8
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"RELACION ENTRE EL RADIO Y EL DIAMETRO DE STEINER EN GRAFICAS CONEXAS"

TESIS DE LICENCIATURA

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

CONCEPCION ALIDA CASALE NUÑEZ

Director: Víctor Neumann Lara

México, 1992

CONTENIDO

CAPITULO I

INTRODUCCION

Este trabajo está basado en el artículo "On the Radius and Steiner Diameter of a Graph" [6], y surge poco tiempo después de darse a conocer la publicación preliminar "Generalized Distance in Graphs" [3], en la cual los autores observan que el concepto de distancia en una gráfica conexa G puede definirse para conjuntos de más de dos vértices.

Sabemos que en una gráfica conexa la distancia entre dos vértices v y u es el mínimo número posible de aristas que tiene una subgráfica conexa de G que contenga tanto a v como a u.

En [3] se define la *distancia de Steiner* d(S) para un subconjunto S de los vértices de G, como el mínimo número posible de aristas que contiene una subgráfica conexa de G que contenga a S.

A partir de la definición de *distancia de Steiner*, se definen los conceptos de *n-excentricidad de Steiner* $e_n(v)$ para un vértice $v \in V(G)$, *n-radio de Steiner de* G $\text{rad}_n G$ y *n-diámetro de Steiner de* G $\text{diám}_n G$ como sigue[1]:

[1]Denominaremos a lo largo de este trabajo a la n-excentricidad de Steiner, al n-diámetro de Steiner de G, al n-radio de Steiner de G y al n-centro de Steiner de G, como n-excentricidad, n-diámetro, n-radio y n-centro, respectivamente.

Para una gráfica conexa de orden p y un entero n con $2 \leq n \leq p$:

La *n-excentricidad* $e_n(v)$ de un vértice v de G se define como el máximo valor de d(S) sobre todos los subconjuntos S de V(G) con $v \in S$ y $|S| = n$.

La mínima n-excentricidad entre todos los vértices de G se denomina *n-radio* de G $\text{rad}_n G$.

La máxima n-excentricidad de Steiner entre los vértices de G es el *n-diámetro* $\text{diám}_n G$.

Es bien conocido que para toda gráfica conexa G se tiene que diám G ≤ 2 rad G (teorema 2.3). La relación $\text{diám}_n G \leq 2 \text{ rad}_n G$ para toda gráfica conexa de orden $p \geq n$, $n \geq 2$, también se cumple (ver pág. 63), por lo cual el conjunto:

$$S_n = \left\{ \frac{\text{diám}_n G}{\text{rad}_n G}, \text{ tal que G es conexa de orden } p \geq n \right\}$$

está acotado superiormente y como es no vacío puede definirse $\psi(n) = \sup S_n$.

En [6] se prueba que $\psi(n) \geq \frac{2(n+1)}{2n-1}$, que $\psi(3) = \frac{8}{5}$, se afirma que $\psi(4) = \frac{10}{7}$ y se conjetura que $\psi(n) = \frac{2(n+1)}{2n-1}$. Sin embargo, la demostración que dan los autores para $\psi(4) = \frac{10}{7}$ adolece de un error y sólo prueban que $\psi(4) \geq \frac{10}{7}$.

En este trabajo se demuestra que $\psi(4) \leq \frac{45}{31}$, que $\psi(5) \leq \frac{51}{37}$ y que para toda n, $\psi(n) \leq 1 + \frac{2}{n}$. Como se puede observar, el problema de encontrar el valor de $\psi(n)$ queda abierto para $n \geq 4$.

A continuación, describiremos brevemente lo que trata cada uno de los apartados de este trabajo:

En el capítulo 2 se encuentran los conceptos básicos necesarios para familiarizarse con lo que posteriormente se desarrollará, así como algunos teoremas cuyos resultados serán de utilidad.

En el capítulo 3 se define la distancia de Steiner, y los conceptos relacionados con ella; en la sección "Arboles de Steiner" se introduce este concepto y se demuestran algunos lemas necesarios para la comprobación del teorema de G. Chartrand, O. R. Oellermann, S. Tian y H. B. Zou, quienes conjeturan que se puede extender a todas las gráficas conexas, esto es, que para todo entero $n \geq 3$ y toda gráfica conexa de orden $p \geq n$ se tiene que $\text{diám}_n G \leq \frac{n}{n-1} \text{rad}_n G$. Lo anterior es desmentido por M. A. Henning, O. R. Oellermann y H. C. Swart, pues demuestran que es posible encontrar, para todo entero positivo n, una gráfica conexa G_n de orden $p \geq n$ que cumple con la propiedad: $\text{diám}_n G_n = \frac{2(n+1)}{2n-1} \text{rad}_n G_n$. En [6] se construye para cada n una familia infinita de tales gráficas G_n y se afirma que todas tienen la propiedad, esta afirmación será refutada mediante un contraejemplo en la sección "Una aclaración al teorema 3.8".

En el capítulo 4 se define la función $\psi(n)$, y se demuestra que $\psi(3) = \frac{8}{5}$, que $\psi(4) \leq \frac{45}{31}$, y que $\psi(5) \leq \frac{51}{37}$.

Finalmente, en el capítulo 5, se demuestra el teorema de V. Neumann-Lara en donde se afirma que para toda n, $\psi(n) \leq 1 + \frac{2}{n}$.

(Sólo una aclaración: con el fin de colocar las figuras del modo más conveniente al texto y de no dejar demasiado espacio en blanco, introduje algunos recuadros que no tienen nada que ver con el desarrollo del trabajo).

CAPITULO II

PRELIMINARES

Aunque la terminología utilizada a lo largo de este trabajo sea familiar para muchos, se proporcionarán todas las definiciones necesarias para la comprensión del mismo, ya que no se requiere de mayores antecedentes.

Se demostrarán también algunos teoremas que ayudan en la obtención de las pruebas subsecuentes

CONCEPTOS BASICOS [2,3]

Una *gráfica* $G = (V, A, f)$ es un objeto matemático que consta de:

i. Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos se llaman *vértices* de G.

ii. Un conjunto $A = A(G)$, el conjunto de las *aristas* de G.

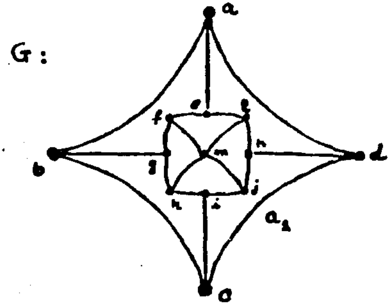
iii. Una función $f : A(G) \longrightarrow V(G)^{(2)}$, la *función de incidencia* de G, que asocia a cada arista de G un par no ordenado de vértices, no necesariamente distintos de V(G), los cuales son sus extremos.

Si G es una gráfica, representamos cada vértice v de V(G) por un punto del plano y cada arista a de A(G), donde $f(a) = \{u, v\}$, por un

[2] Esta parte está basada, casi en su totalidad, en Introducción a la teoría de gráficas de Víctor Neumann Lara [7].

[3] El lector podrá encontrar en [1], [5], y [7] más información al respecto.

arco o línea que una al vértice *v* con el *u*.



$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, n, l, m\}$,

y por ejemplo,

$f(a_1) = \{c, d\}$

figura. I

Si a es una arista de G con extremos *u* y *v* puede ser denotada como *uv*.

Sean G = (V, A, f) y G' = (V', A', f') dos gráficas. Se dice que G' es *subgráfica* de G (en símbolos $G' \leq G$) si $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ y $f(a') = f'(a')$ para toda arista *a'* de G'.

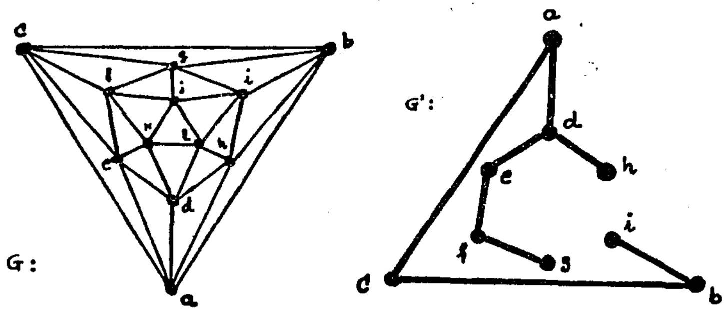


figura. II

La *valencia* $\text{val}_G(v)$ de un vértice *v* de G es el número de veces que *v* figura como extremo de una arista en G.

Un *camino* en G es una sucesión $\gamma := (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ de vértices y aristas, no necesariamente distintos, tal que los extremos de a_i son v_{i-1} y v_i. Es *cerrado* si coinciden el primer vértice con el último (sus extremos) y *abierto* si no coinciden.

Consideraremos el *camino nulo*, aquél que tiene longitud cero.

Un camino que no repite aristas se llama *paseo*.

Si el camino no repite vértices se denomina *trayectoria*.

Usualmente denotamos un camino por la letra griega γ, para ser más específicos si $\gamma :=$ vu-camino (paseo o trayectoria) querremos indicar que γ se inicia en el vértice v y termina en el u.

Si $\gamma := (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ es un camino, éste queda determinado por la sucesión de vértices $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ en la cual dos vértices consecutivos son siempre adyacentes.

Un vu-paseo (resp. vu-trayectoria) se denomina *cegado* si usa todas las aristas de G que inciden en u (resp. todos los vértices adyacentes a u).

Un *paseo euleriano* en una gráfica G es un paseo que utiliza todas las aristas de G.

Un *ciclo* es un paseo cerrado que no repite vértices, salvo el primero que sólo se repite al final.

Si γ es una trayectoria abierta, el interior de γ (en símbolos $\mathring{\gamma}$) es la trayectoria que se obtiene quitando los vértices extremos de γ y las aristas incidentes en ellos.

Una *gráfica conexa*[4] G es aquélla en la cual encontramos siempre, para cualquier par de vértices de V(G), una trayectoria que los una.

Un *bosque* B es una gráfica sin ciclos (*gráfica acíclica*).

[4] A lo largo de todo este trabajo consideraremos a G como una gráfica conexa y finita.

Un *árbol* T es una gráfica acíclica y conexa. Los vértices de valencia uno en T se llaman ***vértices terminales*** y constituyen el conjunto de vértices terminales de T denotado por Ter(T). (Ter(T) = $\{v \in V(T)$, tal que v es vértice terminal$\}$.)

Una gráfica G es ***bipartita*** si existe una partición de V en $\{V_1, V_2\}$ tal que toda arista de G es una V_1V_2-arista, esto es, una arista con un extremo en V_1 y otro en V_2.

Si M y N son dos conjuntos ajenos con $|M| = m$ y $|N| = n$, la gráfica $(V = M \cup N, A, f)$ donde $A = \{ uv$, tal que $u \in M$, y $v \in N \}$ y $f(u, v) = \{u, v\}$ se denota por $K_{m,n}$ y se denomina ***gráfica bipartita completa***.

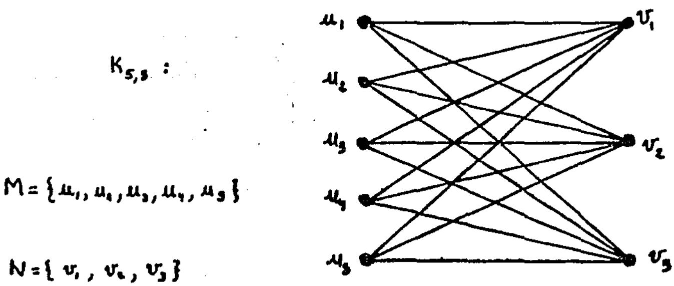


figura. iii

Si G es una gráfica conexa y v, $u \in V(G)$ definimos la *distancia* en G entre los vértices u y v $d_G(u, v)$ (o $d(u, v)$), como la mínima de las longitudes correspondientes a los uv-caminos en G.

Esta función satisface:

i. $d_G(u, v) \geq 0$ para todos los vértices v, u en V.
$d_G(u, v) = 0$ si y sólo si $v = u$.

ii. $d_G(u, v) = d_G(v, u)$ (simetría).

iii. $d_G(u, v) + d_G(v, \xi) \geq d_G(u, \xi)$ (desigualdad del triángulo).

Y por lo tanto es efectivamente una distancia.

Podemos entonces definir lo siguiente:

La *excentricidad* de un vértice v de G, $e_G(v)$ como:

$$\text{máx}_{u \in V(G)} d(u, v)$$

El *radio* de G, rad G como:

$$\min_{v \in V(G)} \left(e_G(v) \right)$$

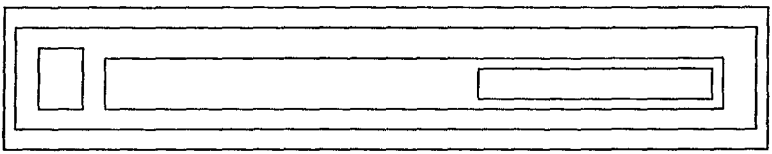
El *diámetro* de G, diám G como:

$$\text{máx}_{v \in V(G)} \left(e_G(v) \right)$$

El *centro* C(G) de G es la subgráfica de G inducida por aquellos vértices v con la propiedad de que $e_G(v)$ = rad G. También se considera $C(G) := \{v \in V(G)$, tales que $e_G(v) = \text{rad } G\}$.

Es conocido también el hecho de que si H es una subgráfica de una gráfica conexa G y v es un vértice de G, entonces *la distancia de v a H*, denotada por $d(v, H)$ o $d_G(v, H)$, es la distancia más corta de v a algún vértice de H.

El número de aristas de una gráfica G se denomina *tamaño* de G y se denota por q(G).



TEOREMAS BASICOS[5]

2.1 Teorema

Sea P un paseo cegado no nulo en G:

i. Si G es acíclica, P termina en un vértice de valencia uno.

ii. Si todo vértice de G tiene valencia par entonces P es cerrado.

Demostración:

i. Sea P un *uw*-paseo cegado no nulo en G. Como G es acíclica, P está necesariamente en una componente conexa T de un bosque, y ésta es un árbol, por lo tanto P es una trayectoria, pues si repitiera vértices se formaría un ciclo en G lo cual es imposible. En consecuencia si P no termina en un vértice *w* de valencia uno no estaría utilizando todas las aristas que inciden en *w*, lo cual no puede suceder por ser P cegado.□

ii. Esto es claro ya que si P se inicia en un vértice *u*, a cualquier vértice que lleguemos, como tiene valencia par, necesariamente tendremos que salir, de tal manera que el único vértice del cual se pueden utilizar todas las aristas incidentes en él y al que podamos llegar sin tener que volver a salir nuevamente es *u*, por lo tanto P es cerrado.□

2.2 Teorema

El número de aristas de un árbol T es igual al número de vértices menos uno.

Demostración:

Sea n el número de vértices de T, procederemos por inducción

[5] Nos hemos basado fundamentalmente para esta parte en [7].

sobre n.

Si $n = 1$ el resultado es obvio.

Supongamos válida la afirmación para $n \leq k$.

Sea $n = K + 1$, por el teorema anterior (inciso *i*), T tiene un vértice u de valencia uno. Es claro que $T - \{u\}$ es un árbol con una arista menos que T y k vértices, por lo cual, el número de aristas de $T - \{u\}$ es $k - 1$. Luego T tiene k aristas.□

2.3 Teorema

Si G es una gráfica conexa de orden $p \geq 2$, entonces:

$$\text{diám}_2 G \leq 2 \text{ rad}_2 G$$

Demostración:

Sean v, $u \in V(G)$, tales que $d(v, u) = \text{diám}_2 G$. (1)

Sea $x \in V(G)$ tal que $e_2(x, G) = \text{rad}_2 G$,

entonces, para cualquier vértice $w \in V(G)$, tenemos que,

$$d(x, w) = d(w, x) \leq e_2(x, G) = \text{rad}_2 G, \tag{2}$$

y por la desigualdad del triángulo:

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v), \tag{3}$$

por (1), (2) y (3) obtenemos:

$\text{diám}_2 G \leq \text{rad}_2 G + \text{rad}_2 G$, o lo que es lo mismo, $\text{diám}_2 G \leq 2 \text{ rad}_2 G$, que es lo que se quería demostrar.□

2.4 Teorema

Sea $G = (V, A, \varphi)$, G es conexa si y sólo si para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de V, G contiene V_1V_2-aristas.

Demostración:

$\Rightarrow$ Supongamos que G es conexa y que existe una partición $\{V_1, V_2\}$

de V tal que G no contiene V_1V_2-aristas. Sean $v \in V_1$ y $u \in V_2$, como no existen V_1V_2-aristas, tampoco existe una trayectoria en G que una v con u, lo cual contradice la conexidad de G.□

⇐ Sean u_0, $v \in V(G)$, sin pérdida de generalidad, supondremos que $u_0 \neq v$.

Sea (Υ_1, X_1) una partición de V(G), donde $\Upsilon_1 = \{u_0\}$ y $X_1 = V(G)\setminus\{u_0\}$. Por hipótesis existe una Υ_1X_1-arista $a_1 = u_0u_1$ en G, donde $u_1 \in X_1$.

Si $u_1 = v$ ya terminamos, si no, sea (Υ_2, X_2) otra partición de V(G), donde $\Upsilon_2 = \{u_0, u_1\}$ (nótese que la subgráfica inducida por Υ_2 es conexa), y $X_2 = V(G)\setminus\{u_0, u_1\}$; nuevamente, existe una Υ_2X_2-arista $a_2 = u_iu_2$ ($i \in \{0, 1\}$) en G y $u_2 \in X_2$, si $u_2 = v$ ya acabamos, si no, tomamos otra partición (Υ_3, X_3) donde $\Upsilon_3 = \{u_0, u_1, u_2\}$ (nótese nuevamente, que la subgráfica inducida por Υ_3 es conexa), y $X_3 = V(G)\setminus\Upsilon_3$ ...

Como G es finita, en algún momento tendremos Υ_k conexo y una Υ_kv-arista, entonces la gráfica inducida por $\Upsilon_k \cup \{v\}$ es conexa y contiene tanto a u_0 como a v y por lo tanto existe una trayectoria de u_0 a v.

Lo anterior indica que para cualquier par de vértices en V(G) existe una trayectoria que los une y por lo tanto G es conexa.□

2.5 Teorema [Euler]

Si G es una gráfica conexa, no trivial, entonces G posee un paseo euleriano cerrado si y sólo si todos los vértices de G tienen valencia par.

Demostración:

i. Supongamos que G tiene un paseo euleriano cerrado Π con origen *O*. Si se orientan las aristas de G según aparecen en Π, se observa que para cualquier vértice *u* de G: si $u \neq O$, cada vez que se entra a *u*, al recorrer Π, se sale de *u* inmediatamente después, esto es, a *u* entra exactamente el mismo número de flechas que sale, así, la valencia de *u* es par.

El caso $u = O$ puede probarse de modo análogo. Se sigue pues, que todas las valencias de G son pares.

ii. Supongamos ahora que todas las valencias de G son pares.

Considérese un paseo cegado Π a partir de *O*. Por el teorema 2.1, Π es cerrado. Elijamos Π de longitud máxima: mostraremos que Π es euleriano. Supongamos que no lo fuera y considérese la gráfica $G_1 = G - A(\Pi)$. Obsérvese que todos los vértices de G_1 tienen valencia par. Por el teorema 2.4, G_1 contiene una arista *a* con al menos uno de sus extremos en $V(\Pi)$. Esto es claro si $V(\Pi) = V(G)$, pero si $V(\Pi) \neq V(G)$, también por el teorema 2.4, G contiene una $V(\Pi)(V(G) - V(\Pi))$-arista *a*.

Sea *u* uno de los extremos de *a* perteneciente a $V(\Pi)$ y consideremos un paseo cerrado Π_1 en G_1 con origen (y final) en *u* y cuya primera arista sea *a* (Π_1 existe por el teorema 2.1 inciso *ii*). Construyamos ahora un nuevo paseo cerrado como sigue: recórrase Π hasta llegar por primera vez a *u*; recórrase en seguida Π_1 (con lo cual regresamos a *u*) y continúese Π hasta su término. Este nuevo paseo es más largo que Π, lo cual está en contradicción con la maximalidad de Π, y por lo tanto el teorema se sigue.□

CAPITULO 3

DEFINICIONES[6]

El hecho de considerar la distancia entre dos vértices u y v en una gráfica conexa G como el mínimo número de aristas que tiene una subgráfica conexa de G que contenga tanto a u como a v, sugiere una generalización de este concepto. En [3] se define la distancia de Steiner como sigue:

Sea G una gráfica conexa y S un conjunto no vacío de vértices de G, entonces:

> La *distancia de Steiner* d(S) es el mínimo número posible de aristas que tiene una subgráfica conexa de G cuyo conjunto de vértices contenga a S.

También, se define en [3] lo siguiente:

Para una gráfica conexa de orden p y un entero n con $2 \leq n \leq p$:

> La *n-excentricidad de Steiner* $e_n(v)$ de un vértice v de G es el máximo valor de d(S) sobre todos los subconjuntos S de V(G) con $v \in S$ y $|S| = n$:

$$e_n(v) = \max_{\substack{v \in S \\ |S| = n}} d(S)$$

[6]El lector podrá encontrar en [2], [3], [4], [6] y [8] más información relacionada con el presente trabajo.

La mínima n-excentricidad de Steiner entre todos los vértices de G se denomina *n-radio de Steiner* de G, $rad_n G$:

$$rad_n G = \min(e_n(v))_{v\in V(G)}, \text{ esto es:}$$

$$rad_n G = \min_{v\in V(G)}\left(\max_{\substack{v\in S\\ |S|=n}} d(S)\right)$$

La máxima n-excentricidad de Steiner entre los vértices de G es el *n-diámetro de Steiner* de G, $diám_n G$:

$$diám_n G = máx(e_n(v))_{v\in V(G)}, \text{ esto es:}$$

$$diám_n G = máx_{v\in V(G)}\left(máx_{\substack{v\in S\\ |S|=n}} d(S)\right)$$

El *n-centro de Steiner* $C_n(G)$ de G es la subgráfica inducida por aquellos vértices $v \in V(G)$ con $e_n(v) = rad_n G$. También consideramos: $C_n(G) := \{v \in V(G)$, tales que $e_n(v) = rad_n G\}$.

Se puede observar que la 2-excentricidad, el 2-radio, el 2-diámetro y el 2-centro, coinciden con la excentricidad, el radio, el diámetro y el centro usuales.

Consideremos como ejemplo la gráfica de la figura 1.

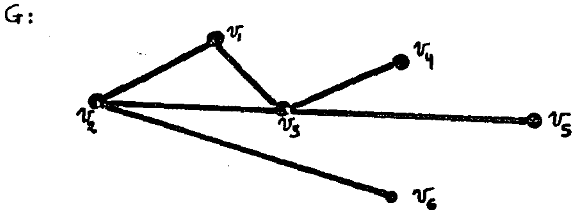


figura 1

Sea n = 4, obtendremos primero las 4-excentricidades de cada uno de los vértices $v_i \in V(G)$, para esto debemos fijarnos en todos los posibles subconjuntos S_i de V(G) tales que $v_i \in S_i$ y $|S| = 4$, y posteriormente en la distancia de Steiner para cada uno de los conjuntos S_i, la mayor de éstas será la excentricidad de v_i.

En nuestro ejemplo:

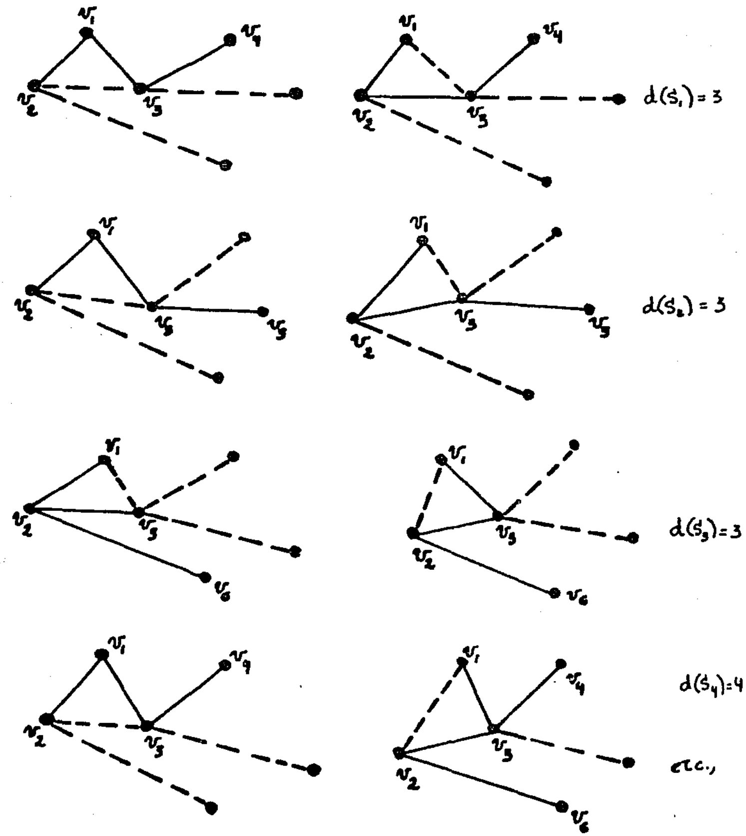


figura 1a

donde: $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$,

$S_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$, $S_4 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$,

$S_5 = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$, $S_6 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$,

$S_7 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, $S_8 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$, etc.,

y donde las lineas continuas junto con los vértices nombrados constituyen algunas de las posibles subgráficas G' de G, tales que $S_i \subseteq V(G')$.

Así: $e_4(v_1) = 4$, $e_4(v_2) = 4$, $e_4(v_3) = 3$, $e_4(v_4) = 4$, $e_4(v_5) = 4$, $e_4(v_6) = 4$. Con estos resultados se concluye que: $\text{rad}_4 G = 3$; $\text{diám}_4 G = 4$, y $C_4(G) = \{v_3\}$.

Con los conceptos establecidos, obtendremos los resultados necesarios para la demostración del teorema 3.7.

ARBOLES DE STEINER

3.1 Lema

Sea G una gráfica conexa, H una subgráfica conexa de G y $S \subseteq V(H)$, si $q(H) = d(S)$, entonces H es un árbol. Tal árbol se denomina *árbol de Steiner para S en G.*

Demostración:

Sea H una subgráfica conexa de G, $S \subseteq V(H)$ y $q(H) = d(S)$. supongamos que H no es un árbol, entonces H contiene al menos un ciclo.

Sea $V(H) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y supongamos que $\{v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\} \subseteq V(H)$ son los vértices de H que forman el ciclo, podemos entonces quitar una arista $v_{k_i} v_{k_{i+1}}$ en el ciclo, de tal forma que H siga siendo conexa (al quitarle a H una arista a del ciclo, $H' = H - a$ sigue siendo conexa ya que a no puede ser de corte, pues no seria parte de un ciclo) y no se altere su número de vértices. Obtenemos así, una subgráfica H' con la propiedad de que $V(H) = V(H')$, $S \leq V(H')$ y $q(H') < q(H) = d(S)$, lo cual es una contradicción ya que $d(S)$ es el mínimo número de aristas de una subgráfica conexa de G que contiene a S. Por lo tanto H es un árbol, que es lo que se quería demostrar.□

3.2 Lema

Si G es un árbol T y unimos cualesquiera dos vértices con una trayectoria, se formará un ciclo del cual podemos quitar el interior de cualquier trayectoria cuyos vértices tengan valencia igual a dos obteniendo nuevamente un árbol.

Demostración:

Sea T un árbol, $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y γ una $v_i v_j$-trayectoria tal que $V(\gamma) \cap V(T) = \{v_i, v_j\}$. Entonces $G = T \cup \gamma$ es una gráfica conexa con un ciclo C. Si γ_1 es cualquier trayectoria en C tal que $\mathring{\gamma}_1$ consta únicamente de vértices de valencia dos (fig. 2a), entonces:

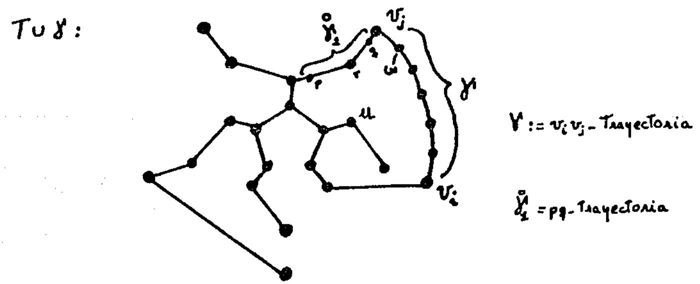


figura 2a

1. $T_1 = G - \mathring{\gamma}_1$ es conexo: si $u, w \in V(T_1)$ y la trayectoria que los une en G pasa por γ_1 entonces la trayectoria que los une en T_1

pasará por C - $\mathring{\gamma}_1$ (fig. 2b).

$T_1 = G \setminus \mathring{\gamma}_1$:

En T_1, la trayectoria de u a w pasa ahora por $C - \mathring{\gamma}_1$

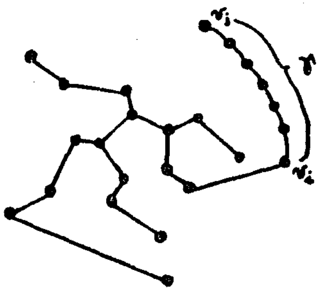
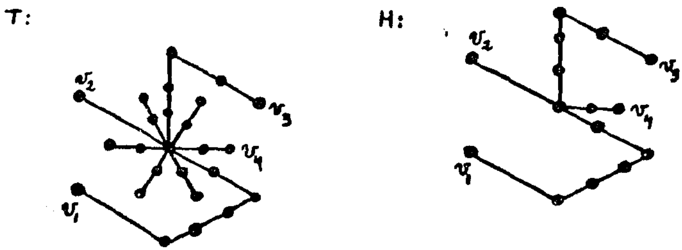


figura 2b

ii. T_1 es un árbol, ya que el único ciclo que había en G era C.□

3.3 Lema

Si G es un árbol T y S ⊆ V(T), entonces el árbol de Steiner H para S, es único (fig. 3).



donde $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

figura 3

Demostración:

Al suponer que existe un árbol T'≠ H tal que T' es otro árbol de Steiner para S en T, tendremos necesariamente que q(T') = d(S) = q(H); en un árbol las trayectorias entre cada par de vértices son únicas y en consecuencia las trayectorias entre los vértices de S también lo son, por lo tanto V(T') = V(H) y A(T') = A(H) lo cual implica que T'= H que es lo que se quería demostrar.□

Definición:

Si G es una gráfica conexa de orden p, n un entero tal que $p \geq n$, y $S \subseteq V(G)$, entonces S *realiza* el n-diámetro de G si y sólo si $|S| = n$ y $d(S) = \text{diám}_n G$.

3.4 Lema

Si G es una gráfica conexa de orden p y n un entero $2 < n \leq p$, entonces:

$$\text{diám}_{n-1} G \leq \text{rad}_n G.$$

Veamos un ejemplo:

$\text{diám}_2 G = 11$

$\text{rad}_2 G = 6$

$\text{diám}_3 G = 14$

$\text{rad}_3 G = 11$

$\text{diám}_4 G = 16$

$\text{rad}_4 G = 14$

$\text{diám}_5 G = 17$

$\text{rad}_5 G = 16$

G :

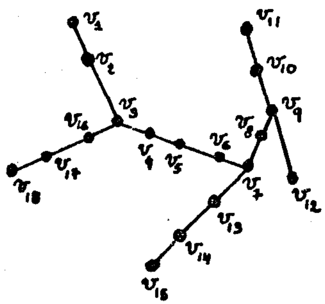


figura 4

Demostración:

Sea $S_0 \subseteq V(G)$ un conjunto de vértices que realiza el (n-1)-diámetro de G.

Sea $w_0 \in V(G)$ tal que $e_n(w_0) = \text{rad}_n G$.

Sea $S \subseteq V(G)$ tal que $S \supset S_0 \cup \{w_0\}$ y $|S| = n$.

En consecuencia tenemos :

$\text{diám}_{n-1}G = d(S_0) \le d(S)$, (porque $S_0 \subset S$); (1)

y, que $d(S) \le e_n(w_0) = \text{rad}_n G$, (porque $w_0 \in S$). (2)

Por (1) y (2), $\text{diám}_{n-1}G = d(S_0) \le d(S) \le e_n(w_0) = \text{rad}_n G$,

esto es:

$$\text{diám}_{n-1}G \le \text{rad}_n G,$$

que es lo que se quería demostrar.□

3.5 Lema

Sea T un árbol de orden $p \ge n$ con k vértices terminales y S un conjunto de vértices que realiza el n-diámetro de T.

1. Si $n \le k$, entonces $S \subseteq \text{Ter}(T)$.
2. Si $n \ge k$, entonces $S \supseteq \text{Ter}(T)$.

Demostración:

1. Sea $n \le k$ y sea $S \subseteq V(T)$ que realiza el n-diámetro de T.

Supongamos que $S \nsubseteq \text{Ter}(T)$.

Sea $v_0 \in S$, tal que $v_0 \notin \text{Ter}(T)$,

Consideremos a T' un subárbol de Steiner para $S - \{v_0\}$:

i. Si $v_0 \in V(T')$, entonces $d(S) = q(T')$, y como $n \le k$, existe $v_t \in \text{Ter}(T)$ tal que $v_t \notin (S - \{v_0\})$. Sea ξ el vértice de T' para el cual $d(v_t, T') = d(v_t, \xi)$, y llamemos Γ a la trayectoria de v_t a ξ.

T':

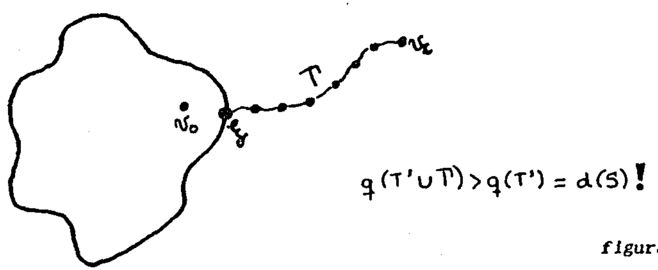


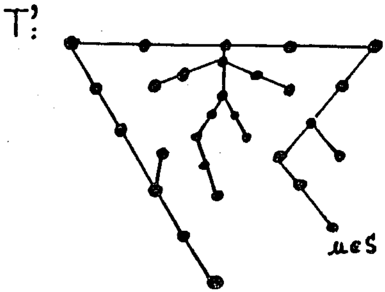
figura 5

Demostración:

A. Si $|Ter(T)| \leq n$ y $S \subseteq V(T)$ realiza el n-diámetro, por el lema 3.5 (parte 2), $S \supseteq Ter(T)$, por lo tanto $diám_n T = q(T)$.

Si $|Ter(T)| \leq n-1$ y $S \subseteq V(T)$ realiza el (n-1)-diámetro, de nuevo por el lema 3.5 (parte 2) $S \supseteq Ter(T)$, y así $diám_n T = diám_{n-1} T$, como $\frac{n}{n-1} > 1$ se obtiene $diám_n T < \frac{n}{n-1} diám_{n-1} T$, que es lo que se quería.□

B. Supongamos ahora que $|Ter(T)| \geq n$. Consideremos un conjunto $S \subseteq V(T)$ que realice el n-diámetro, por el lema 3.5 (parte 1), $S \subseteq Ter(T)$. Sea T' el árbol de Steiner para S, observemos que $Ter(T') = S$ y por lo tanto $diám_n T = q(T')$.



Supongamos que este es el árbol de Steiner para S en T.

figura 7

Para cada $u \in S$, sea T_u el árbol de Steiner para $S - \{ u \}$ así que $d(S - \{ u \}) = q(T_u)$ (fig. 8). (1)

Es claro que: $T_u \leq T' \leq T$, para toda $u \in S$, así que,

$d(S - \{ u \}) \leq diám_{n-1} T' \leq diám_{n-1} T$, como $|S| = n$, entonces,

$$\sum_{u \in S} d(S - \{ u \}) \leq n \; diám_{n-1} T. \qquad (2)$$

Como $T' \leq T' \cup \Gamma$ tendríamos que:

$$d((S - \{v_0\}) \cup \{v_t\}) = q(T' \cup \Gamma) > q(T') = d(S) = \text{diám}_n T,$$

lo cual es imposible, por lo tanto $S \subseteq Ter(T)$.□

ii. Supongamos ahora que $v_0 \notin T'$, consideremos $\xi \in V(T')$ tal que $d(v_0, T') = d(v_0, \xi)$ y sea Γ_1 la $v_0\xi$-trayectoria, como $v_0 \notin Ter(T)$ existe $v_t \in Ter(T)$, $v_t \notin S$, y Γ_2 una v_0v_t-trayectoria tal que si w es el primer vértice en Γ_1 después de v_0, entonces $w \notin V(\Gamma_2)$. Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ la trayectoria de ξ a v_t (esto es posible ya que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = v_0$).

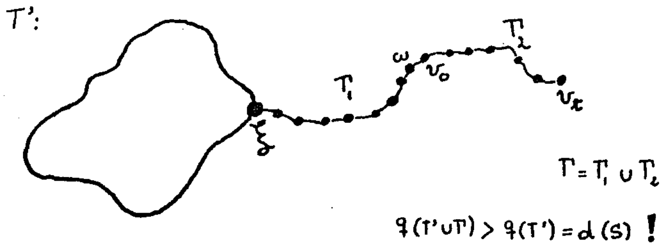


figura 6

Una vez más:

$$d((S-\{v_0\}) \cup \{v_t\}) = q(T' \cup \Gamma) > q(T') = d(S) = \text{diám}_n T,$$

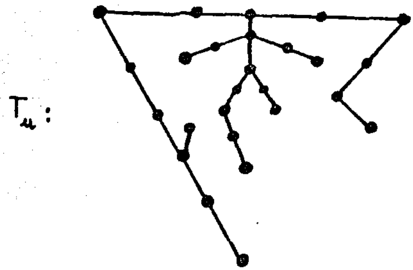
lo cual no es posible y por lo tanto $S \subseteq Ter(T)$.□

2. Si $n \geq k$ entonces $\text{diám}_n T = q(T)$ y por lo tanto el árbol de Steiner para S es T, de aquí que $S \supseteq Ter(T)$. Puesto que, si $v \in (Ter(T) - S)$ el árbol de Steiner para S estaría contenido en $T - \{v\}$.□

3.6 Lema

Sea $n \geq 3$ un entero y T un árbol de orden $p \geq n$, entonces:

$$\text{diám}_n T \leq \frac{n}{n-1} \text{diám}_{n-1} T.$$



$d(S-\{u\}) = q(T_u)$

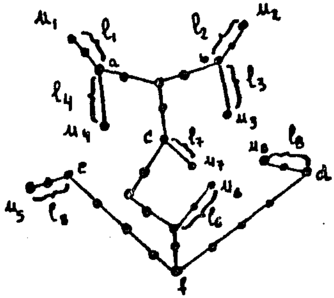
$q(T_{u_1}) \leq q(T') - 1$

figura 8

Consideremos por otra parte las longitudes de cada una de las trayectorias en T' de un vértice terminal u_i al primer vértice v_i también en T' cuya valencia sea mayor que dos: $l_i = d(u_i, v_i)$, donde $val(v_i) > 2$, es claro que (fig. 9):

$q(T_{u_1}) + l_1 = q(T')$; $q(T_{u_2}) + l_2 = q(T')$; ... ; $q(T_{u_n}) + l_n = q(T')$;

Si por ejemplo T':



sea γ_i la trayectoria tal que $q(\gamma_i) = l_i \; \forall i$, entonces, $T' - \bigcup_i (\gamma_i \setminus \{v_i\})$:

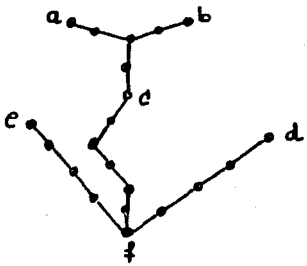


figura 9

Entonces $\sum_{u \in S} q(T_u) = n\, q(T') - \sum_1^n l_i$, esto es,

$\sum_{u \in S1} q(T_u) = n \text{ diám}_n T - \sum_1^n l_i$, es claro también que

$\text{diám}_n T = q(T') \geq \sum_1^n l_i$, por lo que obtenemos

$$\sum_{u \in S} q(T_u) \geq n \text{ diám}_n T - \text{diám}_n T \text{ , esto es}$$

$$\sum_{u \in S} q(T_u) \geq (n - 1) \text{ diám}_n T. \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3) se obtiene:

$(n - 1) \text{ diám}_n T \leq \sum_{u \in S} q(T_u) = \sum_{u \in S} d(S - \{ u \}) \leq n \text{ diám}_{n-1} T$, y por lo tanto:

$$\text{diám}_n T \leq \frac{n}{n-1} \text{ diám}_{n-1} T,$$

que es lo que se quería demostrar.□

Con ayuda de los lemas anteriores podemos demostrar lo siguiente:

3.7 Teorema [G. Chartrand, O. R. Oellermann, S. Tian y H. C. Zou]

Sea $n \geq 2$ un entero y T un árbol de orden $p \geq n$, entonces:

$$\text{diám}_n T \leq \frac{n}{n-1} \text{ rad}_n T.$$

Demostración:

Por el lema 3.4, $\text{diám}_{n-1} G \leq \text{rad}_n G$, en particular si G es un árbol T, tenemos que:

$$\text{diám}_{n-1} T \leq \text{rad}_n T. \qquad (1)$$

Por el lema 3.6:

$$\text{diám}_n T \leq \frac{n}{n-1} \text{ diám}_{n-1} T. \qquad (2)$$

De (1), como $n \geq 2$, tenemos que $\frac{n}{n-1} \text{ diám}_{n-1} T \leq \frac{n}{n-1} \text{ rad}_n T$, y junto con (2) obtenemos como resultado:

$$\text{diám}_n T \leq \frac{n}{n-1} \text{ rad}_n T,$$

que es lo que se quería demostrar.□

Podemos ver un ejemplo en la figura 10.

gráfica bipartita completa $K_{n,n}$ cuyos conjuntos partitas son: $U = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ y $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$.

Sea H_n la gráfica que se obtiene de $H - \{ u_i v_i$, tal que $1 \le i \le n \}$ agregando un nuevo vértice v adyacente a todos los vértices de U.

Sea $k = 1$, entonces G_n se obtiene de H_n subdividiendo cada arista del tipo $u_i v_j$ $2k-1$ veces (en este caso, una vez), y las aristas del tipo vu_i $k-1$ veces (en este caso, ninguna).

A continuación se muestra una representación de la gráfica que se ha construido.

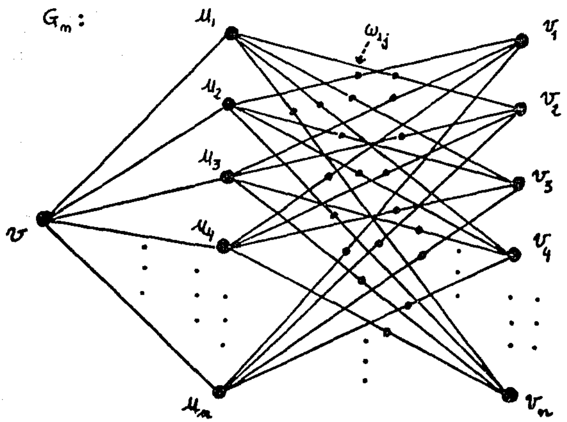


figura 11

Donde: $|V(G_n)| = 1 + n + n^2$, y

$V(G_n) = U \cup V \cup W \cup \{v\}$, donde

$W = \{w_{ij}: w_{ij} \in u_i v_j\text{-trayectoria},\ 1 \le i,\ j \le n \text{ y } j \ne i \}$

Para encontrar el n-diámetro y el n-radio deberemos encontrar tanto la mayor como la menor excentricidad de los vértices de G_n.

Consideremos para todos los casos lo siguiente:

1. Sea $S \subseteq V(G_n)$, $|S| = n$ y T un árbol de Steiner para S en G_n.

Para $n = 4$:

$diám_4 T = 12$

$rad_4 T = 9$

$12 = \frac{4}{3} \cdot 9$

Para $n = 5$:

$diám_5 T = 14$

$rad_5 T = 12$

$14 < \frac{5}{4} \cdot 12$

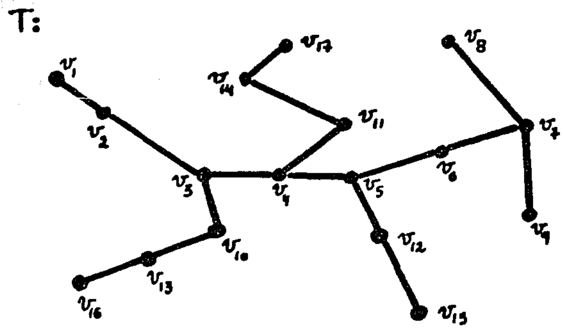


figura 10

Para $n = 2$ obtenemos la bien conocida cota para el diámetro de un árbol en términos de su radio: $diám_2 T \le 2\ rad_2 T$.

En [3] se conjetura que el teorema 3.7 se puede extender a todas las gráficas conexas, es decir: si $n \ge 3$ es un entero y G es una gráfica conexa, entonces $diám_n G \le \frac{n}{n-1} rad_n G$. El siguiente resultado desmiente tal conjetura:

EL TEOREMA DE HENNING, OELLERMAN Y SWART

3.8 Teorema [M. A. Henning, O. R. Oellerman y H. C. Swart]

Si $n \ge 3$ es un entero, entonces existe una gráfica conexa G, tal que :

$$diám_n G = \frac{2(n+1)}{2n-1} rad_n G.$$

Demostración:

Observemos primero que efectivamente

$\frac{n}{n-1} < \frac{2(n+1)}{2n-1}$, para toda $n > 2$ (para $n = 2$ se obtiene la igualdad).

Sea G_n la gráfica que se obtiene de la siguiente manera: sea H la

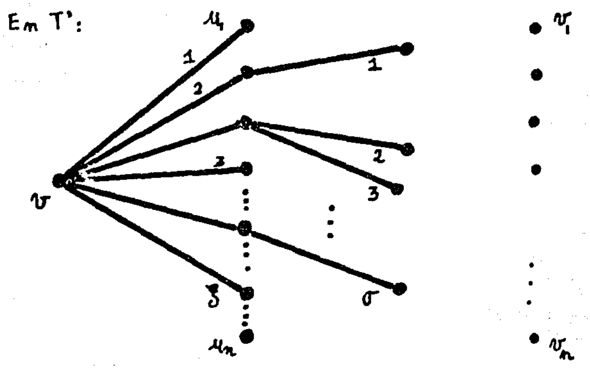


figura 13

iii) $2\nu + 1$ aristas más, que se obtienen como sigue (fig. 14):

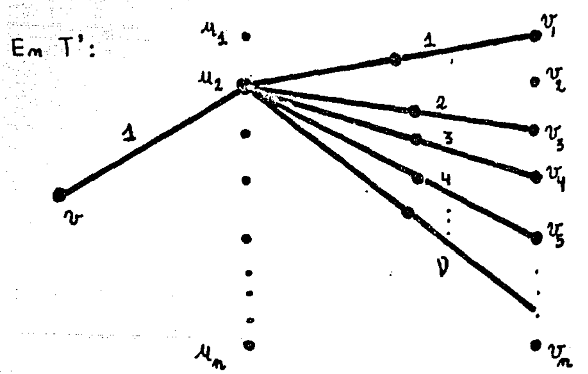


figura 14

como $|S \cap \mathbb{V}| < n$, existe $v_i \in \mathbb{V}$ (en la figura $i = 2$) tal que $v_i \notin S \cap \mathbb{V}$ y por lo tanto u_i es un vértice de $\mathbb{U}$ a través del cual se puede llegar por medio de una trayectoria a cualquier vértice de $S \cap \mathbb{V}$, consideremos, pues todas estas trayectorias y la arista de v a u_i.

Así que, como T es un árbol de Steiner para S en G_n el tamaño de *ii*. Sean $\xi = |S \cap U|$, $\sigma = |S \cap W|$, y $\nu = |S \cap V|$.

iii. $d(v, u_i) = 1$, para toda $u_i \in U$,

$d(v, w_{ij}) = 2$, para toda $w_{ij} \in W$, y

$d(v, v_i) = 3$, para toda $v_i \in V$.

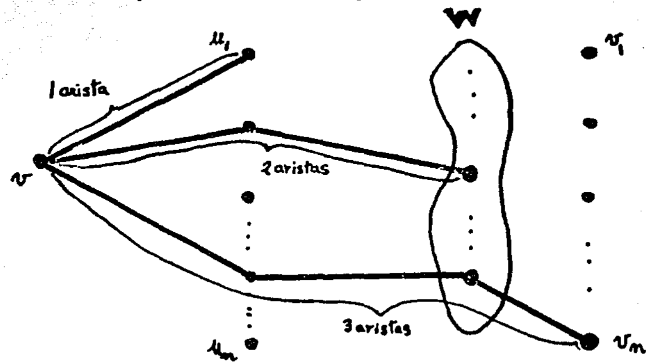
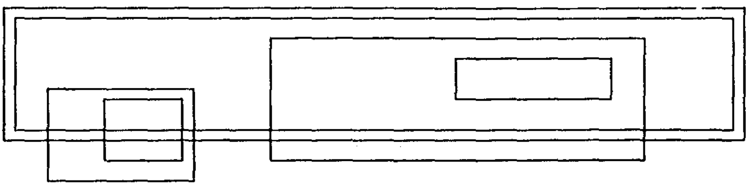


figura 12

I. Supongamos que $v \in S$, entonces $e_n(v) \leq 2n - 1$.

Demostración:

Construyamos un árbol T' de la siguiente manera: *i*) que tenga todas las aristas entre v y los vértices en $S \cap U$, a saber ξ aristas; *ii*) todas las trayectorias de longitud dos que parten de v a todos los vértices de $S \cap W$ que son 2σ (fig. 13) y,



T será menor o igual al de T', esto es,

$q(T) \le q(T') \le \xi + 2\sigma + 2\nu + 1 = 2\xi + 2\sigma + 2\nu + 1 - \xi$, como $\nu \in S$, entonces $\xi + \sigma + \nu = n - 1$, y por lo tanto, $q(T) \le 2(n - 1) + 1 - \xi$, esto es, $q(T) \le 2n - 1 - \xi \le 2n - 1$, lo cual implica que $e_n(v) \le 2n - 1$.

II. Si $v \notin S$ y $|S \cap V| < n$, entonces $e_n(u_1) \le 2n$ y $e_n(w_{ij}) \le 2n + 1$.

Demostración:

Como explicamos en el caso anterior, el tamaño de T es menor o igual al tamaño del árbol T' que construimos, esto es $q(T) \le 2(\xi + \sigma + \nu) + 1 - \xi$, sólo que en este caso como $v \notin S$, $\xi + \sigma + \nu = n$ y por lo tanto $q(T) \le 2n + 1 - \xi$, así:

a. Si $|S \cap U| = \xi = 1$ entonces $q(T) \le 2n$ lo que implica que $e_n(u_1) \le 2n$. Esto se debe a que, si $|S \cap U| > 1$ el tamaño de T disminuiría, recordemos que $e_n(p)$ $p \in V(G)$ es la máxima distancia de Steiner entre todos los posibles $S \subseteq V(G)$, $|S| = n$ y $p \in S$.

b. Si $S \cap U = \emptyset$, $q(T) \le 2n + 1$ y $e_n(w_{ij}) \le 2n + 1$. Como $|S \cap V| < n$ existe algún $w_{ij} \in S$.□

III. Si $S = V$, entonces $e_n(v_1) \le 2(n + 1)$.

Demostración:

En este caso, podemos construir un árbol T' en el que las aristas vu_1, vu_2 y las trayectorias de la forma u_1v_j $j \neq 1$ estén en T' al igual que la trayectoria v_1u_2 y nada más (fig. 15).

Así, $q(T) \le 2n + 2$ y en consecuencia $e_n(v, G_n) \le 2(n + 1)$.□

Veremos a continuación que las desigualdades anteriores para las n-excentricidades de cada uno de los vértices de G_n son realmente igualdades.

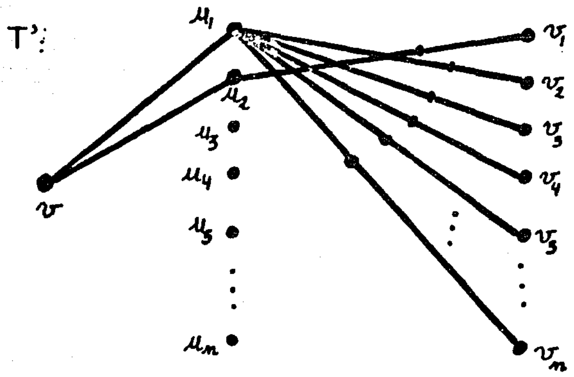


figura 15

IV. $e_n(v) = 2n - 1$.

Tomemos $S = \{v\} \cup (V - \{v_1\})$, como $|V \cap S| = n - 1$, en T existen al menos n − 1 trayectorias de longitud dos que parten de alguna v_i en S a algún vértice $u_i \in U$ y por lo menos una arista que parte de v a algún vértice u_i (fig. 16):

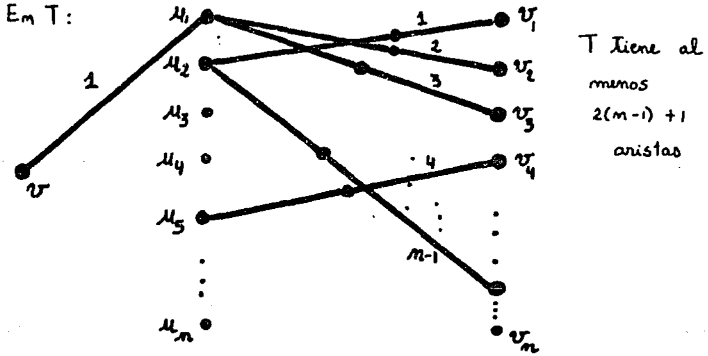


figura 16

así, tenemos que $q(T) \geq 2(n - 1) + 1 = 2n - 1$, por lo cual

$e_n(v) \geq 2n - 1$, como en **I** se demostró la desigualdad contraria, entonces, $e_n(v) = 2n - 1$.□

V. $e_n(v_i) = 2(n + 1)$.

Si consideremos ahora $S = V$, en T existen al menos n trayectorias de longitud dos que se inician en cada uno de los vértices $v_i \in V$, pero la unión de estas trayectorias de ninguna manera forma una subgráfica conexa, por lo que necesitamos al menos de dos aristas más para unirlas (fig. 17):

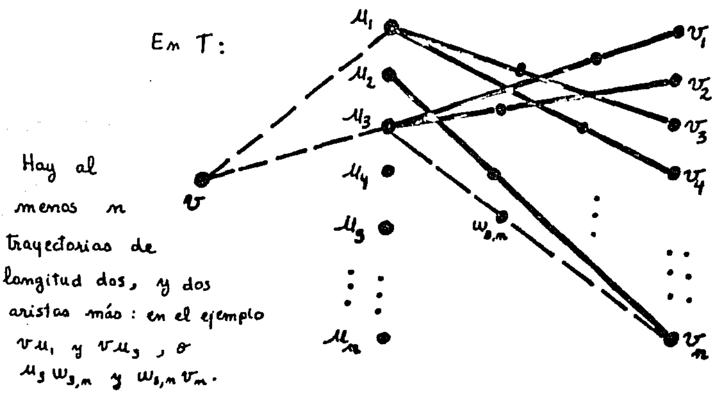


figura 17

tenemos entonces que $q(T) \geq 2n + 2 = 2(n + 1)$, por lo tanto $e_n(v_i) \geq 2(n + 1)$ y en consecuencia $e_n(v_i) = 2(n + 1)$, ya que en **III** se demostró la desigualdad contraria.□

VI. $e_n(u_i) = 2n$.

Sea $S = \{u_1\} \cup (V - \{v_2\})$, como $V - \{v_2\} \subseteq S$, T tiene al menos $n - 1$ trayectorias de longitud dos, nuevamente, la unión de estas trayectorias no forma una subgráfica conexa de G_n, entonces T tiene al menos dos aristas más (fig.18):

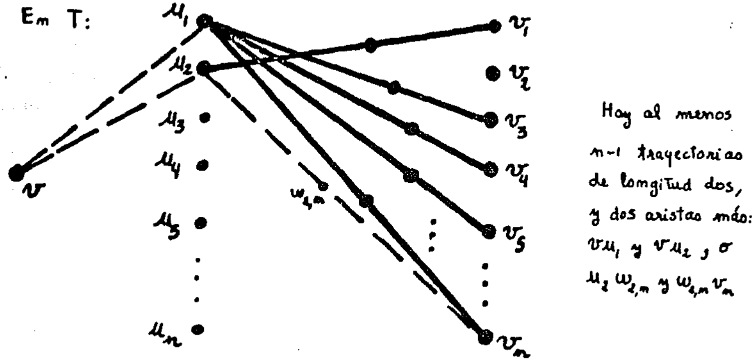


figura 18

así, $q(T) \ge 2(n - 1) + 2 = 2n - 2 + 2 = 2n$, esto es $e_n(u_1) \ge 2n$ por IIa $e_n(u_1) \le 2n$, por lo tanto $e_n(u_1, G_n) = 2n$.□

VII. $e_n(w_{1j}) = 2n + 1$.

Tomemos $S = \{w_{12}\} \cup (V - \{v_2\})$, w_{12} está en T, entonces, o bien $v_2 \in V(T)$, o $u_1 \in V(T)$, o ambos están en V(T), pero alguno es adyacente a w_{12} tenemos ya, al menos, una arista en T;

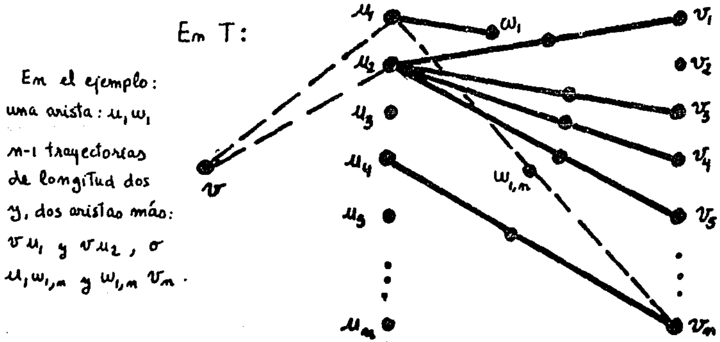


figura 19

trayectorias de la forma $u_i v_{i+1}$[7], tomemos en cada una de estas trayectorias los vértices que se encuentran a distancia tres aristas de u_i (fig.20):

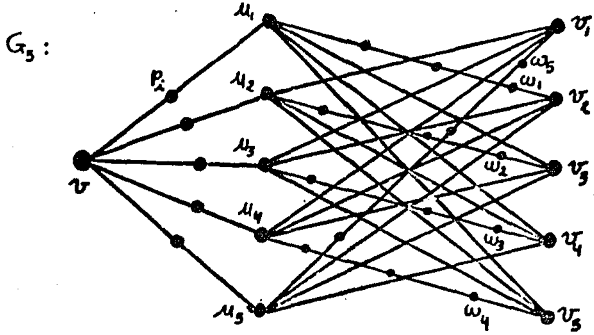


figura 20

obsérvese que $d(v, u_i) = 2$, $d(u_i, w_i) = 3$, $d(v_{i+1}, w_i) = 1$, para toda i.

Al considerar un árbol de Steiner T para W en G_5, afirmamos lo siguiente:

3.9 Proposición

$$\boxed{d(W) = q(T) = 25.}$$

Para la demostración hará falta tomar en consideración otros lemas.

3.10 Lema

$$\text{Si } S' \subseteq (V \cup U) \text{ entonces } d(S') \geq 4\Big(\,|S'| - 1\,\Big).$$

[7] Para $i = n$, tomaremos siempre $v_{i+1} = v_1$.

como $V - \{v_2\} \subseteq V(T)$, T tiene al menos $n - 1$ trayectorias de longitud dos, pero T aún no es una subgráfica conexa de G_n, debe tener al menos dos aristas más (fig. 19).

Así que, $q(T) \geq 2(n-1) + 3 = 2n + 1$, entonces $e_n(w_{ij}) \geq 2n + 1$, y por *IIb* resulta que $e_n(w_{ij}, G_n) = 2n + 1$.□

Con lo demostrado en los puntos anteriores, podemos afirmar que:

$$\text{diám}_n G_n = 2(n+1) \text{ y que } \text{rad}_n G_n = 2n - 1,$$

con lo cual:

$$\text{diám}_n G_n = 2(n+1) = \frac{2(n+1)}{2n-1}\, 2n-1 = \frac{2(n+1)}{2n-1} \text{rad}_n G_n$$

que es lo que se quería demostrar.□

UNA ACLARACION AL TEOREMA 3.8

La construcción de la gráfica G_n para cualquier $k \geq 1$ (pág. 33), nos da una gama infinita de gráficas conexas $G_{n,k}$ para cada n al subdividir las aristas del tipo vu_i, $k - 1$ veces, y las del tipo u_iv_j, $2k - 1$ veces; en [6] se afirma que para toda $k \geq 1$ $\text{diám}_n G_{n,k} = \frac{2(n+1)}{2n-1} \text{rad}_n G_{n,k}$, nuestro teorema 3.8 prueba esto sólo para $k = 1$.

El propósito de esta sección es demostrar que no todas las gráficas $G_{n,k}$ construidas así cumplen con la propiedad establecida. Consideraremos la gráfica $G_{n,k}$ para $n = 5$, $k = 2$, y un conjunto de vértices de cardinalidad 5 para el cual la distancia de Steiner es mayor que $2k(n + 1)$, en particular mayor que 24 para $G_{5,2} := G_5$.

Sea pues $n = 5$ y $k = 2$,

tomaremos $W = \{ w_i$, tal que, $w_i \in V(G_5)$, $1 \leq i \leq 5 \}$ donde los vértices w_i están elegidos de la siguiente manera: como $k = 2$, en las trayectorias vu_i habrá un vértice intermedio p_i $1 \leq i \leq 5$, y en cada una de las trayectorias u_iv_j, tres vértices; fijémonos en las

A es un árbol ya que si no lo fuera, existiría entre algún par de vértices de A al menos dos trayectorias distintas que los unen, las cuales provienen de T', esto imposible ya que T' es un árbol.

Como A es un árbol y $|V(A)| \geq |S'|$, entonces, $q(A) = |V(A)| - 1 \geq |S'| - 1$, como cada arista en A equivale en T' a una trayectoria de longitud cuatro, $q(T) = d(S') \geq 4\Big(|S'| - 1\Big)$, que es lo que se quería demostrar.□

3.11 Lema: $|V(T) \cap (\mathbb{U} \cup \mathbb{V})| \geq 5$.

Como T es conexo, para que w_i pueda conectarse a los otros vértices de $\mathbb{W}$ en T, existen sólo dos posibilidades: la arista $w_i v_{i+1}$, o la trayectoria $u_i w_i$ (de longitud tres) está en T, en consecuencia se obtiene el resultado que buscamos (fig.23).□

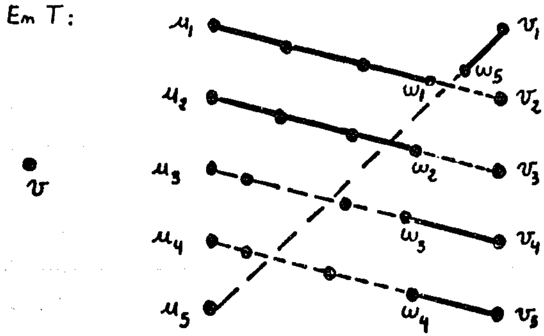


figura 23

3.12 Lema: $|V(T) \cap \mathbb{U}| \geq 2$.

Si $V(T) \cap \mathbb{U} = \varnothing$, entonces cualquier w_i estaría desconectado de los demás, ya que para conectarlo con cualquier otro es necesaria una trayectoria $v_{i+1} u_j$, de las cuales no habría en T (fig. 24).

Demostración:

Sea T' un árbol de Steiner para $S' \subseteq (U \cup V)$. Formaremos una nueva gráfica **A**:

$V(A) = V(T') \cap (V \cup U)$ (obsérvese que $|V(A)| \geq |S'|$), y se pone una arista entre u_i y v_j si la trayectoria de $u_i v_j$ está en T', y una arista entre u_i y u_j si la trayectoria $u_i p_i v\, p_j u_j$ está en T'.

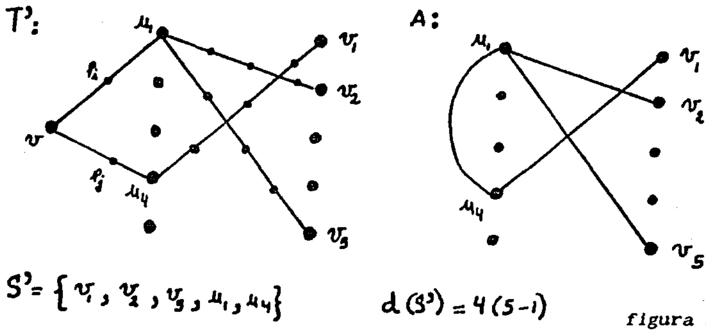


figura 21

A es conexa pues como T' es conexo, para cualquier par de vértices en S' existe una trayectoria que los une, lo cual se traducirá en **A** en una trayectoria que los sigue uniendo aunque de menor longitud.

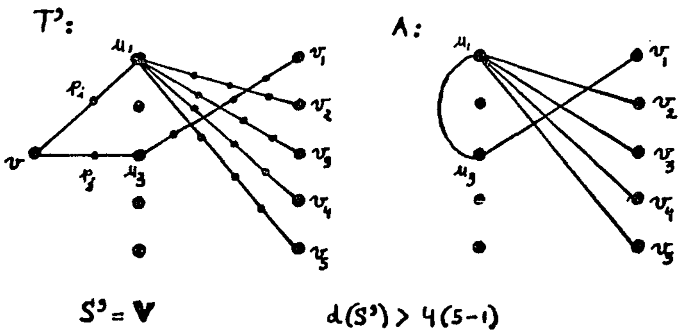


figura 22

Em T:

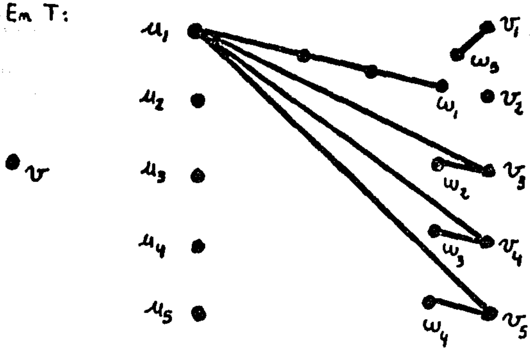


figura 26

pero w_5 no está en ninguna de ellas; sabemos que debe existir una trayectoria en T de w_5 a u_1, pero esta trayectoria pasa necesariamente por v_1 lo cual es imposible.□

3.13 Proposición

$$\boxed{Ter(T) = W.}$$

Demostraremos antes el

3.14 Lema

Sea G una gráfica conexa de orden p y $S \subseteq V(G)$ con $|S| = n$, donde $n \leq p$. Sea T un árbol de Steiner para S en G, entonces $Ter(T) \subseteq S$.

Demostración:

Sea $t \in Ter(T)$ y supongamos que $t \notin S$, consideremos $T_1 = T - \{ t \}$, entonces $S \subseteq V(T_1)$ y $q(T_1) < q(T)$, lo cual es una contradicción y por lo tanto el sublema es cierto.□

Demostración de la proposición 3.13:

Por el lema 3.14: $Ter\ (T) \subseteq W$.

Supongamos ahora que existe $w_1 \in W$ tal que $w_1 \notin Ter\ (T)$,

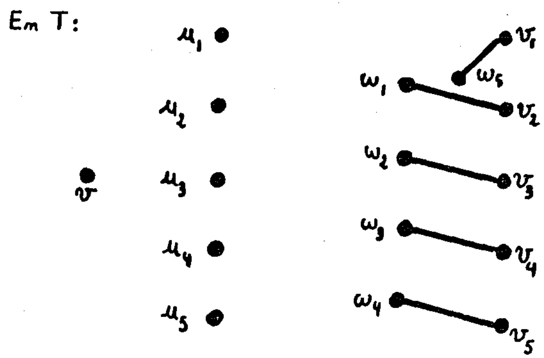


figura 24

Si $|V(T) \cap U| = 1$ supondremos sin pérdida de generalidad que $V(T) \cap U = \{u_1\}$. Como $u_i \notin V(T)$, $2 \leq i \leq 5$, entonces por el lema 3.11: v_1, v_3, v_4, y v_5, sí están en $V(T)$ y en consecuencia las aristas w_5v_1, w_2v_3, w_3v_4, y w_4v_5 están en $A(T)$ (fig. 25).

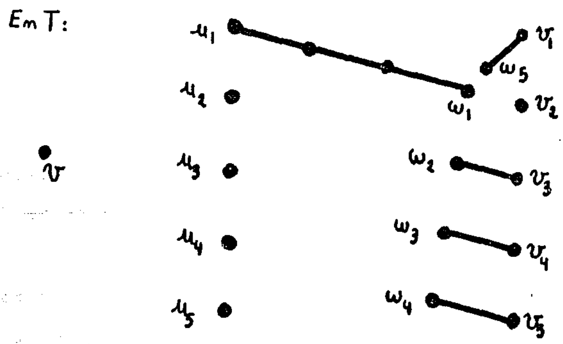


figura 25

T contiene a lo más tres trayectorias de longitud cinco que parten de u_1 y llegan a algún w_i (fig. 26).

entonces la trayectoria $u_i v_{i+1}$ está en T (fig. 27).

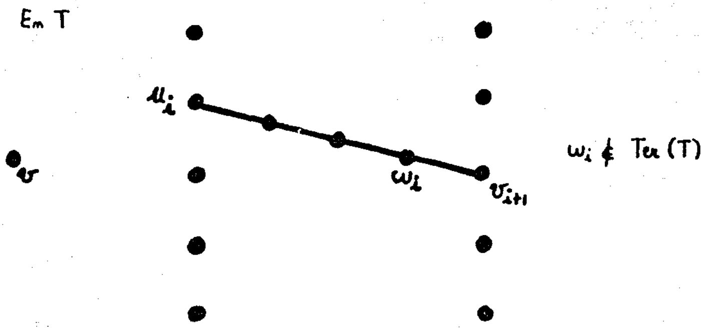


figura 27

Sea $\beta = val_T(v_{i+1})$.

Como $v_{i+1} \notin W$ entonces $v_{i+1} \notin Ter(T)$ y por lo tanto $\beta \geq 2$.

Sean $\left(\gamma_r := v_{i+1}u_{jr}\text{-trayectoria} \right)_{r=1}^{\beta}$ las trayectorias en T que parten de v_{i+1} a algún $u_j \in U$, y donde $u_{j1} = u_i$ (fig. 28).

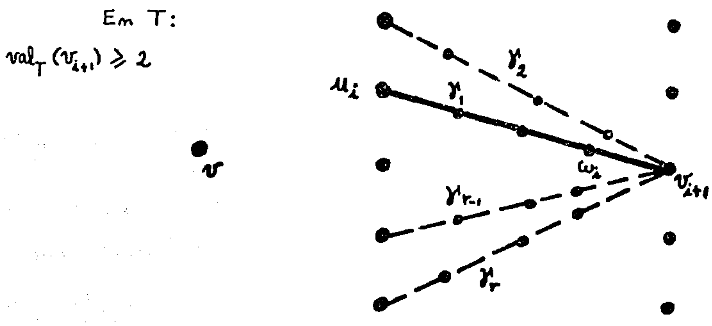


figura 28

Sea $T_1 = \left(\left(T \setminus \left(\bigcup_{r=2}^{\beta} \mathring{\gamma}_r \right)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{\beta} vu_{jr} \right)$ (fig. 29)

En T_1 :

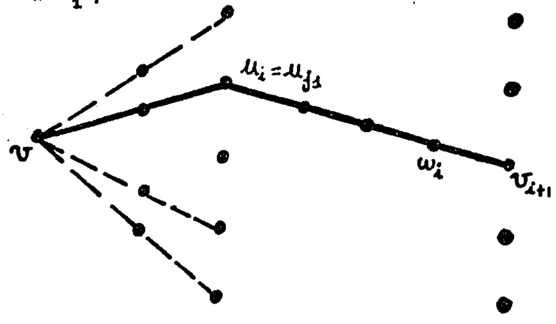


figura 29

Entonces $W \subseteq V(T_1)$ y T_1 es conexo ya que si $x,\ z \in V(T_1)$ existe γ: = xz-trayectoria en T y cada trayectoria γ_r que aparezca en γ se sustituye por la trayectoria $\gamma' := v_{i+1}u_i v\ u_{jr}$, que sí está en T_1.

Obsérvese que $q(T_1) \leq q(T) - 4(\beta - 1) + 2\beta \leq q(T) - 2\beta + 4$; y como $\beta \geq 2$ tenemos que $q(T_1) \leq q(T)$.

En resumen T_1 es conexo, $W \subseteq V(T_1)$ y $q(T_1) \leq q(T)$, de donde $q(T_1) = q(T)$ y $\beta = 2$. Pero $v_{i+1} \in V(T_1)$, es más $v_{i+1} \in Ter(T_1)$, si consideramos $T_2 = T_1 \setminus \{v_{i+1}\}$, es un árbol con la propiedad de que $W \subseteq V(T_2)$ y $q(T_2) < q(T_1) = q(T)$. Lo cual es imposible.

En conclusión si $w_1 \in W$, entonces $w_1 \in Ter(T)$, esto es $W \subseteq Ter(T)$ y por lo tanto $Ter(T) = W$, que es lo que se quería demostrar.□

Demostración de la proposición 3.9:

Sea T' el subárbol de G_5 que contiene a W, construido como se muestra en la figura 30.

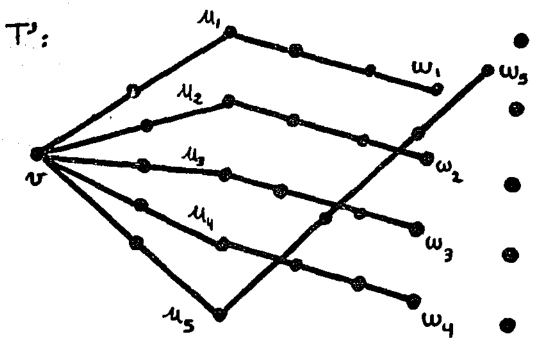


figura 30

$A(T') = A\left(\bigcup \gamma_i\right)_{i=1}^{5}$, donde $\gamma_i := vu_iw_i$-trayectoria, $1 \le i \le 5$, entonces $q(T') = 25$, y en consecuencia $q(T) \le 25$.

Probaremos ahora que $q(T) = 25$, analizaremos dos casos $v \in V(T)$ y $v \notin V(T)$.

I. Supongamos primero que $v \in V(T)$:
como $v \notin W$, entonces $v \notin Ter(T)$, por lo que existen al menos u_j, $u_k \in U$, $j \ne k$ tales que las trayectorias vu_j y vu_k están en T.

3.15 Lema

Si la trayectoria vu_j está en T, entonces la trayectoria u_jw_j también está en T.

Demostración:

Supongamos que la trayectoria u_jw_j no está en T, entonces la arista w_jv_{j+1} sí está en T y por lo tanto, existe una trayectoria $v_{j+1}u_r$ en T para alguna $u_r \in U$, $u_r \ne u_j$ (fig. 31),

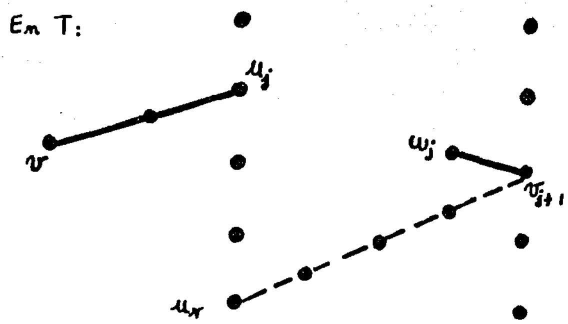


figura 31

si agregamos la trayectoria $u_j w_j$ en T, se formará un ciclo C (fig. 32) que contiene a la trayectoria $v_{j+1}u_r$.

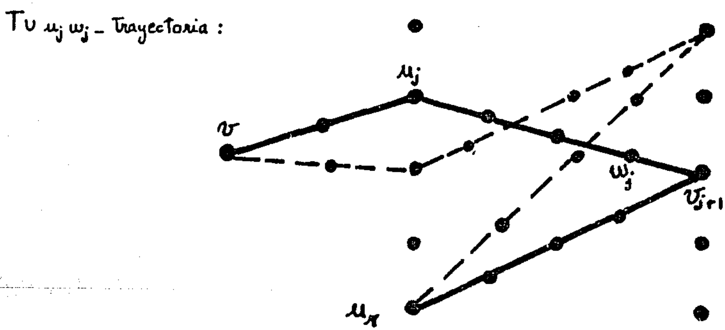
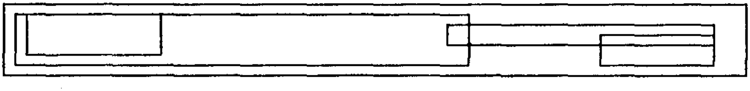


figura 32

Al quitar el interior de la trayectoria $v_{j+1}u_r$ obtendremos nuevamente un árbol T_1 (lema 3.2) (fig. 33),



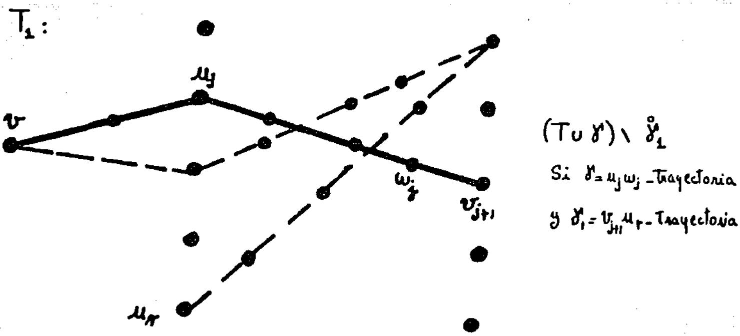


figura 33

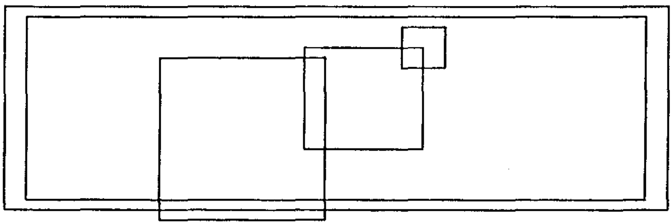
con la propiedad de que $W \subseteq V(T_1)$ y $q(T_1) < q(T)$, lo cual es una contradicción.□

3.16 Lema

Si $v_{i+1} \in V(T)$, entonces la trayectoria de u_i a w_i no está en T.

Demostración:

Supongamos que $\gamma := u_i w_i$-trayectoria está en T, como $v_{i+1} \notin W$, entonces $v_{i+1} \notin Ter(T)$ y por consiguiente $val_T(v_{i+1}) \geq 2$, por lo tanto existen $u_{j1}, \ldots, u_{jr} \in V(T)$ tales que las trayectorias $u_{j1}v_{i+1}, \ldots u_{jr}v_{i+1}$ sí están en T, ninguna de las cuales contiene a algún w_i (fig.34).



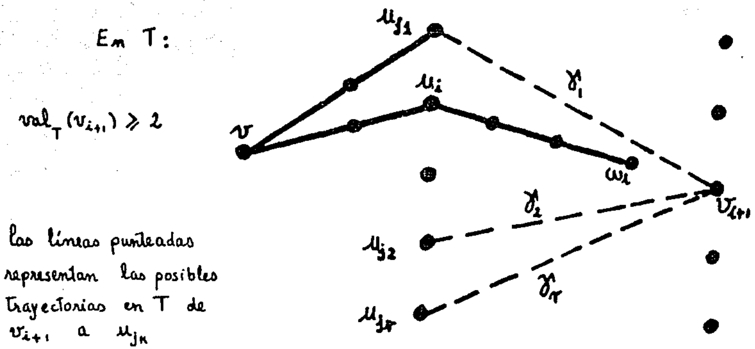


figura 34

Consideremos $G = T \cup w_i v_{i+1}$, obtenemos así un gráfica con un ciclo del cual forma parte alguna de las $u_{jk}v_{i+1}$-trayectorias (fig. 35), sea ésta γ_1

En G :

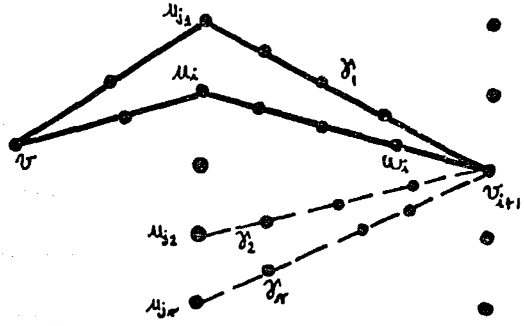


figura 35

y consideremos $T_1 = G - \mathring{\gamma}_1$ (fig. 36), entonces T_1 es un árbol tal que $W \subseteq S$ y $q(T_1) < q(T)$, lo cual demuestra la afirmación.□

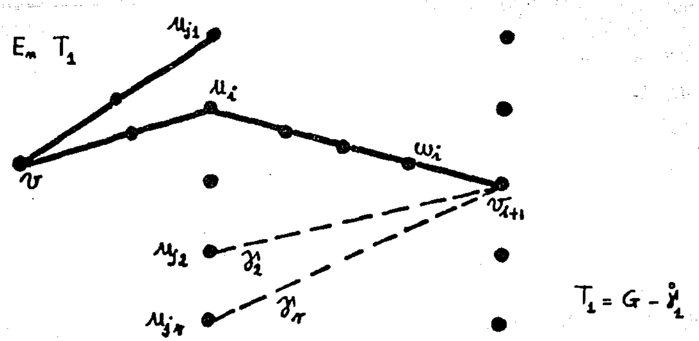


figura 36

3.17 Lema

Si la trayectoria u_1w_1 está en T, entonces la trayectoria vu_1 también está en T.

Demostración:

Supongamos que la trayectoria vu_1 no está en T.

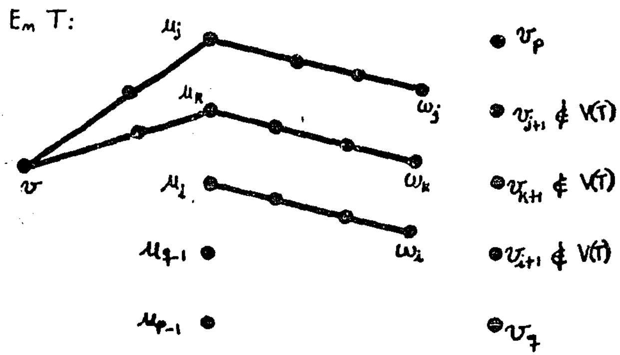


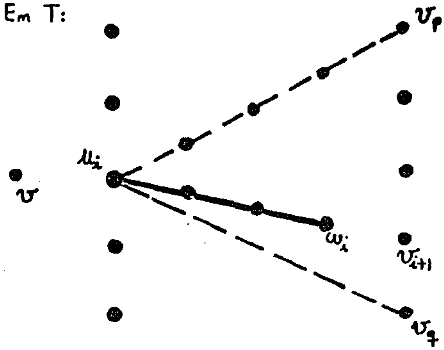
figura 37

Por el lema 3.15 existen $j \neq k$ tales que las trayectorias vu_jw_j y vu_kw_k sí están en T. Por el lema 3.16, los vértices v_{k+1}, v_{j+1}, y

v_{i+1} no están en T (fig. 37).

Sean v_p y v_q los dos vértices restantes de V (fig. 37).

Como $u_i \notin Ter(T)$, entonces la $val_T(u_i) \geq 2$ (fig. 38).



Como $val_T(u_i) \geq 2$, entonces, o la trayectoria de u_i a v_p está en T, o la de u_i a v_q, o ambas.

figura 38

Caso 1. Si v_q, $v_p \notin V(T)$, T sería el árbol T' de la figura 30 que contiene todas las trayectorias de v a u_i para toda i.

Caso 2. Si $\{v_q, v_p\} \subseteq V(T)$, por el lema anterior las aristas $w_{p-1}v_p$ y $w_{q-1}v_q$ sí están en T (fig. 39),

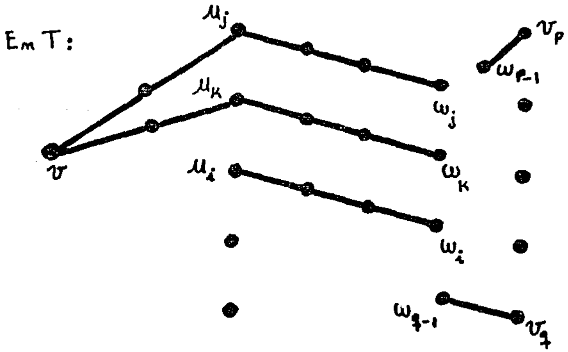
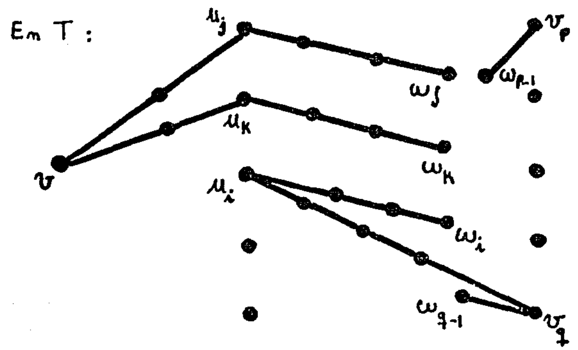


figura 39

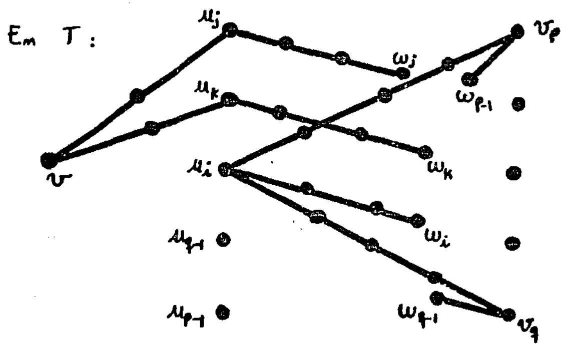
además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la trayectoria $u_i v_q$ está en T, si no, la trayectoria $u_i v_p$ estaría en T.



En el ejemplo, la trayectoria $u_i v_q$ está en T.

figura 40

Como T es conexo existe una trayectoria $v_p u_s$ en T, si $s \in \{i, j, k\}$, entonces $q(T) \geq 23$, como T es conexo y la trayectoria vu_i no está en T, entonces $q(T) \geq 25$ lo cual es imposible.



Aquí, $s = i$.

figura 41

Si $s \notin \{i, j, k\}$, entonces $q(T) \geq 23$, como T es conexo y la trayectoria vu_i no está en T, entonces $q(T) \geq 27$, esto tampoco es posible.

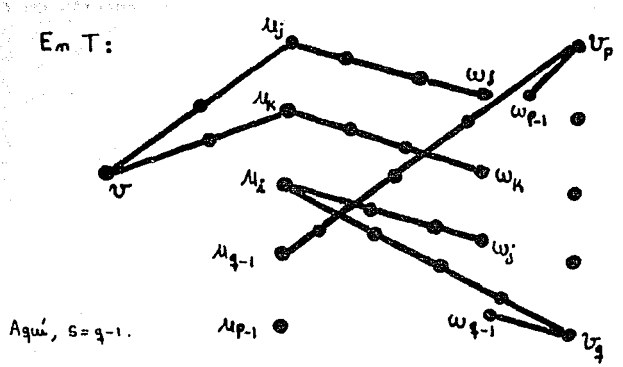


figura 42

Caso 3. Si $v_p \notin V(T)$ y $v_q \in V(T)$, entonces la trayectoria $u_{p-1}w_{p-1}$ está en T y además, también está la trayectoria $u_1 v_q$ (ya que $val(u_1) \geq 2$) y por lo tanto también la arista $w_{q-1}v_q$.

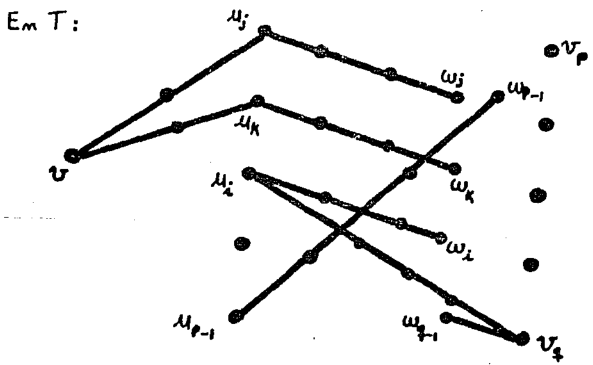


figura 43

Como T es conexo, si la trayectoria vu_{p-1} está en T, entonces $q(T) \geq 23$, pero la trayectoria vu_1 no está en T y T es conexo por lo que $q(T) > 25$ lo cual no es posible (fig. 44).

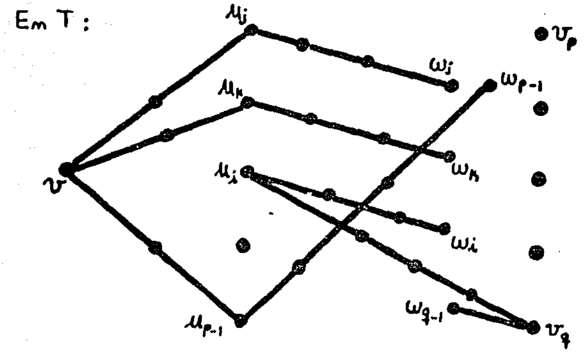


figura 44

Si la trayectoria $u_{p-1}v_q$ está en T, entonces q(T) ≥ 25, pero la trayectoria vu_1 no está en T y T es conexo por lo que q(T) ≥ 27 y esto no puede suceder (fig. 45).

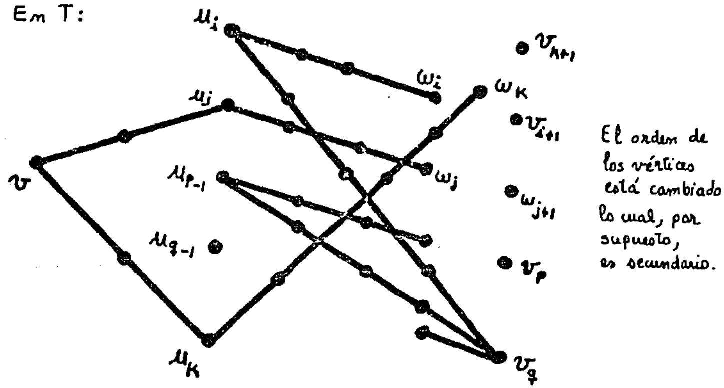


figura 45

El caso en el que $v_p \in V(T)$ y $v_q \notin V(T)$ es análogo al inmediato anterior.

Lo expuesto en los casos 1, 2 y 3 demuestra el lema 3.17.□

3.18 Lema

T contiene cinco trayectorias de longitud cinco ajenas en aristas dos a dos.

Demostración:

Sea $w_i \in V(T)$, como $w_i \in Ter(T)$ para toda $1 \leq i \leq 5$, tenemos que para cada uno de ellos o bien la arista $w_i v_{i+1}$ o la trayectoria $u_i w_i$ está en T:

i. si la arista $w_j v_{j+1}$ está en T, entonces por ser T conexo existe al menos una $\gamma_1 := v_{j+1} u_p$-trayectoria en T para alguna $p \neq j$ tal que $w_j \notin V(\gamma_1)$ para toda j, y $q(\gamma_1) + q(w_i v_{i+1}) = 5$ (fig. 46).

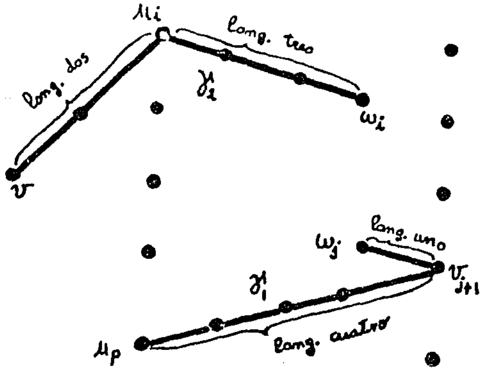


figura 46

ii. Si la trayectoria $u_i w_i$ está en T, por el lema 3.15 la vu_i-trayectoria también está en T y,

$q(\gamma_2) = q(vu_i w_i\text{-trayectoria}) = 5$ (fig. 46).

Cualesquiera dos trayectorias de la forma $w_i v_{i+1} u_p$ son ajenas en aristas dos a dos (fig.47).

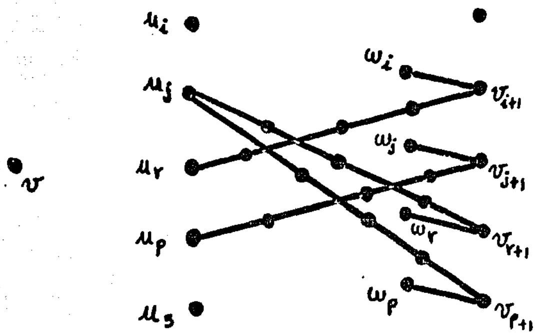


figura 47

Cualquier par de trayectorias de la forma vu_iw_i son ejenas en aristas dos a dos (fig. 48).

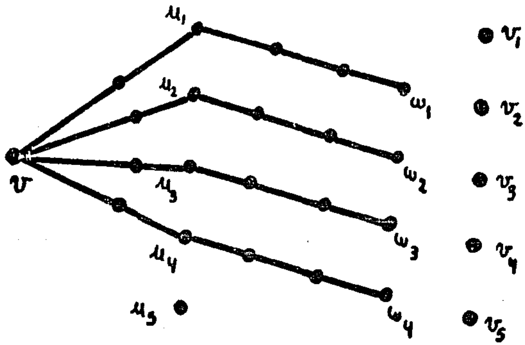


figura 48

Una trayectoria de la forma $w_iv_{i+1}u_p$ con otra trayectoria vu_jw_j son ajenas en aristas dos a dos (fig. 49*a*), nótese que no es posible que w_i, para alguna i, esté en la intersección de dos de ellas pues $w_i \in Ter(T)$ (fig. 49*b*).

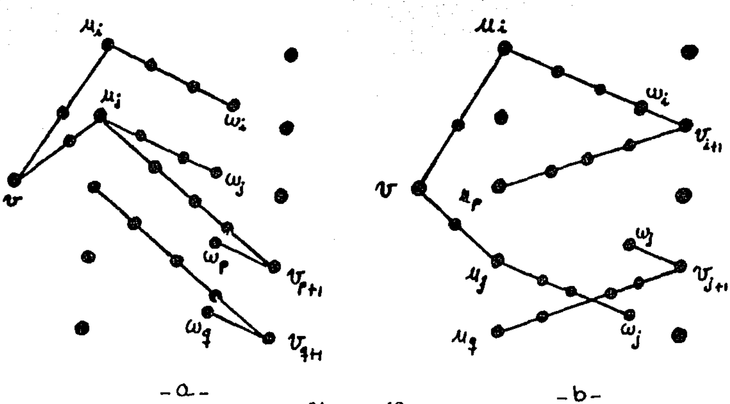


figura 49

Lo anterior demuestra el lema 3.18.

Por lo tanto $q(T) \geq 25$, y como vimos que $q(T) \leq 25$ (buscar fig.30) resulta que $q(T) = 25$, esto demuestra el lema para el caso en que $v \in V(T)$. (Algunos ejemplos se muestran en la fig. 50).□

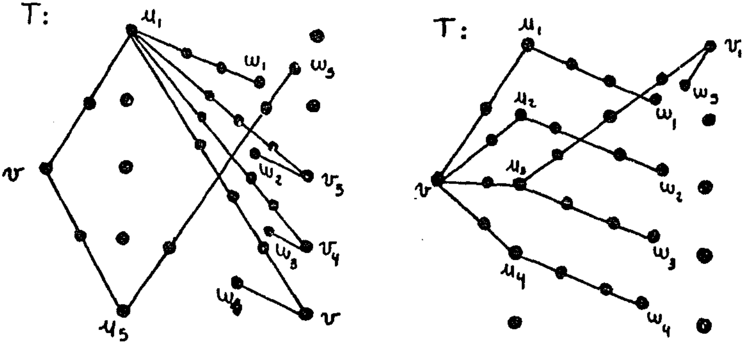


figura 50

II. Supongamos ahora que $v \notin V(T)$.

Consideremos todas las aristas de la forma $w_j v_{j+1}$ que hay en T y todos los vértices de $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ que estén en T; sean:

$r := |\{w_j v_{j+1}$, tal que $w_j v_{j+1} \in A(T)\}|$ y $h := |(\mathbb{U} \cup \mathbb{V}) \cap V(T)|$.

Observemos la figura 51. Si para todas las aristas de la forma $w_j v_{j+1}$ en T (fig. 51a) quitamos cada uno de los vértices w_j obtendremos nuevamente un árbol T_1 (fig. 51b). Si nos fijamos en los vértices w_i de T_1, como ya vimos con anterioridad estarán unidos a algún u_i por medio de una trayectoria γ_i, cuyos vértices interiores tienen todos valencia dos, si quitamos de T_1 los interiores de estas trayectorias junto con el correspondiente vértice w_i, obtendremos nuevamente un árbol T' (fig. 51c), que contiene a $(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) \cap V(T)$.

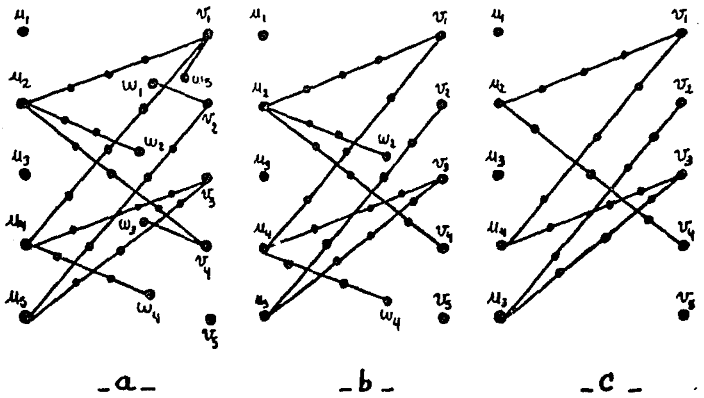


figura 51

Por el lema 3.10, sabemos que $q(T') \geq 4(h - 1)$, como T tiene r aristas de la forma $w_j v_{j+1}$ y 5 - r trayectorias de longitud tres de la forma $u_i w_i$ tenemos que $q(T) \geq r + 3(5 - r) + 4(h - 1)$. Por el lema 3.11 $h \geq 5$, entonces:

Si $r = 1$ $\quad q(T) \geq 29$.

Si $r = 2$ $\quad q(T) \geq 27$.

Si $r = 3$ $\quad q(T) \geq 25$, (fig. 52).

Si $r = 4$, entonces $|V(T) \cap \mathbb{V}| \geq 4$ y por el lema 3.12

$h \geq 6$, así que $q(T) \geq 27$.

Si $r = 5$, entonces $|V(T) \cap V| \geq 5$ y por el lema 3.12 $h \geq 7$ así que $q(T) \geq 29$.

Vimos que $q(T) \leq 25$ (buscar fig. 30), por lo que para $r = 1, 2, 4$ y 5 no se obtienen árboles de Steiner, sólo en el caso en que $r = 3$, por lo tanto, $q(T) = 25$ que es lo que se quería demostrar.□

Veamos un ejemplo en la siguiente figura:

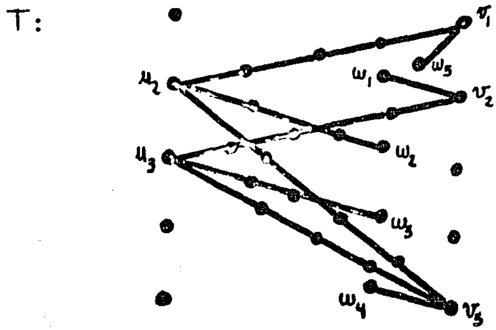


figura 52

CAPITULO 4

LA FUNCION $\psi(n)$

Para cada n natural, consideremos el conjunto:

$$S_n = \left\{ \frac{\text{diám}_n G}{\text{rad}_n G};\ \text{tal que G es una gráfica conexa de orden } p \geq n \right\},$$

S_n está acotado superiormente:

Sea G una gráfica conexa de orden $p \geq n$, $n \geq 2$, entonces:

$$\text{diám}_n G \leq 2\ \text{rad}_n G.$$

Demostración:

Sea $S \subseteq V(G)$, $|S| = n$, tal que $\text{diám}_n G = d(S)$.

Sea $v_0 \in V(G)$ tal que $e_n(v_0) = \text{rad}_n G$; sean v_1, $v_2 \in S$, y sean S_1 y $S_2 \subseteq S$ tales que $S_1 = (S - \{v_1\}) \cup \{v_0\}$ y $S_2 = (S - \{v_2\}) \cup \{v_0\}$, como $d(S_1) \leq \text{rad}_n G$ y $d(S_2) \leq \text{rad}_n G$, se tiene que $\text{diám}_n G \leq d(S_1) + d(S_2) \leq \text{rad}_n G + \text{rad}_n G = 2\ \text{rad}_n G$, esto es, $\text{diám}_n G \leq 2\ \text{rad}_n G$.□

Además, S_n es no vacio, por lo cual podemos definir $\psi(n) := \sup S_n$. Por lo tanto $\text{diám}_n G \leq \psi(n)\ \text{rad}_n G$ para toda gráfica conexa G de orden $p \geq n$, y $\psi(n)$ es el menor número real con esta propiedad. El problema central de [6] es encontrar el supremo del conjunto S_n.

Una reformulación del teorema 3.8 es la siguiente:

4.1 Teorema. $\psi(n) \geq \frac{2(n+1)}{2n-1}$.

ESTIMACION DE $\psi(n)$ PARA $n = 3$

El siguiente resultado muestra que $\psi(3) = \frac{8}{5}$.

4.2 Proposición [6]

Si G es una gráfica de orden $p \geq 3$, entonces:

$$\text{diám}_3 G \leq \frac{8}{5}\ \text{rad}_3 G.$$

Demostración:

Sea G una gráfica conexa de orden $p \geq 3$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{diám}_3 G > \lambda\ \text{rad}_3 G. \tag{1}$$

Veremos que $\lambda < \frac{8}{5}$ (y entonces se seguirá el resultado, pues si fuese falso el teorema tendríamos $\frac{8}{5} < \frac{8}{5}$). Si $\lambda \leq 0$ no hay nada que hacer, supondremos pues, $\lambda > 0$.

Sea $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ un subconjunto de V(G) que realiza el 3-diámetro de G.

Sea $v_0 \in V(G)$ tal que $v_0 \in C_3(G)$, o lo que es lo mismo $e_3(v_0) = \text{rad}_3 G$.

Sea T_i un árbol de Steiner para $D_i = (\{v_0, v_1, v_2, v_3\} - \{v_i\})$, $i = 1, 2, 3$, como $d(\{v_i, v_j, v_0\}) \leq \text{rad}_3$, para $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$, entonces $q(T_i) \leq \text{rad}_3 G$, y por (1) tenemos que $q(T_i) < \frac{1}{\lambda}\text{diám}_3 G$.

Ahora bien, la distancia más corta entre v_i $(i = 1, 2, 3)$ y cada vértice de T_i debe ser mayor que $\frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_3 G$, pues

$q(T_i) + d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_3 G$, y entonces

$d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_3 G - q(T_i) > \text{diám}_3 G - \frac{1}{\lambda}\text{diám}_3 G$, lo que da como resultado $d(v_i, T_i) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_3 G$.

Por esta razón, $d(v_k, v_j) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_3 G$ para todas j, k tales que $k \neq j$ y $0 \leq k, j \leq 3$ (basta observar que para ir de v_k a v_j se "entra" a T_k).

Si algún T_i es una trayectoria, sin pérdida de generalidad supongamos que $Ter(T_i) = \{v_k, v_j\}$,

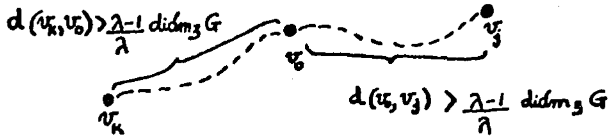


figura 53

entonces $\quad q(T_i) = d(v_k, v_0) + d(v_0, v_j) > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_3$G,

y $\frac{1}{\lambda}$ diám$_3$G $> q(T_i) > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}$diám$_3$G, de donde:

$2\lambda - 2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda < 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{3}{2} < \frac{8}{5}$.

Si ningún T_i es una trayectoria, entonces T_i tiene exactamente tres vértices terminales para toda i (recordemos que $Ter(T_i) = D_i$); consideremos P_1, P_2 y P_3, las trayectorias de v_2 a v_3 en T_1, de v_1 a v_3 en T_2, y de v_1 a v_2 en T_3, respectivamente (fig. 54).

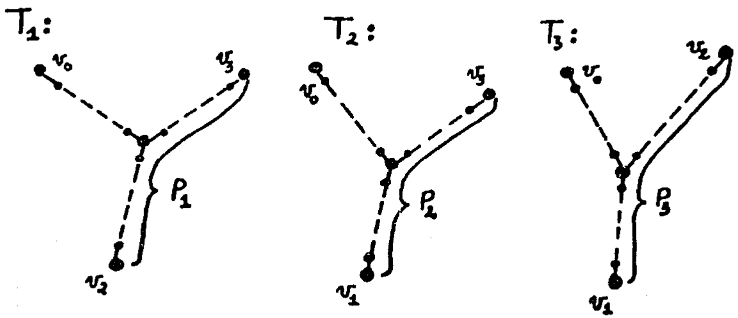


figura 54

Al menos dos de estas trayectorias tienen por lo menos como longitud $\frac{1}{2}$diám$_3$G. Si no fuera así, dos de ellas tendrían longitud menor a $\frac{1}{2}$diám$_3$G y su suma tendría un tamaño menor al diám$_3$G, lo cual no puede suceder ya que:

$v_1, v_2, v_3 \in P_i \cup P_j$ ($1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que esas dos trayectorias son P_3 y P_2.

Sea $l = d_{T_2}(v_0, P_2)$.

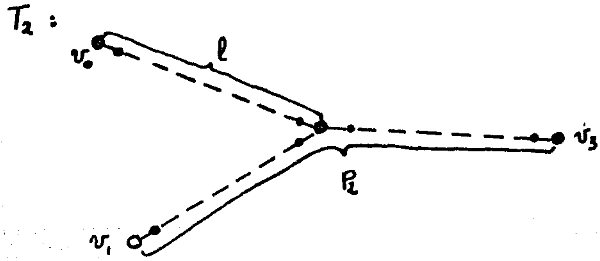


figura 55

entonces:

$$l = d_{T_2}(v_0, P_2) = q(T_1) - q(P_2) < \frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_3 G - \frac{1}{2}\,\text{diám}_3 G = \frac{(2-\lambda)}{2\lambda}\,\text{diám}_3 G,$$

esto es, $l < \frac{(2-\lambda)}{2\lambda}\,\text{diám}_3 G$, (2)

Sea Q_i la $v_0 v_i$-trayectoria en T_2 para $i = 1, 3$,

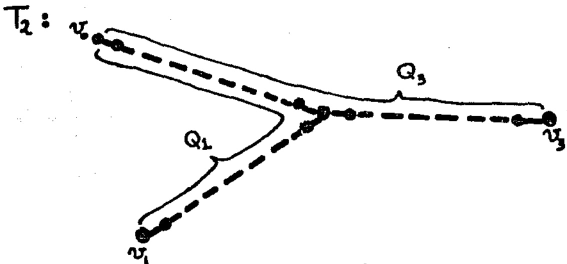


figura 56

Observemos que $q(T_2) + l = q(Q_1) + q(Q_3)$, y que $q(T_i) + q(Q_i) \ge \text{diám}_3 G$ para $i = 1, 3$,

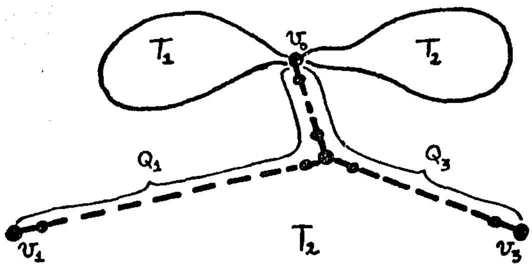


figura 57

por lo cual:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} q(T_i)\right) + 1 = q(T_1) + q(T_2) + q(T_3) + 1 =$$

$$= q(T_1) + q(Q_1) + q(Q_3) + q(T_3) \geq 2 \text{ diám}_3 G.$$

como $q(T_i) \leq \text{rad}_3 G$, $3 \text{ rad}_3 G + 1 \geq \left(\sum_{i=1}^{3} q(T_i)\right) + 1 \geq 2 \text{ diám}_3 G$,

así que $1 \geq 2 \text{ diám}_3 G - 3 \text{ rad}_3 G$, sabíamos que $\text{rad}_3 G < \frac{1}{\lambda} \text{diám}_3 G$,

entonces $1 > 2 \text{ diám}_3 G - \frac{3}{\lambda} \text{ diám}_3 G \Rightarrow 1 > \frac{2\lambda-3}{\lambda} \text{ diám}_3 G$, y por (2)

$$\frac{2\lambda-3}{\lambda} \text{ diám}_3 G < 1 < \frac{(2-\lambda)}{2\lambda} \text{diám}_3 G,$$

de donde $\frac{2\lambda-3}{\lambda} < \frac{(2-\lambda)}{2\lambda} \Rightarrow 4\lambda - 6 < 2 - \lambda \Rightarrow 5\lambda < 8 \Rightarrow \lambda < \frac{8}{5}$,

lo cual verifica el teorema.□

4.3 Corolario. $\psi(3) = \frac{8}{5}$.

ESTIMACION DE $\psi(n)$ PARA $n = 4$

Veremos ahora que $\psi(4) \leq \frac{45}{31}$. Obsérvese que,

$\frac{2(n+1)}{2n-1} < \frac{45}{31} < 1 + \frac{2}{n}$ (cfr. teoremas 4.1 y 5.2).

4.4 Proposición

Si G es una gráfica conexa de orden $p \geq 4$, entonces:

$$\text{diám}_4 G \leq \frac{45}{31} \text{ rad}_4 G.$$

Demostración:

Sea G una gráfica conexa G de orden $p \geq 4$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{diám}_4 G > \lambda \text{ rad}_4 G. \qquad (1)$$

Veremos que $\lambda < \frac{45}{31}$. Tomaremos $\lambda > 0$, de lo contrario no hay nada que hacer.

Sea $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto de vértices de G que realiza el 4-diámetro de G.

Sea $v_0 \in C_4(G)$, esto es, $e_4(v_0) = \text{rad}_4 G$.

Sea T_i un árbol de Steiner para $D_i = (D - \{v_i\}) \cup \{v_0\}$, para $1 \leq i \leq 4$, entonces $q(T_i) \leq \text{rad}_4 G$, y por (1),

$$q(T_i) < \frac{1}{\lambda} \text{diám}_4 G. \qquad (2)$$

Si unimos una de las trayectorias de mínimo tamaño posible de v_i a T_i con T_i obtenemos un árbol que contiene a D y por lo tanto de tamaño al menos $\text{diám}_4 G$, esto es:

$q(T_i) + d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_4 G$,

de donde $d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_4 G - q(T_i)$,

y por (2) $d(v_i, T_i) > \text{diám}_4 G - \frac{1}{\lambda} \text{diám}_4 G$,

así $d(v_i, T_i) > \frac{(\lambda - 1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$. En particular:

$$d(v_i, v_k) > \frac{(\lambda - 1)}{\lambda} \text{diám}_4 G, \text{ con: } i \neq k \text{ y } 0 \leq i, k \leq 4. \qquad (3)$$

1. Si algún T_i fuera una trayectoria (fig. 58), entonces, por (2) y (3): $\frac{1}{\lambda} \text{diám}_4 G > q(T_i) > \frac{3(\lambda - 1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$ de donde se deduce que,

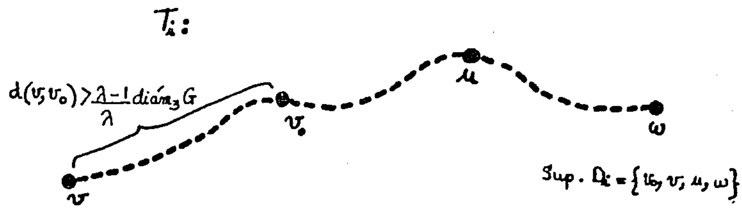


figura 58

$\frac{1}{\lambda} > \frac{3(\lambda-1)}{\lambda} \Rightarrow 1 < 3\lambda - 3 \Rightarrow 4 > 3\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{4}{3} < \frac{8}{5}$.

2. $|Ter(T_i)| = 3$, para alguna i.

Pongamos que $Ter(T_i) = \{ u_1, u_2, u_3 \}$.

Sea u_4 el vértice restante de D_i en T_i y sea w el vértice de grado tres en T_i. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que u_4 está en la trayectoria u_1w de T_i (fig.59).

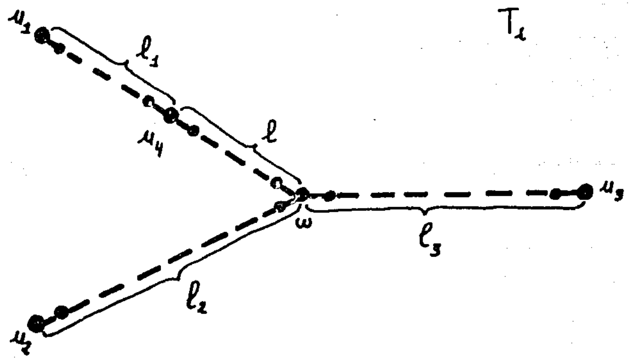


figura 59

Sean: l_1, l, l_2, y l_3 las longitudes de las trayectorias: u_1u_4, u_4w, u_2w y u_3w, en T_i , respectivamente, (nótese que $l \geq 0$).

Como $d(u_i, u_k) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$, con: $i \neq k$ y $0 \leq i, k \leq 4$, tenemos que las sumas de las longitudes $l + l_2$, $l_2 + l_3$, y $l_3 + l$ son cada una mayor que $\frac{(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$, por lo que,

$2(l + l_2 + l_3) > \frac{3(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$, o lo que es lo mismo,

$(l + l_2 + l_3) > \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda} \text{diám}_4 G$.

Sabemos que $l_1 > \frac{(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_4 G$, en consecuencia,

$q(T_i) = l + l_1 + l_2 + l_3 > \frac{(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_4 G + \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda} \text{diám}_4 G$,

lo cual implica que,

$q(T_i) > \frac{5(\lambda-1)}{2\lambda} \text{diám}_4 G$, y como $q(T_i) < \frac{1}{\lambda} \text{diám}_4 G$, entonces,

$\frac{1}{\lambda} > \frac{5(\lambda-1)}{2\lambda} \Rightarrow 2 > 5(\lambda - 1) \Rightarrow 7 > 5\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{7}{5} < \frac{45}{31}$;

3. Si ningún T_i es trayectoria, ni árbol con tres vértices terminales, entonces T_i tiene exactamente cuatro vértices terminales para toda i, esto es, $Ter(T_i) = D_i$ $(1 \leq i \leq 4)$.

Sea $Ter(T_i) = \{ v_0, v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\}$[8].

Sea P_{ij} la trayectoria más corta en T_i de v_{ij} a un vértice de grado al menos tres en T_i para $1 \leq j \leq 3$. Además, sea P_{i0} la trayectoria más corta de v_0 a un vértice de grado al menos tres en T_i. Podemos suponer que P_{i1} , P_{i2} , P_{i3} , y P_{i0} son trayectorias de v_{i1} a w_i , de v_{i2} a w_i , de v_{i3} a u_i , y de v_0 a u_i , respectivamente, y P_i la trayectoria de u_i a w_i, donde u_i y w_i son los vértices de grado al menos tres en T_i, es posible que $u_i = w_i$, en cuyo caso la longitud de P_i sería cero y $val(u_i) = 4$. Veamos la figura 60:

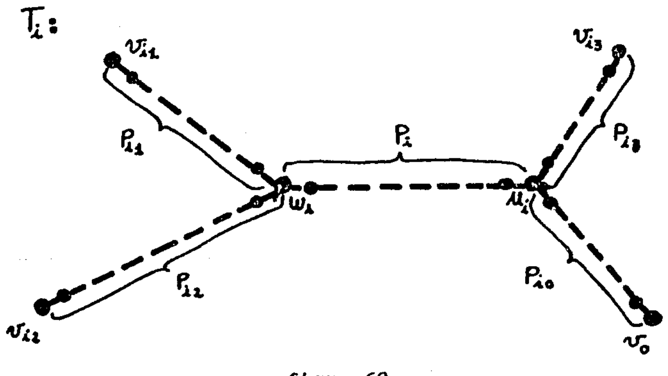


figura 60

Para $i = 1, 2, 3, 4,$ y $j = 0, 1, 2, 3,$ sea $q(P_{ij}) = l_{ij}$ y

[8] Los subíndices i, j representan una función $\varphi(V) = (i, j)$ donde i representa el árbol en que estamos considerando a V_{ij} y j el lugar que ocupa en T_i.

$q(P_i) = l_i$ (recordemos que $l_i = 0$, si $w_i = u_i$).

Como $d(v_i, v_j) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_4$G, $0 \le i, j \le 4, i \ne j$,

cada una de las sumas de las longitudes: $l_{i1} + l_{i2}$, $l_{i1} + l_i + l_{i3}$, y $l_{i2} + l_i + l_{i3}$ es mayor que $\frac{(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_4$G,

por lo que : $2(l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + l_i) > \frac{3(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_4$G, o lo que es lo mismo: $(l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + l_i) > \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}$ diám$_4$G.

Como: $q(T_i) = l_{i0} + (l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + l_i)$, entonces,

$\frac{1}{\lambda}$ diám$_4$G $> q(T_i) > l_{i0} + \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}$ diám$_4$G , de lo cual, resulta que

$l_{i0} < \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda} \right)$diám$_4$G, es decir: $l_{i0} < \frac{2-3(\lambda-1)}{2\lambda}$ diám$_4$G;

ahora bien: $l_{i3} + l_{i0} > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_4$G, y entonces:

$l_{i3} > \left(\frac{(\lambda-1)}{\lambda} - \frac{2-3(\lambda-1)}{2\lambda} \right)$ diám$_4$G, de donde,

$l_{i3} > \frac{5(\lambda-1)-2}{2\lambda}$ diám$_4$G. Intercambiando los papeles de l_{i0} y l_{i3} en el argumento anterior, obtendremos que $l_{i3} < \frac{2-3(\lambda-1)}{2\lambda}$ diám$_4$G, y que $l_{i0} > \frac{5(\lambda-1)-2}{2\lambda}$ diám$_4$G. De lo cual resulta que:

$$\frac{5\lambda-7}{2\lambda} \text{diám}_4\text{G} < l_{i0} < \frac{5-3\lambda}{2\lambda} \text{diám}_4\text{G}. \qquad (4)$$

Llamaremos T'_i al subárbol obtenido de T_i quitándole todos los vértices de P_{i0} excepto u_i, (para $1 \le i \le 4$) (fig. 61).

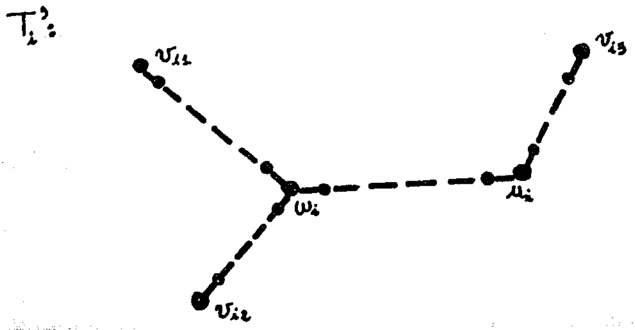


figura 61

Como $l_{i0} > \frac{5\lambda-7}{2\lambda}$ diám$_4$G, para toda $1 \le i \le 4$, entonces,

$q(T'_i) = q(T_i) - l_{i0} < \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{5\lambda-7}{2\lambda}\right)$ diám$_4$G, esto es:

$$q(T'_i) < \frac{9-5\lambda}{2\lambda}\,\text{diám}_4 G. \qquad (5)$$

Sea $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ fija. Observemos que T'_{i1} junto con la trayectoria de v_{i1} a v_{i2} en T_i forma una gráfica conexa que contiene a todo D. Lo mismo ocurre con T'_{i1} y T'_{i2} al unirles las trayectorias $v_{i1}v_{i3}$, y $v_{i2}v_{i3}$ de T_i.

Obtenemos como resultado que (fig 62):

$$q(T'_{i1}) + l_{i1} + l_{i2} \ge \text{diám}_4 G,$$
$$q(T'_{i1}) + l_{i1} + l_i + l_{i3} \ge \text{diám}_4 G, \text{ y:}$$
$$q(T'_{i2}) + l_{i2} + l_i + l_{i3} \ge \text{diám}_4 G,$$

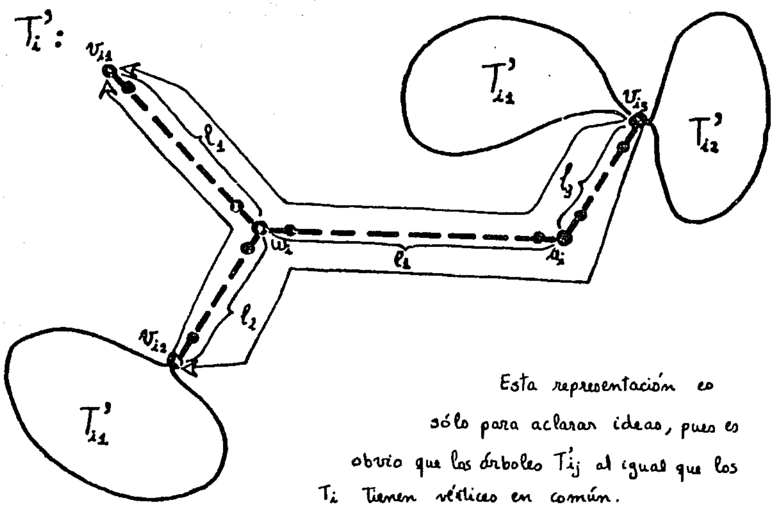


figura 62

de estas desigualdades y de (5) obtenemos:

$$5\left(\frac{9-5\lambda}{2\lambda}\right)\text{diám}_4 G > 2q(T'_{i1}) + q(T'_{i2}) + 2q(T'_i) \ge 3\,\text{diám}_4 G,$$

1. Si algún T_i fuera una trayectoria (fig. 63)

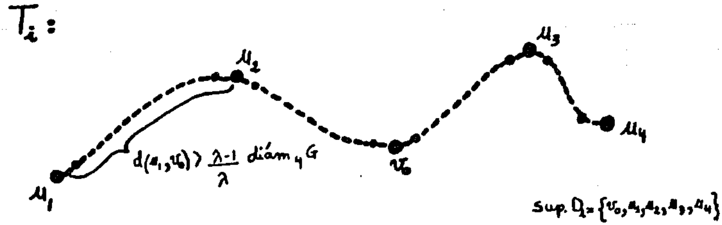


figura 63

tendríamos que, $\frac{1}{\lambda}$diám$_5$G > q(T_i) > $\frac{4(\lambda-1)}{\lambda}$diám$_5$G, de donde se deduce que, $1 > 4\lambda - 4 \Rightarrow 5 > 4\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{5}{4} < \frac{51}{37}$.

2. Supongamos ahora que $|\mathrm{Ter}(T_i)| = 3$, para alguna i, y que $\mathrm{Ter}(T_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$, sean u_4 y u_5 los vértices restantes de D_i en T_i y sea w el vértice de grado tres en T_i.

2a. Analicemos primero el caso en el que u_5 y u_4 están en distintas ramas de T_i. Digamos que u_4 está en la trayectoria u_1w , y que u_5 está en la trayectoria de u_2 a w (fig. 64).

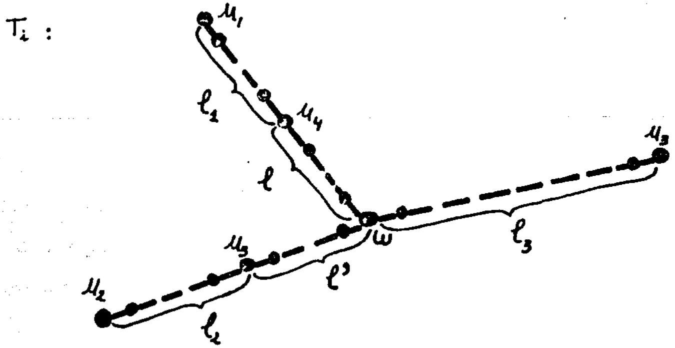


figura 64

Sean: l_1 , l_2 , l_3 , l , y l' las longitudes de las trayectorias de donde:

$$5\left(\frac{9-5\lambda}{2\lambda}\right) > 3 \Rightarrow 45 > 31\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{45}{31};$$

Con lo cual queda demostrado lo que se quería.□

4.5 Corolario. $\psi(4) \le \frac{45}{31}$.

ESTIMACION DE ψ(n) PARA n = 5

Mostraremos ahora que $\psi(5) \le \frac{51}{37}$, obsérvese aquí también, que $\frac{2(n+1)}{2n-1} < \frac{51}{37} < 1 + \frac{2}{n}$ (cfr. teoremas 4.1 y 5.2).

4.6 Proposición

Sea G una gráfica conexa de orden $p \ge 5$, entonces:

$$\text{diám}_5 G \le \frac{51}{37}\ \text{rad}_5 G.$$

Demostración:

Sea G una gráfica conexa de orden $p \ge 5$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{diám}_5 G > \lambda\ \text{rad}_5 G. \tag{1}$$

Veremos que $\lambda < \frac{51}{37}$. Nuevamente $\lambda > 0$.

Sea $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un subconjunto de vértices de G que realiza el 5-diámetro de G.

Sea $v_0 \in C_5(G)$, esto es, $e_5(v_0) = \text{rad}_5 G$.

Sea T_i un árbol de Steiner para $D_i = (D - \{v_i\}) \cup \{v_0\}$, $1 \le i \le 5$, entonces, $q(T_i) \le \text{rad}_5 G$, y por (1),

$$q(T_i) < \frac{1}{\lambda}\text{diám}_5 G. \tag{2}$$

Una vez más, al unir una de las trayectorias de mínimo tamaño posible de v_i a T_i con T_i, se obtiene un árbol que contiene a D y por lo tanto de tamaño al menos $\text{diám}_5 G$. Haciendo cuentas, tenemos que $d(v_i, T_i) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_5 G$, y como consecuencia:

$$d(v_i, v_j) > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_5 G, \tag{3}$$

para todas i, j, tales que $0 \le i, j \le 5$, $i \ne j$.

$u_1 u_4$, $u_2 u_5$, $u_3 w$, $u_4 w$, y $u_5 w$ respectivamente; (ver fig. 64, notemos que $l \geq 0$ y/o $l' \geq 0$).

Por (3), cada una de las cantidades de las longitudes: l_1 , l_2 , $l + l_3$, $l + l'$, y $l' + l_3$, es mayor que $\frac{(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_5$G, sumando las tres últimas obtenemos $l + l' + l_3 > \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}$ diám$_5$G; como $q(T_1) = l_1 + l_2 + l_3 + l + l'$, tenemos que:

$$q(T_1) > \left(\frac{3}{2} + 2\right)\left(\frac{(\lambda-1)}{\lambda}\right) \text{diám}_5\text{G, esto es,}$$

$$q(T_1) > \frac{7}{2}\,\frac{(\lambda-1)}{\lambda} \text{diám}_5\text{G}. \qquad (4)$$

Por (1), tenemos que $\frac{1}{\lambda}$diám$_5$G $> \frac{7}{2}\,\frac{(\lambda-1)}{\lambda}$diám$_5$G, de donde, $2 > 7(\lambda - 1)$ y en consecuencia,

$2 > 7\lambda - 7 \Rightarrow 9 > 7\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{9}{7} < \frac{51}{37}$.

2b. Veamos ahora el caso en que u_4 y u_5 están en la misma rama de T_1, digamos en la trayectoria $u_1 w$ (fig. 65, recordemos que $l \geq 0$ y/o $l' \geq 0$).

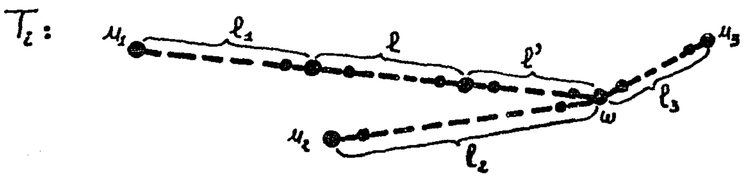


figura 65

Por (3), tenemos que cada una de las cantidades de las longitudes l_1 , l , $l_2 + l'$, $l_3 + l'$, y $l_2 + l_3$, es mayor que $\frac{(\lambda-1)}{\lambda}$diám$_5$G, de donde $l_2 + l' + l_3 > \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}$diám$_5$G, en consecuencia y por (1), tenemos que:

$$\frac{1}{\lambda}\text{diám}_5\text{G} > \frac{7}{2}\,\frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_5\text{G}.$$

Como en el caso anterior, $\lambda < \frac{9}{7} < \frac{51}{37}$.

3. Supondremos ahora que algún T_1 tiene cuatro vértices

terminales, a saber. u_1, u_2, u_3, u_4, cada uno de los cuales está necesariamente en D_1; sea u_5 el vértice restante de D_1 en T_1, y w y u los vértices de grado tres en T_1; obsérvese en la figura 66 que $l \geq 0$, se da la igualdad si $u = w$, en cuyo caso $\mathrm{val}_{T_1}(u) = 4$.

3a. Comencemos por el caso en el que u_5 está en la trayectoria que va de u_1 a w (fig. 66),

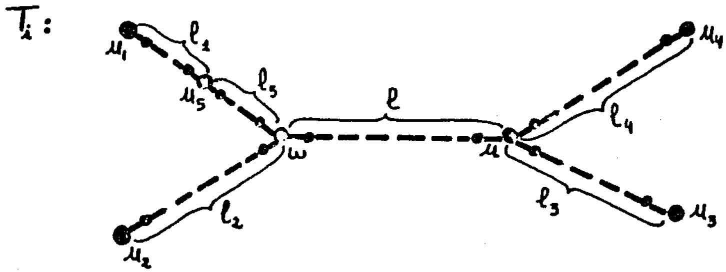


figura 66

l_1 representa la longitud de las trayectorias que van de u_1 a u, o bien, de u_1 a w en T_1 , y l la longitud de la trayectoria wu (fig. 66).

Sabemos por (1), que cada una de las cantidades: l_1 , $l_5 + l_2$, $l_2 + l + l_4$, $l_5 + l + l_3$, y $l_3 + l_4$ es mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$,

de aquí que $l + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$,

tenemos entonces que, $\frac{1}{2}\,\text{diám}_5 G > q(T_1) > \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} + \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\right)\text{diám}_5 G$,

o lo que es lo mismo, $\frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G > q(T_1) > \left(\frac{3(\lambda-1)}{\lambda}\right)\text{diám}_5 G$,

y así, $1 > 3\lambda - 3 \Rightarrow 4 > 3\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{4}{3} < \frac{51}{37}$.

3b. Supongamos ahora que u_5 se encuentra en la trayectoria uw (fig. 67).

Cada una de las sumas de las longitudes de las trayectorias:

$l_1 + l$, $l_2 + l$, $l_1 + l_2$, $l_3 + l'$, $l_4 + l'$, y $l_3 + l_4$, es mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$, en consecuencia,

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l + l' > \frac{6(\lambda-1)}{2\lambda}\,\text{diám}_5 G,$$ y por (1), obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G > q(T_i) > \left(\frac{3(\lambda-1)}{\lambda}\right)\text{diám}_5 G \;\Rightarrow\; 4 > 3\lambda \;\Rightarrow\; \lambda < \frac{4}{3} < \frac{51}{37}.$$

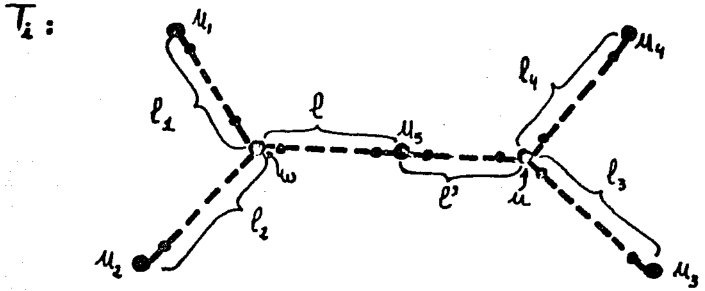
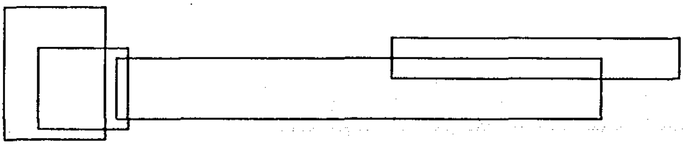


figura 67

4. Si ningún T_i es trayectoria, ni árbol con tres o cuatro vértices terminales, entonces cualquier T_i tiene exactamente cinco vértices terminales y éstos son precisamente los vértices de $D_i = \{v_0, v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}\}$, $(1 \leq i \leq 5)$.

Las posibles configuraciones de T_i las podemos observar en la figura 68; notemos que si en 68*a*, los tamaños de l y l' son iguales a cero obtenemos la fig. 68*b*; mientras que, si sólo una de las dos longitudes es cero obtenemos la fig. 68*c*.



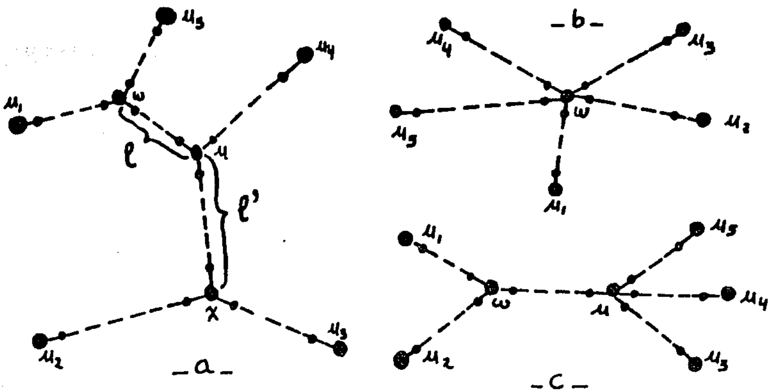


figura 68

4a. Consideremos primero el caso en que $l > 0$ y $l' > 0$, y el vértice v_0 se encuentre en la posición que muestra la figura 69.

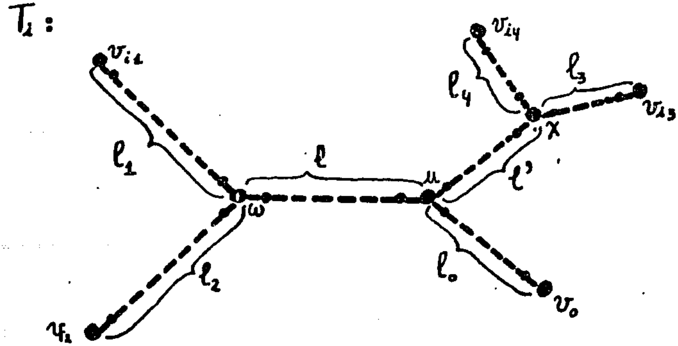


figura 69

Acotemos primero l_3 de la siguiente forma, sabemos que cada una de las sumas de de las longitudes:

$l_1 + l + l' + l_4$, $l_4 + l' + l_0$, $l_0 + l + l_2$, $l_2 + l_1$, es mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ diám$_S$G (fig. 70),

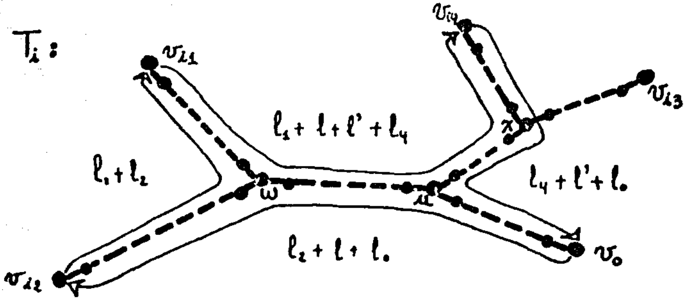


figura 70

por lo cual, $l_1 + l_2 + l_4 + l_0 + l + l' > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$,

de donde, $\frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G > q(T_i) > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\,\text{diám}_5 G + l_3$,

y así, $l_3 < \frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G - \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$,

esto es, $l_3 < \frac{3-2\lambda}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$.

Como $l_3 + l_4 > \frac{\lambda-1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$, entonces, $l_4 > \frac{3\lambda-4}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$, intercambiando los papeles de l_3 y l_4, se obtienen las siguientes desigualdades para l_3:

$$\frac{3\lambda-4}{\lambda}\,\text{diám}_5 G < l_3 < \frac{3-2\lambda}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$$

Consideremos ahora $T_i^{(1)}$ el árbol obtenido de T_i quitándole todos los vértices de l_3 excepto x (fig. 71), entonces,

$q(T_i^{(1)}) = q(T_i) - l_3 < \frac{1}{\lambda}\,\text{diám}_5 G - l_3 < \frac{1}{\lambda} - \frac{3\lambda-4}{\lambda}$,

esto es: $q(T_i^{(1)}) < \frac{5-3\lambda}{\lambda}\,\text{diám}_5 G$.

Acotemos ahora l_0. Al considerar $T_i^{(1)}$ tenemos la siguiente situación (fig. 71):

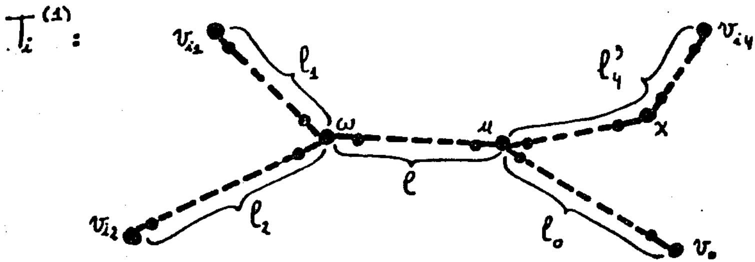


figura 71

la suma de cada una de las longitudes: $l_1 + l + l_4'$, $l_4' + l + l_2$, $l_2 + l_1$, es mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_5 G$, así que,

$$\frac{5-3\lambda}{\lambda}\text{diám}_5 G > q(T_1^{(1)}) > \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}\text{diám}_5 G + l_0, \text{ de donde,}$$

$$\frac{5-3\lambda}{\lambda}\text{diám}_5 G - \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda}\text{diám}_5 G > l_0, \text{ esto es,}$$

$l_0 < \frac{13-9\lambda}{2\lambda}\text{diám}_5 G$, como $l_0 + l_4 > \frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_5 G$, tenemos que:

$l_4 > \frac{11\lambda-15}{2\lambda}\text{diám}_5 G$, intercambiando los papeles de l_0 y l_4 en el argumento anterior se obtienen las siguientes desigualdades para l_0:

$$\frac{13-9\lambda}{2\lambda}\text{diám}_5 G > l_0 > \frac{11\lambda-15}{2\lambda}\text{diám}_5 G,$$

Consideremos $l_0 > \frac{11\lambda-15}{2\lambda}\text{diám}_5 G$ para toda i, y T_1' el árbol obtenido de T_1 quitándole todos los vértices de l_0 excepto u (fig. 72), entonces $q(T_1') = q(T_1) - l_0 < \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{11\lambda-15}{2\lambda}\right)\text{diám}_5 G$, esto es, $q(T_1') < \frac{17-11\lambda}{2\lambda}\text{diám}_5 G$.

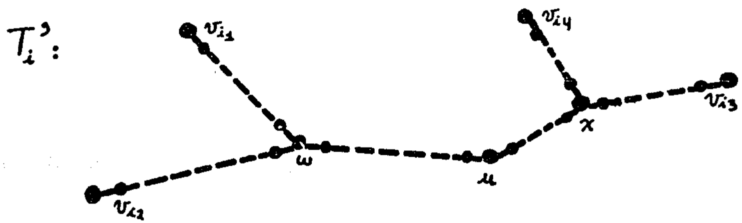


figura 72

4.b Analicemos ahora el caso restante, esto es, algún l o l' son cero, o ambas son positivas pero v_0 se encuentra en un vértice terminal de T_i diferente del considerado en el caso anterior (fig. 73).

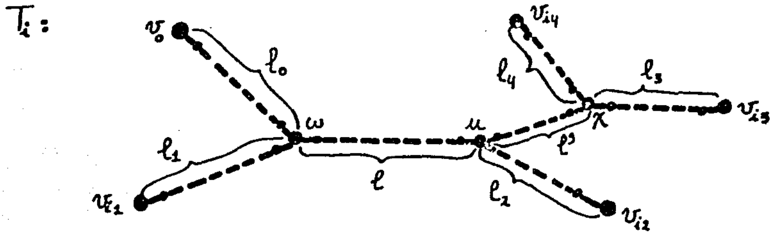


figura 73

observemos también, que la suma de las longitudes de las trayectorias: $l_1 + l + l' + l_4$, $l_1 + l + l_2$, $l_2 + l' + l_3$, y $l_3 + l_4$, es cada una mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ diám$_5$G, de donde,

$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l + l' > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}$ diám$_5$G, por lo tanto, y como se ha procedido en ocasiones anteriores:

$l_0 < \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\right)$diám$_5$G, esto es, $l_0 < \frac{3 - 2\lambda}{\lambda}$ diám$_5$G, y como:

$l_0 + l_1 > \frac{\lambda-1}{\lambda}$ diám$_5$G, tenemos que, $l_1 > \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} - \frac{3 - 2\lambda}{\lambda}\right)$diám$_5$G,

entonces, $l_1 > \frac{3\lambda-4}{\lambda}$ diám$_5$G.

Intercambiando los roles de l_0 y l_1 en el argumento anterior obtenemos las siguientes desigualdades para l_0:

$$\frac{3 - 2\lambda}{\lambda}\text{diám}_5\text{G} > l_0 > \frac{3\lambda-4}{\lambda}\text{diám}_5\text{G}$$

Tomemos T_i' como siempre, y supongamos que para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $l_0 > \frac{3\lambda-4}{\lambda}$ diám$_5$G, entonces,

$$q(T_i') < \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{3\lambda-4}{\lambda}\right)\text{diám}_5\text{G} = \frac{5-3\lambda}{\lambda}\text{diám}_5\text{G};$$

De los casos 4a y 4b que hemos estudiado, se observa que para toda $i = 1, \ldots, 5$ tenemos que $q(T'_i) < \text{máx} \left\{ \frac{5 - 3\lambda}{\lambda}, \frac{17 - 11\lambda}{2\lambda} \right\}$.

Como: *i*) $\text{diám}_5 G \leq \frac{7}{5} \text{rad}_5 G$ (teorema 5.2); *ii*) tenemos por hipótesis que $\lambda > 0$ y $\text{diám}_5 G > \lambda \, \text{rad}_5 G$. Entonces, $0 < \lambda \leqslant \frac{7}{5}$.

Por lo cual, $q(T'_i) < \frac{17 - 11\lambda}{2\lambda}$.

Observemos entonces, que T'_{i2} junto con la trayectoria $v_{i1}v_{i2}$ de T'_i es una gráfica conexa que contiene a todos los vértices de D, lo mismo sucede con T'_{i3}, T'_{i4}, y T'_{i1} agregándoles las trayectorias $v_{i2}v_{i3}$, $v_{i3}v_{i4}$, y $v_{i4}v_{i1}$ de T'_i respectivamente (ver fig. 74). Así,

$$q(T'_{i2}) + l_1 + l_2 \geq \text{diám}_5 G,$$
$$q(T'_{i3}) + l_2 + l + l' + l_3 \geq \text{diám}_5 G,$$
$$q(T'_{i4}) + l_3 + l_4 \geq \text{diám}_5 G,$$
$$q(T'_{i1}) + l_4 + l + l' + l_1 \geq \text{diám}_5 G,$$

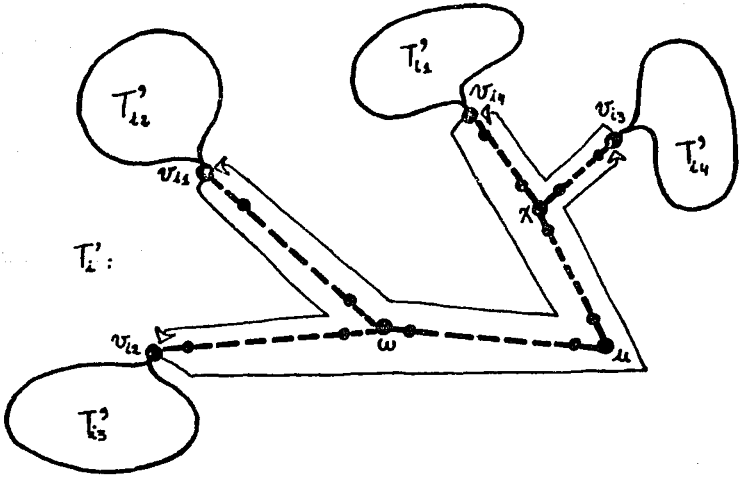


figura 74

lo cual da como resultado que:

$$q(T'_{11}) + q(T'_{12}) + q(T'_{13}) + q(T'_{14}) + 2q(T'_1) \geq 4 \text{ diám}_5 G,$$

y en consecuencia,

$$\frac{6(17-11\lambda)}{2\lambda} \text{diám}_5 G > q(T'_{11}) + q(T'_{12}) + q(T'_{13}) + q(T'_{14}) + 2q(T'_1)$$

$$\geq 4 \text{ diám}_5 G, \text{ de donde,}$$

$$3(17 - 11\lambda) > 4\lambda \Rightarrow 51 - 33\lambda > 4\lambda \Rightarrow 51 > 37\lambda \Rightarrow \lambda < \frac{51}{37}.$$

Con lo cual el teorema queda demostrado.□

4.7 Corolario. $\psi(5) \leq \frac{51}{37}$.

CAPITULO V

EL TEOREMA DE V. NEUMANN LARA

A continuación se demostrará que para toda n, $\psi(n) \leq 1 + \frac{2}{n}$. Como se habrá podido observar en las demostraciones precedentes, el número de casos a considerar para una n fija aumenta conforme n crece, por ejemplo para n = 6 tendríamos que considerar al menos 9 casos dependiendo de la cardinalidad de $Ter(T_1)$ y de las posibles combinaciones para colocar los vértices restantes del conjunto definido como D_1 en T_1, para n = 7 al menos tendríamos que considerar 11 casos. Así pues, la cantidad de estas posibles combinaciones es difícil de manejar para "cualquier n que sea muy grande". Por este motivo, haremos uso de la proposición 5.1 pues facilita que una parte de la técnica con la que hemos trabajado en las demostraciones del capítulo 4 se pueda generalizar.

5.1 Proposición

Sea T un árbol con *r* vértices terminales y $\mathcal{U} \subseteq V(T)$ que contiene a todos los vértices terminales de T, $|\mathcal{U}| = n$, entonces existe una colección de trayectorias en T que satisface lo siguiente:

i. Cada trayectoria tiene exactamente dos vértices en $\mathcal{U}$, los cuales son sus extremos.

ii. Cada arista de T aparece exactamente en dos trayectorias de la colección.

Demostración:

Sea T un árbol con r vértices terminales, sea $\mathcal{U} \subseteq V(T)$, $|\mathcal{U}| = n$ y $Ter(T) \subseteq \mathcal{U}$. Consideremos T_1 la gráfica con aristas paralelas obtenida a partir de T, duplicando cada una de sus aristas.

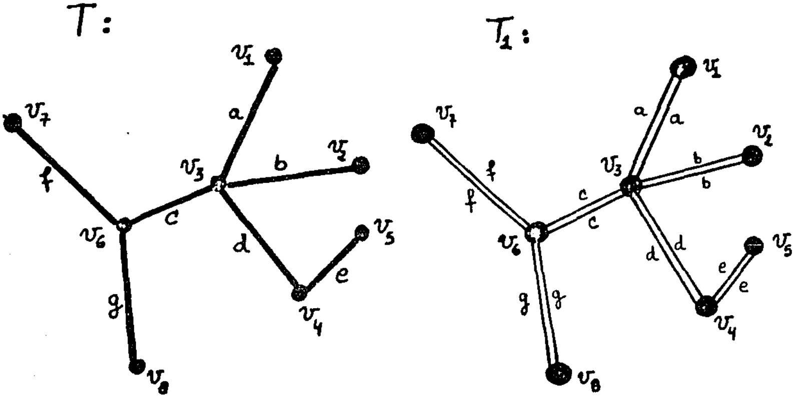
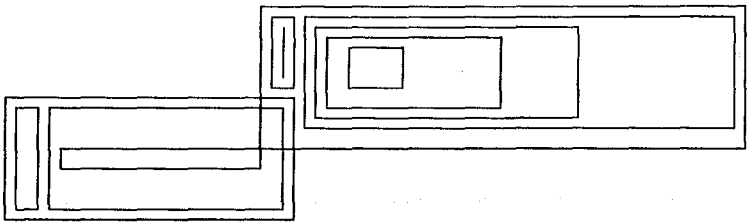


figura 75

T_1 es una gráfica conexa cuyos vértices tienen valencia par, por lo tanto es euleriana y en consecuencia contiene un paseo euleriano (Teorema 2.5). Imaginemos ahora que todas las aristas de T_1 son de elástico y que en cada uno de sus vértices v_i ponemos "tantos vértices" como la valencia de v_i en T (fig.76).



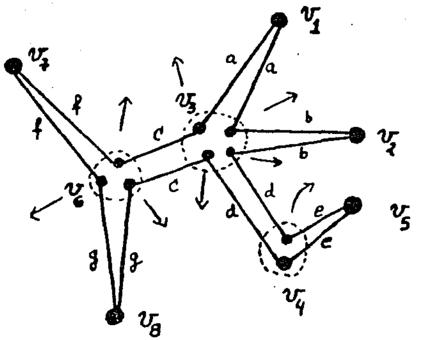


figura 76

Jalemos ahora todos los vértices como lo indican las flechas en la figura anterior hasta formar un ciclo C (fig. 77); observemos que cada vértice de T "se ha desdoblado en C" tantas veces como su valencia y que cada arista de T "se ha desdoblado" exactamente dos veces[9].

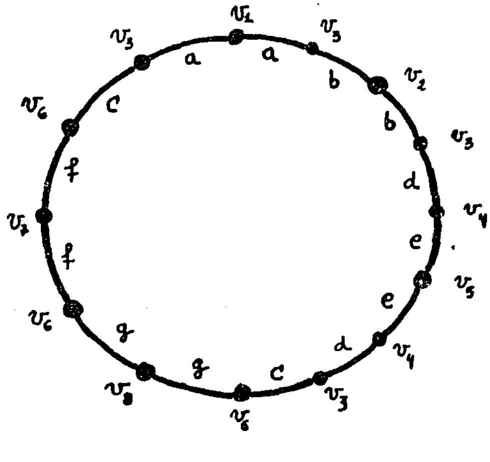


figura 77

Coloquémonos en el vértice v_1 de C (de hecho podemos situarnos en

[9] Formalmente esto se puede demostrar por inducción sobre el número de vértices de T, o bien, usando el paseo euleriano en T_1.

cualquier vértice de C) y recorramos el ciclo en el sentido de las manecillas del reloj hasta llegar nuevamente a v_1 , marquemos la dirección en cada una de las artistas con flechas (fig.78). LLamemos a este paseo Π.

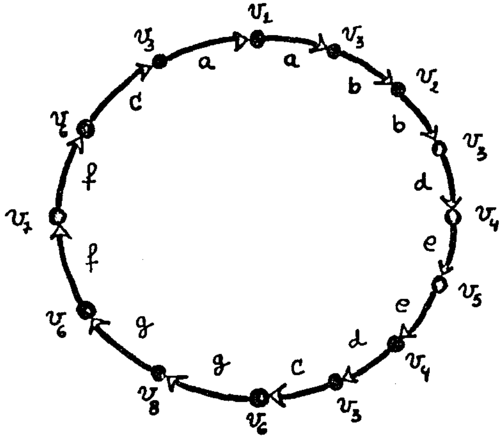


figura 78

"Si nos regresáramos a T_1" obtendríamos la siguiente figura:

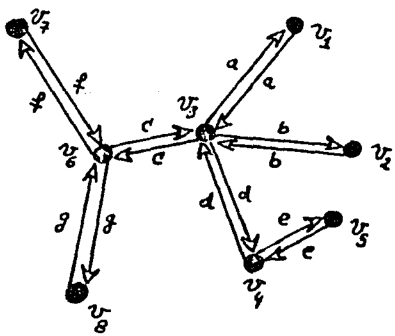


figura 79

notemos que el paseo Π en C, es en T_1 un paseo euleriano.

Hagamos la siguiente partición de Π: $\Pi = \bigcup_{i}^{n} \Pi_i$ (para efectos del ejemplo con el que hemos estado trabajando supondremos que $\mathcal{U} = \mathrm{Ter}(T) \cup \{v_6\}$):

1. Iniciemos Π_1 en el vértice v_1, donde iniciamos Π.

2. Recorramos Π_1 en el mismo orden en que recorrimos Π, deteniéndonos en el primer vértice w de $\mathcal{U}$ que encontremos, ese paseo será Π_1.

3. Π_2 tendrá como inicio a w, e incluye a todas las aristas que encontremos al recorrer Π, hasta encontrar el siguiente vértice de $\mathcal{U}$.

4. Y así sucesivamente hasta obtener Π_n que terminará en v_1.

Lo anterior podemos observarlo en las figuras 80 y 81 (nótese que ninguna Π_i tiene a las dos aristas de C que corresponden a la misma arista de T, pues para esto Π_i tendría que contener un vértice terminal en su interior, lo cual está prohibido).

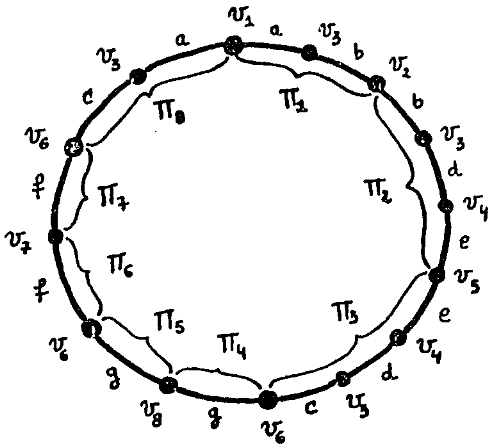


figura 80

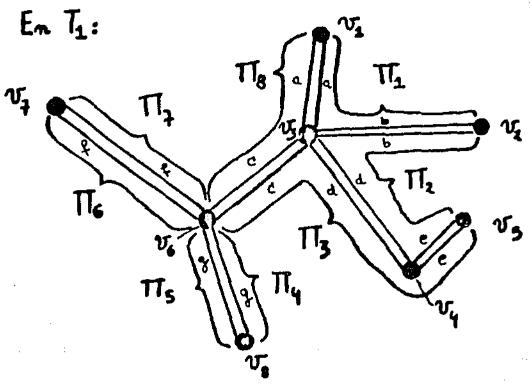


figura 81

Para cada i, sea Π'_i la trayectoria en T que corresponde a la trayectoria Π_i de T_1.

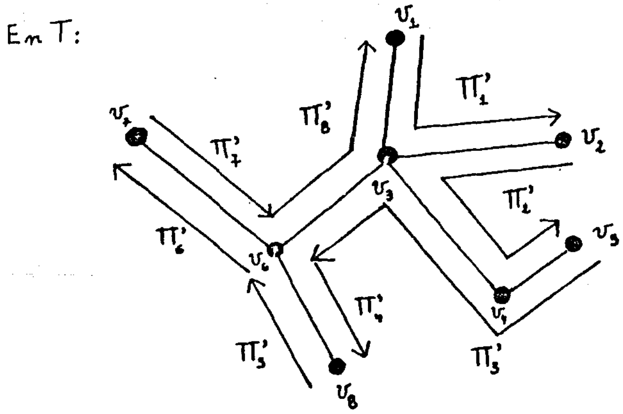


figura 82

Es claro si observamos C (fig. 80), que las trayectorias Π_i son ajenas en aristas dos a dos, que cada trayectoria tiene como extremos vértices de $\mathcal{U}$ y ningún vértice de $\mathcal{U}$ en su interior, lo que demuestra el inciso *i* para la colección de trayectorias Π'_i en T.

Observemos ahora la figura 81, donde se representan las trayectorias Π_i en T_i. Como: *1*) Π recorre a C exactamente una vez; *2*) en C "aparece cada arista de T" exactamente dos veces y, *3*) las trayectorias Π_i nos dan una partición de las aristas de C de tal manera que ninguna tayectoria Π_i tiene a las dos aristas de C que corresponden a la misma arista de T, entonces, la colección formada por las trayectorias Π'_i satisface el inciso *ii*.

Todo lo cual, demuestra la proposición 5.1.□

5.2 Teorema [V. Neumann-Lara]

Sea $n \geq 2$ un entero y G una gráfica conexa de orden $p \geq n$, entonces:

$$\text{diám}_n G \leq \left(1 + \frac{2}{n}\right) \text{rad}_n G.$$

Demostración:

Sea G una gráfica conexa de orden $p \geq n$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\text{diám}_n G > \lambda \text{ rad}_n G. \tag{1}$$

Veremos que $\lambda < 1 + \frac{2}{n}$. Tomaremos $\lambda > 0$, de otro modo no hay nada que hacer.

Sea $D = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V(G)$ que realiza el n-diámetro de G.

Sea $v_0 \in C_n(G)$, esto es: $e_n(v_0) = \text{rad}_n G$.

Sea T_i un árbol de Steiner para $D_i = (D - \{v_i\}) \cup \{v_0\}$, $1 \leq i \leq n$.

Entonces $q(T_i) \leq \text{rad}_n G$ (ya que $v_0 \in V(T_i)$ y $e_n(v_0) = \text{rad}_n G$).

Por (1), tenemos que $q(T_i) < \frac{1}{\lambda}\text{diám}_n G$. (2)

Si unimos "la" trayectoria más corta de v_i a T_i con T_i, obtenemos un árbol que contiene a D y por lo tanto de tamaño al menos $\text{diám}_n G$, esto es, $q(T_i) + d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_n G$, de donde,

$d(v_i, T_i) \geq \text{diám}_n G - q(T_i)$, junto con (2) obtenemos que,

$d(v_i, T_i) > \frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_n G$, y así,

$d(v_i, v_j) > \frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_n G$, $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. (3)

Supongamos que algún T_i tiene exactamente r vértices terminales. Por la proposición 5.1, si tomamos $\mathcal{U} = D_i$, existe una colección de trayectorias Π_i, cada una de las cuales tiene exactamente dos vértices en D_i, los cuales son sus extremos, y cada arista de T_i aparece exactamente en dos trayectorias de la colección. Por (3) $q(\Pi_i) > \frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_n G$.

Por cada vértice terminal v en T_i, hay una trayectoria Π_j que empieza en v, mientras que , por cada vértice w en D_i que no sea vértice terminal de T_i, hay al menos dos trayectorias Π_j que empiezan en w (fig. 80). Así que, tendremos r trayectorias que se inician en vértices terminales y al menos 2(n - r) trayectorias que se inician en vértices de D_i - $\text{Ter}(T_i)$; todas ellas de longitud mayor que $\frac{\lambda-1}{\lambda}\text{diám}_n G$, por consiguiente:

$$\frac{2}{\lambda}\text{diám}_n G > 2\, q(T_i) = \sum_{i}^{n} q(\Pi_i) > (r + 2(n - r))\frac{(\lambda-1)}{\lambda}\text{diám}_n G,$$

de donde, $\frac{2}{\lambda} > (r + 2(n - r))\frac{(\lambda-1)}{\lambda}$, y de aquí,

$2 > (r + 2(n - r))\,(\lambda - 1) \Rightarrow 2 > (r + 2n - 2r)(\lambda - 1) \Rightarrow$

$2 > (2n-r)(\lambda-1) \Rightarrow 2 > \lambda(2n - r) - (2n - r) \Rightarrow$

$2 + (2n - r) > \lambda(2n - r) \Rightarrow \lambda < \frac{2+(2n-r)}{2n - r} \Rightarrow$

$\lambda < 1 + \frac{2}{2n-r} \leq 1 + \frac{2}{n}$, pues $2 \leq r \leq n$.

Con lo cual queda demostrado lo que se quería.□

Usando el teorema 4.1, se obtiene:

5.3 Corolario. $\frac{2(n+1)}{2n-1} \leq \psi(n) \leq 1 + \frac{2}{n}$.

La cota superior puede ser mejorada usando un método que generaliza el empleado para probar el caso n = 5. No incluímos el resultado ya que su prueba es demasiado técnica.

BIBLIOGRAFIA

[1]. Bondy, J. A. *Graph Theory with Applications*, Londres, Macmillan, 1976, 264 pp.

[2]. Buckley, Fred; Zevi Miller y Peter J. Slater. "On Graphs Containing a Given Graph as Center", en *Journal of Graph Theory*, vol. 5, 1981, pp. 427-434.

[3]. Chartrand, O. R. Oellermann, S. Tian, H. B. Zou. "Generalized Distance in Graphs", publicación preliminar.

[4]. Geivaerts, Marcel. "A Characterization of Uniform Hypergraphs".

[5]. Harary, Frank. *Graph Theory*, EUA, Reading-Addison-Wesley, 1969, 274 pp. (más ils.).

[6]. Henning, Michael A., Ortrud R. Oellermann y Henda C. Swart. "On the Steiner Radius and Steiner Diameter of a Graph", publicación preliminar.

[7]. Neumann L., Victor. *Introducción a la teoría de gráficas*, México, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias-UNAM, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, 1985, 75 pp.

[8]. Oellermann, Ortrud R. y Songlin Tian. "Steiner Centers in Graphs", en *Journal of Graph Theory*, vol. 14, núm. 5, 1990, pp. 585-597.

INDICE DE ENUNCIADOS

(L): LEMA (P): PROPOSICIÓN (T): TEOREMA (C): COROLARIO