UNIVERSIDAD PANAMERICANA

ESCUELA DE INGENIERIA
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA EN LENGUAJE PASCAL DE SIMULACION DE SISTEMAS DE COLAS CON COEFICIENTES DE PRESION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
AREA: INGENIERIA INDUSTRIAL

P R E S E N T A :

JORGE ALEJANDRO RODRIGUEZ ESCOBAR

Revisor: Ing. Alfonso G. Leal Guajardo

México, D. F. 1992

Indice

Introducción General

A partir de la Segunda Guerra Mundial la evolución de la economía hacia los servicios ha sido una tendencia que se ha ido consolidando con el tiempo. En 1989, en México, el sector servicios formaba ya el 57% del producto nacional bruto contra solamente el 34% del sector industrial. Esta tendencia ha tenido importantes implicaciones para el desarrollo económico de México y del mundo. Cada vez más, la economía global está dominada por el sector de los servicios, desde telecomunicaciones hasta el transporte el sector servicios forma ya, el 60% de la economía de los países desarrollados y la mayor parte de los nuevos empleos son creados por este sector. En los Estados Unidos ocho de cada 10 trabajadores son empleados por compañías de servicios. La tendencia en los patrones de consumo no solamente han hecho aumentar la demanda de los servicios existentes sino que también ha alentado la introducción de nuevos servicios.

El sector servicios en comparación con el sector industrial, en general, es menos cíclico, experimenta menos períodos de auge y recesiones, se requiere de una mayor inversión de mano de obra y menor inversión en equipo de fabricación, los aumentos en la productividad son más lentos en los servicios y por lo general los aumentos en precios son más rápidos. Estas características de los servicios hacen que la naturaleza de los pronósticos de cómo se comportará la demanda de un servicio difieran sustancialmente del pronóstico de como se comportará la demanda física de un producto. Más importante aún. es el hecho, de que el consumo y la producción de servicios son acciones que ocurren simultáneamente, a diferencia de un producto el cual se puede inventariar para satisfacer una demanda futura. Los servicios deben proporcionarse cuando el cliente establece contacto con la organización de servicio o muy poco después de esto, si no se ha previsto la demanda de este cliente es muy probable que no se disponga de la capacidad adecuada y que no se pueda satisfacer la demanda, por otro lado una empresa puede proporcionar la suficiente capacidad pero puede que la demanda no se llegue a concretar lo que ocasionará el desaprovechamiento de la capacidad instalada.

Es por esto que planear las necesidades referentes a la capacidad de una empresa constituye una de las áreas de decisión más importantes a las que se enfrentan las organizaciones, especialmente cuando la planeación implica nuevas instalaciones o cambios importantes en las instalaciones existentes. Una decisión acertada en este campo es importante por muchas razones, pero principalmente porque el costo de los activos fijos es por lo general, una parte importante en la hoja de balance de una compañia y por lo regular la mayoría de las organizaciones deben vivir con sus decisiones sobre capacidad instalada durante varias décadas, esto hace que sea extremadamente importante el desarrollo de métodos que permitan obtener informacion confiable sobre la manera que una decisión sobre capacidad instalada afectará el comportamiento de la empresa.

Dentro de las decisiones sobre capacidad instalada que se tienen que tomar se encuentran las relativas a los procesos que generan líneas de espera o colas. La mayoría de nosotros nos enfrentamos cotidianamente con este tipo de procesos cuando vamos a la gasolineria para adquirir combustible o hacemos cola en un banco para depositar dinero en nuestra cuenta de cheques. Este tipo de proceso cada dia se vuelve más común debido al auge que ha experimentado el sector de servicios. Aunque, si bien es cierto que este proceso no es exclusivo de las organizaciones prestadoras de servicios, sino que también se encuentra en el sector industrial, ya que estas organizaciones también necesitan servicios internos como los de mantenimiento, donde los mecánicos(servidores) proporcionan servicio a las máquinas(clientes). La mayoría de procesos que generen líneas de espera se encuentra en los servicios y según las tendencias económicas conforme siga creciendo el sector servicios, seguirán creciendo cada vez más los sistemas que generen líneas de espera y por lo tanto seguirá aumentando la necesidad de tener información confiable acerca del comportamiento de estos sistemas.

Para obtener la información necesaria acerca del comportamiento de los sistemas que generan líneas de espera se ha desarrollado lo que se conoce como "Teoría de Colas" que comprende el estudio matemático de las colas o líneas de espera. La teoría de colas proporciona la información vital requerida para tomar una decisión que logre un balance económico entre el costo del servicio y el costo asociado con la espera de ese servicio.

La teoría de colas da lugar a un gran número de modelos matemáticos alternativos para describir una situación de línea de espera. Aunque a menudo se dispone de resultados matemáticos alternativos para describir una situación de línea de espera, en otras el planteamiento matemático es demasiado complejo para obtener resultados prácticos que se puedan utilizar. Uno de estos casos son los sistemas de colas que suponen coeficientes de presión para la tasa de llegada y tasa de servicios.

Esta clase de sistemas plantea la hipótesis de que el cliente no es atendido siempre con la misma velocidad , es decir si se empiezan a juntar una gran cantidad de clientes en el sistema el servidor comenzará a atender los clientes más rápido. Esta nueva actitud de servicio se podrá deber a que el servidor simplemente comienza a trabajar más rápido o puede ser que reciba ayuda externa que le permita atender con mayor rapidez a los clientes. El planteamiento matemático para esta clase de sistemas se realiza mediante un " coeficiente de presión" que aumenta la tasa de servicio (el número de clientes que el servidor puede atender por unidad de tiempo) del sistema.

El sistema también podrá reaccionar a una gran cantidad de clientes en el sistema disminuyendo el número de clientes que arriban al sistema, desviándolos hacia otro medio de servicio o bien el mismo cliente decide no entrar al sistema al ver que se encuentra saturado de clientes. Este tipo de sistemas se plantea de manera análoga con un "coeficiente de presión" sólo que en esta ocasión para la tasa de llegadas(el número de clientes por unidad de tiempo que llegan al sistema).

Finalmente el sistema puede reaccionar con una combinación de los dos casos anteriores. Al plantear matemáticamente este modelo se enfrenta uno al problema de que no existen expresiones analíticas para las sumas que intervienen, por lo que se tienen que buscar caminos alternativos. Se han tabulado una serie de valores para este tipo de sistemas sin embargo es muy frecuente que los datos tabulados no se ajusten al sistema que se está estudiando por lo que se hace necesario el generar un método alternativo que permita un mejor ajuste al sistema en estudio.

Un método alternativo es el desarrollo de un programa de computación que simule un sistema de colas y que nos permita obtener las medidas de desempeño del sistema. Este es precisamente el objetivo de esta tesis, crear un programa de computación que mediante la simulación le permita al usuario obtener de una forma rápida y confiable las medidas de desempeño de un sistema de colas con coeficientes de presión en las tasas de llegada y/o servicios.

El uso de la simulación para diseñar sistemas productivos se ha intensificado en los últimos años debido a dos factores que han actuado como catalizadores.

El primero es el desarrollo de las computadoras personales, que han permitido poner sobre un escritorio el poder equivalente al de las viejas computadoras que solían ocupar edificios enteros y lo más importante a un precio accesible a cualquier empresa. La popularización de la computadora personal ha permitido el uso de varias herramientas que antes se desechaban por su complejidad numérica, entre ellas la simulación.

El segundo factor que ha actuado como catalizador es que ante un entorno cada vez más incierto las compañías han tenido que desarrollar nuevos métodos que les permitan desarrollar estrategias en un campo de batalla que cambia continuamente, popularizándose lo que se conoce como planeación de escenarios es decir se bosquejan diferentes versiones del futuro y se ve en qué forma afectaría cada escenario el desempeño de la compañía. Esta planeación de escenarios no es más que el uso de la simulación variando las condiciones de entrada del sistema. Este método proporciona una ventaja adicional para las empresas; releva a las personas encargadas de tomar las decisiones de la responsabilidad de tratar de predecir lo que pasará y en cambio adquieren la responsabilidad de fortalecer la flexibilidad de la compañía de tal manera que cuando surjan las oportunidades estén en condiciones de sacar provecho de ellas.

Estos dos fatores han sido decisivos para el desarrollo de un programa de simulación que permite a las personas, que tengan la necesidad de tomar decisiones sobre un sistema de colas con coeficientes de presión, obtener la información necesaria para llegar a una decisión acertada.

El programa se ha desarrollado de tal forma que sea compatible con la IBM-PC que es el estándar en computadoras personales, de tal forma que el usuario no tenga problema alguno al ejecutarlo. El programa mediante la introducción de los parámetros de entrada de un sistema de colas realiza la simulación y obtiene las medidas de rendimiento básicas para la toma de decisiones.

El desarrollo de la tesis se inicia con el capítulo referente a teoría de colas. En este capítulo se explican las principales características de un sistema de colas así como el planteamiento matemático para los modelos básicos. Es importante que el usuario del programa se encuentre familiarizado con la teoría de colas para que pueda obtener el mayor provecho posible de la información que el programa es capaz de generar.

El segundo capítulo de la tesis contiene un estudio de las principales distribuciones de probabilidad que se usan en los sistemas de colas. El usuario del programa deberá conocer las principales propiedades de las distribuciones de probabilidad debido a que el modelo simula el comportamiento del sistema basado en las distribuciones de probabilidad que el usuario decide se ajustan mejor al sistema que se va a simular. Es evidente que si las distribuciones de probabilidad con que se alimentan al programa no se ajustan a las del sistema los resultados que el programa obtenga tampoco se ajustarán al sistema y por lo tanto resultarán inservibles en el mejor de los casos y en el peor llevarán a tomar decisiones erróneas.

El tercer capítulo de la tesis se refiere a la simulación. En el se explican los diversos métodos que se utilizan para generar las variables aleatorias necesarias para la simulación. Se incluye en este capítulo una breve introducción de cómo ha sido el desarrollo de las computadoras personales debido a la importancia que han tomado en la última década y al gran soporte que han dado para el uso de la simulación.

Finalmente el último capítulo se refiere al programa de simulación. En este capítulo se incluye un breve manual del usuario del programa, así como el código del programa en el lenguaje Pascal. Se incluye el código por si algún lector decide hacer alguna modificacion al programa original para un sistema de colas en particular. El diskette que se anexa incluye el programa en un archivo ejecutable para que el usuario no necesite de ningún programa que funcione como intérprete para ejecutar el programa, pero también se anexa el archivo del programa en Pascal así como el compilador de Pascal para los usuarios que así lo requieran.

Por último es importante que el encargado de tomar las decisiones referentes a la planeación de la capacidad tome en cuenta al cliente, porque en un mundo saturado de pronósticos, opiniones, teorías, seminarios, consultores y conceptos no es nada difícil llegar a la conclusión de que los únicos oráculos valiosos de escuchar son los clientes. Por lo tanto además de tener en cuenta que porcentaje de nuestra capacidad instalada estamos aprovechando también es importante evaluar si nuestros clientes se encuentran satisfechos de nuestro servicio.

Capitulo 1:Teoría de colas

1.1 Introducción

En muchas organizaciones existen procesos que generan líneas de espera o colas. Las líneas de espera ocurren cuando alguien debe esperar para recibir un servicio, debido a que las instalaciones que proporcionan el servicio se encuentran temporalmente imposibilitadas para proporcionarlo. Un ejemplo simple de una cola es la fila de clientes que esperan pagar su cuenta en un supermercado. El gerente del supermercado podrá añadir más cajeras para reducir el tiempo que los clientes deben esperar para ser atendidos, sin embargo él sabe, que nunca podrá disponer de suficientes cajeras para garantizar que el cliente no tenga que esperar. Por lo tanto el gerente tratará de balancear la situación de tal manera que tenga las cajeras suficientes para mantener al cliente contento y no más de aquellas que sea económicamente viable tener.

Esta situación se encuentra frecuentemente en la industria pero con un ligero cambio. La industria tipicamente tiene que pagar por el tiempo perdido de las personas o máquinas que tienen que esperar así cómo los salarios de las personas que proveen el servicio. La teoría de colas provee un camino para que la gerencia logre un balance económico entre el costo de servicio y el costo asociado con la espera para ese servicio. Es importante recalcar que la teoría de colas más que resolver directamente este problema provee la información necesaria para tomar una decisión de este tipo.

La teoría de colas se originó en 1909 cuando A.K. Erlang comenzó a experimentar con un problema relacionado con la congestión del tráfico telefónico. Durante las horas pico, los que pretendían hacer llamadas tenían que esperar a que la operadora se desocupara para atenderlos. El problema original que trató Erlang fue el cálculo del tiempo de demora para una operadora. En 1917 Erlang extendió los resultados de su estudio para el caso de varias operadoras. Los adelantos en el campo del tráfico telefónico continuaron y las publicaciones principales fueron las de Molina en 1927 y de Thornton F. Dry en 1928, pero sólo fue hasta el final de la Segunda Guerra Mundial cuando estos trabajos se extendieron a otros problemas relacionados con las líneas de espera.

La aplicación de la teoría de colas se ha extendido a una gran variedad de situaciones debido a que las colas son tan comunes que es casi imposible evitarlas. La aplicación de la teoría de colas no se ha limitado solamente a sistemas que comprenden el servicio de persona a persona en una localización fija como las cajas de pago en un supermercado sino que abarca muchos otros tipos de sistemas como los sistemas de mantenimiento en donde en lugar de que el cliente (en este caso las máquinas) vayan al lugar donde esté el servidor (los mecánicos) son estos últimos los que se desplazan a donde se encuentre localizado el cliente. En los diversos servicios que presta el gobierno también se puede aplicar la teoría de colas, tomando como ejemplo el sistema judicial donde los servidores son los tribunales y los casos a ser tratados los clientes. La lista de aplicaciones de la teoría de colas podría ampliarse de forma indefinida y aún así no agotar todas las posibles situaciones en las que se podría aplicar, sin embargo estos ejemplos bastan para sugerir que, en efecto, los sistemas de colas penetran en diversas áreas de la sociedad.

1.2 Características de las líneas de espera

En todos los sistemas de teoría de colas podemos identificar tres características principales: La llegada, la cola y el servidor.

- **La llegada**

La llegada es el proceso mediante el cual los clientes que requieren servicio, se generan en el tiempo por medio de una fuente de entrada. La fuente de entrada es la población potencial de clientes que puedan entrar al sistema. Puede suponerse una población infinita o finita de clientes, suponer una población infinita facilita los cálculos por lo que en muchos casos cuando el número de clientes sea relativamente grandes i.e. cuando los clientes que se encuentren en el sistema no afecte la velocidad con la cual la fuente de entrada genera nuevos clientes, se podrá suponer una población infinita.

Las llegadas de los clientes deben describirse por su distribución estadística, la cual puede especificarse de dos formas:

a) Distribución del número de llegadas de clientes por unidad de tiempo. En este caso se deberá describir el número de llegadas que pueden ocurrir en cualquier período dado, por ejemplo el número de clientes por hora.

b) Distribución de probabilidad del tiempo entre llegadas consecutivas. Este método está dado por el tiempo que transcurre entre llegada y llegada. En este caso se debe especificar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua que mida el tiempo transcurrido entre una llegada y otra.

. La cola

Cuando se describe una cola debe especificarse la longitud de la línea de espera, por lo regular se supone que la cola puede alcanzar una longitud infinita, no obstante existen ciertos sistemas donde el número máximo de clientes en la cola que soporte el sistema sea tan pequeño que en realidad se alcance con cierta frecuencia por lo que será necesario suponer una longitud de cola finita.

También debe definirse la disciplina de la cola, es decir el orden en que se seleccionan los miembros de la cola para que reciban el servicio. Un ejemplo de la disciplina de la cola es la regla del primero en llegar es el primero en ser atendido. Otro tipo de disciplina puede asignar una prioridad a ciertos clientes para que sean atendidos antes que otros.

Para finalizar deberá definirse el comportamiento que tendrá el cliente en la cola i.e. ¿Cuánto tiempo estarán dispuestos los clientes a esperar para ser atendidos?, o posiblemente algunos clientes ni siquiera entrarán en el sistema si al llegar observan que la línea de espera se encuentra demasiado grande.

. El servidor

El sistema de colas también se ve afectado por varias características del servicio. Se deberá definir la distribución del tiempo de servicio. El tiempo de servicio es el tiempo que transcurre para un cliente desde que se inicia el servicio hasta su terminación.

Un modelo de un sistema de colas deberá especificar la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio para cada servidor y posiblemente para los tipos diferentes de clientes aún cuando es común suponer la misma distribución para todos los servidores (y los clientes).

La segunda característica del servidor que debe especificarse está dada por el número de servidores. Puede haber un solo servidor o varios servidores. Cada servidor se denominará canal de servicio.

El servicio puede prestarse en una fase o en varias fases. Una situación de fase múltiple es aquella en la que el cliente debe pasar por una secuencia de dos o más servidores para que el servicio quede completado. Estas últimas características del servicio se resumen en las figura 1 .

Resumiendo lo anterior podemos decir que el cliente se genera en el tiempo por medio de una fuente de entrada. Esta fuente puede ser finita o infinita dependiendo de si los clientes en el sistema afectan la velocidad con la cual se generan nuevos clientes. Una vez que la fuente de entrada ha generado a los clientes éstos entran al sistema y se unen a una cola con excepción de algunos sistemas en los cuales el cliente puede elegir si entra al sistema o no. Una vez que los clientes se encuentran formados en la cola se elige al cliente al que se va a proporcionar el servicio por medio de la regla conocida como disciplina de la cola. Cuando se termina de proporcionar el servicio al cliente éste sale del sistema. Este proceso se resume en las figura 2.

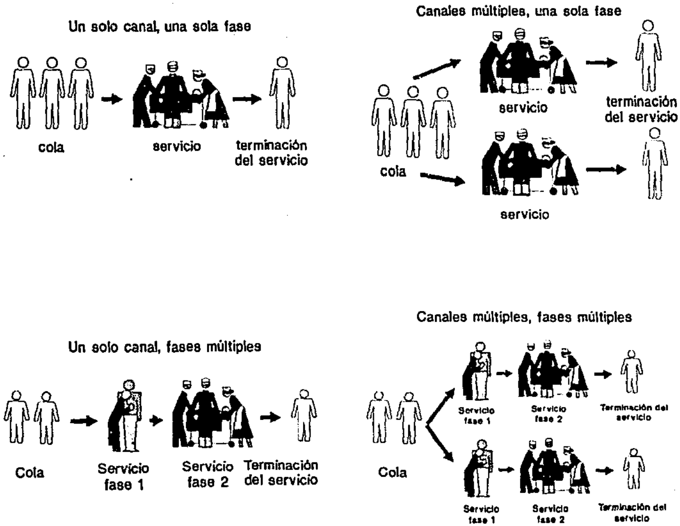


Fig. 1 Diferentes sistemas de líneas de espera

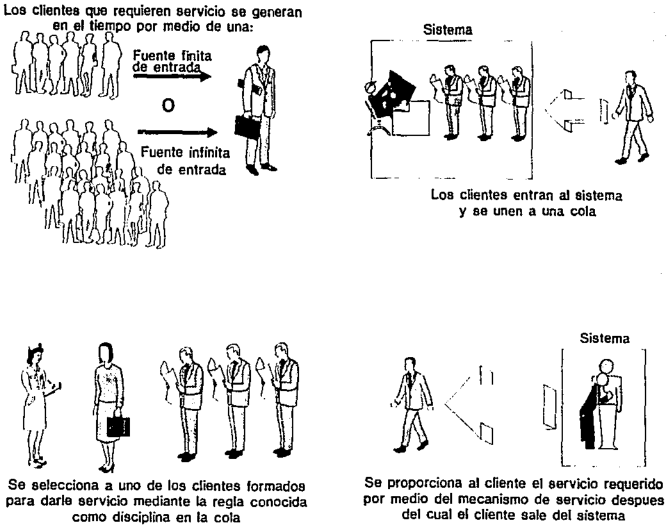


Fig. 2 Proceso básico de un sistema de colas

1.3 Formulación de modelos de colas

Si se quiere predecir el comportamiento de un sistema específico de colas en base a las suposiciones de las llegadas, las colas y los servidores, este comportamiento anticipado puede describirse en ocasiones mediante fórmulas matemáticas pero en otras ocasiones el análisis matemático será demasiado complejo, lo que nos llevará a utilizar técnicas alternas como la simulación. El objetivo de la formulación de modelos de colas es obtener información sobre algunas medidas de desempeño del sistema, las que podremos usar para tomar decisiones como el número de servidores que se deben asignar a un sistema, los cambios que pueden hacerse en las tasas de servicio, etc. Antes de comenzar la formulación de un sistema de colas es necesario establecer una notación estándar que se especifica a continuación:

λ_n= tasa media de llegadas (número de llegadas por unidad de tiempo) cuando se encuentran n clientes en el sistema.

μ_n = tasa media de servicio (número de unidades servidas por unidad de tiempo) cuando se encuentra n clientes en el sistema.

s = número de servidores en el sistema de colas

ρ = factor de utilización del medio de servicio es decir la fracción del tiempo en que los servidores están ocupados

La notación anterior es independiente de si el sistema se encuentra en un estado estacionario o se encuentra en un estado transitorio. Cuando un sistema de colas acaba de empezar a funcionar el estado del sistema (el número de clientes en el sistema) se verá afectado en gran parte por el estado inicial y el tiempo que ha transcurrido desde entonces y se dice que el sistema se encuentra en una condición transitoria. Sin embargo después de que ha transcurrido bastante tiempo el estado del sistema se vuelve esencialmente independiente del estado inicial y del tiempo transcurrido y se dice que el sistema ha alcanzado una condición de estado estacionario.

La notación a continuación supone que el sistema se encuentra en una condición de estado estacionario:

N = Número de clientes en el sistema de colas

P_n = Probabilidad de que se encuentren exactamente n clientes en el sistema de colas

L = Número esperado de clientes en el sistema de colas

L_q = Longitud esperada de la cola

W = tiempo de espera en el sistema (incluyendo el tiempo de servicio)

W_q = tiempo de espera en la cola

Se ha demostrado que en un proceso de colas de estado estacionario:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

Estas demostraciones se encuentran en la obra de John D. C. Little " A proof for the Queueing formula: $L = \lambda W$". Operations research , 1961. Estas relaciones son importantes porque en un sistema de colas en ocasiones es más fácil encontrar algunos parámetros que otros y mediante estas relaciones es posible encontrar los parámetros restantes.

Una gran parte de los sistemas de colas establece la hipótesis de que la llegada de los cllientes al sistema y la salida de ellos ocurren de acuerdo con el proceso de nacimiento y muerte. En donde el término nacimiento se refiere a la llegada de un cliente mientras que el término muerte se refiere a la salida del cliente del sistema. El proceso de nacimiento y muerte describe de manera probabflistica cómo cambia el estado del sistema (número de clientes en el sistema) a medida que se incrementa el tiempo. El proceso de nacimiento y muerte establece las siguientes 3 hipótesis. Denotando $N(t)$ como el número de clientes en el sistema de colas en el instante t $(t > 0)$.

Hipótesis 1

Dado N(t) = n la distribución actual de probabilidad del tiempo restante hasta el siguiente nacimiento es exponencial con parámetro λ_n.

Hipótesis 2

Dado N(t) = n la distribución actual de probabilidad del tiempo restante hasta la siguiente muerte es exponencial con parámetro μ_n.

Hipótesis 3

Sólo puede ocurrir un nacimiento o una muerte en un instante.

Estas hipótesis pueden resumirse en el diagrama de tasas que se muestra en la figura 3. Las flechas en el diagrama muestran las únicas transiciones posibles en el estado del sistema.

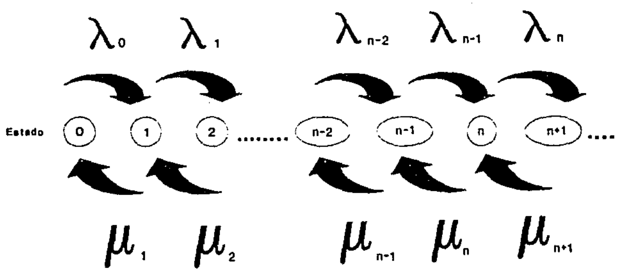


Fig. 3 Diagrama para el proceso de nacimiento y muerte

Los resultados que se han obtenido a través del proceso de nacimiento y muerte básicamente se refieren al estado estacionario del sistema ya que los resultados obtenidos en condición transitoria del sistema son demasiados complicados para tener un uso practico. Sin embargo debido a que los sistemas la mayor parte del tiempo se encuentran en estado estacionario es mucho más importante tener resultado del estado estacionario que de la condición transitoria.

Un principio clave en el planteamiento matemático de sistemas basados en el proceso de nacimiento y muerte es el principio que establece que la **tasa de entrada = tasa de salida.** Es decir para cualquier estado del sistema la tasa media a la que los incidentes de entrada ocurren debe ser igual a la tasa media a la cual ocurren los incidentes de salida. Este principio es fácil de explicar, considérese cualquier estado del sistema y suponga que se estuviera contando el número de veces en que el proceso entra a este estado y el número de veces que el proceso sale de él. Como los dos tipos de incidentes deben alternarse (i.e. no se pueden tener dos entradas o salidas consecutivamente) el número de veces que el proceso entra al estado debe ser igual al número de veces que el proceso sale de él o diferir tan sólo en uno. Esta diferencia posible de 1 al final causaría un error despreciable ya que conforme el tiempo tiende a infinito, la diferencia de 1 tiende a cero por lo que a largo plazo las dos tasas deben ser iguales.

El conjunto de ecuaciones que expresan este principio se denominan ecuaciones de balance para el estado n. Si se construyen las ecuaciones de balance para todos los estados en términos de probabilidades P_n desconocidas entonces puede resolverse este sistema de ecuaciones para encontrar estas posibilidades. Las ecuaciones de balance para el proceso de nacimiento y muerte se muestran en la tabla 1. El proceso de resolución de estas ecuaciones es resolver, en términos de una de las variables siendo P_0 la más conveniente. De donde se usa la primera ecuación con el fin de resolver P_1 en términos de P_0, entonces se usa este resultado en la segunda ecuación con el fin de resolver P_2 en términos de P_0 y así sucesivamente. Al final se tendrian $n + 1$ variables por resolver con solamente n ecuaciones por lo que nos faltaría una ecuación para poder resolver este sistema de ecuaciones. Sin embargo puede utilizarse el requerimiento de que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a uno y de esa forma evaluar P_0. Este procedimiento se desarrolla en la página 17.

Estado	Tasa de entrada = Tasa de salida
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\ P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2)\ P_1$
$\vdots$	$\vdots$
n-1	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1})\ P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\ P_n$
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1

Si se aplica el procedimiento descrito anteriormente se obtienen los siguientes resultados

Estado

$$0 : \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$1 : \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

$$2 : \quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$$

$\vdots$

$$n-1 : \quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} P_0$$

$$n : \quad P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1} P_0$$

$\vdots$

Con el objeto de simplificar la notación sea

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\,\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\,\mu_{n-1}\cdots\mu_1} \qquad \text{Para } n=1,2,\ldots\ldots$$

Por lo tanto las probabilidades de estado estacionario son:

$$P_n = C_n\,P_0 \qquad \text{Para } n=1,2,\ldots\ldots$$

Debido a que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,P_0 = 1$$

$$= P_0 + P_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n = P_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right] = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$$

El valor esperado de L es:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\,P_n$$

Si s es el número de servidores entonces L_q es:

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-s)\, P_n$$

De la relación entre L y W obtenemos

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

donde

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$$

Estos resultados se han obtenido bajo la suposición que λ_n y μ_n tienen valores tales que en realidad el proceso puede alcanzar una condición de estado estacionario. Esto siempre se cumple si

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu s} < 1$$

o

$\lambda_n = 0$ para algun valor de n

Y no se cumple si

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \infty$$

Los modelos de colas que probablemente se usan con mayor amplitud son los que se basan en el proceso de nacimiento y muerte, debido a las hipótesis 1 y 2 las llegadas de clientes al sistema se describen de acuerdo con la distribución Poisson mientras que el tiempo de servicio se describe de acuerdo con una distribución exponencial. Es frecuente que la tasa media de llegadas y la tasa media de servicio sean constantes para un sistema de colas sin importar el estado del sistema. Si en el sistema la tasa máxima de servicio es mayor que la tasa media de llegadas es decir cuando

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu s} < 1$$

El sistema alcanzará una condición de estado estacionario y se podrán aplicar los resultados obtenidos para estado estacionario del proceso de nacimiento y muerte como se muestra a continuación. En las figuras 4 y 5 se muestran los diagramas de tasas para este modelo en particular para el caso de un sólo servidor y el caso de varios servidores respectivamente.

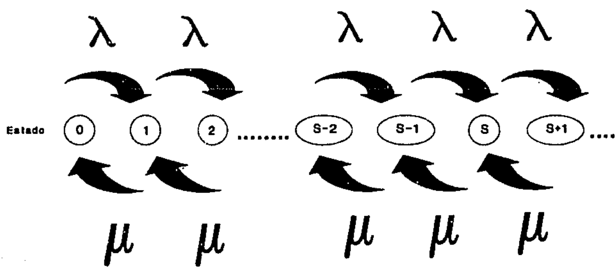


Fig. 4 Diagrama de tasas para un servidor y $\lambda_n = \lambda$ $\mu_n = \mu$

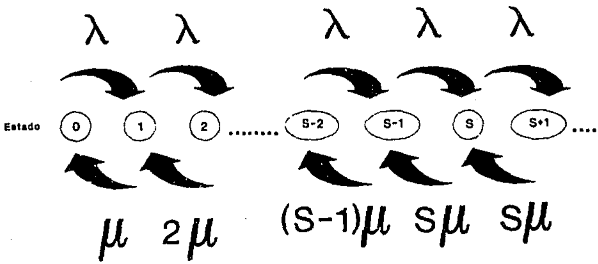


Fig. 5 Diagrama de tasas para varios servidores y $\lambda_n = \lambda$ $\mu_n = \mu$

Resultados para el caso de un servidor (s=1)

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$$

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)^{-1}$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-X}$ para $|X| < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$

$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1}$$

$$P_0 = 1-\rho$$

Por lo tanto $P_n = \rho^n (1-\rho)$ para $n=0,1,2,\ldots$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n (1-\rho)$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^n)$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right\}$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{1-\rho} \right\}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, P_n$$

$$L_q = L - 1 + P_0$$

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{(\mu-\lambda)\lambda - \lambda\mu}{(\mu-\lambda)\mu}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{(\mu-\lambda)\mu}$$

Resultados para el caso de varios servidores

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \text{para } n = 1,2,\ldots\ldots,s$$

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\,s^{n-s}} \quad \text{para } n = s,\ s+1$$

$$P_o = 1 \Bigg/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right]$$

$$= 1 \Bigg/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)}\right]$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_o & \text{si } 0 \leq n \leq s \\[2ex] \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\,s^{n-s}} P_o & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)\,P_n$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j\,P_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j\,\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,\rho^j P_o$$

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,\rho\,P_o\,\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\right)$$

$$= P_o\,\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,\rho\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= \frac{P_o\,(\lambda/\mu)^s\,\rho}{s!\,(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad ; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

1.4 Conclusiones

La teoría de colas provee un camino para lograr un balance económico entre el costo de servicio y el costo asociado con la espera de este servicio. Podemos describir cualquier sistema de líneas de espera mediante sus 3 características principales: la llegada, la cola y el servidor de tal manera que sea posible la formulación del modelo de colas. El objetivo de la formulación es obtener información confiable sobre algunas medidas de desempeño del sistema.

La mayoría de los sistemas de colas establece la hipòtesis de que la llegada de los clientes al sistema y la salida de ellos ocurren de acuerdo con el proceso de nacimiento y muerte, para estos sistemas siempre que la tasa máxima de servicio sea mayor que la tasa media de llegadas, el sistema alcanzará un estado estacionario y se podrán aplicar los resultados obtenidos para estado estacionario del proceso de nacimiento y muerte.

Capitulo 2: Distribuciones de probabilidad

2.1 Introducción

Las características de operación de los sistemas de colas son determinadas en gran parte por dos propiedades estadísticas; la distribucíon de probabilidad de los tiempos entre llegadas o distribución del número de llegadas de clientes y la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio.

Para los sistemas reales de colas esta distribución puede tomar casi cualquier forma; sin embargo para plantear un modelo de teoría de colas como una representación del sistema real se necesita especificar la forma supuesta de cada una de estas distribuciones.

Una distribución de probabilidad describe el comportamiento de una variable aleatoria. Con frecuencia las observaciones generadas por experimentos estadísticos tienen en general el mismo tipo de comportamiento; en consecuencia las variables aleatorias asociadas a estos experimentos pueden ser descritas esencialmente por la misma distribución de probabilidad y por consiguiente pueden representarse mediante una sola fórmula, de hecho se necesitan de unas cuantas distribuciones de probabilidad importantes para describir la mayor parte de las variables aleatorias que se encuentran en la práctica. Sobre estas bases se tratarán a continuación las distribuciones de probabilidad más importantes en la teoría de colas.

2.2 Distribución Poisson

Una distribución Poisson es una distribución de probabilidad discreta que pronostica el número de llegadas en un tiempo dado. La distribución Poisson incluye las siguientes propiedades:

1.- El número de resultados que ocurren en un cierto intervalo de tiempo o en una región especificada es independiente del número que se tiene en cualquier otro intervalo.

2.- La probabilidad de que un sólo resultado ocurra durante un lapso muy corto o en una región pequeña es proporcional a la magnitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región y depende del número de resultados que se produzcan fuera del intervalo considerado.

3.- La probabilidad de que ocurra más de un resultado en un breve lapso de tiempo o de que caiga en una pequeña región es despreciable.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, que representa el número de resultados que se producen en un intervalo de tiempo dado o en una región especifica, es:

$$p(x;\mu)= \frac{e^{-\mu}.\mu^{x}}{x!} \qquad x= 0,1,2,.....$$

Donde μ es el número promedio de resultados que ocurren en el intervalo de tiempo dado o en la región especifica y e = 2.71828

La media de la distribución Poisson es igual a E(x)

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x. \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \mu$$

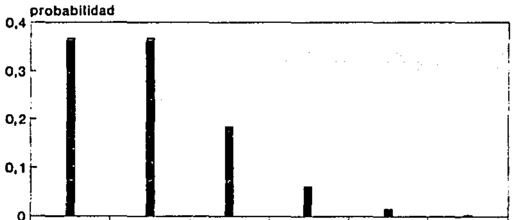
La variancia de la distribución Poisson es igual a $E(x^2) - \mu^2$

$$\sigma^2=E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - E(x) + \mu - \mu^2$$
$$=E[x(x-1)] + \mu - \mu^2$$

$$\text{como} \quad E[x(x-1)]= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \mu^2$$

$$\text{en consecuencia} \quad \sigma^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

La figura 6 muestra el histograma de la distribución Poisson con media = 1. Es decir muestra la distribución de probabilidad para un sistema que tiene como promedio la llegada de un cliente por unidad de tiempo. Como se expuso anteriormente la unidad de tiempo puede ser de cualquier magnitud: un día, una semana, un mes o incluso un año . Si tomamos como ejemplo que el promedio de llegadas es de un cliente por minuto en el histograma podemos observar que la probabilidad de que en un minuto no llegue ningún cliente es de 36.8% y la probabilidad de que lleguen 6 clientes en un solo minuto es prácticamente despreciable. Estos valores se obtienen de la fórmula de la distribución de probabilidad.



	0	1	2	3	4	5
P(n)	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003

número esperado de llegadas

P(n)

Fig. 6 Distribución Poisson con media=1

Se puede observar en la figura 7 los histogramas de tres distribuciones de probabilidad de Poisson. Se puede observar que para los valores con media = 1 y media = 2 la mayor parte de las probabilidades se concentran alrededor de 0,1,2,3 y además existe una alta probabilidad de que ocurran cero llegadas. A medida que aumenta el valor de la media la forma de la distribución cambia hacia una forma más simétrica y la probabilidad de un mayor número de llegadas aumenta. También se puede apreciar cómo la distribución Poisson se va asemejando a una distribución normal aunque sesgada hacia un lado.

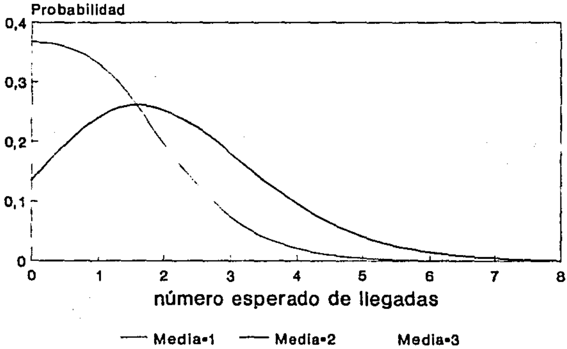


Fig. 7 Distribución de probabilidad Poisson

2.3 Distribución exponencial

La distribución exponencial a diferencia de la distribución Poisson es una distribución de probabilidad continua. La distribución exponencial se ha aplicado ampliamente en la investigación de operaciones, en particular para describir el tiempo entre llegadas de clientes o el tiempo entre servicio de clientes. Las distribución exponencial posee las siguientes propiedades:

1.- Es una función estrictamente decreciente. A medida que el tiempo aumenta la probabilidad de que haya ocurrido una llegada se aproxima a 1, por lo tanto, no sólo es posible si no probable que el valor que adquiera la variable aleatoria T sea menor que la mitad del E(T) que un valor cercano al valor esperado de T.

Un sistema de colas en el cual el tiempo de servicio es esencialmente idéntico para cada cliente con sólo pequeñas desviaciones de la media no se ajustará adecuadamente a la distribución exponencial debido a la propiedad citada anteriormente. Sin embargo cuando las tareas específicas requeridas para proporcionar el servicio difieran según cada cliente, aunque la naturaleza del servicio sea la misma, como consecuencia los tiempos de servicio diferirán continuamente de la media ya que , aunque el servicio requerido con frecuencia sea breve, en ocasiones éste podrá ser extenso. De hecho para el cálculo de la media de la distribución exponencial son especialmente críticos los valores de la cola de la distribución, de tal manera que si se omitieran, la media de la distribución se reduciría considerablemente. Para este tipo de situaciones de servicio se ajusta bastante bien la distribución exponencial.

2.- Carencia de memoria. Para los tiempos entre llegadas esta propiedad describe la situación común, en la que el tiempo hasta la siguiente llegada no es influido en forma alguna por el hecho de cuándo ocurrió la llegada anterior. Para los tiempos de servicio tal suposición tiene la importante implicación de que la variable aleatoria no "envejece". Esto significa que si un cliente ya lleva 10 minutos recibiendo servicio la probabilidad de que requiera 2 minutos más de servicio es igual a la que si ya llevaba 20 minutos recibiendo servicio. En otras palabras un cliente que acaba de empezar a recibir servicio no va a "tardar" más en salir que otro que ya lleve más tiempo recibiendo servicio.

La función de densidad de la distribución exponencial con parámetro alfa y variable aleatoria X es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\alpha}\, e^{-x/\alpha} & \text{para } x>0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

la media de la distribución exponencial es igual a:

$$\mu = E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,\frac{1}{\alpha}\,e^{-x/\alpha}\,dx = \alpha$$

la variancia de la distribución exponencial es igual a:

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

como $E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2\,\frac{1}{\alpha}\,e^{-x/\alpha}\,dx = 2\alpha^2$

entonces:

$$\sigma^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2$$

Las propiedades de la distribución exponencial se pueden apreciar gráficamente en las figuras 8 y 9. En la figura 8 se puede apreciar cómo al aumentar la media de la distribución exponencial (i.e. α) la curva decrece con menor rapidez y por lo tanto la probabilidad de obtener valores mucho más grandes que la media aumenta. En la figura 9 podemos observar que a medida que aumenta t, la probabilidad de una llegada se va acercando a 1.

2.4 Relación entre la distribución exponencial y la distribución Poisson

La distribución exponencial y la distribución de Poisson que se han analizado pueden considerarse como distribuciones duales ya que se puede demostrar que si:

1) El número total de eventos que ocurren durante un intervalo de tiempo dado es independiente del número de eventos que ya han ocurrido previamente al inicio del intervalo.

2)La probabilidad de que un evento ocurra en el intervalo de t a t + Δt es aproximadamente proporcional a Δt para todos los valores de t entonces:

La distribución de probabilidad del tiempo entre eventos es:

$$f(t)= \lambda e^{-\lambda t}$$

Y la probabilidad de que ocurran X eventos durante el tiempo T es

$$f(x)= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

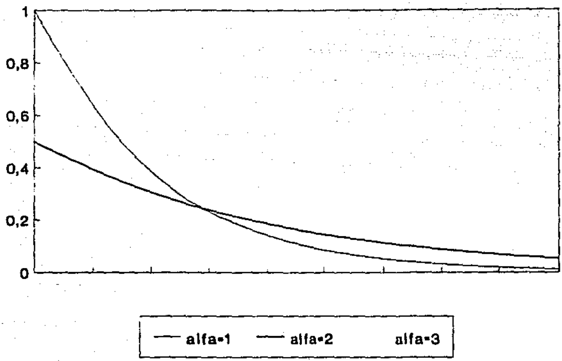
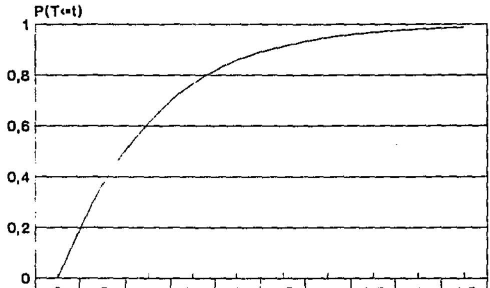


Fig. 8 Distribución de probabilidad exponencial



	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
P(T<=t)	0	0,393	0,632	0,777	0,865	0,918	0,95	0,97	0,982	0,989

t

Fig. 9 P(T<=t) para una distribución exponencial con alfa=1

Es decir si ocurren llegadas de acuerdo con la distribución Poisson con media = miu entonces el tiempo entre llegadas será descrito de acuerdo con la distribución exponencial con parámetro $\alpha = 1/\mu$.

2.5 Distribución normal

En 1733, Abraham DeMoivre desarrolló la expresión matemática para la curva normal y proporcionó la base sobre la cual se funda gran parte de la teoría estadística inductiva. La distribución normal tiene las siguientes propiedades:

1.- La moda, que es el punto en el eje horizontal donde la curva tiene su máximo ocurre en $x = \mu$

2.- La curva es simétrica respecto a un eje vertical que pasa por la media μ

3.- La curva normal se aproxima en forma asintótica al eje horizontal a medida que avanza en uno u otro sentido a partir de la moda.

4.- El área total bajo la curva y por encima del eje horizontal es igual a 1.

La gráfica de la distribución normal tiene forma de campana como puede apreciarse en las gráficas de la figura 10. En estas gráficas podemos apreciar que el área bajo la curva para los valores comprendidos entre la media y +/- una desviación estándar es de 68.26, es decir casi el 70% de las variables aleatorias de una distribución normal estarán comprendidos entre la media y +/- una distribución estándar. De manera análoga se puede apreciar el área bajo la curva para los valores comprendidos entre la media y +/- 2 y 3 desviaciones estándar. Aunque la curva se extiende hacia el infinito hacia ambos lados de la media para propósitos prácticos se puede considerar que todas las variables aleatorias se encuentran comprendidas prácticamente entre la media y tres desviaciones estándar. El área bajo la curva se puede calcular por métodos numéricos o bien utilizar las tablas con los valores del área bajo la curva para la distribución normal estándar (i.e. con media = 0 y desviación estándar = 1) . Para una distribución normal en particular se puede transformar cualquier variable normal X en una nueva variable aleatoria normal Z con media cero y variancia 1.

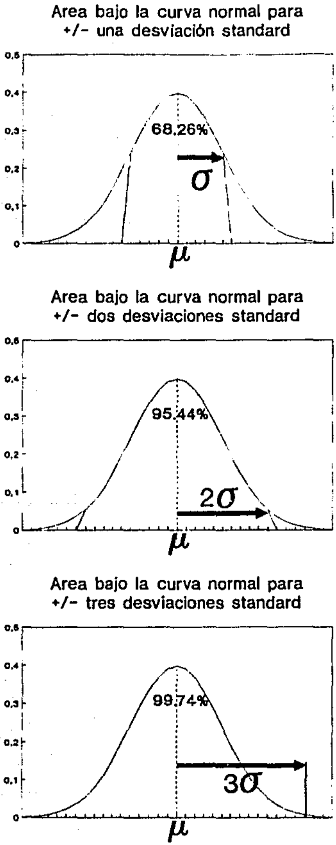


Fig. 10 Area bajo la curva normal

Esto puede realizarse por medio de la transformación:

Z = (X-media)/(desviación standard)

La función de densidad de la variable aleatoria normal X, con media μ y variancia σ^2, es

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma)]^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

La media de la distribución normal está dada por:

$$\mu = E(x) = x\cdot f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma)]^2} dx = \mu$$

La variancia de la distribución normal está dada por:

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma)]^2} dx = \sigma^2$$

Los sistemas de colas en donde el servicio requerido es esencialmente idéntico para cada cliente , donde el servidor efectúa siempre la misma sucesión de operaciones y por lo tanto los tiempos de servicio tienden a estar siempre cerca de la media del tiempo de servicio en general se ajustan a una distribución normal ya que como vimos en las características de la distribución la mayor parte de las variables aleatorias se agrupan alrededor de la media, además de que la probabilidad de obtener valores mucho más grandes que la media o mucho más pequeños es casi nula , como se pudo apreciar en las gráficas del área bajo la curva de la distribución normal. Lo cual se ajusta a esta clase de sistemas de colas donde es casi imposible obtener un tiempo de servicio muy por debajo de la media ya que siempre se necesitará una cantidad mínima de tiempo para efectuar las operaciones de tiempo requeridas aun cuando el servidor este trabajando a la velocidad máxima.

2.6 Distribución Erlang

Cuando se describió la distribución exponencial se sugirió que el tiempo requerido para llevar a cabo ciertas clases de tareas bien podría tener una distribución exponencial. Sin embargo es posible que el servicio total requerido por un cliente haga que el servidor lleve a cabo no sólo una tarea específica si no una sucesión de n tareas. Si las n tareas tienen una distribución exponencial idéntica con media igual a β, entonces el tiempo total de servicio tendriá una distribución Erlang con parámetros β y n. Este sería el caso si el servidor debe realizar la misma tarea con distribución exponencial n veces para cada cliente. Al examinar la función de densidad de la distribución Erlang el lector se podrá dar cuenta de que es la misma que la de la distribucion gamma salvo por la restricción de que n debe ser un entero positivo. La distribución Erlang ocupa un lugar intermedio entre las distribuciones de tiempo de servicio constantes y los tiempos de servicio con distribución exponencial, ya que con un tiempo de servicio constante se supone una variación cero en los tiempos de servicio mientras que con la distribución exponencial se supone un grado muy alto de variabilidad , mientras que la distribución Erlang llena un campo intermedio entre estas dos distribuciones.

La función de densidad de la distribución Erlang es:

$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{x^{n-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{n} (n-1)!} & x > 0 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} & \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $\beta > 0$

La media de la distribución Erlang es βn y la variancia β^2

La distribución Erlang también es muy útil porque es una gran familia biparamétrica de distribuciones de probabilidad que permiten únicamente valores no negativos. De donde comúnmente las distribuciones empíricas de los tiempos de servicio pueden aproximarse de manera bastante razonable. De hecho la distribución exponencial es un caso especial de la distribución Erlang con parametro n = 1 como se puede apreciar en la figura 11. Si n tendiera al infinito la gráfica de la distribución Erlang seria una línea recta vertical.

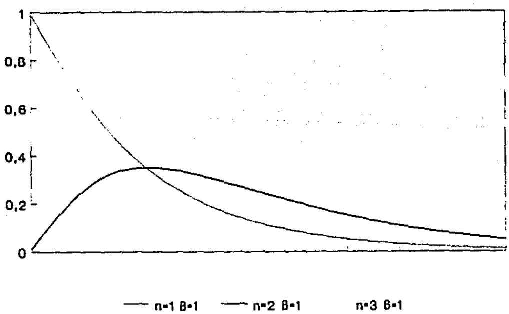


Fig. 11 Graficas de 3 distribuciones Erlang con parámetros B=1 y n=1,2,3

Bondad de ajuste

Con objeto de emplear una determinada distribución de probabilidad para un determinado modelo de líneas de espera, en primer lugar se debe de validar la distribución, es decir debemos probar que la situación real de la línea de espera se ajusta a esa distribución. En primer lugar se deben de recopilar datos sobre los tiempos de llegada y de servicio, posteriormente puede utilizarse una técnica estadística denominada prueba de bondad de ajuste para determinar si los datos se ajustan en realidad a las distribuciones propuestas.

La prueba de bondad de ajuste está basada en qué tan bueno es un ajuste entre las frecuencia de ocurrencia de observaciones en una muestra observada y las frecuencias esperadas obtenidas de la distribución hipotética. Es una práctica común referirse a cada resultado posible de un experimento como una celda.

La prueba de bondad de ajuste entre las frecuencias observadas y esperada se basa en la cantidad:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

En donde X^2 es un valor de una variable aleatoria cuya distribución muestral es muy aproximada a la distribución ji-cuadrada con $v = k-1$ grados de libertad. Los símbolos O_i y e_i representan las frecuencias observada y esperada respectivamente para la i-ésima celda.

El número de grados de libertad asociado con la distribución ji-cuadrada utilizada aquí es igual a k-1 ya que hay solamente k-1 frecuencias de celdas libremente determinadas. Esto es una vez que se determinan las frecuencias de k-1 celdas también se determina la frecuencia de la k-ésima celda.

Si las frecuencias observadas son cercanas a las frecuencias esperadas correspondientes el valor de X^2 será pequeño indicando un buen ajuste. Si las frecuencias observadas difieren considerablemente de las frecuencias esperadas el valor de X^2 será muy grande y el ajuste será deficiente. Un buen ajuste conduce a la aceptación de la distribución de probabilidad propuesta mientras que un ajuste deficiente conduce a su rechazo. La región crítica caerá entonces en la cola derecha de la distribución ji-cuadrada.

Para ilustrar lo anterior considerese los datos mostrados en la tabla 2.

0.4842	0.7743	0.0033	0.2861	0.4293	3.5625	1.3576	1.3898	0.1866	0.7645
0.5169	4.0083	2.9010	0.3846	3.1502	0.1454	0.2003	1.8375	0.3213	0.5031
1.3453	1.2824	0.3356	2.6126	0.1898	2.3656	0.3217	0.4642	0.8357	0.4828
3.2007	0.1046	1.8554	3.7800	0.7262	0.4130	0.0697	0.1921	0.0997	1.5550
1.1263	0.9901	1.0573	1.7021	0.6064	0.1992	0.2996	2.6232	1.2472	1.8572
1.5163	0.2671	0.8492	0.0925	1.1577	0.3706	1.0909	3.9844	0.7665	0.0003
0.5867	0.0972	2.1283	0.7344	0.7592	0.2691	1.6561	3.0947	0.6356	0.5246
1.0258	0.1262	0.7194	2.7047	0.3564	0.2932	0.0180	0.0243	0.0865	0.6333
0.9539	0.6413	1.1524	0.6571	1.8965	2.0048	2.8995	1.8363	0.7495	0.7542
1.0130	2.1569	0.4815	0.4486	0.1127	2.3316	0.0191	0.0201	0.1244	0.0293

Tabla 2

Suponga que estos datos fueron obtenidos de un muestreo de los tiempos de servicio de un servidor en un sistema de colas y la unidad de tiempo en que fueron tomados son minutos. El promedio de este conjunto de datos es 1.039 mientras que la desviación estándar de los datos es 1.008, si se obtiene el histograma de frecuencia relativa de los datos se podrá observar que los datos parecen ajustarse a una distribución exponencial. Una vez supuesta la distribución de probabilidad se debe proceder a realizar la prueba de bondad de ajuste para comprobar nuestra hipótesis. Primeramente se debe obtener la frecuencia obtenida por celda para compararla con la frecuencia esperada. Estos datos se muestran en la tabla 3 y en la figura 12.

Intervalo	Frecuencia observada	Frecuencia esperada
0 a 0.5	40	39
0.5 a 1	22	24
1 a 1.5	12	15
1.5 a 2	9	9
2 a 2.5	5	5
2.5 a 3	5	3
3 a 3.5	3	2
3.5 a 4	3	1
Mayor a 4	1	2

Tabla 3 Frecuencias observadas y esperadas en 100 variables aleatorias exponenciales

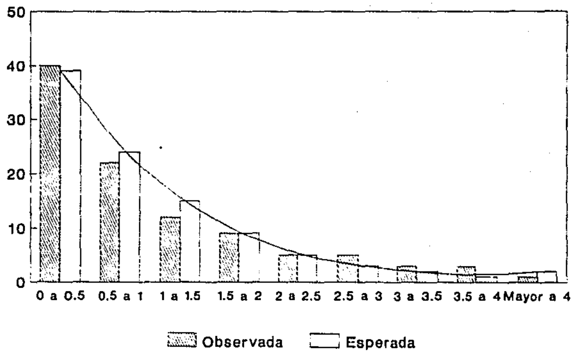


Fig. 12 Histograma de frecuencia observada y frecuencia esperada

Al comparar las frecuencias observadas con las esperadas correspondientes, se debe decidir si es más probable que ocurran la discrepancias como resultado de fluctuaciones en la muestra y de que la distribución de probabilidad de los datos sea efectivamente la de la muestra o que los datos de la muestra no se comportan de acuerdo a la distribución de probabilidad propuesta. Para un nivel de significancia igual a α, se encuentra el valor crítico de X^2 de una tabla que contenga los valores críticos de la distribución ji cuadrada. Esta tabla se puede encontrar fácilmente en casi cualquier libro de estadística. Y entonces $X^2 > X^2{}_\alpha$ constituye la región crítica. Este criterio de decisión no debe ser usado a menos que cada una de las frecuencias esperadas sea al menos igual a 5. Esta restricción puede requerir la combinación de celdas adyacentes, dando como resultado una reducción en el número de grados de libertad. Debido a esta restricción y de acuerdo a los valores de la tabla se tienen que sumar los valores de las últimas cuatro celdas y considerarlas como una sola.

$$X^2 = \frac{(40-39)^2}{39} + \frac{(22-24)^2}{24} + \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(9-9)^2}{9} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(12-8)^2}{8}$$

$$X^2 = 1/39 + 4/24 + 9/15 + 0 + 0 + 2 = 2.79$$

$$X^2_{0.05} = 11.070 \quad \text{para } V=5 \text{ grados de libertad}$$

En base al resultado anterior se concluye que la distribución exponencial con media = 1 proporciona un buen ajuste para los tiempos de servicio muestreados.

2.8 Conclusiones

La importancia de las distribuciones de probabilidad radica en que en base a ellas se va a modelar el sistema de colas. Que este modelo represente adecuadamente a la realidad dependerá en gran medida en que tan bien las tasas de llegada y servicio se ajusten a las distribuciones de probabilidad que estamos utilizando en nuestro modelo, por eso, es fundamental que la persona que esté realizando el modelo tenga un amplio conocimiento sobre las distribuciones de probabilidad para que pueda seleccionar adecuadamente aquella que mejor represente el caso específico que se desee modelar.

Capitulo 3:Simulación

3.1 Antecedentes

Con el advenimiento de las computadoras digitales a principios de la década de los cincuenta se han desarrollado una gran cantidad de herramientas analíticas que han tenido un profundo impacto en el campo científico. Una de estas aplicaciones es precisamente la simulación cuyos usos y aplicaciones se han extendido significativamente en los últimos años. Un catalizador importante para el auge de la simulación en nuestros días es la computadora personal que ha puesto sobre un escritorio el poder de procesamiento equivalente al de 40 de las viejas computadoras que solían ocupar edificios enteros y lo más importante a un costo que puede solventar cualquier empresa, lo que casi nos permite olvidarnos del factor costo cuando se analiza si es adecuado el uso de la simulación para resolver algún problema. Indiscutiblemente la computadora personal ha jugado un papel destacado en la popularización de la simulación por lo que es importante conocer un poco de su historia así como las principales tendencias que seguirán las computadoras personales para la década de los noventas.

La historia esta salpicada con una vertiente de productos que arriban a un mercado naciente y cristalizan un nuevo orden en donde las organizaciones instintivamente alteran su forma de hacer las cosas y la sociedad se ve invadida de nuevas posibilidades. Estos productos pivotes, generalmente no son los primeros de su clase ni los más rápidos o grandes, simplemente crean un nuevo sentido en la forma de vida, una vez que aparecen el planeta, se convierte en un lugar diferente.

Hace una década la IBM sacó al mercado uno de estos productos a un mundo ansioso por aprovecharlo, la PC (computadora personal por sus siglas en inglés) una caja de metal color marfil ,llena de cables, circuitos y motores diseñada con un sistema abierto , es decir está diseñada de tal forma que los fabricantes de equipo periférico y diseñadores de software pueden comprender perfectamente su funcionamiento con el propósito de desarrollar nuevas aplicaciones para la computadora y complementarla. Cientos de compañías hicieron precisamente eso, complementarla, pero el diseño abierto también generó una nueva serie de computadoras idénticas sólo que fabricadas por otras compañías.

En realidad IBM nunca intentó crear una computadora que fuera tan fácil de copiar, pero estaba tan apresurada por sacar la computadora al mercado que en vez de construir todos los componentes y software para la PC en IBM como lo hace para las computadoras más grandes que fábrica, IBM utilizó a compañías independientes para que fabricaran algunos componentes, entre estas compañías destacan fundamentalmente dos: Intel y Microsoft. Intel fabrica los microprocesadores (el cerebro de la computadora) mientras que Microsoft fabrica el sistema operativo (el software que controla la interacción entre los componentes físicos de la computadora y los programas de aplicaciones como hojas de cálculo y procesadores de palabras).

Como una concesión IBM permitió a estas dos compañías poder vender estos mismos productos a otras compañías. La primera compañía que pudo unir todos estos elementos y crear una computadora compatible con IBM fue Compaq Computer en 1982; después de Compaq literalmente cientos de fabricantes comenzaron a producir PC's compatibles, las que obviamente arrancaron a IBM una buena parte del mercado. La competencia y los avances tecnológicos han provocado una espectacular reducción en los precios de las computadoras personales. En 1981, ajustando las cantidades de acuerdo a la inflación, la computadora personal de IBM tenía un costo de 2,665 dólares en los Estados Unidos ,en 1991 con la misma cantidad de dinero se puede adquirir una computadora con 35 veces más poder de procesamiento, 1,200 veces más capacidad de disco, un monitor a colores con alta resolución y más. De hecho la industria de las computadoras es la industria que posee el mayor número de empleados con algún doctorado por metro cuadrado y el precio de sus productos se asemeja cada vez más al de los frijoles.

Las computadoras personales fueron sin duda alguna el segmento de mercado de computadoras que más destacó en los ochentas, creciendo prácticamente de nada hasta llegar a ocupar el 39% del mercado de computadoras. Durante la primera mitad de la década obtuvieron un asombroso crecimiento de un 70% anual, aunque para la segunda mitad de la década bajó a un 24% anual. Según los analistas se espera que este sector se siga expandiendo a un 13% anual para la década de los noventas. En diez años la industria de las computadoras personales se ha convertido en una industria con ventas anuales de 100,000 millones de dólares.

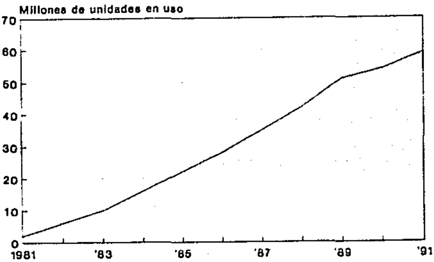


Fig. 13 Computadoras de uso personal en los Estados Unidos

A pesar de esto la revolución apenas ha comenzado, pronto harán su arribo al mercado, computadoras que puedan leer documentos escritos a mano, mientras que otras podrán reproducir y editar imágenes de video. Los fabricantes de semiconductores serán capaces de reducir prácticamente todos los circuitos de una computadora personal a un solo chip no más grande que el tamaño de una moneda.

Una computadora precursora de lo que podrían ser las computadoras personales en los noventas es la Next, diseñada por Steve Jobs -co fundador de Apple- quien define los ochentas como la década de la computación personal y espera que los noventas sea la década de la computación interpersonal. La computadora Next fue diseñada con un concepto de red en mente, están fabricadas para que la gente pueda realizar su trabajo en equipo, por ejemplo empleados en diferentes oficinas podrán compartir documentos utilizando la computadora en vez de utilizar el teléfono y el fax. Las computadoras Next disponen de circuitos especiales que les permiten manipular e intercambiar imágenes fotográficas, de video y sonidos, así como números y textos.

IBM y Apple se ha unido con el objeto de crear el estándar de las computadoras personales en los noventas, en donde ambas compañías controlarán los derechos de los microprocesadores y los sistemas operativos. La computadora que IBM y Apple tienen en mente será capaz de enviar documentos animados (amalgamas de imágenes, sonidos, números y textos que llevan consigo mismo los programas que necesitan para trabajar) el receptor no sólo verá este material en sus pantallas, si no que podrá modificar las hojas de cálculo, editar texto, dictar comentarios aunque su computadora no tenga los programas que crearon los documentos animados. Con estas nuevas herramientas el uso de la simulación será cada día más frecuente.

La simulación se originó en los trabajos de John Von Neumann y Stanislaw Ulam durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se enfrentaron a un problema de blindaje nuclear, que era demasiado costoso para la experimentación y demasiado complejo para el análisis. Los dos matemáticos dieron una solución que equivalía a someter el problema a una ruleta. Paso a paso las probabilidades de los diversos acontecimientos se unieron en una imagen total que dio una solución aproximada aunque práctica del problema.

Von Neumann dió el nombre clave de "Montecarlo" a sus trabajos. El método Montecarlo que en realidad es el estudio de las leyes del azar, tuvo tanto éxito en los problemas de blindaje nuclear que más tarde su popularidad se amplio y se incluyó en el área de investigación de operaciones. La simulación es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el próposito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema.

Esencialmente el método de simulación lleva a cabo experimentos con los datos de entrada de la muestra y no con todo el universo ya que ésto último requeriría mucho tiempo, tendría muchos inconvenientes y sería muy costoso.

El método Montecarlo comprende la determinación de la distribución de probabilidad de la variable de que se trata para obtener luego una muestra de esa distribución mediante números aleatorios para obtener los datos deseados. El método se usa para resolver problemas que dependen de la probabilidad, en que la experimentación física es impracticable y donde es imposible la creación de una fórmula exacta. Básicamente se estudia una prolongada secuencia de pasos o acontecimientos, cada uno de los cuales se relaciona con una determinada probabilidad. Podemos escribir fórmulas matemáticas para la probabilidad de cada paso o acontecimiento, pero a menudo nos vemos imposibilitados para escribir una ecuación que sea útil para las probabilidades de todos los pasos o acontecimientos. Cualquier problema de líneas de espera es un candidato lógico para el método de simulación Montecarlo, porque tanto los tiempos de llegada como de servicio pueden simularse cuando son probabílisticos y se conocen sus distribuciones.

3.2 Etapas para realizar un modelo de simulación

El primer paso en un estudio de simulación consiste en la identificación del problema, implica la recopilación de datos que describen las diferentes variables de entrada, la identificación de los límites o cotas del sistema, la definición de los componentes del problema ,sus interrelaciones . las medidas de efectividad que se van a utilizar para definir y estudiar el sistema y los resultados que se esperan obtener del estudio.

La segunda etapa del proceso de simulación es la formulación del modelo. se refiere a construir el modelo de simulación y a definir los procedimientos estadísticos que se utilizarán para aplicar el modelo. Dado que la simulación implica llevar a cabo experimentos muestrales en un modelo del sistema del mundo real, los resultados que se obtienen son observaciones muestrales. El objetivo del análisis estadístico es asegurar que el problema se aborda en forma adecuada desde el punto de vista estadístico, es decir que el número de condiciones y casos del modelo que se examina sea suficiente para obtener inferencias estadísticas válidas a partir de los resultados.

La tercera etapa es la validación del sistema. Esta etapa es de particular importancia ya que aunque dispongamos del sistema de cómputo más sofisticado en el mercado, mientras le alimentemos basura lo único que nos podrá dar será más basura. Por esto el validar el sistema consiste en asegurarnos de que las entradas al modelo de simulación sean las adecuadas y que el modelo responda a esas entradas de manera similar al problema real. A través de esta etapa es posible detallar las deficiencias en la formulación del modelo o en los datos alimentados al modelo. Las formas más comunes de validar el modelo son:

- La opinión de expertos sobre los resultados de la simulación
- La exactitud con que se predicen los datos históricos
- La comprobación de falla del modelo de simulación al utilizar datos que hacen fallar al sistema real
- La aceptación y confianza en el modelo de la persona que hará uso de los resultados que arroje el sistema de simulación

Si un modelo determinado no simula en forma adecuada la respuesta del sistema real, entonces resulta necesario volver a examinar las dos primeras etapas con el objeto de identificar los factores o relaciones que no se hayan considerado.

Una vez validado el sistema el posible comenzar la experimentación del modelo que consiste en generar los datos deseados y en realizar el análisis de sensibilidad de los índices requeridos. Posteriormente se interpretarán los resultados que arroja la simulación y en base a esto se toma una decisión. Es obvio que la computadora en sí no toma la decisión si no proporciona la información necesaria para tomar mejores decisiones y por ende obtener mejores resultados. Es importante que independientemente de cual sea el lenguaje de computación utilizado para realizar la simulación, los datos que se obtengan del sistema sean semejantes ya que los programas son únicamente herramientas para obtener la información necesaria para tomar las decisiones. Entre los lenguajes más populares se encuentran el FORTRAN, BASIC, PASCAL, etc. y también se cuenta en la actualidad con algunos paquetes diseñados especialmente para la simulación como el GPSS simula, simscript, etc.

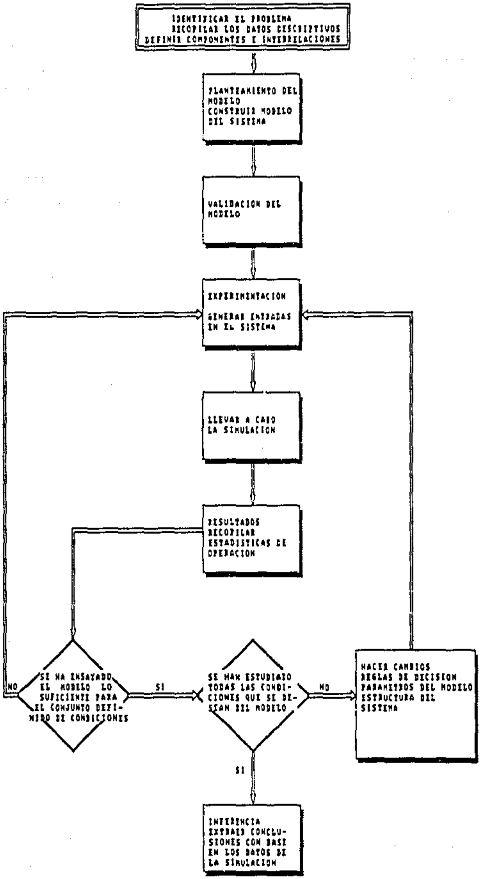


Fig. 14 PROCESO DE MODELOS DE SIMULACION

3.3 Generación de numeros aleatorios

La puesta en práctica de un modelo de simulación requiere de números aleatorios para obtener observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad. Estos números aleatorios se deben ajustar a una distribución uniforme y los podemos obtener de diversas formas. La primera forma es obtenerlos de tablas de números aleatorios como las publicadas por la Rand Corp. Este método implica la utilización de un dispositivo magnético en donde hayan sido grabados previamente estas tablas para que la computadora pueda obtener los números cuando los necesite. Este método es poco práctico debido a que primero se necesita de una persona que teclee toda la tabla en la computadora para grabar los números en el dispositivo magnético. Aún suponiendo que consigamos el dispositivo magnético con los números, el tiempo que tarda la computadora en leer los datos del disco es mucho mayor al que tardaría, si la computadora fuera capaz de generar los números aleatorios ella misma. Debido a esto, se han desarrollado varios metodos matemáticos que utilizan fórmulas recursivas para generar los números aleatorios. Estos métodos son bastantes eficientes. Es necesario aclarar que los números generados a través de este método en realidad son números pseudoaleatorios, por ser una sucesión de números generada por una regla puramente determinística. La mayoría de los lenguajes de computación cuentan con funciones que generan números aleatorios de esta forma por lo que el programador en vez de utilizar directamente la fórmula recursiva utiliza la función que genera los números aleatorios. Los números pseudoaleatorios deben de poseer ciertas características deseables que aseguren o aumenten la confiabilidad de los resultados obtenidos en la simulación. Tales características son:

- Uniformemente distribuidos
- Estadísticamente independientes
- Reproducibles
- Que tengan un período largo sin repetición

3.4 Pruebas estadísticas para los números pseudoaleatorios

Es importante asegurarse de que los números pseudoaleatorios que genere la computadora cumplan con las propiedades descritas anteriormente, ya que cualquier deficiencia que presenten repercutirá directamente en las variables aleatorias no uniformes que se generen a través de estos números. Por consiguiente se realizarán a continuación tres pruebas estadísticas que han sido desarrolladas para probar la aleatoriedad de los números pseudoaleatorios.

Los números aleatorios que se muestran en la tabla 4 han sido generados por medio de la siguiente fórmula recursiva y utilizando como semilla a 0 es decir $X_0 = 0$

$$X_{n+1} = \text{Parte fraccionaria de } (\text{Pi} + X_n)^5$$

0.019684	0.727971	0.581599	0.446543	0.764263	0.036694	0.313883	0.651050	0.711095	0.827395	0.915004	0.523573
0.406518	0.323699	0.688419	0.139091	0.033497	0.686383	0.951778	0.226387	0.358689	0.430539	0.617628	0.740171
0.344282	0.705836	0.049884	0.099454	0.623999	0.123254	0.949079	0.442398	0.336221	0.782038	0.909360	0.903381
0.876116	0.869129	0.797582	0.476302	0.840797	0.657159	0.051243	0.805349	0.864031	0.219743	0.101106	0.536549
0.197397	0.026656	0.224960	0.441211	0.358158	0.032306	0.081209	0.670984	0.550850	0.387044	0.060355	0.566984
0.514134	0.933589	0.918679	0.508783	0.168458	0.349998	0.939670	0.329531	0.907138	0.914669	0.070306	0.829221
0.183030	0.174202	0.810151	0.704948	0.077366	0.603005	0.251484	0.747481	0.673936	0.674742	0.529547	0.813918
0.306848	0.656369	0.229602	0.430999	0.992199	0.099138	0.449965	0.605674	0.879362	0.105602	0.028876	0.345009
0.242527	0.842692	0.042088	0.075450	0.575637	0.737165	0.937582	0.436817	0.746757	0.846659	0.051259	0.813304
0.555763	0.965619	0.787534	0.441214	0.360171	0.543778	0.838830	0.185252	0.532876	0.843016	0.450999	0.465725
0.832919	0.788826	0.981303	0.275527	0.909372	0.918861	0.755897	0.342040	0.052878	0.655847	0.686868	0.472344
0.456933	0.425091	0.195634	0.931917	0.615749	0.865117	0.617882	0.993671	0.249828	0.650737	0.387406	0.340364
0.819535	0.201713	0.715707	0.920098	0.438146	0.837003	0.894390	0.893956	0.318840	0.195115	0.609798	0.954002
0.351791	0.273886	0.791826	0.566736	0.280153	0.071245	0.329554	0.924398	0.302263	0.423346	0.785413	0.916653
0.757947	0.710428	0.092719	0.923942	0.679288	0.362219	0.085152	0.802693	0.645622	0.111956	0.575028	0.155857
0.844276	0.040061	0.035253	0.579275	0.216215	0.854140	0.550086	0.677126	0.061266	0.045823	0.998531	0.372851
0.145939	0.016475	0.128525	0.953044	0.005236	0.578458	0.434244	0.639792	0.133415	0.757648	0.364444	0.764334
0.118922	0.494635	0.704689	0.793426	0.482956	0.561746	0.574536	0.685880	0.411100	0.963379	0.604361	0.585076
0.793967	0.132571	0.272214	0.654877	0.678040	0.032839	0.351887	0.344835	0.114430	0.963376	0.600305	0.600460
0.752598	0.542524	0.682839	0.153270	0.317360	0.134435	0.344421	0.808794	0.052007	0.202111	0.964161	0.714164
0.213085	0.867959	0.285259	0.581583	0.431253	0.199106	0.089284	0.048512	0.388703	0.347320	0.952605	0.387318

Tabla 4

0.272833	0.075326	0.508991	0.353531	0.570149	0.512575	0.542339	0.512561	0.529467	0.741891	0.299141	0.231399
0.593024	0.491348	0.837106	0.023793	0.785164	0.620401	0.512542	0.512977	0.901110	0.839244	0.705466	0.644320
0.773466	0.796508	0.184300	0.950117	0.896743	0.019862	0.816521	0.496973	0.751048	0.762129	0.555909	0.102448
0.278751	0.111030	0.056417	0.502271	0.408154	0.620549	0.661179	0.246413	0.396749	0.624436	0.562341	0.134161
0.186989	0.597987	0.331455	0.305233	0.515868	0.483181	0.755984	0.442451	0.380390	0.921811	0.771730	0.759370
0.356158	0.533622	0.523118	0.996105	0.814049	0.467225	0.103451	0.834946	0.320358	0.283976	0.697968	0.464342
0.662305	0.423975	0.293524	0.308351	0.720562	0.307421	0.061902	0.380682	0.146503	0.346269	0.174534	0.010551
0.193344	0.513332	0.217716	0.809128	0.458702	0.909416	0.978797	0.658421	0.366762	0.517766	0.183426	0.416101
0.958630	0.877067	0.109454	0.175123	0.366566	0.364119	0.796087	0.677337	0.285265	0.585981	0.666332	0.648822
0.409495	0.685947	0.483823	0.309585	0.595242	0.651011	0.670509	0.049860	0.087123	0.872591	0.284845	0.296122
0.119620	0.889279	0.130592	0.136569	0.575234	0.352202	0.579886	0.802316	0.189044	0.861216	0.601020	0.301749
0.062093	0.481293	0.127362	0.288824	0.044588	0.361679	0.678596	0.624841	0.970105	0.185058	0.414180	0.421405
0.219731	0.093297	0.240283	0.373057	0.303213	0.091654	0.341228	0.455275	0.036026	0.973115	0.492563	0.896143
0.222175	0.655489	0.314105	0.809731	0.193178	0.410899	0.803241	0.308922	0.124818	0.838419	0.669513	0.997969
0.234111	0.351100	0.759343	0.325647	0.094457	0.875586	0.179340	0.924988	0.108953	0.895416	0.256840	0.308494
0.821555	0.691400	0.351612	0.139940	0.525599	0.236329	0.792610	0.505049	0.860024	0.071658	0.549282	0.931101
0.493262	0.505840	0.559838	0.782140	0.030283	0.056135	0.354871	0.571172	0.483961	0.429126	0.468409	0.108568
0.680958	0.143310	0.483840	0.324687	0.401087	0.032803	0.333393	0.716567	0.871839	0.308550	0.861044	0.380618
0.097191	0.377397	0.622847	0.965444	0.538933	0.381966	0.135334	0.862634				

Tabla 4 (continuación)

A esta serie de números pseudoaleatorios se le aplicarán las pruebas estadístícas para demostrar su aleatoriedad.

3.4.1 Prueba de los promedios

Conociendo los parámetros de la distribución uniforme en el intervalo (0,1) (i.e media = 0.5 y variancia = 1/12) es posible plantear una prueba de hipótesis de promedios con la cual se trata de probar que los números pseudoaleatorios provienen de un universo uniforme con media = 0.5. Para la realización de esta prueba es necesario obtener la media de los números pseudoaleatorios para determinar el valor estadístico Z_0 utilizando la siguiente expresión:

$$Z_0 = \frac{(\bar{x} - .5)\sqrt{n}}{\sqrt{1/12}}$$

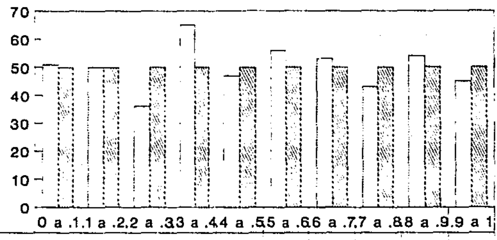
Obteniendo el estadístico Z_0 para los números pseudoaletorios mostrados en la tabla 4 obtenemos:

$$Z_0 = \frac{(.4970 - .5)\sqrt{500}}{\sqrt{1/12}} = -.2323$$

Si $|Z_0| < Z_{\alpha/2}$ entonces se puede aceptar la hipótesis de que los números pseudoaleatorios provienen de una distribución uniforme con media = 0.5. Con un nivel de significancia α del 90% $Z_{\alpha/2}$ tiene un valor de 1.645 por lo tanto aceptamos la hipótesis.

3.4.2 Prueba de las frecuencias

La prueba de las frecuencias consiste en realizar la prueba de bondad de ajuste que se expuso en el capítulo de distribuciones de probabilidad. Utilizando los números pseudoaleatorios mostrados en la tabla 4 obtenemos el siguiente histograma de frecuencias relativas de la figura 15.



Observada	51	50	36	65	47	56	53	43	54	45
Esperada	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Observada Esperada

Fig. 15 Frecuencia esperada contra Frecuencia observada en 500 números pseudoaleatorios

Calculando el estadístico ji-cuadrada obtenemos

$$\chi^2 = \frac{(51-50)^2}{50} + \frac{(50-50)^2}{50} + \frac{(36-50)^2}{50} + \frac{(65-50)^2}{50} + \frac{(47-50)^2}{50}$$

$$+ \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(53-50)^2}{50} + \frac{(43-50)^2}{50} + \frac{(54-50)^2}{50} + \frac{(45-50)^2}{50}$$

$$= 0.02+0.0+3.92+4.50+0.18+0.72+0.18+0.98+0.32+0.50=11.32$$

$\chi^2_{90\%}$ con 9 grados de libertad= 14.684

por lo tanto los números pseudoaleatorios se ajustan a una distribución uniforme en el intervalo (0,1)

3.4.3 Prueba de Kolmogorov-Smirnov

El procedimiento de Kolmogorov-Smirnov prueba la hipótesis de que la distribución acumulada de una variable aleatoria x es $F_0(x)$. Para probar la hipótesis se necesita determinar la distribución acumulada de la muestra de números pseudoaleatorios la cual se denota como $F_n(x)$ y posteriormente se compara con la distribución acumulada hipotética $F_0(x)$. Es evidente que si $F_n(x)$ y $F_0(x)$ difieren demasiado entonces los números pseudoaleatorios no se ajustan a una distribución uniforme en el intervalo (0,1). En la figura 16 se graficó la frecuencia acumulada hipotética contra la frecuencia acumulada observada. El intervalo en el cual se graficó corresponde a los valores de 0.04 a 0.078 de la frecuencia acumulada hipotética. En la gráfica se observa como sólo existen pequeñas diferencias entre la frecuencia acumulada observada y la frecuencia acumulada esperada; sin embargo es necesario calcular el estadístico Kolmogorov-Smirnov para probar la hipótesis de que la distribución acumulada de los números pseudoaleatorios efectivamente es $F_0(x)$.

La aplicación de esta prueba requiere de los siguientes pasos:

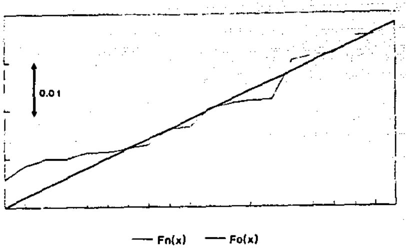


Fig. 16 Fn(x) vs Fo(x)

Rango de la gráfica (0.04 a 0.078)

1.- Ordenar los números pseudoaleatorios en orden ascendente.

2.- Calcular la distribución acumulada de los números generados con la siguiente expresión:

$$F_n(x) = i/n$$

donde i es la posición que ocupa el numero X_i en el vector obtenido en el paso anterior

3.- Calcular el estadístico Kolmogorov-Smirnov del modo siguiente

$$D_n = \max \quad F_n(X_i) - X_i \quad \text{para toda } X_i$$

Si Dn < dn con un nivel de significancia alfa entonces los números pseudoaleatorio se ajustan a una distribución uniforme en el intervalo (0,1). Para los números pseudoaleatorios mostrados anteriormente $D_n = 0.025759$ mientras que d_n con un nivel alfa del 10% es de aproximadamente 0.072895 por lo que estos números pseudoaleatorio se ajustan a una distribución uniforme.

3.4.4 Prueba del coeficiente de autocorrelación

El coeficiente de autocorrelación es una valiosa herramienta para investigar las propiedades de una serie de números. El coeficiente de autocorrelación r_k describe la relación entre una serie de números y ella misma, retrasada k períodos. Los coeficientes de autocorrelación pueden ser usados para determinar si existe algun patrón en un conjunto de datos y en la ausencia de un patrón se podrá argumentar que el conjunto de datos es aleatorio. Para una mejor comprensión del concepto observe la tabla de la tabla 5. La variable Y_t es la serie de números pseudoaleatorios mostrada anteriormente. Las variables Y_{t-1} y Y_{t-2} se construyen moviendo los valores hacia abajo uno y dos períodos respectivamente, lo cual produce que se pierda un valor en la columna Y_{t-1} y dos valores para la columna Y_{t-2}. Las autocorrelaciones entre Y_t y Y_{t-1} y entre Y_t y Y_{t-2} pueden ser calculadas sin ninguna dificultad. La primera autocorrelación indicaría la relación existente entre valores sucesivos de Y mientras que la segunda autocorrelación indicaría como se relacionan los valores de Y separados por dos períodos.

El coeficiente de autocorrelación entre Y_t y Y_{t-1} se calcula mediante la fórmula:

$$r_{Y_t Y_{t-1}} = \frac{(\text{Covariancia entre } Y_t \text{ y } Y_{t-1})}{(\text{Desv. std. } Y_t) \times (\text{Desv. std. } Y_{t-1})}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n} (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y}_t)^2} \sqrt{\sum_{t=2}^{n} (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2}}$$

Variable original Y_t	Un retraso Y_{t-1}	Dos retrasos Y_{t-2}
.019684	-	-
.727971	.019684	-
.581599	.727971	.019684
.446543	.581599	.727971
.764263	.446543	.581599
.036694	.764263	.446543
.313883	.036694	.764263
.651050	.313883	.036694
......	.651050	.313883
....	....	.651050
.381966	....	....
.135334	.381966	....
.862634	.135334	.381966

Tabla 5

Los valores que puede tomar el coeficiente de autocorrelación van de -1 a 1, correspondiendo los valores negativos a una correlación negativa y los valores positivos a una correlación posistiva. Puede decirse que los valores del coeficiente de autocorrelación cercanos a la unidad en magnitud implican una buena correlación o asociación lineal entre Y_t y Y_{t-1} en tanto que valores cercanos a cero indican poca o ninguna correlación. Para valores de r_k entre -1 y +1 se debe tener cuidado con su interpretación. Por ejemplo para valores de r_k iguales a 0.4 y 0.8 sólo significan que se tienen dos autocorrelaciones positivas una de ellas más fuerte que la otra. Es erróneo concluir que $r_k = 0.8$ indica una relación lineal dos veces mejor que la indicada por el valor de $r = 0.4$ por otro lado si se obtiene r_{k2} que es el coeficiente de determinación de la muestra, este coeficiente expresa la proporción de la variación total en los valores de la variable Y_t que puede ser explicada por una relación lineal con lo valores de la variable Y_{t-k}. Así pues una autocorrelación de 0.8 significa que 0.64 o que el 64% de la variación de los valores de Y_t en la muestra está explicado por una relación lineal con valores de Y_{t-k}.

Teóricamente todos los coeficientes de autocorrelación para una serie de números aleatorios debe de ser cero. Esta aseveración asume que la muestra que se tomó para calcular los coeficientes de autocorrelación debe de ser infinita. Cuando se toma una muestra de números como podría ser los números pseudoaleatorios mostrados anteriormente con el objeto de probar su aleatoriedad podemos atacar el problema de dos formas distintas. La primera es estudiar los valores de r_k una a la vez y aplicar una fórmula de desviación estándar para probar si algún r_k en particular es significativamente diferente de cero. La segunda es considerar un conjunto de valores de r_k y aplicar una prueba para determinar si el conjunto es significativamente diferente de cero. Para el primer caso como fue demostrado por Anderson (1942) los coeficientes de autocorrelación de una muestra de n números aleatorios siguen una distribución que puede ser aproximada por una curva normal con media cero y desviación estándar de $(1/n)^{.5}$. Si el 95% de todos los valores de los coeficientes de autocorrelación obtenidos de una muestra deben de estar dentro de un rango especificado de la media +/- 1.96 desviación estándar entonces se puede concluir que una serie de números es aleatoria si los valores de los coeficientes de autocorrelación se encuentran dentro de los límites:

$$-1.96(1/n)^{.5} <= r_k <= 1.96(1/n)^{.5}$$

$$\text{valor absoluto } r_k <= 1.96(1/n)^{.5}$$

La gráfica de la figura 17 muestra los coeficientes de autocorrelación de los 500 números pseudoaleatorios mostrados anteriormente para 1,2,...,15 períodos de retraso. La gráfica muestra los valores absolutos de r_k y el límite con una confianza del 95% es de 0.087653. Como se puede apreciar todos los valores caen dentro de los límites de confianza por lo que se puede concluir que los números analizados son completamente aleatorios.

Si se quiere analizar los valores de r_k como un conjunto en vez de analizarlos individualemente se puede calcular el estadístico Q de Box-Pierce. En 1970 Box y Pierce desarrollaron una prueba que es capaz de determinar cuando un conjunto de autocorrelaciones de números aleatorios tomadas como un todo no difieren significativamente de cero y por lo tanto se puede inferir que existe un patrón en los números aleatorios.

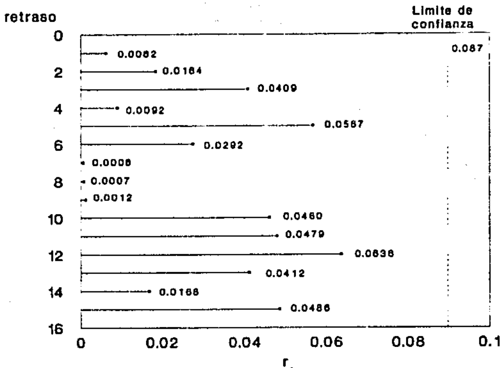


Fig. 17 Análisis de autocorrelación para los números pseudoaleatorios

El estadístico Q se debe como calcular como:

$$Q = n \sum_{k=1}^{m} r_k^2$$

donde m es el máximo retraso considerado, n es el número de observación y r_k es el coeficiente de autocorrelación para el período k.

Q está distribuido aproximadamente como el estadístico ji-cuadrada con m grados de libertad. Calculando el estadístico Q para los números pseudoaleatorios con un retraso máximo de 15 obtenemos un valor de 9.8548 mientras que el valor del estadístico ji cuadrada con 15 grados de libertad y una confianza del 90% es de 22.307 por lo que se puede inferir que los números pseudoaleatorios no siguen ningún patrón.

3.5 Generación de variables aleatorias no uniformes

En cualquier proceso de simulación existen una o varias variables aleatorias interactuando. Por lo regular, estas variables se ajustan a una distribución de probabilidad teórica o empírica diferente a la distribución uniforme por lo que es necesario contar con una función que transforme a los números generados uniformemente en valores de la distribución de probabilidad deseada. A continuación se desarrollarán técnicas especiales para generar de manera eficiente observaciones aleatorias a partir de una distribución uniforme.

3.5.1 Variables aleatorias exponenciales

Si se desean generar números aleatorios que sigan la distribución exponencial, la manera más eficiente para lograrlo es utilizar el método de la transformada inversa. Este método utiliza la distribución acumulada $F(x)$ de la distribución que se va a simular. Puesto que $F(x)$ está definida en el intervalo $(0,1)$ se puede generar un número aleatorio uniforme R y tratar de determinar el valor de la variable aleatoria para la cual su distribución acumulada es igual a R, es decir el valor simulado de la variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad $f(x)$ se determina al resolver la siguiente ecuación:

$$F(x)=R \quad \text{o} \quad x=F^{-1}(R)$$

La dificultad de este método consiste en que en ocasiones es difícil encontrar la transformada inversa, sin embargo una vez establecida esta función inversa se podrán obtener valores de la variable aleatoria que sigan la distribución de probabilidad deseada. Este método se puede apreciar gráficamente en la figura 18.

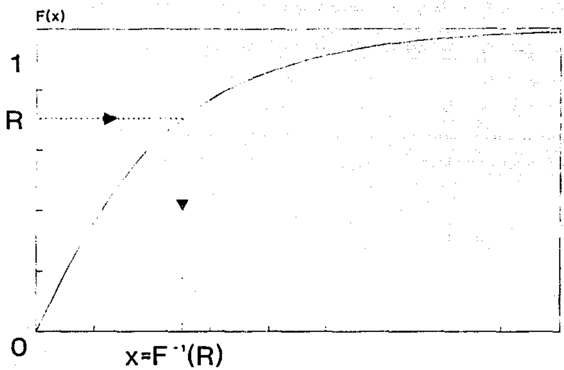


Fig.18 Método de la transformada inversa

La función de densidad para la distribución exponencial se define matemáticamente como:

$$f(x)= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} & \text{para } x>0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La distribución acumulada es:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}\, dx = -e^{-x/\alpha} \Big|_0^x = -e^{-x/\alpha} + 1$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$$

Utilizando la ecuación de la transformada inversa

$$R = F(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$$

$$e^{-x/\alpha} = 1 - R$$

Pero si R sigue una distribución uniforme entonces 1-R también sigue una distribución uniforme

entonces $$e^{-x/\alpha} = R$$

$$x = -\alpha \operatorname{Ln} R$$

3.5.2 Variables aleatorias que siguen una distribución Erlang

Si se desean generar números aleatorios que sigan una distribución Erlang con parámetros β y n. Podemos hacer uso de las propiedades de esta distribución que se muestra a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{n} (n-1)!} & x > 0 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $\beta > 0$

Como se recordará esta distribución es justamente la suma de n variables aleatorias exponenciales cada una con un valor esperado β . Por consiguiente para generar números aleatorios que sigan una distribución Erlang, se necesita solamente sumar los valores simulados de n variables aleatorias exponenciales con media igual a β.

$$x = \sum_{i=1}^{n} X_i = -\beta \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ln}\, R_i$$

$$x = -\beta \, \mathrm{Ln} \prod_{i=1}^{n} R_i$$

Donde las X_i's siguen una distribución exponencial y han sido generados por el método de la transformada inversa.

3.5.3 Variables aleatorias que siguen una distribución Poisson

En el capítulo de distribuciones de probabilidad se señaló que las distribución exponencial y la distribución Poisson pueden considerarse como distribuciones duales. En forma específica se señaló que si el número de llegadas por período puede describirse a través de la distribución de Poisson, entonces es posible describir el tiempo entre llegadas mediante la distribución exponencial. Puede aprovecharse esta relación para desarrollar un generador de proceso para la distribución de Poisson. Simplemente se simulan los tiempos de las llegadas utilizando un generador de proceso exponencial y se cuentan el número de llegadas que ocurren en el período (T). Una variable aleatoria que siga una distribución Poisson también se puede generar por medio del método de la transformada inversa, sin embargo al emplear este método de generación de variables aleatorias en un programa de computadora requiere de un mayor tiempo debido a que las fórmulas necesarias para generar las variables aleatorias son complejas y debido a que un tiempo menor de ejecución del programa nos permitirá simular un mayor número de variables se recomienda utilizar el método que a continuación se describe para generar variables aleatorias Poisson.

1.- Se identifica la longitud del período T, se inicializa en cero un contador de número de llegadas, n y un contador de tiempo entre llegadas t.

2.- Se genera el tiempo entre llegadas para una de ellas utilizando el generador de variables aleatorias exponenciales.

3.- Sumar a t el tiempo entre llegadas obtenido en el paso 2; sumar 1 al contador de número de llegadas, n.

4.- Si $t > T$ en el paso 3, entonces descartar la última llegada, restar 1 a n y proceder con el paso 5, si no es así ir al paso 2.

5.- El valor de n es un resultado aleatorio para la distribución de Poisson.

3.5.4 Variables aleatorias que siguen una distribución normal

En lugar de utilizar el método de la transformada inversa se puede hacer uso del teorema del límite central el cual establece que la suma de n variables aleatorias independientes se aproxima a una distribución normal a medida que n se aproxima a infinito.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una secuencia de n variables aleatorias independientes tomadas de una población con media μ y variancia σ^2 entonces la forma límite de la distribución de:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

cuando n tiende a infinito es la distribución normal n(z;0,1)

Si sumamos 12 variables aleatorias tomadas de la distribución uniforme en el intervalo (0,1) podemos simplificar la expresión anterior y además con n = 12 la confiabilidad de los valores simulados es bastante aceptable. La media de la distribución uniforme en el intervalo (0,1) es 0.5 y su variancia = 1/12 por lo tanto:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{12} R_i - 6}{\sqrt{1}}$$

Puesto que la distribución normal estándar de una variable aleatoria x se obtiene como:

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

entonces la simulación de la variable aleatoria x se haría de acuerdo con la siguiente expresión:

$$x=\mu+\sigma\left(\sum_{i=1}^{12}R_i-6\right)$$

3.6 Conclusiones

El uso de la simulación se ha intensificado en la última decada principalmente por los grandes avances tecnológicos en el campo de la computación que han permitido tener a nuestra disposición, a un bajo costo, el poder de procesamiento que antes sólo disponían las grandes instituciones, permitiendo que la simulación se convierta en una herramienta de bajo costo para resolver problemas que serían demasiado complejos y/o costosos resolver mediante otras técnicas. El proceso de la simulación consiste básicamente en tres pasos: Definir el problema, formular el modelo y finalmente validar el modelo. Una vez que se han realizado estos tres pasos entonces se podrá comenzar con la simulación para obtener los datos que necesitamos. La materia prima que se utiliza en la simulación son los números aleatorios que podran ser generados a través de una fórmula recursiva o bien mediante los generadores que contienen algunos lenguajes de computadora. Es importante asegurarnos de la aleatoriedad de estos números para evitar que haya algún sesgo en nuestro modelo. Una vez hecho esto se podrán utilizar para generar las variables aleatorias que requiera nuestro modelo.

Capitulo 4:Simulación de sistemas de colas con coeficientes de presión

4.1 Coeficientes de presión

Es frecuente encontrar sistemas de colas donde la tasa de servicio varía dependiendo del número de clientes que se encuentren en el sistema. Cuando se tiene una gran cantidad de trabajo es frecuente que el servidor tienda a trabajar más rápido que cuando tiene sólo unos cuantos clientes por atender. También se puede dar el caso de que una gran cantidad de trabajo similar pueda llevar al servidor a reducir el tiempo que se necesita para llevar a cabo el trabajo debido a que va progresando en su curva de aprendizaje. En otras ocasiones, una acumulación de clientes en el sistema puede generar economías de escala en el tiempo de servicio, lo que producirá que el modelo se comporte como si los servidores trabajaran más rápido si hubiera una mayor cantidad de clientes en el sistema. Otro caso común es que cuando el sistema alcanza una determinada cantidad de clientes se obtiene asistencia externa en ciertas partes del proceso con el objeto de atender un mayor número de clientes por unidad de tiempo.

El sistema de colas puede reaccionar en una forma alternativa a la anterior, reduciendo el número de llegadas de clientes por unidad de tiempo en vez de aumentar la tasa de servicio. Esto puede lograrse desviando algunos clientes hacia otro medio de servicio o bien los mismos clientes deciden no entrar al sistema al ver que se encuentra saturado de clientes.

Otra forma de reaccionar del sistema podría ser con una combinación de aumento en la tasa de servicio y disminución de la tasa de llegadas. Debido a que es frecuente encontrar sistemas de colas que tienen un comportamiento similar a los mencionados anteriormente es necesario desarrollar un modelo que proporcione la información adecuada para la toma de decisiones. Para plantear este problema se tiene que determinar un coeficiente de presión "a" para la tasa de servicio . El coeficiente de presión "a" es una constante positiva que indica el grado en que se ve afectada la tasa de servicio del sistema por el número de clientes en el sistema. De manera análoga se tiene que determinar un coeficiente de presión "b" para la tasa de llegada.

Las modificaciones a las tasa de llegadas y tasa de servicio para un modelo general que combine los dos patrones quedaría de la siguiente forma:

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } n \leq s \\ \left(\frac{n}{s}\right)^a \mu_1 & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_0 & \text{si } n \leq s \\ \left(\frac{s}{n}\right)^b \lambda_0 & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

donde

n= número de clientes en el sistema

μ_n = tasa esperada de servicio cuando se tienen n clientes en el sistema

λ_n = tasa esperada de llegada cuando se tienen n clientes en el sistema

a = coeficiente de presión para la tasa de servicio

b = coeficiente de presión para la tasa de llegada

Si se supone que la tasa de llegada sigue una distribución Poisson y la tasa de servicio sigue una distribución exponencial, los resultados obtenidos del proceso de nacimiento y muerte mostrados en el capítulo de teoría de colas se podrían aplicar a este problema. Sin embargo no se cuenta con expresiones analíticas para las sumas que intervienen y aunque se han tabulado valores para P_0 y L tomando diversos valores de coeficiente de presión sumando un número finito de términos en una computadora, se puede desarrollar un método alternativo por medio de la simulación que nos permita conocer los valores de L, L_q, W, W_q. El uso de la simulación también nos permite el utilizar otras distribuciones para la tasa de servicio diferentes a la exponencial lo que nos da la oportunidad de conocer cómo varían las condiciones de un sistema de colas dependiendo de la distribución de la tasa de servicio.

4.2 Programa de simulación

El objetivo de esta tesis es el de obtener datos confiables para un sistema de colas con coeficientes de presión en la tasa de llegada y en la tasa de servicio. Para alcanzar este objetivo se ha propuesto a la simulación como una herramienta poco costosa y eficiente que nos permite resolver problemas donde la experimentación directa resulta demasiado cara y el planteamiento matemático resulta demasiado complejo. Tomando esto en cuenta se ha decidido desarrollar un programa que simula un sistema de colas con coeficientes de presión con el objeto de alcanzar el objetivo de obtener datos confiables. El código del programa se ha escrito en el lenguaje de computación Pascal por varias razones. La primera y más importante es que el Pascal es un lenguaje de alto nivel, es decir el compilador del lenguaje puede convertir el código a un programa directamente ejecutable en la computadora (i.e. no se necesita un programa que funcione como intérprete para ejecutar el programa). Esto nos permite que el usuario pueda entrar al programa sin tener conocimiento alguno del lenguaje Pascal. Otra razón es que el Pascal al no tener necesidad de que el código sea interpretado por otro programa, como es el caso del lenguaje Basic, es más rápido a la hora de ejecutar el programa. Por último el Pascal nos permite utilizar estructuras dínámicas de datos. Las estructuras dínámicas de datos pueden ir creciendo según el el usuario lo vaya necesitanto a diferencia de las estructuras estáticas que además de que ocupan un espacio de memoria que tal vez no se necesite, tiene un límite preestablecido que el usuario no puede rebasar.

El programa podrá ser usado en cualquier computadora compatible con la IBM-PC (Se requiere la tarjeta de gráficas). Se escogió este tipo de equipo debido a que es el estándar en computadoras personales y que debido a la gran cantidad de programas y aplicaciones que han surgido para esta computadora en la década de las ochentas es difícil encontrar a una compañía que no disponga de al menos una computadora personal compatible con la IBM-PC. El programa es un archivo ejecutable es decir se puede usar sin la necesidad de otro programa, aunque previendo que posiblemente algún usuario desee realizar algún cambio al programa, dentro de esta tesis se incluye el código completo del programa en Pascal.

4.3 ¿ Cómo ejecutar el programa?

Analizaremos un caso real específico como ejemplo para ilustrar el funcionamiento y ejecución del programa. El caso que nos servirá como ejemplo fue tomado de un laboratorio de análisis. Este laboratorio al adquirir un cromatógrafo de gases tiene que decidir entre dos posibles alternativas. La primer alternativa es contratar a un nuevo químico por medio tiempo que se encargue de realizar los análisis de cromatografía de gases. La segunda alternativa es reasignar al personal de tal forma que uno de los químicos que actualmente labora en el laboratorio pueda contar con dos horas al día para realizar los análisis de cromatografía de gases.

La alternativa de reasignar al personal tiene como principal ventaja que es la más económica ya que no se requiere abrir un nuevo puesto para realizar los análisis, mientras que el principal punto a favor de la alternativa de contratar un nuevo químico es que se dispondrá de más tiempo para realizar los análisis y por lo tanto las muestras tendrán que esperar menos tiempo para ser analizadas. Es importante recalcar que la importancia del tiempo que la muestra tiene que esperar para ser analizada, ya que las muestras se recolectan en tubos de carbón activado tratado especialmente para absorber los solventes orgánicos que se van a analizar, sin embargo estudios recientes muestran que los tubos empiezan a desabsorber lo que absorbieron despues de 5 días por lo que éste tendrá que ser el límite máximo que una muestra podrá esperar antes de ser analizada.

La mayoria de las muestras a analizar se recolectan en las instalaciones de los clientes por medio de monitoreos ambientales. Estos monitoreos se concertan con el cliente por lo que es factible retardar los monitoreos y por lo tanto la llegada de las muestras cuando el laboratorio se encuentra saturado de muestras.

Esto es un típico problema de teoría de colas, donde el servidor es el cromatógrafo de gases los clientes son las muestras que se van a analizar y el sistema cuenta con un coeficiente de presión para la tasa de llegadas al tener la posibilidad de retardar la llegada de las muestras. Para resolver el problema es necesario determinar la tasa de llegadas, la tasa de servicio y el coeficiente de presión para la tasa de llegadas.

Antes de determinar la tasa de servicio primero es necesario comprender cuál es la naturaleza del servicio que se va a prestar.

Un cromatógrafo de gases es un instrumento para separar y analizar mezclas de sustancias químicas orgánicas que utiliza las propiedades de adsorción de las sustancias por otros compuestos y disolventes, de tal forma que al hacerlas pasar por una columna, los componentes de la mezcla se desplazan a diferentes velocidades en la corriente de un gas inerte que se hace circular por la columna, por lo que van separándose los componentes de la mezcla unos de otros haciendo posible su detección al final de la columna.

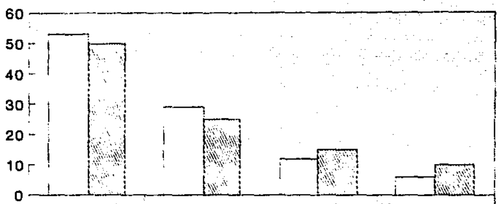
El tiempo que se necesita para realizar los análisis depende del compuesto orgánico que se desee analizar. Los compuestos muy volátiles como el tolueno tienen tiempo de análisis relativamente corto (i.e. 4 minutos) un compuesto relativamente volátil como el gas nafta tiene un tiempo de análisis de 20 minutos, mientras que ciertos análisis como el de ácidos grasos se lleva un tiempo de 40 minutos. A este tiempo es necesario agregar los tiempos de preparación al inicio de la jornada de trabajo o bien cuando se necesita cambiar alguna columna para realizar el análisis. Para este estudio se tomaron 100 cromatogramas (gráficas donde aparecen los compuestos analizados por cromatografía de gases) aleatoriamente con el objeto de conocer los tiempos de los análisis y obtener la distribución de la tasa de servicios.

En la tabla 6 se muestran los valores que representan el tiempo en minutos necesario para realizar el análisis que se tomaron de los cromatogramas. Este tiempo ya incluye el tiempo necesario de preparación así como algunas eventualidades tales como cambiar la columna del cromatógrafo, por eso la existencia de algunos valores altos como de 84 minutos que corresponde a un análisis de ácidos grasos (44 minutos) más el tiempo de preparación del cromatógrafo (25 minutos) más el cambio de la columna del cromatógrafo(15 minutos).

47	49	72	84	7	7	7	7	7	24
6	18	13	43	5	12	20	10	15	7
12	6	29	27	36	7	7	7	44	47
5	7	93	7	7	24	20	16	7	14
23	38	14	46	7	7	7	24	7	31
7	12	19	21	9	7	9	12	11	7
16	9	9	17	38	7	7	43	7	7
25	14	6	6	7	18	15	20	15	7
7	8	17	12	7	17	7	7	19	17
10	18	45	14	7	10	12	20	34	45

Tabla 6

En total se recolectaron 100 tiempos, cuyo promedio es de 18.26 minutos con una desviación estándar de 16.53 minutos. Si obtenemos el histograma de frecuencias y lo comparamos con el histograma teórico de una distribución exponencial con media = 20 como se muestra en la figura 19 podemos inferir que los tiempos de análisis se ajustan a una distribución exponencial con media = 20. Para corroborar nuestra inferencia podemos obtener el estadístico X^2 obteniendo un valor de 3.02 que al compararlo con el valor límite de X^2 con 95 % de confianza de 7.81 nos permite aceptar nuestra hipótesis de que la tasa de servicio sigue una distribución exponencial con media = 20. Es decir se tendrá una tasa de servicio de 6 cromatografías por día si se elige la opción de reasignar a los químicos del laboratorio, o bien se tendrá una tasa de servicio de 12 cromatografías por día si se decide contratar a un químico nuevo por medio tiempo.



	0 a 13.86	13.86 a 27.7	27.7 a 46.05	Mayor a 46.05
Observada	53	29	12	6
Esperada	50	25	15	10

Observada Esperada

Fig. 19 Histograma de frecuencia observada vs frecuencia esperada en la tasa de servicio

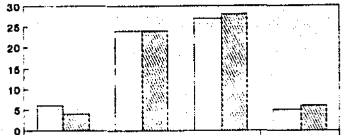
Una vez que tenemos la tasa de servicio podemos proceder a calcular la tasa de llegadas. Para calcular la tasa de llegadas se tomaron el número de muestras por día que este laboratorio había estado recibiendo para análisis de cromatografía de gases durante el último trimestre y que debido a que no se contaba con el equipo para analizar estas muestras se había subcontratado a otro laboratorio para que realizara los análisis. Estos datos se muestran en la tabla 7.

6	20	7	8	13	10	8	10	8	7
8	10	5	10	7	5	4	11	8	8
11	6	8	9	12	10	10	13	4	10
6	10	10	5	10	9	11	10	9	12
10	17	11	15	6	17	13	11	16	8
10	9	12	8	5	9	10	7	7	10
12	8								

Tabla 7

El total de datos de la tabla 7 es de 62 y tienen una media de 9.5 con una desviación estándar de 3.16. De manera análoga a los datos de tiempo de análisis comparamos los histogramas de frecuencia contra la distribución teórica Poisson con media = 10 como se muestra en la figura 20. Podemos inferir que los datos se ajustan adecuadamente a la distribución y para comprobar nuestra hipótesis calculamos el estadístico X^2 obteniendo un valor de 1.2 que al compararlo con la el valor de X^2 con un nivel de significancia de 95% de 7.81 nos permite aceptar nuestra hipótesis. de que la tasa de llegadas se comporta de acuerdo con una distribución Poisson con media = 10. Es decir tendremos una tasa de llegadas de 10 cromatografías por día.

Una vez que tenemos los valores de la tasa de servicio y la tasa de llegadas se procede a analizar los coeficientes de presión. Para la tasa de servicio el coeficiente de presión es cero ya que el tiempo de servicio no depende de la persona que esté utilizando el cromatógrafo si no de lo que se vaya a analizar. Sin embargo la tasa de llegadas si se ve afectada por el estado del sistema ya que las muestras se obtienen de un monitoreo ambiental en las instalaciones de los clientes. Estos monitoreos, como se mencionó anteriormente, se pueden acordar con el cliente de tal forma que cuando el sistema se encuentra saturado se puede cambiar de fecha el monitoreo y por lo tanto la tasa de llegadas se ve afectada.



	0 a 5	6 a 9	10 a 14	Mayor a 14
Observada	6	24	27	5
Esperada	4	24	28	6

Fig. 20 Histograma de frecuencia observada vs frecuencia esperada en la tasa de llegadas

Para calcular el coeficiente de presión para la tasa de llegadas disponemos que una vez que se tengan 20 muestras en el laboratorio se podrá acordar con los clientes posponer los monitoreos por lo que la tasa de llegadas se reducirá solamente a las muestras que no requieren de monitoreos (e.g. ácidos grasos) y que promedian 3 muestras por día es decir una vez que hay 20 clientes en el sistema la tasa de llegadas se reduce a 3 clientes por día. Con estos datos calculamos el coeficiente de presión b para el sistema.

$$\lambda_n = \left(\frac{s}{n}\right)^b \lambda_0$$

$$\lambda_{20} = 3 = \left(\frac{1}{20}\right)^b \times 10$$

$$\left(\frac{1}{20}\right)^b = \frac{3}{10}$$

$$b = \frac{\log(3/10)}{\log(1/20)}$$

$$b = .40$$

Una vez que se tienen los datos con los que se va a simular el sistema se podrá proceder a ejecutar el programa. Como se explicó anteriormente el programa es un archivo ejecutable, es decir se puede ejecutar sin la necesidad de otro programa que funcione como intérprete.

Una vez prendida la computadora se deberá llamar al programa tecleando la palabra "tesis". Inmediatamente después aparecerá el logotipo del autor, para continuar, el usuario deberá apretar cualquier tecla y la pantalla de presentación del programa aparecerá por lo que el usuario deberá volver a presionar cualquier tecla para continuar.

Posteriormente a la pantalla de presentación aparecerá la primera pantalla de datos. En esta pantalla se deberá de introducir a la computadora el número esperado de clientes por unidad de tiempo que se espera arriben al sistema de colas. Esta pantalla se muestra en la figura 21. Se espera que los clientes arriben de una forma aleatoria es decir que sigan una distribución Poisson por lo que el programa generará a los clientes de acuerdo con esta distribución de probabilidad. Para nuestro ejemplo se introduce el número 10 a la computadora.

La segunda pantalla de datos corresponde a la distribución de la tasa de servicio se muestra en la figura 22. Se tienen cuatro opciones. La primera opción es la distribución de probabilidad exponencial, que es la que usaremos en nuestro ejemplo por lo que se deberá de introducir a la computadora el número esperado de clientes a los que un servidor les completara el servicio por unidad de tiempo para nuestro ejemplo se deberá introducir el número 6 como se muestra en la figura 23. Es importante recalcar que en todas las opciones la tasa de servicio deberá ser por servidor y no la tasa de servicio total del sistema.

La segunda opción corresponde a una distribución uniforme. En esta opción se deberá introducir a la computadora el número mínimo de clientes que un servidor podrá atender por período de tiempo y el número máximo de clientes que un servidor podrá atender por período de tiempo.

```
DATOS DEL SISTEMA DE COLAS
```

```
Numero esperado de clientes por unidad de tiempo
cuando se encuentran cero clientes en el sistema:10
```

Fig. 21 Introducción de la tasa de llegadas al programa

```
DATOS DEL SISTEMA DE COLAS
```

```
Distribucion del tiempo de servicio

Distribucion exponencial..........[1]

Distribucion uniforme.............[2]

Distribucion normal...............[3]

Distribucion Erlang...............[4]

Opcion  └→1
```

Fig. 22 Introducción de la distribucion del tiempo de servicio al programa

La tercera opción supone que la tasa de servicio sigue una distribución normal. Se deberá introducir a la computadora el promedio de clientes que un servidor atenderá por unidad de tiempo, así como la distribución estándar de los clientes que un servidor podrá atender por unidad de tiempo.

La última opción corresponde a la tasa de servicio que sigue una distribución Erlang. Como se explicó en el capítulo de distribuciones de probabilidad, la distribución Erlang es la suma de n variables aleatorias exponenciales con media $1/\alpha$. Por lo tanto considerando variable aleatoria como una tarea que debe de realizarse el usuario deberá introducir a la computadora el número de tareas de que se compone la distribución Erlang así como el número esperado de clientes por tarea a los que un servidor completará el servicio por unidad de tiempo.

Cualquier duda que el lector tenga de que distribución se ajustará mejor a su caso en particular podrá consultar el capítulo de distribuciones de probabilidad donde se explica detalladamente las propiedades de cada distribución así como la prueba de bondad de ajuste para probar la hipótesis de que un conjunto de datos se ajusta a una determinada distribución. Es importante recalcar que la tasa máxima de servicio del sistema deberá ser mayor a la tasa máxima de llegada para que el sistema pueda alcanzar una condición de estado estacionario siempre y cuando no existan coeficientes de presión en el sistema.

Una vez alimentada la computadora con la información referente a las distribuciones de la tasa de servicio se presentará la pantalla del coeficiente de presión para la tasa de llegadas. Este coeficiente deberá ser una constante positiva. Si se supone un coeficiente de presión igual a 1 se establece la hipótesis que la tasa de llegadas varía proporcionalmente a la longitud de la cola. En caso de que la tasa de llegadas del modelo no se vea afectada por la longitud de la cola entonces el coeficiente de presión será cero, para nuestro ejemplo se deberá introducir .4 como coeficiente de presión como se muestra en la figura 24.

La siguiente pantalla que se muestra en la figura 25 de datos corresponde eal coeficiente de presión para la tasa de servicio. La explicación de este coeficiente de presión es análoga al coeficiente de presión para la tasa de llegadas y en caso de que la tasa de servicio del sistema de colas no se viera afectada por la cantidad de clientes

```
DATOS DEL SISTEMA DE COLAS
```

```
Distribucion del tiempo de servicio

Distribucion exponencial..........[1]

Distribucion uniforme.............[2]

Distribucion normal...............[3]

Distribucion Erlang...............[4]

Opcion └→1
```

```
Numero esperado de clientes a los que se les completa
el servicio por unidad de tiempo (por servidor):6
```

Fig. 23 Introducción de la tasa de servicio al programa

```
DATOS DEL SISTEMA DE COLAS
```

```
Coeficiente de presion para la tasa de llegadas:.4
```

Fig. 24 Introducción del coeficiente de presión para la tasa de llegada esperando a recibir servicio entonces el coeficiente de presión sería igual a cero como en nuestro ejemplo.

Finalmente la última pantalla de datos corresponde al número de servidores. Aquí el usuario deberá introducir el número de servidores que se encuentra dando servicio, para nuestro ejemplo se deberá introducir el número 1 como se muestra en la figura 26. Es importante hacer notar que el programa simula un sistema de colas en donde existe una fila única y no una fila para cada servidor. Esto es porque el caso en donde existe una fila para cada servidor se puede simular utilizando un solo servidor, con tasa de llegada igual a λ/n donde n es el número de servidores en el sistema y lambda es la tasa de llegadas para el sistema de colas.

Una vez terminados de introducir todos los datos al sistema el programa presentará una pantalla en donde se podrán verificar todos los datos introducidos o cambiar alguno en caso de que sea necesario. Si se está de acuerdo con todos los datos mostrados en la pantalla se podrá proceder a la simulación escogiendo dicha opción como se muestra en la figura 27. Debido a que el proceso de simulación no es intantáneo el programa presentará como va avanzando la simulación (ver figura 28). El programa está diseñado para simular un total de 40,000 servicios, es decir se atenderá a 40,000 clientes. Una vez terminada la simulación se procederá a mostrar los resultados obtenidos.

Primeramente se mostrarán los parámetros básicos que son L, L_q, W, W_q así como sus intervalos de confianza del 95% como se puede observar en la figura 29. Analizando los datos de la figura 29 que corresponden a los de nuestro ejemplo podemos observar que el tiempo promedio que una muestra tendrá que esperar a ser analizada es de .64 días mientras que en promedio habrá 3 muestras en el laboratorio esperando a ser analizadas, como se había dicho anteriormente el nivel de servicio que se desea establece que una muestra nunca debe de pasar 5 días en espera para ser analizada por lo que un promedio de .64 días nos asegura un nivel de servicio adecuado

La siguiente pantalla presentará las probabilidades de tener exactamente n clientes en el sistema para n=0,1,2,3,4,5 como se muestra en la figura 30. En los datos de nuestro ejemplo observamos que la probabilidad de que al llegar la muestra es

DATOS DEL SISTEMA DE COLAS

Coeficiente de presion para la tasa de servicio:0

Fig. 25 Introducción del coeficiente de presión para la tasa de servicio

DATOS DEL SISTEMA DE COLAS

Numero de servidores: 1

Fig. 26 Introducción del número de servidores al programa

```
DATOS DEL SISTEMA DE COLAS

Coeficiente de presion para la tasa de llegadas....:0.40
Coeficiente de presion para la tasa de servicio....:0.00
Numero de servidores ..............................:1

M E N U                                      Distribucion de tasa de llegadas:
                                                         Poisson
Modificar distribucion de entrada..[1]
Modificar distribucion de servicio.[2]       Tasa media de llegadas:   10.00
Modificar c. de presion de llegada.[3]
Modificar c. de presion de servicio[4]       Distribucion de tasa de servicio:
Modificar numero de servidores.....[5]                 Exponencial
Realizar simulacion................[6]
Fin del programa...................[7]       Tasa media de servicio:    6.00

Opcion  └→
```

Fig. 27 Pantalla de datos completos del sistema

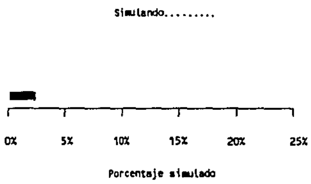


Fig. 28 Pantalla que muestra el avance de la simulación

inmediatamente analizada es de un 10%, este parámetro es importante ya que algunas veces se reciben muestras en las que al cliente le interesa que sean analizadas inmediatamente.

Mientras que la última pantalla presentará los factores de utilización de las instalaciones como se muestra en la figura 31. En nuestro ejemplo el porcentaje de 92.69 nos indica el porcentaje del tiempo que el químico estará ocupado y no el porcentaje de tiempo que el cromatógrafo será usado. Es importante recalcar que todos estos datos son para estado estacionario.

Una vez mostrados todos estos datos se regresará a la pantalla donde aparecen los datos del sistema de colas, en esta pantalla se podrá volver a realizar otra simulación por ejemplo en nuestro caso se podrá simular otra vez para la opción de contratar un químico medio tiempo, es decir con la tasa de servicio igual a 12 cromatografías por día para comparar como se comporta el sistema bajo otras condiciones, o bien se podrá dar por terminada la simulación y salir del programa.

Los resultados para esta última alternativa obtenidos por la simulación se muestran en las figuras 32, 33 y 34. Se puede observar en la figura 34 que el nuevo químico tendrá el 36% de su tiempo libre por lo que se le está subutilizándolo, aunque obviamente se tendrá un mejor nivel de servicio con esta opción la diferencia no amerita el costo extra que representa, por lo que podemos concluir que lo indicado es reasignar al personal de tal forma que un químico de los que actualmente labora en el laboratorio disponga de dos horas diarias para realizar los análisis de cromatografía.

Por último es importante que el usuario esté consciente de que los datos obtenidos del programa serán tan.confiables como lo sean los datos de entrada, por lo que se sugiere cuidar este aspecto en especial ya que mientras se alimente basura al programa lo único que se podrá obtener de él será basura.

RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO

	Promedio	Desviacion Estandard	Intervalo de confianza del 95% Limite inferior	Limite superior
Wq	0.64	0.58	0.63	0.65
W	0.81	0.61	0.80	0.82
Lq	2.96	2.78	2.90	3.01
L	3.86	2.90	3.80	3.91

Wq=Tiempo de espera en la cola
W =Tiempo de espera en el sistema
Lq=Longitud esperada de la cola
L =Numero esperado de clientes en el sistema

Fig. 29 Medidas de rendimiento obtenidas de la simulación

RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO

Po ....:10.00 %

P1 ....:13.00 %

P2 ....:15.00 %

P3 ....:14.00 %

P4 ....:12.00 %

P5 ....:10.00 %

Pn= Posibilidad de tener exactamente n clientes en el sistema

Fig. 30 Probabilidades de diversos estados del sistema obtenidas por la simulación

RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO

% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron ocupadas....92.69 %

% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron ociosas.....7.31 %

% de veces que la(s) instalacion(es) no tuvieron tiempo
ocioso entre un servicio y otro..............................90.13 %

% de veces que la(s) instalacion(es) tuvieron tiempo
ocioso entre un servicio y otro..............................9.87 %

Fig. 31 Porcentaje de utilización del sistema

RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO

	Promedio	Desviacion Estandard	Intervalo de confianza del 95% Limite inferior	Limite superior
Wq	0.10	0.14	0.10	0.10
W	0.18	0.17	0.18	0.19
Lq	0.59	1.08	0.57	0.61
L	1.20	1.37	1.17	1.23

Wq=Tiempo de espera en la cola
W =Tiempo de espera en el sistema
Lq=Longitud esperada de la cola
L =Numero esperado de clientes en el sistema

Fig. 32 Medidas de rendimiento obtenidas de la simulación

RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO

Po ....:39.00 %

P1 ....:29.00 %

P2 ....:17.00 %

P3 ....: 8.00 %

P4 ....: 4.00 %

P5 ....: 2.00 %

Pn= Posibilidad de tener exactamente n clientes en el sistema

Fig. 33 Probabilidades de diversos estados del sistema obtenidas por la simulación

```
RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO
```

```
% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron ocupadas....63.86 %

% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron ociosas.....36.14 %

% de veces que la(s) instalacion(es) no tuvieron tiempo
ocioso entre un servicio y otro..............................60.82 %

% de veces que la(s) instalacion(es) tuvieron tiempo
ocioso entre un servicio y otro..............................39.18 %
```

Fig. 34 Porcentaje de utilización del sistema

Código del programa

```
Program tesis;

const
  omega=0.0196;

type

   punterocliente=^cliente;
   punteroserv=^servidor;
   tipoinfo=real;

   cliente=record
     llegada:tipoinfo;
     servicio:tipoinfo;
     Wq:tipoinfo;
     Lq:integer;
     L:integer;
     sig:punterocliente;
     ant:punterocliente;
     end;

   servidor=record
     numero:integer;
     disponible:tipoinfo;
     uso:tipoinfo;
     ocio:tipoinfo;
     available:integer;
     notavail:integer;
     siguiente:punteroserv;
     end;

var

  anterior,lista2,p:punterocliente;
  lista1,min,q:punteroserv;
  estado,presion,n,servidores,nsist,sirviendo,cola:integer;
  opcion:byte;
  tiempo,lambda,a,sigma,media,c1,c2,inf,sup:real;
  vuelta,coordx,num,seleccion:integer;
  p0,p1,p2,p3,p4,p5,suma1,suma2,suma3,suma4:real;
  delta,ss1,ss2,ss3,ss4:real;
  enuso,ocioso,notava,avail:real;
  rs1,rs2,rs3,rs4,rss1,rss2,rss3,rss4,rp0,rp1,rp2,rp3,rp4,rp5:real;
  ruso,rocio,rnot,ravail:real;
```

```
Procedure Logo;
var
   x:integer;
Begin
ClrScr;
HiRes;
Draw (293,29,335,47,3);
Draw (285,38,318,52,3);
Draw (298,51,314,58,3);
Draw (293,29,285,38,3);
Draw (313,59,318,52,3);
Draw (335,47,318,72,3);
Draw (335,47,338,58,3);
Draw (338,58,322,82,3);
Draw (285,38,318,125,3);
Draw (298,51,332,139,3);
Draw (312,58,340,127,3);
Draw (332,139,340,127,3);
Draw (332,139,301,125,3);
Draw (318,125,297,115,3);
Draw (304,105,312,110,3);
Draw (304,105,297,115,3);
Draw (301,125,297,115,3);
Draw (278,87,299,77,3);
Draw (278,87,272,103,3);
Draw (304,88,290,93,3);
Draw (290,93,286,108,3);
Draw (286,108,272,103,3);
Draw (272,103,275,114,3);
Draw (286,108,289,119,3);
Draw (275,114,289,119,3);
Draw (289,114,292,102,3);
Draw (292,102,307,97,3);
Draw (292,102,290,93,3);
Draw (200,20,400,20,3); {marco}
Draw (200,20,200,150,3);
Draw (400,20,400,150,3);
Draw (200,150,400,150,3);
Draw (205,22,395,22,3); {marco}
Draw (205,22,205,148,3);
Draw (395,22,395,148,3);
Draw (205,148,395,148,3);
gotoxy (19,23);
write('(c) Copyright J.R. Software Inc. 1991');
gotoxy (23,24);
repeat until keypressed;
end;
```

```
Procedure Box  (X1,Y1,X2,Y2,Border,ColorWindow:Byte; Style:Char);
Var
  I : Integer;
  TL,TR,BL,BR,H,V : Char;
Begin
  If UpCase (Style) = 'S' Then Begin
     TL:= 'Z'; TR:='?'; BL:= '@'; BR:= 'Y'; V:= '3'; H:= 'D' End
  Else Begin
     TL:= 'I'; TR:=';'; BL:= 'H'; BR:= '<'; V:= ':'; H:= 'M' End;
  GotoXY (X1,Y1); Write (TL);
  GotoXY (X1,Y2); Write (BL);
  GotoXY (X2,Y1); Write (TR);
  GotoXY (X2,Y2); Write (BR);
  For I:= 1 to (X2-X1) - 1 Do
  Begin
    GotoXY (X1 + I,Y1); Write (H);
    GotoXY (X1 + I,Y2); Write (H)
  End;
  For I:= 1 to (Y2-Y1) - 1 Do
  Begin
    GotoXY (X1,Y1 + I);  Write (V);
    GotoXY (X2,Y1 + I);  Write (V)
  End;
  Window (X1+1,Y1+1,X2-1,Y2-1);
  TextBackGround (ColorWindow);
  ClrScr;
  Window (1,1,80,25);
End;


Procedure Presentacion;
begin
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,7,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('S I M U L A C I O N');
  gotoxy(20,5);write('D E   S I S T E M A S   D E   C O L A S');
  box(40,20,79,24,1,7,'d');
  gotoxy(50,22);write('por Jorge A. Rodriguez');
  repeat until keypressed;
  end;
```

```
Procedure Entrada;
begin
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,20,79,23,1,7,'d');
  gotoxy(10,21);write('Numero esperado de clientes por unidad de tiempo'
  gotoxy(10,22);write('cuando se encuentran cero clientes en el sistema:
  read(lambda);
  end;

Procedure Distribucion;
begin
  Seleccion:=0;
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,6,40,18,1,7,'d');
  gotoxy(2,7);write('Distribucion del tiempo de servicio');
  gotoxy(2,9);write('Distribucion exponencial............');
  gotoxy(2,11);write('Distribucion uniforme..............');
  gotoxy(2,13);write('Distribucion normal................');
  gotoxy(2,15);write('Distribucion Erlang................');
  gotoxy(36,9);write('[1]');
  gotoxy(36,11);write('[2]');
  gotoxy(36,13);write('[3]');
  gotoxy(36,15);write('[4]');
  gotoxy(2,17);write('Opcion  @D>');
  repeat
  gotoxy(13,17);
  sound(400);
  delay(250);
  nosound;
  buflen:=1;
  read(seleccion);
  until seleccion in [1..4];
  if seleccion=1 then
   begin
     box(1,20,79,23,1,7,'d');
     gotoxy(10,21);write('Numero esperado de clientes a los que se les c
     gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
```

```
    read(a);
  end;
  if seleccion=2 then
  begin
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(10,21);write('Numero minimo de clientes a los que se les com
    gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
    read(inf);
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(10,21);write('Numero maximo de clientes a los que se les com
    gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
    read(sup)
  end;
  if seleccion=3 then
  begin
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(10,21);write('Promedio del numero de clientes a los que se l
    gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
    read(media);
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(10,21);write('Desviacion estandard de clientes a los que se
    gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
    read(sigma);
  end;
  if seleccion=4 then
  begin
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(10,21);write('Numero esperado de clientes por tarea a los qu
    gotoxy(10,22);write('el servicio por unidad de tiempo (por servidor
    read(a);
    box(1,20,79,23,1,7,'d');
    gotoxy(8,21);write('Numero de tareas requeridas para completar el s
    read(num);
  end;
end;
```

```
Procedure Coefent;
begin
  Opcion:=0;
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,20,79,23,1,7,'d');
  gotoxy(10,21);write('Coeficiente de presion para la tasa de llegadas:'
  read(c1);
  end;

Procedure Coefsal;
begin
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,20,79,23,1,7,'d');
  gotoxy(10,21);write('Coeficiente de presion para la tasa de servicio:'
  read(c2);
  end;


Procedure inicializar;

  var
  x:integer;
  ultimo:punteroserv;
  begin
   randomize;
   clrscr;
   textmode;
   gotoxy(29,6);
   write('Simulando.........');
   gotoxy(10,12);
   write('ZDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDD?');
   gotoxy(10,14);
```

```
   if vuelta =1 then write('0%          5%         10%         15%         20%
   if vuelta =2 then write('25%        30%         35%         40%         45%
   if vuelta =3 then write('50%        55%         60%         65%         70%
   if vuelta =4 then write('75%        80%         85%         90%         95%
   gotoxy(28,16);
   coordx:=11;
   write('Porcentaje simulado');
    n:=10000;
    listal:=nil;
    lista2:=nil;
    anterior:=nil;
    for x:=1 to servidores do
      begin
        new(q);
        q^.numero:=x;
        q^.disponible:=0;
        q^.uso:=0;
        q^.ocio:=0;
        q^.available:=0;
        q^.notavail:=0;
        q^.siguiente:=nil;
        if listal=nil then listal:=q
        else ultimo^.siguiente:=q;
        ultimo:=q;
      end;
    cola:=0;
    tiempo:=0;
    sirviendo:=0;
    nsist:=0;
 end;

Procedure foundmin;

var
  orden:punteroserv;
  minimo:real;
```

```
  begin
    orden:=listal;
    min:=orden;
    minimo:=orden^.disponible;
    while orden <> nil do
      begin
        if orden^.disponible < minimo then
          begin
            minimo:=orden^.disponible;
            min:=orden;
          end;
        orden:=orden^.siguiente;
      end;
  end;

Procedure sistema;

var
  gamma,beta,atendiendo:punterocliente;
  alfa:punteroserv;
  veces,ocupado,gente,x,contador:integer;
  cplleg,cpserv,modo,ri,entrada,salida:real;

begin

  while sirviendo<=n do
    begin
      foundmin;
      if cola=0 then
        begin
          new(p);
          p^.sig:=nil;
          if lista2=nil then lista2:=p
          else anterior^.sig:=p;
          estado:=nsist;
          {estado}
          p^.llegada:=tiempo-(1/lambda)*ln(random);
          p^.ant:=anterior;
          anterior:=p;
          cola:=cola+1;
          nsist:=nsist+1;
          tiempo:=p^.llegada;
        end;
```

```
while min^.disponible>anterior^.llegada do
  begin
    new(p);
    p^.sig:=nil;
    anterior^.sig:=p;
    p^.ant:=anterior;
    anterior:=p;
    estado:=nsist;
    cplleg:=exp((cl*ln((servidores/(estado+servidores)))));
    p^.llegada:=tiempo-(1/(cplleg*lambda))*ln(random);
    cola:=cola+1;
    nsist:=nsist+1;
    tiempo:=p^.llegada;
  end;

if lista2^.sig=nil then atendiendo:=lista2
else atendiendo:=atendiendo^.sig;
contador:=0;
gamma:=atendiendo;
entrada:=0;
if gamma^.ant<>nil then
  begin
  gamma:=gamma^.ant;
  entrada:=gamma^.llegada+gamma^.wq;
  end;
if atendiendo=lista2 then gamma:=nil;
while (entrada>atendiendo^.llegada) and (gamma<>nil) do
  begin
  gamma:=gamma^.ant;
  if gamma<>nil
  then entrada:=gamma^.llegada+gamma^.wq;
  contador:=contador+1;
  end;
atendiendo^.lq:=contador;
if contador=0 then
  begin
    if min^.disponible>atendiendo^.llegada then atendiendo^.l:=ate
    else
     begin
       alfa:=listal;
       beta:=atendiendo;
       contador:=0;
```

```
          while alfa <> nil do
          begin
           if alfa^.disponible>beta^.llegada then contador:=contado
           alfa:=alfa^.siguiente;
           end;
     atendiendo^.l:=atendiendo^.lq+contador;
    end;
  end
 else atendiendo^.l:=atendiendo^.lq+servidores;
 modo:=sirviendo mod 200;
 if modo=0 then
   begin
     gotoxy(coordx,11);
     write('\');
     coordx:=coordx+1;
    end;
 sirviendo:=sirviendo+1;
 beta:=atendiendo;
 alfa:=listal;
 contador:=1;
 while alfa <> nil do
   begin
   if alfa<>min then
     begin
       if alfa^.disponible>beta^.llegada then contador:=contador+1;
     end;
   alfa:=alfa^.siguiente;
   end;
 while beta^.sig <> nil do
   begin
      if beta^.sig^.llegada<min^.disponible then contador:=contador
      beta:=beta^.sig;
   end;
 if contador>servidores then cpserv:=exp((c2*ln((contador/servidore
  else cpserv:=1;
 if seleccion=1 then atendiendo^.servicio:=-(1/(cpserv*a))*ln(rando
 if seleccion=2 then atendiendo^.servicio:=(((((1/inf)-(1/sup))*ran
 if seleccion=3 then
    begin
```

```
          ri:=0;
          for x:=1 to 12 do
            begin
            ri:=ri+random;
            end;
           ri:=ri-6;
           atendiendo^.servicio:=((1/media)+(sigma/sqr(media))*ri)/cpserv
           end;
         if seleccion=4 then
          begin
          ri:=0;
          for x:=1 to num do
            begin
            ri:=-(1/a)*ln(random)+ri;
            end;
           atendiendo^.servicio:=(ri/cpserv);
           end;
       min^.uso:=min^.uso+atendiendo^.servicio;
       if min^.disponible<=atendiendo^.llegada then
         begin
           atendiendo^.wq:=0;
           min^.ocio:=min^.ocio+atendiendo^.llegada-min^.disponible;
           min^.disponible:=atendiendo^.llegada+atendiendo^.servicio;
           min^.available:=min^.available+1;
         end
       else
         begin
           atendiendo^.wq:=min^.disponible-atendiendo^.llegada;
           min^.disponible:=min^.disponible+atendiendo^.servicio;
           min^.notavail:=min^.notavail+1;
         end;
  cola:=cola-1;
  nsist:=nsist-1;
  end;
end;


Procedure promedio;

var
  r:punteroserv;
  h,t:punterocliente;
  coordx,x,y:integer;
```

```
  modo:real;
begin
  clrscr;
  textmode;
  gotoxy(29,6);
  write('Calculando.....');
  gotoxy(10,12);
  write('ZDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDDBDDDDDDDDD?');
  gotoxy(10,14);
  if vuelta =1 then write('0%        5%        10%        15%        20%
  if vuelta =2 then write('25%      30%        35%        40%        45%
  if vuelta =3 then write('50%      55%        60%        65%        70%
  if vuelta =4 then write('75%      80%        85%        90%        95%
  gotoxy(28,16);
  coordx:=11;
  write('Porcentaje calculado');
  ss1:=0;ss2:=0;ss3:=0;ss4:=0;
  suma1:=0;
  suma2:=0;
  suma3:=0;
  suma4:=0;
  p0:=0;
  p1:=0;
  p2:=0;
  p3:=0;
  p4:=0;
  p5:=0;
  t:=lista2;
  for y:=1 to n do
    begin
      suma1:=suma1+t^.servicio+t^.wq;
      suma2:=suma2+t^.wq;
      suma3:=suma3+t^.lq;
      suma4:=suma4+t^.l;
      if t^.l=0 then p0:=p0+1;
      if t^.l=1 then p1:=p1+1;
      if t^.l=2 then p2:=p2+1;
      if t^.l=3 then p3:=p3+1;
      if t^.l=4 then p4:=p4+1;
      if t^.l=5 then p5:=p5+1;
      t:=t^.sig;
      modo:=y mod 400;
```

```
        if modo=0 then
         begin
          gotoxy(coordx,11);
          write('\');
          coordx:=coordx+1;
         end;
     end;
   suma1:=suma1/n;
   suma2:=suma2/n;
   suma3:=suma3/n;
   suma4:=suma4/n;
   p0:=p0/n;
   p1:=p1/n;
   p2:=p2/n;
   p3:=p3/n;
   p4:=p4/n;
   p5:=p5/n;
   t:=lista2;
   for y:=1 to n do
     begin
       ss1:=sqr(t^.servicio+t^.wq-suma1)+ss1;
       ss2:=sqr(t^.wq-suma2)+ss2;
       ss3:=sqr(t^.lq-suma3)+ss3;
       ss4:=sqr(t^.l-suma4)+ss4;
       h:=t;
       t:=t^.sig;
       dispose(h);
       modo:=y mod 400;
        if modo=0 then
          begin
          gotoxy(coordx,11);
          write('\');
          coordx:=coordx+1;
         end;
     end;
   ss1:=sqrt(ss1/(n-1));
   ss2:=sqrt(ss2/(n-1));
   ss3:=sqrt(ss3/(n-1));
   ss4:=sqrt(ss4/(n-1));
   clrscr;
 end;
```

```
Procedure promdos;
var
  borrar,r:punteroserv;
  y:integer;
  zeta,ye:real;
begin
  ocioso:=0;
  enuso:=0;
  avail:=0;
  notava:=0;
  r:=lista1;
  for y:=1 to servidores do
    begin
      enuso:=r^.uso+enuso;
      ocioso:=r^.ocio+ocioso;
      avail:=r^.available+avail;
      notava:=r^.notavail+notava;
      borrar:=r;
      r:=r^.siguiente;
      dispose(borrar);
    end;
  zeta:=enuso+ocioso;
  ye:=avail+notava;
  enuso:=(enuso/zeta)*100;
  ocioso:=(ocioso/zeta)*100;
  avail:=(avail/ye)*100;
  notava:=(notava/ye)*100;
end;

Procedure sumas;
begin
vuelta:=vuelta+1;
ruso:=ruso+enuso;rocio:=rocio+ocioso;rnot:=rnot+notava;ravail:=ravail+av
rs1:=rs1+suma1;rs2:=rs2+suma2;rs3:=rs3+suma3;rs4:=rs4+suma4;
rss1:=rss1+ss1;rss2:=rss2+ss2;rss3:=rss3+ss3;rss4:=rss4+ss4;
rp0:=rp0+p0;rp1:=rp1+p1;rp2:=rp2+p2;rp3:=rp3+p3;rp4:=rp4+p4;rp5:=rp5+p5;
end;

Procedure ceros;
begin
vuelta:=1;
ruso:=0;rocio:=0;rnot:=0;ravail:=0;
rs1:=0;rs2:=0;rs3:=0;rs4:=0;
rss1:=0;rss2:=0;rss3:=0;rss4:=0;
rp0:=0;rp1:=0;rp2:=0;rp3:=0;rp4:=0;rp5:=0;
end;
```

```
Procedure preparar;
begin
enuso:=ruso/4;ocioso:=rocio/4;notava:=rnot/4;avail:=ravail/4;
suma1:=rs1/4;suma2:=rs2/4;suma3:=rs3/4;suma4:=rs4/4;
ss1:=rss1/4;ss2:=rss2/4;ss3:=rss3/4;ss4:=rss4/4;
p0:=rp0/4;p1:=rp1/4;p2:=rp2/4;p3:=rp3/4;p4:=rp4/4;p5:=rp5/4;
end;

Procedure resultados;
 var
 delta1,delta2,delta3,delta4:real;
begin
  textmode;
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(25,3);write('RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO');
  gotoxy(1,7);
writeln('        IMMMMMMMMMMMMMKMMMMMMMMMMMMMMMMMMKMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM
writeln('        :  Promedio  :   Desviacion    :  Intervalo de confianz
writeln('        :            :    Estandard    :  Limite inferior  Limi
writeln(' IMMMMMMNMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMMMKMMMM
writeln(' :  Wq  :            :                 :                    :
writeln(' LMMMMMMNMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMM
writeln(' :   W  :            :                 :                    :
writeln(' LMMMMMMNMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMM
writeln(' :  Lq  :            :                 :                    :
writeln(' LMMMMMMNMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMMMMMMMMMMMMMMMMMNMMMM
writeln(' :   L  :            :                 :                    :
writeln(' HMMMMMMJMMMMMMMMMMMMJMMMMMMMMMMMMMMMMMJMMMMMMMMMMMMMMMMMMMJMMMM
gotoxy(10,13);write(suma1:10:2);
gotoxy(10,11);write(suma2:10:2);
```

```
gotoxy(10,15);write(suma3:10:2);
gotoxy(10,17);write(suma4:10:2);
gotoxy(24,13);write(ss1:10:2);
gotoxy(24,11);write(ss2:10:2);
gotoxy(24,15);write(ss3:10:2);
gotoxy(24,17);write(ss4:10:2);
ss1:=ss1*omega;
ss2:=ss2*omega;
ss3:=ss3*omega;
ss4:=ss4*omega;
gotoxy(45,13);write(suma1-ss1:10:2);
gotoxy(45,11);write(suma2-ss2:10:2);
gotoxy(45,15);write(suma3-ss3:10:2);
gotoxy(45,17);write(suma4-ss4:10:2);
gotoxy(60,13);write(suma1+ss1:10:2);
gotoxy(60,11);write(suma2+ss2:10:2);
gotoxy(60,15);write(suma3+ss3:10:2);
gotoxy(60,17);write(suma4+ss4:10:2);
gotoxy(1,20);
writeln('Wq=Tiempo de espera en la cola');
writeln('W =Tiempo de espera en el sistema');
writeln('Lq=Longitud esperada de la cola');
writeln('L =Numero esperado de clientes en el sistema');
repeat until keypressed;
end;


Procedure resultps;
begin
  clrscr;
  textcolor(BLACK);
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(25,3);write('RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO');
  box(1,8,79,24,1,7,'d');
  gotoxy(15,10);write('Po ..................:',p0:2:2,' %');
  gotoxy(15,12);write('P1 ..................:',p1:2:2,' %');
  gotoxy(15,14);write('P2 ..................:',p2:2:2,' %');
  gotoxy(15,16);write('P3 ..................:',p3:2:2,' %');
  gotoxy(15,18);write('P4 ..................:',p4:2:2,' %');
  gotoxy(15,20);write('P5 ..................:',p5:2:2,' %');
  gotoxy(15,22);write('Pn= Posibilidad de tener exactamente n clientes e
  repeat until keypressed;
end;
```

```
Procedure facilities;
begin
  clrscr;
  textcolor(BLACK);
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(25,3);write('RESULTADOS DE ESTADO ESTACIONARIO');
  box(1,8,79,24,1,7,'d');
  gotoxy(5,10);write('% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron
  gotoxy(5,12);write('% del tiempo que la(s) instalacion(es) estuvieron
  gotoxy(5,14);write('% de veces que la(s) instalacion(es) no tuvieron t
  gotoxy(5,15);write('ocioso entre un servicio y otro..................
  gotoxy(5,17);write('% de veces que la(s) instalacion(es) tuvieron tiem
  gotoxy(5,18);write('ocioso entre un servicio y otro..................
  repeat until keypressed;
end;

Procedure simulacion;
begin
ceros;
inicializar;
sistema;
promedio;
promdos;
sumas;
inicializar;
sistema;
promedio;
promdos;
sumas;
inicializar;
sistema;
promedio;
promdos;
sumas;
inicializar;
sistema;
promedio;
promdos;
sumas;
preparar;
clrscr;textmode;
resultados;
clrscr;textmode;
resultps;
```

```
clrscr;textmode;
facilities;
end;


Procedure numserv;
begin
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,5,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,20,79,23,1,7,'d');
  gotoxy(30,21);write('Numero de servidores: ');
  read(servidores);
  end;


Procedure Datos;
begin
  repeat
  clrscr;
  textmode;
  Opcion:=0;
  textcolor(BLACK);
  clrscr;
  box(1,1,79,4,1,7,'d');
  gotoxy(30,3);write('DATOS DEL SISTEMA DE COLAS');
  box(1,12,40,24,1,7,'d');
  gotoxy(2,13);write('                    M E N U               ');
  gotoxy(2,15); write('Modificar distribucion de entrada..');
  gotoxy(2,16);write('Modificar distribucion de servicio.');
  gotoxy(2,17);write('Modificar c. de presion de llegada.');
  gotoxy(2,18);write('Modificar c. de presion de servicio');
  gotoxy(2,19);write('Modificar numero de servidores.....');
  gotoxy(2,20);write('Realizar simulacion................');
  gotoxy(2,21);write('Fin del programa...................');
  gotoxy(37,15);write('[1]');
  gotoxy(37,16);write('[2]');
  gotoxy(37,17);write('[3]');
  gotoxy(37,18);write('[4]');
  gotoxy(37,19);write('[5]');
  gotoxy(37,20);write('[6]');
  gotoxy(37,21);write('[7]');
```

```
box(42,12,79,24,1,7,'d');
box(1,5,79,10,1,7,'d');
gotoxy(10,7);
write('Coeficiente de presion para la tasa de llegadas....:',c1:2:2);
gotoxy(10,8);
write('Coeficiente de presion para la tasa de servicio....:',c2:2:2);
gotoxy(10,9);
write('Numero de servidores ..............................:',servidore
gotoxy(44,13);
write('Distribucion de tasa de llegadas:');
gotoxy(55,14);
write('Poisson');
gotoxy(43,15);
write('-----------------------------------');
gotoxy(45,16);
write('Tasa media de llegadas:',lambda:8:2);
gotoxy(43,17);
write('-----------------------------------');
gotoxy(44,18);
write('Distribucion de tasa de servicio:');
if seleccion=1 then
  begin
  gotoxy(55,19);
  write('Exponencial');
  gotoxy(43,20);
  write('-----------------------------------');
  gotoxy(43,21);write('Tasa media de servicio:',a:8:2);
  end;
if seleccion=2 then
  begin
  gotoxy(55,19);
  write('Uniforme');
  gotoxy(43,20);
  write('-----------------------------------');
  gotoxy(43,21);write('Num. esperado de clientes a los que');
  gotoxy(43,22);write('se les completa el servicio:');
  gotoxy(43,23);write('Minimo:',inf:6:2);
  gotoxy(63,23);write('Maximo:',sup:6:2);
  end;
if seleccion=3 then
  begin
  gotoxy(55,19);
  write('Normal');
  gotoxy(43,20);
```

```
  write('-----------------------------------');
  gotoxy(43,21);write('Prom. de clientes atendidos:',media:8:2);
  gotoxy(43,22);write('D.std de clientes atendidos:',sigma:7:2);
  end;
if seleccion=4 then
  begin
  gotoxy(55,19);
  write('Erlang');
  gotoxy(43,20);
  write('-----------------------------------');
  gotoxy(43,21);write('Numero de tareas:',num);
  gotoxy(43,22);write('Tiempo esperado de cada tarea:',a:6:2);
  end;
  gotoxy(2,23);write('Opcion  @D>');
repeat
gotoxy(13,23);
sound(400);
delay(250);
nosound;
buflen:=1;
read(opcion);
until opcion in [1..7];
textmode;
clrscr;
 case opcion of
1:entrada;
2:distribucion;
3:coefent;
4:coefsal;
5:numserv;
6:simulacion;
 end;
until opcion=7
end;
```

```
begin
logo;
clrscr;
textmode;
presentacion;
clrscr;
textmode;
entrada;
clrscr;
textmode;
distribucion;
clrscr;
textmode;
coefent;
clrscr;
textmode;
coefsal;
clrscr;
textmode;
numserv;
clrscr;
textmode;
datos;
end.
```

Conclusiones Generales

La evolución de la economía hacia los servicios ha provocado un crecimiento explosivo de los sistemas de colas lo que ha generado la necesidad de disponer de información sobre las medidas de rendimiento de un sistema de colas para diseñar con efectividad sistemas que logren un balance apropiado entre el costo de proporcionar el servicio y el costo asociado con la espera por ese servicio.

Si bien es cierto que la teoría de colas ha planteado modelos matemáticos para la mayor parte de lo que podríamos considerar como modelos básicos obteniendo resultados útiles para estos modelos, también es cierto que estos modelos están muy lejos de agotar la amplia banda de sistemas de colas que se encuentran en la actualidad. Por lo que existe la necesidad de obtener resultados análiticos útiles para una mayor cantidad de modelos de sistemas de colas.

Cuando en un sistema de colas no se dispone de un modelo matemático tratable que proporcione una representación razonable del sistema de colas bajo estudio, es conveniente utilizar la simulación debido a que es una herramienta efícaz y poco costosa mediante la cual podemos obtener las medidas de rendimiento del sistema de colas necesarias para tomar una decisión adecuada.

Las medidas de rendimiento de los sistemas de colas están determinadas por las distribuciones de la tasa de servicio y de la tasa de llegadas por lo que es importante que estas distribuciones se ajusten plenamente a la tasa de llegadas y tasa de servicio del sistema de colas real de tal manera que las medidas de rendimiento también se apeguen al sistema real.

La simulación nos permite, una vez creado el sistema de colas, con muy pocos cambios simular un sistema diferente al planteado originalmente por lo que aunque se plantee un sistema específico se puede tener la seguridad de que con un poco de tiempo adicional se podrá realizar los ajustes necesarios para simular un sistema diferente.

Dentro de los lenguajes de computación clasificados como de propósitos generales destaca el Pascal como uno adecuado para el uso de la simulación gracias a que es uno de los que tienen más rápida velocidad de ejecución lo que permite al usuario tener un ahorro en el tiempo de ejecución del programa.

Es importante que un programa de computación sea compatible con el mayor número de equipos posible por lo que al hacer el programa compatible con la computadora IBM-PC este es compatible con el equipo más popular que se encuentra en el mercado y por lo tanto es bastante factible que el usuario disponga de un equipo compatible con la IBM-PC para ejecutar el programa.

El programa permite al usuario la opción de observar el comportamiento de un sistema de colas ante diversos escenarios posibles permitiendo al usuario realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros de control de un sistema de colas. Esta opción cuando se tiene una incertidumbre del entorno en el cual se desarrollará el sistema de colas permitirá al usuario conocer que tipo de entorno podrá afectarla en un grado mayor al sistema de colas y al mismo tiempo el usuario podrá identificar las oportunidades que un determinado entorno podría ofrecer al sistema de colas.

El obtener medidas de rendimiento confiables para un sistema de colas es solamente una condición necesaria pero no suficiente para tomar decisiones acertadas por lo que se deberá tomar en cuenta que por muy confiable que sea la información de que se disponga ésta no garantiza en modo alguno la toma de decisiones acertadas.

Bibliografía

Coss Bu Raúl, Simulación ,1ª Edición, Limusa, México D.F., Enero 1990.

Davis Roscoe K., Modelos cuantitativos para administración,2ª Edición, Grupo Editorial Iberoaméricano, México D.F., Enero 1990.

Hick E. Phillips, Introducción a la Ingeniería Industrial y Ciencia de la Administración,1ª Edición, CECSA, México D.F., Julio 1985

Hillier Frederick y Lieberman Gerald, Introducción a la Investigación de Operaciones,3ª Edición, McGraw Hill, México D.F., Junio 1987

Makridakis Spyros y Steven C. Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, 1ª Edición, Limusa,México D.F., Junio 1989

Schroeder G Roger, Administración de operaciones,1ª Edición, Mc Graw Hill, México D.F., Agosto 1989

Thierauf Roger J., Investigación de Operaciones,1ª Edición, Limusa, México D.F. , Abril 1990

Walpole R.E., Probabilidad y Estadística para Ingenieros,3ª Edición, Nueva Editorial Interamericana, Noviembre 1987