

Nº 80  
REJ.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

PROPUESTA PARA APUNTES DE LA  
MATERIA DE MECANICA DE MATERIALES II  
DEL AREA DE ESTRUCTURAS.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A:  
ALEJANDRA IRMA MENDEZ MEJIA



DIRECTOR DE TESIS,  
Ing. Héctor Javier Guzmán Olguín

México, D. F.

1992

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Página
<b>I. INTRODUCCION</b>	<b>2</b>
<b>II. ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS</b>	<b>4</b>
Esfuerzo cortante	
Esfuerzo cortante en vigas	
Centro de torsión	
Flujo cortante	
Deformación por cortante	
Muros de concreto reforzado y mampostería ante carga lateral	
Análisis por cargas laterales	
Resistencia a cargas laterales	
<b>III. VIGAS DE CONCRETO REFORZADO</b>	<b>41</b>
Conceptos básicos de concreto reforzado	
Comportamiento de vigas de concreto reforzado	
Dimensionamiento y revisión	
Diseño elástico	
Vigas simplemente armadas	
Diseño plástico	
Vigas simplemente armadas	
Vigas doblemente armadas	
Vigas I y T	
Vigas sujetas a fuerza cortante	
Deformaciones	
Comportamiento de vigas sujetas a deformaciones	
Cálculo de deflexiones	
<b>IV. LOSAS DE CONCRETO REFORZADO</b>	<b>109</b>
Características generales de las losas	
Comportamiento y dimensionamiento	
Losas en una sola dirección	
Losas apoyadas perimetralmente	
Descripción general de las zapatas	
Diseño y revisión	

	<b>Página</b>
<b>V. ELEMENTOS CORTOS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL COMBINADAS</b>	<b>157</b>
Introducción	
Flexotensión y flexocompresión en intervalo elástico	
Flexotensión y flexocompresión en intervalo inelástico	
Dimensionamiento y revisión de elementos cortos de concreto reforzado en flexocompresión	
Uso de diagramas de interacción	
Flexocompresión biaxial	
Introducción al dimensionamiento de muros de retención	
Introducción al dimensionamiento de elementos de concreto presforzado	
<b>VI. APENDICE</b>	<b>191</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>211</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>212</b>

# CAPITULO I

## INTRODUCCION

## CAPITULO I

El objeto del presente trabajo, es primeramente dar constancia a mi alma mater y mi Facultad de Ingeniería, de mi afortunado paso como estudiante de ésta, además porque mi sensibilidad como estudiante aún fue motivada para participar en éste, que tiene la virtud de brindar la posibilidad de un texto actualizado a mis compañeros alumnos que en un futuro cursarán la materia de Mecánica de Materiales II, mismo que estará integrado de temas extraordinariamente desarrollados y manejados, con la finalidad de que cubran a la totalidad de alumnos que recurran a ellos.

De tal manera que se desarrolla en forma clara y sencilla el esfuerzo cortante en vigas, donde se plantea el comportamiento de vigas sujetas a fuerza cortante y el cálculo de esfuerzos y deformaciones debidas a está.

En un análisis más amplio, pero no menos complejo se desarrolla el dimensionamiento y revisión de vigas de concreto reforzado, tanto para secciones simple y doblemente armadas como en secciones I y T; sujetándose a las especificaciones del RDDF NTC-87, debido a que es el Reglamento que rige.

Analógicamente se trata el tema de losas de concreto reforzado, su comportamiento, dimensionamiento y revisión; así como el de cimentaciones superficiales.

También se desarrolla el comportamiento de elementos cortos sujetos a flexión y carga axial combinadas, además de una breve introducción de los elementos presforzados.

Por último, se presentan especificaciones, gráficas y tablas como apoyo de desarrollo de los temas, agregando a esté un análisis simplista del estado plano de esfuerzos.

Finalmente cabe mencionar que para que el alumno reafirme sus conocimientos teóricos de la materia deberán ser acentuados con una práctica de laboratorio por tema, como es recomendado por el programa de la asignatura.

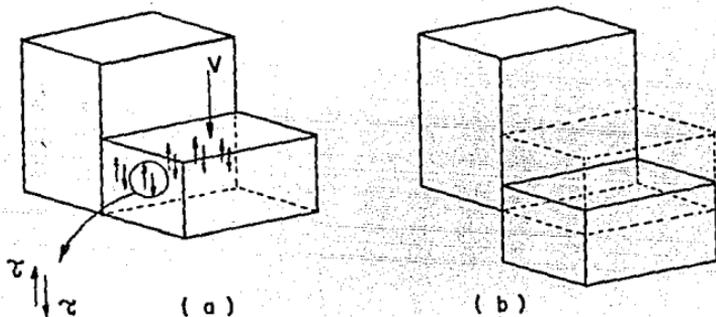
## **C A P I T U L O   I I**

**C O R T A N T E   E N   V I G A S**

## CAPITULO II

### ESFUERZO CORTANTE

La fuerza cortante es un elemento mecánico, que tiende a provocar fallas por deslizamiento y corte fundamentalmente, y la respuesta antes de la falla es, además de las deformaciones, la generación de esfuerzos cortantes que analizados en una sección cualquiera cumplirán con el equilibrio.



Esfuerzos cortantes.

Figura 1.

En la figura 1-a, se muestra una pieza sobre la que actúa una fuerza, y el área de la sección transversal esforzada donde se representan los esfuerzos cortantes con pequeñas flechas, que podemos considerar son de la misma magnitud. En la figura 1-b se asume que la tendencia de falla necesaria corresponderá a un deslizamiento tal como se ilustra, y que, su resistencia sólo obedeció a los esfuerzos cortantes que se ven en la figura 1-a.

En la práctica, analizar los esfuerzos de esta manera es realmente sencillo, por la suposición de que estos son iguales sin perder de vista que la configuración del diagrama de esfuerzos no corresponde rigurosamente a esfuerzos cortantes constantes. Por lo anterior, la forma de racionalizar los esfuerzos cortantes para este tipo de casos, será apoyándose en la ecuación siguiente:

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Donde:

$\tau$  = Esfuerzo cortante [Kg/cm<sup>2</sup>]

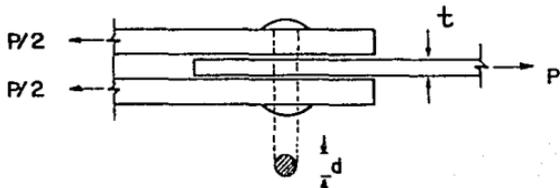
$V$  = Fuerza cortante aplicada al centroide del área [Kg]

$A$  = Area de la sección [cm<sup>2</sup>]

El resultado obtenido, es un esfuerzo cortante promedio ó también llamado esfuerzo cortante directo.

Veamos la aplicación de la expresión en un ejemplo sencillo, donde se presenta un detalle de unión de placas típico de estructuras de acero, donde se dimensionará un perno sujeto a esfuerzo cortante directo.

La fuerza  $P$  se transmite de la placa de la derecha a las de la izquierda a través de un perno. La placa de la derecha ejercerá una acción cortante sobre el perno en secciones a los lados de la placa.



Unión de placas.

Figura 2.

Datos:

$$P = 6000 \text{ [Kg]}$$

$$\tau = 700 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Se trata de determinar el diámetro del perno requerido para que no exceda el esfuerzo cortante directo permisible.

SOLUCION:

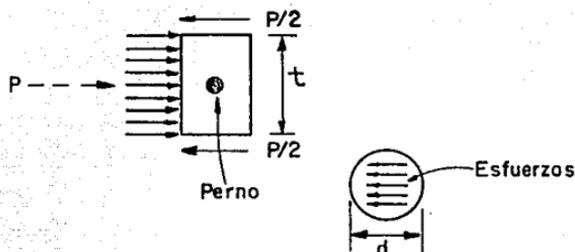


Diagrama de cuerpo libre.

Figura 3 .

$P$  = Acción sobre el perno.

$V = P/2$  Esfuerzos cortantes directos resultantes.

Sabiendo que:

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Despejando el área:

$$A = \frac{V}{\tau}$$

$$A = \frac{3000}{700} = 4.3 \text{ [cm]}$$

Pero el área esta dada como:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Despejando el diámetro:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(4)(4.3)}{\pi}}$$

El diámetro del perno es  $d = 2.3$  [cm] para que el esfuerzo cortante directo no exceda  $700$  [Kg/cm<sup>2</sup>].

Como se ha visto es una forma sencilla y directa de analizar el esfuerzo cortante.

## ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

Las vigas son elementos estructurales cuya función primordial es resistir cargas perpendiculares a su eje longitudinal, generalmente. Los elementos mecánicos más importantes que producen estas cargas son momento flexionante y fuerzas cortantes, las vigas también pueden estar sometidas a momentos torsionantes y fuerzas normales.

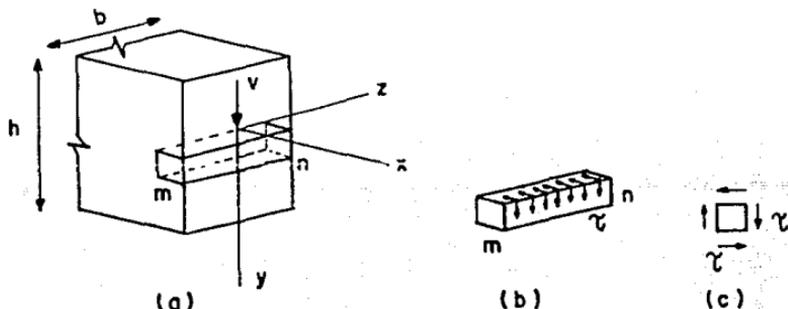
Las vigas se usan para soportar entre otras sollicitaciones losas de entrepisos, azoteas, otras vigas, etc. Las cargas se transmiten a través de las losas, y las vigas las transmiten a su vez, a las columnas o muros.

Las vigas también son utilizadas como soporte; ya sea en puentes, cimentaciones, etc.

Cuando se somete una viga a determinadas cargas, excepcionalmente nos encontramos sólo con momento flexionante. Lo que sucede comúnmente es que las sollicitaciones generen tanto momento flexionante como fuerza cortante.

Se ha establecido que el momento flexionante en una sección, es igual a los esfuerzos normales integrados en ella, actuando a través de un brazo de palanca, que comúnmente es denominado par interno. Por otro lado la suma de los esfuerzos cortantes serán iguales a la fuerza cortante que actúan en la sección.

Para respaldar lo anterior, se presenta la forma de distribución de esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular que tiene un ancho  $b$  y una altura  $h$ . Supongamos que los esfuerzos cortantes actúan paralelamente a la fuerza cortante. Supongamos también que la distribución de los esfuerzos es uniforme a lo ancho de la viga. El empleo de estas dos suposiciones nos permitirá determinar la distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal.



Tomando un elemento entre dos secciones transversales adyacentes de la viga y entre dos planos paralelos a la superficie neutra, como se indica por el elemento  $mn$  en la figura 4-a. De acuerdo con las hipótesis anteriores, los esfuerzos cortantes verticales están uniformemente distribuidos sobre las caras verticales de éste elemento. También sabemos que los esfuerzos cortantes sobre un lado de un elemento se acompañan por esfuerzos cortantes de igual magnitud que actúan sobre caras perpendiculares del elemento, figura 4-a y c. Por lo que deben presentarse esfuerzos cortantes horizontales entre capas horizontales de la viga, así como esfuerzos cortantes transversales sobre las secciones verticales. En cualquier punto de la viga estos esfuerzos cortantes complementarios son iguales en su magnitud, figura 4-c.

Esta observación acerca de la igualdad en los esfuerzos cortantes horizontales y verticales nos lleva a una importante conclusión relativa a los esfuerzos cortantes en las partes superior e inferior de la viga. Si consideramos que el elemento  $mn$  se sustrajó de la parte inferior o de la parte superior de la viga, es evidente que los esfuerzos cortantes horizontales deben ser nulos, porque no se presentan esfuerzos sobre las superficies externas de la viga. Por lo tanto, el esfuerzo cortante vertical  $\tau$  también debe ser nulo en las partes superior e inferior de la viga. Esto es que:

$$\tau = 0 \quad \text{cuando} \quad y = \pm h/2$$

Para justificar de manera cualitativa la existencia de esfuerzos cortantes recurriremos a un experimento simple. Toméense dos barras rectangulares iguales de altura  $h$  y colóquense sobre soportes simples como se muestra en la figura 5-a, luego cargéense con una fuerza  $P$ . Si no existe fricción entre las barras, la flexión de las mismas ocurrirá en forma independiente. Cada barra estará en compresión por encima del eje neutro y en tensión por debajo del mismo, y se deforman como se muestra en la figura 5-b. Las fibras superiores longitudinales inferiores de la barra superior se deslizarán con respecto de las fibras superiores de la barra inferior. Si en lugar de las dos barras se tiene una barra sólida de altura  $2h$ , deben ocurrir cortantes a lo largo del plano neutro de tal magnitud que eviten el deslizamiento mostrado en la figura 5-b. Debido a la presencia de los esfuerzos cortantes para impedir el deslizamiento, la barra simple de altura  $2h$  es más rígida y más resistente que dos barras separadas, cada una de altura  $h$ .

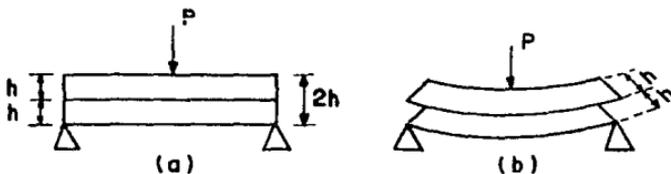
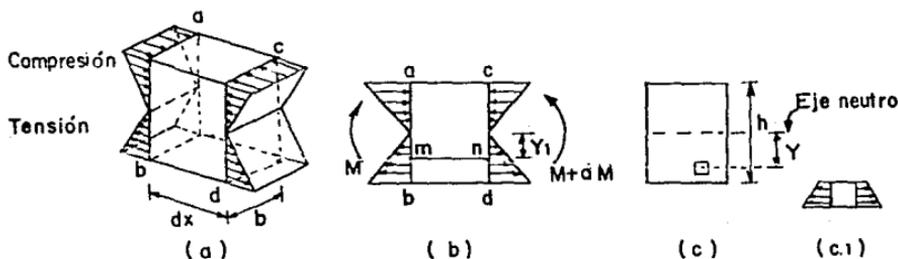


Figura 5

Con el fin de valuar los esfuerzos cortantes, consideremos dos secciones transversales adyacentes definidas de  $ab$  y de  $cd$  tomadas de la viga, figura 5-a separadas por una distancia  $dx$ , figura 6-a, además, suponiendo un elemento  $mb$  y  $nd$ , quedando definido con su cara inferior como la superficie inferior de la viga, la cual no presenta esfuerzos; su cara superior ubicada a una distancia  $y$  de la superficie neutra (de la viga), está sometida al esfuerzo cortante. Las caras extremas del elemento están sujetas a esfuerzos normales debidos a los momentos flexionantes; también presentan esfuerzos cortantes verticales, pero como sólo se analizará el equilibrio en dirección  $x$ , estos no intervienen figura 6-b.



Esfuerzos cortantes en vigas

Figura 6.

Si suponemos que los momentos flexionantes son iguales, en transversales  $ab$  y  $cd$  (esto si, la viga sólo está sujeta a flexión pura), los esfuerzos normales en dirección  $x$  que actúan sobre los lados  $bm$  y  $dn$  también serán iguales. Entonces, el elemento estará en equilibrio bajo la acción de estos esfuerzos; por lo tanto el esfuerzo cortante debe ser igual a cero. Y cualquier otro elemento que se analice de la misma región, también estará en equilibrio.

El caso más general, es cuando se presentan en forma variable los momentos flexionantes a lo largo de la longitud de toda la viga, y como consecuencia aparecen las fuerzas cortantes, que también son variables. Si se extrae un elemento  $dA$ , a una distancia  $y$  del eje neutro, los esfuerzos normales que actúan sobre la cara izquierda serán  $\sigma_x dA$ . Figura 6-c.1.

Donde:

$$\sigma_x dA - \frac{My}{I} dA$$

Integrando todos los esfuerzos producidos sobre la sección  $mb$ , se obtiene como resultante una fuerza  $F_1$  definida como:

$$F_1 = \int \frac{My}{I} dA$$

En igual forma, se determina la resultante  $F_2$ , que actúa sobre la sección nd quedando:

$$F_2 = \int \frac{M+dM}{I} y dA$$

Intentando con los resultados de  $F_1$  y  $F_2$  el equilibrio nos percatamos de que no se da entre ellas, por lo que analizando nuevamente el elemento se observa que este se cumplirá con la participación de la fuerza cortante  $F_3$ .

La fuerza  $F_3$ , que aparece en la cara superior del elemento mn, es la fuerza que se requiere para poder establecer un equilibrio y está definida como:

$$F_3 = \tau b dx$$

Donde:

$b dx$  = Presenta el área de la cara superior del elemento.

Entonces estableciendo el equilibrio de las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , y haciendo la suma de ellas en dirección  $x$ , se tiene que:

$$-F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

$$F_3 = F_2 - F_1$$

Sustituyendo cada una de las fuerzas:

$$\tau b dx = \int \frac{M+dM}{I} y dA - \int \frac{M}{I} y dA$$

$$\tau b dx = \int \frac{M}{I} y dA + \int \frac{dM}{I} y dA - \int \frac{M}{I} y dA$$

$$\tau b dx = \frac{dM}{I} \int y dA$$

Dividiendo entre  $b dx$ :

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{Ib} \int y dA$$

Donde:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\int y dA = Q$$

Finalmente:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Donde:

$\tau$  = Esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal, [Kg/cm<sup>2</sup>].

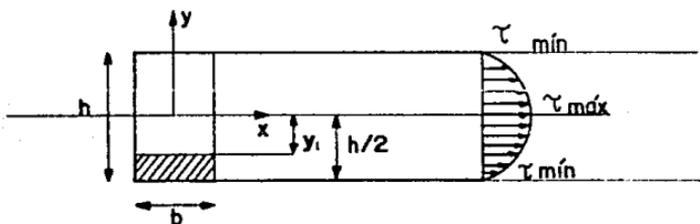
$V$  = Fuerza cortante que actúa en la sección transversal, [Kg].

$Q$  = Momento de primer orden (momento estático) del área situada encima del nivel considerado, [cm<sup>3</sup>].

$I$  = Momento de inercia de toda la sección transversal, [cm<sup>4</sup>].

$b$  = Ancho de la sección transversal, [cm].

Analizando la variación de los esfuerzos cortantes de acuerdo a la expresión en una sección rectangular, tenemos que:



(a) Sección rectangular

(b) Diagrama de esfuerzos

Figura 7.

Definiendo el área como:

$$A=bh$$

Ahora, el momento de inercia:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Y el momento estático o primer momento:

$$Q = b \left( \frac{h}{2} - y_1 \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y_1 \right)$$

$$Q = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

De manera general el esfuerzo cortante queda expresado, como:

$$\tau_x = \frac{V}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

Cuando se tiene una sección transversal rectangular, para determinar la variación de los esfuerzos, sólo se tendrá que verificar  $Q$ , ya que  $V, I$  y  $b$  son constantes en cualquier punto de ella.

Para conocer los valores máximo y mínimo, se evalúa la expresión general de la siguiente forma:

Para  $y = 0$

$$\tau_{máx} = \frac{Vh^2}{8I_x}$$

$$\tau_{máx} = \frac{3V}{2A}$$

Para  $y \pm h/2$

$$\tau = 0$$

Veamos el siguiente ejemplo, donde se encontrará el valor de los esfuerzos cortantes en los niveles indicados y se construirá su gráfica correspondiente; y se podrá observar su

variación, tanto en el alma como en el patín de la sección transversal propuesta a continuación:

Como datos se tiene una viga de longitud  $L$ , simplemente apoyada y con una carga concentrada de 50 TON localizada a  $L/2$ . Figura 8-a. Además, con una sección transversal T, definida por el corte A - A' y teniendo los siguientes valores, como se muestra en la figura. 8-b.

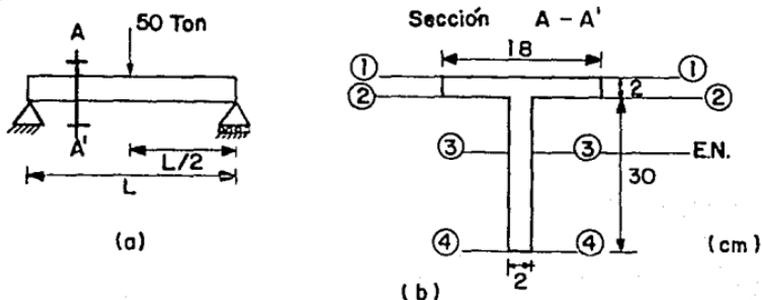


Figura 8.

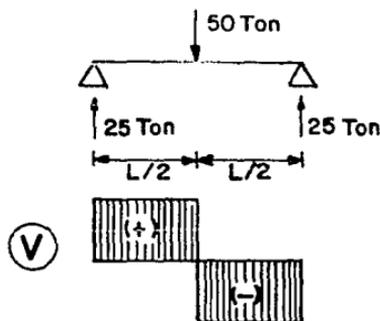
**SOLUCION:**

Sabemos que el esfuerzo cortante está definido como:

$$\tau = \frac{VQ}{IB}$$

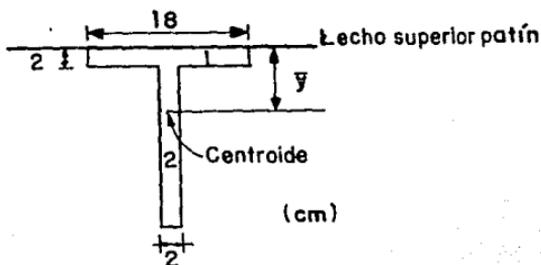
Determinando cada uno de los términos:

Cálculo de la fuerza cortante  $V$ , determinación del diagrama de fuerzas cortantes.



Como podemos observar, se tienen dos valores de 25 TON, tanto positivo como negativo; para efectos del ejemplo se toma el valor mayor sin importar el signo.

Ahora, de la sección transversal de la viga, se calcula la ubicación del centroide y el momento de inercia centroidal de la misma.



Tomando momentos con respecto al lecho superior del patín:

$$\bar{y} = \frac{(18)(2)(1) + (30)(2)(15+2)}{(18)(2) + (30)(2)}$$

$$\bar{y} = 11 \text{ [cm]}$$

Dividiendo la sección T en dos secciones rectangulares, y sabiendo que el momento de inercia de una sección rectangular está definida como:

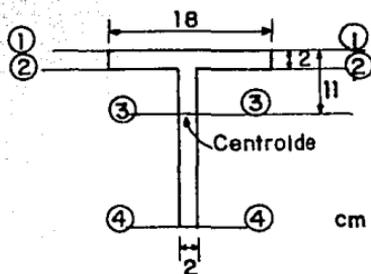
$$I = \frac{bh^3}{12} + Ay^2$$

Entonces el momento de inercia de la sección compuesta:

$$I = \frac{1}{12} (18)(2^3) + (18)(2)(10^2) + \frac{1}{12} (2)(30^3) + (2)(30)(6^2)$$

$$I = 12 + 3600 + 4500 + 2160 = 10272 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Cálculo de los momentos de primer orden en los niveles indicados de la sección:



$$Q_{1-1} = 0$$

$$Q_{2-2} = (18)(2)(10) = 360 [cm^3]$$

$$Q_{3-3} = (18)(2)(10) + (2)(9)(4.5) = 441 [cm^3]$$

$$Q_{4-4} = 0$$

Como podemos observar en los extremos (1-1) y (4-4) el valor del momento estático es nulo, mientras que en el nivel (3-3), donde se ubica el centroide de la sección tiene un valor máximo; pero esto no indica que se vaya a tener el valor mayor del esfuerzo cortante.

Y como último término tenemos el ancho  $b$ , donde cada nivel tiene su valor correspondiente:

$$b_{1-1} = 18 [cm]$$

$$b_{2-2} = 18 [cm] \text{ cuando se encuentra ligeramente arriba del plano del patín con el alma.}$$

$$b_{3-3} = 2 [cm] \text{ cuando se encuentra ligeramente abajo del plano de unión del patín con el alma.}$$

$$b_{4-4} = 2 [cm]$$

Integrando cada uno de los términos con sus valores correspondientes, se calcula los esfuerzos cortantes en el alma:

$$\tau_{1-1}=0$$

Ligeramente arriba del alma:

$$\tau_{2-2} = \frac{(25000)(360)}{(10272)(18)} = 48.68 [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

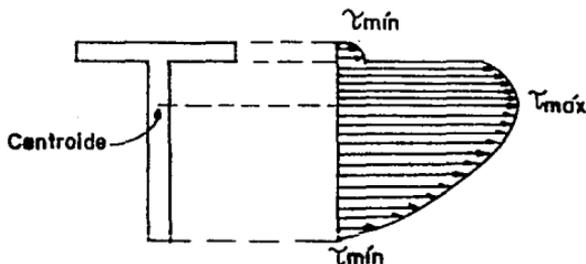
Y ligeramente abajo:

$$\tau_{2-2} = \frac{(25000)(360)}{(10272)(2)} = 438.08 [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

$$\tau_{3-3} = \frac{(25000)(441)}{(10272)(2)} = 536.65 [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

$$\tau_{4-4}=0$$

Por último, se construye el diagrama de esfuerzos del alma:



Cabe mencionar que el esfuerzo cortante máximo se encuentra al nivel del centroide, esto quiere decir, que es en éste sitio donde se encuentra más esforzada la sección; pero es importante expresar que no siempre se presentará en este nivel en cualquier sección.

Como sabemos la variación de una sección rectangular es de forma parabólica, pues en los niveles 1-1 a 2-2 se presentan de tal forma, y en 3-3 a 4-4 también.

Para concluir con el ejercicio, se calculará el esfuerzo cortante en una ala de la sección analizada:

Para el cálculo del momento de primer orden, se toma un ancho cualquiera  $z$ , entonces:

$$Q_z = (2) (z) (10) = 20z \text{ [cm}^3\text{]}$$

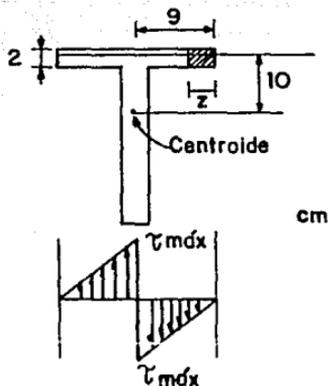
Y el momento-estático máximo:

$$Q_{m\acute{a}x} = (2) (9) (10) = 180 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Por lo tanto el cortante máximo:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{(25000) (180)}{(10272) (2)} = 219.04 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Y por último, se contruye su diagrama:



Observando que este análisis es el mismo para el complemento del patín.

## CENTRO DE TORSION

Reiterando lo señalado, de que en cualquier sección de una viga, siempre que tenga una variación el momento flexionante en su trayectoria longitudinal, existirá fuerza cortante y por lo tanto esfuerzo cortante.

Cuando es aplicado un sistema de cargas donde la resultante coincida con el centroide de una sección asimétrica, el fenómeno que se presentará será el de flexión acompañado de torsión. Lo anterior induce la aparición de un sistema de esfuerzos más o menos complejo, para evitar esta complejidad de esfuerzos es conveniente localizar un punto denominado **Centro de torsión** o también llamado **Centro de Cortante**, que tendrá como virtud que el paso de la resultante por ese punto producirá exclusivamente flexión.

Para ejemplificar la determinación del **Centro de cortante**, consideremos una viga en cantiliver, como se indica en la figura 9-a. Suponiendo que las paredes de esta sección son suficientemente delgadas, (figura 9-b), para que todos los cálculos puedan basarse en la hipótesis de que el área está concentrada en la línea media del espesor. La flexión de esta sección se presenta alrededor del eje horizontal (eje  $z$ ) y aunque no tiene un eje vertical de simetría, se supone que los esfuerzos de flexión pueden calcularse con la Fórmula de la Escuadría. Suponiendo además que en esta canal actúa una fuerza cortante vertical paralela al eje  $y$ , entonces, el momento flexionante variará linealmente a lo largo de la viga.

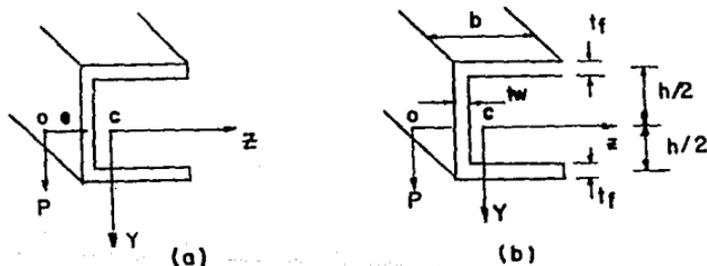


Figura 9.

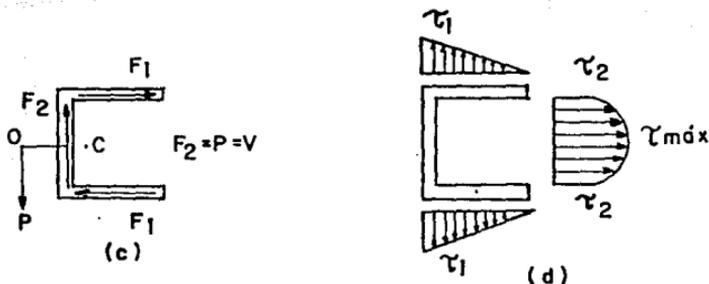


Figura 9.

Conocemos que la distribución de esfuerzos para el canal es como se muestra en la figura 9-d. Para determinar el esfuerzo cortante máximo  $\tau_1$  en el patín, tenemos que:

$$Q_x = \frac{bt_f h}{2}$$

Donde:

$Q_x$  = Es el primer momento del área del patín respecto al eje z.

Entonces, el esfuerzo  $\tau_1$  en el patín es:

$$\tau_1 = \frac{bt_f h V_y}{2I_x t_f} = \frac{bh V_y}{2I_x}$$

De la misma forma, sabemos que el esfuerzo cortante  $\tau_2$  en la parte superior del alma es:

$$\tau_2 = \frac{bt_f h V_y}{2t_w I_x}$$

Y el esfuerzo que actúa en el eje neutro:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left( \frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4} \right) \frac{h V_y}{2I_x}$$

Para determinar la fuerza cortante total  $F_1$ , señalada en cualquier patín, figura 9-c, será a partir de los diagramas triangulares del esfuerzo cortante. Cada fuerza es igual al área del triángulo de esfuerzo multiplicada por el espesor del patín sobre el cual actúa el esfuerzo:

$$F_1 = \left( \frac{\tau_1 b}{2} \right) (t_f)$$

Sustituyendo el valor de  $\tau_1$ , se tiene:

$$F_1 = \frac{hb^2 t_f V_y}{4I_x}$$

Por otra parte, la fuerza vertical  $F_2$  en el alma debe ser igual a la fuerza cortante  $P$ , dado que las fuerzas en los patines son horizontales y no tienen componente vertical. Se puede demostrar que  $F_2 = P$ , considerando el diagrama de esfuerzos, que consiste en dos partes, un rectángulo de dimensiones  $\tau_2$ ,  $h$ , y una área parabólica igual a  $2/3 (\tau_{máx} - \tau_2) h$ .

Entonces, la fuerza  $F_2$  es igual al área del diagrama de esfuerzo multiplicada por el espesor del alma:

$$F_2 = \tau_2 h t_w + \frac{2}{3} (\tau_{máx} - \tau_2) h t_w$$

Sustituyendo las expresiones  $\tau_2$  y  $\tau_{máx}$ , se obtiene:

$$F_2 = \left( \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \right) \frac{P}{I_x}$$

Donde el momento de inercia es igual:

$$I_x = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2}$$

Finalmente, sustituyendo  $I_x$  en la expresión de  $F_2$ ; se obtiene que:

$$F_2 = P$$

Las tres fuerzas que actúan sobre la sección figura 9-c, deben ser estáticamente equivalentes a la fuerza resultante  $P$  que actúa a través del centro de cortante  $O$ , figura 9-a. Por lo que el momento que produce la fuerza  $P$ , respecto a cualquier punto de la sección transversal es igual al momento de las tres fuerzas respecto al mismo punto. Está relación

entre los momentos proporciona una ecuación a partir de la cual puede determinarse la excentricidad, es decir la distancia comprendida del centro de la sección al centro de cortante.

Obteniendo la ecuación:

$$F_1 \left( \frac{h}{2} \right) + F_1 \left( \frac{h}{2} \right) - F_2 (e) - P(0) = 0$$

$$F_1 (h) - F_2 (e) - P(0) = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones  $F_1$  y  $F_2$  y despejando  $e$ , tenemos que:

$$e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4 I_x}$$

Con la expresión se obtiene la excentricidad de la sección, y tiene unidades de longitud.

Por lo anterior, el centro cortante de esta sección se localiza en el punto  $0$ , donde la viga se flexionará sin torcerse, permitiendo la determinación de esfuerzos normales por flexión.

Para comprender lo expuesto, se presenta a continuación un ejemplo ilustrativo, donde se calcula el centro cortante de una sección transversal, como la mostrada en la figura 10-a.

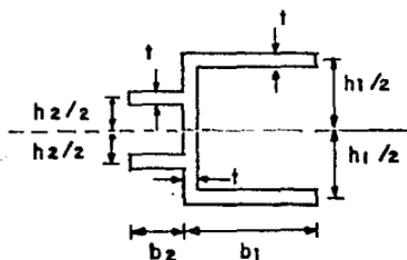


Figura 10-a

Como ya sea estudiado anteriormente, la variación de los esfuerzos se presentan de la siguiente forma, figura 10-b.

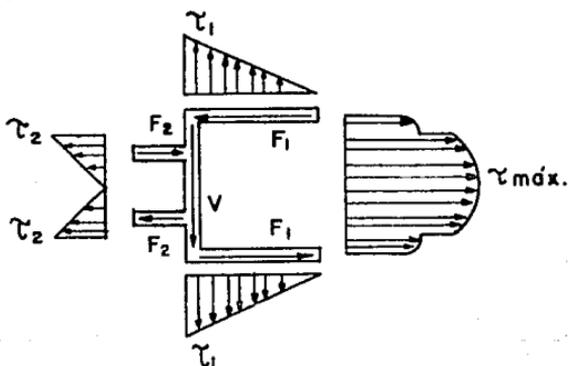


Figura 10-b

Recordando la teoría planteada, se pueden evaluar las siguientes fuerzas:

$$F_1 = \frac{\tau_1 b_1 t}{2}$$

$$F_2 = \frac{\tau_2 b_2 t}{2}$$

Y el valor de los esfuerzos cortantes, está dado como:

$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{It}$$

Donde:

$$Q_1 = \frac{b_1 t h_1}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{VQ_2}{It}$$

Donde:

$$Q_2 = \frac{b_2 t h_2}{2}$$

Entonces:

$$\tau_1 = \frac{v b_1 t h_1}{2 I t} = \frac{v b_1 h_1}{2 I}$$

$$\tau_2 = \frac{v b_2 t h_2}{2 I t} = \frac{v b_2 h_2}{2 I}$$

Y sustituyendo el valor de los esfuerzos:

$$F_1 = \frac{v b_1 h_1}{2 I} \frac{b_1 t}{2} = \frac{v b_1^2 h_1 t}{4 I}$$

$$F_2 = \frac{v b_2 h_2}{2 I} \frac{b_2 t}{2} = \frac{v b_2^2 h_2 t}{4 I}$$

Y la ecuación que se puede plantear apartir de la relación de momentos es:

$$F_1 \left( \frac{h}{2} \right) + F_1 \left( \frac{h}{2} \right) - F_2 \left( \frac{h_2}{2} \right) - F_2 \left( \frac{h_2}{2} \right) - v e = 0$$

Reduciendo la expresión:

$$F_1 (h_1) - F_2 (h_2) = v e$$

Despejando la excentricidad "e" para conocer su valor:

$$e = \frac{F_1 (h_1) - F_2 (h_2)}{v}$$

Por último sustituyendo las expresiones  $F_1$  y  $F_2$ , se tiene:

$$e = \frac{\frac{vb_1^2 h_1 t h_1}{4I} - \frac{vb_2^2 h_2 t h_2}{4I}}{v}$$

$$e = \frac{b_1^2 h_1^2 t}{4I} - \frac{b_2^2 h_2^2 t}{4I}$$

$$e = \frac{t}{4I} (b_1^2 h_1^2 - b_2^2 h_2^2)$$

Finalmente, si se desca se pueden dar valores a la sección y se conocerá el punto que define el centro cortante, sin necesidad de saber que valor tiene la fuerza cortante.

En general, localizar el Centro de cortante o Centro de torsión en una sección transversal monolítica es posible y sencillo. Pero se puede considerar no muy importante, debido a que éstas poseen una considerable rigidez a la torsión, por lo que se distorsionan muy poco durante la flexión producida por las cargas que actúan a través del centro de gravedad.

## FLUJO CORTANTE

Hasta el momento se han utilizado secciones de vigas monolíticas, homogéneas, etc., ahora se analizarán secciones de vigas ensambladas, es decir vigas fabricadas con dos ó más elementos, que podrían ser unidos con clavos, tornillos, adhesivos y/o soldadura, etc., para que trabajen como una viga continúa en sus secciones.

Los elementos que son empleados para construir tales vigas, son de una gran variedad de perfiles, que sólo o combinados satisfacen cualquier tipo de necesidad.

En el diseño de una viga armada se contemplan 2 criterios:

Primero, se dimensiona como una viga de sección monolítica y se analizan los esfuerzos producidos por flexión y cortante. Con el segundo se diseñan los elementos de conexión para garantizar que la viga se comportará como un elemento monolítico. En este diseño los elementos de conexión tendrán problemas si los conectores no son debidamente colocados, y como medida para evitar este problema es conveniente realizar diagramas de flujo de cortante.

Para poder hacer un análisis del flujo cortante, se tiene que saber que las cargas soportadas por los elementos de conexión son las fuerzas cortantes horizontales transmitidas entre las juntas de las vigas ensambladas.

De tal manera que haciendo uso de la deducción de la expresión del esfuerzo cortante, donde se supuso que el esfuerzo actúa en la cara superior del elemento (figura 5-b),  $mb$  y  $nd$  estaba uniformemente distribuido en el ancho  $b$  de la viga. Sin embargo, esta suposición puede ser válida en un caso más general. Por lo tanto, en lugar de calcular los esfuerzos cortantes, se calcula la fuerza horizontal total  $F_3$ , que actúa en la cara superior del elemento. Esta fuerza puede ser expresada como:

$$F_3 = f dx$$

Donde:

$f$  es la fuerza cortante por unidad de longitud a lo largo del eje de la viga.

En el caso de una viga de sección transversal rectangular:

$f = \tau b$ , esto es debido a que el esfuerzo cortante está distribuido uniforme a lo ancho de la viga.

La magnitud de  $f$ , llamada flujo de cortante tiene unidades de fuerza por unidad de longitud y su deducción es como sigue:

$$F_3 = f dx = F_2 - F_1$$

Y al sustituir los valores de las fuerzas:

$$F_2 = \int \frac{M+dM}{I} y dA$$

$$F_1 = \int \frac{M}{I} y dA$$

Y despejando  $f$ , tenemos que:

$$f = \frac{dM}{dx} \left( \frac{1}{I} \right) \int y dA$$

Donde:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\int y dA = Q$$

De tal manera que el flujo cortante está dado como:

$$f = \frac{VQ}{I}$$

Para ejemplificar se diseña con el elemento mecánico flujo de cortante, considerando el caso de una viga, tal como se muestra en la figura 11-a donde la resistencia admisible ó permisible de los clavos es de 70 Kg. Encontrar la separación de estos en la junta A y B, además considerando que el esfuerzo cortante máximo lo toman los elementos de conexión (los clavos) para que se analice como una viga monolítica.

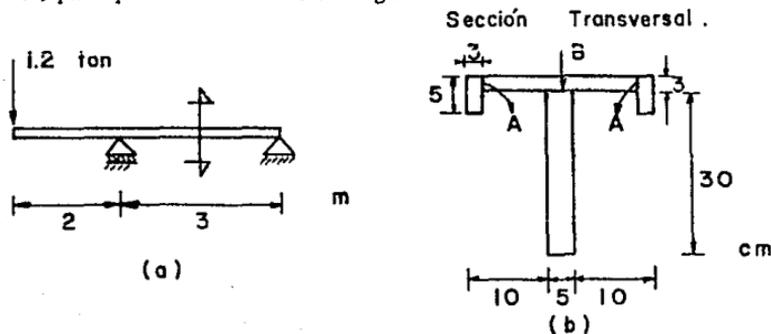
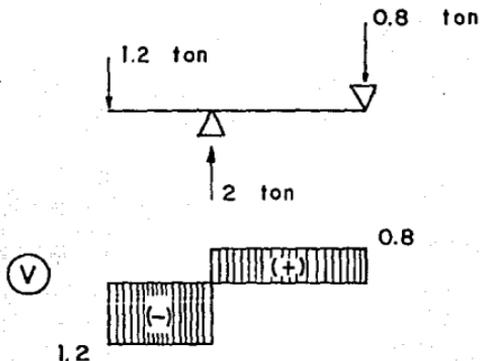


Figura 11.

**SOLUCION:**

Determinando la fuerza cortante máxima:



$$\sum M_1 = 0$$

$$-1.2(2) + R_2(3) = 0$$

$$R_2 = \frac{2.4}{3} = 0.8 \text{ [TON]}$$

$$\sum F_y = 0$$

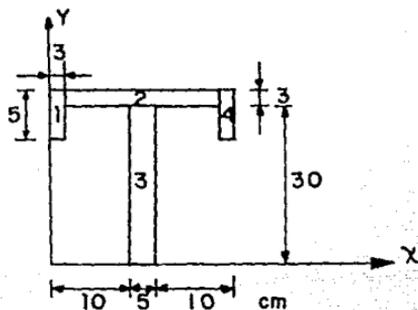
$$R_1 = 2 \text{ [TON]}$$

Del diagrama se obtiene:

$$V_{\text{máx}} = 1.2 \text{ [TON]} = 1200 \text{ [Kg]}$$

Calculando la posición del centroide, y el momento de inercia de la sección:

Haciendo una subdivisión en secciones rectangulares:



$$A_1 = (3)(5) = 15 [cm^2]$$

$$A_2 = (25)(3) = 75 [cm^2]$$

$$A_3 = (5)(30) = 150 [cm^2]$$

$$A_4 = (3)(5) = 15 [cm^2]$$

$$A_{Total} = 255 [cm^2]$$

Tomando momentos con respecto a la cara inferior del alma:

$$\bar{y} = \frac{(15)(30.5) + (75)(31.5) + (150)(15) + (15)(30.5)}{255}$$

$$\bar{y} = 21.68 [cm]$$

Y el momento de inercia para una sección transversal rectangular está dado como:

$$I = \frac{bh^3}{12} + Ay^2$$

$$I_1 = \frac{(3)(5^3)}{12} + ((15)(8.82^2)) = 1198.14 [cm^4]$$

$$I_2 = \frac{(25)(3^3)}{12} + (75)(9.82^2) = 7288.68 [cm^4]$$

$$I_3 = \frac{(5)(30^3)}{12} + (150)(6.68^2) = 17943.36 [cm^4]$$

$$I_4 = \frac{(3)(5^3)}{12} + (15)(8.82^2) = 1198.14 [cm^4]$$

$$I_{Total} = 27628.32 [cm^4]$$

Dada la expresión del flujo cortante:

$$f = \frac{VQ}{I}$$

Analizando para el junta A:

$$Q_A = (3)(5)(11.32 - 2.5) = 132.3 [cm^3]$$

Entonces:

$$f_A = \frac{(1200)(132.3)}{27628.32}$$

$$f_A = 5.75 [Kg/cm] < f_{permisible}$$

Como el flujo cortante tiene dimensiones de:

$$\frac{F}{L} L = F$$

Donde:

**F/L** = Flujo cortante.

**L** = distancia a la que están colocados los clavos.

**F** = Calidad de los clavos que se usan.

Despejando la separación:

$$\frac{F}{F} = L$$

De tal manera que:

$$S_{\text{separación}} = \frac{70}{5.75} = 12.17 [\text{cm}]$$

Y como seguridad se tiene una separación de diseño de:

$$S_{\text{Diseño}} = 10 [\text{cm}]$$

Calculando el flujo de cortante en la junta B:

$$f_B = \frac{VQ_B}{I}$$

Donde el momento estático está dado como:

$$Q_B = (132.3) (2) + (25) (3) (11.32 - 1.5) = 1001.10 [\text{cm}^3]$$

Entonces:

$$f_B = \frac{(1200) (1001.10)}{27628.32} = 43.48 \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} \right]$$

Y la separación:

$$S = \frac{f_{adm}}{f_B}$$

$$S = \frac{70}{43.48} = 1.61 [\text{cm}]$$

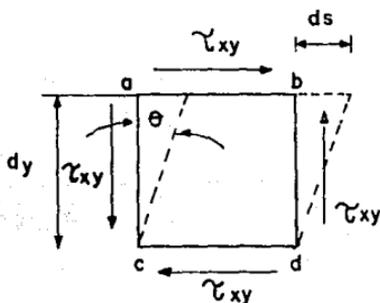
Y la de diseño:

$$S_{\text{Diseño}} = 1.5 [\text{cm}]$$

## DEFORMACION POR CORTANTE

Las fuerzas cortantes producen una deformación tangencial ó alabeo, también llamada distorsión, análogamente que las fuerzas axiales que originan deformaciones longitudinales.

Supongamos que se tiene un elemento sometido a tensión, el cual experimenta un alargamiento, y por lo tanto las dimensiones originales de sus lados cambian, mientras que si tenemos un elemento sometido a una fuerza cortante, la longitud de sus lados no varía, sino que únicamente cambian de forma, de rectángulo a paralelogramo; como se observa en la figura 12.



Deformación por cortante

Figura 12.

Analizando el elemento de la figura 12, se observa que el punto c tiene un ángulo igual  $\pi/2$  antes de la deformación y se reduce a  $\pi/2 - \theta$ . Al mismo tiempo el ángulo en el punto a se incrementa  $\pi/2 + \theta$ . Donde  $\theta$  es una medida de la distorsión del elemento debida al cortante y es llamada deformación por cortante. Además, la tangente del ángulo  $\theta$  es igual al deslizamiento horizontal que presenta el extremo superior del elemento con respecto al inferior, dividido entre la altura del elemento:

$$\tan\theta = \frac{ds}{dy}$$

Pero debido a que el ángulo  $\theta$  es siempre muy pequeño, se puede considerar que la tangente es igual al ángulo, resultando:

$$\theta = \frac{ds}{dy}$$

Ensayando un material sometido a cortante puro y midiendo las deformaciones se puede obtener experimentalmente el diagrama esfuerzo-deformación para ese material. Este diagrama es muy similar al de un ensayo de tensión del mismo material, pudiéndose determinar el límite de proporcionalidad, el límite de fluencia y el esfuerzo máximo producidos por la fuerza cortante. Los experimentos muestran que para materiales dúctiles, incluyendo el acero estructural, el esfuerzo de fluencia  $\tau_y$  debido al cortante está comprendido entre 0.5 y 0.6 veces el esfuerzo de fluencia debido a la carga axial,  $f_y$ . Por lo tanto la Ley de Hooke por cortante puede establecerse como:

$$\tau = G\theta$$

Donde:

$G$  es el módulo de elasticidad por cortante, también llamado módulo de rigidez transversal.

Estableciendo la relación entre la deformación tangencial y el esfuerzo cortante, tenemos:

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\tau}{G}$$

$$ds = \frac{\tau dy}{G}$$

En el caso de vigas, las máximas deformaciones por cortante se presentan donde el cortante es máximo, y no hay deformación donde el esfuerzo cortante es nulo. Figura 13.

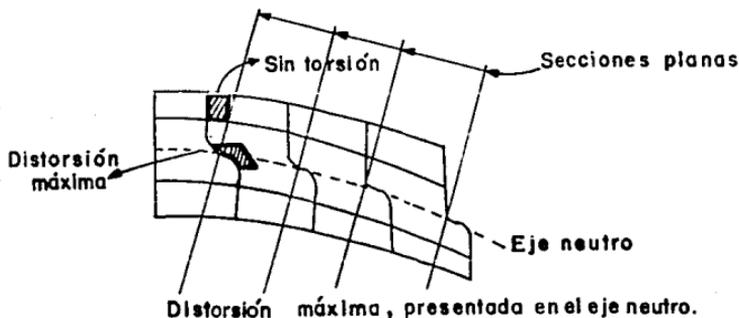


Figura 13.

Estas deformaciones alabean la sección, inicialmente plana, a través de toda la viga por lo que se contradice la hipótesis básica de la flexión elástica de que las secciones planas se conservan planas después de la deformación. Sin embargo, por la Teoría de la elasticidad se puede demostrar que las deformaciones por cortante de las secciones planas son despreciables y las expresiones encontradas para la teoría de vigas son perfectamente aplicables si la longitud del miembro es cuando menos dos ó tres veces mayor que el peralte total del mismo. Esta conclusión es de gran importancia, ya que la existencia de una fuerza cortante en una sección transversal no inválida las expresiones para esfuerzos flexionantes en materiales elásticos.

## MUROS DE CONCRETO Y MAMPOSTERIA ANTE CARGA LATERAL

Un muro es un elemento arquitectónico y/o estructural, que se construye de concreto ó mampostería.

Los muros en las construcciones cumplen distintas funciones estructurales. Actúan como único elemento vertical resistente y soportan las cargas verticales, laterales y horizontales.

Las cargas laterales por efecto de sismo ó viento introducen en los distintos tableros de muros un conjunto de sollicitaciones que depende de las condiciones de continuidad en sus extremos.

Esto motiva la existencia de diferentes tipos de muros tales como:

### a) *Muros Diafragma*

Son los que se encuentran totalmente rodados por las vigas y columnas de un marco estructural al que proporcionan rigidez ante cargas laterales.

La unión entre el marco y el muro diafragma deberá evitar la posibilidad de volteo del muro perpendicularmente a su plano y las columnas del marco deberán ser capaces de resistir, cada una, en una longitud igual a una cuarta parte de su altura medida a partir del paño de la viga, una fuerza cortante igual a la mitad de la carga lateral que actúa sobre el tablero.

### b) *Muros Confinados*

Son los reforzados con castillos y dadas que cumplen con los requisitos siguientes:

Las dadas ó castillos tendrán como dimensión mínima el espesor del muro. El concreto tendrá una resistencia a la compresión,  $f_c$ , no menor de  $150 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$ , y el refuerzo longitudinal estará formado por lo menos de tres varillas corrugadas, cuya área total no será inferior a  $0.2 f_c/f_y$  por el área del castillo y estará anclado en los elementos que limitan al muro de manera que pueda desarrollar su esfuerzo de fluencia.

El área transversal no será inferior a  $1000 s/f_y$  de siendo  $s$  la separación de los estribos y de el peralte del castillo. La separación de los estribos no excederá de  $1.5d_c$  ni de  $20 \text{ [cm]}$ .

Existirán castillos por lo menos en los extremos de los muros y en puntos intermedios del muro a una separación no mayor que una y media veces su altura, ni  $4 \text{ [m]}$ .

Existirá una dada en todo su extremo horizontal del muro, a menos que este último éste ligado a un elemento de concreto reforzado de al menos  $15 \text{ [cm]}$  de peralte.

Además, se construirán dadas en el interior del muro a una separación no mayor de 3 [m].

Existirán elementos de refuerzo con las mismas características que las dadas y castillos en el perímetro de todo hueco cuya dimensión exceda de la cuarta parte de la longitud del muro en la misma dirección.

Además, si la relación altura a espesor del muro excede de 30, deberán proveerse elementos rigidizantes que eviten la posibilidad de pandeo del muro.

### c) Muros Reforzados Interiormente

Estos son muros reforzados con malla o barras corrugadas de acero, horizontales y verticales, colocadas en los huecos de las piezas, en ductos o en las juntas. Para que un muro pueda considerarse como reforzado deberán cumplir los siguientes requisitos mínimos:

La suma de la cuantía de refuerzo horizontal,  $p_h$ , y vertical,  $p_v$ , no será menor que 0.002 y ninguna de las dos cuantías será menor que 0.0007. La cuantía de refuerzo horizontal que se calcula como  $p_h = A_{rh} / s t$ , donde  $A_{rh}$  es el refuerzo que se colocará en el espesor  $t$  del muro a una separación  $s$ ;  $p_v = A_{rv} / t L$ , en que  $A_{rv}$  es el área total de refuerzo que se colocará verticalmente en la longitud  $L$  del muro. Cuando se emplee acero de refuerzo de fluencia especificado mayor de 4 200 [Kg/cm<sup>2</sup>], las cuantías de refuerzo mencionadas en este párrafo podrán reducirse multiplicándolas por 4 200 /  $f_y$ .

Todo espacio que contenga una barra de refuerzo vertical deberá tener una distancia libre mínima entre el refuerzo y las paredes de la pieza igual a la mitad del diámetro de la barra y deberá ser llenado a todo lo largo con mortero o concreto. La distancia libre mínima entre una barra de refuerzo horizontal y el exterior del muro será de 1.5 [cm] o una vez el diámetro de la barra, la que resulte mayor. El refuerzo horizontal deberá estar embebido en toda a su longitud en mortero o concreto.

Para el colado de los huecos donde se aloje el refuerzo vertical podrá emplearse el mismo mortero que se usa para pegar las piezas, o en concreto de alto revenimiento, con grado máximo de 1 [cm] y resistencia a compresión no menor de 75 [Kg/cm<sup>2</sup>]. El hueco de las piezas tendrá una dimensión mínima mayor de 5 [cm] y una área menor de 30 [cm<sup>2</sup>].

Deberá colocarse por lo menos una barra No.3 de grado 42, o refuerzo de otras características con resistencia a tensión equivalente, en dos huecos consecutivos en todo extremo de muros, o a cada 3 [m]. El refuerzo vertical en el interior del muro tendrá una separación no mayor de 6 veces el espesor del mismo ni mayor de 80 [cm].

Quando los muros transversales lleguen a un tope, sin traslape de piezas, será necesario unirlos mediante dispositivos que aseguren la continuidad de la estructura.

El refuerzo horizontal debe ser continuo y sin traslape en la longitud del muro y anclado en sus extremos. Se deberán cumplir los mismos requisitos de anclaje que para concreto reforzado. Deberá haber refuerzo consistente en una barra No.4 de grado 42, o con resistencia a tensión equivalente, alrededor de toda abertura cuya dimensión exceda de 60 [cm] en cualquier dirección.

La relación altura a espesor de estos muros no será superior a 30.

**d) Muros No Reforzados**

Serán aquellos que no tengan el refuerzo necesario para ser incluidos en alguna de las tres categorías anteriores.

En las diferentes etapas experimentales con muros, se ha llegado a concluir que el diseño de muros de mampostería generalmente está regido por los esfuerzos cortantes inducidos por el sismo. Ante este estado de sollicitación, los muros no reforzados presentan un colapso brusco y total en cuanto se sobrepasa el esfuerzo de agrietamiento, los muros confinados y castillos admiten deformaciones superiores a las de agrietamiento; sin embargo, presentan notable pérdida de rigidez y resistencia para deformaciones muy grandes cuando la grieta diagonal se prolonga dañando el castillo; los muros con refuerzo en el interior de los huecos de las piezas tienen normalmente gran deterioro para deformaciones superiores a la del agrietamiento, debido a fallas locales y a desprendimiento de las paredes de las piezas.

***Tipos de piezas***

Las piezas que se usan en elementos estructurales de mampostería deberán cumplir los requisitos mínimos de calidad especificados por la Dirección General de Normas de la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial para el tipo de tabique que se va a emplear. En particular deberán aplicarse las siguientes Normas:

**C6** ladrillos y bloques cerámicos de barro, arcilla o similares.

**C10** bloques, ladrillos o tabiques y tabicones de concreto.

Para elementos estructurales de mampostería sólo se emplearán piezas macizas o con huecos verticales.

## **Análisis por cargas laterales**

El análisis para la determinación de los efectos de cargas laterales debidas a sismo se hará en base a las rigideces relativas de los distintos muros. Estas se determinarán tomando en cuenta las deformaciones de cortante y de flexión. Para estas últimas se considerará la sección transversal agrandada del muro cuando la relación de la carga vertical a momento flexionante es tal que se presentan tensiones verticales. Se tomará en cuenta la restricción que impone a la rotación de los muros la rigidez de los sistemas de piso y techo y la de los dinteles.

Será admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro, es proporcional a su área transversal, ignorando los efectos de torsión y de momento de volteo, y empleando el Método Simplificado de diseño sísmico especificado en la Sección 7 de las Normas Técnicas Complementarias de Diseño Sísmico, cuando se cumplan los requisitos especificados en la Sección 2 de las Normas citadas, y que son los siguientes:

1. En todos los niveles, al menos 75 % de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí mediante losas monolíticas u otros sistemas de piso suficientemente resistentes y rígidos al corte. Dichos muros tendrán distribución senciblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales, o en su defecto, el edificio tendrá, en cada nivel, al menos dos muros perimetrales de carga, senciblemente paralelos entre sí ligados por los sistemas de piso antes citados en una longitud no menor que la mitad de la dimensión del edificio en la dirección de dichos muros.

2. Relación entre longitud y ancho de la planta del edificio no excede de 2 a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación longitud a ancho satisfaga esta restricción y cada tramo se revise en forma independiente en su resistencia a efectos sísmicos.

3. La relación entre la altura y la dimensión mínima de la base del edificio no exceda de 1.5 y la altura del edificio no es mayor de 13 [m].

### Resistencia a cargas laterales

La resistencia de un muro a cargas laterales, debidas a viento o sismo, deberá revisarse para el efecto de la fuerza cortante del momento flexionante en su plano y eventualmente también para momentos flexionantes debidos a empujes normales a su plano.

#### *Fuerza cortante resistida por la Mampostería*

La fuerza cortante resistente de diseño se determinará como:

a) Para Muros Diafragma

$$V_R = F_R (0.85V^* A_T)$$

b) Para otros Muros

$$V_R = F_R (0.5V^* A_T + 0.3P) \leq 1.5F_R V^* A_T$$

Donde:

$A_T$  = Area bruta de la sección transversal del muro.

$P$  = Carga vertical que actúa sobre el muro, sin multiplicar por el factor de carga.

$V^*$  = Esfuerzo cortante medio de diseño.

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia, se tomará:

Como:

**0.7** Para muros diafragma, muros confinados y muros con refuerzo interior.

**0.4** Para muros no confinados ni reforzados.

No se tomará ningún incremento en la fuerza cortante resistente debido a la carga vertical cuando está excede de la mitad con la carga vertical resistente de diseño  $P$ .

## **C A P I T U L O   I I I**

# **V I G A S   D E   C O N C R E T O R E F O R Z A D O**

## CAPITULO III

### CONCEPTOS BASICOS DE CONCRETO REFORZADO

El concreto simple, está formado por una mezcla fraguada de cemento, agua, agregado fino y grueso, aire y con frecuencia aditivos. La mezcla plástica que resulta se coloca y se compacta en la cimbra, luego se cura para facilitar la reacción química que se lleva a cabo entre el agua y cemento, dando esto un aspecto duro. El producto terminado tiene una alta resistencia a la compresión y una baja resistencia a la tensión, de tal forma que su resistencia a la tensión es aproximadamente un décimo de su resistencia a la compresión. Debido a esto, se proporciona refuerzo en las regiones donde se presentan tensiones para compensar la debilidad en estas zonas del concreto.

Quedando definido por lo tanto el Concreto Reforzado, como una combinación de concreto simple y barras de acero.

## COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE CONCRETO

El concreto reforzado nos proporciona una sección heterogénea, que analizada de acuerdo a las hipótesis básicas del comportamiento de los materiales, no nos conduce a errores apreciables.

De tal manera que para definir el comportamiento de las secciones de concreto se siguen las siguientes Hipótesis:

1. Se supone una distribución lineal de la deformación. Esta suposición se basa en la Hipótesis de Bernoulli en la que las secciones planas antes de la flexión permanecen planas y perpendiculares al eje neutro después de la flexión. Es una etapa inicial elástica, en la que las cargas son proporcionales a las deformaciones. Es frecuente que bajo las condiciones de servicio, la estructura se encuentre en esta etapa.

2. Inicialmente se conoce la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del elemento. Es decir, es una etapa intermedia en la que la relación Carga-Deformación ya no es lineal, pero en la carga va creciendo.

3. La deformación en el acero y en el concreto que lo rodea es la misma antes del agrietamiento del concreto o de la fluencia del acero. Esto se presenta en una etapa plástica, en la que se producen deformaciones relativamente grandes para incrementos pequeños o nulos de las cargas.

4. El concreto no resiste esfuerzos en tensión, por lo que se agrieta en una etapa temprana de carga, es decir se presenta alrededor del 10 % de su resistencia límite de compresión. Es cuando se presenta la etapa inestable, donde a mayores deformaciones la carga disminuye.

5. El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto,  $\epsilon_{cu}$ .

Los Reglamentos recomiendan valores de  $\epsilon_{cu}$  que varían de 0.003 a 0.004.

### Tipos de secciones

Antes de iniciar cualquier diseño deberá identificarse el tipo de viga, según la falla, esto es, por fluencia del acero o aplastamiento del concreto, esto da lugar a la presentación de tres tipos de secciones:

#### a) Sección Balanceada.

A este tipo de sección se le conoce cuando el acero comienza a fluir y el concreto alcanza su capacidad última de deformación e inicia el aplastamiento. Al presentarse la falla, la deformación unitaria máxima admisible a compresión de la fibra extrema es 0.003, mientras que la deformación a tensión en el acero es igual al esfuerzo de fluencia.

### b) Sección Subreforzada.

En esta sección es en la que ocurre la falla por fluencia inicial del acero. Y se obtiene cuando el área del refuerzo de tensión utilizada en la viga es menor que la requerida para la condición de deformación balanceada.

### c) Sección Sobrerreforzada.

En está, la falla ocurre por aplastamiento inicial del concreto. Al comenzó de la falla, la deformación del acero será menor que la deformación de fluencia, por lo que el esfuerzo en el acero será menor que su resistencia de fluencia. La sección se obtiene utilizando más área de acero en la cara de tensión que el requerido para la condición balanceada.

La determinación de la cantidad de acero correspondiente a la condición balanceada es importante, porque en los Reglamentos y Normas de Diseño de Estructuras de Concreto es usual imponer una limitación al acero máximo que puede utilizarse en elementos sujetos a flexión, prohibiendo que se exceda un determinado porcentaje del acero balanceado, que varía de 50% a 100%. Esto se hace para asegurar que la falla del elemento sea dúctil, es decir que presente deformaciones importantes antes del colapso, de manera que se cuente con un aviso de la presencia del mismo. En efecto, en una viga subreforzada sujeta a carga creciente, el acero alcanza su esfuerzo de fluencia antes de que el concreto falle, registrándose fuertes agrietamientos y deflexiones antes del colapso. En una viga sobrerreforzada, por el contrario, el colapso sobreviene en forma repentina, sin aviso previo. En la figura 1-b se presenta una comparación cualitativa del comportamiento de una viga sobrerreforzada con el de una viga subreforzada. Teniendo además, las características comunes de una viga simplemente apoyada y con carga uniformemente repartida como se muestra en la figura 1-a, para las dos condiciones.

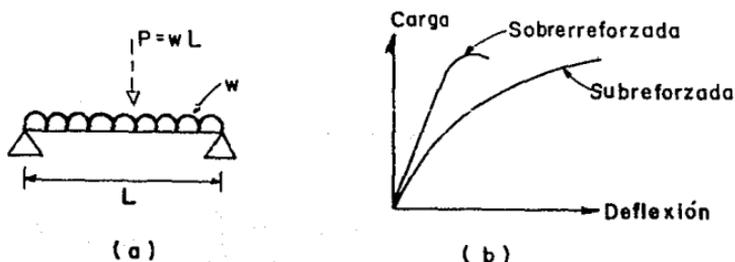


Figura 1.

Diagrama carga-deflexión.

## DIMENSIONAMIENTO Y REVISION

El dimensionamiento de vigas de concreto reforzado consiste esencialmente en la determinación de las propiedades geométricas de los elementos estructurales y de la cuantía y distribución del acero de refuerzo requeridas para contar con suficiente resistencia y un comportamiento adecuado bajo condiciones de servicio.

Los procedimientos que se siguen para predecir la resistencia de secciones sujetas a flexión o fuerza cortante o a combinaciones de ambas acciones, se basan principalmente en dos criterios:

- a) Criterio Elástico
- b) Criterio Plástico

Estos criterios se fundamentan de recomendaciones hechas por el Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal y de las de la Comisión Federal de Electricidad entre otros, como el American Concrete Institute y el Comité Europeo de Concreto; estos son aplicables de acuerdo a la localidad y condiciones que se presenten en la estructura; las cuales se atienden debidamente para evitar un diseño equivocado.

### CRITERIO ELASTICO

De acuerdo al comportamiento de la viga se tiene la manera de aplicar los criterios; para predecir su resistencia a flexión. Así, que para el diseño de una sección bajo criterio elástico se tendrá que sujetarse a las siguientes hipótesis:

1) La sección plana antes de la deformación permanece plana después de la deformación.

**Colorario:** Las deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro y siguen una ley de variación lineal.

2) Dentro de los esfuerzos de trabajo los módulos de elasticidad son constantes.

**Colorario:** Los esfuerzos son proporcionales a las defromaciones y su ley de variación es lineal.

3) La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales, a igual distancia del eje neutro.

4) Las tensiones son tomadas integramente por el acero y se considerarán aplicadas en el centro de gravedad de éste.

5) El conjunto de fuerzas interiores y exteriores constituyen un sistema en equilibrio.

## DISEÑO ELASTICO

Con el objeto de corroborar con las hipótesis antes presentadas, se hace el siguiente planteamiento; donde se determina la forma de diseño elástico y su revisión.

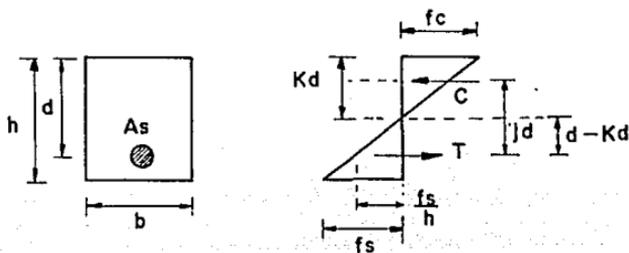


Figura 2.

En la figura 2 se muestra una sección rectangular simplemente apoyada, es decir con acero de refuerzo en tensión, y su respectivo diagrama de esfuerzos:

Donde:

$b$  = Ancho de la viga en la cara de compresión.

$d$  = Peralte de la viga medida a partir de la fibra extrema de compresión al centroide del área de acero.

$h$  = Peralte total de la viga.

$A_s$  = Área de acero en tensión.

$f_c$  = Esfuerzo de fluencia en compresión.

$f_s$  = Esfuerzo de fluencia en tensión.

Según el diagrama de esfuerzos, el valor en compresión es:

$$C = \frac{f_c K d}{2} b = \frac{1}{2} f_c K d b$$

Y el de tensión:

$$T = A_s f_s$$

Conociendo que la cuantía del acero de refuerzo de revisión es:

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

Sabiendo que las fuerzas interiores deben estar en equilibrio, según la hipótesis (5), o sea que:

$$C = T$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{2} f_c K db = A_s f_s$$

Como:

$$A_s = pbd$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} f_c K db = pbd f_s$$

De tal manera que:

$$\frac{f_c}{f_s} = \frac{2p}{K} \quad (A)$$

Despejando  $p$  de diseño:

$$p = \frac{K f_c}{2 f_s}$$

Obteniendo del diagrama de esfuerzos y aplicando triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{f_c}{Kd} = \frac{f_s}{n}$$

Despejando  $K$ :

$$\frac{f_c}{f_s} = \frac{K}{n(1-K)} \quad (B)$$

$$nf_c(1-K) = Kf_s$$

$$nf_c - nf_c K = Kf_s$$

$$nf_c = Kf_s + nf_c K$$

$$nf_c = K(f_s + nf_c)$$

$$K = \frac{nf_c}{f_s + nf_c}$$

Quedando K de diseño como:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{f_s}{nf_c}}$$

Igualando A = B:

$$\frac{2p}{K} = \frac{K}{n(1-K)}$$

Desarrollando:

$$2pn(1-K) = K^2$$

$$2pn - 2pnK = K^2$$

$$K^2 + 2pnK - 2pn = 0$$

$$K = -pn \pm \sqrt{(pn)^2 + 2pn}$$

Finalmente **K** de revisión:

$$K = \sqrt{(np)^2 + 2np} - np$$

Se conoce el brazo  $jd$ , que define las distancias de las fuerzas de compresión y tensión, del cual se puede conocer el valor de  $j$ :

$$jd = d - \frac{Kd}{3}$$

$$j = 1 - \frac{k}{3}$$

Y el valor del momento resistente:

$$M_R = Cjd = Tjd$$

$$M_R = \frac{1}{2} f_c K d b j d = \frac{1}{2} f_c K j b d^2$$

$$M_R = A_s f_s j d = p f_s j b d^2$$

Eliminando términos semejantes:

$$\frac{1}{2} f_c K j = p f_s j = K$$

$$M_R = K b d^2$$

Para que exista equilibrio, hipótesis (5), el momento de flexión máximo (exterior) debe ser igual al momento resistente:

$$M_E = M_R = M$$

Despejando  $d$ :

$$M = K b d^2$$

$$d = \sqrt{\frac{M}{KB}}$$

Y despejando  $A_s$ :

$$M_{R_1} = A_s f_s j d$$

$$A_s = \frac{M}{f_s j d} = p b d$$

Adicionalmente para revisar los valores de esfuerzos de fluencia se determinan por las expresiones siguientes:

Para el acero:

$$f_s = \frac{M}{A_s j d}$$

Para el concreto:

$$f_c = \frac{f_s}{n} \frac{K}{1-K}$$

$$f_c = \frac{2M}{K j b d^2}$$

Con el objeto de ilustrar la aplicación de los conceptos y principios expuestos anteriormente se presenta el siguiente ejemplo, donde se desea que se diseñe clásticamente la sección de momento máximo para la viga de la figura 3.

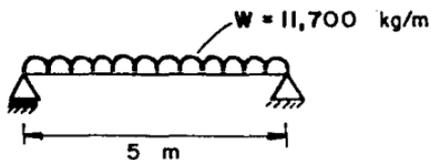


Figura 3.

Datos:

$$\Gamma_c = 140 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$\Gamma_s = 1265 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$\delta = 2400 \text{ [Kg/cm}^3\text{]}$$

$$\text{T.M.A.} = 3/4''$$

SOLUCION:

Determinando primeramente el diagrama de momentos flexionantes.

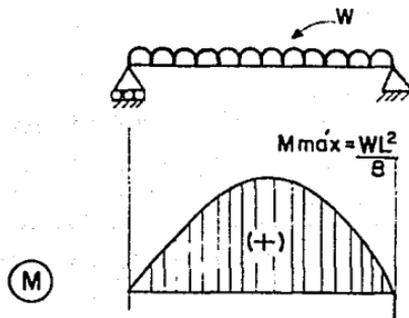


Figura 4

Como se pide que se diseñe, se comienza proponiendo una sección:  
Sección 40 x 80 [cm]

Cálculo del peso propio de la viga:

$$w_{pp} = 0.40 \text{ [m]} \times 0.80 \text{ [m]} \times 2400 \text{ [Kg/m}^3\text{]} = 768 \text{ [Kg/m]} = 0.768 \text{ [Ton/m]}$$

El peso total:

$$w_{Total} = 11.7 \text{ [Ton/m]} + 0.768 \text{ [Ton/m]} = 12.468 \text{ [Ton/m]}$$

Por lo tanto el momento máximo:

$$M_{Máx} = \frac{wL^2}{8}$$

$$M_{Máx} = \frac{(12.468)(5^2)}{8} = 38.9625 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Cálculo de las constantes:

Relación modular:

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Donde:

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$E_c = 8000 \sqrt{f_c}$$

$$n = \frac{2.1 \times 10^6}{8000 \sqrt{140}} = 22.19$$

Esfuerzo de fluencia del concreto:

$$f_c = 0.45 f'_c$$

$$f_c = 0.45 (140) = 63 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Esfuerzo de fluencia del acero:

$$f_s = 0.50 f_y = 1265 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Cálculo de la K de diseño:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{f_s}{n f_c}}$$

$$K = \frac{1}{1 + \frac{1265}{(22.19)(63)}} = 0.525$$

Entonces j:

$$j = 1 - \frac{K}{3}$$

$$j = 1 - \frac{0.525}{3} = 0.825$$

Y la  $K_{Máx}$ :

$$K_{Máx} = \frac{1}{2} f_c K_j$$

$$K_{Máx} = \frac{1}{2} (63) (0.525) (0.825) = 13.6434 [Kg/cm]$$

Revisando el peralte  $d$ :

$$d = \sqrt{\frac{M}{K_B}}$$

$$d = \frac{\sqrt{(38.9625 \times 10^5)}}{(13.6434)(40)} = 84.5 [cm] > 80 [cm]$$

Por lo tanto la sección propuesta es escasa; y nuevamente se propone una sección.  
Sección 40 x 92 [cm]

Realizando los mismos cálculos:

$$w_{pp} = 0.40 [m] \times 0.92 [m] \times 2.4 [Ton/m] = 0.8832 [Ton/m]$$

$$w_{Total} = 11.7 [Ton/m] + 0.883 [Ton/m] = 12.5832 [Ton/m]$$

$$M_{Máx} = \frac{12.5832 \times 5^2}{8} = 39.3225 [Ton \cdot m]$$

Los valores de las constantes no cambian; entonces se pasa a revisar el peralte  $d$ :

$$d = \frac{\sqrt{39.3225 \times 10^5}}{13.6434 \times 40}$$

$$d = 84.88 [cm] \approx 85 [cm]$$

Como el peralte propuesto es muy parecido al calculado, se da por aceptada la sección.

Y para conocer la cantidad de acero que se requiere, se calcula:

$$A_s = \frac{M}{f_s j d}$$

$$A_s = \frac{39.3225 \times 10^5}{1265 \times 0.825 \times 85} = 44.36 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Se conoce que la sección requiere 44.36 [cm<sup>2</sup>] de área de acero, entonces para su armado se proponen 9 barras del # 8. Las cuales se obtuvieron de la TABLA propuesta en el ANEXO.

Así pues, se obtiene el área de acero real,  $A_{s,Real}$ :

$$A_{s,Real} = (9) (5.07) = 45.63 \text{ [cm}^2\text{]} \approx 44.36 \text{ [cm}^2\text{]}$$

O bien calculando:

$$\frac{A_s}{a_s} = \frac{44.36}{5.07} \approx 9 \text{ Varillas}$$

Para ubicar la colocación de las varillas, se recurre a la siguiente idealización:

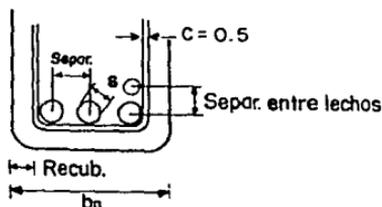


Figura 5

$$b_n = 2(\text{Recub.} + c) + \text{No. Var.} \times \delta + (\text{No. Var.} - 1) \text{ Separ.}$$

Para el ejemplo, se propone lo siguiente:

Recubrimiento = 4 [cm]

Separación >  $\delta$  ó 2.5 [cm] = 2.5 [cm]

Separación entre lechos = 2.5 [cm]

Sean 7 varillas en un lecho.

Revisando el tamaño máximo del agregado, T.M.A para comprobar que es aceptable lo antes propuesto.

$$T.M.A = \frac{\text{separación}}{1.333}$$

$$T.M.A = \frac{2.5}{1.333} = 1.88 \text{ [cm]}$$

Es decir, que el agregado si pasa por en medio de las barras.

Cabe mencionar también, que el ACI 318-87 y el RDDF NTC-87 tienen especificaciones para la colocación de las varillas, pero esas se contemplarán en el diseño del criterio plástico.

Regresando a calcular el ancho nominal,  $b_n$ , de la sección:

$$b_n = 2(4 + 0.5) + 7(2.5) + 6(2.5) = 41.5 \text{ [cm]}$$

Como  $b_n$  es ligeramente mayor que  $b$  propuesto, se analiza con una barra menos:

Sean 6 varillas en un lecho.

$$b_n = 2(4 + 0.5) + 6(2.5) + 5(2.5) = 36.5 \text{ [cm]}$$

Finalmente se opta por elegir 7 barras en un lecho, aunque se tenga un  $b_n$  ligeramente mayor, ya que se puede reducirse el recubrimiento y/o la separación entre barras.

Entonces, el diseño de la sección propuesta para la viga, figura 6.

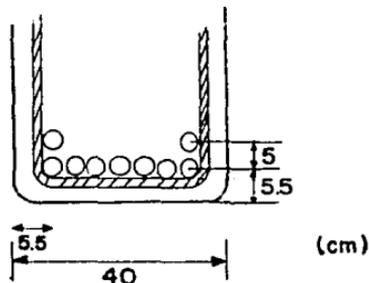


Figura 6.

Revisando la sección para terminar con el diseño:

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

$$A_s = \frac{45.63}{(40)(85)} = 0.013421$$

$$n = 22.19$$

$$np = (22.19)(0.013421) = 0.297812$$

$$K = \sqrt{np^2 + 2np} - np$$

$$K = \sqrt{(0.297812)^2 + 2(0.297812)} - 0.297812 = 0.5294 \approx 0.525$$

$$j = 1 - \frac{K}{3}$$

$$j = 1 - \frac{0.5294}{3} = 0.8235 \approx 0.825$$

$$f_s = \frac{M}{A_s j d}$$

$$f_s = \frac{39.3225 \times 10^5}{45.63 \times 0.8235 \times 85} = 1231.36 [\text{Kg/cm}^2] \leq 1265 [\text{Kg/cm}^2]$$

$$f_c = \frac{f_s}{n} \frac{K}{1-K}$$

$$f_c = \frac{1231.36}{22.19} \frac{0.5294}{1-0.5294} = 62.43 [\text{Kg/cm}^2] \approx 63 [\text{Kg/cm}^2]$$

Por lo tanto queda diseñada y revisada la sección.

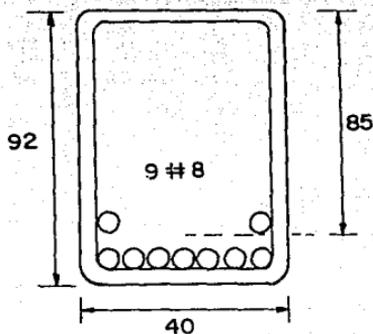


Figura 7.

Ahora, teniendo todos los datos de la sección, calcular siguiendo el criterio elástico la carga viva máxima que puede soportar la siguiente viga.

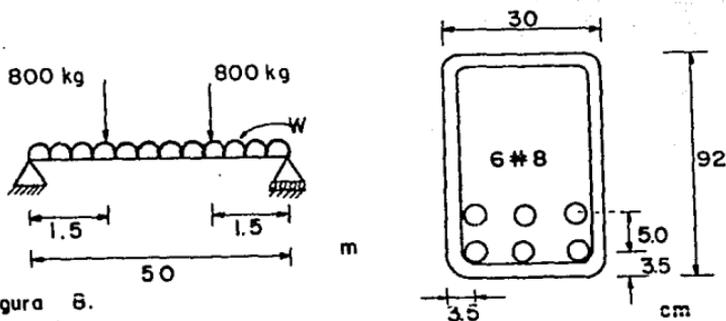


Figura 8.

Datos:

$$\begin{aligned}
 A_s &= 6 \# 8 \\
 f_c &= 150 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\
 f_t &= 1400 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\
 \Delta &= 2400 \text{ [Kg/m}^3\text{]}
 \end{aligned}$$

**SOLUCION:**

Cálculo del diagrama de momentos flexionantes, figura 9:

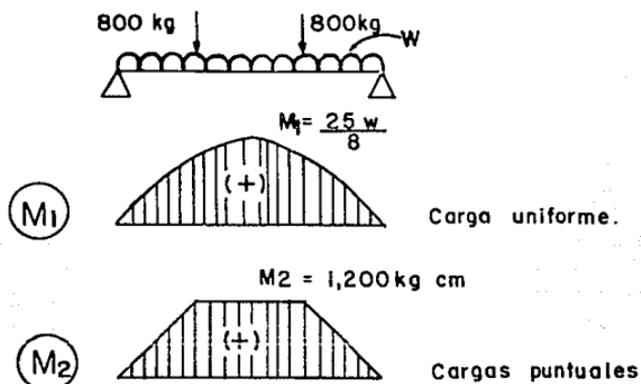


Figura 9.

De la sección:

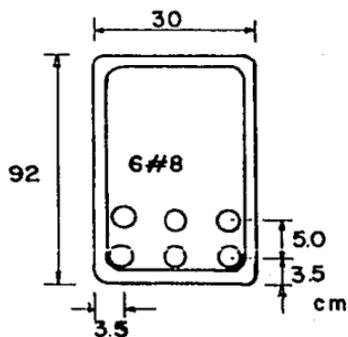


Figura 10.

El área de acero que tiene es:

$$A_s = 6 (5.07) = 30.42 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Y su centroide se ubica en:

$$\bar{y} = \frac{3(3.5) + 3(8.5)}{3+3} = 6.0 \text{ [cm]}$$

Entonces el peralte:

$$d = h - \bar{y}$$

$$d = 92 - 6 = 86 \text{ [cm]}$$

Cálculo del momento resistente:

Relación modular:

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Donde:

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$E_c = 8000 \sqrt{f_c} \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$n = \frac{2.1 \times 10^6}{8000 \sqrt{150}} = 21.43$$

La cuantía de acero:

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

$$p = \frac{30.42}{(30)(86)} = 0.0118$$

Entonces:

$$np = (21.43)(0.0118) = 0.2528$$

La K de revisión es:

$$K = \sqrt{np^2 + 2np} - np$$

$$K = \sqrt{(0.2528)^2 + 2(0.2528)} - 0.2528 = 0.5019$$

Y j:

$$j = 1 - \frac{K}{3}$$

$$j = 1 - \frac{0.5019}{3} = 0.8327$$

Como:

$$f_B = \frac{M}{A_B j d}$$

Despejando el momento:

$$M = f_B A_B j d$$

$$M = \frac{(1400)(30.42)(0.8327)(86)}{10^5} = 30.5 \text{ [Ton/m]}$$

Pero:

$$M = M_1 + M_2$$

Sustituyendo valores:

$$30.5 \text{ [Ton} \cdot \text{m]} = \frac{25W}{8} + 1.2 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Y sabiendo que:

$$\omega = \omega_{viva} + \omega_{pp}$$

$$\omega_{pp} = (0.30)(0.92)(2.4) = 0.6624 \text{ [Ton/m]}$$

Entonces:

$$30.5 = \frac{25(\omega_{viva} + 0.6624)}{8} + 1.2$$

Despejando la carga viva:

$$\omega_{viva} = \frac{(30.5 - 1.2)8}{25} - 0.6624 = 8.7136 \text{ [Ton/m]}$$

El valor de 8.7136 [Ton/m] es la carga viva que puede soportar la viga.

## **CRITERIO PLASTICO**

Y para el diseño de una sección bajo criterio plástico se tendrá que sujetarse a las siguientes hipótesis:

1) La sección plana antes de la deformación permanece plana después de la deformación.

**Colorario:** Las deformaciones son proporcionales a su distancia al eje neutro y siguen una ley de variación lineal.

2) Al llegar a su capacidad límite el concreto, los esfuerzos no son proporcionales a las deformaciones y su ley de variación no es lineal.

3) La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales a igual distancia del eje neutro.

4) Las tensiones son tomadas íntegramente por el acero y se considerarán aplicadas en el centro de gravedad de éste.

5) El conjunto de fuerzas interiores y exteriores constituyen un sistema en equilibrio.

**Nota:** El diagrama de esfuerzos podrá tomar cualquier forma teórica (triangular, trapecial, rectangular, parabólica de segundo o tercer grado), siempre y cuando los resultados que se obtengan de ella y de sus fórmulas sean comprobables experimentalmente.

En la actualidad comúnmente es utilizado el criterio plástico, denominado también método de resistencia última. Y el dimensionamiento se hace con las hipótesis de comportamiento inelástico, ya mencionadas.

Nuevamente, corroborando con las hipótesis antes presentadas, se hacen los siguientes planteamientos, donde se determina la forma de diseñar por resistencia última y su revisión.

Existen dos Reglamentos de construcción para el diseño y revisión por flexión que se utilizan, uno es el Reglamento del **Instituto Americano del concreto ( ACI 318-87 )**, y el otro es el Reglamento del **Departamento del Distrito Federal** en sus **Normas Técnicas Complementarias ( RDDF NTC-87 )**.

Como el **ACI 318-87** es americano, generalmente tiene especificaciones y normas que no pueden ser utilizadas, por tal motivo se usa en forma común el **RDDF NTC-87**; aunque cabe destacar que para su elaboración se tomó como antecedente el del **ACI 318-83**. Por tal motivo, es recomendable conocer los dos tipos de Reglamentos.

### Diseño Plástico " RDDF "

En la figura siguiente, se muestra una sección rectangular simplemente armada (acero de refuerzo en tensión), y su correspondiente diagrama de esfuerzos últimos:

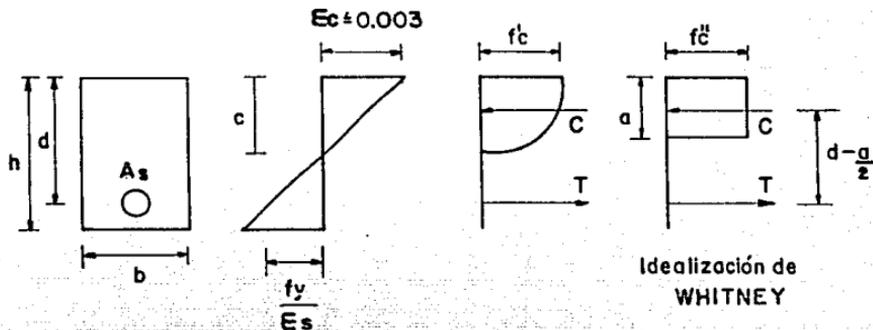


Figura 11.

Dado el valor de la fuerza a compresión, como:

$$C = f'c' / cab$$

Y la fuerza a tensión:

$$T = A_s f_y = pbdf_y$$

El momento último ocurre cuando la sección falla y se calcula:

$$M_u = F_R A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad (1)$$

Donde:

$F_R$  = Factor de seguridad ó Factor de reducción.

Despejando  $A_s$  de ( 1 ):

$$A_s = \frac{M_u}{F_R f_y (d - \frac{a}{2})} = pbdf_y \quad (2)$$

Haciendo uso de la hipótesis ( 5 ):

$$C = T$$

$$f'c_{ab} = p b d f_y$$

$$f'c_a = p d f_y$$

Despejando:

$$a = p \frac{f_y}{f'c} d$$

Y si:

$$m = \frac{f_y}{f'c}$$

Entonces:

$$a = p m d = 0.8 c \quad (3)$$

Donde:

$$f^*c = 0.8 f'c$$

$$f'c = K f^*$$

Y:

$$K = 0.85 \quad \text{si } f^*c \leq 250 [\text{Kg/cm}^2]$$

$$K = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c \quad \text{si } f^*c > 250 [\text{Kg/cm}^2]$$

El momento último, queda:

$$M_u = F_R p b d f_y \left(d - \frac{p m d}{2}\right)$$

$$M_u = F_R p d f_y \left(1 - \frac{p m}{2}\right) b d^2 \quad (4)$$

Si:

$$q = \frac{Pfy}{f'c}$$

$$M_u = F_R q f'c (1 - 0.5q) b d^2 \quad (5)$$

Las expresiones (1), (3), (4) y (5) son utilizadas para dimensionar la sección, y con la expresión (2) se calcula el área de acero, son entonces ecuaciones de diseño.

Ahora del diagrama de esfuerzos de condición balanceada, y por triángulos semejantes se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$$

Despejando el valor de la profundidad del eje neutro:

$$c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} d$$

Sustituyendo:

$$c = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{2.1 \times 10^6}} d$$

Entonces aproximadamente se tiene:

$$c \approx \frac{6000}{6000 + f_y} d$$

Haciendo, nuevamente uso de la hipótesis (5):

$$c = T$$

Sustituyendo:

$$f'c a b = p b d f_y$$

Donde:

$$a = 0.8c$$

Entonces:

$$f' / c \cdot 0.8c = p d f_y$$

Despejando la cuantía de acero:

$$p = \frac{f' / c \cdot 0.8c}{d f_y}$$

Concluyendo, se tiene que la cuantía de acero para una sección balanceada está dada como:

$$p_{balanceada} = \frac{f' / c}{f_y} \frac{4800}{6000 + f_y} \quad (6)$$

Siempre que la cuantía de acero se encuentre por abajo de este valor ( 6 ), se garantiza una falla en el acero de la sección.

Y para asegurarse que la falla no sea frágil, se toma el siguiente rango, donde se señala que el porcentaje de acero que se utilice debe ser mayor ó igual del 0.75 del porcentaje de acero balanceado y mayor al porcentaje marcado como mínimo:

$$0.75 p_b \geq p \geq 0.7 \frac{\sqrt{f' / c}}{f_y}$$

Para ejemplificar la teoría expuesta, se pide calcular el momento resistente haciendo uso de las recomendaciones del RDDF NTC-87.

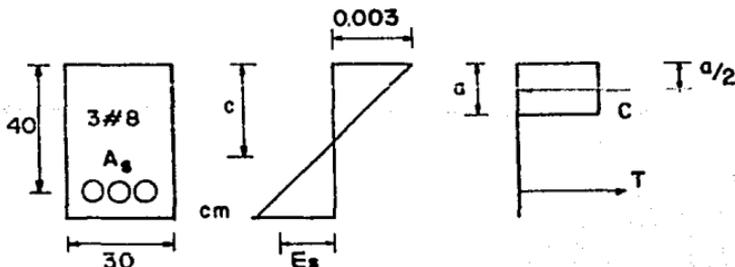


Figura 12.

Datos:

$$f_c = 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f_y = 4200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$A_s = 3 \# 8$$

Para calcular el momento resistente es necesario emplear las hipótesis planteadas:

Haciendo:

$$C = T$$

Donde:

$$C = f'_c ab$$

Y:

$$T = A_s f_y = p b d f_y$$

Entonces:

$$f'_c ab = p b d f_y$$

Despejando:

$$a = p \frac{f_y}{f'_c} d$$

Sustituyendo valores:

$$a = \frac{15.2}{(30)(40)} \frac{4200}{(0.85)(0.8)(200)} (40) = 15.65$$

Y de la Tabla de acero (APENDICE), se conoce que el área de acero dada tiene el siguiente valor:

$$A_s = (3)(5.07) = 15.21 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Y la expresión de momento último resistente es:

$$M_u = F_R A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Sustituyendo:

$$M_u = 0.9 (15.2) (4200) \left( 40 - \frac{15.65}{2} \right) = 18.48 \times 10^5 \text{ [Kg} \cdot \text{cm]} = 18.48 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Ahora, empleando los datos de la sección se puede emplear la siguiente expresión de momentos últimos:

$$M_u = F_R f' / c b d^2 q (1 - 0.5q)$$

Donde:

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

$$p = \frac{15.21}{(30)(40)} = 0.01268$$

$$q = p \frac{f_y}{f' / c}$$

$$q = 0.01268 \frac{4200}{(0.85)(0.8)(200)} = 0.39$$

Sustituyendo cada uno de los términos en la expresión de momento último:

$$M_u = 0.9 (136) (30) (40^2) (0.39) (1 - 0.5(0.39)) = 18.48 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Finalmente, se concluye que 18.48 [Ton·m] es el momento último que resiste la sección dada.

Empleando las especificaciones del RDDF NTC-87 se diseña la siguiente viga, para una sección mínima:

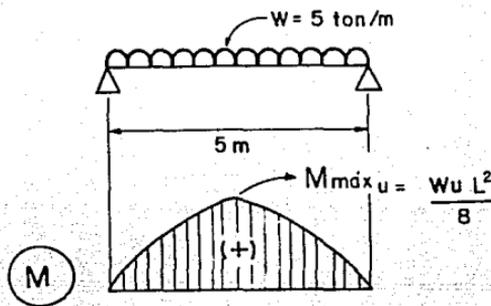


Figura 13.

Datos:

$$f_c = 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f_y = 4000 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$\delta = 2400 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$$

$$\text{T.M.A} = 1.9 \text{ [cm]}$$

No incluye peso propio

Sección mínima

**SOLUCION :**

Suponiendo una sección  $25 \times 55 \text{ [cm]}$

Cálculo del peso propio:

$$\omega_{pp} = (0.25) (0.55) (2.4) = 0.330 \text{ [Ton/m]}$$

$$\omega_{muerta} + \omega_{viva} = 5.000 \text{ [Ton/m]}$$

$$\omega_{Total} = 5.330 \text{ [Ton/m]}$$

Cálculo de la carga última:

$$\omega_u = F \cdot C \cdot \omega_{Total}$$

$$\omega_u = (1.4) (5.330) = 7.462 [\text{Ton/m}]$$

De especificaciones:

$$f''c = 0.8 (0.85) (f'c)$$

$$f''c = 0.8 (0.85) (200) = 136 [\text{Kg/cm}^2]$$

Además del análisis planteado anteriormente se conoce que el momento último está expresado como:

$$M_u = F_R \rho f_y \left(1 - \frac{\rho m}{2}\right) b d^2$$

$$\frac{M_u}{b d^2} = F_R \rho f_y \left(1 - \frac{\rho m}{2}\right) \quad (4)$$

Donde:

$$F_R = 0.9 \quad \text{De especificaciones}$$

$$m = \frac{f_y}{f''c}$$

$$m = \frac{4000}{136} = 29.41$$

Disñando una sección mínima, entonces se toma un porcentaje de acero máximo, es decir:

$$\rho_{máx} = 0.75 \rho_b$$

$$P_b = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{6000 - f_y}$$

$$P_b = \frac{136}{4000} \frac{4800}{6000 + 4000} = 0.01632$$

Por lo tanto:

$$pmáx = 0.75(0.01632) = 0.01224$$

Sustituyendo en la expresión (4):

$$\frac{23.319 \times 10^5}{25d^2} = 0.9(0.01224)(4000) \left(1 - \frac{0.01224(29.41)}{2}\right)$$

$$\frac{93275}{d^2} = 36.133$$

$$d \sqrt{\frac{93275}{36.133}} = 50.81 [cm] \approx 51 [cm]$$

$$A_g = (0.01224)(25)(51) = 15.606 [cm^2]$$

Por lo tanto el área de acero real:

$$A_{sReal} = 2 \# 6 + 2 \# 8$$

$$A_{sR} = 2(5.07) + 2(2.85) = 15.84 [cm^2]$$

Considerando 4 varillas en un lecho:

$$b_n = 2(2.5 + 0.5) + 4(2.5) + 3(2.9) = 24.7 [cm] \approx 25 [cm]$$

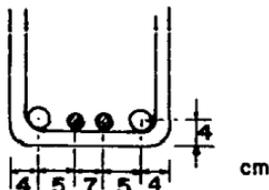


Figura 14.

$$\bar{y} = \frac{[2(5.07) + 2(2.85)]4}{15.84} = 4 \text{ [cm]}$$

$$h = 51 + 4 = 55 \text{ [cm]}$$

Finalmente el diseño de una sección mínima:

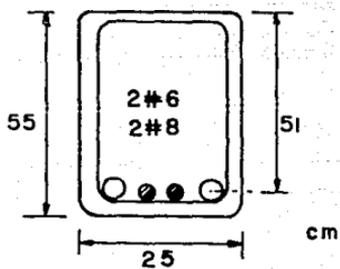


Figura 15.

Como ya se hizo mención, que el criterio más utilizado en la actualidad es el plástico; por tal motivo para el dimensionamiento y revisión de secciones doblemente armadas e I y T, sólo se presenta éste criterio.

### VIGAS DOBLEMENTE ARMADAS

*Dimensionamiento y revisión.*

#### Diseño Plástico RDDF NTC-87

En la figura 16 se muestra una sección rectangular doblemente armada (acero de refuerzo en tensión y en compresión), y su correspondiente diagrama de esfuerzos últimos idealizado por Whitney.

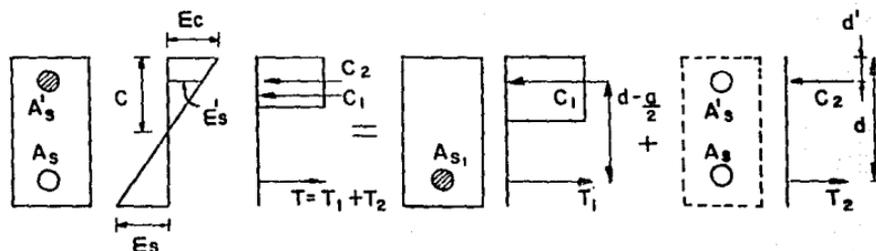


Figura 16.

Donde:

$$C_1 = f'_c a b$$

$$T_1 = A_s f_y$$

Por lo tanto:

$$C_1 = T_1$$

$$C_2 = A'_s f_y$$

$$T_2 = A_{s_2} f_y$$

También:

$$C_2 = T_2$$

Y tenemos que:

$$A_s = A_{s_1} + A_{s_2}$$

Pero:

$$A_{s_2} = A' / s$$

Entonces:

$$A_s = A_{s_1} + A' / s$$

Despejando:

$$A_{s_1} = A_s + A' / s$$

De aquí que:

$$p_1 = p - p'$$

Entonces el momento último:

$$M_{u_1} = F_R A_{s_1} f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Y si:

$$A_s = p b d$$

Como:

$$C_1 = T_1$$

$$f' / C ab = A_s f_y$$

Sustituyendo:

$$f''/c \cdot ab = (p-p') bdf_y$$

Despejando:

$$a = \frac{(p-p') bdf_y}{f''/c \cdot ab}$$

Además considerando:

$$m = \frac{f_y}{f''/c}$$

Por lo tanto:

$$a = (p-p') md$$

Ahora el momento último, queda:

$$M_{u_1} = F_R (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{(p-p') md}{2} \right)$$

$$M_{u_1} = F_R (p-p') f_y \left( 1 - \frac{(p-p') m}{2} \right)$$

Y:

$$M_{u_2} = F_R A'_s f_y (d - d') b d^2$$

$$M_{u_2} = F_R p' f_y \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) b d^2$$

Donde:

$$M_u = M_{u_1} + M_{u_2}$$

Finalmente el momento de una sección doblemente armada:

$$M_u = F_R (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d')$$

ó también:

$$M_u = F_R (p - p') f_y \left( 1 - \frac{(p - p') m}{2} + p' f_y \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) \right) b d^2$$

Teniendo:

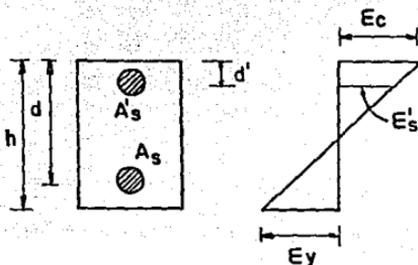


Figura 17.

La cuantía de acero máxima que se utiliza es:

$$p_{m\acute{a}x} = 0.75 p_b$$

Siendo:

$$p_b = \frac{d'}{d} \frac{f'f_c}{f_y} \frac{4800}{6000 + f_y}$$

Y del diagrama de esfuerzos de la figura 17, por triángulos semejantes se obtiene:

$$\frac{c}{\epsilon_c} = \frac{d'}{\epsilon_c - \epsilon'_s}$$

Despejando el valor de la profundidad del eje neutro:

$$c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c - \epsilon'_s} d'$$

Haciendo:

$$C = T$$

$$f'' c ab = (p-p') bdf_y$$

$$p-p' = \frac{f'' c ab}{bdf_y}$$

$$p-p' = \frac{f'' c d'}{f_y d} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c - \epsilon'_s}$$

Además:

$$\epsilon'_s = \frac{f'_s}{E_s}$$

Si:

$$f'_s = f_y$$

Entonces:

$$\epsilon'_s = \frac{f_y}{E_s} = \frac{f_y}{2.1 \times 10^6}$$

Finalmente para obtener una cantidad de acero adecuada se emplea el siguiente rango, que es cuando el acero fluye:

$$0.75 p_b \geq (p-p') \geq \frac{f'' c d'}{f_y d} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c - \epsilon'_s}$$

ó también:

$$0.75 \frac{f'' c d'}{f_y d} \frac{4800}{6000 + f_y} \geq (p-p') \geq \frac{f'' c d'}{f_y d} \frac{4800}{6000 - f_y}$$

De manera sencilla, para ejemplificar la teoría expuesta anteriormente se expone el siguiente ejemplo, que consiste en la determinación de la carga viva máxima que puede soportar la siguiente viga doblemente armada:

Datos:

$$\begin{aligned}h &= 45 \text{ [cm]} \\d &= 40 \text{ [cm]} \\b &= 20 \text{ [cm]} \\d' &= 3 \text{ [cm]} \\l &= 4.75 \text{ [m]} \\F.C.M &= 1.2 \\F.C.V &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y &= 2530 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\A_s &= 17.74 \text{ [cm}^2\text{]} \\A'_s &= 5.44 \text{ [cm}^2\text{]} \\r &= 2400 \text{ [Kg/m}^3\text{]} \\r_c &= 140 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

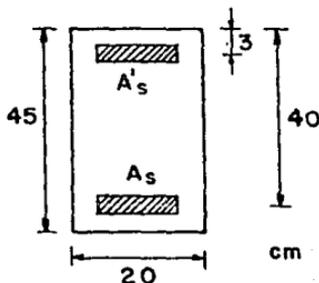


Figura 1B.

Cálculo del peso propio:

$$w_{pp} = (0.20)(0.45)(2.4) = 0.216 \text{ [Ton/m]}$$

Como la carga última está dada como:

$$w_u = 2C.V + 1.2C.M$$

Sustituyendo:

$$w_u = 2C.V + (0.216)(1.2) = 2C.V + 0.2592$$

Donde el porcentaje de acero en tensión es:

$$P = \frac{A_s}{pb} = \frac{17.74}{(20)(40)} = 0.02218$$

Y el de compresión:

$$p' = \frac{A's}{bd} = \frac{5.44}{(20)(40)} = 0.0068$$

Usando las especificaciones del Reglamento del Departamento del Distrito Federal:

$$a = (p - p') md$$

Donde:

$$m = \frac{f_y}{f'c}$$

Y:

$$f'c = 0.85 f'c = 0.85(140)$$

Entonces:

$$a = (0.02218 - 0.0068) \frac{2530}{0.85(140)} (40) = 13.08$$

El momento último resistente:

$$M_u = F_R = [ (A_s - A's) f_y (d - \frac{a}{2}) + A's f_y (d - d') ]$$

Sustituyendo:

$$M_u = 0.9 [ (17.74 - 5.44) (2530) (40 - \frac{13.08}{2}) + 5.44 (2530) (40 - 3) ]$$

$$M_u = 1809897.131 [Kg \cdot cm] = 18.10 [Ton \cdot m]$$

Considerando que:

$$M_{m\&x_s} = \frac{w_u L^2}{8}$$

Sustituyendo:

$$M_{m\&x_s} = \frac{(2C.V + 0.2592) (4.75^2)}{8}$$

$$M_{m\acute{a}x.} = 5.6406C.V + 0.7310$$

Igualando los momentos:

$$M_u = M_{m\acute{a}x.}$$

Entonces:

$$18.10 = 5.6406C.V + 0.7310$$

Despejando la carga viva:

$$C.V = \frac{18.10 - 0.7310}{5.6406}$$

Finalmente la carga viva máxima que puede soportar la sección doblemente armada es:

$$C.V_{m\acute{a}x.} = 3.08 \text{ [Ton/m]}$$

## VIGAS I y T

### Dimensionamiento y revisión

#### Diseño Plástico RDDF NTC-87

En la figura 19 se muestra una sección T simplemente armada, acero en tensión, y su correspondiente diagrama de esfuerzos últimos:

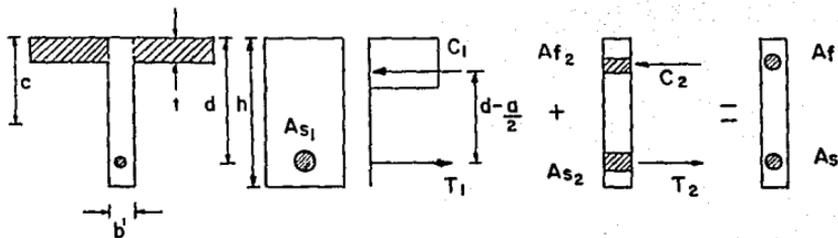


Figura 19.

Primeramente deberá verificarse que realmente se trate de una sección T, entonces se tendrán que checar las siguientes restricciones:

$$b \leq 16t + b'$$

$$b \leq C.A.C$$

$$b \leq \frac{L}{4}$$

Donde:

$L$  = Longitud de la viga.

Y para confirmar que la sección es una T, se cumple:

$$a > t$$

Expresando los valores de tensión y compresión, se tienen:

$$C_1 = f' / c \cdot ab$$

$$T_1 = A_{s1} f_y$$

$$C_2 = A_f f_y$$

$$T_2 = A_{s2} f_y$$

Y si se supone que:

$$A_f = A_{s2}$$

Entonces:

$$A_s = A_{s1} + A_f$$

Despejando:

$$A_{s1} = A_s - A_f$$

Por otra parte se conoce que la cuantía de acero está dada como:

$$A_s = pbd$$

Y la fuerza de compresión:

$$C = C_1 + C_2$$

Sustituyendo:

$$C = f' c ab + A_f f_y$$

Entonces:

$$C = f' c ab + p' bdf_y$$

Y la fuerza de tensión:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = A_s f_y + A_f f_y$$

$$T = (A_B + A_f) f_y = A_B f_y = p b d f_y$$

Haciendo:

$$C = T$$

$$f' / c \cdot a b + p' b d f_y = p b d f_y$$

$$f' / c \cdot a b = (p - p') b d f_y$$

Despejando:

$$a = (p - p') \frac{f_y}{f' / c} d$$

Pero:

$$m = \frac{f_y}{f' / c}$$

Entonces:

$$a = (p - p') m d$$

Ahora, calculando el valor del momento último:

$$M_u = M_{u_1} + M_{u_2}$$

Pero:

$$M_{u_1} = F_R [A_s f_y (d - \frac{a}{2})]$$

Y:

$$M_{u_2} = F_R [A_f f_y (d - \frac{t}{2})]$$

Sustituyendo  $A_{u1}$  en  $M_{u1}$ :

$$M_{u1} = F_R [ (A_B - A_f) f_y (d - \frac{a}{2}) ]$$

Y como:

$$M_u = M_{u1} + M_{u2}$$

Entonces el momento último está expresado como:

$$M_u = F_R [ (A_B - A_f) f_y (d - \frac{a}{2}) + A_f f_y (d - \frac{t}{2}) ]$$

Por otra parte se conoce:

$$P = P_1 + P_f$$

Despejando:

$$P_1 = P - P_f$$

Finalmente el momento último también es expresado como:

$$\frac{M_u}{b' d^2} = F_R [ (P - P_f) (1 - \frac{(P - P_f) m}{2}) + P f_y (1 + \frac{t}{2d}) ]$$

Además, se conoce que la fuerza de compresión en los patines está dada:

$$C_{patines} = (b - b') t f' / c$$

Y:

$$C_f = A_f f_y$$

Donde:

$$C_{patines} = C_f$$

Por lo tanto:

$$A_f f_y = (b - b') t f' / c$$

Entonces:

$$A_f = (b - b') \frac{f' / c}{f_y} t$$

Pero como:

$$m = \frac{f_y}{f' / c}$$

Finalmente:

$$A_f = \frac{t}{m} (b - b')$$

Por otra parte si se desprecia el momento del nervio; el momento último tendrá la siguiente expresión:

$$M_u = F_R [A_f f_y (d - \frac{t}{2})]$$

Despejando el peralte de la sección T:

$$\frac{M_u}{F_R A_f f_y} = d - \frac{t}{2}$$

$$d = \frac{M_u}{F_R A_f f_y} + \frac{t}{2}$$

Nuevamente, y como se ha realizado en cada sección se presenta un ejemplo de la teoría planteada. En esta ocasión se pide que se calcule el área de acero de una sección T, empleando las especificaciones del RDDF NTC-87:

Datos:

$$\begin{aligned}L &= 7.45 \text{ [m]} \\b' &= 28 \text{ [cm]} \\C.A.C &= 120 \text{ [cm]} \\M_u &= 73.5 \text{ [Ton}\cdot\text{m]} \\f_c &= 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\f_y &= 4000 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

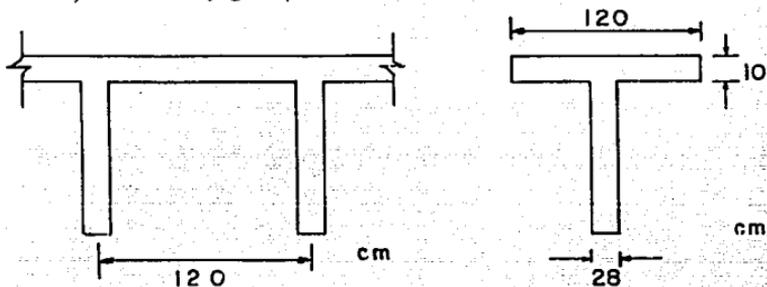


Figura 20.

Verificando las restricciones de b:

$$b = 16t + b' = 16(10) + 28 = 188 \text{ [cm]}$$

$$b = C.A.C = 120 \text{ [cm]}$$

$$b = \frac{L}{4} = \frac{745}{4} = 183.75 \text{ [cm]}$$

Por lo tanto rige  $b = 120 \text{ [cm]}$

Cálculo de la sección T de mínimo peralte, despreciando la compresión del nervio:

$$A_f = (b - b') \frac{f' / c}{f_y} t$$

Sustituyendo valores:

$$A_f = (120 - 28) \frac{0.85(200)}{4000} 10 = 39.10 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Y el peralte de la sección:

$$d = \frac{M_u}{F_R A_s f_y} + \frac{t}{2}$$

Sustituyendo:

$$d = \frac{7350000}{0.9(39.10)(4000)} + 5 = 57.22 \text{ [cm]}$$

Y el área de acero de refuerzo:

$$A_s = \frac{M_u}{F_R f_y (d - \frac{t}{2})}$$

Sustituyendo:

$$A_s = \frac{7350000}{0.9(4000)(57.22 - 5)} = 39.10 \text{ [cm}^2\text{]}$$

De la tabla (APENDICE) de área de acero de refuerzo se obtiene:

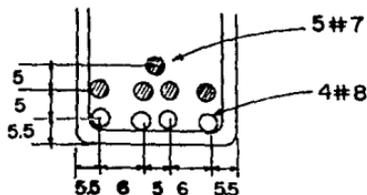
$$A_{sR} = 4 \# 8 + 5 \# 7$$

$$A_{sR} = 4(5.07) + 5(3.88) = 39.68 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ahora colocando 4 varillas en un lecho:

$$b_n = 2(4 + 0.5) + 4(2.5) + 3(2.5) = 26.5 \text{ [cm]}$$

Idealizando la distribución del acero de refuerzo como el mostrado en la figura, se tiene:



Entonces el centroide del acero se encuentra en:

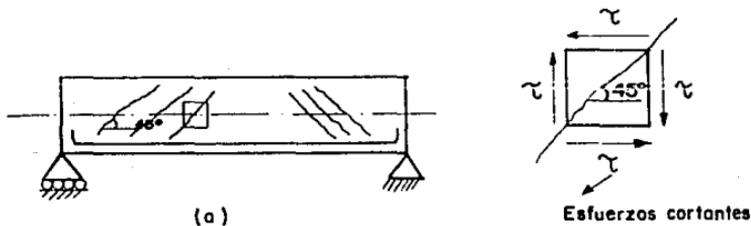
$$\bar{y} = \frac{4(5.07)(5.5) + 4(3.88)(10.5) + 1(3.88)(1.55)}{39.68} = 8.43 \text{ [cm]}$$

Y el peralte de la sección es:

$$h = 57.22 + 8.43 = 65.65 \text{ [cm]}$$

## VIGAS SUJETAS A FUERZA CORTANTE

Para comprender las acciones de los esfuerzos; supóngase una viga con refuerzo longitudinal suficiente para resistir la flexión, pero sin refuerzo transversal. Figura 21-a. Bajo cargas relativamente bajas, de tal manera que su comportamiento sea en el rango elástico y además que los esfuerzos cortantes puedan predecirse por las fórmulas convencionales de Resistencia de Materiales. Los esfuerzos cortantes que actúan sobre una partícula extraída al nivel del eje neutro, donde los esfuerzos normales son nulos, figura 21-b. La resistencia del concreto a éste tipo de esfuerzo es bastante alta. Sin embargo, la combinación de los esfuerzos cortantes horizontales y verticales producen tensiones en planos a  $45^\circ$  respecto al eje neutro, que provocan agrietamientos bajo cargas relativamente bajas. Una situación semejante sucede cuando también intervienen esfuerzos normales debidos a flexión.



Viga de concreto sin refuerzo transversal  
en la que se presentan tensiones diagonales.

Figura 21.

Como se ha mencionado anteriormente, una partícula sujeta a un estado de esfuerzos cortantes puro queda sometida en realidad a un esfuerzo principal de tensión, de igual valor que el esfuerzo cortante, en un plano que forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje de la viga. Perpendicularmente a ese esfuerzo, actúa otro de compresión que tiene igual valor que el primero. Ese estado de esfuerzos se presenta en el eje neutro de las vigas y probablemente ocurra algo semejante en la zona de tensión donde el concreto está fuertemente agrietado por efecto del momento flexionante.

El concreto, que es capaz de admitir esfuerzos de compresión más ó menos elevados muestra en cambio muy poca resistencia a los esfuerzos en tensión.

El esfuerzo cortante es peligroso por cuanto da origen a la tensión diagonal, llamada así por su inclinación característica y el concreto como se ha explicado en varias ocasiones, casi no ofrece resistencia a esa clase de esfuerzo.

Una forma de determinar el esfuerzo cortante en el concreto, es apartir de una sección transformada rectangular.

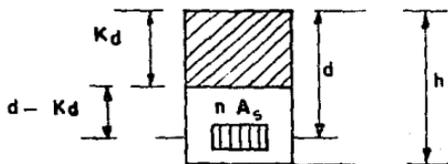


Figura 22.

Sabemos que los esfuerzos normales están dados por expresión:

$$\sigma = \frac{M}{I} \bar{y}$$

Y los esfuerzos cortantes como:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Donde:

$$I = \frac{b(Kd)^3}{3} + nA_s(d-Kd)^2$$

$$Q = \frac{b(Kd)^2}{2} = nA_s(d-Kd)$$

Haciendo la siguiente relación:

$$\frac{I}{Q} = \frac{2}{3}Kd + d - Kd$$

Reduciendo términos:

$$\frac{I}{Q} = d - \frac{Kd}{3}$$

Y en la Teoría Elástica se tiene determinando:

$$\frac{I}{Q} = jd$$

Finalmente, tenemos que el esfuerzo cortante en el concreto:

$$\tau = v$$

Entonces:

$$v = \frac{V}{bjd}$$

Como medida convencional de la magnitud de las tensiones diagonales suele tomarse lo que se llama Esfuerzo Cortante Nominal. Este esfuerzo se calcula por medio de la expresión:

$$v_u = \frac{V_u}{bd}$$

Donde:

$v_u$  = Esfuerzo cortante nominal

$V_u$  = Fuerza cortante última que actúa sobre la sección considerada.

$b$  = Ancho de la sección.

$d$  = Peralte efectivo.

Pero esta expresión está fuera de seguridad; y para dar solución a este problema se aplica el criterio plástico, donde se incluyen factores de reducción, de la siguiente manera:

Diseño Plástico RDDF NTC-87

$$v_u = \frac{V_u}{bd}$$

$$v_n = \frac{v_u}{F_R}$$

## Diseño Plástico ACI 318-87

$$v_u = \frac{V_u}{bd}$$

$$v_n = \frac{v_u}{\phi}$$

El valor calculado se compara con el que puede tomar la sección de concreto sin refuerzo transversal.

Tomando en cuenta tan sólo el Reglamento, donde señala que debe cumplirse que:

$$V_u \leq 2 F_R bd \sqrt{f'_c}$$

Las expresiones que señala el RDDF NTC-87 para obtener la fuerza cortante que toma el concreto,  $V_{CR}$ ; está bajo los siguientes criterios:

Son aplicables las siguientes expresiones si se cumple que:

- La dimensión transversal,  $h$ , del elemento, paralela a la fuerza cortante no es mayor de 70 [cm].
- Y además, la relación  $h/b$  no exceda de 6.

Para cada una de las dos condiciones anteriores que no cumpla se reducirá  $V_{CR}$  dado por dichas expresiones en 30%.

Para valuar  $h/b$  en vigas T ó I se usará el ancho del alma  $b'$ .

### 1. En vigas sin refuerzo transversal

Deberán cumplir la relación claro a peralte total,  $L/h$ , no menor de 5; entonces la fuerza que toma el concreto, se calculará con las expresiones siguientes:

Si  $p < 0.01$

$$V_{CR} = F_R bd (0.2 + 30p) \sqrt{f'_c}$$

Si  $p \geq 0.01$

$$V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$$

Si  $L/h < 4$ ;  $V_{CR}$  se multiplicará por:

$$\left[ 3.5 - 2.5 \frac{M}{Vd} \right] > 1$$

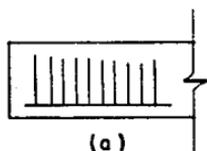
Pero sin que se tome  $V_{CR}$  mayor que:

$$1.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$$

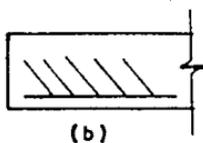
En el factor anterior  $M$  y  $V$  son el momento flexionante y la fuerza cortante respectivamente, que actúan en la sección.

## 2. En vigas con refuerzo transversal

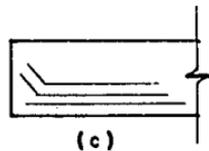
Para contrarrestar los agrietamientos causados por la tensión diagonal se prevee a la viga de un refuerzo transversal, esto es un agrupamiento de acero de refuerzo, llamados comúnmente estribos, los cuales se pueden colocar en diferentes formas, como se muestra en la figura 23.



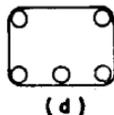
(a) Estribos verticales



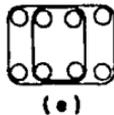
(b) Estribos inclinados



(c) Refuerzo longitudinal doblado



(d) Estribos de dos ramas



(e) Estribos de cuatro ramas

Figura 23

También se puede aprovechar el refuerzo longitudinal prolongándolo más allá de donde deja de ser necesario por flexión y doblándolo de manera que atraviese la zona de tensiones diagonales importantes. Tanto los estribos como las barras dobladas pueden tener inclinaciones entre 30° y 60° respecto al eje neutro. Sin embargo, la inclinación más frecuente es a 45°.

La contribución del refuerzo transversal a la resistencia a cortante  $V/u$  esta dada por la expresión siguiente:

$$V/u = F_R \left[ \frac{a_v f_v d (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha)}{S} \right]$$

Donde:

- $a_v$  = Area total del acero de refuerzo transversal utilizado.
- $f_v$  = Esfuerzo de fluencia de los estribos.
- $d$  = Peralte efectivo de la sección.
- $\alpha$  = Angulo de inclinación de refuerzo transversal respecto al eje neutro.
- $S$  = Separación del refuerzo.

Y si se desea conocer la separación de los estribos, sólo se hace uso de la expresión despejándola:

$$S = F_R \left[ \frac{a_v f_v d (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha)}{V/u} \right]$$

Si el refuerzo es vertical, la expresión de la resistencia al cortante está dada como:

$$V/u = F_R \left[ \frac{a_v f_v d}{S} \right]$$

De igual manera, puede ser despejada la separación.

Si está a 45°, la expresión correspondiente a la resistencia a cortante, será:

$$V/u = \frac{1.414 a_v f_v d}{S}$$

Y también puede despejarse la separación.

De lo anterior se desprende que la resistencia total a cortante de una sección de concreto está dada por:

$$V_c = V_{CR} + V' u$$

El Reglamento suele imponer ciertas restricciones al refuerzo transversal, las principales de las cuales pueden resumirse en las siguientes:

- a) Las separaciones del refuerzo transversal no deben exceder los siguientes valores:  
Separación máxima:

$$\begin{aligned} \text{Estribos verticales: } & d/2 \\ \text{Estribos a } 45^\circ: & d \\ \text{Barras dobladas a } 45^\circ: & 3/4 d \end{aligned}$$

- b) El área de refuerzo transversal no debe ser inferior a:

$$a_{v_{\min}} = \frac{3 \cdot 5 b s}{f_v}$$

En el caso de vigas T, se usará el ancho de la nervadura  $b'$ .

Con frecuencia las dimensiones de elementos estructurales quedan determinadas por requisitos de flexión. El problema de dimensionamiento por fuerza cortante queda entonces reducido a la determinación del refuerzo transversal en secciones de dimensiones conocidas. Sin embargo no es raro que sea la fuerza cortante la que determine la sección del elemento por dimensionar.

En el siguiente ejemplo se muestra como calcular la resistencia cortante de una viga rectangular, la cual tiene refuerzo transversal que consiste en estribos cerrados de dos ramas.

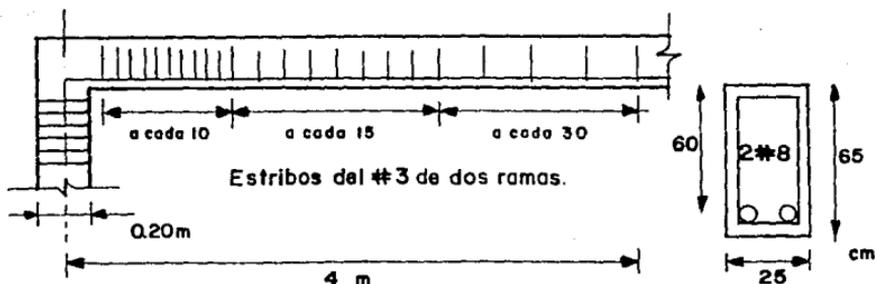


Figura 24

**Datos:**

Concreto:

$$f_c = 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Acero:

$$f_y = 2800 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

**Nota:** El primer estribo se encuentra a 5 [cm] del paño del apoyo.

Los requisitos de refuerzo mínimo se cumplen adecuadamente, ya que la sección del refuerzo transversal requerida para la separación máxima especificada de 30 [cm] es menor que la proporcionada por los estribos del #3 utilizados.

**SOLUCIÓN:**

Cálculo de las especificaciones y constantes:

De especificaciones, los esfuerzos:

$$f_c^* = 0.8 f_c = 0.8 (200) = 160 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f_y^* = 0.8 f_y = 0.8 (2800) = 2240 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Contribución del concreto:

Tomando especificaciones del RDDDF NTC-87:

$$\frac{L}{h} = \frac{400}{65} = 6.15 > 5$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{10.14}{(25)(60)} = 0.00676 < 0.01$$

Entonces la fuerza cortante se determina con la expresión:

$$V_{CR} = F_R bd (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*}$$

Sustituyendo:

$$V_{CR} = 0.8 (25) (60) (0.2 + 30 (0.00675) \sqrt{160}) = 6114.10 [Kg]$$

Revisión de las limitaciones del refuerzo transversal:

Separación máxima:

$$s_{m\acute{a}x} = \frac{d}{2} = \frac{60}{2} = 30 [cm]$$

El área de refuerzo transversal no debe ser inferior a:

$$a_{v_{m\acute{i}n}} = \frac{3.5bS}{f_v}$$

Sustituyendo:

$$a_{v_{m\acute{i}n}} = \frac{3.5 (25) (30)}{2240} = 1.17 [cm^2] < 1.42 [cm^2]$$

Se comparará con el área de acero de 1.42 [cm<sup>2</sup>] debido a que es la que le corresponden a las 2 ramas del # 3.

*Nota:*

Se toma la separación máxima, que sería la más desfavorable.

Contribución de los estribos:

Se tiene refuerzo vertical, de tal manera que se utiliza la siguiente expresión:

$$v' / u = \frac{a_v f_v d}{S}$$

Como son estribos del #3 de dos ramas:

$$a_v = 2 (0.71) = 1.42 [cm^2]$$

Entonces:

$$v' / u = \frac{(1.42) (2240) (60)}{S} = \frac{190848}{S}$$

Y se tienen separaciones de 10, 15 y 30 [cm]

	10 [cm]	15 [cm]	30 [cm]
V'u [Kg]	19,084.80	12,723.20	6, 361.60

Finalmente, la resistencia total a cortante de la sección es:

$$V_c = V_{CR} + V' u$$

	10 [cm]	15 [cm]	30 [cm]
V <sub>c</sub> [Kg]	25,198.90	18,837.30	12,475.70

Cabe mencionar que existen especificaciones del Reglamento de longitud de desarrollo, del doblado y cortado de varillas, de longitud de apoyo, etc.

Para elaborar el diagrama de resistencia a cortante considérese que la zona donde los estribos se encuentran a 10 [cm], el primer estribo se encuentra a 5 [cm] del paño de apoyo, siguiendo 10 espacios de 10 [cm], lo que da 100 [cm]. Suponiendo que la zona de influencia termina a la mitad de la distancia entre el último estribo con 10 [cm] y el primero con separación de 15 [cm], de los que se agregan 7.5 [cm]. Resultó entonces  $5 + 100 + 7.5 = 112.5$  [cm]. De manera análoga pueden determinarse las zonas de influencia de las demás separaciones.

Para separaciones de 15 [cm], es decir 7.5 que se tomó de los primeros 15 [cm] más 8 espacios de 15 [cm], es decir,  $7.5 + 120 = 127.5$  [cm].

Y para 30 [cm], son 4 espacios de 30 [cm], entonces son 120 [cm].

Finalmente el diagrama queda construido:  
(Siguiente página)

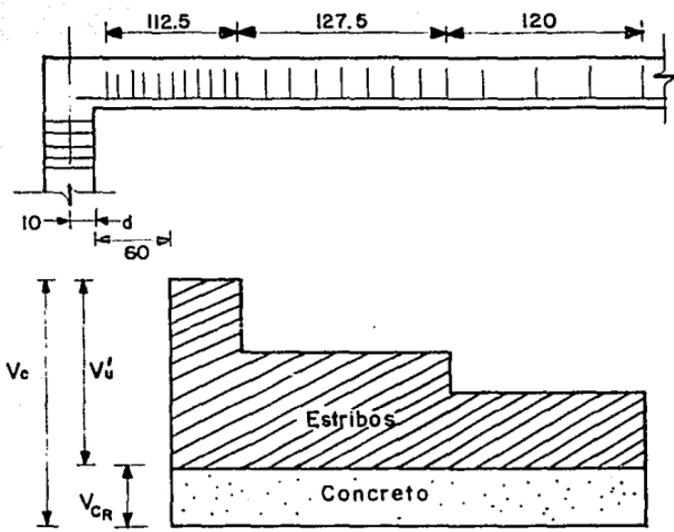


Figura 25

## DEFORMACIONES

### Significado de la presencia de deformaciones.

El método de análisis y diseño por esfuerzos de trabajo que se empleó antes de la década de 1970, limitaba el esfuerzo en el concreto al 45 % de su capacidad a compresión y los esfuerzos en el acero a menos del 50% de su resistencia de fluencia. En el diseño de los marcos estructurales y de sus secciones de concreto reforzado se aplicaba el análisis elástico y los elementos estructurales se proporcionaban para soportar el momento de la carga de servicio más alta a lo largo del claro del miembro. Por ello se obtenían secciones más pesadas y con mayor reserva de resistencia que las que se consiguen con el Método de resistencia última que se aplica actualmente.

En la actualidad se utilizan en el diseño por resistencia concretos con resistencias más altas que tienen valores de  $f_c$  por encima de 400 kg/cm<sup>2</sup>; esto y el conocimiento de las propiedades de los materiales han dado por resultado la aplicación de factores de carga menores y una reserva de resistencia más reducida. Por lo anterior se diseñan miembros más esbeltos y eficientes en los que las deflexiones constituyen un criterio de control más importante.

## COMPORTAMIENTO DE VIGAS SUJETAS A DEFORMACIONES

La relación carga-deflexión de una viga de concreto reforzado es básicamente trilineal, como se idealiza en la figura 26. Se compone de tres regiones previas a la ruptura:

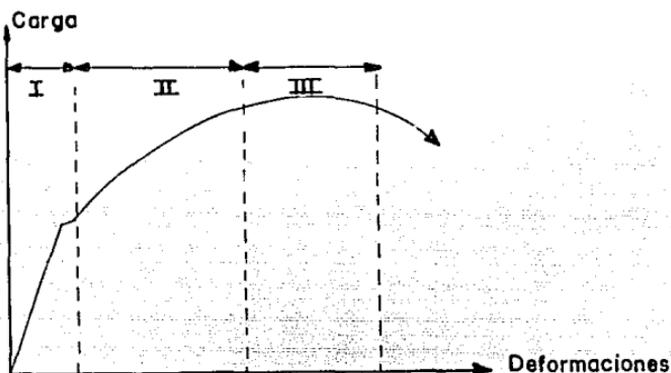


Figura 26.

### Región I

Es la etapa anterior al agrietamiento, en la que el miembro estructural está libre de grietas. El segmento de curva carga-deflexión anterior al agrietamiento, es esencialmente una línea recta que define un comportamiento totalmente elástico. El esfuerzo máximo de tensión de la viga en esta región es menor que su resistencia de tensión en flexión, esto es, menor que el módulo de ruptura del concreto. Se puede estimar la rigidez en flexión  $EI$  de la viga, utilizando el Módulo Young  $E_c$  del concreto y el momento de inercia de la sección transversal de concreto reforzado, sin agrietar. El comportamiento carga-deflexión es dependiente de la relación esfuerzo-deformación del concreto, como factor importante.

### Región II

Es una etapa posterior al agrietamiento, en la que el miembro estructural desarrolla grietas controladas y aceptables tanto por su distribución, como por su ancho. La mayoría de las vigas se encuentran en esta etapa, cuando están bajo cargas de servicio. Una viga tiene grados diversos de agrietamiento a lo largo de su claro, que corresponden con los niveles de esfuerzos y deflexión en cada sección; por lo tanto, las grietas son más anchas y profundas al centro del claro, en tanto que cerca de los apoyos de una viga simple sólo se desarrollan grietas estrechas.

### **Región III**

Es una etapa de agrietamiento posterior a las condiciones de servicio, donde el esfuerzo del refuerzo de tensión alcanza el estado límite de fluencia. Se considera que la viga ha fallado estructuralmente por la fluencia inicial del acero de tensión. Y por lo tanto se sigue deformando sin carga adicional, las grietas continúan ensanchándose y el eje neutro se sigue elevando hacia las fibras externas en compresión. Finalmente, se desarrolla una falla secundaria de compresión que conduce al aplastamiento total del concreto en la región de momento máximo, seguida por la ruptura.

## CALCULO DE DEFLEXIONES

La estimación de deflexiones de vigas de concreto reforzado presenta algunas dificultades. Generalmente las deflexiones se calculan suponiendo un comportamiento elástico, hipótesis de validez relativa aún bajo cargas no muy altas y de corta duración. La primera dificultad estriba en el valor del Módulo de Elasticidad que debe usarse. El Reglamento del Departamento del Distrito Federal, por ejemplo, propone dos valores extremos  $3000\sqrt{f_c}$  y  $8000\sqrt{f_c}$ , el primero, para calcular efectos de larga duración y el segundo, para efectos de corta duración. Otras incertidumbres se presentan en el valor del momento de inercia que debe utilizarse. Afectan a éste la distribución del acero a lo largo del miembro así como la distribución del agrietamiento.

Una forma usual de tratar el problema de deflexiones consiste en calcular la flecha bajo efectos de corta duración, usando un valor de Módulo de Elasticidad relativamente alto, por ejemplo el recomendado por RDDF NTC-87.

$$E_c = 8000\sqrt{f_c} < f_c = 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$E_c = 14000\sqrt{f_c} \geq f_c = 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{sup}2\text{]}$$

La expresión general de flecha inicial está dada como:

$$f = \frac{CWL^3}{E_c I}$$

Donde:

W = Carga total.

L = Claro.

I = Momento de inercia.

C = Coeficiente que depende del tipo de carga y de las condiciones de apoyo.

$E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto.

$f_c$  = Resistencia del concreto.

Para porcentajes bajos de acero se toma el valor del momento de inercia correspondiente a la sección total del concreto no agrietada, y sin considerar el refuerzo.

Para porcentajes altos se utiliza el momento de inercia de la sección transformada agrietada.

En vigas continuas se toma un valor promedio de los momentos de inercia en las regiones de momentos positivos y negativos.

Para estimar la deflexión adicional, también llamada flecha diferida, debida a la permanencia de la carga se multiplica la flecha inicial por un coeficiente que recomienda el RDDF NTC-87.

$$Flecha_{Final} = Flecha_{inicial} + Flecha_{diferida}$$

Donde:

$$Flecha_{diferida} = (\lambda) Flecha_{inicial}$$

Y:

$$\lambda = \frac{\zeta}{1 + 50p'}$$

Donde:

$$\zeta = 2 \quad 5 \text{ años}$$

$$\zeta = 1.4 \quad 12 \text{ meses}$$

$$\zeta = 1.2 \quad 6 \text{ meses}$$

$$\zeta = 1.0 \quad 3 \text{ meses}$$

Y la cuantía de acero en compresión:

$$p' = \frac{A's}{bd}$$

Las deflexiones calculadas se comparan con los valores que se consideran permisibles.

El Reglamento del Distrito Federal recomienda que no excedan el valor de las siguientes expresiones:

### Flechas permisibles:

#### Vigas

$$Flecha_{m\acute{a}xima} = 0.5 [cm] + \frac{L''}{500}$$

Donde:

$L''$  = Distancia entre puntos de inflexi3n.

#### Voladizos

$$Flecha_{m\acute{a}xima} = 0.5 [cm] + \frac{L}{250}$$

Donde:

$L$  = Longitud del voladizo.

Para aplicar la teorfa antes presentada, se propone el siguiente ejemplo; en el cual se desea calcular la deflexi3n de una viga rectangular.

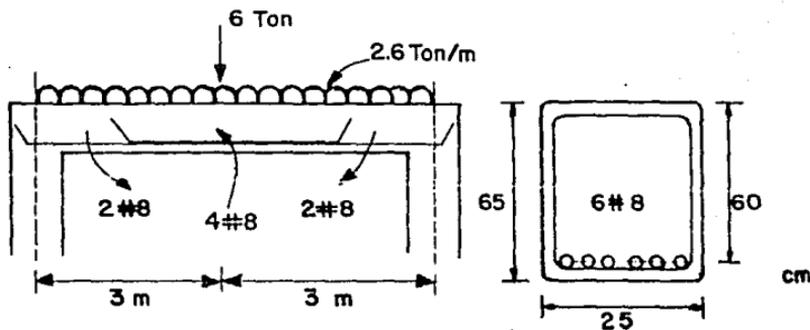


Figura 27.

Datos:

Concreto:  
 $f_c = 200$  [Kg/cm<sup>2</sup>]

Acero:

$$f_y = 4000 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

**SOLUCION:**

Cálculo de constantes y especificaciones:

Módulo de Elasticidad del Concreto:

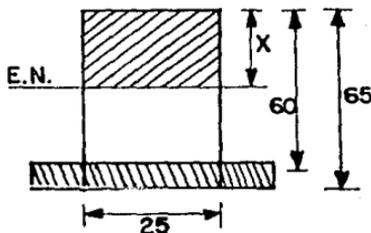
$$E_c = 8000\sqrt{200} = 113137 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Relación modular:

$$n = \frac{2.1 \times 10^6}{113137} = 18.56$$

Considerando que el porcentaje de acero de refuerzo es relativamente alto, se maneja como sección agrietada.

Momento de inercia de la sección transformada:



**Figura 28.**

Y:

$$nA_s = (18.56)(20.28) = 376.40 \text{ [cm}^2\text{]}$$

La profundidad del eje neutro:

$$\frac{bx^2}{2} - nA_s(d-x) = 0$$

Sustituyendo valores:

$$12.5x^2 - 376.4(60-x) = 0$$

$$12.5x^2 + 376.4x + 22584 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-376.4 \pm \sqrt{376.4^2 - 4(12.5)(-22584)}}{2(12.5)}$$

Entonces:

$$x_1 = 30.04 \text{ [cm]} \quad \text{O.K.}$$

$$x_2 = -60.15 \text{ [cm]}$$

Momento de inercia:

$$I = \frac{1}{3} (25)(30.04^3) + 376.4(60-30.04)^2 = 563758.44 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Cálculo de la flecha inmediata:

$$f_1 = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5wl^4}{384EI} = \frac{l^3}{E} \left( \frac{P}{48} + \frac{5wl}{384} \right)$$

$$f_1 = \frac{600^3}{(113137)(563758.44)} \left( \frac{6000}{48} + \frac{5(26)(600)}{384} \right) = 0.111 \text{ [cm]}$$

Cálculo de la flecha diferida:

Nota: No se cuenta con acero a compresión.

$$\lambda = \frac{2}{1+50(0)} = 2$$

$$f_2 = f_1(\lambda) = 0.111(2) = 0.222 \text{ [cm]}$$

Flecha total a largo plazo:

$$Flecha_{final} = f_1 + f_2 = 0.111 + 0.222 = 0.333 \text{ [cm]}$$

Y la flecha admisible para una viga:

$$f_{máxima} = 0.5 + \frac{600}{500} = 1.7 \text{ [cm]}$$

Entonces:

$$Flecha_{admisible} > Flecha_{final}$$

Por lo tanto la deflexión de la sección es aceptada, es decir no tiene problemas de deformaciones.

El dimensionamiento completo de vigas de concreto reforzado requiere la consideración de otros aspectos además del de resistencia adecuada a momento flexionante y fuerza cortante y la revisión de deflexiones. Debe de garantizarse el anclaje adecuado del refuerzo de manera que este pueda desarrollar su capacidad en todas las secciones de la viga, y procurar que las grietas potenciales se mantengan dentro de límites aceptables. Además debe detallarse el acero de flexión de manera que la cantidad de acero se ajuste lo más posible a las cantidades teóricas en distintas secciones; es decir deben interrumpirse o cortarse las varillas donde dejan de ser necesarias. Estos aspectos se tratan en cursos de concreto de otras asignaturas.

# **C A P I T U L O   I V**

## **L O S A S   D E   C O N C R E T O R E F O R Z A D O**

## CAPITULO IV

### CARACTERISTICAS GENERALES

Las losas son elementos estructurales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su peralte. Las acciones principales sobre las losas son cargas normales a su plano, ya que se usan para disponer de superficies útiles horizontales como los pisos de edificios o las cubiertas de puentes. En ocasiones, además de las cargas normales actúan cargas contenidas en su plano, como en el caso de las losas, en las que en la carga vertical tienen una componente paralela a la losa; o cuando la losa actúa como un diafragma horizontal que une marcos verticales de distinta rigidez o sujetos a fuerzas horizontales diferentes.

Las losas de piso son los elementos horizontales que transmiten cargas vivas de movimiento; así como las cargas muertas estacionarias a los apoyos verticales de los marcos de una estructura. Pueden ser losas sobre vigas, losas encasetonadas, losas sin vigas (losas planas), apoyándose directamente sobre las columnas, o losas compuestas sobre viguetas.

Esto motiva a la siguiente clasificación de losas:

#### LOSAS

a) Según sentido de armado:

En un sentido  
En dos sentidos

b) Según sus apoyos:

Sobre trabajo de muros  
Autosoportes

c) Según su continuidad:

Perimetrales  
En parche  
En esquina  
Tableros

d) Según su estructura interna:

Maciza  
Aligerada  
Encasetonada  
Fungiforme

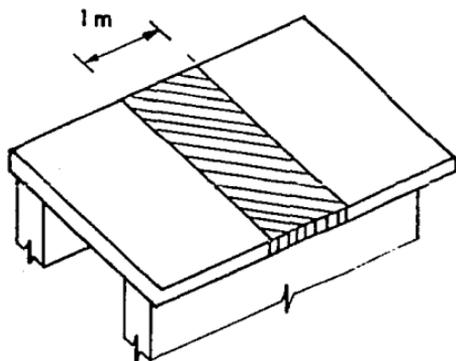
**El estudio de cada tipo de losa implica una serie de conocimientos que se conocen a través de las diversas asignaturas que se imparten del área, por lo cual sólo se tratarán los posibles por el programa.**

**Cabe mencionar que la clasificación está sujeta a combinaciones entre ellas.**

## COMPORTAMIENTO Y DISEÑO

### LOSAS ARMADAS EN UN SENTIDO

Las losas armadas en un sólo sentido son aquellas que tienen apoyo en dos lados opuestos, y se comportan como vigas, considerándose que la losa es una viga cuyo ancho es la longitud del apoyo, o bien, como se hace frecuente que la losa está formada por una serie de vigas e independientes de un metro de ancho, que se flexionan uniformemente. Esto permite que se verifique la flexión sólo en sentido perpendicular a los apoyos.



Franja de losa que trabaja como una viga de un metro de ancho

Figura 1.

El diseño de estas losas es en todo semejante al de las vigas rectangulares y se acostumbra, por sencillez, considerar para el análisis una franja de losa de 1 [m] de ancho. Se reduce entonces el diseño, al cálculo de una viga rectangular de 100 [cm] de ancho.

Las especificaciones que deben tenerse presentes en el cálculo de las losas armadas en un sentido, son las siguientes:

a) Se recomienda iniciar el diseño fijando un valor del peralte que garantice que no ocurran deflexiones excesivas, ya que esto es el factor que suele regir el diseño. Para ello puede usarse la Tabla 1, tomada del Reglamento del ACI 318-87, la cual proporciona espesores de losa con los que no exceden las deflexiones permisibles, o bien puede fijarse un espesor tentativo y calcular las deflexiones.

## PERALTE MÍNIMO, h

Elemento	Libremente apoyada	Un extremo continúo	Ambos extremos continúos	Voladizo
Losas macizas	L/20	L/24	L/28	L/10
Vigas y losas nervuradas	L/16	L/18.5	L/21	L/8

**Tabla 1.** Peraltes mínimos de vigas y losas que trabajan en una dirección cuando no se calculan las deflexiones y cuando las deformaciones que dichos elementos no perjudican a elementos estructurales.

**Nota:** Estos valores se aplican para concreto de peso normal y acero con límite de fluencia  $f_y = 4\,200$  [Kg/cm<sup>2</sup>]. Para otros valores de  $f_y$ , multiplíquense los valores de la tabla por el factor  $0.4 + 0.00014 f_y$ .  
El símbolo L representa el claro.

Según el Reglamento del ACI 318-87, cuando no se utilizan los coeficientes de la **Tabla 1** y se hace un análisis formal, el claro l, puede tomarse como claro libre siempre que no sea mayor de 3.05 [m] y que las losas se cuelen integralmente con los apoyos. Si no se cumplen estas condiciones, el claro será la distancia entre los ejes de apoyo, o bien, el claro libre más el peralte total de la losa, el valor que sea menor. Y el RDDF NTC-87 especifican, al igual que para las vigas, que el claro se cuente apartir del centro de los apoyos, excepto cuando el ancho de estos es mayor que el peralte efectivo; en este caso, el claro se cuenta a partir de la sección que se halla a medio peralte efectivo del paño interior de los apoyos.

b) Una vez determinado el espesor total de la losa se calcula el peralte efectivo; éste se calcula restando el recubrimiento del espesor. Por una parte el ACI 318-87 recomienda un recubrimiento libre de 2 [cm] para losas no expuestas a la intemperie o no colodas contra el suelo, como las zapatas de cimentación. Para el mismo caso el RDDF NTC-87 recomienda un 1 [cm] ó el diámetro de la varilla, el que sea mayor.

c) El cálculo de los momentos y las fuerzas cortantes puede realizarse después, considerando que la losa es una viga continua de un metro de ancho con carga uniforme. Puede utilizarse cualquier método de análisis elástico ó bien los coeficientes de momentos que se presentan en los manuales de diseño.

d) Ya habiendo determinado el peralte efectivo,  $d$ , y los momentos flexionantes, se calcula el refuerzo necesario con las ecuaciones de flexión de vigas ó por medio de gráficas. Generalmente, las losas son elementos sobreforzados, por lo que se pueden aplicar las ecuaciones correspondientes a este tipo de elementos previa comprobación de que las relaciones de refuerzo,  $p$ , resulten menores que la relación balanceada,  $p_b$ .

El refuerzo obtenido se coloca en dirección paralela a las franjas, o sea en la dirección del claro considerado.

En dirección perpendicular es necesario colocar también refuerzo para resistir los esfuerzos producidos por contracción del concreto y por cambios de temperatura, y por falta de uniformidad en la carga. Ya que la losa no puede acortarse libremente en dirección perpendicular al claro, se agritaría si no se colocará este último refuerzo. Tanto el refuerzo por flexión como el de contracción y cambios de temperatura, deben satisfacer ciertos requisitos de cuantía y separación que se mencionan a continuación:

El Reglamento ACI 318-87 establece que el refuerzo de flexión y para el de contracción y temperatura. Las relaciones,  $p$ , de estos refuerzos, deben ser por lo menos iguales a los valores señalados en la Tabla 2 y la separación entre barras no debe exceder de 45 [cm] ni de tres veces el espesor de la losa, par el refuerzo de flexión, ni cinco veces dicho espesor, para el refuerzo por contracción y temperatura.

Tipos de acero	$p_{min}$
Barras corrugadas con $f_y$ igual a 2800 ó 3500 [Kg/cm <sup>2</sup> ]	0.0020
Barras corrugas ó malla de alambre soldado corrugado ó liso con $f_y$ igual a 4200 [Kg/cm <sup>2</sup> ]	0.0018
Barras con $f_y$ mayor de 4200 [Kg/cm <sup>2</sup> ]	$0.0018 \times 4200/f_y$

**Tabla 2.** Relaciones de acero,  $p$ , para calcular el acero por contracción y temperatura según el Reglamento del ACI 318-87.

**Nota:** En ningún caso  $p$  debe ser menor de 0.0014.

El Reglamento en sus NTC-87 especifica que el refuerzo por flexión sea el mínimo recomendado para vigas, o sea:

$$A_{s_{\min}} = \frac{0.7\sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

El ancho  $b$  se considera de 100 [cm] y el área obtenida de esta manera es la necesaria para un metro de ancho.

La separación del refuerzo no debe ser superior a la especificada para el refuerzo por contracción y temperatura. Para este refuerzo el RDDF NTC-87 recomienda la misma área mínima que para otros elementos estructurales que tengan una dimensión de 1.5 [m]. La ecuación correspondiente para una franja de un metro de ancho es la siguiente:

$$A_{s_{\text{contr}}} = \frac{45000h}{f_y(h+100)}$$

Donde:

$h$  es el espesor de la losa.

El área que se obtiene con esta ecuación es también la necesaria para una franja de un metro de ancho y es aplicable a las losas no expuestas directamente a la intemperie. Si no se cumple con esta condición debe duplicarse el valor calculado. La separación entre barras no debe exceder de 50 [cm] ni de 3.5 $h$ .

Además, el RDDF NTC-87 permite calcular el refuerzo por contracción y temperatura en forma simplificada usando una relación de refuerzo,  $\rho$ , de 0.002 para losas no expuestas a la intemperie y de 0.004 para el caso de que si lo estén.

Por otra parte, el dimensionamiento de las losas es frecuente que se calcule primero el área de acero de refuerzo por metro de ancho de losa, después elegir el diámetro de la barra, y por último, se calcula la separación entre barras, utilizando la siguiente expresión:

$$S = \frac{100A_b}{A_s}$$

Donde:

$S$  = Separación entre barras.

$A_b$  = Área de cada barra.

$A_s$  = Área por metro de ancho de losa.

El refuerzo utilizado para estos elementos tiene igual importancia que en las vigas, por tal motivo es recomendable acudir a las especificaciones correspondientes, ya sea a detallar el acero de refuerzo a flexión, longitudes de desarrollo, dobleces, cortes de barras, acero por contracción y temperatura, etc.

Aunque en la práctica se conocen detalles típicos del refuerzo de losas, cabe mencionar que no todos los casos son iguales y que se recomienda aplicar las especificaciones para cada caso en particular.

### REVISION POR CORTANTE

En este tipo de losas la fuerza cortante no es un factor importante. No obstante debe revisarse, aplicando las especificaciones descritas para elementos de concreto, como se planteó en el capítulo de vigas.

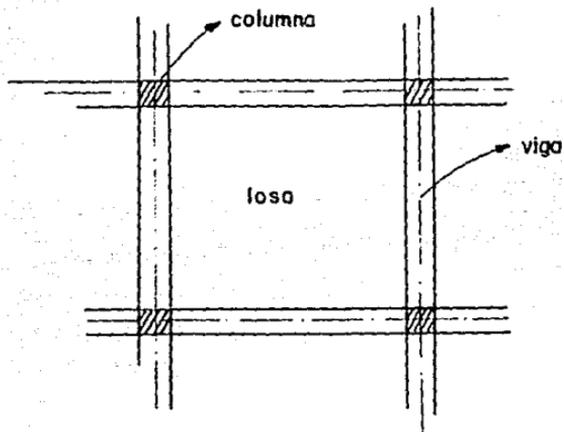
Entonces, es válido revisarla, tomando en cuenta el valor último de esta fuerza  $V_u$ , sea menor que el valor de la fuerza cortante de diseño, que puede resistir el concreto sin refuerzo por cortante.

En el caso de que la sección de concreto no pueda resistir la fuerza cortante, debe aumentarse dicha sección; ya que por razones constructivas no es posible usar refuerzo por cortante en estas losas.

En general, el diseño y revisión de losas armadas en un sentido se resume en cumplir las especificaciones señaladas.

## LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE

Las losas apoyadas perimetralmente son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros en cuatro lados, y que por lo tanto trabajan en dos direcciones.



Losa apoyada perimetralmente

Figura 2

La diferencia entre losas que trabajan en una dirección y losas apoyadas perimetralmente, puede verse también en la forma que adquieren las losas cuando se deflexionan bajo la acción de cargas normales a su plano:

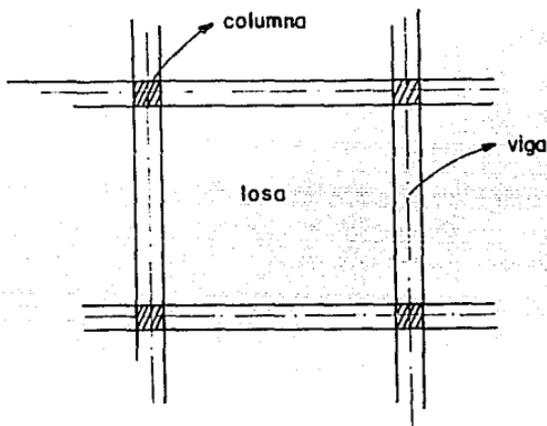
- a) Las primeras se deforman en curvatura simple
- b) y las segundas se deforman en curvatura doble.

Las losas apoyadas perimetralmente, tienen una característica estructural importante en sus apoyos, y es que su rigidez a flexión es mucho mayor que la rigidez a flexión de la propia losa. Estas forman parte, comúnmente, de sistemas estructurales integrados por columnas, vigas y losas. Su comportamiento no puede estudiarse rigurosamente en forma aislada sino que debe analizarse todo el sistema, ya que las características de cada elemento influyen en el comportamiento de los otros.

Por simplicidad, comodidad y alcance de los conocimientos es este trabajo; se tratarán las losas perimetrales como elementos aislados.

## LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE

Las losas apoyadas perimetralmente son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros en cuatro lados, y que por lo tanto trabajan en dos direcciones.



Losa apoyada perimetralmente

Figura 2

La diferencia entre losas que trabajan en una dirección y losas apoyadas perimetralmente, puede verse también en la forma que adquieren las losas cuando se deflexionan bajo la acción de cargas normales a su plano:

- a) Las primeras se deforman en curvatura simple
- b) y las segundas se deforman en curvatura doble.

Las losas apoyadas perimetralmente, tienen una característica estructural importante en sus apoyos, y es que su rigidez a flexión es mucho mayor que la rigidez a flexión de la propia losa. Estas forman parte, comúnmente, de sistemas estructurales integrados por columnas, vigas y losas. Su comportamiento no puede estudiarse rigurosamente en forma aislada sino que debe analizarse todo el sistema, ya que las características de cada elemento influyen en el comportamiento de los otros.

Por simplicidad, comodidad y alcance de los conocimientos es este trabajo; se tratarán las losas perimetrales como elementos aislados.

El método de análisis de losas empleados en la práctica consiste en el uso de Tablas de Coeficientes de Momentos, obtenidas mediante alguno de los métodos experimentales y prácticos, basado en uno desarrollado originalmente por Sless y Newmark.

Con respecto a este tipo de losas el RDDDF NTC-87 señala que puede aplicarse el método, sólo si se satisface lo siguiente:

- a) Los tableros son aproximadamente rectangulares.
- b) La distribución de las cargas que actúan sobre la losa es aproximadamente uniforme en cada tablero.
- c) Los momentos negativos en el apoyo común de dos tableros adyacentes no difieren entre sí en más de 50% del menor de ellos.
- d) La relación de carga viva a carga muerta no es mayor a 2.5 para losas coladas monolíticamente con sus apoyos, ni mayor de 1.5 en otros casos.

El dimensionamiento de losas por este método, está regido principalmente por la obtención de los momentos flexionantes utilizando los coeficientes que se presentan en la TABLA 4.1 del RDDDF NTC-87. Los momentos así obtenidos son momentos por unidad de ancho.

Después se calculan el peralte y el porcentaje de acero de refuerzo utilizando las fórmulas de flexión, como si fueran vigas de un ancho unitario.

Refiriéndose a la Tabla 4.1 ya mencionada se observa en ella que se incluyen coeficientes para losas construidas monolíticamente con las vigas de apoyo y para losas no coladas monolíticamente, (losas apoyadas sobre vigas de acero). Esto se debe a que, en el primer caso, las vigas proporcionan una cierta restricción a la losa contra el giro, mientras que en el segundo caso la losa puede girar libremente.

Sabiendo también, que los momentos determinados con esta Tabla 4.1 corresponden a franjas centrales y que si se requieren coeficientes para franjas extremas sólo basta tomar los valores de la tabla y multiplicarlos por 0.60.

El RDDDF NTC-87 señala que hay la posibilidad de que los momentos en un borde común a dos tableros adyacentes resulten distintos en cada tablero. Entonces, se deben distribuir las dos terceras partes del momento de desequilibrio entre los tableros adyacentes, si éstos son monolíticos con sus apoyos, o la totalidad si no lo son. Para la distribución debe suponerse que la rigidez del tablero es proporcional a:

$$\frac{d^3}{a_1}$$

Donde:

d = Diámetro de acero.

a<sub>1</sub> = Claro corto de la losa.

Las losas que se dimensionan con los coeficientes, además deben considerarse divididas, en cada dirección, en dos franjas de borde y una central. La determinación de los anchos de las franjas señalados en las las NTC-87 son las siguientes:

1) Para relaciones de claro corto a claro largo mayores que 0.5, las franjas centrales tienen un ancho igual a la mitad del claro perpendicular a ellas, y cada franja extrema tienen un ancho igual al cuarta parte del mismo.

2) Para relaciones menores que 0.5, la franja central perpendicular al lado largo tiene un ancho igual a a<sub>1</sub> - a<sub>2</sub>, y cada franja extrema, igual a a<sub>1</sub> / 2, donde a<sub>1</sub> es el claro corto y a<sub>2</sub> el claro largo.

Cabe mencionar que, para valores intermedios de la relación, m, entre el claro corto, a<sub>1</sub>, y el claro largo, a<sub>2</sub>, se interpolará linealmente.

Cuando las losas no cumplen estas limitaciones, es necesario aplicar otros procedimientos u otros métodos.

### PERALTE MINIMO

En cuanto al peralte mínimo el RDDF NTC-87 incluye las siguientes disposiciones. Respecto al peralte, señala que el cálculo de deflexiones puede omitirse si el peralte efectivo de la losa es por lo menos igual al perímetro del tablero dividido entre 300. Para calcular este perímetro, los lados discontinuos deben incrementarse en 50% si los apoyos de la losa no son monolíticos con ella, y 25%, si lo son. En las losas alargadas no es necesario tomar un peralte mayor que el corresponde a un tablero con a<sub>1</sub> = 2a<sub>2</sub>. Estas disposiciones son aplicables a las losas en que:

$$f_s \leq 2000 [Kg/cm^2]$$

Y:

$$w \leq 380 [Kg/m^2]$$

Donde:

$f_s$  = Esfuerzo en el acero en condiciones de servicio [Kg/cm<sup>2</sup>]

Puede tomarse,  $f_s = 0.6 f_y$ .

$w$  = Carga en condiciones de servicio, [Kg/m<sup>2</sup>]

Para otras combinaciones de  $f_s$  y  $w$ , el peralte efectivo mínimo se obtendrá con el valor obtenido anteriormente multiplicado por:

$$0.034 (f_s w)^{\frac{1}{4}}$$

### ACERO MINIMO

Con respecto al acero mínimo, se utiliza la misma expresión que para losas en una dirección:

$$A_s = \frac{45000h}{f_y(h+100)}$$

Donde:

$A_s$  = Área mínima por metro de ancho de la losa.

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero.

$h$  = Peralte total de la losa.

El área obtenida debe duplicarse si la losa está a la intemperie.

Y por simplicidad puede establecer que el porcentaje mínimo de acero es:

1. Losas protegidas a la intemperie.  $p_{\min} = 0.002$

2. Losas expuestas a la intemperie.  $p_{\min} = 0.004$

Ademas, la separación entre barras no debe exceder de 50 [cm] ni de 3.5 h, excepto en la proximidad de cargas concentradas superiores a una tonelada máxima será de 2.5 d, donde d es el peralte efectivo.

## FUERZA CORTANTE

En la mayoría de los casos, el dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente está regido por efectos de momentos flexionantes. Sin embargo, es necesario revisar contra fuerza cortante, por seguridad. Para estos fines, la fuerza cortante que actúa en un ancho unitario puede calcularse:

$$V_u = \left( \frac{a_1}{2} - d \right) \frac{w}{\left[ 1 + \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^6 \right]}$$

Donde el numerador del segundo miembro proporciona la fuerza cortante a un peralte del paño, sección crítica, sin considerar la acción de la losa en dos direcciones, y el denominador es una corrección para tomar en cuenta esta acción.

Cuando en un tablero existan bordes continuos y bordes discontinuos, el valor de  $V_u$  obtenido con la expresión anterior debe incrementarse en 15%.

Y la resistencia de la losa a fuerza cortante se supondrá igual a la de una viga sin refuerzo en el alma:

$$V_R = 0.5 F_R b d \sqrt{f'_c}$$

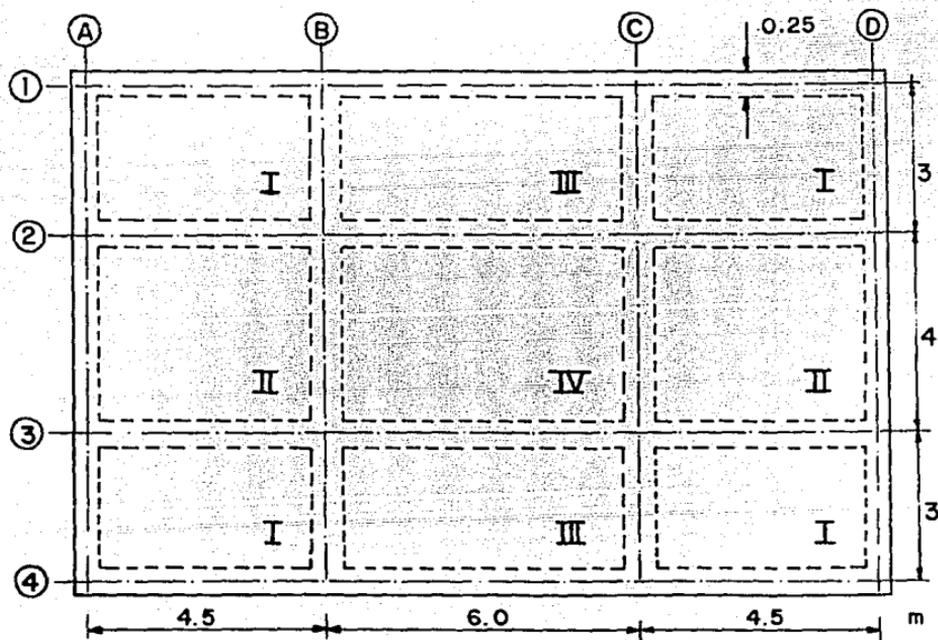
Cuando se tienen casos en que las losas apoyadas perimetralmente tengan que soportar cargas lineales y concentradas y cargas en las vigas de apoyo, se recomienda recurrir a las especificaciones correspondientes que señala el RDDF NTC-87.

Para ejemplificar como se ha hecho en cada sección, se presenta el diseño de una losa perimetralmente apoyada, bajo carga uniforme:

**Datos:**

Carga viva, C.V =	700 [Kg/cm <sup>2</sup> ]
Acabado del piso =	80 [Kg/m <sup>2</sup> ]
Peso volumétrico del concreto =	2.4 [Ton/m <sup>3</sup> ]
Factor de carga =	1.4

**Nota:** Todos los apoyos son monolíticos con la losa y tienen 25 [cm] de ancho.  
La losa no está expuesta a la intemperie.



**SOLUCION:**

Materiales:

Concreto:

$$f_c = 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Acero:

$$f_y = 4200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Constantes:

$$f^*c = 0.8 f'c = 0.8 (200) = 160 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

Por ser:

$$f^*c < 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f''c = 0.85 f^*c = 0.85 (160) = 136 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Y por esta ocasión el porcentaje de acero máximo se tomará como el porcentaje de acero balanceado; es decir:

$$P_{m\acute{a}x} = P_b = \frac{f''c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000}$$

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{136}{4200} \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.0152$$

**Estimaciones preliminares:**

Suponiendo una losa de 11 [cm], entonces el peso de la losa está dado como:

$$w_{losa} = 0.11 (2.4) = 0.264 \text{ [Ton/m}^2\text{]}$$

El acabado más 0.02 [Ton] de carga muerta adicional:

$$w_{acab} = 0.100 \text{ [Ton/m}^2\text{]}$$

La carga muerta, C.M, es la suma del peso de la losa más acabados:

$$\text{carga muerta} = 0.364 [\text{Ton}/\text{m}^2]$$

Y la carga viva, C.V, se considerará como:

$$\text{carga viva} = 0.700 [\text{Kg}/\text{m}^2]$$

Entonces la carga de servicio, w, es la suma de C.M + C.V:

$$\text{carga de servicio} = 1.064 [\text{Ton}/\text{m}^2]$$

Finalmente, la carga de diseño,  $w_u$ :

$$w_u = F.C w = 1.4 (1.064) = 1.490 [\text{Ton}/\text{m}^2]$$

**Estimación del peralte:**

Peralte efectivo mínimo, del tablero más desfavorable (Tablero IV):

$$d = \frac{2(375+575)}{300} = 6.33 [\text{cm}]$$

Si:

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 (4200) = 2520 [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

Entonces:

$$2520 [\text{Kg}/\text{cm}^2] > 2000 [\text{Kg}/\text{cm}^2]$$

Y:

$$w = 1064 [\text{Kg}/\text{cm}^2] > 380 [\text{kg}/\text{cm}^2]$$

El peralte mínimo se calcula:

$$d_{mín} = 6.33 (0.034) [(2520) (1064)]^{\frac{1}{4}} = 8.71 [\text{cm}]$$

Si se supone:

$$\text{recubrimiento}=2.0[\text{cm}]$$

Por lo tanto el peralte total:

$$h=10.71[\text{cm}]$$

Considerando:

$$h=11[\text{cm}]$$

**Revisión por flexión del peralte propuesto:**

Se debe cumplir:

$$P \leq P_{m\acute{a}x}$$

Se revisará con el momento negativo en el claro corto del tablero IV:

$$m = \frac{a_1}{a_2} = \frac{3.75}{5.75} = 0.652$$

De la Tabla 4.1 del RDDF NTC-87 se obtiene, interpolando linealmente:

$$K=0.0459$$

Entonces, el momento flexionante último:

$$M_u = K w_u a_1^2$$

Sustituyendo:

$$M_u = 0.0459 (1.49) (3.75^2) = 0.962 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Cálculo del porcentaje de acero  $p$ , de las ayudas de diseño presentadas en el  
APENDICE:

$$\frac{M_R}{bd^2} = \frac{96200}{100(7^2)} = 19.63$$

De gráficas se obtiene:

$$p = 0.0057 < p_{m\acute{a}x} = 0.0152$$

Además, suponiendo:

$$d = h - r - 2 [cm] = 11 - 2 - 2 = 7 [cm]$$

Por lo tanto el peralte supuesto es aceptado por flexión.

**Revisión por fuerza cortante del peralte propuesto:**

La fuerza cortante máxima ocurre, en este caso, en el claro corto del tablero IV:

$$V_u = \frac{(0.5a_1 - d)w_u}{1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^6}$$

Sustituyendo:

$$V_u = \frac{[(0.5)(3.75) - 0.07]1490}{1 + \left(\frac{3.75}{5.75}\right)^6} = 2497 [Kg]$$

La resistencia de diseño está dada:

$$V_{CR} = 0.5F_R b d \sqrt{f'c}$$

Sustituyendo:

$$V_{CR} = 0.5(0.8)(100)(7)\sqrt{160} = 3542 [Kg]$$

Como:

$$V_u < V_{CR}$$

Por lo tanto el peralte supuesto es aceptado por fuerza cortante.

**Análisis y dimensionamiento por flexión**

Como se comentó en teoría, el análisis se referirá a una franja de un metro de ancho.

**Peraltes efectivos:**

Para el refuerzo positivo:

$$d = h - r = 11 - 2 = 9 \text{ [cm]}$$

Para el refuerzo negativo:

$$d = h - r - 2 = 11 - 2 - 2 = 7 \text{ [cm]}$$

Refuerzo mínimo (por cambios volumétricos)

$$a_{sm} = \frac{450x_1}{f_y(x_1 + 100)}$$

Sustituyendo:

$$a_{sm} = \frac{450(11)}{4200(11 + 100)} = 0.01062 \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}} \right]$$

En un ancho de 100 [cm], el área de acero mínima es:

$$A_{s_{\text{mín}}} = 0.01062(100) = 1.062 \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right]$$

Y si se toman barras del # 2.5, a est área le corresponde una separación de:

$$s = \frac{100a_s}{A_s}$$

Sustituyendo:

$$s = \frac{100(0.49)}{1.062} = 46.14 \text{ [cm]}$$

Y la separación máxima:

$$s_{m\acute{a}x} = 3.5h = 3.5(11) = 38.5 \text{ [cm]}$$

$$s_{m\acute{a}x} = 50 \text{ [cm]}$$

Por lo tanto se usará una separación de 38 [cm].

Ahora calculando los valores de:

$$w_u a_1^2 \left[ \frac{T_{on}}{m^2} \right]$$

Y de:

$$\frac{a_1}{a_2}$$

**Nota:**

Se presentan en la siguiente tabla:

Tablero	I	II	III	IV
Tipo	De esquina	De borde, de un lado discontinuo	De borde, un lado discontinuo	Interior
$a_1$ [m]	2.75	3.75	2.75	3.75
$w_u a_1$	11.27	20.95	11.27	20.95
$a_1/a_2$	0.647	0.882	0.478	0.652

Haciendo lo mismo para cada uno de los tableros:

**Nota:**

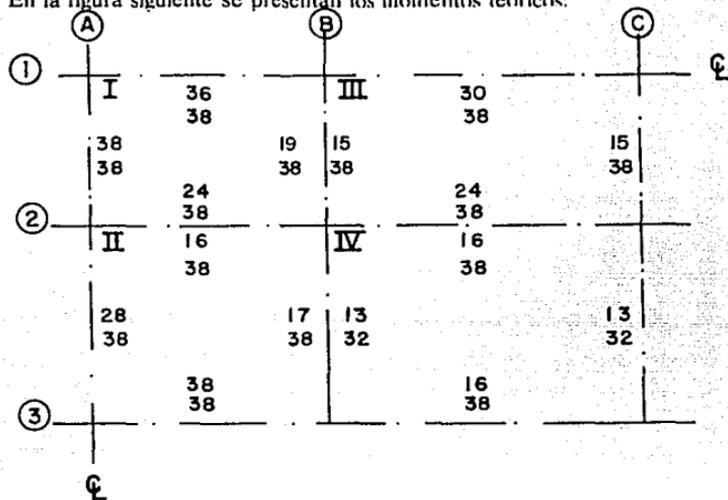
En la siguiente tabla se presentan los momentos y separación de varillas:

**TABLA DE MOMENTOS Y SEPARACION DE VARILLAS**

Tablero	Momento	Claro	Coefficiente K	$M_u$ [Ton·m]	Momento ajustado	s cm
I	Neg.bor. int.	corto	0.0502	0.5656	0.6421	19
		largo	0.0443	0.4992		24
	Neg.bor disc.	corto	0.0300	0.3380	0.5094	36
		largo	0.0242	0.2727		38
	Positiv	corto	0.0284	0.3200		38
		largo	0.0144	0.1623		38
II	Neg.bor inter.	corto	0.0365	0.7647	0.7085	17
		largo	0.0330	0.6914		16
	Neg.bor disc.	largo	0.0209	0.4378	0.7270	28
	Positiv	corto	0.0173	0.3624		38
		largo	0.0129	0.2703		38
III	Neg.bor inter.	corto	0.0604	0.6806	0.7886	15
		largo	0.0470	0.5297		24
	Neg.bor disc.	corto	0.0375	0.4226	0.5195	30
		corto	0.0352			
	Positiv	largo	0.0149	0.3966		38
				0.1679		38
IV	Neg.bor inter.	corto	0.0459	0.9616	0.8823	13
		largo	0.0381	0.7982		16
	Positiv	corto	0.0247	0.5175	0.7626	32
		largo	0.0132	0.2765		38

### Ajuste de momentos:

En la figura siguiente se presentan los momentos teóricos:



Del I: 36 - Momento negativo  
38 - Momento positivo

### DISTRIBUCION DE MOMENTOS

Rígidez de tableros	$d^3 / a_1$	
Tablero I	$9^3 / 275$	2.650
Tablero II	$9^3 / 375$	1.944
Tablero III	$9^3 / 275$	2.650
Tablero IV	$9^3 / 375$	1.944

Distribución entre los Tableros I y II:

El momento de desequilibrio es:

$$M_{desq} = 0.7647 - 0.5656 = 0.1991 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Y el momento a distribuir:

$$M_{dist} = \frac{2}{3} (0.1991) = 0.1327 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Tablero	Rígidez	Factor
II	1.944	0.50
I	1.944	0.50
SUMA	3.888	1.00

#### DISTRIBUCION

I	II
-0.5656	+0.7647
-0.0765	-0.0562
-0.6421	+0.7085

Distribución en los Tableros II y IV:

El momento de desequilibrio:

$$M_{desq} = 0.7982 - 0.6914 = 0.1068 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Y el momento a distribuir:

$$M_{dist} = \frac{2}{3} (0.1068) = 0.0712 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Tablero	Rígidez	Factor
II	1.944	0.50
IV	1.944	0.50
SUMA	3.888	1.00

### DISTRIBUCION

II	IV
-0.6914	+0.7982
-0.0356	-0.0356
-0.7270	+0.7626

Distribución entre los tableros III y IV:

El momento de desequilibrio:

$$M_{desq} = 0.9616 - 0.6806 = 0.2810 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Y el momento a distribuir:

$$M_{distrib} = \frac{2}{3} (0.2810) = 0.1873 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Tablero	Rfidez	Factor
III	2.650	0.5768
IV	1.944	0.4232
SUMA	4.594	1.0000

### DISTRIBUCION

III	IV
-0.6806	+0.9616
-0.1080	-0.0793
-0.07886	+0.8823

Distribución entre los Tableros I y III:

El momento de desequilibrio:

$$M_{desq} = 0.5297 - 0.4992 = 0.0305 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Y el momento a distribuir:

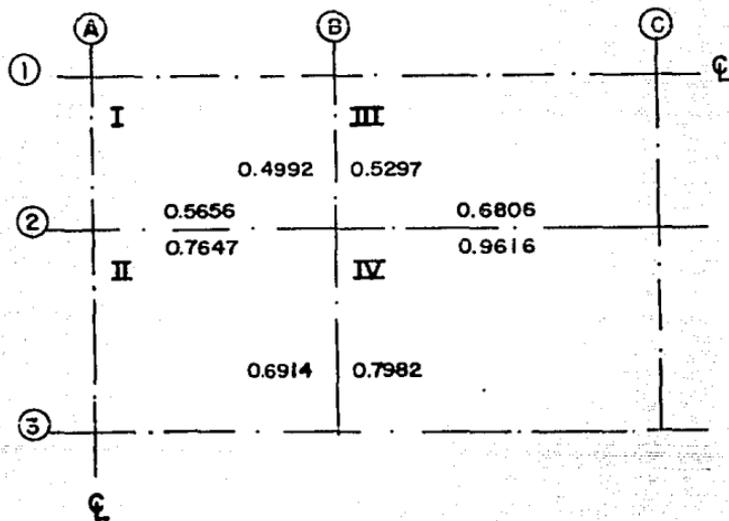
$$M_{dist} = \frac{2}{3} (0.0305) = 0.0203 \text{ [Ton} \cdot \text{m]}$$

Tablero	Rfidez	Factor
I	2.650	0.500
III	2.650	0.500
SUMA	5.300	1.000

## DISTRIBUCION

I	III
-0.4992	+0.5297
-0.0102	-0.0102
-0.5094	+0.5195

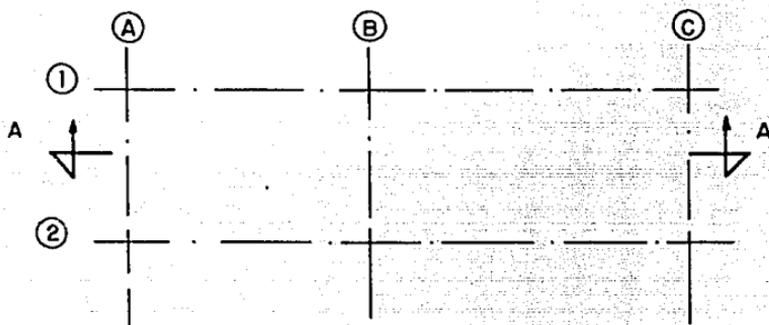
A continuación se presentan las separaciones teóricas, en [cm], tomadas de la tabla:



### El refuerzo en franjas extremas:

Se usará el 60% del acero requerido en las franjas centrales respetando las especificaciones de acero mínimo y separaciones máximas.

### PLANTA DE LOCALIZACION DEL CORTE

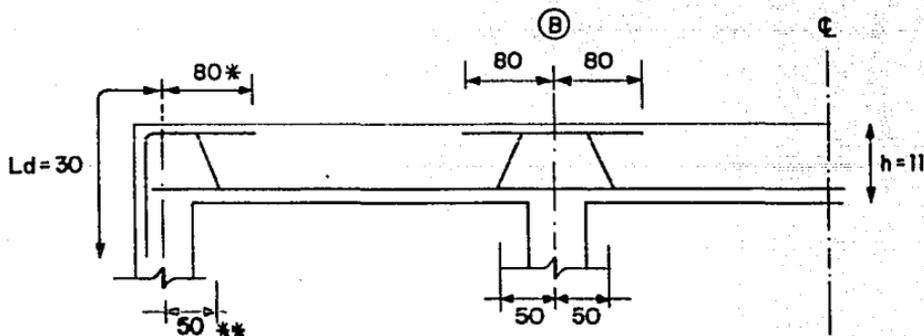


**Nota:**

Se usan barras del # 2.5

$f_y = 4\,200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$

Dimensiones en [cm]



Donde:

$$* \frac{25}{2} + \frac{a_1}{5} + d = 12.5 + \frac{275}{5} + 9 = 76.5 \text{ [cm]}$$

Se toman 80 [cm]

$$** \frac{25}{2} + \frac{a_1}{6} - d = 12.5 + \frac{275}{6} - 9 = 49.3 \text{ [cm]}$$

Se toman 50 [cm]

De está manera queda diseñada la losa en el corte mostrado.

Y se recomienda que se haga lo mismo para otros cortes, de tal manera que quede definido totalmente el diseño de la losa perimetralmente apoyada mostrada al inicio del ejercicio.

## DESCRIPCION GENERAL DE LAS ZAPATAS

El desarrollo de esta sección incluye tipo de cimentaciones para muros y columnas, que son las más sencillas y posibles de ser tratadas.

Una zapata es una ampliación de la base de una columna, de una viga o un muro, ejecutada con el fin de que las cargas que soportan sean transmitidas adecuadamente al terreno.

Cabe mencionar que existen seis tipos de estructuras de cimentación, y a continuación se describen cada una en forma general:

a) *Zapatas de muros.*

Estas zapatas consisten en una franja continua de losa, a lo largo del muro y de un ancho mayor que el espesor del mismo. La proyección de la losa de cimentación se trata como voladizo cargado con la presión distribuida del suelo. La longitud de la proyección, se determina con la capacidad de resistencia del suelo; la sección crítica por flexión se encuentra en el paño del muro. El refuerzo principal se distribuye perpendicularmente a la dirección del muro.

b) *Zapatas aisladas e independientes, para columnas.*

Consisten en losas rectangulares ó cuadradas, que pueden tener un espesor constante o que se reduce en la punta del voladizo. Se refuerzan en las dos direcciones y son económicas para cargas relativamente pequeñas o para cimentaciones sobre roca.

c) *Zapatas combinadas.*

Estas zapatas soportan las descargas de dos o más columnas. Son necesarias cuando se debe colocar una columna en la colindancia de un edificio y la losa de la zapata no se puede proyectar fuera de la colindancia. En este caso, una zapata independiente tendría carga excéntrica, dando lugar a una tensión aparente en el suelo de desplante.

Con el objeto de lograr una distribución relativamente uniforme de esfuerzos, la zapata de la columna exterior se puede combinar con la de columna interior más cercana. Por otra parte, las zapatas combinadas también se utilizan cuando las distancias entre columnas sucesivas son relativamente cortas, como en el caso de un corredor de columnas, pues es más barato construir zapatas combinadas para las columnas.

d) *Zapatas en voladizo o ligadas.*

Estas son similares a las zapatas combinadas, excepto que la zapata de la columna exterior y de la columna interior se construyen independientemente. Están unidas con una viga de liga para transmitir el efecto del momento flexionante, el cual se produce en la columna exterior debido a la excentricidad de la carga, a la cimentación de la columna interior.

**e) *Cimentaciones en pilotes.***

Este tipo de cimentaciones son esenciales cuando el suelo de desplante consiste de estratos poco resistentes muy profundos. Los pilotes se pueden hincar hasta roca sólida o un estrato duro, o a la profundidad necesaria dentro del suelo, para que la pila desarrolle su capacidad permisible por medio de la resistencia de fricción o una combinación de ambos. Los pilotes pueden ser prefabricados y por lo tanto se hincan en el suelo, o colados en el lugar haciendo una perforación que después se rellena concreto. Los pilotes prefabricados pueden ser de concreto reforzado o presforzado. Otros tipos de pilotes se fabrican de acero o de mampostería. En todos los tipos, los pilotes deben contar con cabezas de concreto reforzado en las dos direcciones, diseñadas apropiadamente.

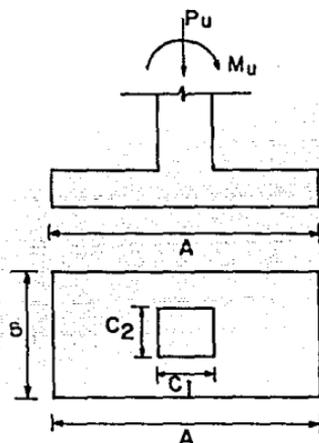
**f) *Cimentaciones flotantes o losas de cimentación.***

Estos sistemas de cimentación son necesarios cuando la capacidad de resistencia permisible del suelo es muy baja hasta profundidades grandes, lo cual hace que las cimentaciones con pilotes no sean económicas. En este caso es necesario hacer una excavación lo suficientemente profunda, para que la cantidad del suelo que se remueve sea casi equivalente a la carga de la superestructura. Puesto que es necesario extender la subestructura de la cimentación a toda el área del edificio, se considera que la superestructura flota teóricamente en una balsa. Estas estructuras, son básicamente sistemas de pisos invertidos se requieren en suelos que se están consolidando en forma continúa.

## CIMENTACIONES SUPERFICIALES

### Zapatas cuadradas o rectangulares

Cuando se tiene una zapata sujeta a fuerza axial y momento flexionante como la mostrada en la figura siguiente:



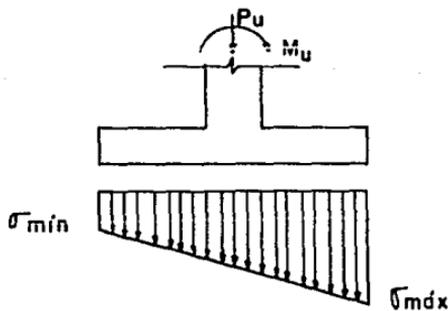
Donde:

$A$  = Largo total de la zapata.

$B$  = Ancho total de la zapata.

$c_1, c_2$  = Lado de la columna.

Los esfuerzos que se presentan serán de la siguiente forma:



Cabe mencionar que se presentarán los esfuerzos mostrados, siempre y cuando la excentricidad éste dentro del tercio medio del largo de la zapata.

Donde la excentricidad se calcula:

$$e = \frac{M_u}{P_u}$$

El comienzo de un predimensionamiento, se puede empezar calculando una área de la zapata, con la siguiente expresión:

$$A_z = \frac{P_u}{q_n}$$

Donde:

$A_z$  = Área de la zapata.

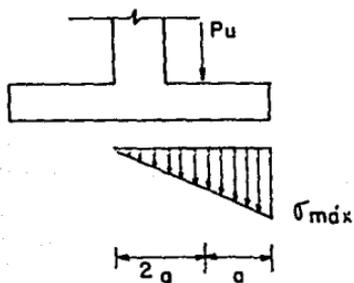
$P_u$  = Carga axial última.

$q_n$  = Capacidad neta del terreno.

*Nota:* Los valores últimos de las cargas se obtienen al multiplicarlas por sus factores de cargas correspondientes.

Para que la zapata trabaje bien debe cumplirse que la carga este colocada a un máximo de excentricidad de un tercio medio del largo de la zapata.

De tal manera:



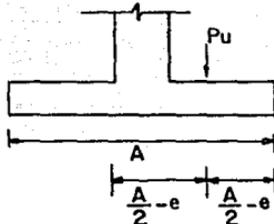
Donde:

$$P_u = \frac{3a \cdot \sigma_{m\acute{a}x}}{3} B$$

Despejando el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{2P_u}{3aB}$$

Cuando se cumple con lo mostrado en la figura:



El dimensionamiento de la zapata puede calcularse de la siguiente forma; con apoyo de la expresi3n antes mencionada, y con las condiciones siguientes lo cual facilita el prediseño de la zapata:

Donde:

$$A_x = 2 \left( \frac{a}{2} - e \right) B = \frac{P_u}{q_n}$$

Considerando que se desea una zapata cuadrada, entonces despejando de la ecuaci3n anterior el largo total de zapata, A:

$$A = e + \sqrt{e^2 + \frac{P_u}{q_n}}$$

Donde:

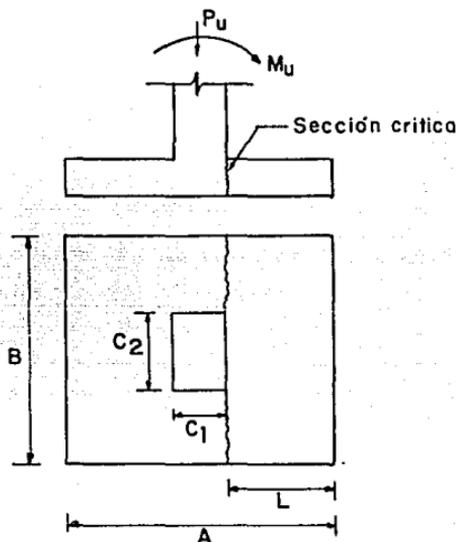
- A=B** = Largo total de la zapata.
- e** = Excentricidad de la carga.
- P<sub>u</sub>** = Carga axial última.
- q<sub>n</sub>** = Capacidad neta del terreno.

En un elemento como la zapata es muy importante que se revisen las siguientes tres condiciones:

- a) Revisión por flexión
- b) Revisión por penetración.
- c) Revisión por cortante.

## REVISION POR FLEXION

Al tener una zapata sujeta a flexocompresión como la mostrada en la figura, donde se señala la sección crítica cuando actúa el momento flexionante:



De tal manera que se define el momento flexionante último con la siguiente expresión:

$$M_u = \left[ \frac{A}{2} - \frac{c}{2} \right] B q_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{c}{2} \right) \right]$$

Donde, la capacidad neta del terreno se calcula como:

$$q_n = q_{admisibles} - [w_{pp_{satis}} + w_{relleno}]$$

Haciendo  $A=B$ , el momento flexionante que se presenta en la sección crítica:

Si la columna también es cuadrada:

$$M_{u_{net}} = \frac{1}{8} (A-c)^2 A q_n$$

Y si la columna es rectangular:

$$M_{u_{lim}} = \frac{1}{8} (A-c_1) (A-c_2) A q_n$$

El dimensionamiento ó diseño de una zapata al igual que de cualquier elemento estructural consiste en proponer ciertas dimensiones y revisarlas hasta que cumplan con las especificaciones especificadas para cada caso.

De tal manera que de entrada se propone un peralte de la sección  $d$ .

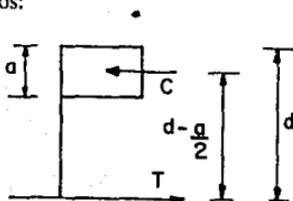
Por otra parte, recordando el momento resistente de una sección rectangular con acero de refuerzo en tensión:

$$M_R = F_R A_s f_y d (1 - 0.5q)$$

Donde:

$$q = p \frac{f_y}{f'c}$$

Del diagrama de esfuerzos:



Se supone que:

$$d - \frac{a}{2} = 0.85d$$

Entonces:

$$M_u = 0.85 A_s f_y d$$

Despejando el área de acero:

$$A_{s1} = \frac{M_{u_{\text{res}}}}{0.85 f_y d}$$

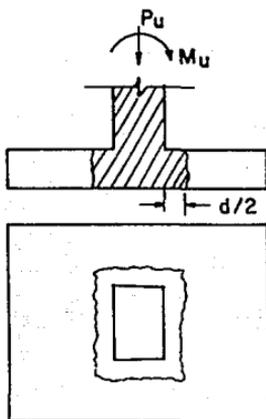
Y el porcentaje de acero, será:

$$\rho = \frac{A_{s1}}{A_G}$$

Para que la sección no presente problemas por flexión debe de cumplirse que:

$$M_R > M_{u_{\text{res}}}$$

## REVISION POR PENETRACION



La revisión por penetración consiste en la verificación de la transmisión de los esfuerzos flexionantes de la columna a la zapata:

Si no existe transmisión, es decir que se cumple:

$$0.2V_u d > M_{u_{flex}}$$

El esfuerzo se calcula:

$$v_u = \frac{V_u}{pd}$$

Si existe transmisión:

$$0.2V_u d < M_{u_{flex}}$$

El esfuerzo se calcula:

$$v_u = V_u pd + \frac{\alpha M_u C_{AB}}{J}$$

Definiendo cada uno de los términos de la expresión anterior:

Perímetro de la sección crítica:

$$p = (c_1 + d) (2) + (c_2 + d) (2)$$

Esfuerzo de la sección crítica:

$$V_u = P_u - [(c_1 + d) (c_2 + d)] q_n$$

Factores de distribución:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}}$$

$$C_{AB} = \frac{c_1 + d}{2}$$

$$J = \frac{d - (c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d) d^3}{6} + \frac{d (c_2 + d) (c_1 + d)^2}{2}$$

Momento último actuante,  $M_u$ .

Y  $d$ , el peralte propuesto.

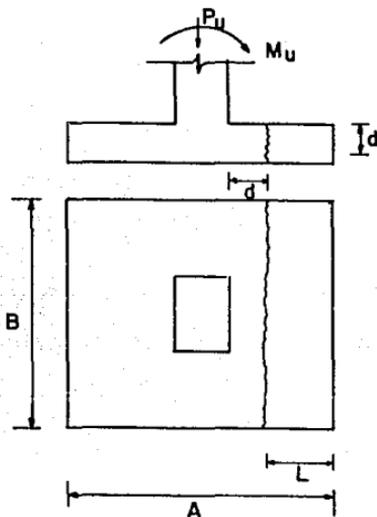
Además el esfuerzo admisible está dado como:

$$v = F_R \sqrt{f'c}$$

Y para que la sección no presente problemas por penetración, se debe de cumplirse que:

$$v > v_u$$

## REVISION POR CORTANTE



La forma en que actúan los esfuerzos cortantes en la zapata es:

Donde:

$$L = \frac{A}{2} - \left( \frac{C}{2} + d \right)$$

Y el cortante que se presenta en la sección crítica:

$$V_u = \left[ \frac{A}{2} - \left( \frac{C}{2} + d \right) \right] B q_n \quad (1)$$

Y el cortante crítico resistente:

Si:

$$p < 0.01$$

Entonces:

$$V_{CR} = F_R B d (0.2 + 30p) \sqrt{f^* c} \quad (2)$$

Si:

$$p \geq 0.01$$

Entonces:

$$V_{CR} = 0.5 F_R B d \sqrt{f^* c} \quad (3)$$

Y para que se acepte el dimensionamiento, y no se presenten problemas por cortante debe cumplirse que:

$$V_{CR} > V_u$$

Además deberá verificarse que el peralte propuesto se ha el adecuado debido a a la fuerza cortante:

Sustituyendo las expresiones (1) en (2), y despejando el peralte:

Si:

$$p < 0.01$$

Entonces  $d$ , se calcula:

$$d = \frac{0.5(A-c)q_n}{(0.2+30p)F_R\sqrt{f^*c} + q_n}$$

Si:

$$p \geq 0.01$$

Entonces:

$$d = \frac{0.5(A-c)q_n}{F_R\sqrt{f^*c} + q_n}$$

Y para que el peralte se acepte, debe cumplirse que:

$$d \leq d_{propuesto}$$

## AREA DE ACERO

El área de acero requerida por el momento último flexionante:

$$A_{u_1} = \frac{M_{u_1}}{0.85 f_y d}$$

El área de acero requerida por el momento resistente:

$$A_B = \frac{M_R}{F_R f_y d (1 - 0.5q)} p B d$$

Y el área de acero mínima:

$$A_{B_{min}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} B d$$

El área de acero balanceada:

$$A_{B_b} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{6000 - f_y} B d$$

Y el área de acero máxima:

$$A_{B_{max}} = 0.75 A_{B_b}$$

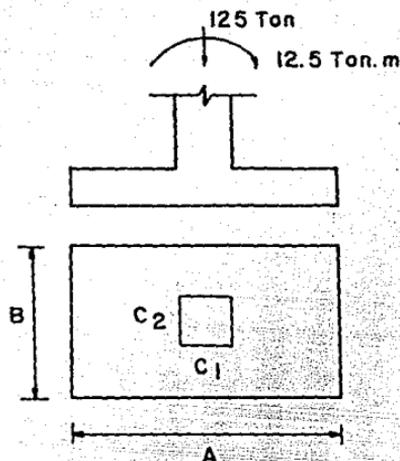
Y para que la zapata quede totalmente diseñada, deberá cumplirse:

$$A_{B_{min}} < A_B < A_{B_{max}}$$

A continuación se presenta un ejemplo sencillo, ilustrando el uso de las expresiones anteriores; donde se pide que se diseñe la zapata cuadrada de una columna sujeta a flexocompresión, como se muestra en la figura:

**Datos:**

$$\begin{aligned} q_n &= 5 \text{ [Ton/m}^2\text{]} \\ f_c &= 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\ f_y &= 4200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \\ c_1 = c_2 &= 1 \text{ [m]} \end{aligned}$$



**SOLUCION:**

**Cálculo del área de la zapata:**

$$A_z = \frac{125}{5} = 25 \text{ [cm}^2\text{]}$$

De está manera se tendría:

$$A = B = 5 \text{ [m]}$$

**Cálculo del largo de la zapata:**

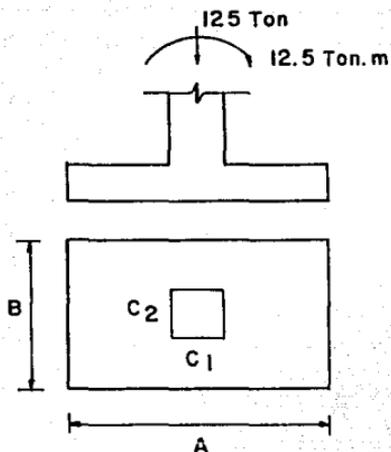
Donde:

$$e = \frac{12.5}{125} = 0.1 \text{ [m]}$$

Entonces:

$$A = 0.1 + \sqrt{0.1^2 + \frac{125}{5}} = 5.1 \text{ [m]} = 510 \text{ [cm]}$$

Por lo tanto se toma:



**SOLUCION:**

Cálculo del área de la zapata:

$$A_z = \frac{125}{5} = 25 [cm^2]$$

De esta manera se tendría:

$$A = B = 5 [m]$$

Cálculo del largo de la zapata:

Donde:

$$e = \frac{12.5}{125} = 0.1 [m]$$

Entonces:

$$A = 0.1 + \sqrt{0.1^2 + \frac{125}{5}} = 5.1 [m] = 510 [cm]$$

Por lo tanto se toma:

$$A = B = 510 \text{ [cm]}$$

Ahora, proponiendo un peralte:

$$d = 30 \text{ [cm]}$$

Cálculo del momento por flexión:

$$M_{u_{flex}} = \frac{1}{8} (500-100)^2 510 (0.5) = 5358185 \text{ [Kg} \cdot \text{cm]}$$

Y el área de acero por flexión:

$$A_{s1} = \frac{5358185}{.85(4200)(30)} = 50.03 \text{ [cm}^2\text{]}$$

El porcentaje de acero:

$$p = \frac{50.03}{510(30)} = 0.0035$$

Entonces:

$$q = 0.0035 \frac{4200}{0.8(0.85)(200)} = 0.10$$

Cálculo del momento resistente:

$$M_R = 0.9 (50.03) (4200) (30) (1 - 0.5(0.1)) = 5389731.9 \text{ [Kg} \cdot \text{cm]}$$

Y como:

$$M_R > M_{u_{flex}}$$

El peralte propuesto se acepta por flexión.

Verificación de la transmisión del momento de la columna a la zapata:

El esfuerzo de la sección crítica:

$$V_u = 125000 - [(100+30)(100+30)]0.5 = 116550$$

Entonces:

$$0.2(116550)(30) = 699300$$

Es decir, es esfuerzo se calcula:

$$v_u = \frac{116550}{[(100+30)(2) + (100+30)(2)](30)} = 7.47 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Cálculo del esfuerzo admisible:

$$v = 0.8\sqrt{0.8(20)} = 10.12 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Como:

$$v > v_u$$

De tal manera que se acepta el peralte propuesto por penetración.

Cálculo del cortante en el límite de la sección crítica:

$$V_u = \left[ \frac{510}{2} - \left( \frac{100}{2} + 30 \right) \right] 100(0.5) = 8750 \text{ [Kg]}$$

Como:

$$p < 0.01$$

Cálculo del cortante admisible:

$$V_{CR} = 0.8(100)(30)[0.2 + (30)(0.003)]\sqrt{160} = 8803.78 \text{ [Kg]}$$

Y como:

$$V_{CR} > V_u$$

Finalmente, se acepta el peralte propuesto.

Revisando el peralte por cortante:

$$d = \frac{0.5(510-100)(0.5)}{(0.2 + (30)(0.0033))0.8\sqrt{160} + 0.5} = 29.07 \text{ [cm]}$$

Por lo tanto:

$$d = 29.07 \text{ [cm]} \approx d = 30 \text{ [cm]}$$

Entonces se acepta  $d = 30 \text{ [cm]}$  de tal manera que queda diseñada la zapata por flexión.

Revisión del acero de refuerzo:

El área debida al momento flexionante:

$$A_s = 50.03 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Y el área debida al momento resistente:

$$A_s = 0.0033(510)(30) = 50.49 \text{ [cm}^2\text{]}$$

El área de acero mínimo:

$$A_{s_{\min}} = \frac{0.7\sqrt{200}}{4200}(510)(30) = 36.06 \text{ [cm}^2\text{]}$$

El área de acero balanceado:

$$A_{s_b} = \frac{136}{4200} \frac{4800}{6000+4200}(510)(30) = 174.86 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Y el área del acero máximo:

$$A_{s_{\max}} = 0.75(174.86) = 131.145 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Como:

$$A_{B_{min}} < A_S < A_{B_{max}}$$

Por lo tanto, la zapata queda diseñada y revisada de concreto reforzado; en donde el acero sólo es a tensión.

Donde:

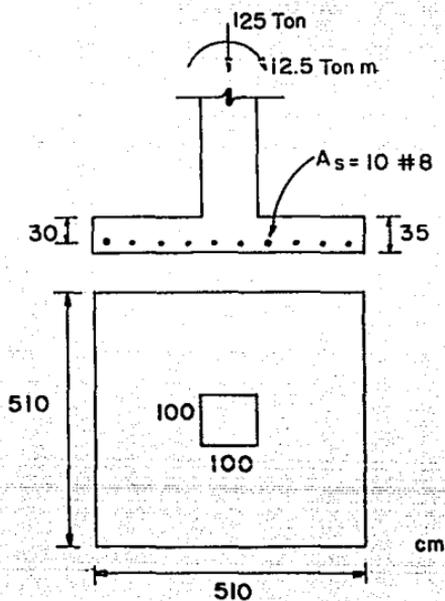
$$A = B = 510 \text{ [cm]}$$

$$d = 30 \text{ [cm]}$$

$$\text{Recbr.} = 5 \text{ [cm]}$$

$$h = 35 \text{ [cm]}$$

$$A_s = 50.49 \text{ [cm}^2\text{]} = 10 \text{ \# 8}$$



El Reglamento señala que para zapatas de peralte mayores de 15 [cm], el refuerzo se colocará en dos capas próximas a las caras del elemento.

Y además se tiene que considerar una cuantía de acero de refuerzo debido a los cambios volumétricos que pueda sufrir el elemento.

# CAPITULO V

## ELEMENTOS CORTOS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL COMBINADAS

## CAPITULO V

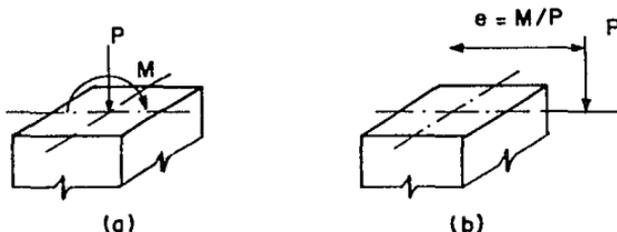
### INTRODUCCION

Con el objeto de definir la resistencia de un elemento de concreto o de acero, sujeto a la acción combinada de carga de carga axial de compresión y momento flexionante, flexocompresión, considerándose sólo para elementos cortos, en los que los efectos de esbeltez pueden despreciarse. se supondrán conocidas la geometría del elemento, incluyendo la cantidad y distribución del acero de refuerzo, definida por una cierta resistencia nominal,  $f_c$ , y la calidad del acero, definida por su esfuerzo de fluencia,  $f_s$ .

Se puede afirmar que la carga axial de compresión  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , guardan una relación que se podría definir como la excentricidad,  $e$ , de la carga.

En la figura 1-a se muestra la sección transversal de un elemento bajo la acción de  $P$  y  $M$ , y en la figura 1-b, se muestra un sistema equivalente en el que la excentricidad vale;

$$e = \frac{M}{P}$$



Elemento sujeto a flexocompresión

Figura 1.

Cuando en una estructura,  $P$  y  $M$  varían en la misma proporción en una sección transversal dada, la excentricidad,  $e$ , permanece constante. Bajo estas condiciones, para una excentricidad constante,  $e$ , si se hace variar  $P$  en forma progresiva, uniforme y sin impacto, partiendo desde  $P = 0$ , el valor de  $M$  varía en proporción directa a la variación de  $P$ , o sea:

$$M = P e \quad (1)$$

Esta igualdad representa la ecuación de una recta en la que  $M$  es función de  $P$ , y  $e$  es la pendiente de esa recta. En la figura 2 se muestra la gráfica de la ecuación (1) para algunos valores de  $e$ :

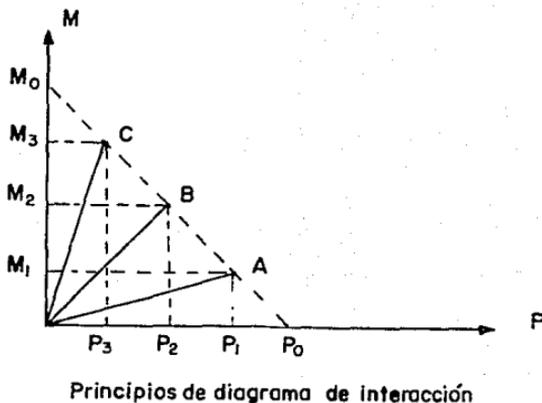


Figura 2.

Donde:

$$\begin{aligned} A &= ( P_1, M_1 ) \\ B &= ( P_2, M_2 ) \\ C &= ( P_3, M_3 ) \end{aligned}$$

En la figura se observa que límite de cada recta lo representa la resistencia del material, es decir, cuando se presenta la falla del material.

Análogamente, se podría escoger una serie indefinida de excentricidades, para las cuales se obtendrían diferentes combinaciones de  $P$  y  $M$ , desde una excentricidad  $e = 0$  en la que la resistencia está dada solamente por la carga axial  $P_0$ , hasta una excentricidad tan grande que se requeriría un valor muy pequeño de  $P$  para llegar a la resistencia por flexión expresada por  $M_0$  en el eje de las ordenadas. La unión de los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  definen a la línea  $R$  de la figura 2 como la resistencia del material, para un número infinito de combinaciones de  $P$  y  $M$ , a la que se denominará diagrama de interacción.

Por lo tanto se concluye que un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima de tensión o compresión y un momento nulo, hasta un momento en combinación con una carga axial nula.

Se podría definir entonces al Diagrama de interacción como el lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar un estado de esfuerzos determinado, que generalmente es su resistencia última.

## FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION EN EL INTERVALO ELASTICO

### Diagrama de interacción

Considerando un material de comportamiento elasto-plástico como el mostrado en la figura 3, en la que se observa que tiene el mismo comportamiento a compresión y a tensión.

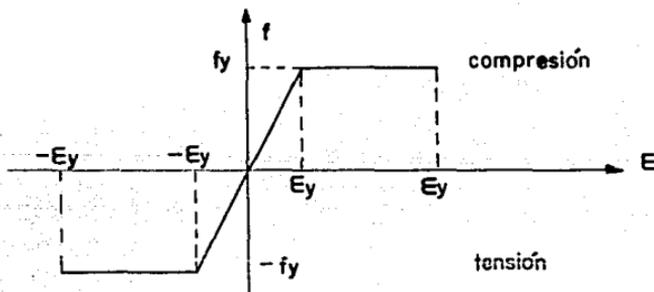
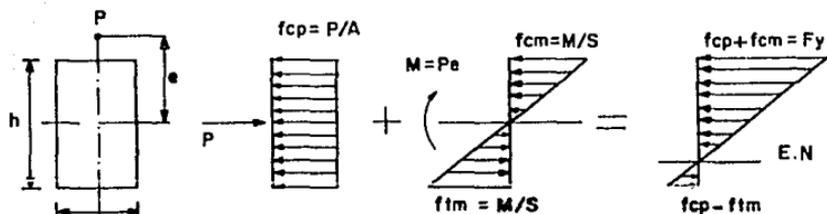


Diagrama esfuerzo - deformación de un material elasto-plástico

Figura 3.

Para determinar el diagrama de interacción de la sección rectangular de la figura 4-a en el intervalo elástico, estableciendo de que el esfuerzo máximo producido no exceda el límite de proporcionalidad que en este caso es el esfuerzo de fluencia  $f_y$ , figura 4-d.



Sección rectangular sujeta a compresión axial y flexión

Figura 4.

Para una sección rectangular sujeta a compresión axial y flexión en un sólo plano, el esfuerzo máximo se obtiene a partir de la fórmula de la escuadría, es decir:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} \quad (2)$$

Donde:

A = Arca de la secci3n transversal.

S = M3dulo de la secci3n transversal en el plano de flexi3n.

Si s3lamente actua la carga axial P, el esfuerzo m3ximo se obtiene haciendo M=0 en la expresi3n (2), o sea:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A}$$

Pero como:

$$f_{m\acute{a}x} = f_y$$

Despejando P tenemos:

$$P = f_y A$$

Y al valor de P sera P<sub>y</sub>, por ser la carga axial que produce el esfuerzo de fluencia, entonces:

$$P_y = f_y A \quad (3)$$

Si s3lamente actuar3 el momento flexionante M, el esfuerzo m3ximo se obtiene de la expresi3n (2) haciendo P = 0:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{M}{S}$$

An3logamente, si:

$$f_{m\acute{a}x} = f_y$$

Y:

$$M = f_y S$$

A este valor de M le llamaremos M<sub>y</sub>, por ser el momento que produce un esfuerzo m3ximo igual al de fluencia:

$$M_y = f_y S \quad (4)$$

Si se divide ambos miembros de la expresión (2) entre  $f_y = f_{\text{máx}}$ , se tiene:

$$1 = \frac{P}{f_y A} + \frac{M}{f_y S}$$

Llevando esta expresión las igualdes (3) y (4), y ordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad (5)$$

La expresión anterior es la ecuación de una recta que representa el diagrama de interacción para esfuerzos máximos de compresión en la fibra de la sección más alejada del eje neutro. Figura 5-a, 5-b.

El diagrama de interacción para efectos de flexotensión, se obtiene en forma análoga e invirtiendo el signo de  $P$  a  $-P$  desde la expresión (2), lo que conduce a una ecuación similar:

$$-\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad (6)$$

La ecuación (6) representa, en el plano de ejes  $(M, P)$  en la figura 5-b, 5-a, el diagrama de interacción para esfuerzos máximos de tensión que no exceden  $f_t$ , en la fibra de la sección más alejada del eje neutro.

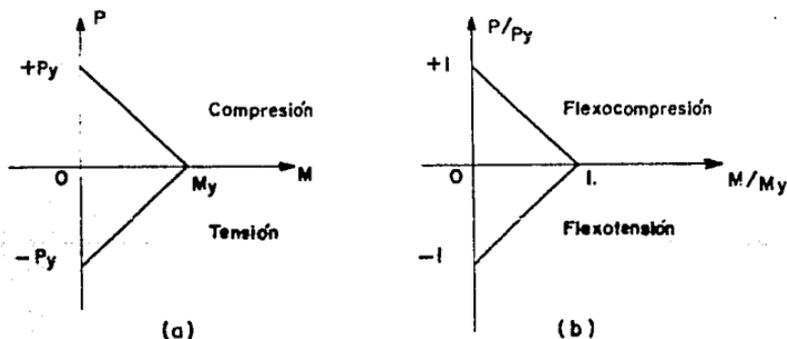


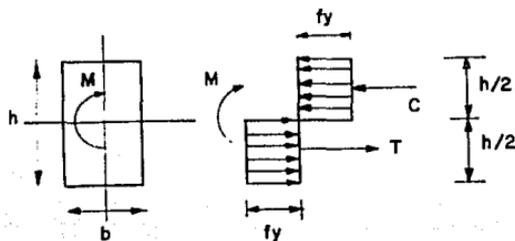
Diagrama de interacción en el rango elástico

Figura 5.

## FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION EN EL INTERVALO INELASTICO

### Diagrama de interacción

Considere una sección rectangular de un material elástico-plástico, sujeto a  $P = 0$  y a  $M$  diferente de 0, de tal modo que la sección está totalmente plastificada como se observa en la figura 6.



Sección rectangular, sujeta sólo a flexión.

Figura. 6.

Por equilibrio de fuerzas horizontales, se tiene:

$$C = T = \frac{bh}{2} f_y$$

Y por equilibrio de momentos respecto al eje principal de la sección;

$$M = C \frac{h}{2} = T \frac{h}{2}$$

Sustituyendo el valor de T o C:

$$M = \frac{bh^2}{4} f_y$$

Este valor de  $M$  es el que sin actuar  $P$ , origina la plastificación de la sección, por lo que se denominará  $M_p$ :

$$M^P = \frac{bh^2}{4} f_y \quad (7)$$

La relación que existe entre este valor  $M_p$  y el momento  $M$ , para el cual inicia la fluencia del material en la fibra más alejada del eje neutro, se obtiene dividiendo la ecuación (7) miembro a miembro entre la ecuación (4).

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{bh^2 f_y}{4f_y S}$$

Reduciendo términos:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{bh^2}{4S}$$

Y el valor del módulo de la sección rectangular es;

$$S = \frac{bh^2}{6}$$

Por lo tanto;

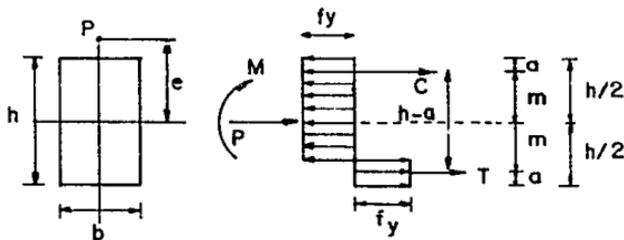
$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{6bh^2}{4bh^2}$$

De donde:

$$M_p = \frac{2}{3} M_y \quad (8)$$

La expresión (8) significa que el momento flexionante que produce la plastificación total de la sección vale una vez y media el momento para el cual se inicia la fluencia de la sección.

Ahora considerando una sección rectangular sujeta a flexocompresión de tal modo que la sección se encuentre completamente plastificada.



Sección rectangular plastificada, sujeta a flexocompresión.

Del diagrama de esfuerzos por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$P=C - T$$

En donde:

$$C=(a+2m)bf_y$$

$$T=a b f_y$$

Por lo tanto:

$$P=(a+2m)bf_y - abf_y$$

$$P=2 b m f_y$$

De donde:

$$m=\frac{P}{2bf_y} \quad (9)$$

Y por equilibrio de momentos:

$$M=C(h-a)=T(h-a)$$

Entonces:

$$M=a b f_y(h-a) \quad (10)$$

Tomando en cuenta que:

$$a=\frac{h}{2}-m$$

Y sustituyendo en (10):

$$M=(\frac{h}{2}-m)bf_y[h-(\frac{h}{2}-m)]$$

Reduciendo términos:

$$M = \frac{bf_y h^2}{4} - bf_y m^2$$

Multiplicando y diviendo por 6 el primer término del segundo miembro se tiene:

$$M = \frac{6bf_y h^2}{(6)(4)} - bf_y m^2$$

$$M = \frac{3}{2} \frac{bh^2}{6} f_y - bf_y m^2$$

Y como:

$$S = \frac{bh^2}{6}$$

Entonces:

$$M = \frac{3}{2} S f_y - bf_y m^2$$

Por la expresión (4):

$$M = \frac{3}{2} M_y - bf_y m^2$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de m:

$$M = \frac{3}{2} M_y - \frac{bf_y p^2}{4b^2 f_y^2}$$

$$M = \frac{3}{2} M_y - \frac{p^2}{4bf_y} \quad (11)$$

Diviendo ahora cada miembro entre  $M_y$ :

$$\frac{M}{\frac{3}{2}m_y} = 1 - \frac{4P^2}{4b^2f_y^2h^2}$$

Simplificando:

$$\frac{M}{\frac{3}{2}M_y} = 1 - \frac{P^2}{f_y^2A^2}$$

Teniendo en cuenta la expresión:

$$P_y = f_y A$$

Ordenando:

$$\frac{M}{\frac{3}{2}M_y} + \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 = 1 \quad (12)$$

La igualdad (12) es la ecuación del diagrama de interacción de la sección supuesta; la parte del diagrama en el primer cuadrante corresponde a puntos de flexocompresión, los del cuarto cuadrante son de flexotensión.

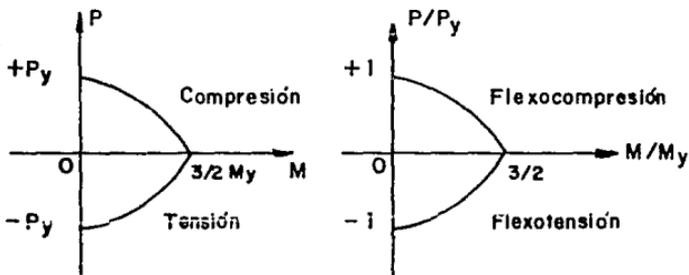


Diagrama de interacción de una sección rectangular totalmente plastificada.

Figura 8.

## FLEXOCOMPRESION EN ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO

En esta sección se presentan los procedimientos para determinar la resistencia de elementos cortos de concreto reforzado sujetos a flexocompresión, en los que no se tiene problemas de esbeltez. Para tal efecto se dan de apoyo las hipótesis que marca el Reglamento de construcciones para el Distrito Federal que a continuación se describen:

### HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE RESISTENCIAS DE DISEÑO

- A) La distribución de deformaciones unitarias longitudinales en la sección transversal de un elemento es plana.
- B) Existe adherencia entre el concreto y el acero de tal manera que la deformación unitaria del acero es igual a la del concreto adyacente.
- C) El concreto no resiste esfuerzos de tensión.
- D) La deformación unitaria del concreto en compresión cuando se alcanza la resistencia de la sección es 0.003.
- E) La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto cuando se alcanza la resistencia es niforme,  $f'c$ , en una zona cuya profundidad es 0.8 veces la del eje neutro, definido éste de acuerdo con las hipótesis anteriores. El esfuerzo  $f'c$  se tomará:

$$f''c = 0.85f'c \quad \text{si} \quad f' \leq 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f''c = \left(1.05 - \frac{f'c}{1250}\right) f'c \quad \text{si} \quad f'c > 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

En donde:

$$f'c = 0.8f'c$$

- F) El diagrama esfuerzo-deformación unitaria del acero de refuerzo ordinario, sea o no torcido en frío, puede idealizarse como se muestra en la figura 9, en la que  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero.

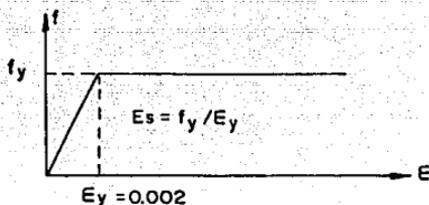


Diagrama esfuerzo deformación unitaria

Figura 9.

Para determinar la resistencia de diseño,  $P_R$ ,  $M_R$ , el mismo Reglamento especifica que la resistencia directa obtenida con estas hipótesis, deberá reducirse aplicando un "factor de reducción de resistencia",  $F_u$ . Los elementos mecánicos últimos,  $P_u$ ,  $M_u$ , que resultan de multiplicar los elementos mecánicos obtenidos de un análisis estructural por su correspondiente factor de carga, no deben exceder los valores de las resistencias de diseño, es decir:

$$P_u \leq P_R \quad \text{y} \quad M_u \leq M_R$$

En flexocompresión, el factor de reducción,  $F_R$ :

Se tomará igual a 0.85, cuando el elemento falle a tensión.

Se tomará igual a 0.75, cuando el elemento falle a compresión.

## DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXOCOMPRESIÓN

### Diagramas de interacción.

Para conocer la resistencia de una sección cualquiera, bajo la acción combinada de carga axial  $P$  y momento flexionante  $M$ , uno de los métodos más prácticos es el uso de diagramas de interacción en condiciones de resistencia, cuyo principal empleo es cuando la sección se ve sujeta a diferentes condiciones de carga, es decir, diferentes combinaciones de  $P$  y  $M$ .

La determinación del diagrama de interacción de una sección cualquiera es muy útil: sin embargo, ese diagrama sólo sería aplicable a esa sección en particular y cualquier variación en dimensiones o refuerzo obligarían a trazar otro diagrama de interacción. Para aliviar estos inconvenientes, el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, ha elaborado unas gráficas para diseñar columnas cortas de concreto reforzado para las familias de secciones más usuales, tales como las rectangulares y las circulares. En dichas gráficas se manejan valores variables de dimensiones, refuerzo, excentricidad de la carga, resistencia de concreto y esfuerzo de fluencia del acero.

Un diagrama típico para una sección rectangular con acero de refuerzo uniformemente distribuido en las cuatro caras opuestas y sujeta a flexocompresión simple. Se presentan términos de  $R$  y  $K$  que son parámetros adimensionales que están en función del momento flexionante último,  $M_u$ , y de la carga axial última,  $P_u$ , respectivamente. Para el caso descrito  $R$  y  $K$  se evalúan con las siguientes expresiones:

$$R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f' / c}$$

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f' / c}$$

Donde:

- $F_R$  = Factor de reducción de resistencia.
- $b$  = Dimensión perpendicular al plano de la flexión.
- $h$  = Dimensión paralela al plano de la flexión.

La excentricidad,  $e$ , de la carga respecto al eje central de la sección se mide siempre paralela a la dimensión  $h$ ; y  $q$  es un parámetro adimensional que está en función del área de acero:

$$q = p \frac{f_y}{f' / \gamma_c}$$

Donde  $p$  es el porcentaje de acero de refuerzo respecto al área de la sección transversal de la columna:

$$p = \frac{A_s}{bh}$$

Siendo  $A_s$  el área de acero de refuerzo.

En el diseño por flexocompresión mediante estas gráficas, se debe seguir el procedimiento de diseño por resistencia última o de diseño plástico; de manera que, para obtener los elementos mecánicos últimos  $M_u$ ,  $P_u$  que intervienen en el uso de las gráficas, los elementos mecánicos obtenidos del análisis bajo cargas de servicio deben multiplicarse por los factores de carga correspondientes. Conocidos  $M_u$  y  $P_u$ , la determinación del área de acero de refuerzo,  $A_s$ , se hace calculando los parámetros  $R$ ,  $K$  o  $e/h$  y mediante la gráfica se obtiene  $q$ , valor del cual se puede despejar  $A_s$ .

En el caso de revisión de una sección de concreto reforzado, que se presenta cuando se conocen las dimensiones de la sección, el área de acero de refuerzo y la resistencia a compresión del concreto, se pretende determinar el momento flexionante resistente,  $M_R$ , y la carga axial resistente,  $P_R$ , para una relación  $e = M_R / P_R$  conocida. El proceso consiste en calcular  $q$  y  $e/q$ . La intersección de estas dos curvas define los valores de  $R$  y  $K$  sobre los ejes de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente; entonces se despejan los valores de  $M_u$  y  $P_u$  que en este caso son los elementos mecánicos últimos que la sección es capaz de resistir y los cuales serán  $M_R$  y  $P_R$ , respectivamente.

A continuación se presenta el uso de los diagramas de interacción, en donde se pide determinar la carga axial resistente y el momento flexionante resistente de la sección de concreto reforzado que se muestra:

**Datos:**

Concreto:

$$f'_c = 200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Acero:

$$f_y = 4000 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$A_s = 10 \# 8$$

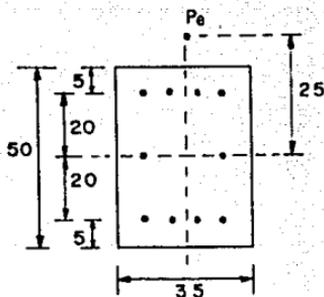


Figura 10.

**SOLUCION:**

Cálculo de los parámetros de resistencia:

$$f^*c = 0.8f'c = 0.8(200) = 160 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

Como:

$$f^*c < 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f''c = 0.85f^*c = 0.85(160) = 136 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Por tratarse de un caso de revisión se calculan los parámetros  $q$  y  $e/h$ :

El área de acero:

$$A_s = 10(5.07) 50.7 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Entonces el porcentaje de acero de refuerzo,  $p$ :

$$p = \frac{A_s}{bh}$$

Donde:

$$b = 35 \text{ [cm]}$$

$$h = 50 \text{ [cm]}$$

$$p = \frac{50.7}{35(50)} = 0.02897$$

El parámetro q:

$$q = p \frac{fy}{f'fc}$$

Sustituyendo:

$$q = 0.02897 \frac{4000}{136} = 0.852$$

Y la relación e/h:

$$\frac{e}{h} = \frac{25}{50} = 0.5$$

Para determinar que gráfica usar se requiere la relación d/h, en la que d es la distancia entre las varillas a tensión y h la fibra a compresión más alejada del eje principal, así:

$$\frac{d}{h} = \frac{45}{50} = 0.9$$

De gráficas (APENDICE) se obtiene en la intersección de las líneas e/h y q calculadas, los siguientes valores de K y R:

$$K = 0.76 \quad \text{y} \quad R = 0.38$$

Obsérvese en la misma figura que el punto definido por:

$K = 0.76$  y  $R = 0.38$  cae en la zona de falla por compresión, por lo que  $F_R = 0.75$ .

Despejando se obtienen  $M_R$  y  $P_R$  respectivamente, a los cuales, por tratarse de un caso de revisión se llamarán  $M_R$  y  $P_R$ ; así que:

El momento flexionante resistente:

$$M_R = R F_R b h^2 f' f c$$

Sustituyendo:

$$M_R = (0.38)(0.75)(35)(50^2)(136) = 33.915 \times 10^5 [\text{kg} \cdot \text{m}] = 33.915 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Y la carga axial resistente:

$$P_R = K F_R b h f' / c$$

Sustituyendo:

$$P_R = 0.76(0.75)(35)(50)(136) = 135.66 \times 10^5 [\text{kg} \cdot \text{cm}] = 135.66 [\text{Ton}]$$

Y por último verificando que la relación  $M_R / P_R$  sea igual a la excentricidad que se dió como dato:

$$e = \frac{M_R}{P_R} = \frac{33.915}{135.66} = 0.25 [\text{m}] = 25 [\text{cm}]$$

Por lo tanto el momento flexionante resistente de la sección es:

$$M_R = 33.915 [\text{Ton} \cdot \text{m}]$$

Y la carga axial resistente:

$$P_R = 135.66 [\text{Ton}]$$

## FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL

En el caso de flexocompresión biaxial, el diagrama de interacción resulta ser una superficie de falla de tres dimensiones, la cual se puede reducir a un problema de dos dimensiones haciendo cortes verticales a la superficie original. Figura 11. Cada corte corresponde a una relación fija entre los momentos adimensionales en las dos direcciones,  $R_x / R_y$ .

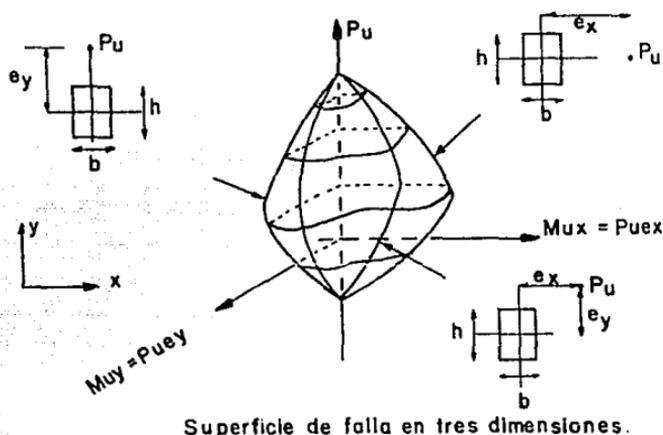


Figura 11.

El Instituto de Ingeniería de la UNAM ha elaborado gráficas para valores de  $R_x / R_y = 0.5$  y de  $R_x / R_y = 1.0$ , además si se toma en cuenta que el caso de flexocompresión en una dirección corresponde a  $R_x / R_y = 0$ , se tiene tres cortes verticales a la superficie de falla, con lo que se puede cubrir, con una aproximación aceptable, todos los casos mediante interpolación lineal.

Se obtiene:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f' / c}$$

$$R_x = \frac{M_{u_x}}{F_R b^2 h f' / c}$$

$$R_y = \frac{M_{u_y}}{F_R b h^2 f' / c}$$

Considerando una sección rectangular cualquiera de concreto reforzado sujeta a flexocompresión axial:

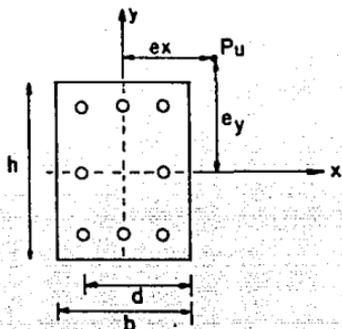


Figura 12

De donde se obtiene:

$$M_{u_x} = P_u e_x$$

$$M_{u_y} = P_u e_y$$

Además:

$$R_x = \frac{M_{u_x}}{F_R b^2 h f' / c} \quad (A)$$

$$R_y = \frac{M_{u_y}}{F_R b h^2 f' / c} \quad (B)$$

Como se debe cumplir que:

$$\frac{R_x}{R_y} \leq 1.0$$

Entonces,  $R_x$  está asociado al menor de ambos momentos adimensionales, siendo el plano de este momento perpendicular al eje Y. el diagrama de interacción para flexocompresión biaxial se selecciona con la relación  $d/b$ , donde  $b$  es la dimensión de la columna en la dirección de  $e_x$ , y  $d$  es el peralte efectivo en la dirección de  $b$ ; usualmente, en la práctica,  $b$  es el lado menor de la sección, sin embargo, puede ocurrir que  $b$  no coincida con el lado menor, basta que con la posición supuesta de los ejes X y Y se cumpla lo siguiente:

$$\frac{e_x/b}{e_y/h} \leq 1.0$$

Esto se demuestra si se divide la ecuación A entre B:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{M_{u_x} F_R b h^2 f' / c}{M_{u_y} F_R b^2 h f' / c} \leq 1.0$$

Pero:

$$M_{u_x} = P_u e_x$$

$$M_{u_y} = P_u e_y$$

Entonces:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{P_u e_x F_R b h^2 f' / c}{P_u e_y F_R b^2 h f' / c} \leq 1.0$$

Finalmente:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{e_x h}{e_y b} \leq 1.0$$

Se realizará a continuación un ejemplo sencillo, en el cual se pide que se calcule mediante el uso de diagramas de interacción para secciones sujetas a flexocompresión biaxial, la carga última que puede resistir la siguiente sección rectangular de concreto reforzado:

**Datos:**

Concreto:

$$f_c = 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Acero:

$$f_s = 4000 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

Son 12 varillas del # 8,  $A_s = 12 (5.07) = 60.84 \text{ [cm}^2\text{]}$

Excentricidad en el eje X,  $e_x = 12 \text{ [cm]}$

Excentricidad en el eje Y,  $e_y = 32 \text{ [cm]}$

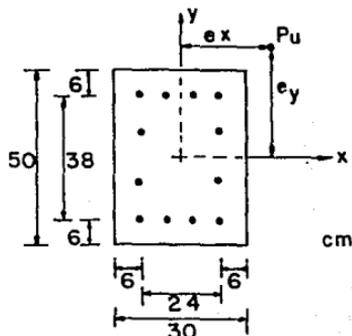


Figura 13.

**SOLUCION:**

Cálculo de las constantes:

$$f^*c = 0.8 f'c = 0.8 (250) = 200 < 280 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

$$f''c = 0.85 f^*c = 0.85 (200) = 170 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

De la sección se conocen:

$$b = 30 \text{ [cm]}$$

$$d = 24 \text{ [cm]}$$

$$h = 50 \text{ [cm]}$$

Haciendo:

$$\frac{d}{b} = \frac{24}{30} = 0.8$$

Y la cuantía de acero:

$$q = \frac{A_s f_y}{b h f' / c}$$

Sustituyendo:

$$q = \frac{12(5.07)(4000)}{30(50)(170)} = 0.95$$

Entonces:

$$\frac{e_x}{b} = \frac{12}{30} = 0.40$$

$$\frac{e_y}{h} = \frac{32}{50} = 0.64$$

Aplicando la relación  $R_x/R_y$ :

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{e_x/b}{e_y/h} = \frac{0.40}{0.64} = 0.625$$

Como:

$$0.625 < 1.0 \quad \text{si se cumple}$$

Empleando las gráficas para acero uniforme con:  
 $f_y < 4200 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$

Para:

$$d/b = 0.8$$

Y con:

$$R_x/R_y = 0.625$$

Se obtiene  $K$  para  $R_x/R_y = 0.5$  y para  $R_x/R_y = 1.0$  y posteriormente se interpola.

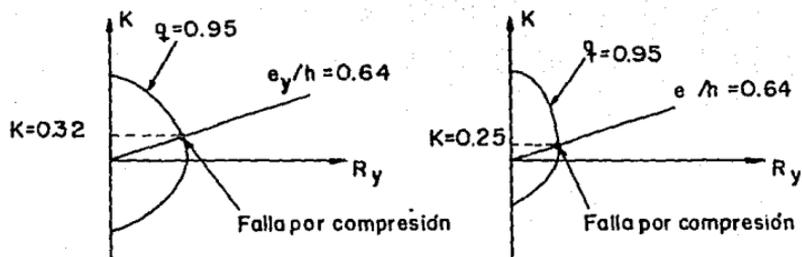
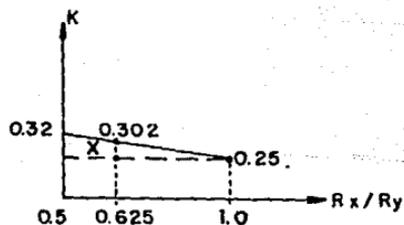


Figura 14 .

Interpolando para  $R_x/R_y = 0.625$ :

$$K = 0.25 + x$$



Interpolación

De la figura, se obtiene:

$$\frac{0.32-0.25}{1.0-0.5} = \frac{X}{1.0-0.625}$$

Despejando x:

$$x = \frac{(0.32-0.25)(1.0-0.625)}{(1.0-0.5)}$$

$$x = \frac{(0.07)(0.375)}{0.5} = 0.052$$

Sustituyendo:

$$K = 0.25 + 0.052 = 0.302$$

Por lo tanto, la carga última que puede resistir la sección es:

$$P_u = K F_c b h f'_c$$

$$P_u = (0.302)(0.75)(30)(50)(170) = 57\,758 \text{ [Kg]}$$

$$P_u = 57.76 \text{ [Ton]}$$

## DIMENSIONAMIENTO DE MUROS DE RETENCION

### *Características Generales*

Los muros como ya se ha mencionado, son elementos estructurales más empleados en las construcciones por el hombre. Las solicitaciones a que se ven sometidos con mayor frecuencia son:

- a) A cargas verticales que son producidas, en general, por cargas gravitacionales transmitidas al muro a través de sistemas de piso o de techo, además de las debidas a su peso propio.
- b) A cargas horizontales, fuerza cortante, que son producidas por cargas laterales debidas a empuje de tierras o líquidos, empuje de viento, o efectos de sismo.
- c) Y a flexiones.

En los muros de retención la flexión producida por cargas laterales debe ser absorbida por el muro flexionado alrededor de su eje de menor momento de inercia, lo que en ocasiones obliga a reforzarlo.

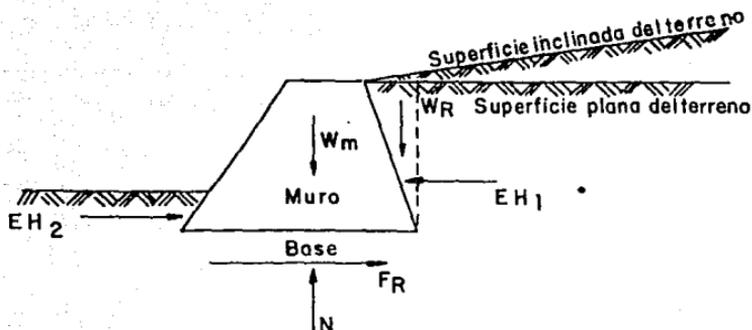
Dependiendo del tipo y la intensidad de las cargas a que estarán sometidos podrá seleccionarse el material para fabricar los muros, los refuerzos que deben usarse y la forma en que deben apoyarse para que sean capaces de resistir dichas cargas.

Los materiales empleados comúnmente son:

- I. Piedras naturales, junteadas con mortero.
- II. Piedras artificiales, como bloques de concreto, junteados con mortero.
- III. Concreto simple o reforzado, colado en sitio o prefabricado.

Los elementos de retención son muros diseñados con el propósito de mantener una diferencia de niveles de un suelo a ambos lados del muro. Debido a las condiciones a que están sometidos dichos elementos, se generarán fuerzas actuantes que se deberán cuantificar. Una de las fuerzas de mayor importancia es la que ocasiona el nivel más alto del terreno sobre el muro; dicha fuerza se denomina Empuje Lateral del Suelo, que en esta sección no se verá la determinación de éste, ya que le corresponde a las asignaturas del área de Mecánica de Suelos hacerlo.

Con el objeto de visualizar con mayor claridad en número, la dirección y sentido de las fuerzas actuantes más importantes que actúan sobre los muros de retención, conviene mostrarlas en un diagrama de cuerpo libre:



Fuerzas actuantes y resistentes en un muro de retención.

Donde:

- $W_m$  = Peso propio del muro.
- $EH_1$  = Fuerza horizontal del relleno contra el respaldo del muro.
- $EH_2$  = Fuerza horizontal del terreno contra el frente del muro.
- $N$  = Reacción normal del terreno.
- $W_R$  = Peso del relleno que se encuentra sobre el respaldo del muro.
- $F_R$  = Fuerza de fricción, generada entre la base y el muro al oponerse éste al deslizamiento.

Cabe mencionar que las fuerzas anteriores sólo son las más importantes que intervienen en el diseño del muro, existen otras que en su importancia depende casi exclusivamente de las condiciones del lugar donde se desplante el muro, tales como: las sobrecargas actuantes del relleno, fuerzas de filtración y otras debidas al agua, sobrepresiones ocasionadas por el agua, vibración, impacto de fuerzas, temblores, acción de las heladas, expansiones por cambio de temperatura y humedad del terreno, etc.

Las fuerzas horizontales del terreno sobre el respaldo y sobre el frente del muro dependen del tipo del suelo. Por lo tanto es necesario valuar las fuerzas que ocasiona el terreno sobre los elementos de soporte. Y existen varios métodos para determinar el empuje de tierras, como son:

- a) Teoría de Rankine
- b) Teoría de Coulomb
- c) Método de Culmann
- d) Método Semicempírico de Terzaghi

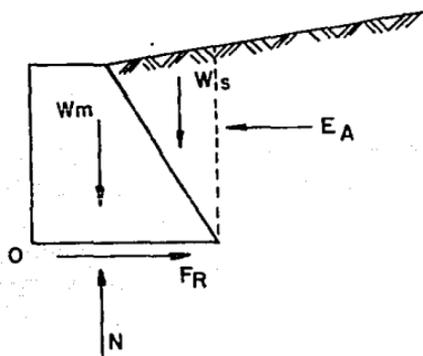
La descripción de los métodos es realizado en, como ya se dijo, en asignaturas de Mecánica de Suelos.

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE UN MURO DE RETENCIÓN

Con el objeto de poder garantizar la estabilidad de un elemento de retención, debe efectuarse la revisión para las siguientes condiciones:

### 1. Revisión por volteo

Haciendo un diagrama de cuerpo libre que involucre la reacción de suelo que descansa sobre el respaldo del muro que se encuentra limitada por la vertical que para por el pie del mismo elemento de retención.



Esquema simplificado de las fuerzas que intervienen en el análisis por volteo de un muro de retención

Donde:

- $E_A$  = Empuje del terreno.
- $W_m$  = Peso propio del muro.
- $W_s$  = Peso de la porción del relleno.
- $N$  = Fuerza normal.
- $F_R$  = Fuerza de fricción.

Considerando que el muro gira alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$ . En estas condiciones la base del muro se levantará sobre un plano horizontal, teniendo como punto de apoyo exclusivamente el punto  $O$ ; en este caso la reacción normal  $N$  se desplazará hacia este punto. En esta condición el muro se encontrará en una situación de equilibrio inestable; para que esto ocurra, debemos buscar en el momento resistente,  $M_R$ , sea mayor que el momento actuante,  $M_A$ , por lo cual se define el factor de seguridad  $F.S$  como el coeficiente entre el momento resistente y el momento actuante:

$$F.S = \frac{M_R}{M_A}$$

Igualdad que debe cumplirse en un muro de retención.

**Nota:**

El momento resistente es la suma de los momentos ocasionados por las fuerzas que impiden el volteo del muro.

El momento actuante es la suma de los momentos ocasionados por las fuerzas cuyas acciones tienden a provocar el volteo del muro.

## 2. Revisión por deslizamiento

La fuerza de empuje que ocasiona el relleno tiende a deslizar el muro sobre la superficie del terreno; la oposición al deslizamiento del muro es ocasionada por la rugosidad existente entre la superficie del suelo y la base del muro.

Para lograr la estabilidad del muro en cuanto a un posible deslizamiento se deberá provocar que las fuerzas resistentes,  $F_r$ , sean mayores que las actuantes,  $F_a$ . Se define el factor de seguridad F.S como la reacción existente entre la fuerza resistente y la fuerza actuante.

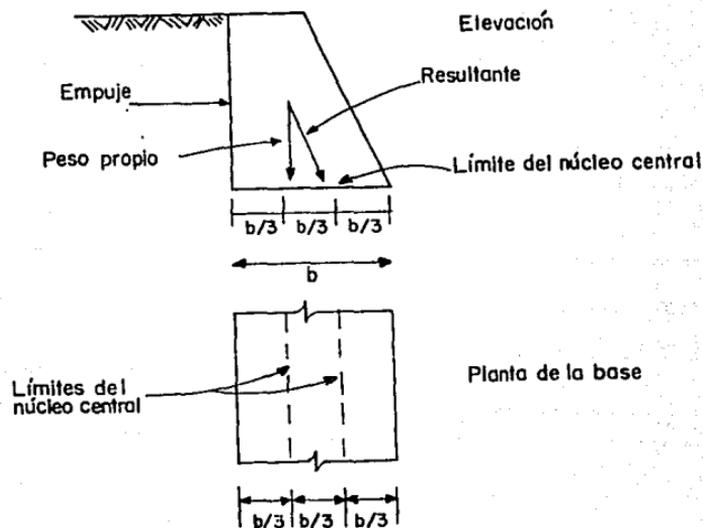
Por lo tanto, la condición para garantizar el equilibrio del muro es:

$$F_r = F.S \times F_a$$

## 3. Revisión de los esfuerzos internos

Las fuerzas mencionadas anteriormente ocasionan esfuerzos sobre el elemento de retención, es condición necesaria que los esfuerzos provocados sean siempre de compresión debido a que el muro no está diseñado para resistir esfuerzos en tensión y, además, no existe adherencia entre la base del muro y el terreno. Este hecho se garantiza haciendo pasar la resultante de las fuerzas por el tercio central de la sección transversal del muro, ya que éste corresponde al Núcleo Central. Esta revisión se debe realizar tanto en la base del muro como en diferentes secciones a lo largo de él.

Nota: En la siguiente página se presenta un sección transversal y la planta de un muro de retención.



#### 4. Capacidad de carga del terreno

Los esfuerzos provocados en un muro de retención no deben exceder los esfuerzos permisibles del terreno sobre el que se desplanta.

## **INTRODUCCION AL DIMENSIONAMIENTO DE ELEMENTOS DE CONCRETO PRESFORZADO**

Presfuerzo significa la creación intencional de esfuerzos permanentes en una estructura, con el objeto de mejorar su comportamiento y resistencia bajo diversas condiciones de servicio.

El presforzado se aplica al acero o al concreto, donde su objetivo es doble: primero, inducir deformaciones y esfuerzos descables en la estructura; segundo, equilibrar las deformaciones y esfuerzos indeseables. En el concreto presforzado, el acero se prealarga con el fin de evitar un alargamiento excesivo bajo la carga de servicio, mientras que el concreto es precomprimido para evitar grietas bajo el esfuerzo de tensión. Así se obtiene una combinación ideal de los dos materiales. La utilidad básica del concreto presforzado casi es autoevidente, pero su amplia explicación dependerá finalmente del desarrollo de nuevos métodos de diseño y ejecución, los cuales realzará finalmente su economía con relación a tipos de estructuras convencionales.

Una de las mejores definiciones del concreto presforzado es la del Comité de Concreto Presforzado del ACI (American Concrete Institute).

### **CONCRETO PRESFORZADO**

Concreto en el cual han sido introducidos esfuerzos internos de tal magnitud y distribución que los esfuerzos resultantes de las cargas externas dadas se equilibran hasta un grado deseado. En miembros de concreto reforzado se induce, comúnmente, el presfuerzo dando tensión al refuerzo de acero.

Con respecto a los elementos presforzados el Reglamento del Departamento del Distrito Federal en sus Normas Técnicas Complementarias de Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado señala lo siguiente:

En la fabricación de elementos presforzados se usará concreto clase 1, y sólo se permitirá el uso de tendones adheridos.

En todo elemento de concreto presforzado deben revisarse los estados límite de falla y los de servicio; y también se tomarán en cuenta las concentraciones de esfuerzos debidos al presfuerzo.

Además, señala que un elemento puede ser de presfuerzo parcial o de presfuerzo total.

Y para definir cada uno, se debe calcular el índice de presfuerzo:

$$I_p = \frac{A_{sp} f_{Bp}}{A_B f_{By} + A_B f_y}$$

Donde:

$A_{sp}$  = Área de acero presforzado.

$A_B$  = Área de acero ordinario.

$f_{Bp}$  = Esfuerzo en el acero presforzado cuando alcanza la resistencia.

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero ordinario.

El presfuerzo es total si:

$I_p$  está comprendido de 0.9 a 1.0

El presfuerzo es parcial si:

$I_p$  está comprendido de 0.6 a 0.9

A continuación se señalan en forma general la de revisión de los estados límite de falla y de servicio; en donde se tendrá que revisar al elemento para las diferentes condiciones de carga:

#### REVISIÓN DE LOS ESTADOS LIMITE DE FALLA

- Flexión y flexocompresión
- Fuerza cortante
- Pandeo debido al presfuerzo

#### REVISIÓN DE LOS ESTADOS LIMITES DE SERVICIO

Para elementos con presfuerzo total:

- Esfuerzos permisibles en el concreto
- Esfuerzos permisibles en el acero de presfuerzo
- Deflexiones

**Para elementos de presfuerzo parcial:**

- a) Esfuerzos permisibles en el concreto**
- b) Esfuerzos permisibles en el acero de presfuerzo**
- c) Deflexiones**
- d) Agrictamiento**

# CAPITULO VI

## APENDICE

## CAPITULO VI

### FACTOR DE CARGA

El factor de carga es el valor que toma en cuenta la variabilidad de las cargas.

En el Diseño Elástico se aplican los valores admisibles para el diseño, es decir los calculados en el proceso de análisis.

Sin embargo para el Diseño Plástico se emplean valores últimos de diseño; así para ello el ACI 318-87 señala lo siguiente:

Para cargas permanentes y variables (Muerta y viva):

$$V = 1.4 D + 1.7 L$$

Para cargas permanentes y eventuales (Muerta y viva):

$$V = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.7 w)$$

ó también:

$$V = 0.9 D + 1.3 w$$

Con respecto a estos factores de carga el RDDF NTC-87, subraya:

Permanentes y variables (Muerta y viva):

Si no hay aglomeración:

$$F.C = 1.4$$

Si hay aglomeración:

$$F.C = 1.5$$

Permanentes y eventuales (Muerta y viva):

Con acciones o fuerzas favorables a la estructura:

$$F.C = 1.1$$

Ninguna acción:

$$F.C = 0.9$$

## FACTOR DE SEGURIDAD

El factor de seguridad es la relación que existe entre la carga que causa el colapso y la carga de servicio.

Para el Diseño Elástico:

Permanentes:

$$\text{Concreto} = 2.2 ; f_c = 0.45 f_c$$

$$\text{Acero} = 2.0 ; f_t = 0.50 f_t$$

Permanente y eventual:

$$\text{Concreto} = 1.50$$

$$\text{Acero} = 1.33$$

Para valores últimos del ACI 318-87, se tiene:

Flexión:

$$\Phi = 0.90$$

Cortante y torsión:

$$\Phi = 0.85$$

Columnas zunchadas:

$$\Phi = 0.75$$

Columnas con estribos:

$$\Phi = 0.70$$

Aplastamiento:

$$\Phi = 0.70$$

**Mientras que el RDDF NTC-87:**

**Flexión:**  $F_R = 0.90$

**Cortante y Torsión:**  $F_R = 0.80$

**Columnas zunchadas:**  $F_R = 0.80$

**Columnas con estribos:**  $F_R = 0.70$

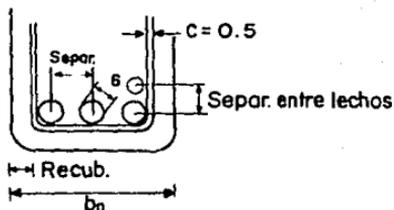
**Aplastamiento:**  $F_R = 0.70$

**Zapatas:**  $F_R = 0.70$

## COLOCACION DEL ACERO DE REFUERZO

En cuanto a la colocación del acero de refuerzo se tienen las siguientes especificaciones:

Por ACI 318-87:



Colocación de las varillas en un lecho:

$$b_n = 2 (\text{Recub.} + c) + \text{No. Varill. } \delta + (\text{No. Varill.} - 1) \text{ Separación}$$

Separación de varillas cara a cara:

$$S > \delta$$

$$S = 2.5 \text{ [cm]}$$

Recomienda:

$$S = 1 \text{ 1/3 T.M.A.}$$

Separación entre lechos cara a cara:

$$S > 2.5 \text{ [cm]}$$

Recubrimientos:

En contacto con el terreno:

$$\text{Recubrimiento} = 7 \text{ [cm]}$$

Sujeto al intemperismo del #6 al #12:

$$\text{Recubrimiento} = 5 \text{ [cm]}$$

Sujeto al intemperismo menor del #5:  
**Recubrimiento = 4 [cm]**

No expuesto al intemperismo:

Losas y muros:  
Varillas del #12:

**Recubrimiento = 4 [cm]**

Varillas del #11 ó menos:  
**Recubrimiento = 2 [cm]**

En refuerzo principal, anillos, estribos en vigas, traveses y columnas:

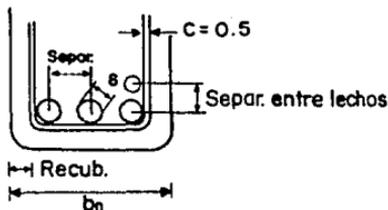
**Recubrimiento = 4 [cm]**

En cascarones y placas:

Varillas > #6:  
**Recubrimiento = 2 [cm]**

Varillas < #5:  
**Recubrimiento = 1.5 [cm]**

Por el RDDF NTC-87:



Colocación de las varillas en un lecho:

$$b_n = 2 (\text{Recub.} + c) + \text{No. Varill.} \cdot \delta + (\text{No. Varill.} - 1) \text{ Separación}$$

Recubrimiento normal de cara a cara:

$$\text{Recubrimiento} > 1.0$$

$$\text{Recubrimiento} > \delta$$

Recubrimiento para medios abrasivos ó en contacto con el terreno:

Libre:

$$\text{Recubrimiento} = 5 \text{ [cm]}$$

Plantilla:

$$\text{Recubrimiento} = 3 \text{ [cm]}$$

Separación de varillas cara a cara:

Vigas:

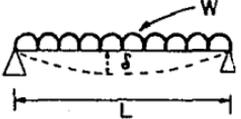
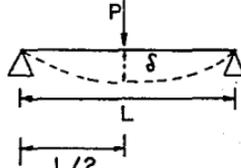
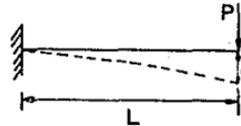
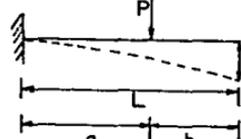
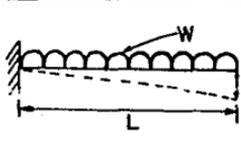
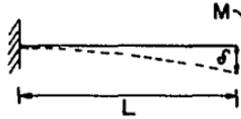
$$S > \delta$$

$$S > 1.5 \text{ T.M.A}$$

Columnas:

$$S > 1.5 \delta$$

$$S > 1.5 \text{ T.M.A}$$

TIPO DE VIGA	MOMENTO MAXIMO	FLECHA MAXIMA INMEDIATA
	$M_{\text{máx}} = (w L^2)/8$	$\delta_{\text{máx}} = (5wL^4)/(384EI)$
	$M_{\text{máx}} = (P L)/4$	$\delta_{\text{máx}} = (PL^3)/(48EI)$
	$M_{\text{máx}} = - P L$	$\delta_{\text{máx}} = (PL^3)/(3EI)$
	$M_{\text{máx}} = - P a$	$\delta_{\text{máx}} = ((Pa^2)/(6EI))(3L-a)$
	$M_{\text{máx}} = - (w L^2)/2$	$\delta_{\text{máx}} = (wL^4)/(8EI)$
	$M_{\text{máx}} = - M$	$\delta_{\text{máx}} = (ML^2)/(2EI)$

## CONSTANTES DE CALCULO

$f'_c$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$f^*_c$	$f''_c$	$\sqrt{f^*_c}$	$0.5\sqrt{f^*_c}$	$\sqrt{f'_c}$	$0.7\sqrt{f'_c}$	$8000\sqrt{f'_c}$	$14000\sqrt{f'_c}$
150	120	102	10.95	5.48	12.25	8.57	97980	
200	160	136	12.65	6.32	14.14	9.90	113100	198000
250	200	170	14.14	7.07	15.81	11.07	126500	221400
300	240	204	15.49	7.75	17.32	12.12		242500
350	280	231.3	16.73	8.37	18.71	13.10		261900
400	320	254.1	17.89	8.94	20.00	14.00		280000

Se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$f^*_c = 0.8 f'_c$$

$$f''_c = 0.85 \text{ si } f^*_c \leq 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

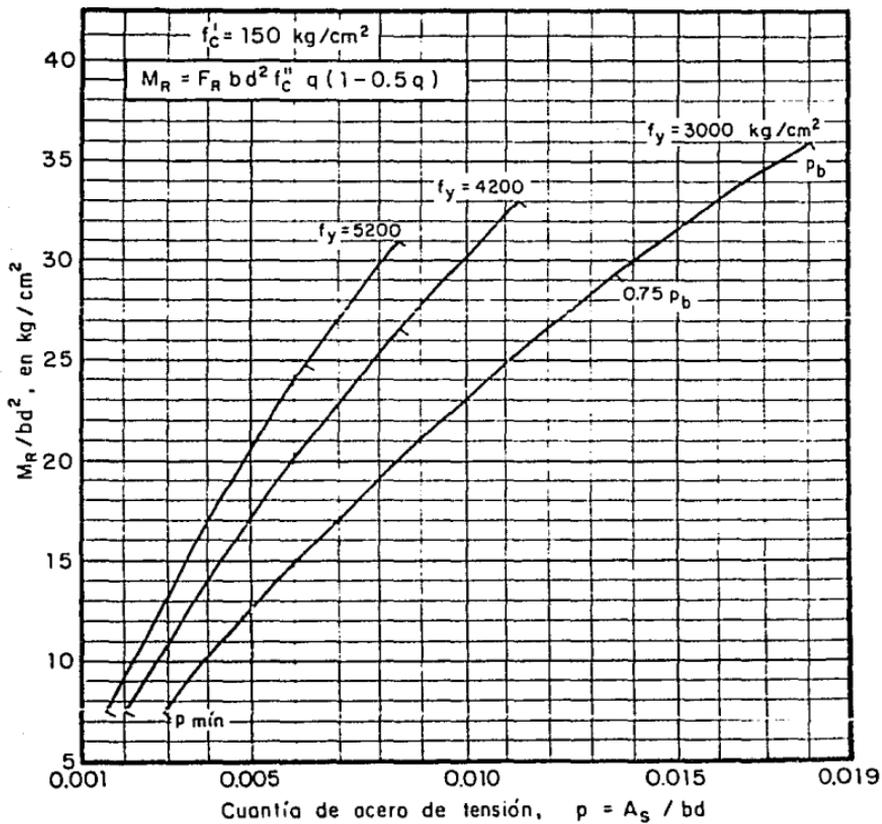
$$f''_c = (1.05 - \frac{f^*_c}{1250}) f^*_c \text{ si } f^*_c > 250 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$$

**Tabla 1. INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM**

TABLA 2 DIAMETROS, PESOS Y AREAS DE BARRAS

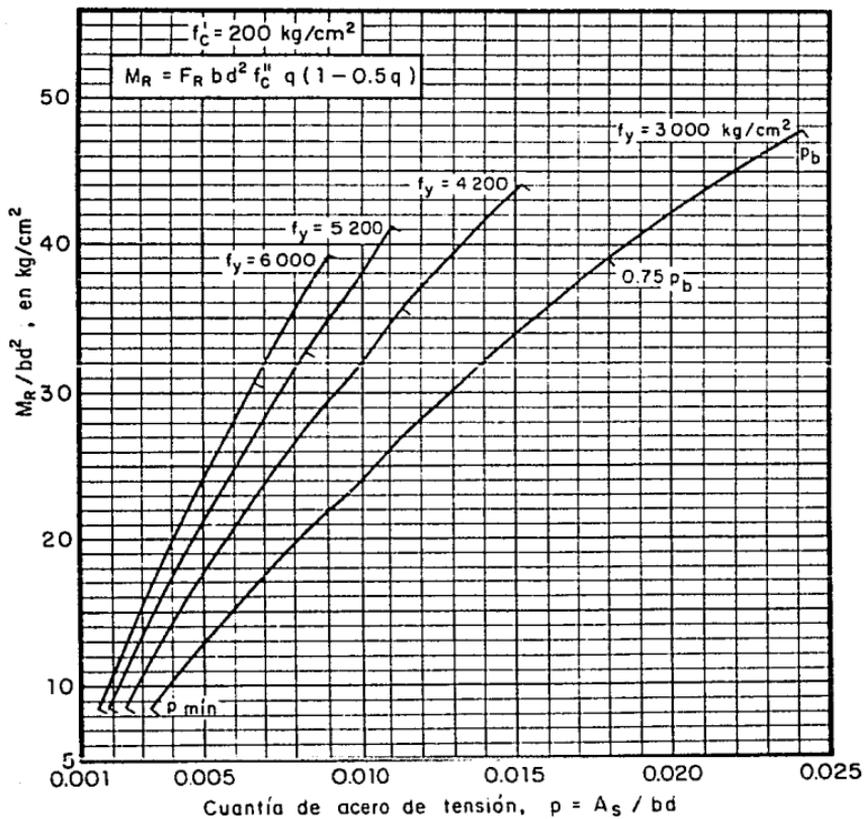
Número de designación	Diámetro nominal		Peso kg/m	NUMERO DE BARRAS										Áreas de acero, en cm <sup>2</sup>
	pulg	mm		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1/4	6.4	0.248	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	
3	3/8	9.5	0.559	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.20	
4	1/2	12.7	0.993	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	
5	5/8	15.9	1.552	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80	
6	3/4	19.0	2.235	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	
7	7/8	22.2	3.042	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80	
8	1	25.4	3.973	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	
9	1 1/8	28.6	5.028	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10	
10	1 1/4	31.8	6.207	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20	
11	1 3/8	34.9	7.511	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80	
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	

## MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES



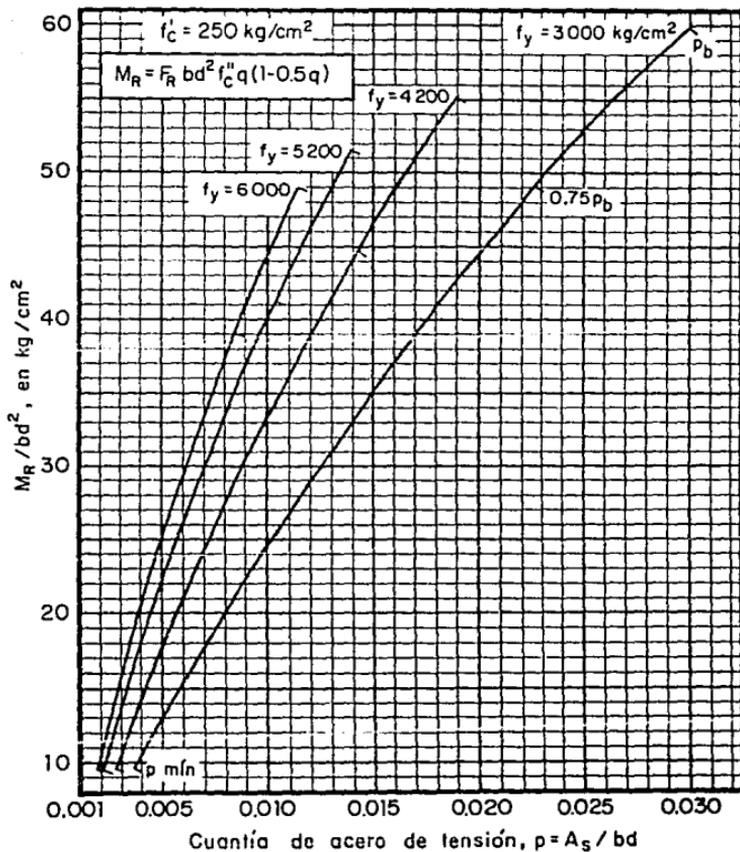
Gráfica 1. INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM

## MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES



**Gráfica 2. INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM**

### MOMENTOS RESISTENTES DE SECCIONES RECTANGULARES



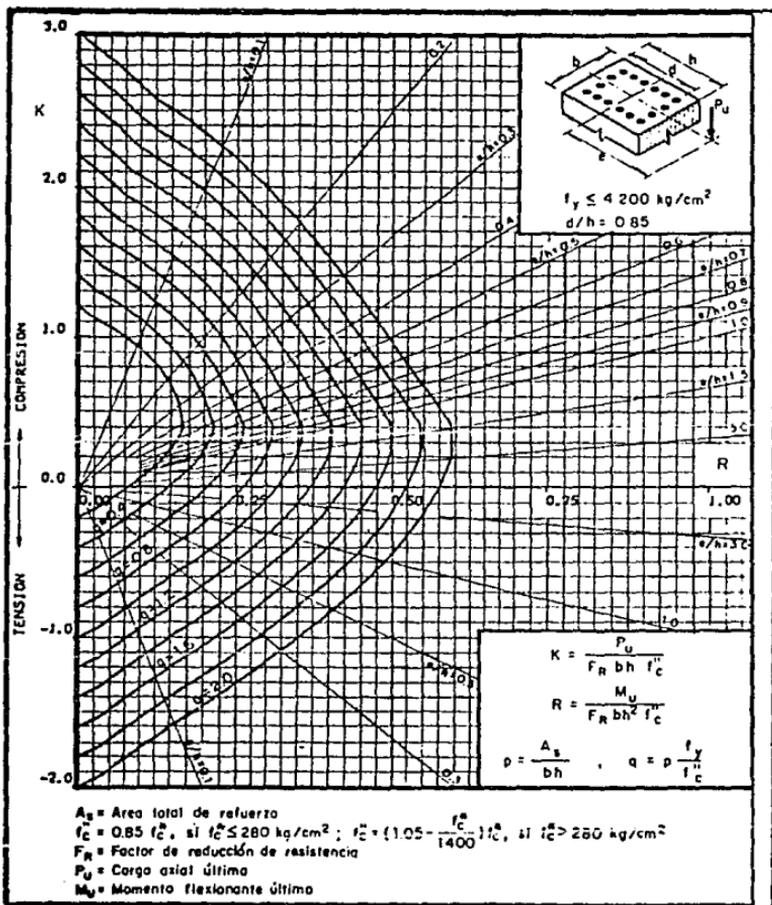
Gráfica 3. INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM

## COEFICIENTES DE MOMENTOS PARA TABLEROS RECTANGULARES, FRANJAS CENTRALES

Para franjas extremas multiplíquense los coeficientes por 0.60.

Tablero	Momento	Clase	Relación de lados corto a largo, $m = a_1/a_2$													
			0		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Interp. Todos los bordes continuos	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292
		largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	351	320	330	289	292
	positiva	corto	633	668	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130
		largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	133
De borde Un lado corto discontinuo	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346
		largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311
	Neg. en bordes dis. positiva	corto	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
		largo	630	668	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144
De borde Un lado largo discontinuo	Neg. en bordes interiores	corto	1060	1143	583	674	514	546	453	481	397	420	346	364	297	311
		largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	426	347	384	315	346
	Neg. en bordes dis. positiva	corto	651	0	367	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0
		largo	751	912	334	366	285	312	241	263	207	216	164	175	129	135
De esquina Un lado adyacentes discontinuos	Neg. en bordes interiores	corto	1050	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364
		largo	600	713	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364
	Neg. en bordes dis. continuos	corto	651	0	367	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0
		largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
positiva	corto	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153	
	largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153	
Aislada cuatro lados dis. continuos	Neg. en bordes discontinuos	corto	570	0	350	0	330	0	470	0	430	0	300	0	330	0
		largo	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0
	positiva	corto	1100	1670	830	1380	800	1330	720	1190	640	1070	570	950	500	830
		largo	200	250	500	830	500	630	500	630	500	630	500	630	500	630

Tabla 4.1. RDDF NTC-87 DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO



**DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION UNIAxIAL,  
DEL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM**

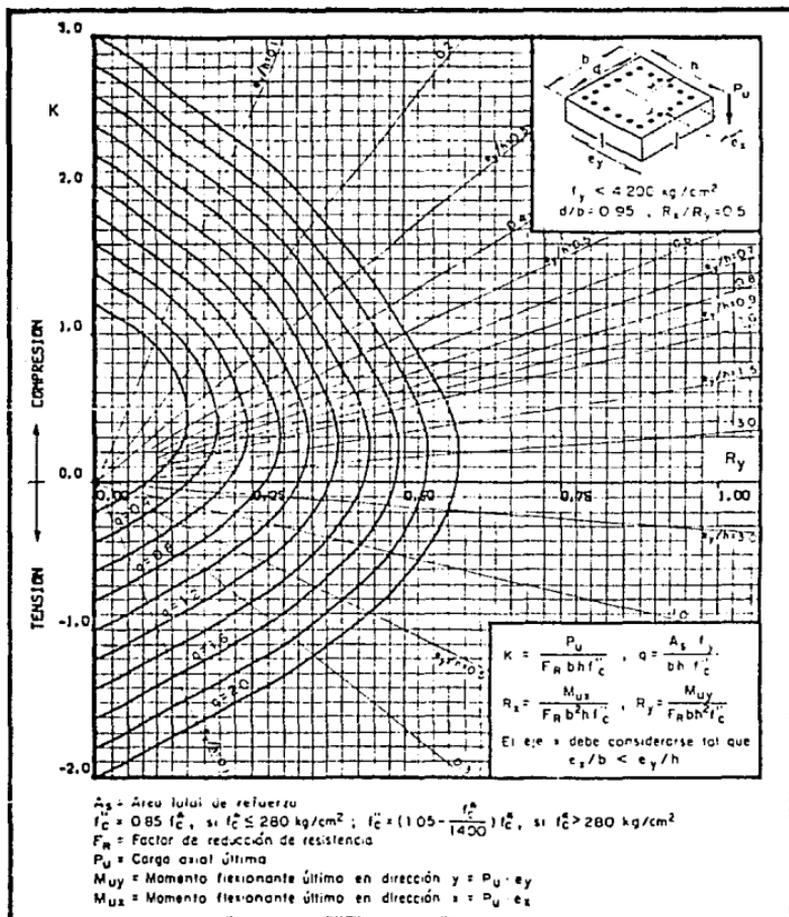


DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION BIAIXAL,  
DEL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM

## ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

En una prueba de compresión triaxial al someter al espécimen de suelo a esfuerzos normales de compresión, cuya magnitud depende de la dirección del esfuerzo; la diferencia entre la magnitud de los esfuerzos en diferentes direcciones, ocasiona a su vez la generación de esfuerzos cortantes en planos inclinados dentro del elemento. Para valuar dichos esfuerzos cortantes se hace necesario determinar el estado de esfuerzos del elemento, lo cual se ve a continuación:

Las ecuaciones analíticas que determinan los esfuerzos normales y cortantes (Esfuerzos principales), en cualquier plano son:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (1)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

Donde:

$\sigma_x$  = Esfuerzo normal, aplicado en la dirección del eje x.

$\sigma_y$  = Esfuerzo normal, aplicado en la dirección del eje y.

$\tau_{xy}$  = Esfuerzo cortante, aplicado en forma paralela en los planos x e y.

$\theta$  = Angulo que define la dirección del plano inclinado en el que se desea conocer el estado de esfuerzos.

$\sigma_{x_1}$  = Esfuerzo normal correspondiente al plano de inclinación  $\theta$ .

$\tau_{x_1 y_1}$  = Esfuerzo cortante correspondiente al plano de inclinación  $\theta$ .

Derivando la expresión (1):

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Entonces:

$$2\tau_{xy} \cos 2\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta$$

Y:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

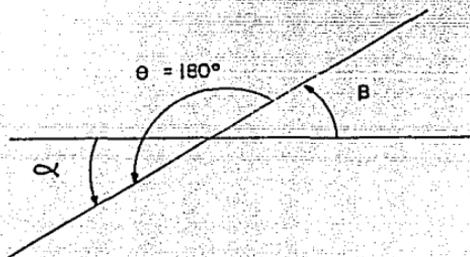
Finalmente la orientación de los esfuerzos principales, está dada:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad (3)$$

Al tomar la derivada de la ecuación (1), y al resolverla se obtienen los valores de  $\theta$  en los cuales  $\tau_{11}$  es máximo o mínimo.

El subíndice p, indica que  $\theta_p$ , define la orientación de los planos principales.

La ecuación (3) tiene 2 raíces:



$$\tan \alpha = \tan \beta$$

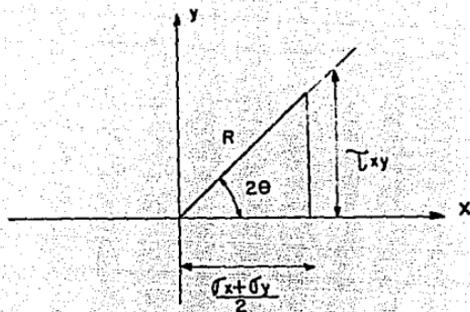
$$\text{sen } \beta = -\text{sen}(\beta + 180^\circ)$$

$$\text{cos } \beta = -\text{cos}(\beta + 180^\circ)$$

Una de ellas define al plano donde actúa el esfuerzo normal máximo y otra al esfuerzo normal mínimo.

Los valores de los esfuerzos principales pueden calcularse fácilmente al sustituir cada uno de los valores de  $\theta_p$  en la expresión de esfuerzos de (1) y (2).

De la ecuación (2):



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{R}$$

Al sustituir el sen y cos en la expresión (1), se determinan la magnitud de los esfuerzos principales; quedando:

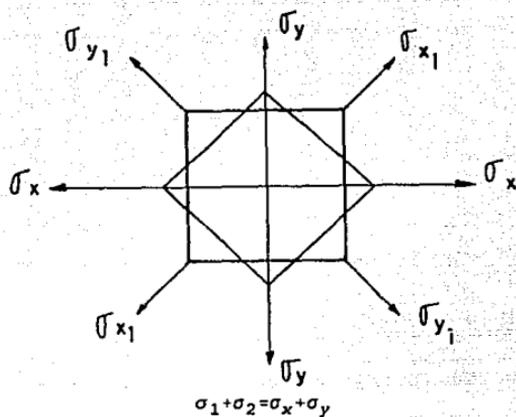
Esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esfuerzo normal mínimo:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Y se tiene que cumplir:



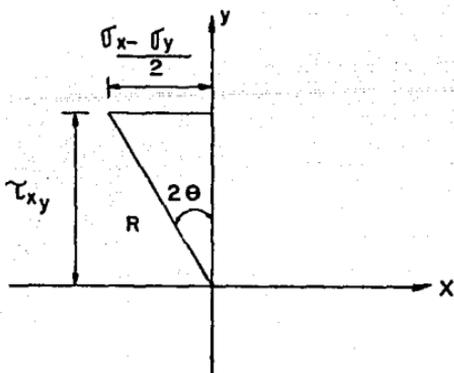
Derivando la expresión ( 2 ):

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

De tal manera que la orientación de los esfuerzos principales son:

$$\tan 2\theta_p = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Teniendo:



$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2}}{R}$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Entonces:

$$R = \sqrt{-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Sustituyendo  $\operatorname{sen}$  y  $\operatorname{cos}$  en la ecuación (2), se obtiene la magnitud de los esfuerzos principales:

Esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{xy_1} = + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esfuerzo cortante mínimo:

$$\tau_{xy_2} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Es común utilizar un método gráfico para la determinación de los esfuerzos principales, como es el método del Círculo de Mohr y el método del gráfico del Polo Fijo.

## CONCLUSIONES

Es preciso señalar la importancia del planteamiento del trabajo, ya que tiene la facultad de presentar una recopilación de información adecuada, que permite que se asimile de lo elemental a lo más complejo. Esto es con la finalidad de comprender las limitaciones que se tienen como alumno; ya que generalmente no se tienen los antecedentes necesarios. Tomando en cuenta que el tema del trabajo presentado forma parte de la columna vertebral de la Licenciatura de Ingeniería Civil, además de uno de los primeros en dar formación al estudiante a cerca de los elementos estructurales constituidos por concreto reforzado.

Debido a esto, primeramente se presentó el análisis del comportamiento del elemento sujeto a una determinada sollicitación para que se comprenda el fenómeno, pueda interpretarse y posteriormente desarrollarse, que es generalmente como se aborda cualquier tema.

Genéricamente como alumnos hacemos lo contrario, ya que se comienza por el desarrollo posterior se trata de comprender el fenómeno; como consecuencia se tiene el bajo nivel del estudiante en temas subsecuentes o de la seriación de materias que preceden o anteceden a está, y a otras también.

Una de las experiencias fue tomar un doble papel, es decir ser transmisor y receptor al mismo tiempo, y el reto de tratar de conjuntar ambos papeles, para lograr lo mejor posible la transcripción del tema en desarrollo. Aunando a esto el entusiasmo para crear una motivación a mis compañeros.

Por otra parte, una de las inquietudes que me motivaron fue la inexistencia de una actualización de los apuntes de la materia, y que en está integración se logra hasta el año en curso.

Concluyendo con el propósito primordial de la realización del presente, que es la utilidad y servicio que puede llegar a tener en un próximo futuro.

## BIBLIOGRAFIA

APUNTES DE MECANICA DE MATERIALES, Cuaderno 2. Francisco Robles, Oscar M. González Cuevas. Facultad de Ingeniería, UNAM.

GERE-TIMOSHENKO. *Mecánica de Materiales*. Grupo Editorial Iberoamericana, 2a. Edición, México, 1987.

S.TIMOSHENKO Y D.H. YOUNG. *Elementos de Resistencia de Materiales*. Editorial Montaner y Simón, S.A., México, 1986.

JOHN N. CERNICA. *Resistencia de Materiales*. Editorial C.E.C.S.A., 2a. Edición, México, 1982.

FERDINAND L. SINGER. *Resistencia de Materiales*. Editorial Harla, 2a. Edición, México, 1981.

OSCAR GONZALEZ CUEVAS Y FRANCISCO ROBLES F. *Aspectos Fundamentales de Concreto Reforzado*. Editorial Limusa, México, 1990.

EDWARD G. NAWY. *Un Enfoque Básico de Concreto Reforzado*. Editorial Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1989.

EUGENIO PESCHARD. *Resistencia de Materiales*. Editorial Universidad Nacional Autónoma de México, 1985. Volumen 1.

EUGENIO PESCHARD. *Resistencia de Materiales*. Editorial Universidad Nacional Autónoma de México, 1985. Volumen 2.

EGOR P. POPOV. *Introducción a la Mecánica de Sólidos*. Editorial Limusa, México, 1988.

EDWARD F. BYARS Y ROBERT D. SNYDER. *Mecánica de Cuerpos Deformables*. Presentaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México, 1980.

T. Y. LIN. *Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado*. Editorial C.E.C.S.A., México, 1986.

APUNTES DE MECANICA DE MATERIALES III. Manuel Díaz Canales. División de Ingeniería Civil Topográfica y Geodésica, Departamento de Estructuras, Facultad de Ingeniería, UNAM.

COMENTARIOS, AYUDAS DE DISEÑO Y EJEMPLOS DE LAS NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO, DDF. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM. No. ES-2, 1991.

PROPIEDADES MECANICAS DE LA MAMPOSTERIA, Series del Instituto de Ingeniería, UNAM.

RECOMENDACIONES PARA EL DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE MAMAPOSTERIA, Series del Intituto de Ingeniería, UNAM.

REGLAMENTO DEL DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL. Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.

REGLAMENTO DEL DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL. Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería, Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Reglamento de las Construcciones de Concreto, ACI 318-87, IMCYC.

**Apuntes de clase de la asignatura de Mecánica de Materiales II.  
Semestre 88-2.**

**Apuntes de clase de la asignatura de Geotecnia III.  
Semestre 89-1.**

**Apuntes de clase de la asignatura de Estructuras de Concreto.  
Semestre 91-1.**