



00382  
4  
2ej.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios de Posgrado

UN POSIBLE PROCEDIMIENTO NO-PERTURBATIVO DE  
MUCHOS NIVELES EN LA FORMULACION HAMILTONIANA  
DE LA CROMODINAMICA CUANTICA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## T E S I S

Que para obtener el grado académico de  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

Presenta:

Juan Carlos López Vieyra

México D. F.

Mayo de 1992



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Indice

|  |    |
|--|----|
| Capítulo 1 : Introducción.                                   | 1  |
| Algo de historia   | 1  |
| Capítulo 2 : Tópicos de la Teoría de Grupos.                 | 6  |
| 1.- Introducción   | 6  |
| 2.- Simetrías y Grupos de Transformaciones                   | 6  |
| 3.- Grupos Continuos   | 10 |
| 4.- Grupos de Lie  | 11 |
| 5.- Representaciones   | 14 |
| 6.- El Oscilador Armónico                                    | 18 |
| 7.- El Grupo $Sp(6, R)$                                      | 26 |
| 8.- Grupo Dinámico para el Oscilador                         | 27 |
| 9.- Estados Coherentes                                       | 28 |
| Capítulo 3 : Cromodinámica Cuántica                          | 31 |
| 1.- Cromodinámica Cuántica                                   | 31 |
| 2.- Antecedentes   | 32 |
| 3.- Concepto de Simetría de Isospín                          | 33 |
| 4.- Introducción del Concepto de Extrañeza                   | 34 |
| 5.- El Modelo Naive de Quarks                                | 37 |
| 6.- Necesidad del Color                                      | 38 |
| 7.- Interacciones Fundamentales                              | 42 |
| 8.- Invariancia de Norma      El Electromagnetismo           | 43 |
| 9.- La invariancia de Norma como Principio Dinámico          | 45 |
| 10.- Teorías de Yang-Mills                                   | 47 |
| 11.- Una Teoría de Yang-Mills para las Interacciones Fuertes | 48 |
| 12.- Libertad Asintótica                                     | 50 |
| Capítulo 4 : Formulación Hamiltoniana                        | 53 |
| 1.- Introducción   | 53 |
| 2.- Invariancia de Norma                                     | 54 |
| 3.- Fijación de la Norma                                     | 55 |
| 4.- Transformaciones de "Coordenadas"                        | 58 |
| 5.- Cuantización Canónica de los Campos de Norma             | 60 |
| 6.- Hamiltoniano   | 63 |
| 6a.- Cuantización en "coordenadas curvilíneas"               | 63 |
| 6b.- El Hamiltoniano en la Norma de Schwinger                | 68 |
| Capítulo 5 : Contracciones y Expansiones de Grupos           | 70 |
| 1.- Introducción   | 70 |
| 2.- La idea de Contracción                                   | 70 |
| 3.- Técnicas de Mapeos Bosónicos                             | 74 |
| 4.- Tipos de Mapeos Bosónicos                                | 75 |
| 5.- Mapeo Bosónico   | 76 |
| 6.- Mapeo de Holstein - Primakov                             | 78 |
| 7.- Mapeo de Belyakov y Zeelevinsky                          | 80 |

|  |            |
|--|------------|
| 8.- Mapeo de Dyson                                       | 83         |
| 9.- El Método de los Estados Coherentes                  | 85         |
| <b>Capítulo 6 : Mapeo Bosónico en la CDC</b>             | <b>87</b>  |
| 1.- Resumen  | 87         |
| 2.- Introducción   | 88         |
| 3.- Formalismo de "coordenadas"                          | 90         |
| 4.- Álgebra de los operadores de "coordenadas"           | 90         |
| 5.- Coordenadas de Modelo                                | 92         |
| 6.- Ansatz: Parte Par                                    | 92         |
| 7.- Ansatz: Parte Impar                                  | 94         |
| 8.- El Espacio de Hilbert Ideal                          | 96         |
| 9.- Cálculo de los Elementos de Matriz                   | 98         |
| 10.- Ejemplo: Un Hamiltoniano de Juguete                 | 102        |
| 11.- Espectro de Energías                                | 106        |
| <b>Capítulo 7 : Bosones Colectivos</b>                   | <b>108</b> |
| 1.- Idea   | 108        |
| 2.- Definición de Bosones Colectivos                     | 108        |
| 3.- Procedimiento Variacional                            | 111        |
| <b>Capítulo 8 : Hamiltoniano de Juguete del Tipo CDC</b> | <b>112</b> |
| 1.- Un Hamiltoniano de Juguete del Tipo CDC              | 112        |
| 2.- Regularización a uno y dos Niveles                   | 114        |
| 3.- Bosones de Modelo                                    | 115        |
| 4.- Hamiltoniano Contraído                               | 117        |
| 5.- Cálculo Exacto                                       | 118        |
| 6.- Definición de Bosones Colectivos                     | 118        |
| 7.- Hamiltoniano Colectivo                               | 119        |
| 8.- Método Variacional                                   | 119        |
| <b>Capítulo 9 : Conclusiones</b>                         | <b>123</b> |
| <b>Apéndices</b>   | <b>127</b> |
| I. Apéndice A  | 127        |
| II. Apéndice B   | 131        |
| III. Apéndice C  | 142        |
| IV. Apéndice D   | 147        |
| V. Apéndice E  | 153        |
| <b>Referencias</b>                                       | <b>156</b> |

## *Capítulo 1*

---

*'Un Posible Procedimiento No-Perturbativo de Muchos  
Niveles en la Formulación Hamiltoniana de la  
Cromodinámica Cuántica'*

**Resumen**

---

En éste trabajo se desarrolla un posible procedimiento no-perturbativo de muchos cuerpos, dentro del marco de la formulación Hamiltoniana de la CDC. Guiados por las evidencias de que el vacío de la CDC está constituido principalmente por un condensado de pares de gluones y pares de quarks, se desarrolla un mapeo bosónico apropiado tanto para la parte bosónica (gluones) como para la parte fermiónica (quarks). Se analizan las características del mapeo en un modelo de juguete de un nivel en una dimensión. Se analiza el problema del mapeo adecuado de los operadores en el espacio de Hilbert original (microscópico) al subespacio físico ideal que emerge en el mapeo. En el problema de muchos niveles se estudia la manera de incluir la contribución de los demás niveles, definiendo, mediante un principio variacional adecuado, un sólo bosón 'colectivo', reduciendo con ésto el problema de muchos niveles al problema de un solo nivel. Esta técnica se aplica a un Hamiltoniano de juguete unidimensional que posee una estructura similar a la estructura del Hamiltoniano de la CDC en la norma de Schwinger.

## Introducción

### 1 Algo de historia

La Cromodinámica Cuántica (CDC) es la teoría más favorecida para la descripción de las interacciones fuertes y es el resultado de más de tres décadas de continua investigación, tanto en el campo experimental como en el teórico, de las partículas elementales. Las áreas en las cuales se ha investigado más intensivamente son: la espectroscopía hadrónica, la fenomenología de la dispersión profunda, la teoría cuántica relativista de los campos etc. La idea de *quarks* con color (Greenberg, Nambu, 1964) surgió del estudio sistemático del espectro hadrónico (M. Gell-Mann, 1964 y G. Zweig, 1964), y fue confirmada, años más tarde, por el éxito del modelo naïve de *partones* (R.P. Feynman, 1969) en la dispersión electrón neutrino, y posteriormente en la aniquilación  $e^+e^-$ . Un desarrollo paralelo en la teoría cuántica de los campos había tomado lugar en el contexto de la descripción de las interacciones nucleares al desarrollarse la idea de campo de *norma* (Yang y Mills, 1954) que fue introducida para explicar y unificar las interacciones electrodébiles (Glashow 1961, Weinberg 1967, Salam 1968) partiendo de la hipótesis de la invariancia ante transformaciones locales de norma generadas por una simetría no-abeliana. La investigación en esta dirección, ha llevado a la noción de *libertad asintótica* (Gross y Wilczek, Politzer, 1973), y como consecuencia plausible a la exclusión infrarroja que mantiene a los quarks confinados dentro de los hadrones. Esta propiedad ha permitido el uso de técnicas perturbativas en el caso de la cromodinámica cuántica para describir los fenómenos de altas energías, como la dispersión inelástica profunda, en donde la constante de acoplamiento efectiva es suficientemente pequeña. Para poder entender con más detalle la descripción de los procesos hadrónicos es necesario explorar también el régimen de bajas energías, en donde los efectos de la no-linealidad debidos al carácter no-abeliano de la teoría (auto-interacciones) y el carácter no perturbativo (cuando la constante de acoplamiento es grande) son más importantes. Se han hecho diferentes descripciones *macroscópicas* para explicar, por ejemplo, el confinamiento de las partículas coloreadas. Tal es el caso del exitoso modelo fenomenológico de la *Bolsa* del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT bag-model), o de los modelos efectivos, como los basados en la hipótesis de la existencia de *cuerdas*. Por otra parte hay descripciones que usan potenciales confinantes efectivos dentro de un esquema no-relativista, o aún utilizando formulaciones relativistas del problema (como el oscilador de Dirac que ha sido desarrollado últimamente en

México por Moshinsky *et al*, 1989), o con la ecuación de Bethe-Salpeter, que intentan describir principalmente sistemas ligados de quarks (quarkonia), etcétera. Hasta ahora la descripción microscópica que ha tenido más éxito en este régimen ha sido la formulación de teorías de norma en una malla (Wilson, 1974, Polyakov, 1975). Hoy se tienen fuertes evidencias numéricas de confinamiento (Creutz, 1980), y rompimiento de la simetría quiral entre otros. La desventaja de estas formulaciones es el inmenso, si no prohibitivo, esfuerzo numérico (Wilson, 1989) que se necesita, lo cual limita los cálculos a pequeños volúmenes y a pocos puntos de la red en el espacio-tiempo. Aún y cuando las formulaciones en la malla puedan dar resultados exactos, su interpretación sería en extremo difícil debido a la falta de funciones de onda en una formulación de integrales de trayectoria de Feynman. Por lo tanto, es aconsejable buscar en direcciones alternativas, es decir, en métodos alternativos para describir de manera más clara y relativamente más fácil a la Cromodinámica Cuántica. Una posibilidad bastante obvia es el uso de las formulaciones Hamiltonianas (Lüscher, 1983; vanBall y Koller, 1987; Schütte, 1985), y pedir prestadas las técnicas de muchas partículas adecuadas que se usan en la física atómica y nuclear. Después de todo, un Campo es un sistema de muchas partículas, pero con un número infinito de grados de libertad. Así pues, la alternativa a la evaluación de las integrales de trayectoria de Feynman se reduce al estudio del problema de eigenvalores del Hamiltoniano y tratar de describir el espectro hadrónico. En la CDC existen, sin embargo, otros problemas que no aparecen en la física atómica o en la física nuclear como por ejemplo los problemas de regularización y renormalización, invariancia de norma, la existencia de horizontes de Gribov (Gribov, 1978), además de que el Hamiltoniano es mucho más complicado comparado con los que están presentes en las teorías usuales de muchos cuerpos. Una posibilidad es el estudio del problema de eigenvalores de una teoría cuántica de campos en una norma fija, como la norma de Coulomb, o la Norma de Schwinger. En el pasado se han hecho diferentes intentos en esta dirección: Pottinger, Warner y Carson han investigado la estructura del espectro hadrónico dentro de la *aproximación de un nivel* para los gluones, una técnica que ha sido aplicada exitosamente al estudio de un Hamiltoniano de bosón-nucleón por Bolsterli. Cutkosky investigó el espectro de una teoría de Yang-Mills incluyendo un número más grande de modos. Lüscher y Münster han tratado la dinámica de los modos de cero momento angular de los gluones perturbativamente, ya que para un sistema contenido en un pequeño volumen el uso de un desarrollo perturbativo en este caso está justificado. La extrapolación a volúmenes más grandes no se ha resuelto aún satisfactoriamente. Sin embargo, los únicos acercamientos compatibles con la idea de renormalización son los de Lüscher (1987), y los de vanBaal y Koller (1989). Nosotros estamos interesados en el estudio de la espectroscopía hadrónica, particularmente en el estudio de los estados más bajos y principalmente en el vacío cromodinámico no perturbativo. Parece razonable que al estudiar cualquier sistema cuántico, se discuta primero su estado base (Shuryak, 1984), aunque como se apunta en la referencia anterior, el vacío cromodinámico es más bien un objeto exótico. La propiedad del confinamiento de los quarks y gluones se ha atribuido principalmente a la estructura de este vacío, evitando la separación del color excepto en regiones de tamaño hadrónico. Tal es el caso del modelo de MIT citado más arriba, en donde los hadrones son "burujas" de vacío



perturbativo sumergidas en un vacío físico no-perturbativo. Esta es una descripción macroscópica que toma en cuenta los efectos de tal vacío de manera efectiva dentro de una propiedad global que lo caracteriza. En este caso se trata de la constante de la bolsa  $B$ , que expresa la diferencia de densidad de energía entre el vacío perturbativo y el vacío físico no-perturbativo. Esto nos debe recordar que muchas propiedades "macroscópicas" de los sistemas cuánticos, se deben principalmente a las excitaciones del vacío, como en el caso de la teoría de la superconductividad, la superfluidez del  $^4\text{He}$ , etc. Una de las primeras teorías concernientes a la estructura del vacío cromodinámico usa el argumento de que tal estado es similar a una sustancia paraanágnética (Nielsen y Olesen, 1978) que resulta en un efecto de anti-apantallamiento la carga de color, es decir, a un efecto de renormalización de la carga.

Existen diferentes teorías, que indican que el estado del vacío está constituido principalmente por estados "ligados" de dos gluones llamados *glueballs* (Hansson, Johnson y Peterson, 1982). También se ha demostrado, usando técnicas perturbativas, con los parámetros de la *bolsa*, que los estados más bajos de energía de dos y cuatro gluones están degenerados con el vacío perturbativo (Hess y Viollier, 1986). Esto sugiere la posibilidad de tratar el vacío como un condensado de Bose-Einstein. Más específicamente, se ha especulado que el estado base de la CDC es principalmente un condensado de *glueballs* con dos gluones cada cual. En estos tratamientos la formación de un condensado gluónico resulta inestable por la aplicación de un tratamiento perturbativo, aún en un régimen en donde la constante de acoplamiento es del orden de la unidad resulta sumamente peligroso e inadecuado. El siguiente paso fue entonces utilizar técnicas no-perturbativas, como la formulación hamiltoniana, y utilizar los métodos de muchos cuerpos para atacar el problema; en particular, el hecho de que se pueda suponer que el estado base está principalmente formado por un condensado gluónico, ha motivado la aplicación de desarrollos "cuasibosónicos" para el tratamiento del Hamiltoniano de la CDC, parecidos a los usados en la física nuclear. Hess y López (1987) hicieron un estudio del estado base en la aproximación de un nivel en la norma de Coulomb, considerando sólo la parte gluónica, (que es la principal responsable del comportamiento de condensado, aunque los quarks también participan) usando como grupo de color al grupo  $SU(2)$ . En las formulaciones hamiltonianas uno puede utilizar el esquema de red de Kogut-Susskind (1975), o formulaciones donde se fija completamente la norma, como en el trabajo mencionado arriba. Estas formulaciones, sin embargo, parecen muy diferentes, aunque los espectros resultantes deben ser obviamente idénticos. En esta dirección, Schütte (1989) ha apuntado que para el tratamiento de los estados ligados (*glueballs* para el campo gluónico de Yang Mills, o hadrones para el caso más general de CDC) parece existir un marco de referencia donde la estructura del Hamiltoniano parece ser más adecuada. La elección de este marco de referencia está dictada por la condición de Schwinger para la elección de la norma (Schütte, 1989). En esta norma se han hecho cálculos numéricos en la aproximación de un nivel (Hess y Schütte, 1991) para un modelo de color  $SU(2)$ .

En el presente trabajo estamos interesados en los métodos que nos permitan la inclusión de más niveles en el tratamiento Hamiltoniano de la CDC. En este sentido los cálculos realizados hasta ahora, en modelos  $SU(2)$  -donde los gluones están confinados a priori en una caja con simetría toroidal (Lüscher, 1983) y (vanBall y Koller, 1987) -, toman en cuenta la contribución de los estados más altos de manera perturbativa usando la teoría de perturbaciones de Bloch (C.Bloch, 1958). Esto da como resultado un Hamiltoniano efectivo con una estructura similar a aquél en el tratamiento de un nivel, pero con coeficientes diferentes. Este procedimiento ha resultado muy útil en el estudio del comportamiento de la CDC en volúmenes intermedios (aprox.  $1fm$ ), justo donde los efectos de confinamiento se vuelven importantes. Una desventaja de la simetría toroidal es que, aunque parece alcanzarse el límite continuo, es decir, que las energías no cambian significativamente cuando se incrementa el volumen de la caja, la simetría rotacional no se recupera. Hess y Schütte, por otra parte, han usado soluciones en volúmenes con una simetría esférica  $SO(3)$ , en su aproximación de un nivel, que es más físico que los volúmenes toroidales citados más arriba. En ese modelo de un nivel, sin embargo, no se pueden obtener conclusiones acerca del escalamiento, la renormalización etc. Nuestro trabajo consiste en la generalización del trabajo de Hess y Schütte considerando la inclusión de más niveles. Más específicamente en el desarrollo de las técnicas de contracción y expansión de grupos (Gilmore 1974) aplicadas a modelos de Hamiltonianos de juguete con estructura similar al Hamiltoniano de la CDC, para ser aplicadas al caso más realista tratado en la referencia de arriba. Nuestro primer paso ha consistido en el desarrollo de un 'mapeo' de los operadores de coordenadas (en términos de los cuales se desarrolla el Hamiltoniano vía un desarrollo en modos normales como es usual), a operadores cuasibosónicos de pares de coordenadas y operadores de un bosón de modelo apropiados. La pretensión al hacer ésto es sugerida por la idea de que existen 'pares' dominantes que dan cuenta de los principales efectos de la estructura Hamiltoniana (Hess y Vollmer, 1986). Una vez que se ha desarrollado este tipo de mapeos se aplica, como se ha dicho anteriormente, a modelos de juguete para investigar las propiedades y características del método. Básicamente existen dos tipos de mapeos (Klein-Marshalek, 1991): los mapeos del tipo Holstein-Primakov que preservan la hermiticidad del Hamiltoniano mapeado pero conduce a series infinitas en los desarrollos de los operadores bosónicos del modelo, y los mapeos del tipo de Dyson que conducen a series finitas en el desarrollo de los bosones de modelo, pero que conducen a Hamiltonianos no hermitianos en general, pero cuyos eigenvalores son los mismos que los del Hamiltoniano original. En ambos tipos de mapeos se debe tener cuidado en cómo se define el 'espacio físico de modelo' sobre el cual actúa nuestro Hamiltoniano. El mapeo que desarrollamos nosotros se puede incluir dentro del espíritu del segundo tipo de mapeos; es decir, que nuestro mapeo es un mapeo del tipo de Dyson. Para calcular los elementos de matriz de las interacciones que son funciones de potencias impares de los operadores de 'creación' se tuvo que definir el mapeo de operadores de un solo bosón a un bosón ideal, dado que en la CDC aparecen tanto potencias pares como impares en el Hamiltoniano. Particularmente en los términos correspondientes a la interacción *chromagnética*. Esta es la diferencia principal con los mismos tratamientos en física nuclear en donde los Hamiltonianos conservan el número

de partículas. Con el mapeo propuesto seguimos considerando un espacio de Hilbert muy grande, pero se consigue una visión más física de la estructura del Hamiltoniano.

La siguiente pregunta es si uno puede encontrar pares dominantes a bajas energías. La respuesta es posiblemente sí y entonces el espacio de Hilbert puede reducirse a un espacio cuyos estados estén compuestos de esos 'pares colectivos'. En el siguiente paso, entonces, se trata de reducir el problema de muchos niveles al problema de un nivel, tomando en cuenta de manera efectiva los niveles más altos, siguiendo las ideas que apuntan en su revisión Klein y Marshalek (1991) para definir bosones colectivos. La idea consiste en transformar nuestros operadores bosónicos, de manera que uno de ellos porte el máximo de información. Este procedimiento es similar a rotar el sistema de referencia. Una vez que se ha elegido un solo bosón colectivo, los parámetros de la transformación que define a tales bosones se determinan a partir de un principio variacional. Por ejemplo, se pueden elegir esos parámetros demandando que la energía del estado base sea mínima, o que la traza de los primeros estados (que tiene que ver con el valor esperado del Hamiltoniano), sea un mínimo. Debido a la simplicidad que tiene nuestro Hamiltoniano de 'juguete', los cálculos se pueden hacer exactamente y después con el método de contracción definiendo el bosón colectivo, lo cual nos permite comparar los resultados 'exactos' con los obtenidos con la aproximación. Con este método hemos podido describir con mucha precisión algunos de los niveles más bajos, tomando en cuenta los efectos de los niveles más altos de manera efectiva. La reducción del problema de muchos niveles al problema de un nivel, tiene el inconveniente de que inevitablemente se pierde información sobre algunos de esos niveles; sin embargo, al estudiar el problema de la CDC estamos interesados principalmente en el estado base y su estructura. En un trabajo que está siendo desarrollado al mismo tiempo por nosotros, se pretende aplicar las técnicas estudiadas en esta tesis, al caso del Hamiltoniano de CDC en la norma de Schwinger. Existen algunas pistas sobre cuál puede ser el camino más adecuado. Por ejemplo, los cálculos perturbativos dentro del modelo de la bolsa mencionados antes (Hansson, Johnson y Peterson, 1982 y Hess y Viollier, 1986) indican que los pares de gluones, y quark-antiquark, con spin y color cero están más ligados que otros acoplamientos. Aún más, que los pares de gluones con spin color cero están aún más ligados que el par de quark-antiquark. Esto nos conduce al esquema físico de que el vacío puede estar dominado por pares de gluones y pares quark-antiquark de spin color cero, y que la parte gluónica domina a la otra. En realidad estas pistas nos han guiado para la utilización del método que describimos en esta tesis.

## Capítulo 2

---

## Tópicos de la Teoría de Grupos

La simetría, ya sea que se defina en un sentido amplio o restringido, es una idea por medio de la cual el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.

Hermann Weyl

### (1) Introducción

Este capítulo está dedicado a repasar algunos conceptos de la teoría de grupos, así como para establecer algunas notaciones y definiciones que serán usadas en la tesis. La finalidad de este capítulo no es ni por mucho, la de hacer un repaso completo de la teoría. Para un tratado más amplio del tema existen excelentes libros de texto, algunos de los cuales citamos al final del capítulo. Por otra parte, se puede anotar aquí que la notación usada en la mayor parte de este capítulo es casi la misma que la que usa Wybourne (1974).

### (2) Simetrías y Grupos de Transformaciones

Comenzamos recordando brevemente la relación que existe entre el concepto de *Simetría y Grupo de Transformaciones*. Matemáticamente podemos establecer el concepto de simetría, como una propiedad de algún objeto, ya sea un objeto geométrico, ó un objeto matemático (como una ecuación), de no cambiar de *forma* cuando efectuamos sobre él cierta transformación. Por mencionar algunos ejemplos, un triángulo equilátero tiene varias simetrías; si lo rotamos por su centroíde por un ángulo de  $2n\pi/3$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$  su forma no cambia. Con cada uno de los ángulos de rotación que lo dejan *invariante* podemos asignar una transformación de simetría dada. En particular para  $n = 0$ , la transformación asociada es la transformación *identidad*.

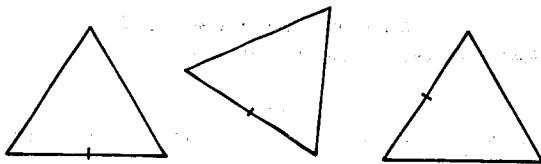


Figura (2.1) Simetría del triángulo

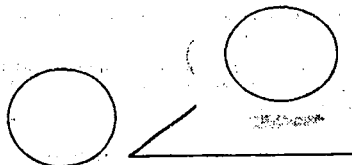


Figura (2.2) Simetrías de la circunferencia y de la Esfera

Una circunferencia por otro lado, la podemos rotar alrededor de su centro por cualquier ángulo  $\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . A cada ángulo de rotación le podemos asignar una transformación  $R(\theta)$  tal que cualquiera de estas rotaciones la deja invariante.

La diferencia principal entre estos dos tipos de simetría es que mientras que el número de transformaciones de simetría del triángulo es finito, el número de las simetrías de la circunferencia es infinito, y de hecho: continuo.

La aplicación sucesiva de dos transformaciones de simetría sobre un objeto, es nuevamente una simetría. Matemáticamente esto significa que el conjunto de simetrías

$G$ , es aquel que dados dos elementos de  $G$ , digamos  $g_1 y g_2 \in G$  la acción sucesiva (o multiplicación) debe corresponder a otro elemento del conjunto, es decir :

$$\text{Si } g_1 y g_2 \in G, \text{ entonces } g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G \quad (a).$$

Por definición, la transformación *identidad* está en  $G$ :

$$I \in G \quad (b).$$

La transformación *inversa* que regresa al objeto a su forma original siempre existe y está en el conjunto:

$$\exists g^{-1} \in G, \text{ tal que } g \cdot g^{-1} = I \quad (c).$$

Si tres o más transformaciones se combinan, entonces el orden de la multiplicación es irrelevante, esto es, la multiplicación es asociativa :

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \quad (d).$$

Las propiedades de las transformaciones de simetría (a—d), definen lo que en el lenguaje matemático se conoce como un *Grupo*.

Si además se cumple que el resultado de dos transformaciones sucesivas es independiente del orden en que se efectúen estas, o sea que las transformaciones *conmuten*, se dice que el grupo es *Abeliano*.

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 : \text{ grupo Abeliano} \quad (e).$$

El conjunto de rotaciones del triángulo equilátero descrito más arriba, está formado por los elementos

$$\{I, R_{2\pi/3}, R_{4\pi/3}\}. \quad (1)$$

y definen al grupo *Cíclico*  $C_3$ , mientras que para la circunferencia, el grupo de rotaciones está formado por el conjunto de transformaciones

$$\{R(\vartheta), \vartheta \in [0, 2\pi]\}. \quad (2)$$

Este grupo de rotaciones está formado por aquellas matrices  $2 \times 2$  que dejan invariante la distancia entre dos puntos cualesquiera (en particular uno de ellos puede ser el centro de la circunferencia), y se conoce como el grupo *ortogonal*  $SO(2)$  en dos dimensiones.

## (3) Subgrupos

En el caso de una esfera en tres dimensiones, conocida por los matemáticos como *2-esfera*, el grupo de simetrías es mayor. Consta de rotaciones alrededor de los ejes  $x, y, z$ . Las transformaciones de simetría corresponden al grupo  $SO(3)$  de matrices  $3 \times 3$  ortogonales.

Es evidente que cada uno de los giros alrededor de un eje particular forman un grupo por sí mismos, como en el caso de la circunferencia, y por lo tanto están contenidas en el grupo de simetrías más grande. Se llama *Subgrupo* al subconjunto de elementos que forman por sí un grupo. Es decir,

Sea  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ . Si se cumple que :

$$\forall g'_1, g'_2 \in \mathcal{G}', \quad (3)$$

entonces

$$g'_1 \cdot g'_2 \in \mathcal{G}'. \quad (4)$$

y además

$$I \in \mathcal{G}'. \quad (5)$$

entonces  $\mathcal{G}'$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$ .

En el caso de la esfera podemos decir que el grupo de rotaciones *planas* alrededor de un eje, es un subgrupo del grupo de rotaciones *espaciales* en tres dimensiones. Es decir que tenemos la relación:

$$SO(3) \supset SO(2) \quad (6)$$

En el caso más general en que se consideren las rotaciones de la  $n$ -esfera, el grupo de simetrías es el grupo  $SO(n-1)$  y se tiene, por ejemplo, que una posible cadena de subgrupos es:

$$SO(n) \supset SO(n-1) \supset SO(n-2) \supset \dots \text{etc.} \quad (7)$$

A esta cadena de subgrupos se le llama *cadena canónica*. Hay que anotar aquí que existen otras cadenas diferentes de subgrupos, y que la anterior es la más trivial.



## (4) Grupos Continuos

Hemos visto que el grupo de simetrías de rotaciones en dos dimensiones  $SO(2)$  depende de un parámetro  $\vartheta$  que puede tomar valores continuos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Para cada ángulo  $\vartheta$  corresponde una rotación, es decir un elemento del grupo  $R(\vartheta)$ . Entonces los elementos de este grupo forman un *continuo*, en un sentido topológico. A los grupos de esta clase se les llama *grupos continuos*, o grupos de *Lie*.

Los elementos de un grupo continuo pueden representarse, bajo ciertas circunstancias, en términos de  $r$  parámetros  $\alpha_r$  tal que

$$g \equiv g(\alpha_1 \dots \alpha_r). \quad (8)$$

La transformación identidad  $\mathcal{I}$  se representa normalmente por el conjunto *nulo* de valores para los parámetros

$$\mathcal{I} \equiv g(0, \dots, 0). \quad (9)$$

Entonces la variación continua de estos ' $r$ ' parámetros, puede generar completamente al grupo  $G$ .

Podemos dar algunas definiciones acerca de estos grupos continuos.

## (5) Conectividad

Se dice que un grupo es *conexo* si podemos tomar un elemento cualquiera  $g$ , y alcanzar el elemento identidad  $\mathcal{I}$  por una variación continua de los  $r$  parámetros. Es decir si somos capaces de '*conectar*' cualesquiera par de elementos (puntos) en el espacio del grupo por un '*arco*' generado por la variación continua de los parámetros. Claramente el grupo  $SO(2)$  (y en general el grupo  $SO(n)$ ), es conexo.

## (6) Subgrupos Invariantes

Si consideramos un subgrupo  $\mathcal{H}$  del grupo  $\mathcal{G}$  y tomamos un elemento arbitrario  $h \in \mathcal{H}$  y sucede que  $ghg^{-1}$  sigue estando en  $\mathcal{H} \quad \forall g \in \mathcal{G}$ , decimos que  $\mathcal{H}$  es un Subgrupo Invariante de  $\mathcal{G}$ .

## (7) Grupos de Lie

Si denotamos los elementos del grupo por sus parámetros

$$g(\alpha) \equiv g(\alpha_1 \dots \alpha_r). \quad (10)$$

con la identidad representada por

$$g(0) \equiv \mathcal{I}. \quad (11)$$

entonces los postulados que definen al grupo como tal, significan lo siguiente en términos de los parámetros:

$$g(\alpha) \cdot g(\beta) = g(\gamma), \quad (12)$$

implica que

$$\gamma = f(\alpha, \beta). \quad (13)$$

La continuidad de los parámetros  $\gamma$  se asegura si estos son funciones continuamente diferenciables de todos los parámetros  $\alpha, \beta$ . Para la identidad  $g \cdot \mathcal{I} = \mathcal{I} \cdot g$  se tiene que

$$\gamma = f(\gamma, 0) = f(0, \gamma), \quad (14)$$

y finalmente el postulado asociativo

$$g(\alpha) \cdot (g(\beta) \cdot g(\gamma)) \equiv (g(\alpha) \cdot g(\beta)) \cdot g(\gamma), \quad (15)$$

requiere que

$$f'_i(\alpha; f(\beta, \gamma)) = f[f(\alpha, \beta), \gamma] \quad (16)$$

A los grupos que satisfacen estos requerimientos se les llama *Grupos de Lie*.

### (8) Generadores

Consideremos una transformación infinitesimal alrededor del elemento identidad. Para valores suficientemente pequeños de los parámetros podemos hacer una expansión de Taylor para un elemento  $g \in \mathcal{G}$  de la siguiente manera :

$$g(\alpha) = \mathcal{I} + \sum_{k=1}^r \alpha_k \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} + O(\alpha^2). \quad (17)$$

A primer orden podemos poner

$$g(\alpha) = \mathcal{I} + \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k. \quad (18)$$

donde  $X_k = \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha=0}$  se llaman *Generadores* de transformaciones infinitesimales del grupo.

La estructura de un grupo está determinada por las reglas de conmutación de estos generadores :

$$[X_k, X_l] = f_{kl}^m X_m. \quad (19)$$

### (9) Constantes de estructura

Las cantidades  $f_{kl}^m$  se llaman *constantes de estructura del grupo*, y definen determinadas estructuras algebraicas llamadas *Algebras de Lie* mediante las relaciones de conmutación mencionadas arriba. Las constantes de estructura de un grupo de Lie tienen las siguientes propiedades importantes:

- (1) Son antisimétricas en los índices de abajo

$$f_{kl}^m = -f_{lk}^m. \quad (20)$$

(2) Ya que los generadores satisfacen la relación de Jacobi :

$$\{[X_k, X_l], X_m\} + \{[X_l, X_m], X_k\} + \{[X_m, X_k], X_l\} = 0. \quad (21)$$

las constantes de estructura deben satisfacer la siguiente condición

$$f_k^l f_{lm}^p + f_m^l f_{kn}^p + f_{mk}^n f_n^p = 0. \quad (22)$$

### (10) Grupo Simple y Semisimple

Un grupo de Lie, que no contiene subgrupos (propios) invariantes, se llama *Grupo Simple*, y el grupo que no contiene subgrupos invariantes *Abelianos* no triviales, se llama *Grupo Semisimple*.

### (11) Algunos ejemplos

(a) El grupo de rotaciones en dos dimensiones  $SO(2)$  es un grupo de Lie de un solo parámetro. Una rotación infinitesimal alrededor de un eje, que convencionalmente elegimos como el eje 'z', está dada por

$$R(\delta\vartheta) = 1 - i\delta\vartheta J_z \quad (23).$$

donde  $J_z$  es el generador de las rotaciones alrededor del eje 'z', y corresponde a la componente z del momento angular cuántico

$$J_z = -i(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}). \quad (24).$$

(b) El grupo de rotaciones espaciales  $SO(3)$  es un grupo de Lie de tres parámetros. Cada uno de los parámetros está asociado con uno de los generadores de rotaciones alrededor de los ejes x, y, z, y corresponden a las componentes respectivas del momento angular cuántico  $J_x, J_y, J_z$ . Las relaciones de conmutación de estos generadores son

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y. \quad (25)$$

que pueden escribirse en forma condensada como

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (26)$$

identificando los ejes  $x, y, z$  con los índices 1, 2, 3 respectivamente.  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita.

(c) Los operadores cuánticos de posición  $x$  y momento  $p$ , junto con el operador identidad, definen un grupo a través de la regla de cuantización

$$[x, p] = i\hbar. \quad (27)$$

llamado grupo de Heisenberg-Weyl.

### (12) Transformaciones finitas

Una transformación finita puede escribirse fácilmente aplicando transformaciones infinitesimales sucesivamente. El resultado se puede escribir como

$$g_{finita} = e^{-i\vec{v}\cdot\vec{G}} \quad (28)$$

donde  $\vec{G}$  representa al vector formado por los  $r$  generadores del grupo, y  $\vec{v}$  al vector formado por los  $r$  parámetros de la transformación.

### (13) Representaciones

Una representación  $\mathcal{D}(g)$  del elemento  $g$  contenido en el grupo  $\mathcal{G}$ , es una realización matricial de  $g$ , que obedece la misma regla de multiplicación que  $g$ , i.e. la misma regla que define a  $\mathcal{G}$ . Es decir que si  $g, h \in \mathcal{G}$ , y

$$g \cdot h = k. \quad (29)$$

$$\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(k). \quad (30)$$

Un grupo de transformaciones lineales en un espacio vectorial  $R^N$  isomórfico a un grupo dado se llama una representación abstracta del grupo en el espacio de representación  $R^N$ . Si el espacio de representación es  $N$ -dimensional, entonces se puede establecer una

representación matricial del grupo (asociada con las transformaciones lineales) formada por matrices  $N \times N$ .

Decimos que dos representaciones  $\mathcal{D}(g)$  y  $\mathcal{E}(g)$  son *equivalentes*, si existe una matriz constante  $X$  tal que

$$X\mathcal{D}(g)X^{-1} = \mathcal{E}(g). \quad (31)$$

Una representación se denomina *irreducible* (irrep) si no existen subespacios invariantes de  $R^{(N)}$  aparte de la identidad. Una representación se denomina *reducible* si deja un subespacio invariante  $R^{(N_1)}$  de  $R^{(N)}$ . En este caso las matrices de la representación son equivalentes a matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A^{(N_1)} & B \\ 0 & A^{(N_2)} \end{pmatrix} \quad (N = N_1 + N_2). \quad (32)$$

y se dice *completamente reducible* si puede expresarse como una *suma directa* de representaciones irreducibles. En este caso las matrices pueden transformarse a una forma diagonal por bloques.

#### (14) Representación Regular o Adjointa

Se puede construir una representación a partir de las relaciones de conmutación (19) de los generadores del grupo

$$[X_k, X_l] = f_{kl}^m X_m. \quad (33)$$

asociando con cada uno de los generadores  $(X)^m$  una matriz, definida por las constantes de estructura, como

$$(X^m)_{kl} = f_{kl}^m \quad (\text{rep. regular}). \quad (34)$$

En general, las representaciones de un grupo de Lie, o de su álgebra de Lie asociada, puede ser de dimensión finita, infinita, puede ser discreta o continua, unitaria o no-unitaria, completamente reducible etc.

## (15) Operadores Tensoriales

Un *operador tensorial*, es cualquier operador que tiene propiedades de transformación bien definidas bajo la acción de un Grupo. Se transforma del mismo modo a como lo hacen los vectores base del espacio que porta una representación dada del grupo. A continuación analizamos el concepto de *Operador Tensorial*.

Consideremos un grupo simple compacto  $\mathcal{G}$  cuyos elementos están denotados por  $g$ .

Tomemos como espacio base de una representación unitaria  $U_g$  un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , donde existe una métrica definida por un producto escalar. Podemos etiquetar las diferentes representaciones unitarias de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{H}$  escribiendo  $U_g(\Lambda)$ , ó simplemente  $\Lambda$ .

Sea  $\{ | \Lambda \lambda \rangle \}$  una base completa de vectores para la representación  $\Lambda$ , que genera el espacio infinito de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La dimensión de esta base la denotamos por  $[dim \Lambda]$ .

Usando la relación de completéz de la base

$$\sum_{\lambda} | \Lambda \lambda \rangle \langle \Lambda \lambda | = 1. \quad (35)$$

podemos escribir cualquier operador lineal  $R$  asociado con algún elemento  $g \in \mathcal{G}$  como

$$R = \sum_{\lambda' \lambda''} \langle \Lambda \lambda' | R | \Lambda \lambda'' \rangle | \Lambda \lambda' \rangle \langle \Lambda \lambda'' | \quad (36)$$

donde  $\langle \Lambda \lambda' | R | \Lambda \lambda'' \rangle \equiv R_{\lambda' \lambda''}^{\Lambda}$  representan los elementos de matriz del operador  $R$  en la base  $\{ | \Lambda \lambda \rangle \}$ .

El efecto de este operador  $R$  sobre un vector de la base  $| \Lambda \lambda \rangle$  es el de producir una combinación lineal de los vectores base. Esto es

$$R | \Lambda \lambda \rangle = \sum_{\lambda' \lambda''} \langle \Lambda \lambda' | R | \Lambda \lambda'' \rangle | \Lambda \lambda' \rangle \langle \Lambda \lambda'' | \Lambda \lambda \rangle. \quad (37)$$

con

$$\langle \Lambda \lambda'' | \Lambda \lambda \rangle = \delta_{\lambda'' \lambda}. \quad (38)$$

$$R | \Lambda \lambda \rangle = \sum_{\lambda'} \langle \Lambda \lambda' | R | \Lambda \lambda \rangle | \Lambda \lambda' \rangle \quad (39)$$

Un Operador Tensorial  $\mathcal{T}(\Lambda)$  bajo el grupo  $G$  de una representación  $\Lambda$ , esta formado por los  $\{dim\Lambda\}$  operadores linealmente independientes  $\mathcal{T}(\Lambda\lambda)$  que se transforman del mismo modo como lo hacen los vectores base de la representación. Es decir si los operadores  $\mathcal{T}(\Lambda\lambda)$  se transforman como

$$R\mathcal{T}(\Lambda\lambda)R^{-1} = \sum_{\lambda'} \langle \Lambda\lambda' | R | \Lambda\lambda \rangle \mathcal{T}(\Lambda\lambda'). \quad (40)$$

Un operador tensorial  $\mathcal{T}(\Lambda)$  se dice irreducible, reducible o equivalente, si la representación  $\Lambda$  es correspondientemente irreducible, reducible o equivalente.

Escribiendo una transformación infinitesimal de  $G$  como

$$R = 1 + \delta\alpha^\sigma X_\sigma. \quad (41)$$

donde  $\delta\alpha^\sigma$  son los  $r$  parámetros infinitesimales y  $X_\sigma$  son los correspondientes generadores, se deduce que

$$[X_\sigma, \mathcal{T}(\Lambda\lambda)] = \sum_{\lambda'} \langle \Lambda\lambda' | X_\sigma | \Lambda\lambda \rangle \mathcal{T}(\Lambda\lambda') \quad (42)$$

lo que nos muestra, que las matrices asociadas a los generadores  $\sum_{\lambda'} \langle \Lambda\lambda' | X_\sigma | \Lambda\lambda \rangle$  pueden usarse para transformar estados y operadores.



## (16) El Oscilador Armónico

En esta sección revisamos y analizamos el caso del oscilador armónico y los grupos de simetrías asociados con él.

El Hamiltoniano  $H$  de un oscilador armónico isotrópico en unidades normalizadas ( $m = \hbar = \omega = 1$ ) en tres dimensiones es:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2). \quad (43)$$

A partir del postulado de cuantización de Heisenberg, las coordenadas  $q_i$  y los momentos  $p_j$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) satisfacen las relaciones de conmutación

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (44)$$

Hemos visto ya que estos operadores junto con el operador identidad forman una álgebra de Lie y que el grupo asociado se denomina *grupo de Weyl-Heisenberg*.

Conviene ahora introducir los operadores bosónicos de creación y de aniquilación  $\mathbf{b}^\dagger$ , y  $\mathbf{b}$ , respectivamente, definidos por

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r} + i\mathbf{p}), \quad \mathbf{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r} - i\mathbf{p}). \quad (45)$$

los cuales, a partir del postulado de cuantización para  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , satisfacen las relaciones de conmutación

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (46)$$

En términos de estos operadores de creación y aniquilación bosónicos, el Hamiltoniano se puede escribir como

$$H = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{3}{2}. \quad (47)$$

Haciendo uso de las relaciones de conmutación (44) se puede deducir que

$$[H, b_j^\dagger] = b_j^\dagger, \quad [H, b_j] = -b_j. \quad (48)$$

de donde se puede deducir fácilmente que el operador  $b_j^\dagger$  crea un cuanto en la dirección  $j$  y  $b_j$  lo destruye. Usando este resultado, se encuentran fácilmente los eigenvalores de  $H$

$$\mathcal{E} = n + \frac{3}{2}. \quad (49)$$

utilizando los estados normalizados del oscilador armónico definidos por :

$$|n\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle = \prod_{i=1}^3 \frac{b_i^{\dagger n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle. \quad (50)$$

con  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ , y  $|0\rangle$  el estado vacío (estado base), definido por la condición

$$b_i |0\rangle = 0. \quad (51)$$

Los operadores  $b_i^\dagger b_i$  que aparecen en el Hamiltoniano son operadores particulares que conservan el número de cuantos. Son operadores que destruyen un cuanto en el nivel  $i$ , y crean otro allí mismo. Su efecto es el de contar el número de cuantos en el nivel  $i$ .

Podemos llamar a cada operador  $H_i \equiv b_i^\dagger b_i$  como operador de peso del grupo.

El conjunto de operadores  $C_{ij} \equiv b_i^\dagger b_j + \frac{1}{2} \delta_{ij}$ , que conservan el número de cuantos forman una álgebra de Lie que genera el grupo denominado *grupo unitario en tres dimensiones*  $U(3)$ . El término constante que aparece en la definición se introduce con fines posteriores, y no altera la estructura del álgebra:

$$C_{ij} = b_i^\dagger b_j + \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (52)$$

$$[C_{ij}, C_{mn}] = C_{in} \delta_{mj} - C_{mj} \delta_{in} \quad (53)$$

Para un número dado de cuantos  $n$ , tenemos una degeneración de orden  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  ya que  $H$  conserva  $n$  ( $n = n_1 + n_2 + n_3$ ).

Podemos definir de manera equivalente los operadores  $C_{ij}$  mediante la relación

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (b_i^\dagger, b_j) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (54)$$

donde  $\{a, b\} \equiv ab + ba$ .

Ya que el Hamiltoniano del sistema  $H = \sum_i C_{ii}$  conmuta con todos los generadores  $C_{ij}$  (52) es posible encontrar ocho combinaciones linealmente independientes de estos generadores (diferentes de  $H$ ), que describan una álgebra  $\mathcal{A}_2$  asociada con el grupo  $SU(3)$ .

Los tres operadores

$$H'_i = H_i - \frac{H}{3} \quad (55)$$

junto con los  $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ), pueden tomarse como los generadores de este grupo  $SU(3)$ .

(17) Representaciones de  $U(3)$  para el oscilador armónico

Las representaciones irreducibles del grupo  $U(3)$  (o en general de cualquier grupo unitario) pueden etiquetarse con los pesos máximos de los operadores  $H_i$ , i.e.  $\{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\}$ .

Bajo la restricción  $U(3) \rightarrow SU(3)$ , las representaciones

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \equiv \{\lambda_1 + a, \lambda_2 + a, \lambda_3 + a\} \quad (a \text{ entero}). \quad (56)$$

se vuelven equivalentes. Entonces, podemos elegir apropiadamente el valor del parámetro  $a$ , para hacer  $\lambda_3 = 0$ , de lo cual obtenemos dos combinaciones apropiadas de los pesos máximos para etiquetar las irreps de  $SU(3)$  de modo que, si ponemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 - \lambda_2, \\ \mu &= \lambda_2. \end{aligned} \quad (57)$$

siguiendo a Elliott, las irreps de  $SU(3)$  están denotadas por  $(\lambda\mu)$ .

(18) Simetría rotacional del oscilador armónico

El Hamiltoniano del oscilador armónico conmuta con todas las componentes del momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = i\mathbf{b} \times \mathbf{b}^\dagger. \quad (58)$$

y por lo tanto  $H$  es rotacionalmente invariante.

Es fácil ver que a partir de los operadores  $C_{ij}$  podemos construir los operadores  $L_i$  de momento angular que generan el grupo  $SO(3)$  como

$$L_1 = -i(C_{23} - C_{32}), \quad L_2 = -i(C_{31} - C_{13}), \quad L_3 = -i(C_{12} - C_{21}). \quad (59)$$

A su vez podemos escoger  $L_3$  como generador del grupo  $SO(2)$  y entonces establecer la siguiente estructura para el grupo de simetrías del oscilador

$$U(3) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2). \quad (60)$$

Podemos explotar la simetría rotacional del oscilador armónico trabajando en una base de momento angular  $|n, l, m\rangle$ . Los valores de  $l$  asociados con cada representación " $n$ " del oscilador son

$$l = 1, 3, 5, \dots, n \quad \text{para } n \text{ impar}, \quad (61a)$$

$$l = 0, 2, 4, \dots, n \quad \text{para } n \text{ par} \quad (61b)$$

y por tanto, para un  $n$  dado hay un conjunto de  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  estados degenerados  $|nlm\rangle$ .

Las reglas para la descomposición  $SU(3) \rightarrow SO(3)$  según Elliott, establecen que para una representación  $(\lambda\mu)$  de  $SU(3)$  los valores de  $L$  asociados son

$$L = K, K+1, K+2, \dots, K + \max\{\lambda, \mu\} \quad (62a)$$

donde el entero  $K$  es  $\min\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, \text{lo } 0$  con la excepción de que si  $K = 0$ ,

$$L = \max\{\lambda, \mu\}, \max\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, \text{lo } 0. \quad (62b)$$

Se puede anotar que los estados  $|nlm\rangle$  de la representación " $n$ " subtienden la representación  $(n0)$  de  $SU(3)$ .

### (19) Operadores tensoriales para el oscilador armónico

Habiendo introducido la simetría rotacional del oscilador armónico es conveniente introducir los operadores de creación y aniquilación en forma esférica

$$b_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 \pm ib_2), \quad b_0 = b_3. \quad (63a)$$

$$b_{\pm}^{\dagger} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^{\dagger} \pm ib_2^{\dagger}), \quad b_0^{\dagger} = b_3^{\dagger}. \quad (63b)$$

cuyas relaciones de conmutación están dadas por

$$[b_m, b_n^{\dagger}] = (-1)^m \delta_{m, -n}, \quad (m, n = 0, \pm 1). \quad (64)$$

Aún más si definimos el operador "covariante"

$$b^m = (-1)^m b_{-m} \quad (65)$$

se tiene una relación de conmutación similar a la que se tiene para coordenadas cartesianas

$$[b^m, b_n^\dagger] = \delta_{nm} \quad (66)$$

como antes.

Los operadores de creación y aniquilación en forma esférica se transforman bajo  $SU(3)$  como operadores tensoriales. Los operadores  $b$  se transforman según la representación  $(\lambda\mu) = (01)$  mientras que los operadores conjugados se transforman según la representación contragradiente  $(\lambda\mu) = (10)$ , y como hemos dicho que los estados  $|nlm\rangle$  subtienden la representación  $(n0)$  esto significa que los operadores de creación y aniquilación en forma esférica llevan momento angular  $L = 1$ .

$$T(10)_{1\pm 1} = b_{\pm}^\dagger, \quad T(10)_{10} = b_0^\dagger \quad (67a)$$

$$T(01)_{1\pm 1} = b_{\pm}, \quad T(01)_{10} = b_0 \quad (67b)$$

Estos operadores tensoriales básicos pueden usarse para construir otros operadores tensoriales de  $SU(3)$ . Por ejemplo podemos acoplar dos de estos operadores a la representación (11) de  $SU(3)$  denotándolos como

$$\begin{aligned} C(11)_{\lambda\mu} &= (b^\dagger \times b)_\mu^\lambda \\ &\equiv \sum_{\mu_1\mu_2} \langle 1\mu_1 1\mu_2 | \lambda\mu \rangle b_{\mu_1}^\dagger b_{\mu_2} \end{aligned} \quad (68)$$

dónde estamos acoplando a buen momento angular  $(\lambda)$ , por medio de los coeficientes de acoplamiento de Clebsch Gordan  $\langle 1\mu_1 1\mu_2 | \lambda\mu \rangle$ . Estos operadores corresponden a los operadores unitarios de momento angular y cuadrupolar  $L$  y  $Q$  en coordenadas esféricas, que de hecho son los generadores del grupo  $SU(3)$

$$L_0 = C(11)_{10} = b_{-1}^\dagger b_1 - b_0^\dagger b_{-1}$$

$$L_{\pm 1} = C(11)_{1\pm 1} = \mp (b_{\pm 1}^\dagger b_0 - b_0^\dagger b_{\pm 1})$$

$$Q_0 = C(11)_{20} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2b_0^\dagger b_0 + b_{-1}^\dagger b_1 + b_1^\dagger b_{-1})$$

$$Q_{\pm 1} = C(11)_{2\pm 1} = -(b_{\pm 1}^\dagger b_0 + b_0^\dagger b_{\pm 1})$$

$$Q_{\pm 2} = C(11)_{2\pm 2} = -\sqrt{2} b_{\pm 1}^\dagger b_{\pm 1} \quad (69)$$

Con más generalidad, si acoplamos dos representaciones cualesquiera, y utilizando la notación contravariante para facilitar los cálculos que involucran las reglas de conmutación podemos escribir

$$\begin{aligned} C(\lambda_1 \lambda_2)_{\lambda \mu} &= |b_{\lambda_1}^\dagger \times b_{\lambda_2}|_{\lambda \mu} \\ &\equiv \sum_{\mu_1 \mu_2} (-1)^{\mu_2} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 - \mu_2 | \lambda \mu \rangle b_{\lambda_1 \mu_1}^\dagger b_{\lambda_2 \mu_2} \end{aligned} \quad (70)$$

donde hemos usado la notación  $b^{\lambda \mu} = (-1)^\mu b_{\lambda - \mu}$ .

En particular para una representación dada podemos utilizar la siguiente notación para los operadores unitarios no-acoplados:

$$C_{\mu_1 \mu_2} \equiv b_{\lambda \mu_1}^\dagger b_{\lambda \mu_2} \quad (71)$$

cuya álgebra es idéntica a la de los operadores correspondientes en coordenadas cartesianas, con la notación que hemos elegido antes. Es decir

$$[C_{\mu_1 \mu_2}, C_{\mu_3 \mu_4}] = C_{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_3} - C_{\mu_3 \mu_2} \delta_{\mu_1 \mu_4} \quad (72)$$

que es el álgebra usual  $U(n)$  ( $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \pm \lambda, \lambda - 1, \dots, 0, \sigma 1$ ).

Como es de esperar, los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico acoplados a buen momento angular

$$C(11)_{\lambda \mu} \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2} (-1)^{\mu_2} \langle 1 \mu_1 1 - \mu_2 | \lambda \mu \rangle C_{\mu_1 \mu_2} \quad (73)$$

satisfacen el álgebra  $SO(3)$  en coordenadas esféricas, y corresponden, como ya se ha dicho, a los generadores  $L_1, L_2, L_3$ , de rotaciones en tres dimensiones.

$$\begin{aligned} [C_{\lambda \mu}, C_{\lambda' \mu'}] &= \\ &\sum_{\lambda'' \mu''} (-1)^{\mu''} \sqrt{\lambda \lambda' \lambda''} [1 - (-1)^{\lambda + \lambda' + \lambda''}] \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} C_{\lambda'' \mu''} \end{aligned}$$

en donde  $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix}$  es un coeficiente de Clebsh-Gordan, con  $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  es un coeficiente  $6j$ .



(20) El grupo  $Sp(6, R)$ 

El grupo  $SU(3)$  es el grupo mínimo que contiene los estados degenerados del oscilador armónico. Los operadores  $C_{\mu_1 \mu_2} \equiv b_{\mu_1}^\dagger b_{\mu_2}$  (que conservan el número de cuantas), permiten saltar entre los estados degenerados asociados con una representación dada, y por esta razón se puede decir que el grupo  $SU(3)$  es el grupo de degeneración del oscilador armónico. Sin embargo, los operadores  $C_{\mu_1 \mu_2}$  no pueden acoplar diferentes representaciones de  $SU(3)$ . Para poder saltar de una representación a otra se requiere de la introducción de operadores que estén fuera del grupo de degeneración. Podemos extender el álgebra con operadores de creación y de aniquilación de dos cuantas

$$B^{\mu_1 \mu_2} \equiv b_{\mu_1} b_{\mu_2} \quad (75a)$$

$$B_{\mu_1 \mu_2}^\dagger \equiv b_{\mu_1}^\dagger b_{\mu_2}^\dagger \quad (75b)$$

cuyas relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned} [B^{\mu_1 \mu_2}, B_{\mu_3 \mu_4}^\dagger] &= C_{\mu_3}^{\mu_1} \delta_{\mu_4}^{\mu_2} + C_{\mu_4}^{\mu_1} \delta_{\mu_3}^{\mu_2} + C_{\mu_3}^{\mu_2} \delta_{\mu_4}^{\mu_1} + C_{\mu_4}^{\mu_2} \delta_{\mu_3}^{\mu_1} \\ [B^{\mu_1 \mu_2}, C_{\mu_3}^{\mu_4}] &= B^{\mu_1 \mu_4} \delta_{\mu_3}^{\mu_2} + B^{\mu_2 \mu_4} \delta_{\mu_3}^{\mu_1} \\ [B_{\mu_1 \mu_2}^\dagger, C_{\mu_3}^{\mu_4}] &= -B_{\mu_1 \mu_3}^\dagger \delta_{\mu_2}^{\mu_4} - B_{\mu_2 \mu_3}^\dagger \delta_{\mu_1}^{\mu_4} \end{aligned} \quad (76)$$

donde ahora  $C_{\mu_1 \mu_2} \equiv b_{\mu_1}^\dagger b_{\mu_2} + \frac{1}{2} \delta_{\mu_1 \mu_2}$ . El álgebra de Lie generada por estos operadores esta asociada con el grupo real no-compacto  $Sp(6, R)$  que contiene como subgrupo al grupo  $SU(3)$

$$Sp(6, R) \supset SU(3) \quad (77)$$

Estos nuevos operadores tienen la propiedad de subir (o bajar) "n" por 0 y 2 unidades. Los eigenvalores asociados con estos operadores estan acotados por abajo, pero no por arriba. Por lo tanto, los estados del oscilador armónico subtienden dos representaciones unitarias infinitas de  $Sp(6, R)$ ; una que contiene todos los estados con "n" par, y otra que contiene todos los estados con "n" impar.

Por supuesto podemos acoplar estos nuevos operadores a buen momento angular para aprovechar la simetría rotacional del oscilador armónico

$$B_{\lambda \mu} = \sum_{\mu_1 \mu_2} (-1)^{\mu_1 + \mu_2} (1 - \mu_1 | 1 - \mu_2 | \lambda \mu) B^{\mu_1 \mu_2}, \quad (78a)$$

$$B_{\lambda\mu}^\dagger = \sum_{\mu_1\mu_2} (1\mu_1 1\mu_2 | \lambda\mu) B_{\mu_1\mu_2}^\dagger, \quad \mu_1 + \mu_2 = \mu. \quad (78b)$$

El álgebra  $Sp(6, R)$  en esta forma esférica toma la siguiente forma

$$[C_{\lambda\mu}, C_{\lambda'\mu'}] = \sum_{\lambda''\mu''} (-1)^{\mu''} \sqrt{\lambda\lambda'\lambda''} [1 - (-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''}] \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} C_{\lambda''\mu''} \quad (79a)$$

(que corresponde al álgebra  $U(3)$ )

$$[B_{\lambda\mu}, C_{\lambda'\mu'}] = 2 \sum_{\lambda''\mu''} (-1)^{\lambda+\lambda'+\mu''} \sqrt{\lambda\lambda'\lambda''} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} B_{\lambda''\mu''} \quad (79b)$$

$$[B_{\lambda\mu}^\dagger, C_{\lambda'\mu'}] = -2 \sum_{\lambda''\mu''} (-1)^{\lambda'+\mu''} \sqrt{\lambda\lambda'\lambda''} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} B_{\lambda''\mu''}^\dagger \quad (79c)$$

$$[B_{\lambda\mu}, B_{\lambda'\mu'}^\dagger] = 4 \sum_{\lambda''\mu''} (-1)^{\mu''} \sqrt{\lambda\lambda'\lambda''} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ -\mu & -\mu' & -\mu'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} C_{\lambda''\mu''} \quad (79c)$$

(21) Un grupo Dinámico para el Oscilador

El grupo  $Sp(6, R)$  (76) contiene todos los estados del oscilador armónico en dos representaciones que cubren, cada una, los estados con "n" par, y los estados con "n" impar. Sin embargo no se puede dentro de este grupo escoger una representación única que cubra todos los estados. Esta situación se debe a que en el álgebra no existen operadores que suban o bajen "n" por  $\pm 1$  cuantas. Evidentemente los operadores que realizan esta tarea son los mismos operadores de creación y aniquilación  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}^\dagger$  (63).

El conjunto de los seis operadores  $b$  y  $b^\dagger$  junto con el operador *unidad* forman una álgebra soluble asociada con el grupo de Heisenberg-Weyl que comunmente se designa como  $W(3)$ .

Si estamos buscando un grupo que pueda dar cuenta del espectro del oscilador armónico, la degeneración de sus niveles, y que además contenga un conjunto de operadores que determinen las probabilidades de transición entre estados, entonces tendremos una descripción completa de las propiedades dinámicas del sistema físico. Tal grupo se conoce como el *grupo dinámico* del sistema. Si consideramos los generadores del grupo de Heisenberg  $W(3)$  junto con los de  $Sp(6, \mathbb{R})$  podemos definir el grupo dinámico del oscilador como

$$\mathcal{G}_D = W(3) \wedge Sp(6, \mathbb{R}) \quad (80)$$

aunque ésta no es la única posibilidad que tenemos para escoger un grupo diámico asociado con el oscilador, es sin duda la más conveniente.

## (22) Estados Coherentes

Los *estados coherentes* fueron creados en el contexto de la teoría del oscilador armónico. Existen tres tipos de definición para los estados coherentes. La primera definición es una definición geométrica que parte de la generalización del operador desplazamiento para desplazamientos complejos arbitrarios.

Sea  $\psi(x)$  una función de onda que describe algún sistema físico en una dimensión. Si efectuamos un desplazamiento por una distancia "c", y usamos el desarrollo de Taylor, podemos escribir tal desplazamiento como

$$\begin{aligned} \psi(x-c) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) \\ &= \exp\left(-c \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x). \end{aligned} \quad (81)$$

Si ahora reemplazamos el operador  $\frac{\partial}{\partial x}$  por su equivalente en términos de los operadores de creación y aniquilación (45) del oscilador armónico

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger - b). \quad (82)$$

se obtiene

$$\psi(x-c) = c \frac{c}{\sqrt{2}} (b^\dagger - b) \psi(x). \quad (83)$$

Definiendo a  $\frac{c}{\sqrt{2}}$  como una nueva cantidad "z" que pueda tomar, incluso valores complejos se hace la generalización del operador desplazamiento. Si actuamos con este *desplazamiento generalizado* sobre el vacío del oscilador armónico llegamos a la primera definición para un estado coherente:

$$e^{(z^* b^\dagger - z b)} | 0 \rangle \equiv | z \rangle. \quad (84)$$

Para obtener la segunda definición de un estado coherente se utiliza la fórmula

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (85)$$

válida cuando  $[A, [A, B]] = 0$ , y  $[B, [B, A]] = 0$ , para obtener

$$\begin{aligned} | z \rangle &= e^{z^* b^\dagger} e^{-\frac{1}{2} z z^*} | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2} z z^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle. \end{aligned} \quad (86)$$

Si además se prescinde del término  $e^{-\frac{1}{2} z z^*}$ , que es un número-c, tenemos la segunda definición de estado coherente:

$$| z \rangle = e^{z^* b^\dagger} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle. \quad (87)$$

donde se puede ver claramente que esta forma particular del estado coherente  $| z \rangle$ , genera todos los estados del oscilador armónico.

### (23) Producto escalar

Hay que notar aquí que el producto escalar para los estados coherentes (que se deduce del correspondiente producto escalar para los estados del oscilador armónico  $| n \rangle$ ):

$$\langle z | z \rangle = e^{z^*z} \quad (88)$$

no nos lleva a funciones- $\delta$ . Los estados coherentes forman un conjunto *sobrecompleto*. En particular, podemos expresar el operador *unidad* como

$$1 = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} |z\rangle\langle z|. \quad (89)$$

donde la integración se realiza sobre todo el plano- $z$ .

Los vectores de estado  $|\psi\rangle$  tienen una realización en términos de estados coherentes utilizando la forma para el operador *unidad*, descrito arriba

$$\langle z | \psi \rangle = \psi(z) \quad (90)$$

que conduce al producto escalar

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-zz^*} \psi_1^*(z) \psi_2(z). \quad (91)$$

A un espacio con esta medida se le denomina *espacio de Bargman*, y a la propia medida  $e^{-zz^*}$ , medida de Bargman.

No sólo los estados sino también los operadores se pueden convertir a su realización en el espacio- $z$ :

La tercera definición para los estados coherentes se puede establecer mediante la condición

$$b | z \rangle = z^* | z \rangle \quad (92)$$

Esta propiedad se sigue inmediatamente para los estados coherentes de la segunda definición, y aunque para el oscilador armónico las tres definiciones resultan ser equivalentes, esta equivalencia se rompe en casi todas las generalizaciones para los estados coherentes. A esta última definición se la llama "definición correcta del estado coherente".

## Capítulo 3

---

## Cromodinámica Cuántica

### (1) Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica fue descubierta en los años setenta a partir del Modelo de Quarks formulado por Gell-Mann y Zweig en 1964, y la formulación dinámica de una Teoría de Campo para la propiedad de los Quarks denominada Color basada en una Teoría de Norma que toma como grupo de simetrías al grupo de Color  $SU(3)$ .

A raíz del éxito del Modelo Standard formulado por Weinberg, Salam y Glashow, y el descubrimiento de la propiedad de libertad asintótica de las teorías de norma no abelianas, la Cromodinámica Cuántica surgió como el mejor candidato para explicar la interacción fundamental entre las partículas que experimentan la llamada Interacción Fuerte, también llamados Hadrones: los Mesones y los Bariones. La hipótesis de Gell-man consistía en suponer que los Hadrones estaban contruidos a partir de Partículas más fundamentales, llamadas Quarks, en un esquema de simetría gobernada por el grupo  $SU(3)$  y donde los Hadrones se podían interpretar como partículas compuestas de dos y tres Quarks según fueran Mesones o Bariones. De este modo los Bariones surgían agrupados de manera natural en multipletes simétricos, reduciendo con ello la diversidad de partículas, a la combinación de sólo tres partículas fundamentales de spin  $1/2$  llamadas Quarks, sin embargo este modelo adolecía de varias dificultades: la partícula  $\Omega^-$  parecía violar el principio de exclusión de Pauli, pues estaba formada por tres Quarks idénticos en el mismo estado cuántico. Este escollo fue salvado mediante la introducción de una nueva propiedad con tres grados de libertad a la que se le denominó Color (Greenberg, 1964; Han y Nambu, 1965), dando como resultado una nueva simetría asociada con el grupo de Color  $SU(3)$ ; las evidencias experimentales no mostraban por ningún lado las hipotéticas partículas, etc.

El éxito de las Teorías de Campo basadas en la hipótesis de Invariancia Local de Norma dio origen a la Cromodinámica Cuántica. Una teoría de Norma surge de demandar la invariancia del Lagrangiano ante transformaciones locales de norma generadas por el grupo de simetrías que posee la interacción en cuestión. En el caso de la Cromodinámica este grupo es el grupo de Color  $SU(3)_{color}$ . La principal dificultad era el confinamiento del Color pues en la naturaleza no aparecen partículas coloreadas; en particular, esta hipótesis era equivalente a la aseveración del confinamiento de los Quarks,

razón por la cual estos no han sido vistos libremente, hasta que se descubrió que una teoría de Norma basada en un grupo de simetría no-abeliano, posee la propiedad de libertad asintótica y confinamiento infrarrojo, según la cual la constante de acoplamiento varía de forma creciente en razón logarítmica con la distancia con la energía de modo que ésto explicaba, cualitativamente la hipótesis de confinamiento. De esta manera, la Cromodinámica Cuántica se ha convertido en mejor candidato para describir las interacciones fuertes. La propiedad de libertad asintótica ha hecho posible el estudio de diversos procesos a altas energías en la región donde la constante de acoplamiento es pequeña mediante el uso de técnicas perturbativas explicando fenómenos de dispersión como los eventos de 'Jets' (chorros de Hadrones), etc. Sin embargo la estructura de los Hadrones es una consecuencia de fenómenos a baja energía, para los cuales se requiere una descripción mediante técnicas no-perturbativas. En particular el estudio del estado base de la teoría (vacío) es necesario para la explicación de la constitución hadrónica. Las aproximaciones al Hamiltoniano efectivo de la Teoría basadas en la propiedad misma de invariancia de norma parecen ser un buen camino para el estudio de la Cromodinámica Cuántica mediante las Técnicas comunes de la teoría de grupos. Es precisamente en esta dirección en la que guiaremos nuestro estudio, desarrollando primeramente las técnicas matemáticas necesarias y su aplicación a modelos de juguete para explorar las posibilidades y propiedades de las mismas.

## (2) Antecedentes

A finales de la década de los cincuentas, y gracias a la creación de aceleradores de partículas a altas energías se habían encontrado una gran cantidad de partículas "elementales" con diversas propiedades físicas como carga eléctrica, masa, spin, paridad, etc. . . . Después del descubrimiento del electrón y de las partículas que constituyen el núcleo atómico (protones y neutrones) la gente retomó el pensamiento atomista de los griegos y pensaba que todos los cuerpos existentes en la naturaleza estaban formados a partir de algunas cuantas partículas elementales, reduciendo con ésto la gran diversidad de elementos y sustancias a la combinación ordenada de estas partículas elementales. Poco después, en la década de los cuarentas, fué descubierto el Muón en estudios realizados en la radiación proveniente del espacio conocida como rayos cósmicos. La existencia de una nueva partícula había sido predicha en cierto modo por I. Yukawa en 1932 al formular una teoría para las interacciones nucleares de corto alcance. Yukawa cambió conceptualmente la teoría del campo, al suponer que la interacción debía estar mediada por una partícula masiva, cuya masa era el origen del corto alcance, y debía ser del orden de  $150 \frac{MeV}{c}$ . (i.e. una partícula de peso medio entre el electrón y los nucleones) que era intercambiada entre los protones y neutrones del núcleo atómico, y a la que denominó cuanto-U, y que ahora se llama Mesón. Sin embargo, el Muón descubierto no era exactamente la partícula predicha por Yukawa. También fué descubierto el Positrón predicho por Dirac; y así sucesivamente se fueron descubriendo



cada vez más partículas elementales con la creación de aceleradores de partículas que intentaban escudriñar las entrañas del núcleo atómico y de los nucleones. Para 1960 la lista de partículas elementales llegaba a incluir más de cien partículas.

### (3) Concepto de Simetría de Isospín

En 1932 W. Heisenberg propuso una teoría en donde consideraba que los protones y neutrones del núcleo atómico no eran sino manifestaciones distintas de una misma partícula distinguibles únicamente por la carga eléctrica. Debido a que el protón y el neutrón tienen casi la misma masa y a que las energías de amarre que los mantiene ligados en el núcleo son casi iguales, Heisenberg hizo la suposición de que los nucleones poseían una simetría interna que estaba ligeramente rota, y gracias a la cual el neutrón y el protón aparecían como dos partículas diferentes, cuando en realidad eran la manifestación física de los dos posibles estados cuánticos de dicha simetría. De forma análoga a como se presentan los estados cuánticos de una partícula con spin  $s = \frac{1}{2}$ , Heisenberg supuso que existía una propiedad equivalente a la que se le denomina *Isospín* que distinguía los estados de Protón y de Neutrón. En esta interpretación un nucleón con proyección de Isospín  $= +\frac{1}{2}$  corresponde a carga eléctrica  $+1$  (Protón) y un nucleón con proyección  $-\frac{1}{2}$  corresponde a carga eléctrica cero (Neutrón). De aquí se deduce fácilmente la relación entre la carga eléctrica y la proyección del Isospín :

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Dentro de esta simetría de Isospín se pudieron clasificar diferentes partículas como los Piones  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$  pertenecientes a la representación de triplete ( $I = 1$ ) etc. La simetría involucrada corresponde a la simetría de rotaciones en el espacio interno de Isospín basada en el grupo  $SU(2)$ . Este fue el primer paso hacia una sistematización que permitía incorporar el número tan grande de partículas en un esquema que las tomaba en cuenta como manifestaciones distintas de una simetría interna de las *partículas fundamentales*.

Para ver brevemente como surge la idea de esta simetría de Isospín, baste con decir que una rotación, (que denotamos como  $I_+$ ) sobre un estado de neutrón debe transformarlo en protón, y viceversa; si aplicamos la rotación invertida ( $I_-$ ) sobre el protón, debe transformarse en neutrón. i.e.

$$I_+ |n\rangle = |p\rangle. \quad (2a)$$

$$I_- |p\rangle = |n\rangle. \quad (2b)$$

También debe existir un operador de "peso" cuyos estados propios sean los estados físicos de carga (protón y neutrón). A tal operador le llamamos  $I_0$

$$I_0 |p\rangle = + |p\rangle$$

$$I_0 |n\rangle = - |n\rangle. \quad (2c)$$

Si usamos una representación matricial, y el protón y el neutrón están dados por los vectores columna

$$|p\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

se encuentra que los operadores  $I_{\pm}, I_0$  satisfacen el álgebra  $SU(2)$  semejante al álgebra involucrada con el spin. La representación matricial de estos operadores está dada en términos de las matrices

$$\begin{aligned} I_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ I_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ I_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

que son las matrices de Pauli en la representación esférica.

#### (4) Introducción del concepto de extrañeza

Con el descubrimiento de las nuevas partículas elementales se empezaron a buscar regularidades que pudieran observarse en las propiedades físicas de éstas. De este modo se les asignaron distintos números cuánticos como el número bariónico, el número leptónico, etc., que bajo cierto tipo de interacciones se conservaban. Por ejemplo el hecho de que no haya sido observado el decaimiento del protón en un positrón mediante la reacción :

$$p \neq e^+ + \gamma; \quad (5)$$

significa que viola una regla de conservación y por lo tanto dicha reacción esta excluida. La cantidad conservada en este caso es el número *Bariónico*. Mientras que al protón se le asigna un número bariónico  $B = 1$ , el electrón y el fotón tienen  $B = 0$ . La conservación del número bariónico viola por lo tanto la reacción mencionada más arriba.

En 1954 se descubrieron las partículas extrañas cuando se observó que la reacción

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0. \quad (6)$$

presentaba una sección eficaz tan grande que se tenía que suponer que el decaimiento era de origen fuerte. Sin embargo cuando las partículas  $\Lambda$  y  $K^0$  decaen, sus vidas medias son muy grandes ( $\sim 10^{-10}$ s) de modo que estos decaimientos se deben a interacciones débiles, aún cuando las partículas que intervienen en el proceso son hadrones:

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-; \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-. \quad (7)$$

Los hadrones tenían que decaer en otros hadrones vía interacción fuerte a menos que estuviera involucrada la violación de una cantidad conservada. De esta manera se introdujo un nuevo número cuántico  $S$  llamado *Extrañeza*. Asignando un valor de extrañeza  $S = 0$  para el pión y el protón, y un valor  $S = -1$  a la partícula *lambda* y al kaón, e inventando la regla: *las interacciones fuertes conservan S, las interacciones débiles la cambian* podemos explicar por qué ocurre la primera reacción por interacción fuerte (se conserva  $S$ ) mientras que las reacciones subsecuentes ocurren vía interacción débil (cambian  $S$ ).

Un patrón similar ocurre a energías más altas. En 1975 se observó por primera vez que los neutrinos en una cámara de burbujas reaccionaban para dar

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Lambda + \pi^+ + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-. \quad (8)$$

Esta no puede ser una simple interacción débil que involucre leptones, ya que se observa que todos ellos obedecen la regla  $\Delta S = \Delta Q$ , donde  $\Delta S$  y  $\Delta Q$  son los cambios en extrañeza y carga de los hadrones; la reacción de arriba da  $\Delta S = -\Delta Q$ . Se concluyó entonces que lo que estaba involucrado era una serie de reacciones:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + p &\rightarrow \mu^- + \Sigma_c^{++} \\ \Sigma_c^{++} &\rightarrow \Lambda_c^+ + \pi^+ \\ \Lambda_c^+ &\rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \end{aligned}$$

El decaimiento de  $\Sigma_c^{++}$  en  $\Lambda_c^+$  es un decaimiento fuerte, pero el decaimiento de  $\Lambda_c^+$  en  $\Lambda$  y pión es débil, y necesita la introducción de un nuevo número cuántico denominado 'Encanto'  $C$ ;  $\Lambda_c^+$  tiene  $C = 1, S = 0$ , y  $\Lambda$  tiene  $C = 0, S = -1$ , de modo que el decaimiento tiene  $\Delta C = \Delta S = -1$ .  $\Sigma_c^{++}$  también tiene  $C = 1$ , y las interacciones fuertes conservan  $C$ .

La extensión exitosa del concepto de Isospín de Heisenberg a los mesones e hiperones, condujo a la búsqueda de una simetría mayor subyacente que incorporara el número tan grande de partículas elementales con interacción fuerte identificadas hasta principios de los años sesenta. El panorama dentro de las partículas elementales a principios de esta década era el siguiente: ocho bariones estables ante decaimientos fuertes, con spin  $\frac{1}{2}$  y paridad positiva  $p, n, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda^0, \Xi^0, \Xi^-$ , los mesones estables  $\pi^\pm, \pi^0, \kappa^\pm, \bar{\kappa}^0, \kappa^0$ , con spin cero y paridad negativa.

Siguiendo la idea de Fermi y Yang (1949) de que los piones eran estados ligados de un nucleón y un antinucleón, Sakata propuso un modelo que extendía esta idea a los kaones incorporando una partícula extraña como el  $\Lambda^0$ . Sakata proponía por lo tanto como partículas básicas al triplete formado por el protón, el neutrón y la partícula  $\Lambda^0$  con spin  $\frac{1}{2}$ , a partir de las cuales se podían construir las demás. Si se postula que, idealmente, las partículas del triplete básico tienen la misma masa, entonces se encuentra que las interacciones entre ellas son invariantes ante transformaciones lineales de ellas entre sí. De lo anterior se deduce que las transformaciones corresponden a una simetría que corresponde a la simetría  $SU(3)$  en el caso cuántico.

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix}. \quad (9)$$

donde  $\mathcal{A}$  es una matriz que tiene que ser unitaria para preservar la hermiticidad del triplete

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = 1. \quad (10)$$

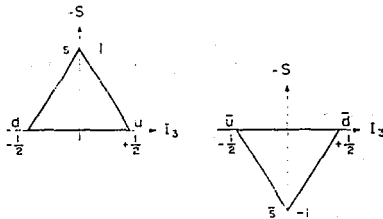
El conjunto de matrices  $3 \times 3$  que satisfacen esta condición forman el grupo llamado  $SU(3)$ .

## (5) El Modelo Naïve de Quarks

*Three quarks for Muster Mark.*

James Joyce

En 1964 M.Gell-Mann, Y.Ne'eman, e independientemente G. Zweig introdujeron el concepto de *Quark* con el fin de resumir y sistematizar la gran cantidad de partículas elementales con interacción fuerte. Con la introducción de los nuevos números cuánticos se dieron cuenta de que detrás de las regularidades observadas en las propiedades físicas de tales partículas se hallaba una simetría subyacente que las acomodaba por supermultipletes. La simetría encontrada resultó ser la simetría del grupo  $SU(3)$ . Gell-Mann utilizó la misma idea de Sakata para postular que existía un triplete básico de partículas de spin  $\frac{1}{2}$  con cargas eléctricas fraccionarias a partir de las cuales se construyen todos los hadrones conocidos (mesones de spin entero, y bariones de spin semientero). Estas partículas hipotéticas, a las que llamó *Quarks*, debían corresponder a la representación fundamental del grupo  $SU(3)$  etiquetada por las propiedades de isospin e hipercarga (o extrañeza). A cada uno de los quarks fundamentales les puso una etiqueta para diferenciarlos. Así el triplete básico consiste de los quarks  $u, d, s$  que significan *up*, *down* y *strange*.

Figura (3.1) Representación Fundamental de  $SU(3)$ 

En este esquema los bariones están constituidos por tres quarks, mientras que los mesones están constituidos por un quark y un antiquark (de la representación fundamental conjugada). En el contexto de la teoría de grupos, esto significa que al construir un estado bariónico a partir de tres partículas en la representación fundamental, las

representaciones posibles, que corresponden a los diferentes multipletes de bariones, constan de un singlete, dos octetes, y un decuplete :

$$3 \times 3 \times 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (11)$$

y para los mesones, un singlete y un octete :

$$3 \times 3 = 1 \oplus 8. \quad (12)$$

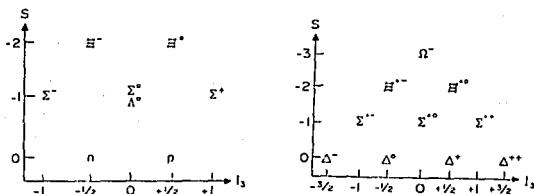


Figura (3.2) Supermultipletes de SU(3)

La teoría de Gell-Mann pudo describir correctamente los supermultipletes de partículas observados y también pudo predecir con éxito la existencia de la partícula  $\Omega^-$  en el decuplete de bariones.

### (6) Necesidad del Color

En este modelo naïve de quarks existe, sin embargo, una dificultad al construir los estados más bajos de Bariones, que tiene que ver con el principio de exclusión de Pauli : dado que los quarks son partículas fermiónicas, deben obedecer, como se sabe, el principio de exclusión; no obstante las propiedades de la partícula  $\Delta^{++}$  (que tiene spin 3/2 en su estado más bajo) se tiene que su composición en términos de quarks está dada por

$$|\Delta^{++}, J_3 = 3/2\rangle = |u \uparrow u \uparrow u \uparrow\rangle, \quad (13)$$

donde las flechas representan los espines alineados, lo cual viola evidentemente el principio de Pauli. No hay ninguna razón pura suponer que justamente en las partículas hadrónicas se violara este principio. Para salvar al modelo de esta paradoja, se introdujo una nueva variable oculta con tres grados de libertad, por esta razón llamada *Color*. A cada uno de los tres grados de libertad se le asignó un "color" primario: rojo, azul y amarillo (Gell-Mann, 1972).

Como no observamos partículas con "color" directamente, se debe suponer que los fenómenos hadrónicos deben ser invariantes ante transformaciones de *color*. La simetría que se elige en este caso corresponde nuevamente a la simetría  $SU(3)$  y debe ser una simetría exacta. Un estado de un solo quark, por ejemplo, se asigna a la representación fundamental  $3$  de  $SU(3)$ . Los estados bariónicos deben ser singuletes de color en  $SU(3)$ . De esto se deduce que las únicas formas de obtener singuletes sea por descomposición del producto de tres tripletes

$$3 \times 3 \times 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (14)$$

y por el producto de un triplete y su conjugado (que representa a las antipartículas)

$$3 \times \bar{3} = 1 \oplus 8. \quad (15)$$

Se puede ver que éstas son las formas más simples donde aparecen singuletes, lo cual está completamente de acuerdo con el modelo *naive* de quarks de Gell-Mann. Esta es, por otra parte, una forma alternativa de decir que el color está confinado.

Existen dos procesos bien conocidos que presentan evidencias indirectas para los grados de libertad de *color*: el decaimiento  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ , y la aniquilación electrón-positrón  $e^+e^-$ . En esos procesos, el color aparece como un factor extra en las razones de decaimiento.

i) decaimiento  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

Este decaimiento se puede derivar de la contribución de los diagramas de Feynmann de más bajo orden mostrados en la siguiente figura

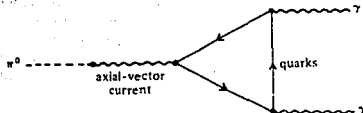


Figura (3.3) Diagrama de Feynmann relevante para el proceso de decaimiento  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

La razón de decaimiento obtenida con este cálculo resulta ser

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = N_c^2 (Q_u^2 - Q_d^2)^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 F_\pi^2} \quad (16)$$

donde  $N_c$  es el número de grados de libertad de color,  $Q_u$ , y  $Q_d$  las cargas de los quarks  $u$  y  $d$  en unidades de la carga del protón ( $e$ ),  $m_\pi$  la masa del pión neutro,  $\alpha = e^2/4\pi$  y  $F_\pi (= 91 \text{ Mev})$  la constante de decaimiento del pión, para decaimientos  $\pi \rightarrow \mu\nu$ .

En la ecuación (16) el factor  $N_c^2$  aparece ya que cada grado de libertad de color que interviene en la línea de quarks de la figura anterior contribuye a la amplitud de decaimiento para  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . Substituyendo  $N_c = 3$  y el valor de las cargas para los quarks, se obtiene

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 7.6eV, \quad (17)$$

que está de acuerdo con el valor experimental observado

$$\Gamma(\text{experimento}) = 7.48 \pm 0.33eV. \quad (18)$$

mientras que el valor teórico calculado para  $N_c = 1$  (sin grados de libertad de color)  $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 0.84eV$  está lejos del valor experimental.

## ii) Aniquilación $e^+e^-$

Cuando se considera la aniquilación de alta energía de electrones y positrones en hadrones

$$e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}. \quad (19)$$



dentro del modelo de quarks en la región asintótica descrita en términos de *partones*, se puede suponer a los quarks como si estuvieran esencialmente "libres" a escalas de distancia muy pequeñas. Entonces el proceso (19) se produce mediante la producción de pares quark-antiquark inducida por un fotón virtual, seguido de la formación de hadrones a partir de los quarks producidos en forma de *jets*.

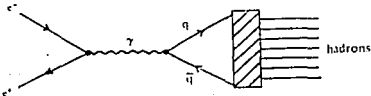


Figura (3.4) Diagrama de producción de hadrones por colisión  $e^+e^-$

A altas energías, la interacción entre quarks puede despreciarse, y la sección total de aniquilación  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})$  está dada por

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (20)$$

donde  $s$  es la energía total al cuadrado del centro de masa del sistema  $e^+e^-$  y  $N_f$  el número de sabores de quarks que pueden contribuir al proceso, y está restringido por la condición  $2m_{N_f} < \sqrt{s}$ , y  $N_c$  es el número de colores. En la reacción (20), todos los efectos de masa de los quarks pueden ser despreciados comparados con  $\sqrt{s}$ , y tenemos nuevamente el factor explícito  $N_c$  que viene del hecho de que cada grado de libertad de color en la línea de quarks de la figura anterior.

En vez de usar directamente la relación (20) se acostumbra definir la razón de decaimiento :

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{4\pi\alpha^2/3s} = N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (21)$$

y compararla con los datos del experimento. Para la región de energías  $\sqrt{s} < 3GeV$ , sólo los quarks  $u$  y  $d$  y  $s$  contribuyen, ya que el umbral de producción de quarks ' $c$ ' se encuentra por arriba de este intervalo de energías, y por lo tanto, para  $N_c = 3$  tenemos

$$R \doteq 2, \quad (\text{quarks } u, d, s)$$

y para la región  $4 < \sqrt{s} < 9 \text{ GeV}$  donde sí contribuye el quark  $c$

$$R = \frac{10}{3}, \quad (\text{quarks } u, d, s, c)$$

Los datos experimentales están de acuerdo con la hipótesis de color ( $N_c = 3$ ).

A partir de esta hipótesis del color, surgió la Cromodinámica Cuántica, donde se conjugaron por una parte la simetría interna de color, y las modernas teorías del campo cuánticas. Es decir, las teorías de norma. En las siguientes secciones analizaremos el origen de esta clase de teorías y la formulación de la teoría dinámica para los grados de libertad de color.

#### (7) Interacciones Fundamentales

En la naturaleza aparecen cuatro tipos de fuerzas bien identificadas entre las partículas llamadas *elementales*. A saber, tales fuerzas son: la fuerza *electromagnética*, las fuerzas nucleares *débil* y *fuerte*, y la interacción gravitacional. De las cuatro, la que mejor ha sido entendida es la interacción electromagnética. Al nivel microscópico (es decir cuántico), la teoría que describe los procesos electromagnéticos microscópicos entre las partículas elementales es la electrodinámica cuántica. Su origen procede de lo que llamamos invariancia ante transformaciones locales de *norma* generadas por la carga eléctrica.

Las interacciones entre las partículas elementales se entienden mediante la interacción de un campo cuantizado (bosones mediadores) que "comunican" la interacción entre dichas partículas. Esta idea fué propuesta primeramente por I. Yukawa en 1934 al tratar de describir la interacción nuclear de corto alcance. La idea de Yukawa era muy simple: si la interacción es de corto alcance, el principio de incertidumbre de Heisenberg  $\Delta r \Delta \varepsilon > \hbar$  permite la creación de una partícula masiva  $\Delta(mc^2) \sim \delta \varepsilon$  durante un periodo de tiempo  $\Delta t$ . Durante este intervalo de tiempo, la partícula puede "viajar" una cierta distancia característica de la interacción nuclear. El intercambio de esta partícula mediadora entre dos partículas es responsable de la interacción de corto alcance. Con ésto, Yukawa predijo la existencia del *mesón*. La electrodinámica cuántica se puede entender del mismo modo, si nos damos cuenta de que debido a que esta interacción es de largo alcance, la partícula mediadora no tiene masa. Por supuesto que ésto está de completo acuerdo con la cuantización del campo electromagnético en donde aparece el *fotón* como partícula mediadora de la interacción electromagnética.

## (8) Invariancia de Norma. El Electromagnetismo.

El concepto de *invariancia de norma* surge en la electrodinámica cuántica como propiedad fundamental de las funciones de onda: la propiedad de ser cambiadas por una transformación de fase inducidas por una transformación de norma en los potenciales electromagnéticos.

Empezamos revisando brevemente el concepto de invariancia de norma en la electrodinámica clásica.

La interacción electromagnética está descrita por las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 & (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ (c) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c} Q_e \mathbf{j} & (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= Q_e \varrho \end{aligned} \quad (22)$$

en unidades naturales. Estas ecuaciones describen la dinámica del *campo electromagnético* y la fuente del mismo por medio de una corriente de partículas cargadas ( $\mathbf{j}$ ). En notación relativista, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se escriben como

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} Q_e j_\nu, \quad (23)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (24)$$

es el *tensor del campo electromagnético* de Maxwell definido en términos del *cuadricampo electromagnético*  $A^\mu$ , y de la *cuadri-corriente*  $j^\nu$  definidos por

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (24a)$$

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad (24b)$$

relacionados con los campos eléctrico y magnético mediante las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (25a)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (25b)$$

Las ecuaciones de Maxwell describen un *campo* de largo alcance. Clásicamente, estas ecuaciones permanecen invariantes ante transformaciones de norma de los potenciales, que resultan de la libertad que se tiene para elegir convenientemente el nivel de referencia de la energía. Tales transformaciones *de norma*, tienen la forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi(\mathbf{x}). \quad (26)$$

donde  $\chi(\mathbf{x})$  es un "campo" escalar arbitrario, pero diferenciable. En otras palabras, podemos elegir una forma conveniente de este campo  $\chi$  para resolver distintos problemas. Después de todo, las cantidades físicas medibles no son las energías absolutas sino sus diferencias.

La inclusión de una interacción electromagnética con partículas cargadas se hace mediante la prescripción del acoplamiento mínimo, que consiste en reemplazar el cuadrimomento  $p^\mu$  por

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu. \quad (27)$$

Con este reemplazo, el Hamiltoniano clásico adquiere la forma

$$H = c \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + m^2 c^2} + e\phi. \quad (28)$$

Este Hamiltoniano reproduce la fuerza de Lorentz, que experimentan las partículas cargadas en un campo electromagnético. Si comparamos este Hamiltoniano con el Hamiltoniano de una partícula libre

$$H = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (29)$$

se ve inmediatamente que la sustitución del momento, según el principio de acoplamiento mínimo, reproduce aquel de una partícula en interacción con el campo electromagnético, el cual posee la propiedad de transformación de norma (26). Tal propiedad del campo electromagnético no parece ser muy profunda, simplemente representa la libertad que se tiene para elegir un sistema de referencia para los potenciales. La invariancia de norma, en cambio, juega un papel esencial en la descripción cuántica del electromagnetismo.

## (9) La invariancia de norma como principio dinámico

En el caso cuántico uno puede utilizar también el principio de acoplamiento mínimo en el Lagrangiano (o en el Hamiltoniano) de una partícula libre para introducir la interacción electromagnética. La versión cuántica del acoplamiento minimal se obtiene al cuantizar las variables dinámicas  $x_\mu \rightarrow \hat{x}_\mu$  y  $p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu \rightarrow -i\partial_\mu$  y adquiere la forma

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - i\frac{e}{c}A_\mu. \quad (30)$$

en donde a  $\mathcal{D}_\mu$  se le llama derivada covariante.

Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger que se obtiene para un electrón en presencia de un campo electromagnético es

$$\left(-\frac{1}{2m}(\nabla - i\frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi\right)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (31)$$

La ecuación (31) sin embargo no es invariante ante transformaciones de norma del campo electromagnético de la forma (26). Para resolver este problema, se tiene que introducir al mismo tiempo que se realiza tal transformación de norma, una *transformación de fase local* (i.e. dependiente de la posición en el espacio-tiempo) en la función de onda  $\psi$  para compensar los términos extra que aparecen en la transformación, de la siguiente manera

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-ie\Lambda(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x}). \quad (32)$$

que corresponden a transformaciones locales de simetría del grupo  $U(1)$ . Como se sabe, éste es un principio fundamental de la mecánica cuántica: las funciones de onda son invariantes ante transformaciones de fase.

Ahora bien, se le puede dar la vuelta al argumento y decir que el hecho de que la teoría sea invariante ante transformaciones de fase de la forma (32), implica que cuando tales transformaciones son locales, debe "aparecer" un campo que compense los cambios introducidos por la localidad de la transformación, con la característica de que tal campo debe poseer la propiedad de invariancia de norma (26). En este sentido podemos decir que la invariancia de una teoría de campo de materia ante transformaciones de fase locales, o de *norma* como suele decirse, es un principio dinámico que describe el campo de interacción con el cual interactúan las partículas, con el fin de que exista tal simetría. Tal campo, es el campo electromagnético en el caso del campo de electrones, descrito por la Lagrangiana invariante de *norma*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (33)$$

A la posibilidad de introducir la dinámica requiriendo que cierta simetría se mantenga aún localmente se le llama comúnmente *Principio de Norma*.

En las teorías del campo uno comienza con una Lagrangiana, a partir de la cual se deducen las ecuaciones de movimiento por medio del principio de *mínima acción*. Por ejemplo, la Lagrangiana para una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi. \quad (34)$$

donde  $\hbar = c = 1$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ , y  $\gamma^\mu$  son las matrices  $4 \times 4$  de Dirac.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\nu} = 0. \quad (35)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \psi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = 0. \quad (36)$$

son las ecuaciones de movimiento para el campo electromagnético  $A^\mu$ , y para el campo de electrones  $\psi$

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (37)$$

y

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi = 0. \quad (38)$$

en donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac, y el operador Laplaciano está definido por  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ . La corriente electromagnética es  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

Por otra parte, el teorema de Nöther establece que cuando una teoría, descrita por una Lagrangiana, posea una invariancia, debe existir una cantidad conservada asociada con dicha simetría. En el caso de la Lagrangiana invariante ante transformaciones locales de norma  $U(1)$  del campo de electrones, la cantidad física que se conserva es la corriente electromagnética

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (39)$$

## (10) Teorías de Yang-Mills

En 1954 Yang y Mills generalizaron el concepto de invariancia ante transformaciones locales de norma, utilizando el concepto de invariancia de *isospín* en la fuerza nuclear, introducida en 1932 por Heisenberg. La idea original consistió en remplazar las transformaciones locales de fase  $U(1)$  que dan lugar al electromagnetismo, y a la conservación de la carga eléctrica, como se dijo en la sección anterior, por transformaciones del grupo de simetría del isospín  $SU(2)$ . Esto es, que la teoría fuera invariante ante transformaciones de fase del tipo

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi' \equiv \exp(-ig\partial_a(\mathbf{x})\tau^a) \psi(\mathbf{x}). \quad (40)$$

donde las matrices de Pauli ( $\tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ) corresponden a la representación matricial de los generadores del grupo  $SU(2)$  y  $g$  juega el papel de constante de acoplamiento.

Esta sustitución demanda inmediatamente la introducción de tres campos de norma  $\mathbf{W}^\mu$  que deben introducirse en la teoría vía acoplamiento minimal. En este caso particular la generalización de la derivada covariante (30) que hace que la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  sea localmente invariante ante transformaciones de  $SU(2)$  está dada por

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu + ig\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu(\mathbf{x})/2. \quad (41)$$

Esta derivada *covariante* es en realidad una matriz que actúa sobre las componentes de un campo  $\phi$ . La propiedad que se le requiere a esta derivada covariante, es que  $\mathcal{D}^\mu \phi$  debe transformarse bajo transformaciones locales de  $SU(2)$  exactamente a como se transforma  $\partial^\mu \phi$  bajo transformaciones *globales*. Este requerimiento determina la ley de transformación de los campos de norma  $W^{a\mu}$ .

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \quad (42)$$

con

$$U(\mathbf{x}) = \exp(-i\chi(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}/2), \quad (43)$$

una transformación unitaria de  $SU(2)$  ( $U^\dagger = U^{-1}$ ). Si se introduce la notación compacta

$$\mathcal{W}^\mu(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu(\mathbf{x}). \quad (44)$$

la transformación de norma de los campos  $\phi$  es

$$\mathcal{W}^\mu(\mathbf{x}) = -iU(\mathbf{x}) [\partial^\mu U^\dagger(\mathbf{x})] + U(\mathbf{x})\mathcal{W}^\mu(\mathbf{x})U^\dagger(\mathbf{x}). \quad (45)$$

No obstante, la teoría de Yang y Mills exige que los campos de norma no tengan masa, ya que un término de masa en la Lagrangiana rompe automáticamente la invariancia de norma, lo que está en contradicción con el hecho de que las interacciones nucleares que ellos trataban de describir son de corto alcance, y por lo tanto que los cuantos mediadores (campos de norma) debían tener masa. Más tarde se ingeniaron procedimientos que permitían definir una teoría invariante de norma sin masa, que en ciertas circunstancias (rompimiento espontáneo de la simetría), los bosones mediadores adquirirían masa.

La diferencia principal entre la teoría de Yang-Mills y el electromagnetismo, consiste en que mientras que en el primer caso la simetría involucrada  $U(1)$  es una simetría Abeliانا y los campos de norma (fotones) no llevan carga eléctrica, los cuantos de norma de la simetría no-abeliana  $SU(2)$  sí llevan carga (de isospín) y por lo tanto generan autointeracciones que hacen que la teoría sea no-lineal. El efecto físico de la no-abelianidad de la simetría causa una renormalización de la carga de isospín en este caso. (Esto lo veremos con más detalle en la sección sobre libertad asintótica).

#### (11) Una teoría de Yang-Mills para las interacciones fuertes

##### *Cromodinámica Cuántica*

Si se quiere formular una teoría dinámica basada en la simetría de color  $SU_{color}(3)$  de los quarks, se puede apelar al principio de norma discutido en la sección anterior. Es decir, formular una teoría de Yang-Mills para las interacciones fuertes entre quarks.

La idea original de Yang y Mills al desarrollar una teoría no-abeliana de norma fue aplicarla a las interacciones fuertes entre los hadrones. El principal problema teórico para la aceptación de su teoría era el problema de la masa de los mediadores. Como hemos dicho, un término de masa en el Lagrangiano rompe la invariancia de norma, pero como sabemos ahora, la simetría 'oculta' de norma puede resolver este dilema en el modelo de Weinberg, Salam y Glashow. Pero también es cierto que esas ideas no se pueden aplicar directamente a los hadrones por la siguiente razón. En general, los campos de norma se deben acoplar a todas las componentes de la corriente asociada con el grupo global de simetría. Si esta simetría es del tipo convencional de simetrías 'manifestas' los campos de norma no deben tener masa.

Actualmente se acepta que los hadrones son objetos compuestos, hechos de quarks y antiquarks. Exactamente como la simple interacción electromagnética de norma describe correctamente las fuerzas entre los constituyentes de los átomos, mientras que la fuerza interatómica es complicada y, en principio, es derivable de la fuerza entre los constituyentes, uno puede esperar que la interacción entre quarks sea simple, y que la inter-



acción inter-hadrónica sea una manifestación secundaria de ella. La generalización de la interacción electromagnética se hace entonces al nivel de los constituyentes hadrónicos, i.e. al nivel de los quarks, descrita por un campo de norma.

La *Cromodinámica Cuántica* (CDC) es una teoría de norma local para la simetría exacta del color de los quarks. Los quarks pertenecen a la representación fundamental de dimensión tres del grupo  $SU_{color}(3)$ , y podemos escribir los campos de quarks como

$$\psi_i = \begin{pmatrix} q_i^R \\ q_i^B \\ q_i^G \end{pmatrix}. \quad (46)$$

con  $i$  corriendo sobre el índice de sabor ( $u, d, s, c, \dots$ ), y  $R, B, G$  los índices de color (Red, Blue, Green).

Una transformación de norma global bajo  $SU_{color}(3)$  está dada por

$$\psi_i \rightarrow \psi_i' = \exp(-i\vartheta \cdot \lambda) \psi_i. \quad (47)$$

donde los "ángulos"  $\vartheta_\alpha$  parametrizan la transformación general del grupo  $SU(3)$ , y las ocho matrices  $\lambda^\alpha$  ( $3 \times 3$ ) son las matrices de Gell-Mann, que generalizan las matrices  $\tau$  de Pauli de  $SU(2)$ . Estas matrices obedecen el álgebra

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma. \quad (48)$$

donde las  $f_{\alpha\beta\gamma}$  son las constantes de estructura de  $SU(3)$  (véase el capítulo sobre tópicos de teoría de grupos). Si uno exige que la invariancia (47) sea local,  $\vartheta \rightarrow \vartheta(\mathbf{x})$ , entonces se genera una teoría dinámica cuya Lagrangiana se puede escribir según la prescripción del acoplamiento minimal, reemplazando en el Lagrangiano de quarks libres (ecuación de Dirac) la derivada  $\partial_\mu$  por la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$ :

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_s \lambda^\alpha A_\mu^\alpha. \quad (49)$$

La Lagrangiana para la Cromodinámica Cuántica es entonces:

$$\mathcal{L} = \sum_{i= \text{sabor}} \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m_i - g_s \lambda^\alpha A_\mu^\alpha) \psi_i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (50)$$

donde se ha usado la notación  $A^\alpha \equiv \gamma^\mu A_\mu^\alpha$ .

Ahora hay ocho campos de norma  $A^\alpha$  (uno por cada generador del grupo) transformándose como la representación regular de  $SU(3)$ . A los cuantos asociados con estos campos de norma se les llama *Gluones*. El tensor del campo gluónico  $F_{\mu\nu}^a$  está dado por

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu A_\nu{}^\alpha - \partial_\nu A_\mu{}^\alpha + g_s f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu{}^\beta A_\nu{}^\gamma, \quad (51)$$

Estos cuantos son partículas bosónicas de spin 1 con carga de color. Aún el término puramente gluónico  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^\alpha F^{\mu\nu\alpha}$  contiene autointeracciones entre tales gluones, a diferencia de los cuantos del campo electromagnético (fotones), que no llevan carga eléctrica comportándose esencialmente como campos libres.

Hay que aclarar sin embargo que (50) no es la Lagrangiana completa de la Cromodinámica Cuántica. Esta es esencialmente la versión "clásica" de campos. Cuando se discute la cuantización de los campos de norma, se tiene que introducir adecuadamente en la Lagrangiana términos que fijen completamente la norma, pues esta propiedad hace precisamente que el problema sea un problema con constricciones, es decir que en la teoría se tienen grados de libertad no-independientes que hay que remover de alguna manera adecuada. En el capítulo sobre la formulación Hamiltoniana de la CDC se discutirá más este punto.

#### (12) Libertad Asintótica.

Para obtener resultados físicos en una teoría cuántica de campos, se tiene que implementar un programa de *renormalización* que nos dé resultados finitos. Esta prescripción aísla y remueve consistentemente todos los infinitos que aparecen en los cálculos perturbativos y los expresa en términos de las cantidades físicas medibles.

La base física de la "renormalización" se puede ver claramente en el ejemplo sencillo de partículas cargadas en un medio polarizable.

La energía potencial  $V(r)$  de dos cargas de prueba estáticas  $q_1$  y  $q_2$  es, en el caso eléctrico

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r}, \quad (52)$$

donde  $r$  es la distancia entre las dos cargas y  $\epsilon$  es la constante dieléctrica que caracteriza la respuesta del medio a los campos eléctricos (en el vacío  $\epsilon = 1$ ). Generalmente la polarizabilidad del medio causa un "apantallamiento" de la intensidad de los campos y por tanto de la interacción entre las cargas, es decir que

$$\epsilon > 1 \quad \text{apantallamiento.} \quad (53)$$

Por otro lado se puede considerar también el hipotético caso en que la constante dieléctrica produjera el efecto contrario. Es decir un efecto de "anti-apantallamiento", lo que significa que

$$\epsilon < 1 \quad \text{anti-apantallamiento.} \quad (54)$$

El vacío de una teoría cuántica de campos es un objeto muy peculiar que se comporta en muchos aspectos como un medio polarizable. Este efecto se debe principalmente a las fluctuaciones cuánticas que dan lugar a la creación y destrucción de pares de partículas virtuales alrededor de la "carga" en forma de una nube. Si dos cargas se acercan mucho una a la otra, eventualmente pueden penetrar en la nube de pares virtuales y "sentir" el efecto de apantallamiento o anti-apantallamiento que hemos señalado. Esto significa que en realidad la constante dieléctrica  $\epsilon$  es una función de la distancia y por lo tanto el potencial (52) adquiere la forma

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon(r)r}$$

donde se puede ver claramente que la intensidad efectiva de la interacción, representada por la carga depende efectivamente de la distancia como

$$q_1^2(r) = \frac{q_1^2}{\epsilon(r)}. \quad (55)$$

El punto importante aquí es que el vacío debe ser un objeto invariante de Lorentz, de manera que existe una relación entre la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética:

$$\epsilon \mu = 1 \quad (c = 1). \quad (56)$$

Esto significa que para el caso común en que existe apantallamiento ( $\epsilon > 1$ ) la permeabilidad magnética es  $\mu < 1$ ; mientras que para el caso en que se tenga anti-apantallamiento ( $\epsilon < 1$ ), la permeabilidad es  $\mu > 1$ . Ahora bien la permeabilidad magnética  $\mu$  se escribe usualmente en términos de la susceptibilidad magnética  $\chi$  como

$$\mu = 1 + 4\pi \chi. \quad (56)$$

que entra en la expresión de la densidad de energía en presencia de un campo magnético  $\mathbf{H}$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} 4\pi \chi \mathbf{H}^2. \quad (57)$$

Si el vacío esta formado principalmente por pares de partículas virtuales, que en caso de cuantos cargados con spin forman dipolos magnéticos, los que tienden a alinearse entre sí con el campo magnético conduciendo al sistema a energías negativas. Es decir que entonces

$$\chi > 0, \quad (\mu > 1). \quad (57b)$$

y el medio se llama *paramagnético*. Este medio, por lo tanto, presenta el efecto de "anti-apantallamiento" mencionado arriba.

Hemos visto que aún la parte puramente gluónica de la Lagrangiana de CDC presenta ya interacciones debido a que los gluones portan carga de color. Además los gluones tienen spin 1. Entonces el vacío cromodinámico debe presentar el efecto de anti-apantallamiento. La contribución de las fluctuaciones cuánticas es tal que conforme  $r$  decrece, la intensidad del campo de color efectiva se vuelve cada vez más pequeña. La teoría se acerca asintóticamente a una teoría libre, y es calculable mediante perturbaciones en este límite.

La Cromodinámica Cuántica se convirtió en el mejor candidato para describir las interacciones fuertes entre quarks cuando la propiedad de *libertad asintótica* fué descubierta (Gross, Wilzeck y Politzer, 1973). Esta propiedad se puede entender entonces como un comportamiento específico de la renormalización de la carga de color. Usando técnicas perturbativas, y tomando en cuenta 'efectos de dos loops', la carga  $g_s$  a una escala de momento  $k$  resulta

$$\frac{8\pi^2}{g_s^2(k)} = b \ln \frac{k}{\Lambda} + \frac{b'}{b} \ln \ln \frac{k}{\Lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(\frac{k}{\Lambda})}\right). \quad (58)$$

con  $b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f$ ,  $b' = \frac{17}{3}N_c^2 - \frac{13}{3}N_cN_f + \frac{1}{2}\frac{N_f}{N_c}$  donde  $N_f, N_c$  son el número de grados de libertad de sabor y de color respectivamente. La constante  $\Lambda$  que aparece en (58) interviene como un parámetro que indica en que régimen es válida la teoría de perturbaciones, y se calcula por comparación con los resultados obtenidos de los experimentos. De hecho ésta es precisamente la justificación del modelo de *partones* propuesto por R.Feynmann en 1969 según la cual la dispersión inelástica profunda de electrones por protones, implica que los constituyentes del nucleón parecen casi partículas puntuales libres.

A bajas energías, sin embargo, la constante de acoplamiento tiende a crecer tanto, que no es posible realizar cálculos perturbativos en este régimen, y se tienen que implementar métodos no-perturbativos para describir la fenomenología de bajas energías como la espectroscopía hadrónica, el confinamiento del color, el rompimiento de la simetría quiral, el efecto EMC (Electron Muon Collaboration) etc...

## Capítulo 4

---

## Formulación Hamiltoniana

### (1) Introducción

El método de Monte-Carlo en las teorías de norma formuladas en una malla, es actualmente el método más exitoso para calcular, a partir *únicamente* de la Cromodinámica Cuántica, las propiedades de los hadrones. Actualmente se tienen resultados numéricos que muestran ya ciertas evidencias sobre confinamiento en teorías de norma  $SU(2)$  y  $SU(3)$  (Creutz, 1980), rompimiento de la simetría *quiral* en CDC (Hamber y Parisi, 1981; Marinari *et al.* 1981) además de algunos cálculos importantes de las masas hadrónicas (Hamber y Parisi, 1981; Marinari *et al.* 1981). Sin embargo, en vista de la complejidad numérica de este método, y la dificultad que se tiene para interpretar correctamente los resultados en términos físicos, se han intentado otras formulaciones alternativas que nos pueden proporcionar un panorama físico más o menos claro sobre la estructura de los Hadrones. Una gran ventaja es que se tienen ya resultados de los cálculos en la malla con los cuales se pueden probar otras teorías. El método alternativo más promisorio con el que podemos tratar el problema del espectro hadrónico, parece ser el tratamiento del Hamiltoniano de la teoría de campos mediante el uso de técnicas no-perturbativas, por ejemplo con los métodos de muchos cuerpos, como los que se usan en la física atómica y nuclear. En esta dirección se han hecho varios intentos: estructura del espectro hadrónico en aproximación de un nivel (Pottinger y Warner, 1982), energía del vacío en aproximación de un nivel (P.O.Hess y D.Schütte, 1991), espectro de una teoría de Yang-Mills incluyendo un gran número de modos (Cutkosky, 1983) tratamiento perturbativo de los estados más altos (Lüscher y Münster, 1984) etc... Si el método resultó exitoso se podrá elucidar la estructura de los hadrones, especialmente en el sentido de que las funciones de onda hadrónicas sean accesibles.

Antes de entrar en detalles, tenemos que hacer algunas consideraciones relacionadas con la formulación Hamiltoniana.

Normalmente en teoría de campos, uno comienza con una integral de acción *relativista*, definida por:

$$S = \int \mathcal{L} dt,$$

donde el integrando  $\mathcal{L}$  es la Lagrangiana, que es función de las "coordenadas" y la "velocidades". Todo el trabajo de pasar de la formulación Lagrangiana a la formulación Hamiltoniana, involucra una variable temporal particular!

Desde el punto de vista relativista, ésto quiere decir, que estamos eligiendo un observador particular, y refiriendo nuestro formalismo, al tiempo de este observador, sin embargo, podemos estar seguros que la teoría es relativista, aún cuando la forma de las ecuaciones resultantes no sean manifiestamente relativistas (P.Dirac, 1964).

## (2) Invariancia de norma

Cualquier teoría cuántica de campos, relacionada con una Lagrangiana invariante de Poincaré, define una representación formal, unitaria y reducible del grupo de Poincaré. En principio, la descomposición de esta representación debe conducir a estados ligados (partículas elementales) y los estados de dispersión, resolviendo el problema de eigenvalores del Hamiltoniano, que es un generador (generador de translaciones temporales) del grupo de Poincaré. Sin embargo algunos de los generadores de este grupo son "patológicos", y se tiene que encontrar un esquema de renormalización adecuado para que la teoría esté bien definida. Si uno quiere utilizar métodos completamente no-perturbativos para trabajar con una teoría cuántica de campos, se tiene que inventar un procedimiento conveniente de "renormalización". Uno de esos procedimientos posibles consiste en una regularización de los campos (para  $t = 0$ ) dentro de una expansión finita en modos normales, y la introducción de una constante de acoplamiento "deslizante" (running coupling constant) con el fin de compensar las divergencias que se obtienen en el límite en que la energía va a infinito, es decir cuando se consideran todos los modos normales posibles. En el caso de la Cromodinámica Cuántica, se tiene que probar esta consistencia en el límite continuo y además se debe recuperar, de alguna manera, la invariancia ante transformaciones del grupo de Poincaré, que se rompe por la regularización. Para una teoría de norma, como es el caso de la CDC, la regularización debe definirse de manera consistente con la invariancia de norma.

La invariancia de norma, en el formalismo Hamiltoniano, consiste en demandar que las funcionales de onda en el espacio de Hilbert satisfagan la ley de "Gauss", que no es sino una forma diferente de decir que las funcionales del espacio de Hilbert físico toman el mismo valor cuando son evaluadas para "diferentes" campos de norma relacionados unos entre otros, por una transformación de norma. Es decir que las funcionales que subtienden el espacio de Hilbert físico  $\Psi(A)$  satisfacen

$$\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{A}') \quad \text{Ley de Gauss} \quad (1)$$

donde los campos de norma  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}'$  están relacionados por una transformación de norma

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = U(\mathbf{A} - i\nabla)U^\dagger. \quad (2)$$

(El nombre de "ley de Gauss" viene de lo siguiente: Si aplicamos una transformación infinitesimal  $\hat{U} \in SU(N)$  a las funcionales que satisfacen la ec (1) se tiene

$$(1 + \mathcal{G}^a)\psi(\mathbf{A}) = \psi(\mathbf{A}') = \psi(\mathbf{A}),$$

ya que  $\psi(\mathbf{A})$  es un escalar de  $SU(N)$ .

Para que se cumpla la identidad anterior, se debe tener que la acción del generador  $\mathcal{G}^a \in SU(N)$  sobre las funcionales  $\psi$  sea cero, i.e.

$$\mathcal{G}^a \psi(\mathbf{A}) = 0$$

En particular,  $\mathcal{G}^a = \mathcal{D}_k \pi_k^a$  es un generador (v. ec 2.18), que corresponde, en el caso de la electrodinámica, a

$$\mathcal{D}_k \pi_k^a \psi(\mathbf{A}) = \partial_k \pi_k^a \psi(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \vec{E} \psi(\mathbf{A}) = 0$$

que es la ley de Gauss como, se le conoce en electrodinámica).

La estructura del espacio de Hilbert de muchos cuerpos, que resulta de los diferentes métodos de regularización, es muy distinta para unos y otros. Por ejemplo en el caso en que se usan desarrollos finitos en modos normales como procedimiento de regularización, el espacio de Hilbert que emerge en el problema es el espacio de Bargman estándar de muchos cuerpos. La construcción del Hamiltoniano "regularizado", en cualquier caso, no es única.

### (3) Fijación de la norma

Existen básicamente dos formas diferentes de construir funcionales que satisfagan la ley de Gauss: una que viene de la geometría diferencial, y otra usando transformaciones de coordenadas. Nosotros vamos a describir el último enfoque.



Este método alternativo para satisfacer la ley de Gauss (1) se obtiene introduciendo un conjunto adecuado de variables en el espacio funcional de los campos  $\mathbf{A}$  en analogía a como se eligen coordenadas esféricas cuando se construyen estados con simetría rotacional. Uno relaciona los campos de norma  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  en términos de representantes adecuados  $F(\mathbf{x})$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \leftrightarrow (U(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}))$$

donde el campo  $F(\mathbf{x})$  se construye a partir de una base completa evaluada en el álgebra de Lie ( $SU(N)$ ), y tiene que obedecer la condición de que para cualquier campo  $\mathbf{A}$  existe un único campo  $F$  y una transformación  $U(\mathbf{x}) \in SU(N)$  tal que

$$\mathbf{A} = U(\mathbf{F} - i\nabla)U^{-1} \quad (3)$$

Así  $\mathbf{A}$  está caracterizada por un punto fijo  $F$  en la órbita del campo  $\mathbf{A}$ <sup>1</sup>

La ley de Gauss (1) para  $\Psi(U, F)$  es justamente la condición de que  $\Psi$  sea independiente de los "ángulos"  $U(\mathbf{x})$  que inducen la transformación de norma, es decir, que  $\Psi$  depende únicamente del "representante"  $F(\mathbf{x})$

$$\Psi = \Psi(F)$$

El "potencial" de norma se define completamente por una condición que fija la norma. Por ejemplo las condiciones que definen las normas de Coulomb y de Schwinger son

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{Norma de Coulomb} \quad (4a)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{Norma de Schwinger} \quad (4b)$$

Para construir explícitamente el "representante"  $F(\mathbf{x})$  hacemos lo siguiente:

Necesitamos una base ortonormal real para el campo vectorial en que se define la parte espacial (transversal) de los campos de norma,  $\mathbf{f}_\alpha : R^3 \rightarrow R^3$  con el producto escalar

$$\langle \mathbf{f}_\alpha | \mathbf{f}_\beta \rangle = \int d^3x \mathbf{f}_\alpha^* \mathbf{f}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

y una base para la representación en el álgebra de Lie,  $\{\lambda_\alpha\}$  tal que

<sup>1</sup> Una órbita está formada por todos los campos de norma equivalentes entre sí que se obtienen unos de otros por una transformación de norma

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = \delta_{ab}. \quad (6)$$

Esta base forma una base para el espacio producto tensorial  $R^3 \rightarrow R^3 \times \text{Lie SU}(N)$ , y sus elementos se escriben de la siguiente manera

$$F_{\alpha,a} = f_{\alpha} \lambda_a \quad F_{\alpha,a} : R^3 \rightarrow R^3 \times \text{Lie SU}(N) \quad (7)$$

con

$$(F_{\alpha} \lambda_a | F_{\beta} \lambda_b) = \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) \int d^3x f_{\alpha}^* f_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \quad (8)$$

Para tomar en cuenta los grados de libertad "longitudinales" debemos elegir una base escalar completa  $\{g_{\sigma,a} : R^3 \rightarrow R \times \text{Lie SU}(N)\}$  (ortogonal a la base transversal), con la cual podemos escribir

$$g_{\sigma,a} = \hat{O} g_{\sigma,a} \quad (9)$$

con

$$\hat{O} = \begin{cases} x & \text{Schwinger} \\ \nabla & \text{Coulomb} \end{cases}$$

con el producto escalar

$$(g_{\sigma,a} | g_{\tau,b}) = \delta_{\sigma\tau} \delta_{ab} \quad (10)$$

Escrito en términos de esta base, el representante de los campos de norma  $F$  que denotaremos de ahora en adelante como  $A$ , es

$$A = \sum_{\alpha,a,\sigma,b} \{f_{\alpha,a} q_{\alpha,a} + \hat{O} g_{\sigma,b} \bar{q}_{\sigma,b}\} = F_T + F_L \quad (11)$$

donde se tiene que  $\hat{O} \cdot F_T = 0$  (condición de norma), y las "coordenadas"  $q_{\alpha,a}$  y  $\bar{q}_{\sigma,b}$  son las coordenadas en el espacio de Hilbert  $R^3 \rightarrow R^3 \times \text{Lie SU}(N)$  para los grados de libertad transversales y longitudinales respectivamente<sup>2</sup>.

La condición que fija la norma completamente, es, por lo tanto, equivalente a una transformación de coordenadas

<sup>2</sup> Un ejemplo de tales "coordenadas" son las operadores de creación y aniquilación usuales del espacio de Bargman

$$(q_{\alpha,a}, \bar{q}_{\sigma,b}) \rightarrow (Q_{\alpha,a}, \bar{Q}_{\sigma,b}). \quad (12)$$

eligiendo nuestro "representante" de los campos de norma (denotado por  $\tilde{\mathbf{A}}$ ), de manera que no dependa de los grados de libertad longitudinales, lo cual se consigue mediante la condición

$$\mathbf{A}(q_{\alpha,a}, \bar{q}_{\sigma,b}) = \sum_{\alpha, \sigma, b} \{f_{\alpha,a} g_{\alpha,a} + \bar{O} g_{\sigma,b} \bar{q}_{\sigma,b}\} = U_Q (\tilde{\mathbf{A}}(Q_{\alpha,a}) - i\nabla) U_Q^{-1} \quad (13)$$

con la transformación de norma ( $g_{\sigma a} = g_{\sigma} \lambda_a$ )

$$U_Q = \exp[i\bar{Q}_{\sigma a} g_{\sigma a}]. \quad (14a)$$

La ley de Gauss significa ahora que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Q}} \Psi(Q, \bar{Q}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(Q, \bar{Q}) = \Psi(Q) \quad (14b)$$

y por lo tanto podemos escribir

$$\tilde{\mathbf{A}}(Q_{\alpha,a}) = \sum_{\alpha,a} f_{\alpha,a} Q_{\alpha,a} \quad (15)$$

lo cual significa que todas las derivaciones subsiguientes del Hamiltoniano se pueden hacer en un marco de referencia especial, definido por la condición de norma (4), donde  $\bar{Q} = 0$ , teniendo cuidado en forma en que se define la cuantización canónica cuando se utilizan coordenadas "curvilíneas".

#### (4) Transformación de coordenadas. Horizonte de Gribov

Una vez elegido un representante  $\tilde{\mathbf{A}}_Q$ , para cualquier campo de norma  $\mathbf{A}$ , que se encuentre en la órbita de  $\tilde{\mathbf{A}}_Q$ , existe una transformación de norma  $U$  tal que

$$\mathbf{A} = U(\tilde{\mathbf{A}}_Q - i\nabla)U^{-1}. \quad (16)$$

La unicidad del representante  $\tilde{\mathbf{A}}_Q$  se garantiza si la ecuación

$$\tilde{A}_Q = U(\tilde{A}_{Q'} - i\nabla)U^{-1} \quad (17)$$

para dos sistemas de coordenadas  $Q, Q'$ , tiene la solución única

$$Q = Q' \quad U = \text{const.}$$

y tal que  $U$  conmuta con  $SU(N)$ .

El conjunto  $\{\tilde{A}_Q\}$  ( $Q \in I$  conjunto de índices elegidos de manera apropiada), es un conjunto de "representantes" para todos los campos de norma con la relación de equivalencia (2). Después de cambiar las variables se tiene que

$$A = (U, Q)$$

La cuestión que surge ahora es, cuándo el conjunto completo  $R^N$  es el conjunto correcto de índices "I" para las variables  $Q$  de manera que los campos  $\tilde{A}_Q$  obedezcan la condición (17). Gribov (Gribov, 1978) ha demostrado que éste, en general, no es el caso para teorías de norma no-abelianas y en ciertas normas, que  $Q$  se debe restringir a un subdominio finito y convexo de  $R^N$  acotado por un horizonte característico (horizonte de Gribov). Por ejemplo en la norma de Coulomb la cantidad importante que caracteriza a  $I$  y al horizonte de Gribov, es el "Laplaciano covariante"  $\tilde{\Delta}(Q)$  definido sobre funciones Lie-valoradas  $\chi(x)$

$$\tilde{\Delta}\chi = -\partial_j \mathcal{D}_j(\tilde{A}_Q)\chi = -\Delta\chi - i\nabla[\tilde{A}_Q, \chi] \quad (18)$$

Este Laplaciano surge por ejemplo en la norma de Coulomb a la hora de elegir un sistema de coordenadas en el espacio de Hilbert, ya que la cuantización canónica de los campos no es la misma para diferentes coordenadas como se explica en la siguiente sección. El Laplaciano covariante está formado por dos partes, una de las cuales corresponde al Laplaciano común y corriente (que se encuentra en coordenadas cartesianas) y la otra es una nueva contribución que proviene de la interacción de las cargas de color y que usualmente se denomina término de Coulomb.

En la construcción del Hamiltoniano en la norma de Coulomb aparece de manera natural el operador inverso del Laplaciano covariante, en donde se puede mostrar que para cualquier  $Q \neq 0$  existe un valor  $\lambda \in R$  finito tal que el problema de eigenvalores

$$\Delta(\lambda Q)\chi = \alpha\chi \quad (19)$$

tiene eigenvalor cero. Entonces en este caso existe una singularidad. El horizonte de Gribov está dado entonces por el conjunto convexo de  $Q$ 's tales que  $\tilde{\Delta}\chi = 0$  tenga solución (con las condiciones de frontera correctas) y que  $\tilde{\Delta}$  no tiene otro estado ligado. Gribov ha demostrado que en ambos lados de este horizonte, uno puede encontrar

$Q$ ,  $Q'$  tales que (17) se cumpla. Solo el interior del horizonte describe, por lo tanto, un conjunto independiente de representantes (órbitas). Esto es, que el conjunto de índices  $I$  está definido por

$$I = \{Q \in R^N \mid \bar{\Delta}(\lambda Q)\chi = 0 \text{ tiene solución sólo para } \lambda > 1\} \quad (20)$$

#### (5) Cuantización Canónica de los Campos de Norma

Primeramente especificamos la notación que usaremos para los campos de norma de Yang-Mills cuya Lagrangiana es invariante ante transformaciones de norma del grupo  $SU(N)$ , ( $N \geq 2$ ). Denotamos los potenciales vectoriales de norma de Yang-Mills por

$$A_a = A^\mu(\mathbf{x})\lambda_a \quad \mathbf{x} = (t, \vec{x}) \quad (21)$$

donde  $a = 1, 2, \dots, (N^2 - 1)$  es el índice de "color" de las matrices  $\lambda_a$ ,  $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = \delta_{ab}$ , y  $\mu = 0, 1, 2, 3$  corresponde al índice de Lorentz para denotar la parte espacio-temporal de los cuadvectores.

El campo de norma de Yang-Mills está descrito en términos del tensor del campo  $F_a^{\mu\nu}(\mathbf{x})$  por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(\mathbf{x}) F_{\mu\nu a}(\mathbf{x}) \quad (22a)$$

$$F_a^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (22b)$$

donde las constantes  $f_{abc}$  son las constantes de estructura del grupo de color  $SU(N)$ , y  $g$  es la constante de acoplamiento no-renormalizada.

La acción clásica se escribe entonces como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} F_a^{\mu\nu}(\mathbf{x}) F_{\mu\nu a}(\mathbf{x}), \quad (23)$$

de donde se derivan las ecuaciones de movimiento :

$$[\mathcal{D}^\mu, F_{\mu\nu}] = \partial^\mu F_{\mu\nu} - [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0,$$

o

$$(\mathcal{D}^\mu)_a^b F_{\mu\nu b} = 0,$$

que son la generalización no-abeliana de las ecuaciones de Maxwell.

Debido a la invariancia ante transformaciones de norma que posee la Lagrangiana, todos los potenciales  $A^\mu_a(\mathbf{x})$  que estén relacionados entre sí por una transformación de norma son equivalentes. Esto mismo es el origen de las dificultades que se presentan a la hora de cuantizar los campos de norma, ya que el hecho de que exista la invariancia ante transformaciones de norma, quiere decir que tenemos variables no-independientes que deben ser eliminadas antes de la cuantización. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento resultan ser insuficientes para determinar los campos  $A^\mu_a(\mathbf{x})$  dado un conjunto de condiciones de Cauchy al tiempo  $t_0$ . Dos soluciones que se obtengan una a partir de la otra mediante una transformación de norma  $U(\mathbf{x})$  tal que  $U(\mathbf{x}) = 1$  para  $t \leq t_0$  satisfacen las mismas condiciones de Cauchy pero pueden diferir para  $t > t_0$ . Por lo tanto, la arbitrariedad de la norma tiene que restringirse mediante la introducción de condiciones auxiliares que no afecten los observables físicos invariantes de norma. Por ejemplo en el caso de la electrodinámica cuántica, la Lagrangiana para el campo de fotones  $\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  se modifica mediante la adición de un término que "fija la norma"  $-(1/2\xi)(\partial_\mu A^\mu)^2$  de manera que

$$\mathcal{L}_{photon} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (1/2\xi)(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

dando como resultado en este caso (QED) la aparición de grados de libertad no-físicos (no transversales) que son removidos de la teoría mediante la introducción de "fantasmas" de Faddeev-Popov.

Una forma posible de eliminar esos grados de libertad no independientes se hace, en general, eligiendo convenientemente un conjunto de "representantes" que se pueden definir mediante una condición que fije completamente la norma. El problema entonces, consiste en definir la cuantización del campo dentro de una norma dada de manera correcta. Este problema ha sido resuelto, como ya se dijo al principio, para un buen número de normas por Christ y Lee (Christ y Lee, 1980).

Para pasar de la formulación Lagrangiana a la formulación Hamiltoniana, tenemos que definir primeramente los momentos canónicos conjugados de los campos, y tenemos que eliminar los grados de libertad dependientes en la Lagrangiana con el fin de

cuantizar los campos. Primero se fija parcialmente la norma (norma temporal) con la condición <sup>3</sup>

$$A_a^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (24)$$

Esto se hace debido a que en la Lagrangiana (22n) no aparece explícitamente el término  $\partial_0 A^0$ , y por tanto

$$\pi^0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A^0)} = 0, \quad (25a)$$

de modo que  $A^0$  no puede considerarse como una variable independiente. Los otros momentos canónicos conjugados se definen de la manera usual a partir de la Lagrangiana como

$$\pi^j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A^j)} = -\partial_0 A^j. \quad (25b)$$

La *cuantización canónica* en la norma temporal, al tiempo  $t = 0$  de los campos de norma se especifica mediante la relación de conmutación (en coordenadas cartesianas)

$$[\pi_a^i(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ij}\delta^{ab}. \quad (26)$$

Es conveniente ahora introducir los análogos de los campos eléctrico y magnético <sup>4</sup>, definidos por

$$E_a^i \pi_a^i = F^{i0} \quad B_a^i = -1/2\epsilon_{ijk} F^{jk} \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (27)$$

La densidad Hamiltoniana es una de las componentes del tensor de energía-momento ( $\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ ). Su derivación se describe en todos los libros de la teoría cuántica de campos (p. ej. Itzykson y Zuber, 1980). El Hamiltoniano se escribe, en analogía con la electrodinámica cuántica, en la forma

$$H = \int d^3x \text{Tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \quad (28)$$

<sup>3</sup> Siempre es posible elegir una transformación de norma  $U(x)$ , tal que se puede conectar cualquier configuración  $A^0(x)$  con  $A^0 = 0$  (Christ y Lee, 1980)

<sup>4</sup> También se les llama campos cromoelectrónico y cromomagnético

## (6) Hamiltoniano

## (6a) Cuantización en coordenadas curvilíneas

Hemos dicho anteriormente que un esquema de regularización adecuado para los campos de norma, consiste en introducir una expansión finita en modos normales (11), (Schütte, 1987), en términos de operadores de coordenadas  $q$  y  $\bar{q}$ . El Hamiltoniano es un sistema conrestringido, del cual hay que remover los grados de libertad dependientes. Una forma de conseguir esto, consiste en fijar completamente la norma (13). Sin embargo hay que tener cuidado con la forma en que se cuantizan los campos de norma (cuantización canónica), ya que la relación de cuantización (26) sólo es válida cuando las coordenadas del desarrollo en modos normales  $q_{\alpha a}, \bar{q}_{\alpha a}$  (29a) son cartesianas<sup>5</sup>. En particular, cuando fijamos la norma mediante una transformación de coordenadas, la energía cinética del Hamiltoniano toma la forma del operador de Laplace en las coordenadas "curvilíneas"  $Q$ .

Si escribimos los campos de norma en coordenadas cartesianas  $q_{\alpha a}, \bar{q}_{\alpha a}$  como

$$A_k(q_{\alpha a}, \bar{q}_{\alpha a}) = \{f_{k\alpha} q_{\alpha a} + \hat{C}_{k\beta\alpha} \bar{q}_{\beta a}\} \lambda_a \quad (29a)$$

$$\pi_k \left( \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}}, \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\alpha a}} \right) = -i \left\{ f_{k\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} + \hat{C}_{k\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\alpha a}} \right\} \lambda_a \quad (29b)$$

(sumando sobre índices repetidos), el término  $\pi \cdot \pi$  (i.e.  $\mathbf{E}^2$ ) tiene la forma

$$\begin{aligned} \pi^k \pi^k = & - \{ f_{k\alpha} | f_{k\beta} \} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} \frac{\partial}{\partial q_{\beta b}} + \{ f_{k\alpha} | \hat{C}_{k\beta\gamma} \} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\beta b}} \\ & + \{ \hat{C}_{k\gamma\alpha} | f_{k\beta} \} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\alpha a}} \frac{\partial}{\partial q_{\beta b}} + \{ \hat{C}_{k\gamma\alpha} | \hat{C}_{k\beta\gamma} \} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\alpha a}} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\beta b}} \} \text{Tr} \lambda_a \lambda_b \quad (30) \end{aligned}$$

$$\pi^k \pi^k = - \frac{\partial^2}{\partial q_{\alpha a}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{q}_{\alpha a}^2} \equiv - \frac{\partial^2}{\partial q_\gamma^2} \quad (30b)$$

donde hemos hecho uso de las relaciones de ortogonalidad del conjunto completo de las funciones orbitales (5) y (10) y de la relación (6).

<sup>5</sup> véase el apéndice sobre Cuantización Canónica



La tarea ahora consiste en escribir el Hamiltoniano en términos de las nuevas coordenadas "curvilíneas". En particular, la energía cinética (30) se transforma del mismo modo como se transforma el operador Laplaciano, de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas (12) usando la notación abreviada  $(q_{\alpha,a}, \bar{g}_{\sigma,b}) \equiv (q_{\alpha,a})$  y  $(Q_{\alpha,a}, \bar{Q}_{\sigma,b}) \equiv (Q_{\alpha,a})$ :

$$(q_{\alpha,a}) \rightarrow (Q_{\alpha,a}),$$

Es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial q_\gamma^2} \rightarrow -\frac{1}{g^{-1}} \frac{\partial}{\partial Q_\alpha} y (\bar{g}_{\alpha\beta})^{-1} \frac{\partial}{\partial Q_\beta} \quad (31)$$

donde  $\bar{g}^{\alpha\beta}$  es la matriz de Jacobi (tensor métrico) — y  $g$  su determinante —, definido por <sup>6</sup>

$$dS = \bar{g}_{\alpha\beta} dQ_\alpha dQ_\beta \quad (32)$$

$$\begin{aligned} dS &= dq_\gamma dq_\gamma \\ &= \frac{\partial q_\gamma}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial q_\gamma}{\partial Q_\beta} dQ_\alpha dQ_\beta \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta} dQ_\alpha dQ_\beta \end{aligned} \quad (33)$$

donde identificamos el tensor métrico como

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{dq_\gamma}{dQ_\alpha} \frac{dq_\gamma}{dQ_\beta} \quad (34a)$$

y su inverso

$$\bar{g}_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{dQ_\alpha}{dq_\gamma} \frac{dQ_\beta}{dq_\gamma} \quad (34b)$$

Ahora bien, estamos interesados en una transformación de coordenadas realizada de manera que los campos no dependan explícitamente de los grados de libertad longitudinales.

<sup>6</sup> En esta notación  $dq_\alpha dq_\beta$  significa  $dq_\alpha dq_\beta + dq_\beta dq_\alpha$ .

$$\begin{aligned} A_k(q_{\alpha\alpha}, \bar{q}_{\alpha\alpha}) &= \{f_{k\alpha} q_{\alpha\alpha} + \bar{C}_k g_{\alpha\alpha} \bar{q}_{\alpha\alpha}\} \lambda_{\alpha} \\ &= U_{\bar{Q}} \{ \bar{A}_k(Q) - i \partial_k \} U_{\bar{Q}}^{-1}, \end{aligned} \quad (35)$$

con la transformación  $U_{\bar{Q}}$  dada por

$$U_{\bar{Q}} = \exp[i \bar{Q}_{\sigma\alpha} g_{\sigma\alpha}] \quad (36)$$

Escribir el Laplaciano en coordenadas curvilíneas no es trivial, pero existe una simplificación por el hecho de que este Laplaciano se evalúa sólo sobre funcionales  $\Psi(Q)$  (independientes de  $\bar{Q}$ ). En consecuencia, todos los términos que involucren derivadas  $\frac{\partial}{\partial \bar{Q}}$  pueden quitarse. Además como el Laplaciano es invariante de norma, sólo es función de  $Q$ , de manera que el "tensor"  $\bar{g}$  y su determinante (Jacobiano)  $g$  pueden evaluarse para  $\bar{Q} = 0$  i.e. escribiendo explícitamente las coordenadas  $\bar{q}$  y  $\bar{Q}$ , el Laplaciano en coordenadas curvilíneas (31) es.

$$-\frac{1}{g^{-1}} \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} g (\bar{g}_{\alpha\beta})^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{Q}_{\beta}} \quad (37)$$

con la matriz de Jacobi  $\bar{g}^{-1}$  dada por (34b)

$$\bar{g}_{\alpha\beta}^{-1}(Q) = \frac{dQ_{\alpha}}{dq_{\tau}} \frac{dQ_{\beta}}{dq_{\tau}} + \frac{dQ_{\alpha}}{dq_{\sigma}} \frac{dQ_{\beta}}{dq_{\sigma}} \Big|_{q(Q, \bar{Q}=0)} \quad \bar{q}(Q, \bar{Q}=0) \quad (38)$$

cuyos elementos de matriz se pueden calcular fácilmente si escribimos (35) en la forma

$$\bar{A}_k(Q) = f_k Q_{\alpha\alpha} = U_{\bar{Q}}^{-1} \{ f_{k\beta} q_{\beta\alpha} + \bar{C}_k g_{\rho\alpha} \bar{q}_{\rho\alpha} - i \partial_k \} U_{\bar{Q}} \quad (39)$$

que es apropiada para introducir la restricción al Hamiltoniano por una transformación de norma. La diferenciación respecto de las coordenadas  $q_{\beta\alpha}$ , y  $\bar{q}_{\rho\alpha}$  resulta después de un cálculo largo pero sencillo:

$$\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} f_{k\alpha} = \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\beta}} [T_k(A), \lambda_{\rho}] + U^{-1} f_{k\beta} U \quad (40a)$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \bar{q}_{\rho}} f_{k\alpha} = [T_k(A), \lambda_{\tau}] \frac{\partial Q_{\tau}}{\partial \bar{q}_{\rho}} + U^{-1} \bar{C}_k g_{\rho\alpha} U \quad (40b)$$

donde  $\mathcal{D}$  es la derivada covariante

$$T_k(A)\chi_r = \partial_k \chi_r + i[A_k, \chi_r] \quad (41)$$

y el operador Lie-valuado  $\chi_r$  es

$$\chi_r = -iU^{-1} \frac{\partial U}{\partial Q_r} \quad (42)$$

Evaluando en  $\bar{Q} = 0$  se obtiene a partir de (36) que  $\chi_r(\bar{Q} = 0) = g_r$  y por lo tanto  $U(\bar{Q} = 0) = 1$ , con lo que se pueden calcular los elementos de matriz de (40), por ejemplo para la norma de Schwinger en donde  $\mathcal{O} = \mathbf{x}$ :

i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}_\rho}{\partial q_\beta} \langle x_k g_r | T_k(A) | g_\rho \rangle &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \bar{Q}_\rho}{\partial q_\beta} \langle g_r | x_k T_k(A) | g_\rho \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

En este caso (norma de Schwinger)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0$  implica que el operador  $\mathbf{x} \cdot \mathcal{D} = \mathbf{x} \cdot \nabla \equiv \Gamma$ , es no singular, es decir que no tiene eigenvalores que desaparezcan, de lo cual se sigue que

$$\frac{\partial \bar{Q}_\rho}{\partial q_\beta} = 0 \quad (44)$$

otros elementos de matriz, que no calculamos aquí, son

ii)

$$\frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial \bar{q}_\sigma} = - \langle r g_r | \tilde{\Gamma}^{-1} | r g_\sigma \rangle \quad (45)$$

con

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{r} \Gamma \frac{1}{r} \quad (46)$$

iii)

$$\frac{\partial \bar{Q}_\alpha}{\partial \bar{q}_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (47)$$

iv)

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} = ((-\nabla \cdot \mathbf{f}_\alpha | g_\tau) + i([f_{k\alpha}, A_k] | g_\tau)) \frac{\partial \tilde{Q}_\tau}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (48)$$

Con estos elementos de matriz se puede calcular el Jacobiano

$$g^{-1} = \det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \dot{q}} \end{array} \right) \Big|_{q(Q, \tilde{Q}=0), \dot{q}(Q, \tilde{Q}=0)}$$

dando como resultado

$$g^{-1} = \det \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) = -\det[\tilde{F}^{-1}] \quad (49)$$

De aquí se sigue la forma del operador Lagrangiano en coordenadas curvilíneas (37) que aparece en el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \Delta_\pi &= -\frac{\partial}{\partial Q_\alpha} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial Q_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}) \frac{\partial}{\partial Q_\beta} \\ &= P_\gamma P_\gamma + P_\alpha (\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial Q_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}) P_\beta, \end{aligned} \quad (50)$$

donde el segundo término es una nueva contribución que describe la interacción de las cargas de color (denominado término de Coulomb), y donde hemos usando la definición

$$P_\alpha \equiv i \frac{\partial}{\partial Q_\alpha}. \quad (51)$$

Ahora bien, los términos de la forma  $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma}$ , en el segundo sumando de (50), se pueden determinar a partir de (48)

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial Q_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} = ( \psi^\dagger | r^{-1} \tilde{F}^{-1} (\tilde{F}^{-1})^\dagger r^{-1} | \psi ) \quad (52)$$

donde  $r = |\mathbf{x}|$ , y  $\psi$  es la densidad de carga de color definida como

$$\psi = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + i[\boldsymbol{\pi}, \mathbf{A}] \quad (53)$$

## (6b) El Hamiltoniano en la norma de Schwinger

Si se determina el segundo término del Laplaciano (Schütte, 1987), dado por (52) con los operadores ( en la norma de Schwinger)

$$\tilde{r} = r^{-1} x \nabla r^{-1} = \partial_r r^{-1} \quad (54a)$$

$$\tilde{r}^{-1} = r \partial_r^{-1} \quad (54b)$$

y

$$\tilde{r}^\dagger = -r^{-3} \partial_r r^2 \quad (55a)$$

$$(\tilde{r}^{-1})^\dagger = -r^{-2} \partial_r^{-1} r^3 \quad (55b)$$

donde  $(\partial_r^{-1})$  es el inverso del operador  $\partial_r$  i.e.

$$\int_a^r dr' f(r')$$

con

$$(\partial_r^{-1} f_r)(0) = 0$$

resulta el operador  $\tilde{\Delta}$  dado por la expresión

$$\tilde{\Delta} \equiv r^{-1} \tilde{r}^{-1} (\tilde{r}^{-1})^\dagger r^{-1} = -\partial_r^{-1} r^{-2} \partial_r^{-1} r^2 \quad (56)$$

y por tanto el Laplaciano "covariante" es

$$\Delta_\pi = P_\gamma P_\gamma + e_a^\dagger \tilde{\Delta} e_a \quad (57)$$

De esta forma se obtiene el Hamiltoniano (28) en la norma de Schwinger :

$$H_{Schwinger} = \frac{1}{2} \int d^3x E_j^a E_j^a + \frac{1}{2} \int d^3x e_a^\dagger \tilde{\Delta} e_a + \frac{1}{2} \int d^3x B_j^a B_j^a \quad (58)$$

El segundo término en el Hamiltoniano resulta muy importante, ya que es el término que surge a la hora de fijar la norma.

Se le llama término de Coulomb debido a que aparece explícitamente la densidad de carga de *color*  $\rho$  definida mediante la ecuación (53). Este término juega el papel de un potencial "estático" de interacción entre las cargas de color (T.D. Lee, 1981).

La forma explícita del Hamiltoniano en la norma de Schwinger se encuentra dada en (Schütte, 1989).

## Capítulo 5

---

## Contracciones y Expansiones de Grupos

### (1) Introducción

Es bien sabido en teorías de muchos cuerpos, que bajo ciertas circunstancias, los pares de fermiones exhiben un comportamiento bosónico, particularmente cuando la densidad de tales pares es baja de modo que tales pares no se "encuentren" en el camino el uno del otro, y así se disminuya el efecto del principio de Pauli. Bajo estas circunstancias, las excitaciones más bajas de tales sistemas se pueden considerar como una colección de un número relativamente pequeño de "osciladores armónicos" que interactúan débilmente entre sí. Este de hecho es la explicación a ciertos fenómenos críticos que aparecen a bajas temperaturas, o bajas energías. Los ejemplos más comunes son el de la superconductividad, la superfluidez etc. En la Cromodinámica Cuántica, por otra parte, existen evidencias de que el *vacío* está formado principalmente por pares de gluones comportándose como un condensado "bosónico", junto con un condensado de pares de quarks. Estas situaciones nos llevan inmediatamente a la cuestión de cómo poder aproximar nuestra álgebra formada por operadores de pares de fermiones (o de bosones para el caso de los gluones en la Cromodinámica Cuántica por ejemplo), en términos de nuevos operadores *bosónicos*, de tal forma que mantengamos la estructura de la simetría involucrada. Por ejemplo las simetrías de Spin y Color. En otras palabras, estamos interesados en las transformaciones de una álgebra de Lie de pares de fermiones y/o de bosones en términos de operadores bosónicos de modelo.

### (2) La idea de la Contracción

Para empezar nuestra discusión acerca de los procesos de contracción y expansión de una álgebra de Lie consideremos el siguiente ejemplo: En el cuento *El Principito* de Antoine de Saint-Exupéry un pequeño príncipe vive en un planeta muy pequeño de tal suerte que, a su entender, es de forma esférica, pero ¿qué pensaría si viviera en un planeta suficientemente grande como nuestra Tierra que a primera vista pareciera ser



plana?. Para él los movimientos que hiciera se explicarían en términos de traslaciones en las direcciones  $x$  y  $y$ , además de las rotaciones alrededor del eje azimutal cuando en realidad, si sus desplazamientos fueran suficientemente grandes, podría darse cuenta de que la geometría de su planeta no es una geometría plana y que en lugar de realizar traslaciones lo que él está haciendo son pequeñas rotaciones alrededor de tres ejes. Es decir, bien podría suponer que su planeta es plano y no tendría mucho problema. El problema que tiene frente a sí es el de una contracción del grupo de rotaciones en tres dimensiones, en términos de traslaciones, i.e. una contracción al grupo Euclideo de tres dimensiones.

Para ser más precisos, supongamos que estamos parados cerca del polo norte en una superficie esférica, de tal suerte que en cierto límite, los movimientos alrededor de los ejes " $x$ " " $y$ " " $z$ " puedan aproximarse en términos de traslaciones en los ejes " $y$ " " $x$ " " $z$ ", mientras que las rotaciones alrededor del eje " $z$ " permanezcan igual, manteniendo la estructura fundamental de las rotaciones. Este es el procedimiento de Contracción.

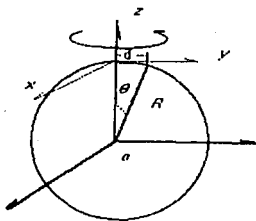


Figura (5.1) Rotaciones alrededor del Polo Norte en la esfera.

De acuerdo con un observador situado en "Tierra", cada reorientación finita del asteroide donde vive el Principito puede describirse por una operación del grupo de rotaciones

$$\exp\{\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z\} \quad (1)$$

donde  $J_x, J_y, J_z$  son los generadores de rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes  $x, y, z$  y  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  son las coordenadas de un desplazamiento según lo ve un astrónomo en la Tierra. Ya que  $J_x$  induce desplazamientos en la dirección  $+x$  que pueden medirse en unidades de la distancia  $l$  (v. fig. 5.1) que mide el desplazamiento sobre la superficie, por tanto podemos escribir

$$\alpha d = R\theta_y \quad (2)$$

$$\theta_y J_y = \alpha P_x = \alpha \left( \frac{d}{R} J_y \right) \quad (3)$$

donde  $P_x$  es el generador de desplazamientos infinitesimales en la dirección  $+x$ . Similarmemente, los generadores  $J_x$  inducen desplazamientos en la dirección  $-y$  :

$$\beta d = -R\theta_x \quad (4)$$

$$\theta_x J_x = \beta \left( \frac{-d}{R} J_x \right) \quad (5)$$

El generador  $J_z$  induce rotaciones alrededor del eje  $z$  i.e. alrededor del Polo norte que queda fijo.

Las relaciones de conmutacion para este nuevo conjunto de generadores pueden obtenerse facilmente

$$\begin{aligned} [J_x, P_x] &= [J_z, \frac{d}{R} J_y] = \frac{d}{R} J_x = -P_y \\ [J_z, P_y] &= [J_z, \frac{-d}{R} J_x] = \frac{+d}{R} J_y = +P_x \\ [P_x, P_y] &= [\frac{d}{R} J_y, \frac{-d}{R} J_x] = \left(-\frac{d}{R}\right)^2 J_z \end{aligned} \quad (6)$$

Notese que las dos primeras relaciones son independientes de la razón  $\frac{d}{R}$  mientras que la última no.

La relación entre estos dos diferentes sistemas de generadores esta dada por la transformación

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-d}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

Los parámetros están dados por la transformación inversa

$$(\beta \quad \alpha \quad \theta_z) = (\theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z) \begin{pmatrix} -\frac{d}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (8)$$

Debemos hacer énfasis en que la elección del sistema es solo materia de conveniencia hasta aquí. También debemos recordar que las constantes de estructura  $c_{ij}^k$  se transforman como un tensor de tercer orden bajo un cambio de base no-singular.

Las relaciones de conmutación dependen de la razón  $\frac{d}{R}$ . Así, cuando  $d$  esta fija y  $R \rightarrow \infty$ , las relaciones de conmutación se acercan mas y mas a las relaciones de conmutación del grupo Euclideo  $E(2)$ . No obstante podemos dar otra interpretación. Podemos suponer que  $R$  esta fijo y que dejamos que  $d \rightarrow 0$ . De modo que estamos *contrayendo* al observador. Nuevamente las relaciones de conmutación se acercan a las del grupo Euclideo, ya que sólo esta involucrada la razón  $\frac{d}{R}$ . Para  $\frac{d}{R} \neq 0$ , un elemento arbitrario en el álgebra del Principito puede escribirse como

$$\begin{aligned} \alpha P_x + \beta P_y + \theta_z J_z &= \alpha \left( \frac{d}{R} J_y \right) + \beta \left( -\frac{d}{R} J_x \right) + \theta_z J_z \\ &= \left( \alpha \frac{d}{R} \right) J_y + \left( -\beta \frac{d}{R} \right) J_x + \theta_z J_z \end{aligned} \quad (9)$$

Conforme  $\frac{d}{R} \rightarrow 0$ , todas las coordenadas finitas  $\alpha, \beta$  vienen de una región del álgebra original que se acerca mas y mas a la identidad.

$$\theta_x = -\beta \frac{d}{R} \rightarrow 0; \quad \theta_y = \alpha \frac{d}{R} \rightarrow 0 \quad (10)$$

Por lo tanto el álgebra  $E(2)$  es parametrizada por una región *contraída* del álgebra original  $SO(3)$ . Ya que los parámetros  $\theta_x, \theta_y \rightarrow 0$ , los generadores correspondientes  $P_x, P_y$  deben conmutar

$$[P_x, P_y] = 0. \quad (11)$$

Los generadores contraídos subtienden una subálgebra abeliana.

Este procedimiento de contracción de los generadores, involucra una secuencia de cambios de base que dependen del parámetro  $\frac{g}{\hbar}$ . Es evidente que la transformación se vuelve singular en el límite en que  $\frac{g}{\hbar} \rightarrow 0$ . Sin embargo el conmutador existe y está bien definido en el límite singular.

Las transformaciones no-singulares de base no pueden nunca llevar a una álgebra nueva. La razón es que las constantes de estructura  $f_{ij}^k$  se transforman como un tensor de segundo rango covariante y primer rango contravariante bajo un cambio no-singular de base. Bajo tal transformación el nuevo tensor de constantes de estructura contiene exactamente tanta información como el original. Por lo tanto para estudiar más a fondo el problema de la contracción se deben considerar también los cambios *singulares* de base. Una introducción excelente al tema se puede encontrar en R.Gilmore (Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, John Wiley & Sons 1974).

### (3) Técnicas de mapeos bosónicos

Como se dijo al principio de este capítulo, nosotros estamos interesados particularmente en los mapeos que conducen a una descripción de un sistema cuya dinámica está, presumiblemente dominada por "pares" de partículas, mas que por el efecto de partículas individuales, en términos de operadores bosónicos. Como se ha dicho también, varias teorías dan fuertes indicios de que el estado más bajo de la CDC está compuesto principalmente por un condensado de pares de gluones, y pares de quarks (T.H.Hansson, K.Johnson y C. Peterson, 1982; P.O.Hess y R.D.Viollier, 1986). De manera similar a como se asocian los electrones en pares de Cooper, los gluones y los quarks se asocian por pares a ciertos acoplamientos de spin y color. El efecto en el primer caso conduce, como se ha mencionado, al efecto de la superconductividad. En el segundo caso, cuando se trata de pares de gluones por ejemplo, el efecto podría estar relacionado con el confinamiento de color.

La idea de los mapeos bosónicos, consiste en reemplazar directamente los grados de libertad asociados con los "pares", con grados de libertad exactamente *bosónicos*. Es decir que mapeamos el espacio de Hilbert original de muchos fermiones (bosones) en otro espacio de Hilbert llamado *espacio ideal*. Este espacio "ideal" está generado por operadores de creación y de aniquilación bosónicos asociados con cada "tipo" de par en el espacio original. Es decir que a cada par le corresponde un tipo de bosón en el espacio ideal y viceversa. Si el espacio original consiste de un número impar de partículas, entonces debemos considerar también la posibilidad de tener al menos una partícula no-apareada. En este caso el espacio de Hilbert debe mapearse a un espacio ideal que consista no sólo de grados de libertad bosónicos por cada par, sino

también por grados de libertad de un fermión (bosón) ideal. El espacio ideal se toma entonces como el espacio producto tensorial del espacio bosónico con el espacio de un fermión (bosón) ideal, aunque existe otra forma de realizar tal mapeo, que consiste en mapear sólo algunos de los pares en términos de operadores bosónicos. El resultado de hacer tales mapeos consiste básicamente en que se pueden usar algunas nuevas clases de aproximaciones bosónicas para describir efectos colectivos que pueden resultar extremadamente complicados en el espacio de Hilbert original. Además, los mapeos bosónicos proporcionan una relación directa entre los modelos *microscópicos* que se usan en la física nuclear, y los modelos colectivos. En la Cromodinámica Cuántica, la descripción microscópica se conoce perfectamente, pero la solución es extremadamente difícil, por lo que se requiere de aproximaciones que den cuenta, si existen, de los efectos colectivos. Por ejemplo los efectos del vacío cromodinámico, que pueden ser responsables del comportamiento "paramagnético" que exhibe éste, dando lugar al confinamiento del color por ejemplo.

#### (4) Tipos de mapeos bosónicos

Existen básicamente dos tipos de mapeos bosónicos que podemos denotar genéricamente como :

(i) Los mapeos del tipo Holstein-Primakov que preservan la hermiticidad del hamiltoniano, pero conducen a series infinitas en los desarrollos de los operadores bosónicos de modelo.

(ii) Los mapeos del tipo de Dyson que conducen a desarrollos finitos en los operadores bosónicos, pero que resultan en hamiltonianos no-hermitianos en general, cuyos eigenvalores son los mismos que los del hamiltoniano original.

En ambos tipos de mapeos, se debe tener cuidado al definir el espacio físico de modelo sobre el cual actúa el hamiltoniano. El espacio ideal, siempre es más "grande" que el espacio original. Es decir que en el espacio ideal existen estados espurios que hay que eliminar de alguna manera, y definir el subespacio ideal físico, como veremos más adelante.

## (5) Mapeo Bosónico

Podemos indicar un mapeo bosónico de la siguiente manera: si  $|Q\rangle$  es un estado (fermiónico o bosónico) que corresponde a un par en el espacio de Hilbert original, el mapeo a un estado bosónico en el espacio ideal está indicado por

$$|Q\rangle \mapsto |q\rangle_B. \quad (12)$$

Al mismo tiempo se tienen que mapear los operadores (en particular los operadores básicos de creación y aniquilación que generan el espacio de Hilbert) como

$$O \mapsto O_B. \quad (13)$$

de tal forma que los elementos de matriz de los generadores correspondientes se preserven, o que las reglas de conmutación del álgebra original se mantengan. Es decir que, si

$$A \rightarrow \mathcal{A}. \quad (14a)$$

y

$$B \rightarrow B'. \quad (14b)$$

entonces la relación

$$[A, B] = C \rightarrow [\mathcal{A}, B'] = C'. \quad (15)$$

implica necesariamente que

$$C \rightarrow C'. \quad (16)$$

Como ya se ha dicho, el mapeo del espacio de Hilbert original conduce a un espacio de Hilbert ideal más grande, de manera que el mapeo de nuestro espacio original, al cual llamaremos "microscópico" se mapea a un espacio ideal físico, mas un espacio ideal no-físico:

$$\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_{fis} \oplus \mathcal{H}_{no-fis} \quad (17)$$

En particular si el espacio original consiste de un número impar de estados, se tiene que dar además la "regla" para mapear los operadores de un fermión (bosón) ideal, y el espacio ideal será entonces el producto tensorial del espacio ideal bosónico, y el espacio ideal de un fermión (bosón) desapareado.

Se puede ver fácilmente que basta con demandar que se satisfagan las relaciones de conmutación entre los mapeos de los generadores del álgebra para que los elementos de matriz sean iguales, si además se define apropiadamente el mapeo para el estado del vacío.

En efecto, si tenemos un operador cualquiera, en el *álgebra envolvente*, los elementos de matriz

$$\langle Q_i | \mathcal{O} | Q_j \rangle \quad (18)$$

se pueden expresar en términos de los generadores como combinación lineal de ellos. Dicho de otro modo, cualquier operador y cualquier estado, se pueden expresar en términos de los operadores de creación y aniquilación.

A continuación vamos a hacer un resumen mas o menos breve de algunos tipos de mapeos bosónicos que existen. Para esto es conveniente poner un ejemplo en particular que ilustre mejor la idea contenida en cada uno de los mapeos que vamos a describir.

Vamos a considerar como caso particular el grupo de simetrías  $SU(2)$ . Los operadores de dos fermiones que subtienden una álgebra *ortogonal*, se pueden expresar en la realización de Cartan como

$$\begin{aligned} [a_i^\dagger \times a_i^\dagger]_0^0, \\ [a_i \times a_i]_0^0, \\ [a_i^\dagger \times a_i]_0^0. \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $a_i^\dagger, a_i$  son los operadores de creación (y aniquilación) de un fermión respectivamente. Vamos a "mapear" estos operadores de pares en términos de los operadores bosónicos

$$b_i^\dagger, b_i \quad (20)$$

que satisfacen, por supuesto, el álgebra de Heisenberg-Weyl:

$$[b_i^\dagger, b_i] = 1. \quad (21)$$

## (6) Mapeo de Holstein-Primakov

Consideremos como es usual a los generadores del grupo  $SU(2)$  en forma esférica  $J_+, J_-, y J_z$  que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_z, \\ [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}. \end{aligned} \quad (22)$$

con

$$J_+ = (J_-)^\dagger \quad (23)$$

En este tipo de mapeo uno trata de mantener los mismos elementos de matriz para los generadores del álgebra. Esto nos garantiza que los *observables* tendrán los mismos eigenvalores, al mismo tiempo que se preservan las relaciones de Hermiticidad de los operadores. Los elementos de matriz relevantes de los generadores  $J_0, y J_+$  son :

$$\langle jm | J_0 | jm \rangle = m, \quad (24a)$$

$$\langle jm+1 | J_+ | jm \rangle = [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}. \quad (24b)$$

donde  $|jm\rangle$  ( $-j \leq m \leq j$ ) es la base usual de eigenestados simultaneos correspondientes a los operadores  $J^2$  y  $J_0$ . La idea entonces, es la de mapear nuestros operadores  $J_0, J_{\pm}$ , en términos de los operadores  $b^\dagger, b$  de tal suerte que se preserven tanto los elementos de matriz, como la relación de hermiticidad  $J_+ = (J_-)^\dagger$ .

Lo primero que notamos, es que el espectro de eigenvalores para el operador  $J_0$  es equidistante, del mismo modo que el espectro del oscilador armónico (2.49), según hemos visto en el capítulo de *Tópicos de la Teoría de Grupos*. Entonces podemos pensar en mapear la secuencia de enteros (o semienteros) "m" en un conjunto de enteros positivos "n",  $0 \leq n \leq 2j$  efectuando el desplazamiento

$$m = -j + n \quad (25)$$

con lo que los elementos de matriz de los operadores  $J_0$  y  $J_+$  se transforman en

$$\langle n | J_0 | n \rangle = -j + n, \quad (26a)$$

$$\langle n-1 | J_+ | n \rangle = [(n+1)(2j-n)]^{\frac{1}{2}}. \quad (26b)$$



Uno reconoce inmediatamente los elementos de matriz de los operadores  $b^\dagger, b$  :

$$\begin{aligned} \langle n+1 | b^\dagger | n \rangle &= (n+1)^{\frac{1}{2}}, \\ \langle n-1 | b | n \rangle &= n^{\frac{1}{2}}, \\ \langle n | b^\dagger b | n \rangle &= n. \end{aligned} \quad (27)$$

en la base del oscilador armónico  $\frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle$ . En realidad lo que hemos hecho al efectuar el "desplazamiento", es un mapeo de los operadores  $J_0, J_\pm$  y de los estados  $| jm \rangle$  en términos de los operadores bosónicos

$$b^\dagger, b; [b, b^\dagger] = 1, \quad (28)$$

y de los estados de oscilador armónico del espacio de Fock bosónico (2.50):

$$\frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle. \quad (29)$$

mediante las relaciones

$$\begin{aligned} (J_0)_B &\mapsto (-j + b^\dagger b), \\ (J_+)_B &= (J_-)^\dagger_B \mapsto b^\dagger(2j - b^\dagger b)^{\frac{1}{2}}, \\ (j, m) &\mapsto (j, n), \quad 0 \leq n \leq 2j. \end{aligned} \quad (30)$$

con lo cual los elementos de matriz son los mismos, al tiempo que se preservan las relaciones de hermiticidad entre los operadores de creación y aniquilación :

$$\begin{aligned} \langle jn | (J_0)_B | jn \rangle &= -j + \hat{n}, \\ \langle jn+1 | (J_+)_B | jn \rangle &= \sqrt{2j - \hat{n}} \sqrt{\hat{n} + 1}, \\ (J_+)_B &= (J_-)^\dagger_B. \end{aligned} \quad (31)$$

donde  $\hat{n} = b^\dagger b$  representa a el operador de número de cuantos fermiónicos.

Hay que notar primero que esta forma del mapeo está definida correctamente sólo para  $0 \leq n \leq 2j$  que corresponden a los estados del subespacio ideal físico, mientras que el nuevo espacio de Fock contiene además los estados con  $n > 2j$  en el subespacio no-físico de Hilbert.

## (7) El mapeo de Belyaev y Zelevinsky

Este tipo de mapeos enfatiza el mapeo de los operadores de tal suerte que se preserven todas las relaciones de conmutación. El subespacio físico se genera después a partir de un estado de referencia.

Consideremos una representación irreducible de una álgebra de Lie. Generalmente hablando, los generadores de esta álgebra pueden dividirse en : operadores de ascenso, operadores de descenso, y operadores de peso. Los operadores de ascenso nos permiten generar una base a partir de un estado de "referencia" (estado de máximo peso, o de mínimo peso). El método consiste en introducir un operador bosónico de creación  $b^\dagger$  por cada operador de ascenso. Bajo estas circunstancias los operadores diagonales, como  $J_0$  deben ser lineales en los operadores de número y se pueden escribir por simple inspección. Ahora bien la forma de  $J_+$  sólo puede ser una función de los operadores bosónicos con la misma regla de selección que  $b^\dagger$  que nos restringe a operadores de la forma  $b^\dagger$  multiplicados por cualquier función de  $b^\dagger b$ .

En el álgebra  $SU(2)$  los generadores son :

$$\begin{aligned} J_+ & \text{ operador de ascenso} \\ J_0 & \text{ operador de peso} \\ J_- & \text{ operador de descenso} \end{aligned} \quad (32)$$

En analogía con (30a), para el operador de peso se puede hacer el siguiente *ansatz*:

$$J_0 \mapsto -j + \hat{n}. \quad (33)$$

mientras que para el operador de ascenso se puede utilizar la serie infinita en términos de  $b^\dagger$  y  $\hat{n}$

$$J_+ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n b^\dagger (b^\dagger b)^n \quad (34)$$

con la condición de hermiticidad (23) i.e.  $J_- = (J_+)^\dagger$ .

Los coeficientes del desarrollo en serie para  $J_+$  se determinan a partir de la condición fundamental de que se preserven todas las relaciones de conmutación entre los operadores. En particular, es suficiente por supuesto, que se satisfagan las relaciones constitutivas entre los generadores del álgebra.

Por ejemplo la relación de conmutación entre  $J_0$  y  $J_+$  se satisface inmediatamente, independientemente de cuales sean los coeficientes del desarrollo :

$$\begin{aligned} [J_0, J_+] &= [b^\dagger b, (J_+)_B] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [b^\dagger b, b^\dagger] (b^\dagger b) \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $[b^\dagger b, b^\dagger] = b^\dagger$ , nos da como resultado  $J_+$ .

La siguiente relación (22)

$$[J_+, J_-] = 2J_0$$

nos define de hecho los coeficientes  $c_n$ . En efecto, sin entrar en los detalles del cálculo podemos ver que el resultado del conmutador anterior será una serie en potencias de  $b^\dagger b$  cuyos coeficientes se igualan potencia por potencia con los coeficientes correspondientes del desarrollo de  $2J_0$ . Con los coeficientes resultantes se puede identificar la serie como el desarrollo del operador raíz cuadrada, dando como resultado el mismo mapeo que se obtuvo con el método de Holstein-Primakov (ve.30b). Es decir:

$$J_+ \mapsto b^\dagger \sqrt{2j - \hat{n}}. \quad (36)$$

Guiados por la forma obtenida del mapeo para  $J_+$ , uno puede escribir intuitivamente el mapeo de la siguiente forma

definición :

$$\begin{aligned} (J_+)_B &= b^\dagger f(\hat{n}), \\ (J_-)_B &= f(\hat{n}) b. \end{aligned} \quad (37)$$

Entonces la relación de conmutación  $[J_+, J_-] = 2J_0$  se escribe como

$$[b^\dagger f(\hat{n}), f(\hat{n}) b] = \hat{n} f^2(\hat{n} - 1) - (\hat{n} + 1) f^2(\hat{n}). \quad (38)$$

Ahora bien, si usamos las relaciones

$$f(\hat{n}) b = b f(\hat{n} - 1), \quad (39a)$$

y

$$f(\hat{n}) b^\dagger = b^\dagger f(\hat{n} + 1). \quad (39b)$$

y escribimos como *ansatz*

$$f^2(\hat{n}) = c_1 \hat{n} + c_2, \quad (40)$$

para que la relación de conmutación se satisfaga (esto es que obtengamos  $2J_0 = 2(\hat{n} - j)$ ), se obtiene nuevamente

$$f^2(\hat{n}) = 2j - \hat{n}. \quad (41)$$

i.e.  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 2j$ . Es decir que recuperamos el mapeo de Holshtein-Primakov, y todo lo que implica, incluyendo el mapeo de los estados.

En efecto, el mapeo de los estados originales  $|jm\rangle$  con

$$|jm\rangle = \tau(jm)(J_+)^{j+m} |0\rangle, \quad (42a)$$

$$|0\rangle \equiv |j-j\rangle. \quad (42b)$$

donde  $\tau(jm) = \frac{(j-m)!}{2^j(j+m)!}^{\frac{1}{2}}$ , se puede resumir en dos etapas:

(i) el vacío se mapea al vacío  $|0\rangle \mapsto |0\rangle$ , i.e.

$$|j-j\rangle \mapsto |n=0\rangle. \quad (43)$$

(ii) los operadores de ascenso se mapean en términos de operadores bosónicos

$$(J_+)^{j+m} \mapsto (J_+)^{j+m} B \quad (44)$$

El resultado de mapear así la base  $|jm\rangle$  conduce de manera natural a la base del oscilador armónico:

$$|jm\rangle \mapsto |n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (45)$$

(8) Mapeo del tipo de Dyson

Hasta ahora hemos tratado con mapeos que preservan las relaciones de hermiticidad de los operadores  $(J_-) = (J_+)^{\dagger}$ , aunque esta condición no es esencial, como se vera más adelante. El siguiente tipo de mapeo que vamos a considerar deja más libre este requerimiento, ya que no preserva la hermiticidad de los operadores. A este tipo de mapeo se le denomina mapeo de Dyson para el caso de  $SU(2)$  o mapeo *generalizado* de Dyson para otras álgebras. Una de las motivaciones principales para estudiar estos tipos de mapeos consiste en tratar de encontrar desarrollos finitos mas que series infinitas para la representación de los operadores mapeados.

Existen varias formas para la derivación del mapeo de Dyson. Aquí vamos a considerar el tratamiento algebraico.

El procedimiento es muy similar al empleado en el mapeo del tipo de Belyaev-Zelévinsky, es decir, se propone una forma para el mapeo de los operadores de ascenso y descenso, y se determina la "forma" explícita demandando que se satisfagan las relaciones de conmutación entre los operadores. La diferencia fundamental consiste en que esta vez no presisamos que se mantengan las relaciones de hermiticidad entre los operadores. Particularmente vamos a omitir la relación de hermiticidad  $(J_+)^{\dagger} = (J_-)$ . Esto naturalmente nos conducirá a representaciones no-unitarias del álgebra, y que tengamos traslapes en los estados de la base. Es decir que perderemos la propiedad de normalización de dicha base.

Definamos :

$$(J_+)_{D} = b^{\dagger} f_+(\hat{n}). \tag{46}$$

$$(J_-)_{D} = f_-(\hat{n}) b.$$

Donde las funciones de operadores  $f_+$  y  $f_-$  son las funciones que nos van a definir el mapeo. Una posibilidad consiste en elegir a priori una de las funciones, por ejemplo

$$f_+(\hat{n}) = 1. \tag{47}$$

Aunque la elección de una de estas funciones nos lleva a diferentes formas del mapeo, se puede ver que tales formas resultan equivalentes.

La relación de conmutación importante que debemos satisfacer es

$$[(J_+)_{D}, (J_-)_{D}] = \hat{n}f_-(\hat{n}-1)f_+(\hat{n}-1) - (\hat{n}+1)f_-(\hat{n})f_+(\hat{n})$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{n}f_-(\hat{n}-1) - (\hat{n}+1)f_-(\hat{n}) \\
 &= 2(J_0)_D
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

El operador  $(J_0)_D$  se puede elegir de la misma forma que se hizo para el mapeo de Belyaev-Zelevinsky i.e.

$$J_0 \mapsto -j + \hat{n}.$$

Entonces si hacemos el siguiente *ansatz* para  $f_-$ :

$$f_-(\hat{n}) = a \hat{n} + b$$

encontramos que  $a = -1$ ,  $b = 2j$  y por lo tanto queda determinada la forma de  $f_-$  de la siguiente manera:

$$f_-(\hat{n}) = 2j - \hat{n}. \tag{49}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 (J_+)_D &= b^\dagger, \\
 (J_-)_D &= (2j - \hat{n})b
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

### (9) Mapeo de la base

Nuevamente, el mapeo de la base se realiza definiendo primero un mapeo para el estado de vacío  $|j-j\rangle \mapsto |n=0\rangle$ , al cual se le aplica sucesivamente el mapeo de los operadores de ascenso para generar la nueva base.

$$(J_+)^{j+m} |j-j\rangle \mapsto (J_+)^{j+m}_D |n=0\rangle. \tag{51}$$

Esta nueva base consiste de estados ortogonales, que sin embargo ya no están normalizados, sino que tienen un traslape con la base dual  $(\hat{n} | = |0\rangle (J_-)^{j+m}_D$ .

No obstante, la relación entre los elementos de matriz de los operadores hermitianos sí se mantiene en el sentido siguiente:

$$D(\bar{n}' | (J_+)D | n)_D = D(\bar{n} | (J_-)D | n')_D, \quad (52)$$

que es la versión mapeada de la relación correspondiente en una base unitaria.

(10) El método de los estados coherentes

El mapeo tipo Dyson puede obtenerse equivalentemente dentro del formalismo de los estados coherentes como se verá a continuación.

Sea  $|\psi\rangle$  un vector de estado definido en una irrep  $j$  del grupo  $SU(2)$ . La realización de este vector de estado en el espacio- $z$  de estados coherentes (espacio de Bargman) la denotamos como

$$\psi(z) = \langle z | \psi \rangle \quad (53)$$

donde definimos el estado coherente generalizado mediante las relaciones

$$\langle z | = \langle 0 | e^{zJ_-}, \quad (54a)$$

$$| z \rangle = e^{zJ_+} | 0 \rangle. \quad (54b)$$

con la propiedad

$$J_- | 0 \rangle = 0. \quad (55)$$

La propiedad más importante, desde el punto de vista técnico, de los estados coherentes consiste en que cualquier operador  $\hat{O}$  puede expresarse en términos de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, cuyas realizaciones respectivas en el espacio- $z$  son

$$b \rightarrow \Gamma(b) = \frac{\partial}{\partial z}; \quad (56a)$$

$$b^\dagger \rightarrow \Gamma(b^\dagger) = z. \quad (56b)$$

y por tanto la realización para cualquier operador en este espacio se puede escribir en términos de la variable compleja  $z$ , y de su derivada  $\frac{\partial}{\partial z}$  como

$$\langle z | \hat{O} | \psi \rangle = \hat{O}(z, \frac{\partial}{\partial z}) \langle z | \psi \rangle. \quad (57)$$

En particular la realización para  $J_-$  se obtiene si utilizamos la definición del estado coherente  $\langle z | = \langle 0 | e^{zJ_-}$  con lo que

$$\begin{aligned} \langle z | j_- | \psi \rangle &= \langle 0 | e^{zJ_-} | \psi \rangle \\ &= (e^{zJ_-} J_- e^{-zJ_-}) e^{-zJ_-} | \psi \rangle \end{aligned} \quad (58)$$

ahora, si usamos la fórmula

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \text{etc.} \quad (59)$$

para aplicarla a  $J_-$ , y notamos que la serie se corta quedando solamente el primer término se llega a

$$\begin{aligned} &= \langle 0 | J_- e^{zJ_-} | \psi \rangle \\ &= \frac{d}{dz} \langle 0 | e^{zJ_-} | \psi \rangle \\ &= \frac{d}{dz} \langle z | \psi \rangle \end{aligned} \quad (60)$$

con lo que podemos identificar de inmediato el mapeo correspondiente para  $J_-$  :

$$J_- \mapsto \frac{d}{dz}. \quad (61)$$

Si utilizamos el mismo procedimiento para encontrar la realización del operador  $J_+$ , pero notando que ahora tenemos dos contribuciones en la fórmula (59) se llega a

$$J_+ \mapsto z(2j - z \frac{d}{dz}). \quad (62)$$

Para ver que efectivamente este mapeo (más específicamente el mapeo de  $(J_+)^{\dagger}$ ) es equivalente al mapeo de Dyson (50) basta con "regresar" la realización

$$\begin{aligned} z &\mapsto b^{\dagger} \\ \frac{d}{dz} &\mapsto b \end{aligned} \quad (63)$$

para obtener la misma forma del mapeo que se obtuvo en el caso de Dyson.



## Capítulo 6

---

## Mapeo Bosónico en la CDC

### 1 Resumen

En esta sección proponemos un posible procedimiento para mapear los operadores de pares de coordenadas que intervienen en el desarrollo del Hamiltoniano de la CDC, cuando se utiliza la expansión en modos normales de los campos de norma  $A_0(x)$  no en operadores de creación y aniquilación como se acostumbra hacer, sino en términos de "coordenadas"  $Q_i$  en el espacio de Hilbert de la simetría interna y de sus momentos. (Estos "momentos" se pueden definir como la derivada de la coordenada correspondiente  $\frac{\partial}{\partial Q_i}$  como aparece en el desarrollo en modos normales de los campos en el capítulo 4). La estructura del Hamiltoniano en estas coordenadas es más simple que la que se obtiene en términos de los operadores de creación y aniquilación. Con la ayuda de esta técnica, se puede tener cierta idea acerca de la definición de *pseudopartículas* formadas por "pares" de gluones y quarks, que son importantes para la descripción y entendimiento de la estructura del *vacío cromodinámico*. El Hamiltoniano escrito en términos de estas coordenadas contiene términos de dos, tres y hasta cuatro coordenadas y/o momentos acoplados a ciertas representaciones de spin y color. En particular el término cúbico en  $A_0(x)$  que aparece en la parte "magnética" del Hamiltoniano contiene acoplamientos de tres coordenadas que hacen necesaria la introducción de una descripción para sistemas con un número impar de partículas con la interpretación de que a cada partícula le está asociada una cierta coordenada y viceversa. Nuestro mapeo contempla la introducción de operadores de una coordenada y su correspondiente mapeo. El *ansatz* propuesto para el mapeo bosónico, se puede formular tanto para operadores de "coordenadas" y "momentos" bosónicos que obedecen las relaciones de conmutación usuales (relaciones de conmutación entre coordenadas y derivadas), como para operadores fermiónicos que satisfacen relaciones de *anticomutación* entre las coordenadas y los momentos. Las diferencias no son esenciales, y solo se reducen a algunos cambios de signos. Esto resulta muy importante, pues nuestro método se puede aplicar de igual forma a sistemas gluónicos y a sistemas fermiónicos como cuando se introducen quarks. Por otra parte, el formalismo se puede traducir fácilmente al lenguaje de operadores de creación y aniquilación reemplazando simplemente los momentos  $P^i \rightarrow b^i$ , y las coordenadas  $Q_i \rightarrow b_i^\dagger$ .

## 2 Introducción

Cualquier teoría cuántica de campos puede ser considerada como una teoría de muchos cuerpos, definida por un cierto Lagrangiano ó un Hamiltoniano, pero con un número infinito de grados de libertad. Sin embargo para la descripción de los estados más bajos en energía, la contribución de los niveles más altos se puede tomar en cuenta de manera efectiva en algunos sistemas, como en el caso de la Cromodinámica Cuántica en donde los niveles más altos en energía se pueden tomar en cuenta de manera *perturbativa*, mientras que para la descripción de los estados más bajos se utilizan técnicas no-perturbativas que consideran, por ejemplo sistemas confinados en una bolsa (modelo de MIT) con número discreto y finito de niveles de energía, o las formulaciones Hamiltonianas en donde se utilizan técnicas de muchos cuerpos para el estudio del problema del espectro de energías de tales Hamiltonianos como alternativa a las formulaciones en la *malla*. Debido a la estructura *simple* del espacio de Hilbert físico, la aplicación de estas técnicas no-perturbativas de muchos cuerpos, a los Hamiltonianos "regularizados" de la CDC aparecen como la mejor alternativa a los métodos de Monte-Carlo en la malla, para el cálculo de las propiedades hadrónicas, si se encuentran métodos viables para poder describir correctamente las propiedades de *escalamiento* de los observables físicos de esta teoría.

Usualmente en las formulaciones Hamiltonianas, los campos  $A_a(x)$  (campos de norma en el caso de la CDC) se desarrollan en términos de soluciones clásicas o modos normales donde aparecen los operadores de creación y aniquilación en el proceso de cuantización de tales campos. Nosotros preferimos no utilizar operadores de creación y aniquilación, sino operadores de "coordenadas" y sus derivadas. La estructura del Hamiltoniano es más clara y simple en términos de estas coordenadas, particularmente en la norma de Schwinger (Schütte, 1989), conteniendo acoplamientos de dos, tres y hasta cuatro coordenadas y/o momentos, de ciertas representaciones de spin-color. Si se quieren usar completamente las técnicas no perturbativas de muchos cuerpos para tratar con una teoría de campos cuántica, uno tiene que introducir un procedimiento apropiado de regularización para los campos de norma  $A_a(x)$ , para poder efectuar cálculos. Una forma posible de regularización de estos campos, aunque rompe la invariancia de norma, consiste en usar desarrollos finitos, truncando con algún número finito  $N$  la expansión en modos de los operadores del dicho campo. No obstante, aún en el caso en que se usan estos desarrollos con pocos modos, la solución del Hamiltoniano resulta muy complicada, y solo son viables los cálculos en la "aproximación de un nivel".

Guiados por las evidencias de otras teorías (Hansson, Johnson y Peterson, 1982), pensamos que el vacío cromodinámico está constituido principalmente por un condensado de pares de gluones y pares de quarks. Por ejemplo Hess y Viollier (1986) han realizado cálculos dentro del modelo de la Bolsa que indican que existen ciertos estados ligados de dos y cuatro gluones (glueballs), principalmente pares de gluones

y pares quark-antiquark acoplados a spin-color cero, cuya energía de enlace es mucho más fuerte que las de otros acoplamientos, e inclusive su energía resulta estar por debajo de la energía del vacío perturbativo. La experiencia de la física macroscópica ha mostrado que un buen entendimiento de la estructura del vacío puede implicar también explicaciones para muchos hechos fenomenológicos en los que intervienen básicamente las excitaciones de dicho vacío. Por ejemplo los fenómenos de Superconductividad y Superfluidez, en donde la estructura del vacío está dominada por pares fermiónicos (pares de Cooper en el caso de la superconductividad), que son una manifestación del rompimiento de la simetría de Goldstone. Es decir, que aparece una fase coherente entre los electrones, produciendo eventualmente el condensado bosónico, que da lugar, por ejemplo, al fenómeno macroscópico de la superconductividad. Inspirados por estas evidencias, proponemos un procedimiento para mapear el álgebra de los "pares de coordenadas", a coordenadas y momentos de modelo "bosónicos". Uno espera que un buen entendimiento sobre la estructura de estos "pares" conduzca de alguna manera a la definición de *pseudopartículas* formadas por pares de gluones que quizá estén relacionadas con algo real, como en el caso mencionado arriba de la superconductividad, donde estas pseudopartículas corresponden a los *pares de Cooper*.

Con este mapeo que proponemos, el espacio de Hilbert que tenemos que considerar es aún muy grande, y sigue presentando los problemas que tiene el tratamiento en muchos niveles, aunque con esto ya se ha conseguido cierta idea sobre la estructura física de la teoría. Escrito el Hamiltoniano en términos de estas coordenadas "bosónicas", se tiene que buscar un procedimiento adecuado para incluir más de un nivel en la descripción. En el capítulo siguiente, se propone un posible método para definir "bosones colectivos" que incluyan de manera efectiva la contribución de los estados más altos, reduciendo así el problema, al problema de un nivel. Es decir, el espacio de Hilbert puede reducirse a un espacio cuyos elementos esten compuestos de esos "pares colectivos". En el caso de la Cromodinámica Cuántica no se puede concluir que este método funcione. Sin embargo hasta hoy nadie sabe con certeza como tratar esta teoría con métodos no-perturbativos que requieran de poco esfuerzo numérico y además que contengan alguna idea física clara.

### 3 Formalismo de coordenadas

Para empezar con un ejemplo concreto, los campos de norma que aparecen en el Hamiltoniano se desarrollan en modos normales de la siguiente manera

$$A_\alpha(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\omega_\alpha}} f_\alpha(x) Q_{\alpha\alpha}, \quad (1)$$

$$\pi_\alpha(x) = -i \sum_{\alpha} \sqrt{\omega_\alpha} f_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha\alpha}} \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (2)$$

donde las "coordenadas"  $Q_{\alpha\alpha}$  son las coordenadas en el espacio de Hilbert subentendido por los campos ortogonales  $f_\alpha(x)$  que portan la representación de la simetría de *color* en el álgebra de Lie (en general un álgebra  $SU(N)$ ). El índice  $\alpha$  se refiere a todos los demás números cuánticos diferentes del color, y la energía de las soluciones clásicas está denotada por  $\omega_\alpha$ .

La estructura del hamiltoniano contiene, como ya hemos dicho, acoplamientos de dos, tres y cuatro coordenadas, por lo que debemos definir un *mapeo* para los operadores de pares de coordenadas, y para los operadores de una coordenada individual. Con el fin de poder definir bien nuestros campos, es necesario introducir un método de regularización, que se hace considerando un espacio de Hilbert de dimensión finita en un volumen finito. Es decir que debemos considerar desarrollos finitos en los campos de norma  $A_\alpha(x)$  en donde intervienen un número finito de grados de libertad, es decir, un número finito de coordenadas  $Q_i$   $i = 1, 2, \dots, N$  en el espacio de Hilbert.

### 4 Álgebra de los operadores de coordenadas

Nuestros operadores básicos son los operadores de una "coordenada"  $Q_i$ , y los operadores de "momento" que denotaremos como  $P^j$  de un espacio de Hilbert que satisfacen una álgebra bosónica (fermiónica): †

$$[P^i, Q_j]_{\mp} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

† De ahora en adelante el signo superior en las fórmulas corresponde al caso bosónico (conmutador), y el signo inferior al caso fermiónico (anticommutador).

$$P^i = \frac{\partial}{\partial Q_i} \quad (\text{bosones}). \quad (4)$$

donde ahora el índice simple "i" incluye al índice doble ( $\alpha\alpha$ ). Los índices arriba y abajo los utilizaremos solo para tomar en cuenta coordenadas no-cartesianas.

Los operadores de pares de coordenadas están dados por

$$Q_{ij} \equiv Q_i Q_j, \quad (5a)$$

$$P^{ij} \equiv P^i P^j, \quad (b)$$

$$C_i^j \equiv Q_i P^j \pm \frac{1}{2} \delta_i^j. \quad (c)$$

y satisfacen el álgebra  $Sp(2\mathcal{N}, \mathbb{R})$  para el caso bosónico, y el álgebra  $\mathcal{O}(2\mathcal{N})$  para el caso fermiónico:

$$[C_i^j, C_m^n] = C_i^n \delta_m^j - C_m^j \delta_i^n, \quad (6a)$$

$$[C_i^j, Q_{mn}] = Q_{in} \delta_m^j \pm Q_{im} \delta_n^j, \quad (b)$$

$$[C_i^j, P^{mn}] = -P^{mj} \delta_i^n \pm P^{nj} \delta_i^m, \quad (c)$$

$$[P^{ij}, Q_{mn}] = C_m^i \delta_n^j \pm C_n^i \delta_m^j + C_n^j \delta_m^i \pm C_m^j \delta_n^i. \quad (d)$$

En particular los operadores  $C_i^j$  generan una subálgebra que se identifica con el grupo de simetrías  $U(\mathcal{N})$  en ambos casos. Es decir que

$$Sp(2\mathcal{N}, \mathbb{R}) \supset U(\mathcal{N}) \quad \text{fermiones} \quad (7a)$$

$$\mathcal{O}(2\mathcal{N}) \supset U(\mathcal{N}) \quad \text{bosones} \quad (b)$$

Ahora bien, las relaciones de conmutación de los operadores de una coordenada con los operadores de dos coordenadas son las siguientes:

$$[Q_m, P^{ij}] = -P^i \delta_m^j \mp P^j \delta_m^i, \quad (8a)$$

$$[P^{mn}, Q_{ij}] = \pm Q_i \delta_j^m + Q_j \delta_i^n, \quad (b)$$

$$[Q_m, C_i^j] = -Q_i \delta_m^j, \quad (c)$$

$$[P^{mn}, C_i^j] = P^j \delta_i^m. \quad (d)$$

Incluyendo el álgebra de los operadores de coordenadas y momentos individuales, estamos tratando con una álgebra  $W(\mathcal{N}) \wedge Sp(2\mathcal{N}, \mathbb{R})$  (para el caso bosónico), y  $W(\mathcal{N}) \wedge \mathcal{O}(2\mathcal{N})$  (para el caso fermiónico), donde " $\wedge$ " significa el producto *semidirecto* y  $W(\mathcal{N})$  representa el álgebra de Weyl en  $\mathcal{N}$  dimensiones, cuyos elementos son  $\{Q_i, P^i, 1\}$ .

### 5 Coordenadas de modelo

Como puede verse el álgebra involucrada es complicada, lo cual hace que aún en este formalismo la estructura del Hamiltoniano no sea todo lo reducida que uno quisiera. La idea de nuestro mapeo consiste en definir coordenadas  $q_{ij}$  y derivadas  $p^{ij}$  de modelo que "correspondan" en cierto modo, a pares de coordenadas en el espacio de Hilbert original  $\mathcal{H}$ , y coordenadas "individuales" de modelo para tomar en cuenta los operadores con un número impar de coordenadas y/o momentos. Elegimos entonces unas coordenadas  $q_{ij}$  y derivadas  $p^{ij}$  pares de modelo que satisfagan una álgebra bosónica :

$$[p^{ij}, q_{mn}] = \delta_n^i \delta_n^j \pm \delta_n^i \delta_n^j. \quad (9)$$

con

$$p^{ij} = \pm p^{ji}, \quad (10a)$$

$$q_{ij} = \pm q_{ji}. \quad (10b)$$

El número de coordenadas  $q_{ij}$  es el número de combinaciones posibles de dos bosones (fermiones). Es decir que tenemos  $\frac{N(N\pm 1)}{2}$  coordenadas de pares.

Al mismo tiempo tenemos que definir un mapeo para los operadores de coordenadas individuales; para ésto elegimos unas coordenadas y derivadas individuales de modelo  $Q_i$  y  $P^j$  que satisfagan la misma álgebra (3) de nuestras coordenadas originales. Es decir

$$\{P^i, Q_j\}_{\mp} = \delta_j^i. \quad (11)$$

### 6 Ansatz. Parte Par

El mapeo que proponemos como *Ansatz* se basa en un criterio de simplicidad. La condición primordial que debemos satisfacer debe ser que el mapeo preserve todas las relaciones de conmutación del álgebra original <sup>1</sup>. Nuestro mapeo procura mantener

<sup>1</sup> En el apéndice: Mapeo Bosónico, se indican con más detalle los cálculos

invariante la subálgebra  $U(\mathcal{N})$ . Siguiendo este criterio, los operadores de pares de coordenadas  $Q_{ij}$  se mapean directamente a las coordenadas *pares* de modelo i.e.

$$Q_{ij} \mapsto q_{ij}. \quad (12)$$

Evidentemente no podemos hacer lo mismo con los operadores de pares de momentos  $P^{ij}$ . La suposición más simple para un posible mapeo de estos operadores consiste en definirlo en términos de los momentos *pares*  $p^{ij}$ , y de objetos que se transformen de la misma manera bajo el subgrupo "invariante"  $U(\mathcal{N})$ , por ejemplo en términos de una combinación lineal de los operadores de momentos y su conmutador con operadores de Casimir. Normalmente este operador se toma como el operador de Casimir de segundo orden, de algún grupo  $U(\mathcal{N})$ , pero no es suficiente con tomar en cuenta sólo el Casimir del grupo  $U_{q+\mathcal{Q}}(\mathcal{N})$ . Uno tiene que incluir también los operadores de Casimir de los grupos  $U_q(\mathcal{N})$ , y  $U_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N})$ .

La proposición concreta es :

$$P^{ij} \mapsto [\alpha_1 \Gamma^{q+\mathcal{Q}} + \alpha_2 \Gamma^q, p^{ij}] + \alpha_3 p^{ij}. \quad (13)$$

donde  $\Gamma^{q+\mathcal{Q}}$  y  $\Gamma^q$  son operadores del tipo de los operadores de Casimir definidos por las relaciones

$$\Gamma^q = \sum_{mn} C_m^n C_n^m \quad (14a)$$

$$\Gamma^{q+\mathcal{Q}} = \sum_{mn} (C_m^n + B_m^n)(C_n^m + B_n^m) \quad (14b)$$

con los operadores "unitarios"  $C$  y  $B$  definidos por

$$C_m^n \equiv \sum_k q_{ik} p^{jk}, \quad (15a)$$

$$B_m^n \equiv \mathcal{Q}_m p^n \pm \frac{1}{2} \delta_m^n, \quad (15b)$$

donde los coeficientes del mapeo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  se determinan a partir de la condición de mantener las relaciones de conmutación (anticonmutación) del álgebra original.

Hay que destacar el hecho de que la parte *impar* correspondiente a los operadores de coordenadas individuales  $\mathcal{Q}$  se combinan con los operadores de *pares* de coordenadas  $q_{ij}$  en la definición del operador de Casimir  $\Gamma^{q+\mathcal{Q}}$ , por lo que el mapeo del operador  $P^{ij}$  contendrá contribuciones explícitas de la parte impar.



De igual manera se propone el siguiente mapeo para los operadores unitarios de la subálgebra  $U(\mathcal{M})$ :

$$C_i^j \mapsto \gamma(C + B) \quad (16)$$

con el coeficiente  $\gamma$  también a determinar a partir de las relaciones de conmutación (anticommutación).

La forma explícita del mapeo, después de probar las reglas de conmutación resulta ser:

$$Q_{ij} \mapsto q_{ij} \quad (17a)$$

$$P^{ij} \mapsto \sum_k \left( \frac{1}{2} C_k^i + B_k^j \right) p^{kj} \pm (i \leftrightarrow j) \quad (17b)$$

$$C_i^j \mapsto C_i^j + B_i^j. \quad (17c)$$

## 7 Ansatz. Parte Impar

También tenemos que mapear los operadores de un bosón individual a un bosón *ideal*, siguiendo el mismo procedimiento. El *ansatz* más sencillo tiene la forma:

$$Q_i \mapsto \beta_1 \varrho_i + \beta_2 \sum_k q_{ik} P^k. \quad (18a)$$

$$P^j \mapsto \beta_3 P^j + \beta_4 \sum_k p^{jk} \varrho_k + [\beta_5 \Gamma^{\vartheta+\varrho} + \beta_6 \Gamma^{\varrho}], P^j]. \quad (18b)$$

En este caso se ha tenido que introducir desde el principio el término  $\sum_k q_{ik} P^k$  en la definición del *ansatz* para el mapeo de  $Q_i$  para asegurar que las relaciones de conmutación (anticommutación) se satisfagan exactamente. Físicamente este término representa un operador que "aniquila" una coordenada individual, para combinarse con otra y "crear" un par. En este punto hay que tener especial cuidado en el mapeo de la relación

$$[P^i, Q_j] = \delta_j^i \quad (19)$$

ya que se satisface exactamente solo si se aplica en el subespacio físico de modelo tal y como se define más abajo<sup>2</sup>.

El mapeo explícito está dado por las siguientes relaciones:

$$Q_i \rightarrow \rho_i + \sum_k q_{ik} P^k \quad (20a)$$

$$P^j \rightarrow \frac{3}{2} P^j \pm \sum_k p^{jk} \rho_k \pm \sum_k (C_k^j - B_k^j) P^k. \quad (20b)$$

El mapeo del álgebra de pares ha sido bien explicado ya en el trabajo de Hecht (K.T. Hecht, 1987) mientras que el mapeo de la parte "impar" de coordenadas individuales se ha hecho en analogía con el trabajo de Klein y Marshalek (A. Klein y E.R. Marshalek, 1991), solo que allí se ha formulado el mapeo de la parte impar para el caso en que los operadores básicos son fermiónicos en el contexto de la física nuclear.

Cabe mencionar que el mapeo de arriba tiene propiedades similares a las del mapeo de Dyson, en el sentido de que se trata de un desarrollo finito de los operadores mapeados, que conduce a operadores no-hermitianos. Es decir que se cumplen todas las relaciones de conmutación, pero no las relaciones de hermiticidad entre los operadores, como se puede ver fácilmente. Ya hemos dicho anteriormente que ésta no es ni siquiera una dificultad ya que no estamos interesados en realizaciones unitarias. El poder del método radica en el hecho de poder reproducir el espectro de un hamiltoniano, cuyo cálculo exacto puede resultar muy difícil, y esto no depende en absoluto de que trabajemos en una representación unitaria o no.

Resumiendo, el *Ansatz* propuesto para el mapeo bosónico se escribe, utilizando un "truco" para regresar a nuestros conmutadores con operadores de "Casimir", de la siguiente manera:

$$Q_{ij} \rightarrow q_{ij} \quad (21a)$$

$$P^{ij} \rightarrow \frac{1}{2} [\Gamma, p^{ij}] - \frac{1}{2} (\mathcal{N} \pm 1) p^{ij} \quad (21b)$$

$$C_i^j \rightarrow C_i^j + B_i^j \quad (21c)$$

$$Q_i \rightarrow \rho_i + \sum_k q_{ik} P^k \quad (21d)$$

$$P^j \rightarrow \pm \frac{1}{2} [\Gamma, P^j] \pm \frac{1}{2} (\mathcal{N} \pm 3) P^j \pm \sum_k p^{jk} \rho_k. \quad (21e)$$

<sup>2</sup> El subespacio físico de modelo contiene a lo más una coordenada individual de modelo  $\rho_i$ .

donde  $\Gamma$  es el operador :

$$\Gamma = -\Gamma^q + \hat{\rho} + \frac{1}{2}\Gamma^q + 2\Gamma\hat{\rho}. \quad (22)$$

Los operadores  $\Gamma^q$ ,  $\Gamma\hat{\rho}$ , y  $\Gamma^q + \hat{\rho}$  están relacionados con operadores de Casimir de segundo orden de grupos unitarios  $U(\mathcal{N})$ , donde  $(\mathcal{N})$  es el número de grados de libertad del sistema (p. ej.  $2(\text{spin}) \times 3(\text{color}) \times 2(\text{flavour}) = 12g.l.$ ).

### 8 El espacio de Hilbert ideal

El espacio de Hilbert de modelo formado de funciones polinómicas en  $q_{ij}, p^{ij}$  y en  $Q_i, p^j$ , se divide en un subespacio físico ( $\mathcal{H}_f$ ), y un subespacio no-físico ( $\mathcal{H}_{nf}$ ). Cuando tenemos en el espacio original un operador con un número par de coordenadas  $Q_i$  p.ej.  $Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_{2n-1}} Q_{i_{2n}}$  nosotros lo mapeamos en  $q_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4} \dots q_{i_{2n-1} i_{2n}}$ . Esto implica una cierta ambigüedad ya que podemos aplicar cualquier permutación en los índices y luego volver a mapear, p.ej.  $Q_{i_1} Q_{i_2} Q_{i_3} Q_{i_4}$  puede ser mapeado ya sea a  $q_{i_1 i_2} q_{i_3 i_4}$ , o a  $q_{i_1 i_3} q_{i_2 i_4}$  y otras posibles combinaciones.

Cuando consideramos una potencia impar de coordenadas  $Q_i$ 's por otra parte, formamos, como arriba, pares de  $Q_i$ 's y la última coordenada *impar*  $Q_{i_{2n+1}}$  a una coordenada individual "ideal"  $Q_{i_{2n+1}}$ , con una ambigüedad similar a la que se ha discutido arriba. El punto crucial es que sólo nos quedamos "a lo más" con una coordenada "impar" en nuestro subespacio ideal físico, es decir que el subespacio físico sólo tiene una coordenada  $Q_i$ , y el mapeo tiene la forma general :

$$Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_{2n-1}} Q_{i_{2n}} Q_{i_{2n+1}}^{\delta} \rightarrow q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{2n-1} i_{2n}} Q_{i_{2n+1}}^{\delta}. \quad (23)$$

con  $\delta = 0$  o  $1$ .

Los estados físicos en nuestro espacio ideal de Hilbert deben satisfacer la condición necesaria de contener "a lo más" una coordenada individual de modelo  $Q_i$ . En el caso en que se trabaje con operadores de creación y aniquilación se tratará a lo más de un bosón (fermión) ideal. Los estados *espurios* (no-físicos) son, por ejemplo, aquellos que contienen más de una coordenada individual de modelo  $Q_i$ . Con las condiciones de arriba todas las relaciones de conmutación se satisfacen exactamente cuando se aplican sobre el subespacio ideal físico. Sin embargo el mapeo de la coordenada  $Q_i$  cuando se aplica sobre este subespacio, nos lleva al subespacio no-físico, debido a la presencia del operador de coordenada ideal  $Q_i$ , el cual, cuando se aplica sobre  $Q_j$  simplemente nos da  $Q_i Q_j$ , que está fuera del espacio físico. Para evitar que nuestro Hamiltoniano

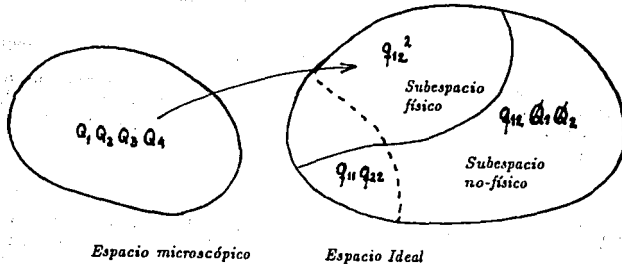


Figura (6.1) Mapeo del espacio de Hilbert

mapendo "saque" a los estados del subespacio físico, se pueden introducir operadores de proyección apropiados,  $(1 - N)$  a la derecha del operador  $Q_i$ , y  $N$  delante de  $P_i$  para permitir a lo más una sola coordenada ideal  $Q_i$ , pero en este caso la regla de conmutación (19) no se satisface exactamente.

Para aclarar la ambigüedad que se presenta en las "diferentes" formas en que se pueden mapear los operadores del espacio original, tenemos que investigar más la estructura de los grupos involucrados.

El ansatz propuesto arriba, mapea el grupo *producto directo* del álgebra de Weyl de las coordenadas originales  $W(\mathcal{N})$  con el grupo unitario  $U(\mathcal{N})$  formado por los operadores binarios de coordenadas y momentos (5c) de la siguiente manera:

$$W_Q(\mathcal{N}) \wedge U(\mathcal{N}) \rightsquigarrow \{W_q(\mathcal{N}(\mathcal{N} \pm 1/2)) \times W_{\rho}(\mathcal{N})\} \wedge U_{q+\rho}(\mathcal{N}). \quad (24)$$

Es decir que el mapeo conduce al producto semidirecto de los grupos de Weyl formados por las coordenadas y momentos de modelo pares  $W_q$  (9), e impares  $W_{\rho}$  (11) con el grupo unitario  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$  formado por los operadores unitarios mapeados  $C_i^j + B_i^j$  Ec(15a-b).

Ahora bien, se pueden construir separadamente dos grupos unitarios formados por los operadores  $C_{ik}^{jk} = q_{ik} p^{jk}$ , del grupo  $U_q(\mathcal{N}(\mathcal{N} \pm 1/2))$ , y los operadores  $B_i^j = \rho_i p^j$  que substituyen el grupo  $U_{\rho}(\mathcal{N})$ . Ellos forman un grupo producto directo que contiene como subgrupo al grupo  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$  cuyos generadores son  $C_i^j$ , es decir

$$U_q(\mathcal{N}(\mathcal{N} \pm 1)/2) \times U_{\rho}(\mathcal{N}) \supset U_{q+\rho}(\mathcal{N}). \quad (25)$$

Para el caso en que nuestras partículas bosónicas (fermiónicas) se consideren fundamentales, el espacio físico está dado por la irrep completamente simétrica  $[2N_q + \delta]$  (antisimétrica  $[1^{2N_q + \delta}]$ ) del grupo  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$ . Sin embargo, en general, se tiene la cadena de reducción

$$[N_q] \times [\delta] \rightarrow [f] \quad (26)$$

Donde el espacio físico está dado por las representaciones  $[f] = [2N_q + \delta]$  para bosones, y  $[1^{2N_q + 1}]$  para fermiones. La irrep  $[1]$  del grupo  $U_q(\mathcal{N}(\mathcal{N} \pm 1)/2)$  se mapea a las irreps  $[2]$  ( $[1^2]$ ) de  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$ , mientras que la irrep  $[1]$  de  $U_{\rho}(\mathcal{N})$  se mapea a la irrep  $[1]$  de  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$ . Debido a esto, la representación  $[N_q]$  ( $[1^{N_q}]$ ) del grupo  $U(\mathcal{N}(\mathcal{N} \pm 1)/2)$  se mapea a las irreps de  $U_{q+\rho}(\mathcal{N})$  del tipo  $[f] = [2f_1, 2f_2, \dots]$  ( $[1^{\bar{f}}] = [2f_1, 2f_2, \dots]$ ), donde  $[1^{\bar{f}}]$  es la irrep adjunta de  $[f]$ . Sin embargo en la descomposición (26), también pueden aparecer otras irreps. Por ejemplo en el caso de bosones el estado  $q_{i_1 j_1} q_{i_2 j_2} - q_{i_1 i_2} q_{j_1 j_2}$  está perfectamente definido, pero no es simétrico bajo la permutación de  $(j_1 \leftrightarrow i_2)$ . Uno lo puede ver fácilmente si "invertimos" el mapeo  $q_{i_1 i_2} \rightarrow Q_{i_1} Q_{i_2}$  cuyo efecto resulta ser cero, por ejemplo. En principio uno tiene que utilizar los operadores de proyección que resultan ser desagradables. La forma de hacerlo se explica muy bien en (J. Dobaczewskij, 1981). Sin embargo se puede dar la vuelta a esta dificultad, como veremos en seguida.

## 9 Cálculo de Elementos de Matriz

Para comenzar consideremos un monomio  $\psi_{\mu}$  en las coordenadas  $Q_i$ . Es decir, por el momento nos quedamos en el espacio "microscópico". Aún más, consideramos aquí solo el caso bosónico. Para el caso fermiónico lo que sigue se hace de manera análoga, teniendo cuidado con la parte de integración. Cuando aplicamos cualquier generador  $\hat{X}$  de nuestra álgebra (6) a este monomio, simplemente tenemos que conmutar  $\hat{X}$  con  $\psi_{\mu}$  para tener como resultado una combinación lineal de los monomios de la forma

$$\hat{X} \psi_{\mu} = \sum_{\mu'} M_{\mu\mu'} \psi_{\mu'}. \quad (27)$$

Ahora bien si mapeamos esta expresión, mapeando al mismo tiempo el generador  $\hat{X} \rightarrow (\hat{X})$  y los monomios  $\psi_{\mu}$  de la manera en que se discutió arriba, sin preocuparnos de la

ambigüedad que se presentó en el mapeo, y asegurándonos de que se siguen cumpliendo las mismas relaciones de conmutación del álgebra original (ecs. 6 y 8), la acción

$$(\hat{X})\phi_\mu = \sum_{\mu'} M_{\mu\mu'}\phi_{\mu'}, \quad (28)$$

donde  $\psi_\mu \rightarrow \phi_\mu$ , con  $\phi_\mu$  simétrico para el caso bosónico (antisimétrico para el caso fermiónico), nos da por construcción los mismos elementos de matriz que (27). Por lo tanto para calcular los elementos de matriz, es suficiente con mapear los monomios de manera apropiada como se ha indicado arriba. Lo mismo puede decirse entonces cuando comenzamos con el espacio "de modelo" eligiendo convenientemente los monomios  $\phi_\mu$  y mapeando de regreso al espacio microscópico compuesto de  $\psi_\mu$ 's que por construcción son simétricos.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es extremadamente difícil simetrizar (o antisimetrizar para el caso de fermiones) los estados mapeados  $\phi_\mu$  que resultan de  $\psi_\mu$  en el espacio de "modelo". Uno quisiera trabajar en un espacio de "modelo" con una estructura simple. En particular, exhibiendo una estructura especial de pares, que se perdería a la hora de la simetrización. Ilustraremos esta situación con un ejemplo: supóngase que se tiene un sistema bosónico con tres grados de libertad, es decir, el oscilador armónico tridimensional, y que estamos interesados solo en las soluciones de momento angular cero. Usamos como operadores de creación de bosones a los operadores  $b_m^\dagger$ , ( $m = -1, 0, +1$ ) que llevan momento angular uno. Un estado de momento angular cero es proporcional a

$$\psi_0 \sim ([b^\dagger \times b^\dagger]_0^0 | 0 \rangle), \quad (29)$$

donde  $|0\rangle$  es el vacío bosónico microscópico, y el corchete con la cruz indican el acoplamiento de momento angular estándar. Cuando mapeamos al espacio de "modelo", el vacío microscópico se mapea en el vacío de "modelo"  $|0\rangle$ , y, como una posibilidad, mapeamos  $[b^\dagger \times b^\dagger]$  en  $\beta_{00}^\dagger$ .

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad (30)$$

$$[b^\dagger \times b^\dagger] \rightarrow \beta_{00}^\dagger. \quad (31)$$

Los estados correspondientes de modelo tienen entonces la forma  $(\beta_{00}^\dagger | 0 \rangle)$ . Hay que notar sin embargo, que el estado  $\phi_\mu$  no es simétrico. La simetrización crearía otros pares como por ejemplo, los pares  $\beta_{1=2,m}^\dagger$ , lo cual se puede ver si se hace un reacomplamiento ( $[b^\dagger \times b^\dagger]_0^2$  resulta en términos de  $[b^\dagger \times b^\dagger]^2 \times [b^\dagger \times b^\dagger]_0^0$ ). Si nos

restringimos solamente a los estados  $\beta_{j0}^\dagger$  tenemos en los estados  $\phi_\mu$  una imagen uno a uno de los estados  $\psi_\mu$ . El problema ahora es el siguiente: cómo nos aseguramos de que no se abandone este espacio. Este es precisamente el lugar en donde entran los problemas normalmente, es decir, la aplicación de un operador arbitrario  $\hat{O}$  sobre  $\phi_\mu$  genera, en general, expresiones que involucran a los pares  $\beta_{2m}^\dagger$ . Afortunadamente hay algunas posibilidades de prevenir esto. Por ejemplo en vez de mapear arbitrariamente un operador  $\hat{O}$  en  $(\hat{O})$ , uno debe ver primero si por un reordenamiento de los operadores microscópicos ( $b_{1m}^\dagger$  y  $b_{1m}$  en nuestro ejemplo) en el operador  $\hat{O}$ , uno puede conseguir una expresión equivalente, que después de mapearse solo contenga los pares que aparecen en nuestro "espacio de modelo conveniente" compuesto de los  $\phi_\mu$ 's. Por ejemplo el operador de Casimir de segundo orden de  $U(3)$ , en coordenadas cartesianas, tiene la forma

$$C_{ij} = b_i^\dagger b_j \quad (32)$$

o equivalentemente, la forma

$$C_{ij} = \hat{N}(\hat{N} + 2) \quad \hat{N} = \sum_i b_i^\dagger b_i \quad (33)$$

En el primer caso cuando  $C_{ij}$  se mapea vía (16), con los operadores unitarios (15), todos los estados se mezclarán, mientras que en el segundo caso,  $\hat{N}$  sigue siendo diagonal en el espacio de modelo, es decir, en los  $\phi_\mu$ 's.

Para otros operadores la receta es tal que uno tiene que escribir primero los operadores en orden normal. En el caso de nuestras coordenadas  $Q$  y derivadas  $\frac{\partial}{\partial Q}$  esto corresponde a escribir primero todas las coordenadas a la izquierda, y todas las derivadas a la derecha. Entonces aplicamos el mapeo dictado por (21). Las expresiones resultantes incluyen operadores  $p^{ij}, p^i$ , y coordenadas  $q_{ij}, q_i$ . Una vez hecho esto; volvemos a escribir el resultado en orden normal usando las relaciones de conmutación de los operadores. La pregunta ahora es si uno puede reordenar la parte que depende de  $q_{ij}, q_i$ , en tal forma que solo se involucren los pares que aparecen en los  $\phi_\mu$ 's. (la parte de derivadas que actúan sobre  $\phi_\mu$  no puede crear otros pares sino solo puede aniquilar los ya existentes). Este paso incluye el ir al espacio microscópico vía el inverso del mapeo (21a), reordenar y entonces volver a mapear, usando el mapeo (21a). Como ejemplo tenemos el siguiente operador

$$\hat{A} = q_{ij} q_{nm} \rightarrow Q_i Q_j Q_n Q_m = Q_i Q_n Q_j Q_m \rightarrow \hat{B} = q_{in} q_{jm} \quad (34)$$

que define la misma acción.

No hay garantía de que esto funcione en todos los casos, pero en muchos ejemplos que hemos tratado funciona. Este procedimiento debe verse como una receta, o una forma sistemática de trabajar en el espacio de Hilbert ideal.

Queremos remarcar por último, que la razón de esos problemas yace en la ambigüedad que se tiene en el mapeo del estado microscópico  $\psi_\mu$  al estado de modelo  $\phi_\mu$ . Existen muchos estados equivalentes  $\phi_{\mu j}$  (véase el último ejemplo) que corresponden al mismo estado  $\phi_\mu$ . El problema es cómo restringimos a un subespacio del espacio de modelo con la misma dimensión que el espacio microscópico y donde un  $\phi_\mu$  corresponda a uno y solo un  $\psi_\mu$ . Los operadores tienen que mapearse también en tal forma que no abandonen este subespacio, lo cual no se garantiza siempre!. La ventaja de nuestra "receta" es que para manipular los operadores apropiadamente, es mucho más fácil que simetrizar (antisimetrizar) los estados en el caso de sistemas bosónicos (fermiónicos).

Supóngase que se ha resuelto el problema anterior. Ahora podemos preguntarnos si es posible encontrar una forma más fácil de calcular los elementos de matriz  $M_{\mu\mu}$  recurriendo a nuestro mapeo y usando nuestra receta para mapear los estados. La respuesta es afirmativa!

Supongamos que tenemos una función arbitraria en las coordenadas de modelo  $q_{ij}$ , que puede expandirse en serie de Taylor en términos de monomios  $\phi_\mu$ . Por construcción las relaciones anteriores (27) y (28) siguen cumpliéndose. Lo único en que debemos tener cuidado es en no permitir más de una coordenada individual  $Q_i$ . Es decir que los monomios  $\phi_\mu$  son de la forma

$$\phi_\mu = \phi_\mu(q) Q_i^\delta, \quad (35)$$

con  $\delta = 0$ , o 1. Cualquier función es entonces una combinación lineal de estos monomios, que pueden ser elegidos de manera que formen una base completa. La función correspondiente  $\psi_\mu$  en el espacio microscópico puede obtenerse invirtiendo el mapeo  $q_{ij} \rightarrow Q_i Q_j$  y  $Q_i \rightarrow q_{ij}$ . Lo interesante de esta "inversión" consiste en el hecho de que si  $\phi_\mu$  corresponde a un estado no-físico, es decir, no es simétrico (antisimétrico) en  $U_{q+\frac{1}{2}}(\mathcal{N})$ , el estado correspondiente en el espacio microscópico simplemente desaparece. No puede ser diferente de cero pues se cumplirán las relaciones (27) y (28).

Ahora escogamos  $\phi_\mu$  de manera que formen una base completa ortonormal respecto de alguna medida conveniente  $d\tau$ , es decir que

$$\int d\tau \phi_\mu^* \phi_\mu = \delta_{\mu\mu'}. \quad (36)$$

Con esta elección podemos obtener los elementos de matriz  $M_{\mu\mu}$  multiplicando la ecuación (28) por la izquierda con  $\phi_\mu^*$  e integrando:



$$\int d\tau \phi_{\mu}^*(\hat{X}) \phi_{\mu} = M_{\mu\mu}. \quad (37)$$

No importa que medida  $d\tau$  tomemos o que conjunto  $\{\phi_{\mu}\}$  usemos. Lo importante es que elijamos  $\phi_{\mu}$  de manera que se cumpla la relación de ortogonalidad con respecto de esa medida. En el caso en que se usen operadores de creación y aniquilación en vez de coordenadas, se tienen que asociar a estas unas coordenadas complejas (método de estados *coherentes*) y utilizar monomios que sean ortogonales respecto de la medida de Bargman (K.T.Hecht, 1987).

Como hemos construido los monomios en el espacio de modelo, las funciones correspondientes en el espacio microscópico se obtienen simplemente invirtiendo el mapeo como se ha mencionado arriba. Las funciones resultantes  $\psi_{\mu}$  en general no son ortogonales en la medida usual del espacio microscópico, y aún ellas pueden desaparecer cuando no tengan componente simétrica. Esta es la razón por la cual un Hamiltoniano microscópico hermitiano resulta después del mapeo en un Hamiltoniano no-hermitiano respecto de la nueva medida. Simplemente uno no ha "mapeado" de manera correcta la medida.

#### 10 Ejemplo: Un Hamiltoniano de Juguete

Como una primera aplicación de nuestro método vamos a considerar el caso de un Hamiltoniano muy simple : Un Hamiltoniano para un sistema de *gluones de juguete* de un solo grado de libertad. Es decir, que depende de una sola coordenada  $Q$  y un solo momento (derivada)  $P$  "bosónicos".

Consideremos el Hamiltoniano de la forma :

$$H = Q^2 - P^2 + gQ^3 + g^2Q^4 \quad (38)$$

donde los dos primeros términos juegan el papel de "cero interacción", equivalente salvo un factor, al hamiltoniano del oscilador armónico en una dimensión (recordemos que el momento se ha definido aquí como el operador de derivada para el caso bosónico, sin el factor imaginario "i" como suele hacerse en la mecánica cuántica elemental). El tercer y cuarto término juegan el papel análogo a la parte de interacción magnética del Hamiltoniano real de la CDC, es decir los términos cúbico y de cuarto orden en los campos de norma  $A_0(x)$ .

El operador de coordenada  $Q$ , y el operador de "momento"  $P$  satisfacen la relación de conmutación para bosones:

$$[P, Q] = 1 \quad (39)$$

A partir de estos operadores básicos, podemos construir los operadores de pares de coordenadas  $Q^2$  y momentos  $P^2$ , así como también los operadores unitarios  $C = QP + \frac{1}{2}$ . El álgebra que subtienden estos operadores es el álgebra "simpléctica"  $Sp(2, R)$  definida por las relaciones (véanse las ecuaciones (6)) :

$$[P^2, Q^2] = 4C \quad (40a)$$

$$[P^2, C] = 2P^2 \quad (40b)$$

$$[Q^2, C] = -2Q^2 \quad (40c)$$

A continuación, vamos a mapear estos operadores binarios en términos de operadores de una coordenada y un momento ideal de pares bosónicos "no-normalizados"  $q, p$ , que satisfacen la siguiente relación

$$[p, q] = 2, \quad (41)$$

de una coordenada y un momento individual de modelo  $\varrho, P$  que satisfacen la misma álgebra que nuestros operadores de coordenada y momento originales, i.e.

$$[P, \varrho] = 1. \quad (42)$$

Hay que notar que en la relación  $[p, q] = 2$  se ha puesto de tal modo que esté de acuerdo con nuestra definición general de los operadores bosónicos de pares de modelo (ec.9) no-normalizados.

Nuestro *ansatz* en este caso está dictado por las siguientes relaciones :

$$Q^2 \rightarrow q \quad (43a)$$

$$P^2 \rightarrow qp^2 + 2\varrho Pp + p \quad (43b)$$

$$C \rightarrow qp + \varrho P + \frac{1}{2} \quad (43c)$$

$$Q \rightarrow \varrho + qP \quad (43d)$$

$$P \rightarrow P + p\varrho + CP \quad (43e)$$

donde el operador unitario  $C$  está definido por  $C \equiv qp$  ( se han quitado términos proporcionales a  $P^2$  dado que, por construcción, cuando se aplican a los estados en el "espacio físico", dan cero).

Ahora bien, podemos "renormalizar" nuestras coordenadas de modelo  $q, p$  para que tengamos la relación de conmutación *bosónica* usual. Es decir, si definimos las coordenadas bosónicas de modelo como

$$p' = \frac{1}{\sqrt{2}} p \quad (44a)$$

$$q' = \frac{1}{\sqrt{2}} q \quad (44b)$$

con la regla de conmutación bosónica usual

$$[p', q'] = 1, \quad (45)$$

el mapeo cambia de manera correspondiente. Sólo mencionamos explícitamente el cambio de forma del mapeo del operador unitario:

$$C \rightarrow 2q'p' + \mathcal{H}P + \frac{1}{2} \quad (46)$$

En el caso en que se hubieran elegido los operadores de creación y aniquilación usuales ( $q' \rightarrow b^\dagger, p' \rightarrow b$ ), los dos primeros términos del mapeo de  $C$  se relacionan con opera-

en coordenadas "renormalizadas". El factor  $N_{2n+\epsilon}$  corresponde al factor de normalización de nuestra nueva base. El índice "n" hace el papel del índice de "pares", y el índice  $\epsilon$  como índice de coordenada individual de modelo en el estado  $|2n + \epsilon\rangle$ .

Como nuestra coordenada ideal  $q$  ahora sólo toma valores positivos, pues representa a un "par" ( $QQ$ ) que siempre es "positivo", debemos elegir una métrica adecuada donde los estados  $|2n + \epsilon\rangle$  definidos por (48) formen una base ortonormal. Después de todo esta elección la podemos hacer con cierta libertad como se explicó más arriba en la sección del cálculo de elementos de matriz. La métrica que "elegimos" para la parte "par" tiene la forma

$$\frac{dq^2}{\sqrt{q}}, \quad (49)$$

tomando como intervalo de integración  $0 \leq q' \leq \infty$ . La razón por la que elegimos esta forma particular de la base, se debe a que realizando la simple sustitución  $q' \rightarrow x^2$  recuperamos las funciones usuales del oscilador armónico (sólo que la integración se realiza sobre un intervalo diferente), y los elementos de matriz del Hamiltoniano se pueden calcular con relativa facilidad. Esto no quiere decir que hallamos recuperado el caso de un oscilador armónico unidimensional, ya que aún queda la parte impar  $Q$ .

Para la parte impar elegimos una métrica "análoga" a la métrica usual para los estados de oscilador armónico i.e.

$$dq e^{-\rho q^2}, \quad (50)$$

con el intervalo de interacción  $-\infty \leq q \leq \infty$ .

## 11 Normalización de la base impareda

Para encontrar la normalización correcta de los estados  $|2n + \epsilon\rangle$  recurrimos a las fórmulas (14), (17) y (19) del Apéndice 4, para evaluar las integrales del tipo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}q} H_{2m}(\sqrt{\sqrt{2}q}) H_{2n}(\sqrt{\sqrt{2}q}). \quad (51)$$

Con ayuda de las fórmulas anteriores se tiene que el producto escalar entre dos estados está dado por

$$\langle 2m + \rho | 2n + \epsilon \rangle =$$

$$\mathcal{N}_{2m+\rho}\mathcal{N}_{2n+\epsilon} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}q} H_{2m}(\sqrt{2}q) H_{2n}(\sqrt{2}q) \int_{-\infty}^{+\infty} dQ e^{-Q^2} Q^{\rho+\epsilon}. \quad (52)$$

Es fácil ver que la segunda integral, que corresponde a la normalización de la parte impar es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dQ e^{-Q^2} Q^{\rho+\epsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\epsilon} \delta_{\epsilon,\rho}. \quad (53)$$

por lo que la normalización para los estados  $|2n + \epsilon\rangle$  es

$$\mathcal{N}_{2n+\epsilon} = \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2^\epsilon} 2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi} \frac{1}{2!} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (54)$$

$$\langle 2m + \rho | 2n + \epsilon \rangle = \delta_{m,n\rho,\epsilon} \quad (55)$$

## 12 Espectro de Energías

La diagonalización del Hamiltoniano en el espacio de Hilbert microscópico, como función de la constante de "acoplamiento" es directa, por lo que podemos comparar los resultados obtenidos con el cálculo exacto, y la diagonalización realizada en el espacio de modelo subentendido por la base (48), de nuestro Hamiltoniano de juguete. De este modo podemos evaluar si la versión contraída nos lleva a los mismos resultados como debe ser, y si es útil el método que hemos desarrollado. Cabe notar aquí, sin embargo que la forma del Hamiltoniano contraído resulta más complicada que la forma de nuestro Hamiltoniano original, pero este modelo de juguete sólo nos sirve para darnos una primera idea del mecanismo y funcionamiento de nuestro método. En los problemas más realistas donde se trabaja con Hamiltonianos complicados, la aproximación nos conduce a formas más simples para el correspondiente Hamiltoniano contraído.

La figura (6.2) muestra el espectro de energías para el Hamiltoniano exacto calculado en la base del oscilador armónico unidimensional (línea continua) y el cálculo para el Hamiltoniano contraído en la base mapeada (línea interrumpida). Como debe ser los resultados son los mismos, excepto para valores de "g" muy altos por razones de convergencia numérica, que puede mejorarse. En el cálculo presente se considero un espacio de Hilbert de tan sólo 40 giunons. Para los estados más bajos el acuerdo es casi perfecto entre los dos cálculos, mientras que para los estados excitados más altos

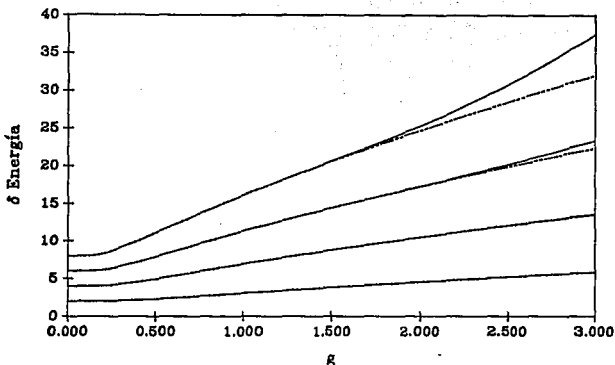


Figura (6.2) Espectro de energías para el Hamiltoniano de juguete

(tercero y cuarto estados excitados) empieza a haber una desviación para valores de la constante  $g$  grandes. Esto es un efecto de la convergencia para la versión contraída.

La conclusión que podemos sacar de este cálculo sencillo es que nuestro método funciona muy bien y nos da un acuerdo casi perfecto en la descripción del primero y segundo estados excitados, mientras que para los estados excitados más altos existe un intervalo suficientemente grande en donde el acuerdo es excelente. También se observa que para los estados más altos se debe tener en cuenta que los efectos de convergencia pueden dar resultados no muy exactos para valores "grandes" de la constante  $g$  aunque esto se puede mejorar aumentando el tamaño del espacio ideal.

En este caso no existe el problema de los estados espurios ya que el grupo unitario relacionado con los  $p$ 's y  $q$ 's es  $U_q(1)$  (solo tenemos un grado de libertad) y lo mismo se tiene para  $U_{\hat{p}}(1)$  y  $U_{\hat{q}+\hat{p}}(1)$ . Todos estos grupos permiten solamente representaciones simétricas. Es decir  $[N_q]$  para  $U_q(1)$ ,  $[1]$  para  $U_{\hat{p}}(1)$  y  $[2N_q + 1]$  para  $U_{\hat{q}+\hat{p}}(1)$ .

## Capítulo 7

---

## Bosones Colectivos

### 1 Idea

En el capítulo anterior se apuntó ya que la solución del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica incluyendo muchos niveles resulta ser muy complicada y que los cálculos más viables son los cálculos en la aproximación de un nivel. Sin embargo es deseable tener una forma de incluir el efecto de los niveles más altos, por ejemplo de manera efectiva, sobre los niveles más bajos, y en particular sobre la estructura del estado base (vacío). Las evidencias que hay en favor de la hipótesis de que el vacío está constituido principalmente por un condensado de pares de gluones y pares de quarks nos llevó a la formulación de un método de expansión bosónica propuesto en el capítulo anterior donde se planteó la idea de poder definir pseudopartículas formadas por pares de gluones (glueballs) ó pares de quarks en términos de las cuales se pudiera hacer una descripción más transparente de la estructura del Hamiltoniano. Con este mapeo que hemos propuesto, aún se sigue teniendo un espacio de Hilbert muy grande, y la resolución del Hamiltoniano en más de un nivel resulta muy complicada. La siguiente pregunta que podemos formularnos es si se pueden encontrar pares que dominen a bajas energías. En particular se busca una forma de definir un solo par "colectivo" que incluya el efecto de los otros pares de manera efectiva, con lo cual se podría reducir el problema de muchos niveles, al problema de un solo nivel. Marshalek y Klein (1991), han indicado como se pueden definir estos bosones "colectivos". Nosotros seguimos aquí algunas ideas apuntadas por ellos en su revisión, aunque con nuestro mapeo bosónico existen algunas consideraciones diferentes como se verá a continuación.

### 2 Definición de Bosones Colectivos

Supongamos que nuestros operadores bosónicos de modelo (v.c.6.9)  $q_{ij}, p^{ij}$  están asociados con ciertos pares de gluones (ó quarks). Más aún podemos suponer que estos operadores están acoplados a buen spin y color, con lo cual se podría hacer la suposición



de que existen ciertos acoplamientos de spin-color dominantes. Supongamos entonces que nuestros operadores bosónicos de modelo están acoplados a buen spin ( $S$ ) y color ( $T$ ) denotados por

$$q_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)}, \quad p_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)}, \quad (1)$$

donde  $t$  y  $s$  se refieren a las componentes magnéticas (números cuánticos para los subgrupos) y  $\alpha, \alpha'$  se relacionan con otros números cuánticos orbitales. La idea principal consiste en que queremos relacionar la estructura de la CDC a bajas energías con algún tipo particular de bosones con spin-color definidos, pero que no dependen explícitamente de la parte orbital. La forma en que se pueden reducir los bosones (1) a otros más simples se encuentra indicada, como ya se mencionó, en Marshalek y Klein (1991). En general podemos aplicar al conjunto de nuestros bosones de modelo una transformación ortogonal arbitraria

$$q_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)} = \sum_{\lambda} A_{\alpha'\alpha,\lambda} q_{(t,s)\lambda}^{(T,S)} \quad (2)$$

$$p_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)} = \sum_{\lambda} A_{\alpha'\alpha,\lambda}^T p_{(t,s)\lambda}^{(T,S)} \quad (3).$$

El superíndice  $T$  en la matriz de transformación para los bosones  $p_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)}$  significa transpuesta.

Con esta transformación realmente lo que estamos haciendo es "ir" a otra base para nuestros bosones de modelo. Los coeficientes tienen que satisfacer, por definición las siguientes condiciones:

$$\sum_{\lambda} A_{\alpha'\alpha,\lambda}^T A_{\alpha''\alpha,\lambda} = \delta_{(\alpha'\alpha)(\alpha''\alpha)}, \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha'\alpha} A_{\alpha'\alpha,\lambda}^T A_{\alpha'\alpha,\lambda} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}}. \quad (5)$$

Si la estructura a bajas energías de la CDC está dada solamente por uno, ó algunos acoplamientos especiales ( $T, S$ ), para cada tipo de bosón, quiere decir que el espacio de Hilbert está compuesto solo por funciones que dependen de las coordenadas  $q$ 's con esos acoplamientos particulares ( $T, S$ ) y una  $\lambda$  dada, digamos que, por definición  $\lambda = 1$ . Lo que realmente estamos haciendo es una transformación muy especial, de manera que una sola de las coordenadas colectivas  $q_{(t,s)\lambda}^{(T,S)}$  sea la que domine suficientemente como para que sea la única que tomemos en cuenta para empezar.

La coordenada colectiva  $q_{(t,s)\lambda=1}^{(T,S)}$ , es una suma coherente de nuestros operadores bosónicos de modelo definidos anteriormente, lo cual puede verse si se invierte (2). A estas coordenadas  $q_{(t,s)\lambda=1}^{(T,S)}$  las llamaremos "bosones colectivos".

El Hamiltoniano colectivo se obtiene si se sustituyen las coordenadas  $q_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)}$ , y  $p_{(t,s)\alpha'\alpha}^{(T,S)}$  por las expresiones (1) y (2) en términos de los bosones colectivos, y quedándose únicamente con  $\lambda = 1$ .

Aún nos resta definir bosones colectivos para la parte impar de nuestro mapeo. Es decir para la parte de coordenadas "gluónicas"  $Q_{(t,s)\alpha}^{(1,1)}$  y momentos  $P_{(t,s)\alpha}^{(1,1)}$ . Aquí se ha tomado  $T = S = 1$  para denotar a los gluones con color-spín uno (en el caso de un grupo de color  $SU(2)$  donde los gluones se encuentran en la representación de triplete), ó color-spín  $(\lambda, \mu) = (1, 1) = \{8\}$  de la representación octete de  $SU_{color}(3)$ . Esto se hace de manera análoga dando como resultado para el caso en que nuestros operadores fundamentales correspondan a partículas bosónicas:

$$Q_{(t,s)\alpha}^{(1,1)} = \sum_{\lambda} a_{\alpha,\lambda} Q_{(t,s)\lambda}^{(1,1)} \quad (6)$$

$$P_{(t,s)\alpha}^{(1,1)} = \sum_{\lambda} a_{\alpha,\lambda}^T P_{(t,s)\lambda}^{(1,1)} \quad (7)$$

con las condiciones

$$\sum_{\lambda} a_{\alpha,\lambda}^T a_{\beta,\lambda} = \delta_{\alpha\beta} \quad (8)$$

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha,\lambda}^T a_{\alpha,\lambda} = \delta_{\lambda\lambda} \quad (9)$$

Estas expresiones también se sustituyen en el Hamiltoniano para obtener el Hamiltoniano "Colectivo". Nuevamente hacemos la suposición de que un solo bosón colectivo porta la mayor parte de la información de los demás niveles (no-colectivos) por lo que solo nos quedamos con un término que por definición elegimos como el que corresponde a  $\lambda = 1$ .

Nuestro Hamiltoniano colectivo es ahora una función de los coeficientes de la transformación  $A_{\alpha\alpha',1}$  y  $a_{\alpha,1}$ , que se deben obtener por medio de un principio variacional (para justificar que un solo bosón colectivo lleve la información principal). Los cálculos se pueden simplificar si suponemos además que

$$A_{\alpha\alpha',1} = a_{\alpha,1} a_{\alpha',1} \quad (10)$$

teniendo como argumento "físico" detrás, que la probabilidad,  $|A_{\alpha\alpha',1}|^2$ , de que el par  $q_{(t,s),\alpha,\alpha'}^{(T,S)}$  contribuya al par colectivo es igual al producto de las probabilidades de que una partícula contribuya del nivel orbital  $\alpha$ , y la otra del nivel  $\alpha'$ . Estrictamente hablando, esto no es cierto, pero aproxima la situación real bastante bien. Esta condición entra pues como una condición extra para hacer la variación, por lo que las posibles variaciones estarán restringidas por ella.

### 3 Procedimiento Variacional

El procedimiento variacional que se emplea para determinar los coeficientes de la transformación consiste en determinar para cuáles coeficientes, el valor de "expectación"

$$\frac{\delta(\psi | H | \psi)}{(\psi | \psi)} \quad (11)$$

es un mínimo. Los diferentes procedimientos que utilizamos, consisten en evaluar este valor de expectación tomando a  $|\psi\rangle$  ya sea como el estado base, algún estado excitado, ó la suma (traza) sobre un número dado de los estados más bajos, incluyendo el estado base, es decir sobre un subespacio del espacio de Hilbert de bosones colectivos. La búsqueda de este mínimo tiene que hacerse para cada valor de la constante de acoplamiento involucrada "g", de manera que los coeficientes  $a_{\alpha,1}$  serán funciones en g. La minimización que se propone pretende encontrar la estructura del bosón más bajo en energía.

El procedimiento puede extenderse de manera que se incluya no uno, sino más bosones colectivos en la descripción, pero eso quiere decir que extendemos significativamente el espacio de Hilbert. Con la definición y restricción a un sólo tipo de bosón "colectivo", hemos reducido el problema de muchos niveles (diferentes acoplamientos de spin-color) al problema de un solo nivel. Hess y Schütte (1991) han realizado ya cálculos en la aproximación de un nivel para el Hamiltoniano de CDC en la norma de Schwinger. En ese trabajo han mostrado que la interacción magnética se puede escribir en términos de dos acoplamientos fundamentales  $[Q^{(1,1)} \times Q^{(1,1)}]_{(t,s)}^{(T,S)}$  con  $(T,S) = (0,0)$  ó  $(1,1)$ . Además, el término de tercer orden en los campos de norma contiene también potencias impares en  $Q_{(t,s)}^{(1,1)}$ . Esto sugiere que al menos para los estados de spin-color cero, es suficiente con reducir el problema no-perturbativo de muchos niveles, al problema en la aproximación de un nivel de Hess y Schütte.

## Capítulo 8

---

## Hamiltoniano de Juguete del tipo CDC

### 1 Un Hamiltoniano de juguete del tipo CDC

Para explorar el potencial de nuestro método comenzamos nuestro estudio con modelos de juguete con un Hamiltoniano inspirado en la forma que tiene el Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica. Este estudio preliminar nos servirá en el futuro para investigar las propiedades de nuestro método en un problema más realista, utilizando el Hamiltoniano de la CDC en la norma de Schwinger. Sin embargo dicha investigación se sale de los objetivos de la presente tesis, y se dejará para un trabajo inmediato.

Para comenzar podemos definir un Hamiltoniano en una dimensión, con gluones confinados dentro de una caja de dimensión  $R$  a partir de una densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t A)(\partial^t A) - V(A) \quad (1)$$

con el potencial  $V(A)$  definido de la siguiente manera

$$V(A) = \gamma g A (\partial_1 A) A + g^2 A^4. \quad (2)$$

donde  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  y la constante  $\gamma$  nos sirve para variar la intensidad de la interacción que cambia el número de gluones por un número impar.

En este caso, nuestra métrica es  $g_{00} = 1, g_{11} = -1$ , y cero las demás entradas.

El campo  $A$  es un campo escalar cuyo momento conjugado está dado por

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A} = \partial_0 A \quad (3)$$

Por lo tanto la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  resulta ser

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\partial_1 A)^2) + V(A). \quad (4)$$

El Hamiltoniano de juguete se obtiene como es usual por

$$H = \int_0^R dx \mathcal{H}, \quad (5)$$

donde  $R$  es el tamaño de la caja unidimensional donde consideramos confinado nuestro sistema. Las dimensiones de  $H$  y  $x$  son respectivamente (energía) y (energía)<sup>-1</sup>. Esto implica que  $A$  no tiene dimensiones, mientras que las dimensiones de la constante de acoplamiento " $g$ " son las dimensiones de energía.

Nuestro modelo de juguete no es renormalizable, ni es invariante ante transformaciones locales de norma. Sin embargo esto no es importante porque es sólo un modelo de juguete que se ha pensado para reproducir algunas características del Hamiltoniano de la CDC. Por ejemplo los términos de tercero y cuarto orden de la interacción magnética, donde el papel de la parte  $(\nabla \times \mathbf{A}_n)$  está representado por el término  $\partial_1 A$  i.e.  $\frac{dA}{dx}$ .

La ecuación de movimiento está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A)} \right] = 0 \quad (6)$$

que para el caso de campos libres  $g = 0$  resulta

$$\partial_0^2 A - \partial_1^2 A = 0. \quad (7)$$

Esta ecuación es el análogo en una dimensión (espacial) de la ecuación de Helmholtz para campos sin masa.

$$\partial_\mu \partial^\mu A = 0 \quad (8)$$

El factor  $\gamma$  en (2) sirve sólo para "jugar" con el término que cambia el número de gluones por un número impar. Resulta ser que para  $\gamma = 1$  nuestro Hamiltoniano resulta ser muy aburrido (fig. 8.2a), mientras que para un factor  $\gamma = 7$ , por ejemplo, obtenemos un caso mucho más interesante con un Hamiltoniano que presenta una estructura más rica para ser estudiada. Con este Hamiltoniano podemos explorar y probar bastante bien nuestro método de expansión bosónica y la definición de bosones colectivos.

## 2 Regularización a uno y dos niveles

En la cuantización de los campos de norma de nuestro Hamiltoniano, expandemos tanto el campo  $A(x)$  como su momento canónico conjugado  $\pi(x)$  en términos de un conjunto completo de soluciones ortonormales clásicas  $f_n(x)_{(t=0)}$  al tiempo  $t = 0$

$$A(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} f_n(x) Q_n. \quad (9)$$

$$\pi(x) = -i \sum_n \sqrt{\omega_n} f_n(x) \frac{\partial}{\partial Q_n}. \quad (10)$$

En el caso que hemos propuesto el sistema se encuentra confinado dentro de una caja de dimensión  $R$ , por lo que las funciones  $f_n(x)$  deben desaparecer en la frontera. Es decir, que satisfacen  $f_n(x)|_{(x=0)} = f_n(x)|_{(x=R)} = 0$ . Las soluciones están dadas por

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sin \frac{\pi}{R} n x \quad (11)$$

Las funciones  $f_n(x)$  satisfacen la ecuación de movimiento

$$\partial_t^2 f_n(x) = -\omega_n^2 f_n(x) \quad (12)$$

que se deriva de la ecuación de "Helmoltz" (8) cuando se separa la dependencia temporal. Esto también nos determina la energía  $\omega_n = \frac{\pi}{R} n$ . Por conveniencia podemos elegir la dimensión de la caja de tamaño  $\pi$ , de manera que:

$$\omega_n = n \quad (13)$$

Sustituyendo en el Hamiltoniano (5) los desarrollos en modos normales Ecs. (9) y (10) integrando y usando la forma explícita de las funciones  $f_n(x)$  Ec (11) se obtiene :

$$H = \frac{1}{2} \sum_n n(Q_n^2 - P_n^2) + \frac{1}{2} g \gamma \sum_{n_1 n_2 n_3} \frac{\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3)}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3}}} Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3} \\ + \frac{1}{2} g^2 \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \frac{\mathcal{I}_4(n_1 n_2 n_3 n_4)}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}}} Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3} Q_{n_4} \quad (14)$$

donde las integrales orbitales  $\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3)$  e  $\mathcal{I}_4(n_1 n_2 n_3 n_4)$  que resultan de la integración de las funciones  $f_n(x)$  dentro de la "caja" son:

$$\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3) = \left(\frac{2}{R}\right)^{3/2} n_1 \pi \frac{1}{4} [\delta_{n_1-n_2-n_3,0} - \delta_{n_1-n_2+n_3,0} + \delta_{n_1+n_2-n_3,0} - \delta_{n_1+n_2+n_3,0}] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4(n_1 n_2 n_3 n_4) = & \\ & \left(\frac{1}{2R}\right) [\delta_{n_1-n_2-n_3+n_4,0} + \delta_{n_1-n_2+n_3-n_4,0} - \delta_{n_1-n_2-n_3-n_4,0} - \delta_{n_1-n_2+n_3+n_4,0} - \\ & \delta_{n_1+n_2-n_3+n_4,0} - \delta_{n_1+n_2+n_3-n_4,0} + \delta_{n_1+n_2-n_3-n_4,0} + \delta_{n_1+n_2+n_3+n_4,0}] \quad (16) \end{aligned}$$

En nuestro caso, nos restringimos al estudio de hasta dos niveles ( $n = 1, 2$ ), pues no queremos resolver completamente el problema, sino sólo probar nuestra técnica y qué tan bien reproduce los cálculos exactos cuando construimos el Hamiltoniano "colectivo" de más de un nivel. El Hamiltoniano de juguete en dos niveles toma la siguiente forma explícita:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \sum n(Q_n^2 - P_n^2) + \frac{1}{2} \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ \sqrt{2} Q_1^2 Q_2 \} \\ + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{1}{2\pi} \{ 3/4 Q_2^4 + 6 Q_1^2 Q_2^2 + 3 Q_1^4 \} \quad (17) \end{aligned}$$

### 3 Bosones de modelo

El siguiente paso es definir bosones colectivos de modelo  $q_{n_1 n_2}$ , y  $p_{n_1 n_2}$  para los operadores de pares de coordenadas, y operadores de una coordenada de modelo  $\mathcal{Q}_{n_i}$  para los operadores de coordenadas individuales. El *ansatz* en este caso es en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} Q_{n_1} Q_{n_2} &\equiv Q_{n_1 n_2} \rightarrow q_{n_1 n_2} \\ P_{n_1} P_{n_2} &\equiv P_{n_1 n_2} \rightarrow \frac{1}{2} [\Gamma, p_{n_1 n_2}] - \frac{1}{2} (\mathcal{N} + 1) p_{n_1 n_2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$Q_{n_i} \rightarrow \mathcal{Q}_{n_i} + \sum_{n' \neq i} q_{n_i n'} P_{n'} \quad (19)$$

donde las coordenadas "bosónicas" de modelo (no normalizadas) satisfacen las relaciones de conmutación



$$[p_{ij}, q_{mn}] = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} \quad (20)$$

$$[P_i, \rho_j] = \delta_{ij}. \quad (21)$$

que son las relaciones para cuando las partículas fundamentales que se describen son bosones. En este caso se trata de gluones de modelo. El operador de "Casimir"  $\Gamma$  por otro lado esta definido como

$$\Gamma = -\Gamma^q + \rho + \frac{1}{2}\Gamma^q + 2\Gamma^\rho \quad (22)$$

Para determinar explícitamente el mapeo de  $P_{n_1 n_2}$  recurrimos a un truco, ya que el cálculo con la forma explícita de los operadores  $\Gamma$ 's resulta inconveniente. El truco consiste en expresar estos operadores en términos de los operadores de "número". Por ejemplo

$$\begin{aligned} \Gamma^Q &= \sum_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2} C_{n_2 n_1} \\ &= \hat{N}(\hat{N} + 2) + \{\hat{N} + 3/4\} \end{aligned} \quad (23)$$

donde los términos entre llaves se deben incluir cuando en la definición de  $C_{n_1 n_2}$  aparezca el término inhomogéneo  $\sim \pm \delta_{n_1 n_2}$ , y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \hat{N} &\equiv \hat{N}_q + \hat{N}_\rho, \\ &\hat{N}_q, \\ &\hat{N}_\rho \end{aligned} \quad (24)$$

para cuando se trate de  $\Gamma^q + \rho$ ,  $\Gamma^q$ ,  $\Gamma^\rho$  respectivamente.

El mapeo explícito para el operador  $P_{n_1 n_2}$  resulta ser

$$P_{n_1 n_2} \rightarrow \{\hat{N}_q + 2\hat{N}_\rho + 1\} p_{n_1 n_2} \quad (25)$$

## 4 Hamiltoniano Contraído

Cuando aplicamos nuestra técnica de expansión bosónica al Hamiltoniano (14) éste toma la forma 'contraída':

$$\begin{aligned}
 H^c = & \frac{1}{2} \sum_n n q_{nn} - \frac{1}{2} (\hat{N}_q + 2\hat{N}_\rho + 1) \sum_n n p_{nn} \\
 & + \frac{1}{2} g^2 \sum_{n_1 n_2 n_3} \frac{\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3)}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3}}} q_{n_1 n_2} \rho_{n_3} + \frac{1}{2} g^2 \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \frac{\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3)}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3}}} q_{n_1 n_2} \rho_{n_3 n_4} P_{n_4} \\
 & + \frac{1}{2} g^2 \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \frac{\mathcal{I}_4(n_1 n_2 n_3 n_4)}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}}} q_{n_1 n_2} \rho_{n_3 n_4} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Este hamiltoniano toma una forma relativamente sencilla cuando se sustituyen las integrales  $\mathcal{I}_3(n_1 n_2 n_3)$ , y  $\mathcal{I}_4(n_1 n_2 n_3 n_4)$  ya que desaparecen muchos términos de las sumas.

### 5 Cálculo Exacto

Nuestro Hamiltoniano de juguete (14) es suficientemente simple como para que podamos realizar cálculos exactos que nos sirvan de punto de comparación con los resultados que se obtienen cuando utilizamos la técnica propuesta en los capítulos anteriores. Para el cálculo exacto usamos la base del oscilador armónico para  $n = 1$ , y  $n = 2$ . En la figura 8.1 se muestra el caso de un nivel, y en la figura 8.2 se muestra el caso de dos niveles para dos factores  $\gamma$  diferentes. La aproximación en un nivel sólo presenta algunas desviaciones al espectro de energías del caso libre  $g = 0$ , correspondiente a un oscilador armónico. El primer caso en dos niveles (figura 8.2a) corresponde al factor  $\gamma = 1$  y como puede observarse el espectro de energías no resulta muy interesante ya que no existen, por ejemplo, cruzamientos de niveles en los estados excitados más bajos. Para el caso de un factor  $\gamma = 7$  (figura 8.2b) por el contrario, el espectro de energías muestra una estructura mucho más rica, particularmente alrededor de valores de la constante de acoplamiento entre 0.2, y 0.4. El caso que analizaremos con más detalle será aquel que tiene un factor  $\gamma = 7$  enfrente del término cúbico del Hamiltoniano.

### 6 Definición de Bosones Colectivos

Ahora pasamos a la descripción en términos de bosones colectivos para ver si se reproduce bien el espectro de nuestro Hamiltoniano de juguete. Esperamos que al menos los estados más bajos se puedan reproducir con bastante aproximación.

Definimos nuestros bosones colectivos como en el capítulo anterior, tomando en cuenta sólo dos niveles, por medio de las relaciones

$$g_{n_1 n_2} = \sum_{\lambda=1}^2 A_{n_1 n_2, \lambda q_\lambda} \rightarrow A_{n_1 n_2, 1 q_1} \quad (27a)$$

$$p_{n_1 n_2} = \sum_{\lambda=1}^2 A_{n_1 n_2, \lambda p_\lambda}^T \rightarrow A_{n_1 n_2, 1 p_1}^T \quad (27b)$$

con la suposición adicional sobre los coeficientes del reemplazo (27). Es decir sobre las probabilidades

$$A_{n_1 n_2, 1} \sim a_{n_1, 1} a_{n_2, 1} \quad (n_1, n_2 = 1, 2), \quad (28)$$

sujetas a la condición de normalización para las probabilidades

$$a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 = 1 \quad (29)$$

Más aún podemos introducir bosones colectivos "normalizados" mediante la sustitución

$$q' = \frac{q}{\sqrt{2}} \quad (30a)$$

$$p' = \frac{p}{\sqrt{2}} \quad (30b)$$

## 7 Hamiltoniano Colectivo

Sustituyendo nuestros bosones de modelo por los bosones "colectivos", definidos arriba, en nuestro Hamiltoniano contraído (17), y sustituyendo explícitamente las integrales orbitales, se obtiene el Hamiltoniano "colectivo" siguiente:

$$H^{colectiva} = \sqrt{2}q' - \sqrt{2}(1 + a_2^2)(q'p') + QP + 1/2)p' + \gamma g \frac{1}{4\sqrt{\pi}}(a_2 - a_2^3)\{\sqrt{2}q'Q + 2q'^2P\} + \frac{g^2}{2\pi}(3 - 9/4a_2^4)q'^2 \quad (31)$$

Nótese que este Hamiltoniano tiene la misma forma que nuestro primer Hamiltoniano de juguete/normalizado en el capítulo 6 (ec.47)!. La única diferencia consiste en los coeficientes, que ahora pueden depender de la constante de acoplamiento.

## 8 Método Variacional

El siguiente paso consiste en determinar a partir de un principio variacional el valor de los coeficientes de la transformación a bosones colectivos  $a_1, a_2$ . En realidad basta con determinar uno de ellos ( $a_2$ ) debido a la relación de normalización (28).

† Hemos tirado el índice "1" de los bosones colectivos pues consideramos sólo uno y no hay lugar a confusiones.

Antes de hacer el análisis variacional, podemos hacer algunas consideraciones cualitativas que debemos esperar :

i) Para valores pequeños de la constante de acoplamiento  $g \ll 1$  tenemos que reproducir esencialmente el espectro

$$E = 1 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 \quad (32)$$

donde los coeficientes 1 y 2 aparecen por las frecuencias  $\omega_1, \omega_2$ , y  $N_1, N_2$  por el número de gluones en los niveles 1 y 2 respectivamente.

ii) Para valores muy grandes de la constante de acoplamiento  $g \rightarrow \infty$  el último término

$$g^2(3 - 9/4a_2^4) \quad (33)$$

debe dominar. En particular el estado más bajo que corresponde al "vacío" físico deberá bajar más cuando esta interacción sea máxima. Es decir para  $a_2 \rightarrow 0$ .

iii) En algún intervalo intermedio, el término

$$g(a_2 - a_2^3)q \quad (34)$$

podrá dominar. En este caso la interacción se maximiza alrededor de  $a_2 \sim 0.58$ , de manera que esperamos que  $a_2$  sea cero para pequeños valores de  $g$  (todos los gluones se encuentran en el primer nivel ya que la probabilidad  $|a_1|^2$  es igual a uno), para valores intermedios de  $g$  el valor de  $a_2$  crecerá hasta aproximadamente  $a_2 \sim 0.58$  (si el término de interacción cúbico realmente es dominante) y para valores muy grandes de  $g$  tendremos de vuelta  $a_2 = 0$ .

Como principio variacional buscamos el mínimo del valor de expectación

$$\frac{\langle \psi | H^{col} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (35)$$

donde la variación se tomará respecto del estado  $|\psi\rangle$  que podrá ser el estado base, los primeros estados excitados, y la traza sobre los primeros estados excitados incluyendo el estado base para buscar el mejor procedimiento. Queremos investigar cuál de esos métodos da cuenta con mayor precisión del espectro obtenido con el cálculo exacto. La solución de el Hamiltoniano colectivo es casi idéntica a la solución del primer Hamiltoniano de juguete analizado anteriormente en el capítulo de Contracción y Expansiones Bosónicas.

Originalmente se pensó tomar en cuenta sólo la variación de la traza del Hamiltoniano colectivo sobre un subespacio del espacio de Hilbert. El hecho de que la traza es un invariante ante transformaciones ortogonales nos hizo suponer que era suficiente con tomar la traza del Hamiltoniano contraído. Recuérdese que los bosones colectivos se definen a través de una transformación ortogonal. Sin embargo, si se recurre a este método el término cúbico no contribuye a la traza dado que  $Q$  y  $P$  no tienen elementos diagonales, y no obstante sí tiene efecto sobre los eigenestados. La forma en que se hace pues la variación consiste en buscar el mínimo en la diagonalización numérica. Es decir que se varía el coeficiente  $a_2$  y se obtiene aquel valor que minimiza el valor de expectación (35).

La figura 8.3a muestra el espectro "colectivo" de energías (diferencias de energías) tomando la variación respecto del estado base únicamente. Tomar en cuenta solamente el estado base resulta no ser suficiente para reproducir la estructura de los estados excitados. Lo mismo se puede decir cuando se toma la variación respecto del primero, segundo y tercer estados excitados, donde se reproducen mejor los estados excitados correspondientes, pero se pierde aproximación en los otros (figuras 8.4a y 8.5a).

En las figuras 8.3b, 8.4b, y 8.5b se han graficado el comportamiento del parámetro  $a_2$  como función de la constante de acoplamiento  $g$  en el intervalo  $0 \leq g \leq 1.0$ . Como se puede apreciar bien, para valores pequeños de  $g$  el valor de  $a_2$  se mantiene en cero, hasta que sube abruptamente alrededor de 0.58 como se había esperado. También se puede apreciar dentro de este intervalo que la probabilidad de que los gluones se encuentren en el segundo nivel, i.e. que haya mezclas con el segundo nivel, empieza a decrecer conforme  $g$  aumenta. El factor  $\gamma$  que estamos usando es  $\gamma = 7$ . Para  $\gamma = 1$  no pasa nada.

Si tomamos en cuenta no sólo un estado, sino la "traza" sobre los primeros dos y tres estados excitados, incluyendo el estado base, la descripción se hace cada vez mejor. Es decir la variación se debe tomar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=0}^N \frac{(\psi_i | H^{col} | \psi_i)}{(\psi_i | \psi_i)} \quad (36)$$

Nosotros descubrimos que es suficiente con tomar  $N = 2$ . La razón por la que se ajusta mejor el espectro cuando se toma la traza sobre los primeros estados excitados radica en el hecho de que la mezcla de los gluones del segundo nivel cambian de estado en estado, mientras que en nuestro procedimiento tal mezcla la aproximamos por un valor "promedio" del valor de  $a_2$ . Tomar en cuenta también los estados excitados, junto con el estado base, promedia también el error que estamos cometiendo.

Los espectros obtenidos con esta variación se muestran en las figuras 8.6a y 8.7a para el caso en que se toma la traza sobre los dos primeros estados, y los tres primeros estados respectivamente. De aquí se puede ver que es suficiente con tomar los dos

primeros estados, pues se reproducen mucho mejor los estados más bajos y la estructura general del espectro obtenido con el cálculo exacto (figura 8.2b). Se ve claramente que hay una caída en la energía de los niveles alrededor de  $g \sim 0.25$  y después vuelven a subir alrededor de  $g \sim 0.35$ . Hay que notar que debido a que sólo tomamos en cuenta un solo gluón colectivo para nuestra descripción, existen muchos niveles que hemos dejado fuera y que no podemos describir. De manera que no es sorprendente que no tengamos el mismo número de niveles que el que se tiene en el cálculo microscópico. Se puede apreciar bien que los primeros estados excitados en el cálculo "colectivo" reproducen muy bien los primeros estados excitados del cálculo microscópico. También se puede apreciar bien que en la región de transición  $0.25 \leq g \leq 0.35$  los primeros estados excitados "caen" muy abajo. El primer estado excitado puede reproducirse muy bien cuando sólo se varía sobre el estado base y el primer estado excitado, con un poco menos de aproximación para los estados más altos.

Para  $g \geq 0.35$  todos los estados reproducen, cuantitativamente bien, las energías de algunos estados del espectro microscópico. En este sentido hemos mostrado que las ideas de cómo reducir el problema de muchos niveles a uno mucho más simple pueden funcionar en la CDC real.

Las figuras 8.6b y 8.7b muestran nuevamente como  $a_2$  es cero para pequeños valores de  $g$  y luego sube en un intervalo intermedio alrededor de  $a_2 = 0.58$ . En este caso el espectro microscópico es esencialmente una superposición de gluones en el primero y segundo niveles. El valor óptimo para  $a_2$  se determina tomando una variación discreta en este parámetro, dando origen a los "saltos" que aparecen en las figuras 8.6b y 8.7b.

Por último en la figura 8.8a presentamos el mismo espectro que en la figuras 8.7a pero en un intervalo más grande ( $0 \leq g \leq 10$ ). A valores tan grandes de la constante de acoplamiento, la convergencia resulta no ser tan buena, de manera que sólo podemos esperar una descripción poco aproximada en este régimen. En la figura 8.8b se ha obtenido el valor de  $a_2$  como función de  $g$  en este mismo intervalo. Como se notó en la discusión cualitativa,  $a_2$  tiende a cero para valores grandes de  $g$ . Las oscilaciones que aparecen para  $g > 5.6$  se deben a imprecisiones numéricas.

Por último debemos anotar que en el espacio "microscópico" usamos un espacio de 14 bosones como máximo por nivel, de modo que el espacio tenía  $15 \times 15$  bosones (incluyendo el vacío) i.e. 225 estados. En el cálculo "colectivo" usamos hasta 20 bosones (incluyendo el vacío 21). Esto prueba ya que el cálculo puede simplificarse considerablemente en nuestro procedimiento, que toma en cuenta de manera efectiva la contribución de todos los niveles.

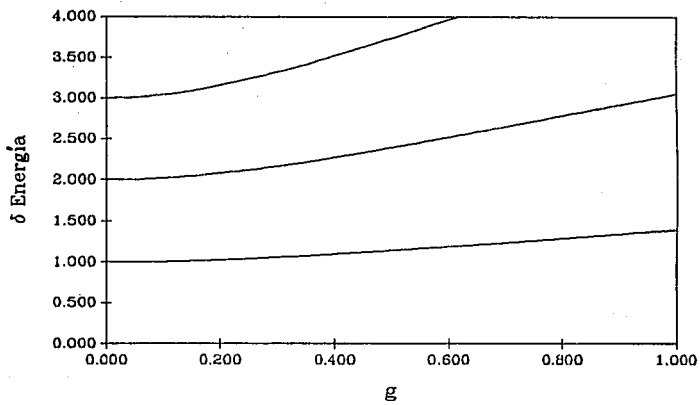


Fig. (8.1) Espectro de energías para el Hamiltoniano de juguete en un nivel



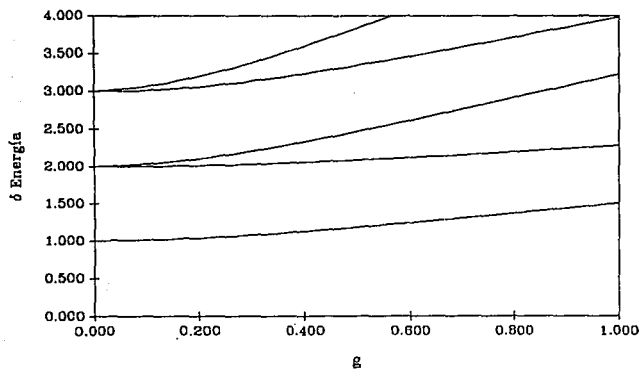
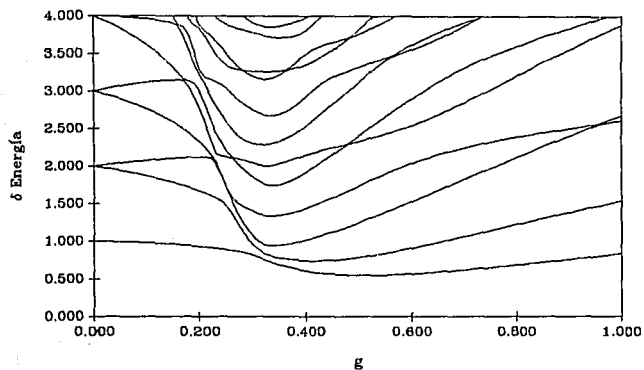


Fig. (8.8) Espectro de energías para el Hamiltoniano de juguete en dos niveles. (a)  $\gamma = 1$  (b)  $\gamma = 7$ .

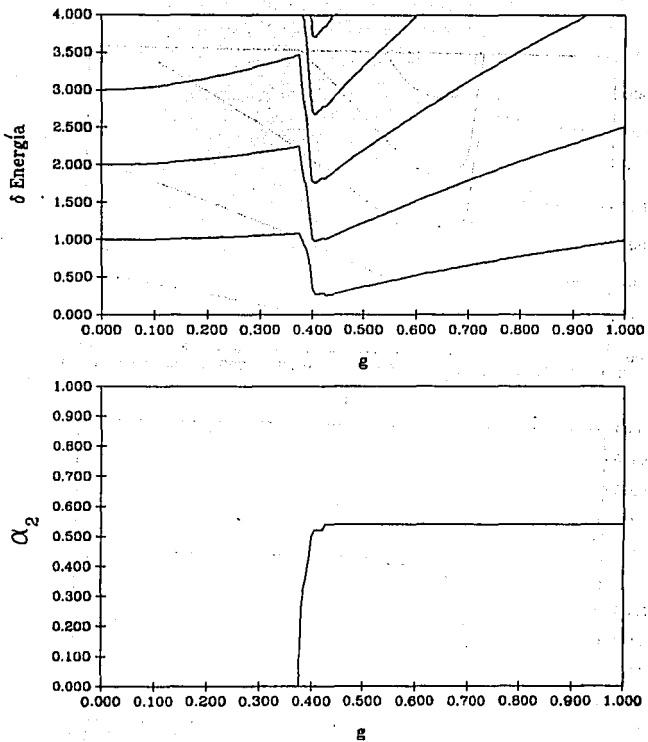


Fig. (8.3) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre el estado base. (b) Comportamiento del parámetro

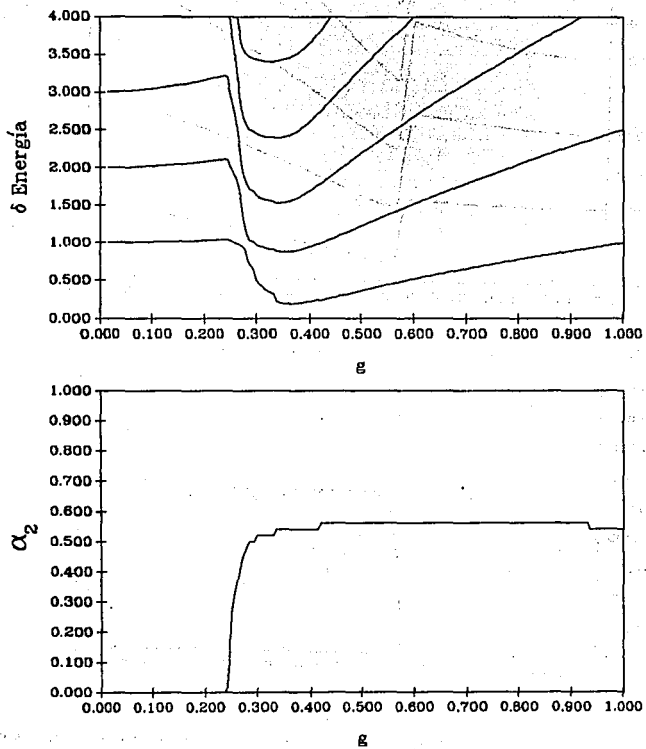


Fig. (8.4) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre el primer estado excitado. (b) Comportamiento del parámetro  $\alpha_2$

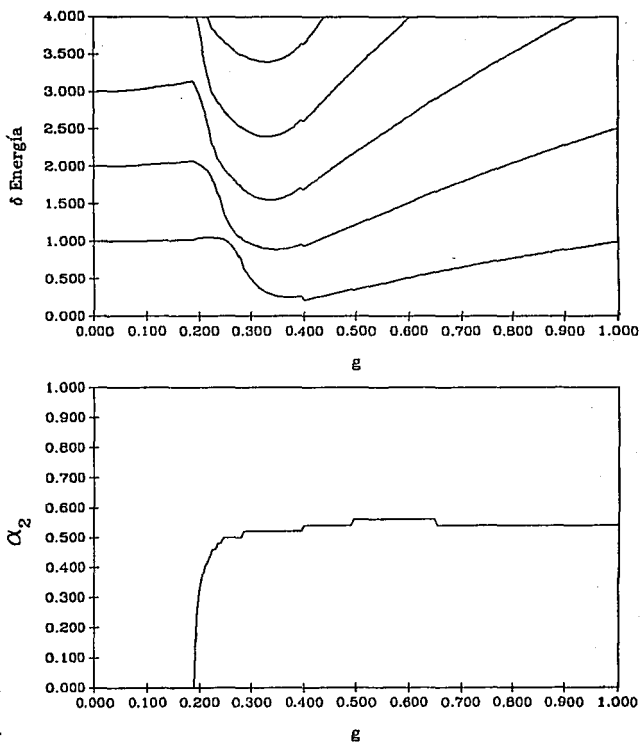


Fig. (8.5) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre el segundo estado excitado. (b) Comportamiento del parámetro  $\alpha_2$

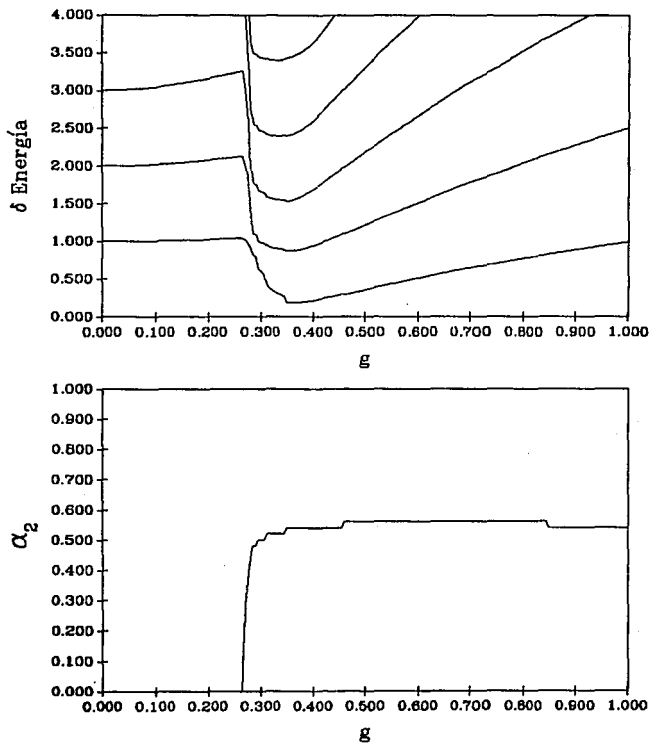


Fig. (8.6) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre la suma de los primeros dos estados. (b) Comportamiento del parámetro  $\alpha_2$

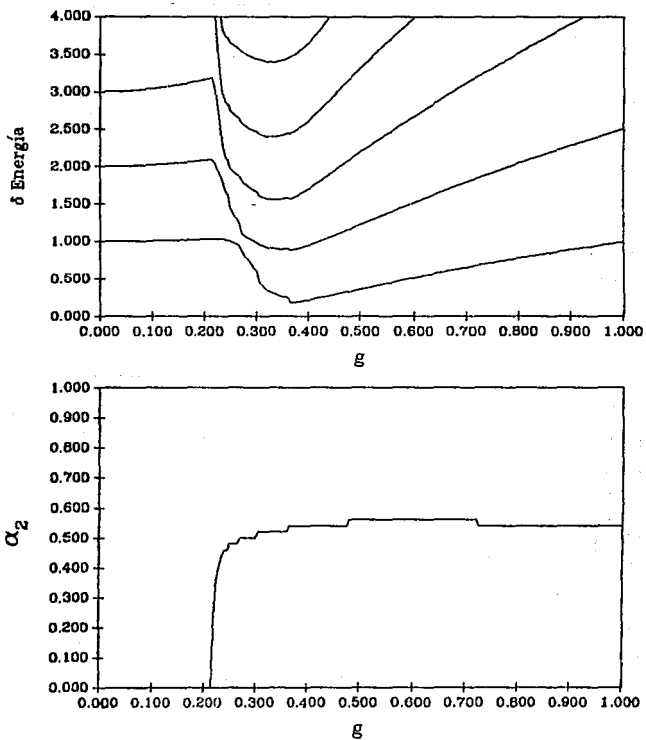


Fig. (8.7) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre la suma de los primeros tres estados. (b) Comportamiento del parámetro  $\alpha_2$

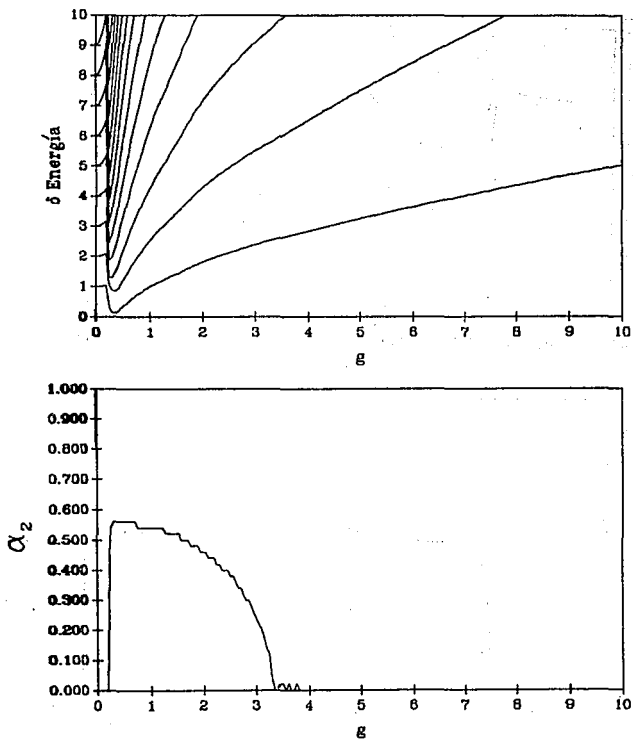


Fig. (8.8) Hamiltoniano Colectivo (a) Variación sobre la suma de los primeros tres estados ( $0g \leq 10$ ).  
 (b) Comportamiento del parámetro  $\alpha_2$

## *Capítulo 9*

---



## Conclusiones

### 1. Conclusiones

La teoría que describe correctamente los fenómenos de interacción fuerte entre las partículas elementales, particularmente en el régimen de altas energías en donde la constante de acoplamiento es pequeña, es la Cromodinámica Cuántica. La Cromodinámica Cuántica es una teoría de Norma basada en el grupo de la simetría exacta de color  $SU(3)$  que poseen los Hadrones. Actualmente se acepta que la Cromodinámica Cuántica es la verdadera teoría fundamental de las interacciones fuertes y por lo tanto debemos ser capaces de explicar también los fenómenos de bajas energías, donde la constante de acoplamiento es grande y no se pueden utilizar los métodos perturbativos.

La descripción microscópica, en el régimen de bajas energías, de la Cromodinámica Cuántica que ha tenido más éxito hasta la fecha, es la formulación en la "malla" formulada por Wilson (1974), pero debido a las enormes y casi prohibitivas necesidades numéricas de cómputo que se requieren en esta formulación, para poder tener suficientes puntos en la red y volúmenes del tamaño hadrónico, es aconsejable buscar métodos alternativos para explorar el régimen de bajas energías con técnicas no-perturbativas adecuadas. Uno de los métodos más promisorios parece ser la formulación Hamiltoniana de las teorías de Norma introduciendo un esquema de regularización donde los campos de norma se desarrollan en un número finito de modos normales (Capítulo 4), y aplicar los métodos de muchas partículas que suelen utilizarse en otras áreas de la física, como la física nuclear, la física atómica etc. como las aproximaciones bosónicas, ó los métodos colectivos. En la descripción de la Cromodinámica Cuántica, sin embargo, aparecen otros problemas que no se tienen en las otras áreas, como son el problema del escalamiento apropiado, la renormalización y la invariancia de norma de manera que al desarrollar un método, se tiene que pensar en cómo incluir estas características en la descripción.

Uno de los problemas principales que aparecen en este tipo de formulaciones, es aquél que tiene que ver con la inclusión de muchos niveles en la solución del problema de eigenvalores del Hamiltoniano, para después poder recuperar el límite en que todos los niveles se toman en cuenta. En el presente trabajo se ha propuesto un método,

que por primera vez contempla la posibilidad de incluir más de un nivel de *rmanera* no-perturbativa.

Guiados por las evidencias de otras teorías (Hansson, Johnson y Peterson, 1982; P.O.Hess y R.D.Viollier, 1986) que indican que el vacío cromodinámico está constituido básicamente por pares de gluones y pares de quarks, hemos desarrollado un procedimiento, como posibilidad para atacar el problema Hamiltoniano, formulando un mapeo bosónico que trata de tomar en cuenta las contribuciones de los pares *bosónicos* principalmente. El mapeo en términos de bosones ideales formados por pares de gluones  $\dagger$  (o pares de quarks), se ha construido apropiadamente para satisfacer todas las reglas de conmutación del álgebra de operadores de gluones  $W(\mathcal{N}) \wedge Sp(2\mathcal{N}, R)$  (o quarks  $W(\mathcal{N}) \wedge O(2\mathcal{N})$ ) en el espacio microscópico (Capítulo 6).

En cualquier mapeo bosónico siempre aparece un espacio "ideal" de Hilbert mucho más grande que el espacio microscópico original, en el sentido de que un estado en el espacio microscópico puede dar lugar a diferentes mapeos equivalentes en el espacio de "modelo". Se ha tenido cuidado especialmente con el mapeo de los operadores de un gluón individual (no acoplado por pares) de manera que nuestro espacio físico de modelo contenga a lo más una "coordenada gluónica" de modelo. El requisito de mantener las reglas de conmutación puede dar lugar a la aparición de estados fuera del subespacio "ideal" físico, donde se permite a lo más una sola coordenada "ideal" no apareada. Por lo demás se puede decir que nuestro mapeo preserva todas las relaciones de conmutación *exactamente*, salvo la restricción mencionada arriba.

En nuestro espacio de modelo queremos tener un Hamiltoniano con una estructura simple. Es decir que queremos trabajar con acoplamientos particulares de pares de gluones (o quarks) acoplados a ciertas combinaciones de spin-color que esperamos dominen la dinámica. Sin embargo en la mayoría de los casos, es extremadamente difícil simetrizar (antisimetrizar) los estados mapeados que resultan en el espacio de modelo. Para esto hemos propuesto una *receta* de como mapear adecuadamente los operadores en el espacio microscópico. Esto se consigue si primero se reordenan los términos en los operadores del espacio microscópico para conseguir una expresión equivalente de ellos, pero de manera que al efectuar el mapeo sólo aparezcan los pares en que estamos interesados. Es decir que nuestra receta procura definir un mapeo apropiado para que tengamos un subespacio físico en el espacio de modelo con una relación uno a uno con el espacio microscópico, y de manera que los operadores del Hamiltoniano no nos lleven fuera de dicho subespacio.

Hemos aplicado nuestra técnica primero a un Hamiltoniano de juguete muy simple (Capítulo 6 ec. 38) de un nivel (similar al Hamiltoniano de un oscilador armónico, con un término cúbico y un término de cuarto orden que tienen enfrente el equivalente de una constante de acoplamiento " $g$ "), para probar la efectividad del mapeo. En

$\dagger$  En realidad se trata de operadores de coordenadas bosónicas asociadas con los gluones

este primer ejemplo se obtuvo un Hamiltoniano con una estructura aparentemente más complicada (ec.6.47). En particular en el mapeo de la base se eligió una base de oscilador armónico en una dimensión y se tuvieron que encontrar relaciones de completéz y ortogonalidad particulares distintas a las que aparecen comúnmente. Los resultados están en completo acuerdo con el cálculo exacto, y sólo se exhiben ciertas diferencias en los estados más altos debido a la convergencia. En el cálculo exacto se utilizaron tan sólo 40 gluones en el espacio de Hilbert, mientras que para la versión "contraída" sólo se requirió de 14 estados (pares de gluones) en el espacio de Hilbert ideal.

Como queremos incorporar la descripción para tomar en cuenta las contribuciones de muchos niveles, se ha desarrollado una técnica que nos permite definir "pares colectivos" mediante un procedimiento variacional. La idea aquí fué la de incorporar la contribución de los demás niveles en la propia definición del boson colectivo (bosón de más baja energía), que porte el máximo de información de la acción de los demás, para reducir el problema de muchos niveles, al problema de un solo nivel.

En el segundo ejemplo, que presentamos como un Hamiltoniano de juguete del tipo CDC, se busco un Hamiltoniano que presentara de alguna manera las características que tiene el Hamiltoniano de la CDC en la norma de Schwinger estudiado por Schütte y Hess (1991), pero en una sola dimensión espacial. Se busco estudiar primero este Hamiltoniano para poder resolverlo exactamente y poder comparar los resultados obtenidos con nuestro mapeo definiendo al mismo tiempo un solo bosón colectivo para reducir el problema de muchos niveles, al problema de uno solo. Los resultados son muy alentadores, ya que se pudieron reproducir con mucha precisión algunos de los niveles más bajos. De los diferentes métodos variacionales que empleamos para encontrar el bosón colectivo, el que mejor describe el espectro es aquel en que se minimiza la suma de energías de los primeros dos y tres estados más bajos, incluyendo en estado base, pudiéndose mejorar la aproximación si la variación se hace sobre la traza, no de los primeros dos o tres, sino de los primeros cuatro, cinco etc.. En el caso que atendimos, se tomaron en cuenta para simplificar los cálculos, sólo dos niveles. En nuestro método existe una notable reducción del espacio que consideramos para la diagonalización del Hamiltoniano. Mientras que en el cálculo exacto se tuvieron que emplear  $15 \times 15$  bosones, incluyendo el vacío i.e. (225 bosones), en la versión contraída sólo se necesitaron 21 (incluyendo el vacío). Hay que notar sin embargo que en la reducción del problema de muchos niveles al problema de un nivel, se pierde información sobre algunos niveles. El problema de un solo nivel no puede describir todos los niveles que aparecen en el problema de varios niveles, sin embargo, la descripción de los niveles más bajos, que sí aparecen en ambos casos (particularmente la diferencia en energía más baja), es excelente.

La conclusión principal es que nuestro método tiene muy buenas posibilidades para que, por primera vez, se pueda describir el problema de muchos niveles del Hamiltoniano de la CDC, de manera no-perturbativa, y poder reducirlo al problema de un

nivel (particularmente se está estudiando el Hamiltoniano en la norma de Schwinger), estudiado por Schütte y Hess.

## *Apéndices*

---

## Apéndice A

### Sobre la Cuantización Canónica

La cuantización canónica (al tiempo  $t = 0$ ) para los campos de norma  $\pi^a(\mathbf{x})$  y  $A^b(\mathbf{x})$ , (en la norma temporal  $A_0 = 0$ ) se define usualmente como

$$[\pi_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ij}\delta^{ab} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

En este apéndice se explica por qué esta relación solo es válida cuando los desarrollos en modos normales de los campos  $\pi^a(\mathbf{x})$  y  $A^b(\mathbf{x})$ , se expresan en "coordenadas cartesianas"<sup>1</sup>. Dicho de otro modo, se puede llamar realización cartesiana de los campos a aquella realización en la cual dichos campos obedecen la relación (1).

Para aclarar más este punto supongamos que los campos  $\pi^a(\mathbf{x})$  y  $A^b(\mathbf{x})$  se expresan en términos de un conjunto *completo* de funciones transversales y longitudinales  $f_{\alpha a}$ , y  $g_{\sigma b}$  respectivamente, definidas en el espacio producto tensorial  $R^3 \rightarrow R^3 \times \text{Lie}SU(N)$ , como

$$A_k(q_{\alpha a}, \bar{q}_{\alpha a}) = \{f_{k\alpha} q_{\alpha a} + \hat{O}_{k\beta\sigma} \bar{q}_{\sigma a}\} \lambda_a \quad (2)$$

$$\pi_k(\frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}}, \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\alpha a}}) = -i\{f_{k\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} + \hat{O}_{k\beta\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\sigma a}}\} \lambda_a \quad (3)$$

donde las "coordenadas"  $q_{\alpha a}, \bar{q}_{\alpha a}$  son las coordenadas de las partes transversales y longitudinales en el espacio de Hilbert  $R^3 \rightarrow R^3 \times \text{Lie}SU(N)$ . Si calculamos por separado las contribuciones del conmutador, utilizando las relaciones de *ortonormalización* de la base se tiene que :

$$\pi_i^a A_j^b \Psi(q, \bar{q}) = -i \sum_{\alpha, \beta} \langle f_{i\alpha} | f_{j\beta} \rangle \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} (q_{\beta b} \Psi) - i \sum_{\sigma, \tau} \langle g_{i\sigma} | g_{j\tau} \rangle \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\sigma a}} (\bar{g}_{\tau b} \Psi)$$

<sup>1</sup> No nos referimos a las coordenadas espaciales  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , sino a las coordenadas del espacio interno en que se definen los campos.

$$= -i\delta_{ij} \sum_{\alpha} (\Psi \delta_{ab} + q_{ab} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} \Psi) - i\delta_{ij} \sum_{\sigma} (\Psi \delta_{ab} + \bar{q}_{\sigma b} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\sigma a}} \Psi) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_j^b \pi_i^a \Psi(q, \bar{q}) &= -i \sum_{\alpha, \beta} (f_{j\beta} | f_{i\alpha}) q_{\beta b} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha a}} (\Psi) - i \sum_{\sigma, \tau} (g_{j\tau} | g_{i\sigma}) \bar{q}_{\tau b} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\sigma a}} (\Psi) \\ &= -i \sum_{\alpha} (\delta_{ij} \Psi \delta_{ab}) - i \sum_{\sigma} \bar{q}_{\sigma b} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{\sigma a}} (\Psi) \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces, la relación  $[\pi_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})]$  es

$$[\pi_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y})] | \Psi(q, \bar{q}) \rangle = -i\delta_{ij} \delta_{ab} \Psi \quad (6)$$

que es exactamente la relación (1) tal y como se dijo, y por lo tanto podemos decir que las coordenadas  $q, \bar{q}$  son, por definición coordenadas cartesianas. Se ve claramente que esta relación es válida siempre y cuando la base  $\{f_{k\alpha}, g_{\sigma}\}$  sea una base completa tal que nos permita usar las relaciones de completéz y ortonormalidad:

$$\sum_{k\alpha} | f_{k\alpha} \rangle \langle f_{k\alpha} | + \sum_{\sigma} | g_{\sigma} \rangle \langle g_{\sigma} | = 1$$

$$\langle f_{k\alpha} | f_{k'\alpha'} \rangle = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\langle g_{\sigma} | g_{\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\langle f_{k\alpha} | g_{\sigma} \rangle = 0$$

etc...

Esto nos permite considerar al campo  $\pi$  como una derivada funcional sobre  $\mathbf{A}$  i.e.  $\pi \sim \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}}$ , y por lo tanto a la energía cinética como el Laplaciano funcional ordinario  $\pi \cdot \pi \sim \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{A}^2}$ .

*Coordenadas Curvilíneas. Fijación de la Norma.*

En el Hamiltoniano de una teoría de norma, se presenta el problema de eliminar los grados de libertad no-independientes. Una forma posible de realizar esto, consiste en fijar completamente la norma con una condición apropiada sobre los campos de norma  $\mathbf{A}^a$ . Por ejemplo la norma de Schwinger se especifica como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Schwinger} \quad (7)$$

En este caso podemos escribir apropiadamente las componentes longitudinales (en la dirección de  $\mathbf{x}$ ) como

$$\tilde{\mathcal{O}}_{k\mathbf{e}_\sigma} = x_k \mathbf{e}_\sigma \quad (8)$$

donde  $\mathbf{e}_\sigma$  es un campo escalar evaluado en el álgebra de Lie  $SU(N)$ . Esta manera de escribir las componentes longitudinales resulta apropiada para que se separen las componentes longitudinales de las transversales por medio de la condición que fija completamente la norma :

$$\mathbf{A}(q_{\alpha,a}, \bar{q}_{\sigma,b}) = \sum_{\alpha,a,\sigma,b} \{f_{\alpha,a} q_{\alpha,a} + \tilde{\mathcal{O}}_{k\sigma,b} \bar{q}_{\sigma,b}\} = U_{\tilde{Q}} [\tilde{\mathbf{A}}(Q_{\sigma,a}) - i\nabla] U_{\tilde{Q}}^{-1} \quad (9)$$

Esto último es equivalente a hacer una transformación de coordenadas, similar a una transformación de coordenadas cartesianas normales a coordenadas esféricas para separar la parte radial y la parte angular en problemas donde el Hamiltoniano posee simetría rotacional i.e.  $\Psi(\mathbf{x}) = \psi(r) \mathfrak{Y}_{l,m}^j(\theta, \phi)$  :

$$(q, \bar{q}) \rightarrow (Q, \bar{Q}) \quad (10)$$



*Quantización en coordenadas curvilíneas.*

Si hicieramos caso a la relación (1) ciegamente cuando trabajamos en la norma de Schwinger ( $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^a = 0$ ), se vería inmediatamente que existe una inconsistencia cuando calculamos el conmutador  $[\pi^a, \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^b]$  (suma sobre índices repetidos):

$$[\pi_i^a(\mathbf{x}), x_j A_j^b(\mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})x_j \delta_{ij} \delta^{ab} \neq 0 \quad ! \quad (11)$$

La razón de esta inconsistencia reside en el hecho de que al aplicar la relación (1), hemos supuesto implícitamente que el conjunto de soluciones transversas es completo y por tanto se deben incluir de alguna manera también las componentes longitudinales con el fin de compensar la inconsistencia. Esta es en realidad la razón que implica que en el término de energía cinética aparezca un término extra que proviene de la interacción de las cargas de color en el Laplaciano "covariante":

$$\Delta_{\pi} = -\frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} + \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \bar{q}_{\sigma}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial \bar{q}_{\sigma}}) \frac{\partial}{\partial Q_{\beta}} \quad (12)$$

## Apéndice B

### Apéndice: Mapeo Bosónico

#### Operadores básicos

Nuestros operadores básicos son los operadores de una "coordenada"  $Q_i$ , y los operadores de "momento" que denotaremos como  $P^j$  de un espacio de Hilbert que satisfacen una álgebra bosónica (fermiónica): \*

$$[P^i, Q_j]_{\mp} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (1)$$

$$P^i = \frac{\partial}{\partial Q_i} \quad (\text{bosons}).$$

Donde  $\mathcal{N}$  es el número de grados de libertad, y los índices arriba y abajo los utilizaremos solo para tomar en cuenta coordenadas no-cartesianas.

#### Operadores de Pares

Los operadores de pares de coordenadas están dados por

$$\begin{aligned} Q_{ij} &\equiv Q_i Q_j, \\ P^{ij} &\equiv P^i P^j, \\ C_i^j &\equiv Q_i P^j \pm \frac{1}{2} \delta_i^j. \end{aligned} \quad (2)$$

y satisfacen el álgebra  $Sp(2\mathcal{N}, R)$  para el caso bosónico, y el álgebra  $\mathcal{O}(2\mathcal{N})$  para el caso fermiónico:

$$[C_i^j, C_m^n] = C_i^n \delta_m^j - C_m^j \delta_i^n,$$

\* El signo superior en las fórmulas corresponde al caso bosónico (conmutador), y el signo inferior al caso fermiónico (anticommutador).

$$\begin{aligned}
[C_i^j, Q_{mn}] &= Q_{in}\delta_m^j \pm Q_{im}\delta_n^j, \\
[C_i^j, P^{mn}] &= -P^{mj}\delta_i^n \pm P^{nj}\delta_i^m, \\
[P^{ij}, Q_{mn}] &= C_m^i\delta_n^j \pm C_n^i\delta_m^j + C_n^j\delta_m^i \pm C_m^j\delta_n^i.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ahora bien, las relaciones de conmutación de los operadores de una coordenada con los operadores de dos coordenadas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\{Q_m, P^{ij}\} &= -P^i\delta_m^j \mp P^j\delta_m^i, \\
[P^{mn}, Q_{ij}] &= \pm Q_i\delta_j^m + Q_j\delta_i^m, \\
\{Q_m, C_i^j\} &= -Q_i\delta_m^j, \\
\{P^{mn}, C_i^j\} &= P^j\delta_i^m.
\end{aligned} \tag{4}$$

#### Coordenadas Bosónicas de Modelo

Elegimos entonces unas coordenadas  $q_{ij}$  y derivadas  $p^{ij}$  pares de modelo que satisfagan una álgebra bosónica:

$$[p^{ij}, q_{mn}] = \delta_m^i\delta_n^j \pm \delta_n^i\delta_m^j. \tag{5}$$

con

$$\begin{aligned}
p^{ij} &= \pm p^{ji}, \\
q_{ij} &= \pm q_{ji},
\end{aligned} \tag{6}$$

#### Ansatz

Nuestro Ansatz para los operadores de pares tiene la forma

$$Q_{ij} \mapsto q_{ij} \tag{7a}$$

$$P^{ij} \mapsto [\alpha_1\Gamma^q + \hat{R} + \alpha_2\Gamma^q, p^{ij}] + \alpha_3 p^{ij}. \tag{7b}$$

donde  $\Gamma^q + \hat{R}$  y  $\Gamma^q$  son operadores del tipo de los operadores de Casimir definidos por las relaciones

$$\Gamma^q = \sum_{mn} C_m^n C_n^m \quad (8a)$$

$$\Gamma^{q+\hat{\rho}} = \sum_{mn} (C_m^n + B_m^n)(C_n^m + B_n^m) \quad (8b)$$

con los operadores "unitarios" C y B definidos por

$$\begin{aligned} C_m^n &\equiv \sum_k q_{ik} p^{jk}, \\ B_m^n &\equiv \rho_m p^n \pm \frac{1}{2} \delta_m^n, \end{aligned} \quad (9)$$

Los coeficientes del mapeo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  se determinan a partir de la condición de mantener las relaciones de conmutación (anticommutación) del álgebra original.

También tenemos que mapear los operadores de un bosón individual a un bosón ideal, siguiendo el mismo procedimiento. El *ansatz* más sencillo tiene la forma:

$$Q_i \mapsto \beta_1 \rho_i + \beta_2 \sum_k q_{ik} P^k. \quad (10a)$$

$$P^j \mapsto \beta_3 P^j + \beta_4 \sum_k p^{jk} \rho_k + [\beta_5 \Gamma^{q+\hat{\rho}} + \beta_6 \Gamma^{\hat{\rho}}, P^j]. \quad (10b)$$

En este caso se ha tenido que introducir desde el principio el término  $\sum_k q_{ik} P^k$  en la definición del *ansatz* para el mapeo de  $Q_i$  para asegurar que las relaciones de conmutación (anticommutación) se satisfagan exactamente.

#### Mapeo explícito de $P^{ij}$

Es fácil ver que las relaciones de conmutación de  $q_{ij}, p^{ij}$  con los operadores  $C_i^j$  son similares a las relaciones (3) con lo que se pueden facilmente los cálculos.

Para determinar las constantes que aparecen en el mapeo (7b) calculamos primero el siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 [\Gamma^q, p^{ij}] &= \sum_{mn} [C_m^n C_n^m, p^{ij}] \\
 &= - \sum_n \{ C_n^i p^{nj} \pm C_n^j p^{ni} + p^{nj} C_n^i \pm p^{ni} C_n^j \} \\
 &= -2 \sum_n \{ C_n^i p^{nj} \pm C_n^j p^{ni} \} - 2(\mathcal{N} \pm 1) p^{ij} \quad (11a)
 \end{aligned}$$

En seguida, de la misma forma, calculamos el mapeo del conmutador

$$\begin{aligned}
 [\Gamma^{q+\phi}, p^{ij}] &= \sum_{mn} [(C_m^n + B_m^n)(C_n^m + B_n^m), p^{ij}] \\
 &= [\Gamma^q, p^{ij}] - 2 \sum_n \{ B_n^i p^{nj} \pm B_n^j p^{ni} \} \quad (11b)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto si sustituimos las ecs. (11) en (7b), el mapeo de  $P^{ij}$  es

$$P^{ij} \mapsto$$

$$\begin{aligned}
 &-2 \sum_n \{ ((\alpha_1 + \alpha_2) C_n^i + \alpha_1 B_n^i) p^{nj} \pm ((\alpha_1 + \alpha_2) C_n^j + \alpha_1 B_n^j) p^{ni} \} \quad (12) \\
 &+ (\alpha_3 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathcal{N} \pm 1)) p^{ij}
 \end{aligned}$$

Con ésta expresión del mapeo de  $P^{ij}$  es con la que trabajamos.

Las constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  las determinamos a partir de la relación de conmutación (3d) que es la relación constitutiva del álgebra:

$$[P^{ij}, Q_{mn}] = C_m^i \delta_n^j \pm C_n^i \delta_m^j + C_n^j \delta_m^i \pm C_m^j \delta_n^i$$

—

$$[-2 \sum_k \{ ((\alpha_1 + \alpha_2) C_k^i + \alpha_1 B_k^i) p^{kj} \pm (i \leftrightarrow j) \} + (\alpha_3 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathcal{N} \pm 1)) p^{ij}, q_{mn}] \quad (13)$$

Podemos separar ésta relación de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) \sum_k \{C_k^i p^{kj}, q_{mn}\} \pm (i \leftrightarrow j) \\
 &\quad - 2\alpha_1 \sum_k B_k^i [p^{kj}, q_{mn}] \pm (i \leftrightarrow j) \\
 &\quad + \{\alpha_3 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathcal{N} \pm 1)\} [p^{ij}, q_{mn}]
 \end{aligned} \tag{14}$$

y calcular cada contribución por separado:

$$\begin{aligned}
 [P^{ij}, Q_{mn}] \mapsto & \\
 &-4(\alpha_1 + \alpha_2) \{C_m^i \delta_n^j \pm C_n^i \delta_m^j + C_i^j \delta_m^i \pm C_m^j \delta_n^i\} \\
 &-2\alpha_1 \{B_m^i \delta_n^j \pm B_n^i \delta_m^j + B_i^j \delta_m^i \pm B_m^j \delta_n^i\} \\
 &+ \{\alpha_3 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathcal{N} \pm 1)\} (\delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Por otra parte, el lado derecho de (3d) se mapea a

$$\rightarrow (C_m^i + (B_m^i) \delta_n^j \pm (C_n^i + (B_n^i) \delta_m^j + (C_i^j + (B_i^j) \delta_m^i \pm (C_m^j + (B_m^j) \delta_n^i). \tag{16}$$

Por lo tanto si comparamos los mapeos del lado izquierdo y derecho de (3d) se obtienen las siguientes relaciones para los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$\begin{aligned}
 -4(\alpha_1 + \alpha_2) &= 1 \\
 -2\alpha_1 &= 1 \\
 \{\alpha_3 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathcal{N} \pm 1)\} &= 0
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{4} \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{N} \pm 1)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto el mapeo de  $P^{ij}$  (2) queda como:

$$P^{ij} \mapsto \frac{1}{2}[-\Gamma^q + \hat{Q} + \frac{1}{2}\Gamma^q, p^{ij}] - \frac{1}{2}(\mathcal{N} \pm 1)p^{ij} \quad (18a)$$

ó, a partir del mapeo explícito (12) como

$$P^{ij} \mapsto \sum_n \left( \frac{1}{2} C_n^i + B_n^i \right) p^{nj} \pm (i \leftrightarrow j) \quad (18b)$$

#### Mapeo de los operadores de una coordenada

Primeramente necesitamos el mapeo explícito de  $P^j$ . Para ésto calculamos los conmutadores  $[\Gamma^{\hat{Q}}, P^j]$  y  $[\Gamma^q + \hat{Q}, P^j]$  que aparecen en el ansatz (10b) i.e.

$$\begin{aligned} [\Gamma^{\hat{Q}}, P^j] &= \sum_{mn} [B_m^n B_n^m, P^j] \\ &= -2\mathcal{N} \hat{P} \end{aligned} \quad (19a)$$

donde hemos usado la relación  $[B_m^n, \hat{P}] = -P^n \delta_m^j$ . Ahora el conmutador

$$\begin{aligned} [\Gamma^q + \hat{Q}, P^j] &= \sum_{mn} [(C_m^n + B_m^n)(C_n^m + B_n^m), P^j] \\ &= [\Gamma^{\hat{Q}}, P^j] - 2 \sum_n C_n^j P^n \end{aligned} \quad (19b)$$

Sustituyendo (19a) y (19b) en el mapeo de  $P^j$  y reordenando los términos se obtiene el mapeo explícito :

$$P^j \mapsto \{\beta_3 - (\beta_5 + \beta_6)(\mathcal{N} \pm 1)\} P^j + \beta_4 \sum_k p^{jk} \hat{Q}_k - 2 \sum_k \{\beta_5 C_k^j + (\beta_5 + \beta_6) B_k^j\} P^k \quad (20)$$

donde  $B_n^j = Q_n P^j \pm 1/2\delta_n^j$ .

Para encontrar los coeficientes del mapeo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_0$  nos fijamos en los estados de la forma  $Q_i Q_j | 0 \rangle$  que se mapean como

$$Q_i Q_j | 0 \rangle \mapsto q_{ij} | 0 \rangle. \quad (21)$$

Para que el mapeo a una coordenada de par  $q_{ij}$  esté definido de manera única, es necesario que éste sea equivalente al mapeo de dos operadores de una coordenada (10a) i.e.

$$(Q_i)(Q_j) | 0 \rangle \mapsto (\beta_1 \rho_i + \beta_2 \sum_k q_{ik} P^k)(\beta_1 \rho_j + \beta_2 \sum_k q_{jk} P^k) | 0 \rangle \quad (22a)$$

Utilizando el hecho de que  $P^k \rho_j | 0 \rangle = \delta_j^k$ , y requiriendo que nuestro espacio físico solo contenga a lo más una coordenada  $\rho_i$  i.e. eliminando el término de segundo orden en las  $Q$ 's se tiene †

$$(Q_i)(Q_j) | 0 \rangle \mapsto \beta_1 \beta_2 q_{ij} | 0 \rangle \quad (22b)$$

de donde se obtiene la relación entre los coeficientes

$$\beta_1 \beta_2 = 1 \quad (23)$$

Además, si queremos asegurarnos que un estado de un solo bosón (fermión) en el espacio microscópico  $Q_i | 0 \rangle$  esté generado en el espacio de modelo por  $\rho_i | 0 \rangle$  se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i | 0 \rangle &\mapsto \{\beta_1 \rho_i + \beta_2 \sum_n q_{in} P^n\} | 0 \rangle \\ &= \beta_1 \rho_i | 0 \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

y con la condición de normalización para los estados de modelo se obtiene

† Esto se puede conseguir introduciendo adecuadamente el proyector  $(1-N)$  delante de  $\rho$ , y el proyector  $N$  delante de  $P$ .



$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 1\end{aligned}\quad (25)$$

Esto es suficiente para definir completamente el mapeo de  $Q_i$  sustituyendo las relaciones anteriores en el mapeo (10a):

$$Q_i \mapsto \rho_i + \sum_k q_{ik} P^k \quad (26)$$

#### Mapeo de $P^i$

Para encontrar relaciones entre los coeficientes del mapeo de  $P^j$  nos fijamos en la relación de conmutación (1) †

$$\begin{aligned}[P^i, Q_j] &= \delta_j^i \quad \text{bosones} \\ [P^i, Q_j] &= \delta_j^i - 2Q_j P^i \quad \text{fermiones}\end{aligned}\quad (27)$$

Hay que notar que es suficiente con verificar la versión contraída de ésta relación cuando se aplica sobre el estado de vacío de modelo  $|0\rangle$ , ya que los estados físicos en el espacio de modelo contienen a lo más, una coordenada ideal  $\rho$  y por lo tanto son polinomios de la forma:

$$\mathcal{P}(\rho) \rho^\delta |0\rangle \quad \delta = 1, 0. \quad (28)$$

Utilizando las relaciones (20) y (26), se tiene que

$$[P^i, Q_j] \mapsto [A P^i + \beta_4 \sum_k p^{ik} \rho_k - 2 \sum_n \{\beta_5 C_n^i + (\beta_5 + \beta_6) B_n^i\} P^n, \rho_j + \sum_k q_{jk} P^k] |0\rangle \quad (29)$$

†  $(a, b)_j = (a, b) - 2b a$

con  $A = \beta_3 - (N \pm 1)(\beta_5 + \beta_6)$  definido para facilitar los cálculos.

Separando las contribuciones y reordenando los términos se obtiene lo siguiente †:

$$\begin{aligned}
 [P^i, Q_j] | 0 \rangle &\mapsto \delta_j^i \{ A + (\pm\beta_4 - 2\beta_5 - 2\beta_6)N - 2\beta_5 \sum_{nk} q_{nk} P^k P^n \} | 0 \rangle \\
 &+ C_j^i \{ \beta_4 - 2\beta_5 \} | 0 \rangle \\
 &+ \rho_j P^i \{ \beta_4 - 2\beta_5 - 2\beta_6 \} | 0 \rangle \\
 &+ 2\beta_6 \sum_n q_{jn} P^i P^n | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Para que los términos en  $C_j^i$  y en  $\rho_j P^i$  desaparezcan, es necesario que

$$\begin{aligned}
 \beta_4 &= -2\beta_5 \\
 \beta_6 &= -2\beta_5
 \end{aligned} \tag{31}$$

Además  $P^n | 0 \rangle = 0$ . Por lo tanto el mapeo (27) queda como

$$[P^i, Q_j] | 0 \rangle \mapsto A \delta_j^i | 0 \rangle \tag{32}$$

con lo que se obtiene la relación:

$$A = \beta_3 - (N \pm 1)(\beta_5 + \beta_6) = 1 \tag{33}$$

Ahora, para encontrar explícitamente los coeficientes del mapeo de  $P^i$  mapeamos la relación

$$[Q_m, P^{ij}] = -P^i \delta_m^j \mp P^j \delta_m^i \tag{34}$$

Por una parte el lado izquierdo se puede calcular sin problema utilizando los mapeos de  $Q_m$  y  $P^{ij}$  eca (26) y (18b). El lado derecho debe involucrar los coeficientes que deseamos calcular.

† Las etiquetas "b" y "f" significan que esos términos solo aparecen en el caso bosónico ó fermiónico respectivamente

El mapeo del lado izquierdo es

$$[Q_m, P^{ij}] \mapsto \delta_m^i \{\mp P^j - \sum_n p^{nj} Q_n - \sum_k (C_k^j + Q_k P^j) P^k\} \pm (i \leftrightarrow j). \quad (35)$$

El mapeo de  $P^j$  por otra parte está dado por (10b) i.e.

$$P^j \mapsto \{\beta_3 - (\beta_5 + \beta_6)(\mathcal{N} \pm 1)\} P^j + \beta_4 \sum_k p^{jk} Q_k - 2 \sum_k \{\beta_5 C_k^j + (\beta_5 + \beta_6) B_k^j\} P^k$$

Si comparamos ambos mapeos, se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} \beta_3 - (\beta_5 + \beta_6)(\mathcal{N} \pm 1) &= 1 \\ \beta_4 &= 1 \\ -2\beta_5 &= 1 \end{aligned} \quad (36)$$

de donde, junto con (25) y (33), se obtienen los coeficientes

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 1 \\ \beta_3 &= \frac{\pm \mathcal{N} + 3}{2} \\ \beta_4 &= \pm 1 \\ \beta_5 &= \mp \frac{1}{2} \\ \beta_6 &= \pm 1 \end{aligned} \quad (37)$$

Por lo tanto el mapeo de  $P^i$  queda finalmente como:

$$P^i \mapsto P^i \pm \sum_k p^{ik} Q_k \pm \sum_n C_n^i P^n \mp \sum_n Q_n P^i P^n. \quad (38)$$

ó completando el operador  $B_n^i = Q_n P^i \pm \frac{1}{2} \delta_n^i$  como:

$$P^i \mapsto \frac{3}{2} P^i \pm \sum_k p^{ik} Q_k \pm \sum_n (C_n^i - B_n^i) P^n \quad (39)$$

---

En éste mapeo no hemos incluido explícitamente los proyectores del espacio físico de modelo. La consecuencia que puede traer ésto, es la posibilidad de que aparezcan estados no-físicos (espurios), pero la ventaja que tenemos es que el mapeo satisface exactamente las relaciones de conmutación.

## Apéndice C

### 1 Receta para mapear operadores

En este apéndice vamos a ejemplificar nuestra "receta" para mapear operadores del espacio microscópico al espacio de modelo, encontrando un mapeo explícito para el operador de "Casimir"  $\Gamma^Q = \sum_{n_1 n_2} C_{n_1}^{n_2} C_{n_2}^{n_1}$  en términos de operadores diagonales de "número", que no nos llevan afuera del subespacio físico que estamos considerando, y se muestra cómo los mapeos son equivalentes.

El operador de Casimir de segundo orden se escribe en términos de los operadores unitarios  $C_{n_1}^{n_2} \in U(\mathcal{N})$  como:

$$\Gamma^Q = \sum_{n_1 n_2} C_{n_1}^{n_2} C_{n_2}^{n_1}. \quad (1)$$

Los operadores unitarios  $C_{n_1}^{n_2}$  están definidos como

$$C_{n_1}^{n_2} = Q_{n_1} P^{n_2} \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots, \mathcal{N}. \quad (2)$$

El operador de Casimir (1) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\Gamma^Q = \sum_{n_1 n_2} (Q_{n_1} P^{n_2})(Q_{n_2} P^{n_1}) \quad (3)$$

Ahora ponemos en orden normal los operadores  $Q$ 's y  $P$ 's :

$$\begin{aligned} \Gamma^Q &= \sum_{n_1 n_2} \{Q_{n_1} (Q_{n_2} P^{n_2} + \delta_{n_2}^{n_2}) P^{n_1}\} \\ &= \sum_{n_1 n_2} \{Q_{n_1} Q_{n_2} P^{n_1} P^{n_2}\} + \mathcal{N} N_Q \end{aligned} \quad (4)$$

y como segundo paso vamos a reordenar el término  $Q_{n_1} Q_{n_2} P^{n_1} P^{n_2}$ , de manera que lo podamos expresar en términos de operadores de número  $N_Q = \sum_n Q_n P^n$  i.e. conmutando  $Q_{n_2} P^{n_1}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^Q &= \sum_{n_1 n_2} \{ Q_{n_1} P^{n_1} Q_{n_2} P^{n_2} \} - N_Q + \mathcal{N} N_Q \\ &= N_Q (N_Q + \mathcal{N} - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

La nueva forma que tiene nuestro operador  $\Gamma^Q$  es completamente equivalente a la forma (1), pero con la ventaja de que ahora está expresado en términos de operadores diagonales, es decir, de operadores de número.

Ahora supongamos que queremos aplicar este operador  $\Gamma^Q$ , en el espacio microscópico, sobre un estado (bosónico) de cuatro coordenadas de la forma †:

$$(Q_1)^2 (Q_2)^2 | 0 \rangle \quad (6)$$

Si aplicamos el operador  $\Gamma^Q$  en la forma (5), se obtiene fácilmente que

$$\Gamma^Q \{ (Q_1)^2 (Q_2)^2 | 0 \rangle \} = 4(3 + \mathcal{N}) \{ (Q_1)^2 (Q_2)^2 | 0 \rangle \} \quad (7)$$

de donde se ve que el eigenvalor del operador de Casimir  $\Gamma^Q$  correspondiente al estado (6) es  $4(3 + \mathcal{N})$ .

#### Mapeo

Ahora, vamos a mapear la acción de este operador sobre el estado (6). El estado (6) se tiene que mapear al espacio de modelo. Sin embargo existen diferentes formas de hacer esto, por ejemplo:

$$Q_1^2 Q_2^2 | 0 \rangle \mapsto g_{12}^2 | 0 \rangle, \quad (8a)$$

$$\mapsto g_{11} g_{22} | 0 \rangle, \quad (8b)$$

$$\mapsto \hat{S} g_{11} g_{22} | 0 \rangle, \quad (8c)$$

donde  $\hat{S}$  es el operador de simetrización.

Para obtener el mapeo del operador de Casimir se considera primero el mapeo de los operadores unitarios (2):

† En la representación de coordenadas  $Q$ , y derivadas  $\frac{\partial}{\partial Q}$ , el estado de vacío es simplemente la unidad i.e.  $| 0 \rangle \equiv 1$ .

$$C_{n_1}{}^{n_2} \mapsto C_{n_1}{}^{n_2} \equiv \sum_k q_{n_1 k} p^{n_2 k} \quad (9)$$

Para mapear el operador de Casimir en sus dos formas "equivalentes", mapeamos también el operador de número  $\hat{N}_Q = \sum_n Q_n P^n = \sum_n C_n^n$

$$\hat{N}_Q = \sum_n C_n^n \mapsto \hat{N}_q = \sum_{nk} q_{nk} p^{nk} \quad (10)$$

$$N_Q \mapsto 2N_q$$

Para demostrar que el eigenvalor del operador de número  $N_Q$  se mapea al eigenvalor " $2N_q$ " vamos a aplicar el mapeo del operador de número (10) sobre el mapeo del estado (6) en la forma (8b):

$$\hat{N}_q |q_{11} q_{22} | 0 \rangle = \sum_{nk} q_{nk} p^{nk} |q_{11} q_{22} | 0 \rangle \quad (11)$$

Usando la relación de conmutación bosónica para las coordenadas de modelo

$$[p^{ij}, q_{mn}] = \delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j \quad (12)$$

para conmutar el operador  $p^{nk}$ , se obtiene

$$\sum_{nk} q_{nk} p^{nk} |q_{11} q_{22} | 0 \rangle = \sum_{nk} (q_{nk} q_{11} q_{22} p^{nk} + 2\delta_2^k \delta_1^n q_{nk} q_{11} + 2\delta_1^n \delta_2^k q_{nk} q_{22}) | 0 \rangle \quad (13)$$

con la condición

$$p^{nk} | 0 \rangle = 0 \quad (14)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \hat{N}_q |q_{11} q_{22} | 0 \rangle &= (2q_{22} q_{11} + 2q_{11} q_{22}) | 0 \rangle \\ &= 4q_{11} q_{22} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

de donde se vé que el eigenvalor del operador de número es dos veces el número de coordenadas  $q$ 's, como se dijo antes.

Ahora bien. Utilizando la forma (5) del operador de Casimir, vemos que éste se mapea como:

$$\Gamma^Q \mapsto 2N_q(2N_q + \mathcal{N} - 1), \quad (16)$$

y aplicándolo a los estados equivalentes ( 8a, 8b, 8c ), se obtiene de inmediato:

$$\begin{aligned} \Gamma^Q \{ (Q_1)^2 (Q_2)^2 \} &\mapsto 2N_q(2N_q + \mathcal{N} - 1) \begin{cases} q_{11}q_{22} \\ q_{12}^2 \\ \tilde{S}q_{11}q_{22} \end{cases} \\ &= 4(3 + \mathcal{N}) \begin{cases} q_{11}q_{22} \\ q_{12}^2 \\ \tilde{S}q_{11}q_{22} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

donde se ha usado el hecho que el número de coordenadas pares ( $q$ 's) es  $N_q = 2$ , en los tres casos. Hay que notar aquí que la acción del operador de Casimir, escrito en términos de operadores de número, no nos conduce a estados diferentes (fuera de nuestro subespacio de interés), como se vé de las ecuaciones (17).

Por otra parte, se puede determinar la acción de los operadores unitarios mapeados (9), sobre los estados (8). Por ejemplo, se obtiene que :

$$C_{n_1}{}^{n_2} q_{11} q_{22} | 0 \rangle = \{ 2q_{n_1,1} q_{22} \delta_{n_2,1} + 2q_{n_1,2} q_{11} \delta_{n_2,2} \} | 0 \rangle \quad (18)$$

donde se vé inmediatamente que la acción de estos operadores nos conducen a estados diferentes (fuera del subespacio físico de interés).

La acción mapeada, del operador de Casimir sobre el estado (6) se puede determinar, ahora, utilizando la forma

$$\Gamma^Q \mapsto \Gamma^q \equiv \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}{}^{n_2} C_{n_2}{}^{n_1}, \quad (19)$$



donde los operadores  $C_{n_1 n_2}$  están definidos por el mapeo (9). De esta manera se tiene lo siguiente :

(a)  $\Gamma^q q_{11} q_{22}$  :

$$\Gamma^q q_{11} q_{22} = \sum_{n_1, n_2, k, l} q_{n_1 k} p^{n_2 k} q_{n_2 l} p^{n_1 l} q_{11} q_{22}, \quad (20)$$

y conmutando los operadores  $p^{n_1 n_2}$  a la derecha, se obtiene :

$$\Gamma^q q_{11} q_{22} = 8(q_{12})^2 + 4(\mathcal{N} + 1)q_{11} q_{22} \quad (21)$$

De la misma manera se obtienen:

(b)  $\Gamma^q (q_{12})^2$  :

$$\Gamma^q (q_{12})^2 = (4\mathcal{N} + 8)(q_{12})^2 + 4q_{11} q_{22} \quad (22)$$

(c)  $\Gamma^q (\tilde{S} q_{11} q_{22})$  :

El estado simetrizado (8c) está dado por:

$$(\tilde{S} q_{11} q_{22}) = 2(q_{11} q_{22}) + 4(q_{12})^2 \quad (23)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \Gamma^q (\tilde{S} q_{11} q_{22}) &= 2\Gamma^q (q_{11} q_{22}) + 4\Gamma^q (q_{12})^2 \\ &= (12 + 4\mathcal{N})\{2(q_{11} q_{22}) + 4(q_{12})^2\} \\ &= 4(3 + \mathcal{N})(\tilde{S} q_{11} q_{22}) \end{aligned} \quad (24)$$

Podemos observar que el sólo para el estado simetrizado (8c), la acción del operador de Casimir  $\Gamma^q$  no nos lleva fuera del subespacio de interés. Para los estados (8a) y (8b), sin embargo, la acción de este operador nos conduce a estados diferentes como puede verse en las fórmulas (21) y (22).

## Apéndice D

### Cálculo de las integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{\pm 1/2}(x) L_{n'}^{\pm 1/2}(x) \quad (1)$$

Usando la función generatriz de los polinomios de Laguerre

$$\frac{e^{xt/(t-1)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n \quad \text{con } |t| < 1 \quad (2)$$

y multiplicando dos de estas funciones generatrices se obtiene

$$\sum_{n,n'=0}^{\infty} t^n s^{n'} L_n^{\alpha}(x) L_{n'}^{\alpha'}(x) = \frac{e^{xt/(t-1)}}{(1-t)^{\alpha+1}} \frac{e^{xs/(s-1)}}{(1-s)^{\alpha'+1}} \quad (3)$$

de aquí podemos obtener la integral buscada, si multiplicamos primero la ec.(3) por  $x^p e^{-x}$  e integramos en el intervalo  $0 \leq x \leq \infty$  :

$$\sum_{n,n'=0}^{\infty} t^n s^{n'} \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^p L_n^{\alpha}(x) L_{n'}^{\alpha'}(x) = \int_0^{\infty} dx x^p \frac{e^{-cx}}{(1-t)^{\alpha+1} (1-s)^{\alpha'+1}} \quad (4)$$

donde  $c = \frac{1-st}{(1-s)(1-t)}$ , y  $p$  en particular es  $p = -1/2$ .

El lado derecho de la ecuación (4) se puede integrar fácilmente si usamos la fórmula

$$\int_0^{\infty} dx x^p e^{-cx} = \frac{1}{c^{p+1}} \Gamma(p+1) \quad (5)$$

con lo cual se tiene ahora

$$\sum_{n,n'=0}^{\infty} t^n s^{n'} \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^p L_n^{\alpha}(x) L_{n'}^{\alpha'}(x) = (1-t)^{p-\alpha} (1-s)^{p-\alpha'} (1-st)^{-p-1} \Gamma(p+1). \quad (6)$$

Ahora con  $p = -1/2$ ,  $y \alpha, \alpha' = \pm 1/2$  vamos a considerar los siguientes casos:

- i)  $\alpha = \alpha' = 1/2$
- ii)  $\alpha = -1/2, \alpha' = 1/2$
- iii)  $\alpha = \alpha' = -1/2$

*Caso (i)*  $\alpha = \alpha' = 1/2$

El lado derecho de la ecuación (6) es:

$$= (1-t)^{-1} (1-s)^{-1} (1-st)^{-1/2} \Gamma(1/2) \quad (7)$$

Si aplicamos un desarrollo de Taylor  $(1-t)^y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{y}{m} t^m$  para cada factor resulta

$$= \sum_{m_1 m_2 m_3}^{\infty} (-1)^{m_1+m_2+m_3} \binom{-1}{m_1} \binom{-1}{m_2} \binom{-1/2}{m_3} t^{m_1} s^{m_2} (st)^{m_3} \Gamma(1/2) \quad (8)$$

Ahora usamos la relación entre coeficientes binomiales  $\binom{-x}{m} = (-1)^m \binom{x+m-1}{m}$  para escribir

$$\begin{aligned} \binom{-1}{m} &= (-1)^m \binom{m}{m} = (-1)^m \\ \binom{-1/2}{m} &= (-1)^m \binom{m-1/2}{m} = \frac{\Gamma(m+1/2)}{m! \Gamma(1/2)} \end{aligned} \quad (9)$$

con lo que se obtiene, finalmente, para el lado derecho de (6)

$$= \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_3 + 1/2)}{m_3!} t^{m_1+m_3} s^{m_2+m_3} \quad (10)$$

Comparando con los coeficientes correspondientes del lado izquierdo se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} m_1 &= n - s \geq 0 \\ m_2 &= n' - s \geq 0 \\ m_3 &= s \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

y por lo tanto (10) toma la forma

$$= \sum_{s, n, n'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s + 1/2)}{s!} t^n s^{n'} \quad (12)$$

y con la condición que se obtiene de (11) para el índice  $s$

$$s \leq \min(n, n') \quad (13)$$

de donde se obtiene finalmente comparando (12) y (6) :

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\min(n, n')} \frac{\Gamma(s + 1/2)}{s!} \quad (14)$$

**Caso (ii)**  $\alpha = 1/2, \alpha' = -1/2$

Procediendo de la misma manera, el lado derecho de la ec. (6) en éste caso es

$$= (1-t)^0 (1-s)^{-1} (1-st)^{-1/2} \Gamma(1/2)$$

por lo que solo tenemos que hacer dos desarrollos de Taylor, con lo que finalmente resulta

$$= \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m_2 + 1/2)}{m_2!} s^{m_1 + m_2} t^{m_2} \quad (15)$$

y comparando coeficientes con los del lado izquierdo de (6) se tiene que

$$\begin{aligned} n' &= m_1 + m_2 \geq 0 \\ n &= m_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones anteriores nos dicen que (1) en éste caso ( $\alpha = 1/2$ ,  $\alpha' = -1/2$ ) no será válida para cualquier par  $n, n'$  sujetándose a la restricción

$$n' \geq n$$

se obtiene

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{n!} \quad (16)$$

Para ver que resultado se obtiene en el caso contrario en donde  $n' < n$  se puede utilizar la relación entre polinomios de Laguerre

$$L_n^{-1/2}(x) = L_n^{1/2}(x) - L_{n-1}^{1/2}(x)$$

con la que se puede usar entonces la ec. (14) para resolver éste caso i.e.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \\ & = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{-1/2} \{ L_n^{1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) - L_{n-1}^{1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) \} \end{aligned}$$

y usando el resultado para  $\alpha = \alpha' = 1/2$  se obtiene

$$\sum_{s=0}^{\min(n,n')} \frac{\Gamma(s+1/2)}{s!} - \frac{\min(n-1,n')}{\sum_{s'=0}^{\min(n-1,n')} \frac{\Gamma(s'+1/2)}{s'!}}$$

con lo que se pueden considerar los dos casos  $n' \geq n$   $\min(n, n') = n$ , y  $n' < n$   $\min(n, n') = n - 1$  con el resultado final:

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \quad n' \geq n$$

$$= 0 \quad n' < n \quad (17)$$

**Caso (iii)  $\alpha' = -1/2$**

En este caso el lado derecho de la ecuación (6) es

$$= (1-st)^{-1/2} \Gamma(1/2)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/2)}{m!} t^m s^m \quad (18)$$

y comparando coeficientes se llega al resultado

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{-1/2}(x) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \delta_{n,n'} \quad (19)$$

Haciendo un resumen se tiene

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\min(n,n')} \frac{\Gamma(s+1/2)}{s!} \quad (14)$$

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{1/2}(x) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \quad n' \geq n$$

$$= 0 \quad n' < n \quad (17)$$

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{-1/2} L_n^{-1/2}(x) L_{n'}^{-1/2}(x) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \delta_{n,n'} \quad (19)$$

## Apéndice E

Este apéndice contiene los elementos de matriz de los operadores que aparecen en el Hamiltoniano de juguete (6.47), en la base

$$|2n + \epsilon\rangle = \mathcal{N}_{2n+\epsilon} e^{-q/\sqrt{2}qt^2} H_{2n}(\sqrt{2}qt) q^{\epsilon/2} \quad n = 0, 1, 2, \dots; \epsilon = 0, 1. \quad (1)$$

Las métricas que usamos para la parte *par* e *impar* respectivamente son:

$$\int_0^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{q}} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-q^2} \quad (3)$$

La normalización de estos estados es:

$$\mathcal{N}_{2n+\epsilon} = \left[ \frac{\pi}{2^{\epsilon}} \frac{2^{2n} (2n)!}{2!^{1/4}} \right]^{-1/2} \quad (4)$$

con lo cual

$$\langle 2m + \rho | 2n + \epsilon \rangle = \delta_{m,n} \delta_{\rho,\epsilon} \quad (5)$$

### 1 Elementos de matriz

Elementos de matriz del operador de un *par* ( $q$ ):

$$\langle 2m + \rho | q | 2n + \epsilon \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}} \delta_{m,n+1} + (4n+1) \delta_{m,n} + \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n-2)!}} \delta_{m,n-1} \right\} \delta_{\epsilon,\rho} \quad (6)$$

Elementos de matriz para el mapeo del operador  $P^2$ :



$$P^2 \rightarrow 2\sqrt{2}\{qp^2 + 2QP + p\} \quad (7)$$

donde  $[p, q] = 1$ , es decir, que trabajamos aquí con operadores normalizados.

Si trabajamos en la representación  $p \equiv \frac{d}{dq}$ , y hacemos el cambio de variable  $x = \sqrt{\sqrt{2}q}$ , el operador mapeado adquiere la forma:

$$P^2 \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} + 2QP \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \quad (8)$$

con el correspondiente cambio en la base

$$|2n + \epsilon\rangle = \mathcal{N}_{2n+\epsilon} e^{-x^2/2} H_{2n}(x) \varrho^\epsilon \quad n = 0, 1, 2, \dots; \epsilon = 0, 1. \quad (9)$$

de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} |2n + \epsilon\rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}} |2(n+1) + \epsilon\rangle \right. \\ &\quad - (4n+1) |2n + \epsilon\rangle \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n-2)!}} |2(n-1) + \epsilon\rangle \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Por otra parte el segundo término del mapeo de  $P^2$  tiene los siguientes elementos de matriz:

$$(2m + \rho | 2QP \frac{1}{x} \frac{d}{dx} | 2n + \epsilon) = -4\epsilon(-2)^{n-m} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!} \delta_{\epsilon,\rho} \{\theta(n-m-1) + 1/2\delta_{m,n}\}. \quad (11)$$

Finalmente, si juntamos los dos términos se tiene:

$$\begin{aligned} (2m + \rho | 2\sqrt{2}\{qp^2 + 2QP + p\} | 2n + \epsilon) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}} \delta_{m,n+1} - (4n+1)\delta_{m,n} + \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n-2)!}} \delta_{m,n-1} \right\} \delta_{\epsilon,\rho} \quad (12) \\ &\quad - 4\epsilon(-2)^{n-m} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!} \{\theta(n-m-1) + 1/2\delta_{m,n}\} \delta_{\epsilon,\rho} \end{aligned}$$

Los elementos de matriz del operador  $q^2$  son:

$$\begin{aligned}
 (2m + \rho | q^2 | 2n + \epsilon) = & \\
 \frac{1}{8} \{ & \sqrt{\frac{(2n+4)!}{(2n)!}} \delta_{m,n+2} + (8n+6) \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}} \delta_{m,n+1} + 3(8n^2+4n+1) \delta_{m,n} \\
 & + (8n-2) \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n-2)!}} \delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n-4)!}} \delta_{m,n-2} \} \delta_{\epsilon,\rho}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Los elementos de matriz de los operadores *impares* son:

Para el operador  $Q(1-N)$ :

$$\begin{aligned}
 (\rho | Q(1-N) | \epsilon) &= (1-\epsilon) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^\rho}\right)^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^\rho}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ e^{-Q^2} Q^{\epsilon+\rho+1} \\
 &= (1-\epsilon) \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_{\epsilon+\rho,1}
 \end{aligned} \tag{14}$$

y para el operador  $P$ :

$$(\rho | P | \epsilon) = \epsilon \sqrt{2} \delta_{\epsilon+\rho,1} \tag{15}$$

## *Referencias*

---

## Referencias

- Bardeen, J., L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **108**, (1957), 1175
- S.T. Beliaev and V.G. Zelevinsky, *Nucl. Phys.* **39**, (1962), 582
- P. Besting and D. Schütte, *Phys. Rev. D*, Vol **40**, No.8 , (1989)
- C.Bloch, *Nucl. Phys.*, **6**, (1958), 329
- M.Bolsterli, *Phys. Rev. D* **27**, (1983), 349  
(*Modelo de la bolsa de MIT*)
- A. Chodos, R.L.Jaffe K. Johnson, C.B. Thorn and V. Weisskopf, *Phys. Rev. D* **9**, (1974) 3471
- N.H. Christ und T.D. Lee, *Phys. Rev. D*, Vol **22**, (1980)
- F.E. Close. *An Introduction to Quarks and Partons*, Academic, New York, (1979)
- M.Creutz, *Phys. Rev.Lett* **45**, (1980), 313
- R.E. Cutkosky, *Phys. Rev. Lett.* **51**, (1983), 538
- P.A.M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Jeshiva University, New York, 1964
- J.Dobaczewski, *Nucl. Phys.* **A369**, (1981), 213
- J.Dobaczewski, *Nucl. Phys.* **A380**, (1982), 1
- F.J.Dyson, *Phys.Rev.* **102**, (1956), 1217

- L.S. Faddeev and U.N. Popov, *Phys. Lett. B*, **25**, (1967), 29
- E. Fermi and C.N. Yang, *Phys. Rev.*, **76**, (1949), 1739
- R.P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.* **23**, (1969), 1415
- M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, (1964), 214
- S.L. Glashow, "Quarks with Color and Flavor," **233**, (1975), 38
- S.L. Glashow, *Nucl. Phys.*, **22**, (1961), 579-588
- S.L. Glashow, and M.Gell-Mann, *Ann. Phys.* **15**, (1967), 437-467
- J. Goldstone *Nuovo Cimento*, **18**, (1961), 154-164
- R. Gilmore, "Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications", John Wiley & Sons, N.Y., (1974)
- O.V. Greenber, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, (1964), 598
- V.N. Gribov, *Nucl. Phys. B* **139**, (1978), 1
- D. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **26**, (1973), 1343
- H. Hamber and G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **47**, (1981), 1792
- T.H. Hansson, K. Johnson and C. Peterson, *Phys. Rev. B* **26**, (1982), 2069
- K.T. Hecht, "The Vector Coherent State Method and its Application to Problems of Higher Symmetries" Lecture Notes in Physics, Heidelberg, Germany, (1987)
- P.O. Hess, *Phys. Rev. D* **40**, (1989), 915
- P.O. Hess and R. López, *Phys. Rev. D* **36**, (1987), 242
- P.O. Hess, D. Schütte, *Ann. Phys. (N.Y.)* Vol. **211**, No. 1, (1991)
- P.O. Hess and R.D. Viollier, *Phys. Rev.* **34**, (1986), 258
- P.O. Hess and R.D. Viollier, *Nucl. Phys. A* **468**, (1987), 414
- C. Itzykson and J. Zuber "Introduction to Quantum Field Theory", Mc.Graw-Hill. New York, 1980
- A. Klein, E.R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63**, (1991), 375

- J.B. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **11**, (1975), 395
- M. Lüscher, *Nucl. Phys. B* **219**, (1983), 233
- W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Reports C* **36**, (1978), 137
- E. Marinari, G. Parisi and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett* **47**, (1981), 1795
- E.R. Marshalek, *Nucl. Phys. A* **347**, (1980), 253
- M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **22 L**, (1989), 817
- Y. Nambu and M.Y. Han, *Phys. Rev* **139**, (1965), 1038
- N.K. Nielsen, *Am. J. Phys.* **49**, (1981), 1171
- N.K. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **144**, (1978), 376
- A.M. Polyakov, *Phys. Lett B* **59**, (1975), 82
- H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett* **26**, (1973), 1346
- D.E.L. Pottinger and R.C. Warner, *Phys. Lett.*, **114B**, (1982), 349
- C. Quigg, "Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions", Benjamin/Cummings, Reading MA., 1983
- L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge U.P. London, 1985
- S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.*, **16**, (1956), 686 A. Salam, in *Elementary Particle Physics*, Nobel Symp. No.8, edited by N.Svarthom, (1968) 367-377
- D. Schütte, *Phys. Rev. D* Vol. **31**, No.4 (1985), 810
- D. Schütte, "Quarks, Gluons and Hadronic Matter", Proceedings, 1987 Cape Town Workshop (R.D. Viollier and N. Warner, Eds.), pp. 61,81, World Scientific, Singapore, (1987)
- D. Schütte, *Phys. Rev. D* Vol. **40**, No.6 (1989), 2090
- E.V. Shuryak, *Phys. Reports* **115**, Nos. 4&5, (1984), 151
- G.'tHooft, *Nucl. Phys. B.* **33**, (1971), 173
- P. Van Baal, *Nucl. Phys. B* **307**, (1988), 274
- P. Van Baal and J. Koller, *Ann. Phys. (N.Y.)* **174**, (1987), 299

---

S.Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, (1967), 1204-1206

K.G.Wilson, *Phys. Rev. D* **14**, (1974), 2455

K.G.Wilson, *Talk at the Conference "Lattice 89, Capri Italy 1989"*

B.G. Wybourne, *"Classical Groups for Physicists" John Wiley & Sons N.Y.*, (1974)

C.N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, (1954), 191

G. Zweig, CERN preprint 8419/TH-412 (1964)