiales será con η^{ab} y η_{ab}

Si V_4 es real y tiene signatura $(- + ++)$ entonces el complejo conjugado esta dado por

$$(e^1, e^2, e^3, e^4)^* = (e^2, e^1, e^3, e^4) \tag{4}$$

y si V_4 es euclidiano entonces

$$(e^1, e^2, e^3, e^4)^* = (e^2, e^1, e^4, e^3) \tag{5}$$

Los coeficientes de Ricci estan definidos como

$$\Gamma^a_{bc} = -e^a_{\mu;\nu} e^\mu_b e^\nu_c \tag{6}$$

y tienen la propiedad $\Gamma_{abc} = \Gamma_{[ab]c}$. Definiendo las formas únicas

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc} e^c \tag{7}$$

se obtiene la estructura básica de las ecuaciones de Cartan

$$de^a = e^b \wedge \Gamma^a_b \tag{8}$$

$$d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma^c_b = R_{abcd} e^c \wedge e^d \tag{9}$$

donde R_{abcd} son las componentes tetradiales del tensor de Riemann.

1.2 Matrices y ecuación de Dirac

Un espinor de Dirac es un par de espinores de dos índices

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \phi^A \end{pmatrix} \tag{10}$$

La ecuación de Dirac escrita en la forma tradicional

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + iM\Psi = 0 \tag{11}$$

El espinor y la ecuación de Dirac adjunta se escriben como

$$\bar{\Psi} = (\phi^A, \psi_A)$$

$$\bar{\Psi}\bar{\nabla}_\mu \gamma^\mu - iM\bar{\Psi} = 0 \tag{12}$$

Aquí las matrices de Dirac satisfacen la relación

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2g^{\alpha\beta} \tag{13}$$

y la derivada covariante esta definida por

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi \tag{14}$$

donde las Γ_μ son las matrices de conexión y se definiran más adelante .

Para obtener la versión tetradial de las matrices de Dirac $\gamma^n = e^n_\mu \gamma^\mu$ y para la inversa tenemos $\gamma^\mu = e^\mu_n \gamma^n$

La forma explicíta más natural de las matrices de Dirac en la base de la tetrada nula es :

$$\begin{aligned}
\gamma^1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad
\gamma^2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^3 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad
\gamma^4 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

En esta base las matrices γ^a deben de cumplir la relación de anticonmutación.

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2\eta^{ab} \tag{16}$$

Se definen las matrices σ^{ab}

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2}(\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) \tag{17}$$

y la matriz γ^5 la definimos como

$$\gamma^5 = \frac{1}{24}\epsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d$$
$$= \frac{i}{24}\sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \tag{18}$$

Explícitamente γ^5:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

y anticonmuta con las otras matrices γ^a

$$\gamma^5\gamma^a + \gamma^a\gamma^5 = 0 \tag{20}$$

El dual de σ^{ab} es

$$\sigma^*_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\sigma^{cd} \tag{21}$$

$$\sigma^*_{ab} = -\gamma^5\sigma_{ab} \tag{22}$$

Las matriz de conexión Γ definida en la ec(14) esta relacionada con los coeficientes de Ricci Γ_{abc} por

$$\Gamma_n = -\frac{1}{4}\Gamma_{abn}\sigma^{ab} \tag{23}$$

y obviamente $\Gamma_\mu = e^n_\mu\Gamma_n$.

La forma explícita de la matriz de conexión en la tetrada nula es:

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\Gamma_{12n} + \Gamma_{34n}) & -\Gamma_{42n} & 0 & 0 \\ -\Gamma_{31n} & \frac{1}{2}(\Gamma_{12n} + \Gamma_{34n}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\Gamma_{12n} + \Gamma_{34n}) & -\Gamma_{32n} \\ 0 & 0 & -\Gamma_{41n} & -\frac{1}{2}(-\Gamma_{12n} + \Gamma_{34n}) \end{pmatrix} \tag{24}$$

1.3 Calculo de la Tetrada y de los coeficientes de la matriz conexión de un sistema en coordenadas cilíndricas en rotación

La métrica de un sistema en coordenadas cilíndricas esta dada por

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 - dt^2$$

En un sistema que gira con velocidad ángular constante (Ω) la componente en la dirección angular cambia de la forma siguiente:

$$d\varphi \longrightarrow d\varphi + \Omega dt$$

En el formalismo de la tetrada nula de acuerdo a la ec(1) tenemos que $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 2e^1e^2 + 2e^3e^4$

Buscamos una tetrada $(e^1...e^4)$ de tal manera que a partir de la ec(1) recuperemos la métrica de un sistema en coordenadas cilíndricas rotando y que explícitamente resulta ser

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\varphi + \Omega dt)^2 + dz^2 - dt^2 \tag{25}$$

La tetrada seleccionada para la métrica anterior es:

$$\begin{aligned}
e^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\rho + i\rho(d\varphi + \Omega dt)) \\
e^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\rho - i\rho(d\varphi + \Omega dt)) \\
e^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(dz + dt) \\
e^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(dz - dt)
\end{aligned} \tag{26}$$

Se puede verificar fácilmente que si se introduce la tetrada anterior ec(26) en la ec(1) recuperamos la métrica de la ecuación (25).

A partir de las expresiones de las ecs(26) es posible obtener expresiones para cada una de las coordenadas en términos de las componentes tetradiales

$$
\begin{aligned}
d\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + e^2) \\
\rho d\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega\rho(e^3 - e^4) + i(e^1 - e^2)) \\
dz &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^3 + e^4) \\
dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^3 - e^4)
\end{aligned} \tag{27}
$$

Tomando las diferenciales de las expresiones de (26) y sustituyendo las ecuaciones(27) obtenemos las diferenciales tetradiales en términos de la base tetradial

$$
\begin{aligned}
de^1 &= +\frac{1}{\sqrt{2}\rho}(e^2 \wedge e^1) \\
de^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}\rho}(e^2 \wedge e^1) \\
de^3 &= 0 \\
de^4 &= 0
\end{aligned} \tag{28}
$$

Las expresiones para de^1 y de^2 son las mismas salvo un signo $de^1 = (de^2)^*$ y de^3, de^4 son cero.

A partir de la expresión $dx^\mu = e^\mu_a e^a$ es posible calcular los coeficientes e^μ_a de la comparación con las ecs(27), y que para el sistema y la tetrada que se estan estudiando resultan ser los siguientes explícitamente [1]

$$
\begin{aligned}
&e^1_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e^1_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e^1_{(3)} = 0 \quad e^1_{(4)} = 0 \\
&e^2_{(1)} = \frac{-i}{\sqrt{2}\rho} \quad e^2_{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}\rho} \quad e^2_{(3)} = -\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \quad e^2_{(4)} = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \\
&e^3_{(1)} = 0 \quad e^3_{(2)} = 0 \quad e^3_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e^3_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&e^4_{(1)} = 0 \quad e^4_{(2)} = 0 \quad e^4_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e^4_{(4)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{29}
$$

De los coeficientes(29) es posible transformar cualquier elemento de índices tetradiales a ´ndices tensoriales(Contravariantes) y de índices tensoriales a índices tetradiales (covariantes).

[1] Los índices tetradiales se colocan entre parentesis para evitar confusiones

Es posible encontrar las derivadas parciales tetradiales a partir las tensoriales con los coeficientes calculados en la ecs(29),o bien también se pueden calcular estos coeficientes si la relación entre derivadas tensoriales y tetradiales es conocida $\partial_a = e_a^\mu \partial_\mu$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\rho - \frac{i}{\rho}\partial_\varphi) \\ \partial_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\rho + \frac{i}{\rho}\partial_\varphi) \\ \partial_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_z + \partial_t - \Omega\partial_\varphi) \\ \partial_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_z - \partial_t + \Omega\partial_\varphi) \end{aligned} \tag{30}$$

Otra forma de obtener las expresiones (30) es mediante la inspección de las expresiones en (27).Tomando las diferenciales correspondientes a la componente tetradial que se esta buscando.

Para el cálculo de las componentes de la matriz Γ_μ utilizamos las ecs(7) y (8) y obtenemos las expresiones para $de^a(a = 1...4)$. de aquí comparamos con la ecs(28) y obtenemos que los únicos coeficientes diferentes de cero son:

$$\Gamma_{211} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho}$$

$$\Gamma_{212} = -\frac{1}{\sqrt{2}\rho}$$

o bien, escrito de una mejor forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{42} &= 0 \\ \Gamma_{31} &= 0 \\ \Gamma_{12} + \Gamma_{34} &= -i(d\varphi + \Omega dt) \end{aligned} \tag{31}$$

1.4 Cuadripotencial de una partícula en un Campo Magnético constante

Tomemos un Campo Magnético Uniforme en una dirección arbitraria que elegimos como z.Una partícula que se encuentre girando en un plano perpendicular a este encontrará un potencial como el siguiente: en coordenadas cilíndricas una partícula en un campo

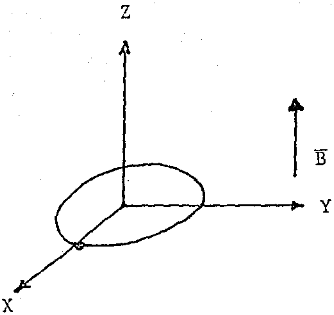

Figura 1: Partícula girando en un campo magnético constante.

magnético en la dirección Z tiene un potencial

$$\bar{A} = (0, \frac{B\rho}{2}, 0)$$

Se verifica fácilmente que con este potencial recuperamos el campo magnético propuesto originalmente

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho A_\varphi) - \partial_\varphi A_\rho)\hat{e}_z = B\hat{e}_z$$

Para transformar a índices tensoriales el potencial vector $A_\mu = e_\mu^{(a)} A_{(a)}$

$\Rightarrow$

$$A_\mu = e_\mu^{(a)} A_{(a)} = e_\mu^{(\varphi)} A_{(\varphi)} = \rho \delta_\mu^{(\varphi)} A_{(\varphi)} = \rho A_{(\mu)}$$

$$A_\mu = \rho^2 A^\mu \tag{32}$$

Por lo tanto en coordenadas cilíndricas el potencial de una partícula en un campo magnético esta dado por:

$$\begin{aligned} A_\mu &= (0, \frac{B\rho^2}{2}, 0, 0) \\ A^\mu &= (0, \frac{B}{2}, 0, 0) \end{aligned} \tag{33}$$

Ahora en un sistema en coordenadas cilíndricas pero en el que la partícula se encuentre girando se seguira la siguiente transformación

$$t' = t$$

$$\rho' = \rho$$

$$\varphi' = \varphi + \Omega t$$

$$z' = z$$

El potencial cambiará con la siguiente regla de tansformación

$$A^{\mu'} = A^{\nu}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$$

Donde los índices prímados corresponden a las componentes de la partícula que gira. Y los vectores covariantes los obtenemos a través del tensor métrico

$$A_{\mu'} = g_{\mu\nu}A^{\nu'}$$

Por lo tanto en el sistema de referencia de una partícula que gira dentro de un campo magnético la partícula tiene un potencial(en adelante ya nos referíremos a este sistema sin indicarlo con indices primos)

$$\begin{aligned} A^{\mu} &= \frac{B\rho^2}{2}(0,1,0,0) \\ A_{\mu} &= \frac{B\rho^2}{2}(0,1,0,\Omega) \end{aligned} \tag{34}$$

Debido a que existe una componente temporal en el cuadripotencial (A_t) de la partícula que se encuentra girando,esta en su sistema de referencia además de experimentar un campo magnético en la dirección z , siente un campo elétrico en la dirección radial del movimiento.

Podemos transformar las componentes del cuadripotencial de índices tensoriales a componentes de un cuadripotencial tetradial mediante los coeficientes calculados en ec(29) y tenemos entonces

$$A_a = e_a^{\mu}A_{\mu}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}B\rho \\
A_2 &= \frac{i}{2\sqrt{2}}B\rho \\
A_3 &= 0 \\
A_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Capítulo II

2 Ecuación de Dirac para una partícula que gira dentro de un campo magnético constante

2.1 Planteamiento de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac en índices tetradiales se escribe en la forma tradicional:

$$\gamma^a \nabla_a \Psi + iM\Psi = 0 \tag{36}$$

donde

M : masa en reposo de la partícula

Ψ : espinor de cuatro componentes

∇_a : operador de derivada covariante

γ^a : matrices de Dirac en la representación de la tetrada nula

$$\nabla_a \rightarrow D_a \equiv \partial_a - ieA_a + \Gamma_a \tag{37}$$

En los casos en que existe un campo electromagnético entra en la ecuación a través de la regla de mínimo acoplamiento y por tanto $A_a \neq 0$ y los elementos de la matriz Γ_n se calcularón en ec(24).

$$\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Donde recordando que las primeras dos componentes representan las funciones de onda para energía positiva mientras que las últimas para energía negativa[2].Por otra parte la primera y tercer componente son soluciones del mismo espín (es decir orientados en la misma dirección considerada como positiva) y las otras dos corresponden al otro posible valor del espín (en la dirección opuesta al primero considerado como negativa).

La ecuación de Dirac general escrita a partir de las ecuaciones (36),(37) y(38) y de la ec(15) en forma explícita es:

$$
\begin{aligned}
&[-\partial_4 + ieA_4 + \frac{1}{2}(\Gamma_{124} - \Gamma_{344}) + \Gamma_{412}]\phi^1 \\
&\qquad + [-\partial_2 + ieA_2 + \frac{1}{2}(-\Gamma_{122} + \Gamma_{342}) + \Gamma_{324}]\phi^2 + \frac{iM}{\sqrt{2}}\psi_1 = 0 \\
&[-\partial_1 + ieA_1 + \frac{1}{2}(\Gamma_{121} - \Gamma_{341}) - \Gamma_{413}]\phi^1 \\
&\qquad + [\partial_3 - ieA_3 + \frac{1}{2}(\Gamma_{123} - \Gamma_{343}) + \Gamma_{321}]\phi^2 + \frac{iM}{\sqrt{2}}\psi_2 = 0 \\
&[\partial_3 - ieA_3 - \frac{1}{2}(\Gamma_{123} + \Gamma_{343}) - \Gamma_{312}]\psi_1 \\
&\qquad + [\partial_2 - ieA_2 + \frac{1}{2}(\Gamma_{122} + \Gamma_{342}) - \Gamma_{423}]\psi_2 + \frac{iM}{\sqrt{2}}\phi^1 = 0 \\
&[\partial_1 - ieA_1 - \frac{1}{2}(\Gamma_{121} + \Gamma_{341}) + \Gamma_{314}]\psi_1 \\
&\qquad + [-\partial_4 + ieA_4 - \frac{1}{2}(\Gamma_{124} + \Gamma_{344}) - \Gamma_{421}]\psi_2 + \frac{iM}{\sqrt{2}}\phi^2 = 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

La ecuación anterior es la expresión más general de la ecuación de Dirac para sistemas no inerciales en el formalismo de la tetrada nula .En el capítulo anterior se calculo la tetrada,las derivadas,las componentes del cuadripotencial y los elementos de la matriz Γ_n para el caso de una partícula que se encuentre girando en un campo magnético constante.A partir de las ecs(30),(31) y (35) del capítulo anterior y de la ec(39) escribimos la ecuación de Dirac para el sistema que nos interesa estudiar.

$$
\begin{aligned}
-(\partial_z - \partial_t + \Omega\partial_\varphi)\phi^1 - (\partial_\rho + \frac{i}{\rho}\partial_\varphi + \frac{1}{2}eB\rho + \frac{1}{2\rho})\phi^2 + iM\psi_1 &= 0 \\
-(\partial_\rho - \frac{i}{\rho}\partial_\varphi - \frac{1}{2}eB\rho + \frac{1}{2\rho})\phi^1 + (\partial_z + \partial_t - \Omega\partial_\varphi)\phi^2 + iM\psi_2 &= 0 \\
(\partial_z + \partial_t - \Omega\partial_\varphi)\psi_1 + (\partial_\rho + \frac{i}{\rho}\partial_\varphi + \frac{1}{2}eB\rho + \frac{1}{2\rho})\psi_2 + iM\phi^1 &= 0 \\
(\partial_\rho - \frac{i}{\rho}\partial_\varphi - \frac{1}{2}eB\rho + \frac{1}{2\rho})\psi_1 - (\partial_z - \partial_t + \Omega\partial_\varphi)\psi_2 + iM\phi^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{40}
$$

2.2 Solución de la ecuación de Dirac

Se puede proponer una solución para la ec(40) de la siguiente forma:

$$\Psi = e^{i(Et - m\varphi - K_z z)}\psi(\rho) \tag{41}$$

donde

m : es el número cuántico orbital y para que la función de onda sea univaluada respecto al ángulo φ m puede tomar los valores $|m| = 0, 1, 2...$

K_z:es el valor del momento en la dirección z.Como no existe componente del potencial A_z el momento generalizado y el momento ordinario coinciden.La velocidad del electrón en la dirección del campo puede tomar cualquier valor.

E : energía en el plano perpendicular a la dirección del campo de la partícula que gira.

Aplicando las derivadas respecto al tiempo,al angulo (φ),y a la coordenada z a la función de onda propuesta en la ec(41)

$$\begin{aligned} \partial_t &\to iE \\ \partial_\varphi &\to -im \\ \partial_z &\to -iK_z \\ \partial_\rho &\to \frac{d}{d\rho} \end{aligned} \tag{42}$$

Sustituyendo el valor de cada derivada de la ec(42) en ec(40) obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas y en términos únicamente de la componente y derivada radial.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C_+\phi^1 - D_+\phi^2 + iM\psi_1 &= 0 \\ -D_-\phi^1 + C_-\phi^2 + iM\psi_2 &= 0 \\ C_-\psi_1 + D_+\psi_2 + iM\phi^1 &= 0 \\ D_-\psi_1 + C_+\psi_2 + iM\phi^2 &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Las ecs(43) se encuentran expresadas en términos de los operadores D_+ y D_- y de las constantes C_+, C_- siguientes

$$
\begin{aligned}
D_+ &= \partial_\rho + \frac{\frac{1}{2}+m}{\rho} + \frac{1}{2}eB\rho \\
D_- &= \partial_\rho + \frac{\frac{1}{2}-m}{\rho} - \frac{1}{2}eB\rho \\
C_+ &= i(E+\Omega m + K_z) \\
C_- &= i(E+\Omega m - K_z)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Proponemos para la parte radial del espinor

$$
\Psi = \begin{pmatrix} A_1F \\ A_2G \\ A_3F \\ A_4G \end{pmatrix}
\tag{45}
$$

y la siguiente relación para cada una de las componentes

$$
\begin{aligned}
D_+G &= \lambda F \\
D_-F &= \lambda' G
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Al aplicar D_- y D_+ a las ecs anteriores es inmediato obtener

$$
\begin{aligned}
D_+D_-F &= \lambda'\lambda F \\
D_-D_+G &= \lambda\lambda' G
\end{aligned}
\tag{47}
$$

De las ecuaciones (43)(45) y (46) obtenemos

$$
\begin{aligned}
A_3C_+F - A_4\lambda F + A_1 iMF &= 0 \\
-A_3\lambda' G + A_4C_-G + A_2 iMG &= 0 \\
A_1C_-F + A_2\lambda F + A_3 iMF &= 0 \\
A_1\lambda' G + A_2C_+G + A_4 iMG &= 0
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Reescribiendo el resultado anterior como un producto de matrices

$$\begin{pmatrix} iM & 0 & C_+ & -\lambda \\ 0 & -iM & -\lambda' & C_- \\ C_- & \lambda & iM & 0 \\ \lambda' & C_+ & 0 & iM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que los coeficientes $A_i \neq 0$ se necesita que el determinante de la primera matriz sea igual a cero.De esta manera obtenemos el valor de $\lambda\lambda'$

$$\lambda\lambda' = \lambda'\lambda = M^2 + C_+C_-$$

Sustituyendo los valores de C_+, C_- de la ec(44)

$$\lambda\lambda' = M^2 + K_z^2 - (E + \Omega m)^2 \tag{49}$$

Para encontrar F y G de la ec(45) utilizaremos las ecs(47) Con el objeto de simplificar álgebra proponemos los siguientes cambios de variable para los operadores D_+ y D_- y para B.

Proponemos

$$\beta = \frac{1}{2}B$$
$$u = eB\rho^2$$
$$\rho = (\frac{u}{e\beta})^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{d}{d\rho} = 2(e\beta u)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} D_+ &= 2(e\beta)^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du} + \frac{\frac{1}{2}+m}{2u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}) \\ D_- &= 2(e\beta)^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du} + \frac{\frac{1}{2}-m}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{50}$$

Aplicando D_+ a D_- y D_- a D_+ llegamos a

$$D_+D_- = 4e\beta(u\frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{du} - \frac{1}{u}\frac{(m-\frac{1}{2})^2}{4} - \frac{u}{4} - \frac{1}{2}(m+\frac{1}{2}))$$

$$D_-D_+ = 4e\beta(u\frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{du} - \frac{1}{u}\frac{(m+\frac{1}{2})^2}{4} - \frac{u}{4} - \frac{1}{2}(m - \frac{1}{2})) \tag{51}$$

De las ecs(47),(49) y de la ec(49)obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.De esta manera desacoplamos las ecuaciones y encontramos una ecuación para F y otra para G.

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&[u\frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{du} - \frac{(m-\frac{1}{2})^2}{4u} - \frac{u}{4} - \frac{(m+\frac{1}{2})}{2} - \frac{M^2+K_z^2-(E+\Omega m)^2}{4e\beta}]F = 0\\
&[u\frac{d^2}{du^2} + \frac{d}{du} - \frac{(m+\frac{1}{2})^2}{4u} - \frac{u}{4} - \frac{(m-\frac{1}{2})}{2} - \frac{M^2+K_z^2-(E+\Omega m)^2}{4e\beta}]G = 0
\end{aligned} \tag{52}$$

Las ecs(51) estan escritas en la forma canónica de ecuación de los polinomios asociados de Laguerre[4]. Las soluciones para F y G están dadas por

$$\begin{aligned}
F &= e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k}{2}}L_n^k(u)\\
G &= e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k+1}{2}}L_n^{k+1}(u)
\end{aligned} \tag{53}$$

en donde

$$\begin{aligned}
u &= e\beta\rho^2 = \frac{1}{2}eB\rho^2\\
k &= m - \frac{1}{2}\\
n &= \frac{(E+\Omega m)^2 - (M^2+K_z^2)}{2eB} - (m + \frac{1}{2})
\end{aligned} \tag{54}$$

y L_n^k, L_n^{k+1} son los polinomios asociados de Laguerre. Una condición necesaria para que la solución no diverja es que es necesario que el índice n de los polinomios asociados de Laguerre sea un número entero[4].

De la condición resulta que

$$\frac{(E+\Omega m)^2 - (M^2+K_z^2)}{2eB} - (m + \frac{1}{2}) = l \tag{55}$$

$|m| = 0, 1, 2...$ y $l = 0, 1, 2...$

Para que l sea entero el primer término debe ser semientero.

$$\frac{(E+\Omega m)^2-(M^2+K_z^2)}{2eB}=\frac{(2N+1)}{2}$$

De aquí encontramos que la energía es $(E+\Omega m)^2 = M^2+K_z^2+eB(2N+1)$

Por lo tanto

$$E=\sqrt{M^2+K_z^2+eB(2N+1)}-\Omega m \tag{56}$$

Por otra parte de las ecs (54) y (55)

$$\frac{2N+1}{2}-(m+\frac{1}{2})=l \Rightarrow N-m=l$$

pero como l es 0 o entero positivo.

$$N\geq m \tag{57}$$

De la ec(57) se ve claramente que el número cuántico orbital m debe ser estrictamente menor que el número cuántico principal N.

La ec(56) nos dice que la energía de la partícula que gira en el plano perpendicular al campo esta cuantizada .De aquí recuperamos los niveles de Landau de la Teoría cuántica no relativista en el límite $\Omega \to 0$

$$E=\sqrt{M^2+K_z^2+eB(2N+1)}$$

De acuerdo a cada a las ecs(56) y (57) cada nivel de energía N se desdobla en $N+1$ niveles dependiendo de los posibles valores que tome m.

En el caso no relativista los niveles de Landau únicamente dependen del número cuántico N.(También depende del espin,del campo magnético,de la masa, del momento lineal en la dirección z etc)

Y finalmente resumiendo las eigenfunciones de una partícula girando en un campo magnético constante son:

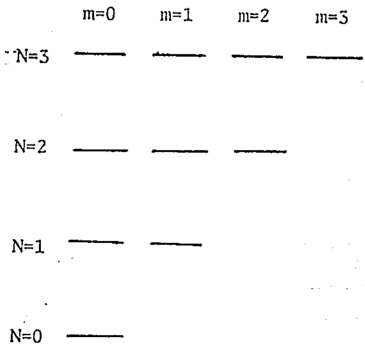

Tabla 1: Niveles de energía.

$$\Psi = e^{i(Et - m\varphi - k_z z)} \begin{pmatrix} A_1 e^{-\frac{eB}{4}\rho^2} \left(\frac{eB}{2}\rho^2\right)^{\frac{m-\frac{1}{2}}{2}} L_n^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{eB}{2}\rho^2\right) \\ A_2 e^{-\frac{eB}{4}\rho^2} \left(\frac{eB}{2}\rho^2\right)^{\frac{m+\frac{1}{2}}{2}} L_n^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{eB}{2}\rho^2\right) \\ A_3 e^{-\frac{eB}{4}\rho^2} \left(\frac{eB}{2}\rho^2\right)^{\frac{m-\frac{1}{2}}{2}} L_n^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{eB}{2}\rho^2\right) \\ A_4 e^{-\frac{eB}{4}\rho^2} \left(\frac{eB}{2}\rho^2\right)^{\frac{m+\frac{1}{2}}{2}} L_n^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{eB}{2}\rho^2\right) \end{pmatrix}$$

Capítulo III

3 Espín de la partícula

3.1 El operador de espín

El espín es una propiedad íntrinseca de las partículas que no tiene contraparte en la mecánica clásica.

El problema de encontrar un operador de espín como integral de movimiento para la ecuación de Dirac es un tema que ha sido discutido por largo tiempo en la literatura[5]. Los operadores conocidos hasta ahora buscan ser lineales en el momento es decir ser operadores diferenciales a primer orden, esta consideración se justifica al refererírse al hecho en que la ecuación de Dirac esta desarrollada en base a este tipo de operadores, por otra parte no todos los operadores diferenciales a primer orden pueden ser llamados operador de espín.

Una peculiaridad importante de los operadores de espín es que el momento debe de ser multiplicado por matrices proporcionales precisamente a la de espín. Dentro de la literatura se han considerado operadores de espín que tienen propiedades de transformación de un vector, pseudovector, tensor de rango dos, o escalar bajo una transformación de Lorentz.

El operador de espín considerado estará dado en base al vector de Killing, y a las matrices y al operador de Dirac y se estudiará también con índices tetradiales. Por tanto el espín considerado no es exactamente el que viene en los libros de texto.

Definimos el operador de espín como:

$$\hat{S} = \frac{1}{8} K_{a;b} \Sigma^{ab} \tag{58}$$

donde $K_{a;b}$ es la derivada covariante del vector de Killing y Σ^{ab} esta definida de la siguiente manera:

$$\Sigma^{ab} = \sigma^{ab} - \frac{2}{M} \gamma^{[a} \hat{D}^{b]} \tag{59}$$

Primero se trabajará con tensores para el cálculo de la derivada covariante del vactor de Killing y posteriormente se realizará la transformación a la base tetradial.

De la simetría del problema de la partícula que se encuentra girando en un campo magnético constante,se observa que el vector de Killing esta dado por :

$$K^{\alpha}\partial_{\alpha} = \partial_{\varphi} \tag{60}$$

entonces el vector de Killing resulta ser

$$K^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{2} \tag{61}$$

Pasando de un vector contravariante a uno covariante

$$K_{\alpha} = g_{\alpha\beta}K^{\beta} = g_{\alpha\beta}\delta^{\beta}_{2}$$

$\Rightarrow$

$$K_{\alpha} = g_{\alpha 2} \tag{62}$$

Por lo tanto las componentes del vector de Killing covariante estan dadas por la segunda columna de la matriz del tensor métrico de un sistema en coordenadas cilíndricas en rotación.

O bien $K_{\alpha} = (0, \rho^{2}, 0, \rho^{2}\Omega)$

En el calculo de la derivada covariante utilizamos la siguiente expresión

$$K_{\alpha;\beta} = K_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}K_{\mu} \tag{63}$$

Donde $K_{\alpha,\beta}$ es la derivada usual y $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ son los símbolos de Cristtoffel que explícitamente resultan ser:

$$\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\tau\sigma}(\partial_{\beta}g_{\alpha\sigma} + \partial_{\alpha}g_{\sigma\beta} - \partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}) \tag{64}$$

Bajamos el único índice contravariante de la ec(63) y de la ec(62) obtenemos

$$K_{\alpha;\beta} = K_{\alpha,\beta} - \Gamma_{2,\alpha\beta}\delta_2^{\nu} \tag{65}$$

Por otra parte de la ec(64) bajamos el índice contravariante con el tensor métrico y lo evaluamos en dos . Finalmente sustituimos este resultado en la ec(65) y llegamos a la derivada covariante del vector de Killing.

$$K_{\alpha;\beta} = K_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2}(-\partial_2 g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{2\beta} + \partial_\beta g_{2\alpha}) \tag{66}$$

Por lo tanto la derivada covariante del vector de Killing para el caso que estamos estudiando resulta ser explícitamente

$$K_{\alpha;\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 & -\rho\Omega \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

Las únicas componentes diferentes de cero son: $K_{1;2}, K_{2;1}, K_{1;4}$ y $K_{4;1}$

Para expresar el resultado en la base tetradial lo hacemos mediante la siguiente transformación.

$$K_{a;b} = e_a^\alpha e_b^\beta K_{\alpha;\beta} \tag{68}$$

donde las e_a^μ ya se han calculado en la ec(29).Ahora la derivada covariante del vector de Killing en la base de la tetrada nula es:

$$K_{a;b} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

Nuevamente observamos que las componentes del vector de Killing diferentes de cero son :$K_{1;2}$ y $K_{2;1}$ además de que $K_{1;2} = -K_{2;1}$

El segundo término que se calcula para la definición de espín es Σ^{ab} cuyos índices se contraen con los del vector de Killing

Σ^{ab} se define en la ec.(59) con los términos siguientes :

$$\sigma^{ab} = i(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a) \tag{70}$$

$$\gamma^{[a}\bar{D}^{b]} = \gamma^a\bar{D}^b - \gamma^b\bar{D}^a \tag{71}$$

$$\gamma^{[a}\bar{D}^{b]} = \gamma^a\eta^{ba}\bar{D}_a - \gamma^b\eta^{ab}\bar{D}_b \tag{72}$$

Las matrices γ^a se encuentran en la representación de la tetrada nula,D_b es el operador de Dirac y η^{ab} es la matriz que nos sirve para subir o bajar índices tetradiales.

Utilizando las ecs(59),(70) y (71)

$$\Sigma^{ab} = i(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a) - \frac{2}{M}(\gamma^a\eta^{ba}D_a - \gamma^b\eta^{ab}D_b) \tag{73}$$

Del cálculo de la derivada del vector de Killing sabemos que los únicos términos distintos de cero son $K_{1;2}$ y $K_{2;1}$ y por tanto los términos que nos interesan calcular son $\Sigma^{12}y\Sigma^{21}$ pero para calcular Σ^{12} tenemos primero que encontrar σ^{12} y $\gamma^{[1}\bar{D}^{2]}$

$\sigma^{12} = -\sigma^{21} = i(\gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1)$

$\Rightarrow$

$$\sigma^{12} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

Por otra parte para el término $\gamma^{[1}\bar{D}^{2]}$

$\gamma^{[1}\bar{D}^{2]} = -\gamma^{[2}\bar{D}^{1]} = \gamma^1 D_1 - \gamma^2 D_2$

$$\gamma^{[1}\bar{D}^{2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_+ \\ 0 & 0 & -D_- & 0 \\ 0 & -D_+ & 0 & 0 \\ D_- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

Aquí D_+ y D_- son los operadores definidos en la ec(44) De los resultados de las ecs (59), (74) y (75) tenemos que

$$\Sigma^{12} = -\Sigma^{21} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} iM & 0 & 0 & -D_+ \\ 0 & -iM & D_- & 0 \\ 0 & D_+ & iM & 0 \\ -D_- & 0 & 0 & -iM \end{pmatrix} \tag{76}$$

Finalmente de las ecuaciones (58),(69) y (76) obtenemos el operador de espín que explícitamente resulta ser:

$$\hat{S} = -\frac{i}{2M}\begin{pmatrix} iM & 0 & 0 & -D_+ \\ 0 & -iM & +D_- & 0 \\ 0 & +D_+ & iM & 0 \\ -D_- & 0 & 0 & -iM \end{pmatrix} \tag{77}$$

3.2 Conmutador del Hamiltoniano y del operador de Spin

Consideremos el operador

$$\not{D} + iM \tag{78}$$

de donde

$$\not{D} = \gamma^n D_n = \gamma^n(\partial_n - ieA_n + \Gamma_n) \tag{79}$$

El operador de la ec(78) ya fue calculado en ec(39) y aplicada a la función de onda de las expresiones (41) y (42) quedó en términos de los operadores y las constantes D_+, D_-, C_+ y C_- de la ec(44).

La matriz el operador de la ec(78) queda en la forma siguiente:

$$
\not{D} + iM = \begin{pmatrix} iM & 0 & C_+ & -D_+ \\ 0 & iM & -D_- & C_- \\ C_- & D_+ & iM & 0 \\ D_- & C_+ & 0 & iM \end{pmatrix}
$$

El operador anterior aplicado a la parte radial de un espinor resulta ser la ecuación de Dirac.

La ecuación de Dirac en términos de las matrices γ^0 y α^μ [2] se escribe como

$$
\gamma^0 \alpha^\mu D_\mu \Psi + iM\Psi = 0 \tag{80}
$$

Si multiplicamos nuevamente por γ^0 obtenemos la expresión no covariante de la ecuación que corresponde al Hamiltoniano del sistema que estamos estudiando

$$
\alpha^\mu D_\mu \Psi + iM\gamma^0 \Psi \tag{81}
$$

donde el Hamiltoniano es

$$
\hat{H} = \bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta M
$$

O bien en términos de las matrices γ^n

$$
\hat{H} = \gamma^0(\gamma^\mu D_\mu + iM)
$$

Y explícitamente el Hamiltoniano resulta ser :

$$
\hat{H} = \begin{pmatrix} C_- & D_+ & iM & 0 \\ D_- & C_+ & 0 & iM \\ iM & 0 & C_+ & -D_+ \\ 0 & iM & -D_- & C_- \end{pmatrix} \tag{82}
$$

[2]donde la γ^0 es la usual de la representación de Dirac $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$

Calculando el conmutador del Hamiltoniano y del operador de espín

$$[\hat{H}, \hat{S}] = \hat{H}\hat{S} - \hat{S}\hat{H}$$

De un cálculo simple de multiplicación de matrices obtenemos un importante resultado

$$[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \tag{83}$$

Como $\hat{H}$ y $\hat{S}$ conmutan entonces el el operador de espín es una constante de movimiento. Por lo tanto durante el movimiento de un electrón en un campo magnético no se efectuan transiciones de espín es decir la partícula conservará el valor del espín con el cual empezó a girar .Por otra parte al conmutar $\hat{H}$ y$\hat{S}$ tendrán simultaneamente las mismas eigenfunciones ,del tal forma que si conocemos las eigenfunciones de $\hat{H}$ inmediatamente conocemos las de $\hat{S}$ y por medio de este método es posible encontrar los valores propios del del espín.

Si multiplicamos la ec(78) por γ^5 este nuevo operador también conmuta con el operador de espín

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_1 = \gamma^5(\not{D} + iM) \Rightarrow$$

$$[\hat{H}_1, \hat{S}] = \hat{H}_1\hat{S} - \hat{S}\hat{H}_1 = 0 \tag{84}$$

A partir de las propiedades de la matriz γ^5 se puede llegar fácilmente a la siguiente relación de Conmutación.

$$[(\not{D} + iM)\gamma^5, \gamma^5\hat{S}\gamma^5] = 0 \tag{85}$$

Una propiedad muy importante que hay que mencionar es la del operador de espín al cuadrado ya que permite diagonalizar la matriz y desacoplar la ecuación de Dirac directamente.

De la ec(77)

$$\hat{S}^2 = \hat{S}\hat{S} = -\frac{1}{4M^2}\begin{pmatrix} D_+D_- - M^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_-D_+ - M^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_+D_- - M^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_-D_+ - M^2 \end{pmatrix} \tag{86}$$

Aplicando el operador $\hat{S}^2$ a la función de onda ec(45)

$$\hat{S}^2\Psi = \xi\Psi$$

y si $\xi = -\frac{M^2+K_z^2-(E+\Omega m)^2}{4M^2}$

y con la ec(51) recuperamos directamente la ec(52). Por lo tanto con el operador cuadrado del espín es directo desacoplar la ec. de Dirac.

3.3 Valores Propios del Operador de Spin

En la ecuación (46) tenemos la relación entre las componentes radiales del espinor. Aplicando los operadores (44) a las funciones(53) de F y G encontramos los valores de λ y λ'

$$\begin{aligned} D_+G &= \lambda F \\ D_+G &= 2(e\beta)^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du} + \frac{\frac{1}{2}+m}{2u^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}})(e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k+1}{2}}L_n^{k+1}(u)) \end{aligned} \tag{87}$$

Aplicando el operador D_+ a G se obtiene

$$D_+G = \sqrt{4e\beta}e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k}{2}}((k+1)L_n^{(k+1)} + uL_n^{k+1\prime}) \tag{88}$$

De las propiedades de recurrencia [3] de los polinomios asociados de Laguerre podemos escribir el término entre parentesis de la siguiente forma

$$D_+G = \sqrt{4e\beta}(n+k+1)e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k}{2}}L_n^k \tag{89}$$

[3] En el apéndice se desarrolla en detalle la propiedad utilizada

De aquí se ve claramente que el segundo miembro es la función F multiplicada por unas constantes.

$\Rightarrow$

$$D_+G = \sqrt{4e\beta}(n+k+1)F \tag{90}$$

Por otra parte también de las ecs(44),(46) y (53)

$$\begin{aligned} D_-F &= \lambda' G \\ D_-F &= 2(e\beta)^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du} + \frac{\frac{1}{2}-m}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}})(e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k+1}{2}}L_n^{k+1}(u)) \end{aligned} \tag{91}$$

Aplicando el operador D_- a F se obtiene

$$D_-F = \sqrt{4e\beta}e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k+1}{2}}(L_n^{k\,\prime} - L_n^k) \tag{92}$$

De las relaciones de recurrencia de L_n^k [4] podemos escribir

$$D_-F = -\sqrt{4e\beta}e^{\frac{-u}{2}}u^{\frac{k+1}{2}}L_n^{k+1} \tag{93}$$

El segundo miembro es una constante multiplicada por G

$$D_-F = -\sqrt{4e\beta}G \tag{94}$$

De las ecs(90) y (94) se concluye que

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{4e\beta}(n+k+1) \\ \lambda' &= -\sqrt{4e\beta} \end{aligned} \tag{95}$$

Si multiplicamos λ por λ' y sustituimos los valores de β,n,y k de las ecs(54) recuperamos el valor que ya habíamos obtenido en la ec(49) de $\lambda\lambda' = M^2 + K_z^2 - (E + \Omega m)^2$

Aplicando el operador de espiń ec(77) a las funciones de las ecs(45),(53) y (54) podemos obtener los eigenvalores del espín.

$$\hat{S}\Psi = s\Psi \tag{96}$$

[4] también esta propiedad se demuestra en el apéndice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\frac{D_+}{M} \\ 0 & -1 & -i\frac{D_-}{M} & 0 \\ 0 & -i\frac{D_+}{M} & 1 & 0 \\ \frac{iD_-}{M} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1F \\ A_2G \\ A_3F \\ A_4G \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} A_1F \\ A_2G \\ A_3F \\ A_4G \end{pmatrix} \tag{97}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_1F + i\frac{A_4}{M}D_+G \\ -A_2G - i\frac{A_3}{M}D_-F \\ -i\frac{A_2}{M}D_+G + A_3F \\ i\frac{A_1}{M}D_-F - A_4G \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} A_1F \\ A_2G \\ A_3F \\ A_4G \end{pmatrix} \tag{98}$$

Sustituyendo de las ecs (90),(94) y (95)

$$\begin{pmatrix} (1-2s) & 0 & 0 & i\frac{\sqrt{4e\beta}}{M}(n+k+1) \\ 0 & -(1+2s) & i\frac{\sqrt{4e\beta}}{M} & 0 \\ 0 & -i\frac{\sqrt{4e\beta}}{M}(n+k+1) & (1-2s) & 0 \\ -i\frac{\sqrt{4e\beta}}{M} & 0 & 0 & -(1+2s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{99}$$

De la condición de que el determinante de la matriz de 4 por 4 de la ec(99) debe de ser cero,es posible calcular los valores del espín

De la condición del determinante tenemos que :

$$(2s+1)(2s-1) = \frac{2eB}{M^2}(n+k+1) \tag{100}$$

Despejando s de la ec(100) anterior

$$s^2 = \frac{1}{4}(\frac{2eB}{M^2}(n+k+1)+1) \tag{101}$$

Sustituyendo los valores de n y k y el valor de la energía se llega a la siguiente expresión para s

$$s^2 = \frac{1}{4}(1+\frac{eB(2N+1)}{M^2}) \tag{102}$$

Finalmente los valores de s son:

$$s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{eB(2N+1)}{M^2}} \tag{103}$$

$\Rightarrow$ si B = 0 recuperamos el valor semientero del espín

$$s = \pm\frac{1}{2}$$

El espín tiene dos posibles valores tomando en cuenta el signo positivo y negativo de la raíz de la ec(104).El eigenvalor del espín depende del campo magnético ,de la masa y además del número cuántico principal es decir que dependiendo del estado n en que se encuentre el electrón el valor del espín tomará un cierto valor.

Es posible expresar la energía en términos de los valores del espín ec(104)

$$(E+\Omega m)^2 = K_z^2 + (2Ms)^2 \tag{104}$$

Despejando la energía

$$E = \sqrt{K_z^2 + (2Ms)^2} - \Omega m \tag{105}$$

Comparando con los niveles de Landau

$$E = \sqrt{K_z^2 + M^2 + eB(2N+1)} - \Omega m$$

De aquí se observa directamente que existe degeneración debida al espín ya que para los valores positivos y negativos del misma corresponde la misma energía.

En el caso sin rotación es decir si $\Omega \to 0$ la expresión(105) queda como

$$E^2 = K_z^2 + (2Ms)^2$$

Apéndice

En este apendíce se demuestra en detalle dos propiedades de recurrencia de los polinomios asociados de Laguerre a partir de ídentidades comúnes de los mismos.Estas propiedades resultaron ser importantes en el cálculo de los valores propios del espín.

Utilizamos las siguientes propiedades que se encuentran en cualquier libro de funciones especiales.

$a) L_n^{\alpha+1} - L_{n-1}^{\alpha-1} = L_n^{\alpha}$

$b) \frac{dL_n^{\alpha}}{du} = -L_{n-1}^{\alpha+1}$

$c)(n+1)L_{n+1}^k = (2n+k+1-u)L_n^k - (n+k)L_{n-1}^k$

$d) u\frac{dL_n^k}{du} = nL_n^k - (n+k)L_{n-1}^k$

Además

$L_n^{\alpha} = L_n^{\alpha}(u)$ y $\frac{dL_n^{\alpha}}{du} = L_n^{\alpha\prime}$

I)Se desea encontrar una relación como la siguiente

$$(k+1)L_n^{k+1} + uL_n^{k+1\prime} \sim L_n^k$$

De la identidad d) en el segundo término

$$\begin{aligned}(k+1)L_n^{k+1} + uL_n^{k+1\prime} &= (k+1)L_n^{k+1} + nL_n^{k+1} - (n+k+1)L_{n-1}^{k+1} \\ &= (n+k+1)(L_n^{k+1} - L_{n-1}^{k+1})\end{aligned}$$

de la identidad b)

$$= (n+k+1)(L_n^{k+1} + L_n^{k\prime})$$

y de la identidad d) otra vez

$$= (n+k+1)(L_n^{k+1} + \frac{n}{u}L_n^k - \frac{(n+k)}{u}L_{n-1}^k)$$

Despejando $(n+k)L_{n-1}^k$ de c), sustituyendo en el tercer término y agrupando tenemos que

$$= (n+k+1)(-\frac{(n+k+1-u)}{u}L_n^k + \frac{(n+1)}{u}L_{n+1}^k - {L_{n+1}^k}')$$

Utilizando nuevamente la identidad d) para sustituir en el último término

$$= (n+k+1)(- \frac{(n+k+1-u)}{u}L_n^k + \frac{(n+1)}{u}L_{n+1}^k - \frac{(n+1)}{u}L_{n+1}^k + \frac{(n+k+1)}{u}L_n^k)$$
$$= (n+k+1)L_n^k$$

y por lo tanto encontramos la siguiente relación

$$(k+1)L_n^{k+1} + u{L_n^{k+1}}' = (n+k+1)L_n^k$$

ll.-Ahora se busca una relación como la siguiente

$$L_n^{k\prime} - L_n^k \sim L_n^{k+1}$$

Utilizando L_n^k de la propiedad l y lo sustituimos

$$L_n^{k\prime} - L_n^k = L_n^{k\prime} - \frac{k+1}{(n+k+1)}L_n^{k+1} - \frac{u}{(n+k+1)}L_n^{k+1\prime}$$

Se sustituye la identidad b) en el primer término y la identidad d) en el último .

$$L_n^{k\prime} - L_n^k = -\frac{k+1}{(n+k+1)}L_n^{k+1} - L_{n-1}^{k+1} - \frac{n}{(n+k+1)}L_n^{k+1} - \frac{(n+k+1)}{(n+k+1)}L_{n-1}^{k+1}$$
$$= -L_n^{k+1}$$

Y por lo tanto obtenemos la siguiente relación

$$L_n^{k\prime} - L_n^k = -L_n^{k+1}$$

Conclusión

Se ha comprobado que el formalismo de la tetrada nula es una herramienta de gran utilidad no únicamente en problemas de gravitación sino que su introducción en problemas de ecuaciones cuánticas relativistas simplifica en gran medida el álgebra que en cálculos de forma tradicional resultan muy laboriosos. Además las transformaciones de índices tensoriales a tetradiales y y viceversa resultan inmediatas.

Una partícula de Dirac girando en un campo magnético constante orientado en una determinada dirección podrá moverse libremente en la dirección del campo ya que el momento lineal coincide con el momento generalizado.Sin embargo en el plano perpendicular al campo la energía de la partícula esta cuantizada y esta corresponde a los niveles de Landau(la energía dependen de la masa,del momento y del campo)además aparecen tanto valores positivos como negativos de la energía.Por otra parte estos niveles además de depender delnúmero cuántico principal N tambiíen dependen del número cuántico orbital m,por lo que cada nivel de energía se desdobla en N+1 subniveles.

Las funciones de Onda solución son polinomios asociados de Laguerre con una solución para espín positivo y otra para el espín negativo en la parte radial además van multiplicados por una parte periódica donde la energía ,el número cuántico orbital y el momento a lo largo del campo multiplican al tiempo, la componente angular y la componente z respectivamente.

El operador de espín resulto ser una constante de movimiento por lo tanto no existen transiciones de espín mientras la partícula está girando ,es decir con la orientación con la que empieza a girar permanece durante todo el movimiento y en el caso en que no existe un campo magnético se recupera el valor de espín de la mecánica cuántica no relativista. Debido a que el Hamiltoniano conmuta con el operador de espín entonces tienen eigenfunciones simultáneas y conocidas las del Hamiltoniano es posible calcular los valores del espiín.

Un resultado también importante es la propiedad del cuadrado del operador de espín ya que $\hat{S}^2$ tiene asociada una matriz diagonal permite desacoplar directamente la ec. de Dirac.

La energía del sistema es degenerada con respecto al espín ya que para valores positivos y negativos del espín de se les asocia una misma energía.

Referencias

[1] Luis de la Pena, Introducción a la mecánica cuántica, 2a Edición, F.C.E, México (1991).

[2] J.D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company (1964)

[3] Schweber S, An Introducción to Relativitic Quantum Field Theory, New York Harper & Raw Publishers (1961)

[4] George A. Arfken Mathematical methods for Physicists, Second edition Academic Press Inc New York.

[5] V.G. Bagrov and D. M. Gitman, Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, Kluwer Academic Publishers (1990).

[6] L. Landau y E. Lifshitz, Curso Abreviado Mecánica Cuantica, MIR (1989)

[7] S. Hacyan S., Dirac Spinors and Curvvature in the Null Tetrad Formulation of general relativity, Revista Mexicana de Física 38, No 1(1992)

[8] A.A. Sokolov and I.M. Ternov, Soviet Physics Doklady, Vol 8, No 12 (June 1964)

[9] Tim. C. Chapman and Darril J. Leiter, American Journal of Physics Vol 44 No. 9 (september 1976)

[10] J.S. Bell and JM Leinaas, Nuclear Physics B212 (1983)131-150

[11] E. Newman and R. Penrose, Journal of Mathematical Physics vol 3, Number 3 (May-June 1962)