

01162 1  
20j-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

CALCULO DE FLUJO NO PERMANENTE  
A SUPERFICIE LIBRE  
CON SALTOS HIDRAULICOS

TESIS DE GRADO  
MAESTRIA EN HIDRAULICA

RAUL MONTERO MATAMOROS

MÉXICO D.F  
MARZO 1992



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES. FLUJO NO PERMANENTE	3
2.1 Introducción	3
2.2 Definiciones	3
2.3 Derivación de las ecuaciones de flujo no permanente	4
2.3.1 Ecuación de continuidad	5
2.3.2 Ecuación dinámica	8
3. SALTO HIDRÁULICO	12
3.1 Introducción	12
3.2 Flujo no permanente. Velocidad absoluta de onda y celeridad	14
3.3 Función cantidad de movimiento	19
3.4 Ecuación de tirantes conjugados	21
3.4.1 Ecuación de tirantes conjugados. Flujo permanente	22
3.4.2 Ecuación de tirantes conjugados. Flujo no permanente	24
3.5 Celeridad, velocidad absoluta y altura de onda en una sección rectangular	24
4. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS	28
4.1 Introducción	28
4.2 Definiciones y derivación del método	29
4.3 Diferencias finitas	33
4.4 Interpolación de Lagrange	34
5. MODELO NUMÉRICO	39
5.1 Introducción	39
5.2 Ecuaciones de Saint-Venant	40
5.3 Método de las características	40
5.4 Solución de las ecuaciones	43
5.4.1 Resistencia al flujo y pendiente del fondo nulas	44
5.4.2 Resistencia al flujo	45
5.5 Tipo de flujo	45
5.6 Condiciones iniciales y de frontera	45
5.7 Solución numérica	48
5.7.1 Puntos interiores	48
5.7.2 Condición de frontera	52

5.8 Condición de frontera móvil	56
<b>6. EJEMPLOS</b>	<b>60</b>
6.1 Introducción	60
6.2 Ejemplos	61
<b>7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>68</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>71</b>
<b>APÉNDICE</b>	

## 1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los casos de flujos a superficie libre el movimiento del agua es no permanente. Se conoce como flujo no permanente a superficie libre cuando la velocidad o el tirante varían con el tiempo y la distancia. Estos cambios pueden ser resultado de un fenómeno natural (lluvia) o por la acción del hombre (operación de compuertas).

Como las variaciones se presentan predominantemente en una dirección espacial que es una que coincide con el eje del cauce, el análisis puede hacerse en forma unidimensional. El comportamiento del flujo no permanente unidimensional es descrito mediante las ecuaciones de Saint-Venant (continuidad y dinámica), las cuales forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, con determinadas condiciones iniciales y de frontera. En este sistema existen dos variables independientes y dos dependientes, en el cual se requiere conocer el valor de ellas en cada instante. Para obtener la solución de este sistema, se emplea en este trabajo el método de las características; mediante el cual, se convierte el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a uno que contiene derivadas totales.

En esta tesis se ha puesto especial interés al estudio del movimiento del salto hidráulico, el cual se puede definir como un fenómeno local

móvil donde existe un cambio de régimen (de supercrítico a subcrítico); el salto puede moverse hacia aguas arriba o hacia aguas abajo, dependiendo de las condiciones de frontera. El estudio de este fenómeno se enfoca a conocer el sentido y la velocidad de propagación del salto a lo largo del canal.

En el capítulo dos de este trabajo se hace una revisión de las ecuaciones fundamentales que describen el comportamiento del flujo no permanente (ecuaciones de continuidad y dinámica).

El capítulo tres está dedicado al estudio del salto hidráulico; con el principio de cantidad de movimiento se hace un análisis del salto hidráulico y se establece la ecuación de tirantes conjugados, tanto para flujo permanente como para no permanente.

En el capítulo cuatro se analizan las herramientas para obtener la solución de las ecuaciones planteadas en los capítulos previos. Se aplica el método de las características, el concepto de diferencias finitas y la interpolación de Lagrange.

Con base en los conceptos de los capítulos 2 a 4, en el cinco se elabora un modelo numérico para la simulación de flujo no permanente, que considera el movimiento del salto hidráulico.

Para la aplicación del modelo numérico planteado en el capítulo cinco, se muestran varios ejemplos en el seis.

En el capítulo siete se plantea conclusiones y recomendaciones.

## 2. ECUACIONES FUNDAMENTALES. FLUJO NO PERMANENTE

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se analizarán las ecuaciones fundamentales que describen el comportamiento del flujo no permanente a superficie libre: la ecuación dinámica y la de continuidad; las cuales para su solución existen diversos métodos.

### 2.2 DEFINICIONES

Si el tirante o la velocidad en un punto de un flujo varían con el tiempo, el flujo es llamado: "flujo no permanente". Este tipo de flujo es el más común dentro de la naturaleza. Dependiendo de la rapidez de la variación del tirante, el flujo no permanente puede ser clasificado como: rápidamente variado o gradualmente variado.

En flujo rápidamente variado, el cambio de la superficie del agua se presenta en un tramo corto, que consiste generalmente en una discontinuidad. El componente vertical de la aceleración, desempeña un papel importante en el fenómeno, mientras que la pérdida de energía por el efecto de la fricción en las paredes del canal es relativamente pequeña en comparación con el efecto dinámico del flujo.

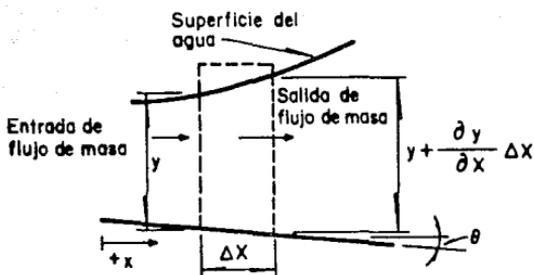
En el flujo gradualmente variado, las modificaciones de la superficie libre del agua son moderadas, y el cambio del tirante es poco a poco. El componente vertical de la aceleración de las partículas del agua es despreciable en comparación con la aceleración total, mientras que el efecto de la fricción del canal es generalmente apreciable y no debe ser omitido en un análisis cuidadoso.

### 2.3 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO NO PERMANENTE

Las ecuaciones de continuidad y dinámica describen el flujo no permanente en un flujo unidimensional, ambas son conocidas como "Ecuaciones de Saint-Venant". Éstas se obtienen al expresar al tirante,  $y$ , y a la velocidad,  $V$ , como variables dependientes. Estas ecuaciones se basan en las hipótesis siguientes:

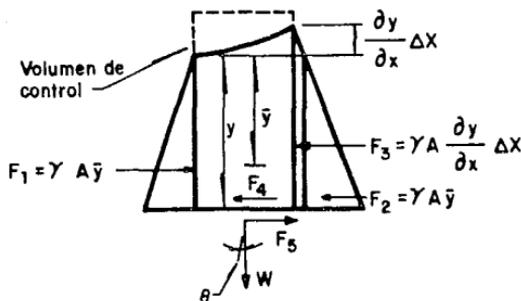
1. La pendiente del fondo del canal,  $S_0$ , es pequeña por lo que el ángulo  $\theta$  que forma la plantilla con la horizontal cumple con:  
 $\text{sen } \theta \approx \tan \theta \approx S_0$  y  $\text{cos } \theta \approx 1$ .
2. La variación de la superficie libre del agua es gradual. Por lo que los componentes normales a la dirección del flujo de aceleración y velocidad se consideran despreciables, por lo cual la distribución de presiones se considera hidrostática.
3. En el flujo no permanente, las pérdidas de carga debidas a la fricción son calculadas con expresiones de flujo uniforme.
4. La distribución de velocidades en la sección del canal es uniforme. Los coeficientes de Coriolis ( $\alpha$ ), y Boussinesq ( $\beta$ ), son iguales a uno.
5. El canal es prismático; es decir, el canal tiene alineamiento y forma constante.

De acuerdo al volumen de control mostrado en la fig 2.1 el eje X corresponde al fondo del canal y es positivo en dirección aguas abajo. La profundidad del flujo,  $y$ , está medida verticalmente desde el fondo del canal. De esta manera el eje X y Y no son ortogonales; sin embargo la pendiente del canal se supone pequeña por lo que esta discrepancia no produce errores significativos.



Distancia	$x$	$x + \Delta X$
Area del flujo	$A$	$A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta X$
Velocidad	$V$	$V + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta X$

a)



b) Diagrama de cuerpo libre

FIG 2.1 Notación para las ecuaciones de continuidad y dinámica.

### 2.3.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad para un flujo no permanente puede ser establecida considerando la conservación de masa en un volumen de control como: "El cambio en el tiempo de la cantidad de masa almacenada en el volumen de control es igual a la variación en el tiempo de la masa que entra menos la que sale".

Si se observa la fig 2.1, se puede decir que la cantidad de masa que entra al volumen de control es igual

$$\{\text{cantidad de masa que entra}\} = \frac{\gamma}{g} A V \quad (2.1)$$

donde  $\gamma$  es el peso específico del agua y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Ahora, la cantidad de masa que sale del volumen de control es

$$\{\text{cantidad de masa que sale}\} = \frac{\gamma}{g} \left[ A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \left[ V + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.2)$$

Si se resta la cantidad de masa que entra (ec 2.1), menos la que sale (ec 2.2), se puede encontrar el cambio en el tiempo de la cantidad de masa almacenada en el volumen de control

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de la cantidad} \\ \text{de masa almacenada} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de masa} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de masa} \\ \text{que sale} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de la cantidad} \\ \text{de masa almacenada} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} A V - \frac{\gamma}{g} \left[ A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \left[ V + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.3)$$

al efectuar las multiplicaciones, la ecuación anterior queda de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de la cantidad} \\ \text{de masa almacenada} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} A V - \frac{\gamma}{g} \left[ A V + A \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + V \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.4)$$

despreciando los términos de segundo orden, se obtiene la cantidad de masa neta en el volumen de control

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de la cantidad} \\ \text{masa almacenada} \end{array} \right\} = - \frac{\gamma}{g} \left[ A \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + V \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.5)$$

Por otra parte, el cambio de la masa almacenada con respecto al tiempo en el volumen de control es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de la cantidad} \\ \text{masa almacenada} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \quad (2.6)$$

Por lo que el cambio de masa en el volumen de control en el tiempo es

igual a la variación neta de la cantidad de masa, de esta manera las ecs 2.5 y 2.6 representan lo mismo, es decir

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x = - \frac{\gamma}{g} \left[ A \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + V \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.7)$$

Se puede eliminar el factor  $\left( \frac{\gamma}{g} \Delta x \right)$  de ambos lados de la ecuación anterior, y reordenando queda la siguiente expresión

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

Si se considera un canal prismático con área hidráulica, A, que es conocida en función del tirante, y, las derivadas de A, pueden ser expresadas en términos de y, de la siguiente manera

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = B(y) \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = B(y) \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

donde se ha sustituido  $dA/dy$  por el ancho de superficie libre,  $B(y)$ , el cual está en función del tirante y.

Sustituyendo las ecs 2.9 en la 2.8, se obtiene

$$B \frac{\partial y}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} + V B \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

dividiendo entre B, resulta

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

Como el gasto, Q, se define como  $Q = V A$ , la variación del gasto en la distancia es

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.12)$$

Si se toma en cuenta las ecs 2.9 en la 2.12, se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = V B \frac{\partial y}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.13)$$

Despejando el término  $B \frac{\partial y}{\partial t}$  de la ec 2.10 e igualándolo con la ec 2.13 se encuentra

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - B \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.14)$$

reordenando términos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.15)$$

Las ecs 2.10 o 2.15 corresponden a la ecuación de continuidad para flujo no permanente a superficie libre.

### 2.3.2 ECUACIÓN DINÁMICA

La ecuación dinámica para flujo no permanente considera la conservación de cantidad de movimiento, por lo que la cantidad de movimiento almacenado en el volumen de control (fig 2.1), es igual al cambio neto de la cantidad de movimiento en el volumen más la suma de fuerzas que actúan sobre él.

De acuerdo con la figura 2.1b, las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son las siguientes

$$F_1 = -F_2 = \gamma A \bar{y} \quad (2.16)$$

$$F_3 = \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x \quad (2.17)$$

$$F_4 = \gamma A S_f \Delta x \quad (2.18)$$

En la fig 2.1b,  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  representan a las fuerzas de presión; la fuerza de presión que se ejerce sobre la pared vertical de aguas abajo del volumen de control es dividida en dos componentes,  $F_2$  y  $F_3$ . Siendo  $F_3$  la fuerza de presión debida al incremento de profundidad en esta sección, en el análisis de ésta no se incluyen los términos de orden mayor.  $F_4$  es la fuerza debida a la fricción;  $F_5$  es el componente en x del peso del agua del volumen de control;  $\theta$  es el ángulo formado entre el fondo del canal y el eje horizontal x (positivo en dirección aguas abajo);  $S_f$  es la pendiente de energía.

El valor de la pendiente de energía  $S_f$  puede ser determinado utilizando cualquier fórmula para flujo uniforme (por ejemplo, la de Manning) y dado que  $\theta$  tiene un valor pequeño,  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx S_0$ , donde  $S_0$  es la

pendiente del fondo, de esta manera el valor del componente horizontal del peso del agua del volumen de control es  $F_5$ , y se obtiene de la siguiente manera

$$F_5 = \gamma A \Delta x S_0 \quad (2.19)$$

Cuando la dirección de la fuerza resultante,  $F$ , que actúa en el volumen de control, es igual a la del flujo, esta fuerza se considera positiva; de acuerdo a lo anterior la magnitud de  $F$ , será

$$F = \sum F = F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + F_5 \quad (2.20)$$

De acuerdo a las ecs 2.16 a 2.19, la 2.20 se expresa de la siguiente manera

$$F = \gamma A \bar{y} - \gamma A \bar{y} - \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x - \gamma A S_f \Delta x + \gamma A \Delta x S_0 \quad (2.21)$$

sumando términos queda

$$F = -\gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x - \gamma A S_f \Delta x + \gamma A \Delta x S_0 \quad (2.22)$$

Por otra parte, la cantidad de movimiento a la entrada del volumen de control es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de movimiento} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} A V^2 \quad (2.23)$$

La cantidad de movimiento a la salida del volumen de control es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de movimiento} \\ \text{que sale} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} \left[ A V^2 + \frac{\partial}{\partial x} (A V^2) \Delta x \right] \quad (2.24)$$

Por lo que la cantidad de movimiento en el volumen de control será la diferencia de las ecs 2.24 y 2.23

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de movimiento} \\ \text{almacenado} \end{array} \right\} = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial x} (A V^2) \Delta x \quad (2.25)$$

La variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control respecto al tiempo, esta dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variación de cantidad de} \\ \text{movimiento respecto al tiempo} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\gamma}{g} A V \Delta x \right) \quad (2.26)$$

Conforme a la ley de conservación de cantidad de movimiento, la variación de la cantidad de movimiento en el tiempo es igual a la cantidad de movimiento almacenado en el volumen de control más la suma de las fuerzas que actúan sobre éste. Por lo anterior las ecs 2.22, 2.25 y 2.26 se relacionan de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\gamma}{g} A V \Delta x \right) = - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial x} (A V^2) \Delta x - \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \gamma A S_0 \Delta x - \gamma A S_f \Delta x \quad (2.27)$$

Dividiendo entre  $(\gamma/g) \Delta x$  la ecuación anterior, se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} (A V) = - \frac{\partial}{\partial x} (A V^2) - g A \frac{\partial y}{\partial x} + g A S_0 - g A S_f \quad (2.28)$$

agrupando términos se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (A V) + \frac{\partial}{\partial x} (A V^2) + g A \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_0 - S_f) \quad (2.29)$$

desarrollando las derivadas

$$A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial t} + V^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2 A V \frac{\partial V}{\partial x} + g A \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_0 - S_f) \quad (2.30)$$

dividiendo entre A

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{V^2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + 2 V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (S_0 - S_f) \quad (2.31)$$

ordenando términos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{A} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} \right] = g (S_0 - S_f) \quad (2.32)$$

Los términos agrupados en el paréntesis del lado izquierdo de la ecuación anterior, equivalen a la ecuación de continuidad (ec 2.8), por lo cual el valor de este término es 0, resultando la siguiente expresión

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (S_0 - S_f) \quad (2.33)$$

Las ecuaciones de continuidad (ec 2.10) y dinámica (ec 2.33) para flujo no permanente, fueron publicadas por primera vez por Saint-Venant (1871), debido a ello son conocidas como "Ecuaciones de Saint-Venant". La validez de estas ecuaciones ha sido verificada por muchas observaciones y experimentos. Sin embargo, debido a su complejidad matemática, la integración exacta de las ecuaciones, es prácticamente imposible. Para aplicaciones prácticas, la solución de las ecuaciones se puede obtener con un método numérico.

### 3. SALTO HIDRÁULICO

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

El salto hidráulico fue investigado experimentalmente por primera vez, por Bidone, científico italiano, en 1818. Esto permitió a Bélanger (1828) distinguir entre pendientes moderadas (subcríticas) y fuertes (supercríticas). Él observó que en canales de pendiente fuerte, el salto hidráulico se produce, cuando el flujo uniforme es bloqueado por un obstáculo.

Cuando existe un cambio en el comportamiento de un flujo, pasando de régimen supercrítico a subcrítico, este fenómeno es conocido como "salto hidráulico"; en el cual existe un cambio brusco en el tirante, de un nivel bajo (supercrítico) a un nivel alto (subcrítico); en este cambio se produce turbulencia con fuertes pulsaciones del nivel del agua, observándose claramente la inclusión de aire. Después de un crecimiento irregular y repentino de la superficie del agua, en un tramo relativamente corto, el flujo se regulariza de manera inmediata y continúa libremente en régimen subcrítico. Todo esto está asociado con una pérdida apreciable de energía transformada principalmente en calor.

El salto hidráulico es conocido también como una onda estacionaria. Algunos autores consideran más adecuado el nombre de onda estacionaria

que el de salto hidráulico y para ello argumentan dos razones:

- 1) Las partículas de agua tienen un movimiento como el de una onda giratoria debajo del remolino superficial que se desarrolla (fig 3.1)
- 2) El remolino es estacionario debido a que la corriente misma en el extremo aguas arriba del salto, arremete constantemente contra la corriente superficial que regresa, sin existir movimiento del conjunto hacia aguas arriba.

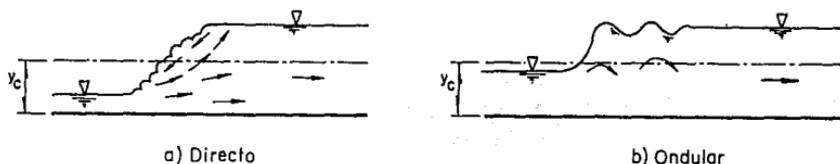


FIG 3.1 Tipos de salto hidráulico.

El salto hidráulico ocurre frecuentemente en un canal en el cual la pendiente del fondo es subcrítica y cuenta con una compuerta, este fenómeno se presentará aguas abajo de la compuerta, o en un canal con pendiente supercrítica en el cual aguas abajo exista un nivel del agua que sea mayor al tirante crítico.

Cuando el salto es bajo, es decir, el cambio de profundidad es pequeño el agua no se levantará abruptamente, pero pasará de un nivel bajo a uno alto a través de pequeñas ondulaciones disminuyendo gradualmente de tamaño. A este tipo de salto se le conoce como "salto ondular" (fig 3.1b). Cuando el salto es alto, es decir, que el cambio de tirante es grande, el salto es llamado, "salto directo" (fig 3.1a).

El efecto de la gravedad sobre el estado del flujo es representado por la relación de las fuerzas de inercia con las de gravedad, esta relación está dada por el número de froude; cuando las fuerzas de gravedad tienen mayor peso que las de inercia (la velocidad del flujo es baja), el estado del flujo es subcrítico, cuando es supercrítico las fuerzas de inercia tienen mayor influencia.

La profundidad antes del salto se le conoce como tirante inicial  $y_1$  y a

la profundidad después del salto se le conoce como tirante secuente  $y_2$ . Los tirantes inicial y secuente ( $y_1$  y  $y_2$ ) son mostrados sobre la curva de energía específica (fig 3.2). Éstos son diferentes a los tirantes alternos  $y_1'$  y  $y_2'$ , los cuales son los dos tirantes posibles para la misma cantidad de energía específica.

Los tirantes inicial y secuente son las profundidades antes y después del salto, éstos incluyen una pérdida de energía  $\Delta E$ ; en otras palabras, la energía específica  $E_1$ , correspondiente a la profundidad inicial  $y_1$ , es más grande que la energía específica  $E_2$ , del tirante secuente  $y_2$ , en una cantidad igual a la pérdida de energía  $\Delta E$ . Si no hubiera pérdidas de energía, los tirantes inicial y secuente serían iguales a los tirantes alternos  $y_1'$  y  $y_2'$  en un canal prismático.

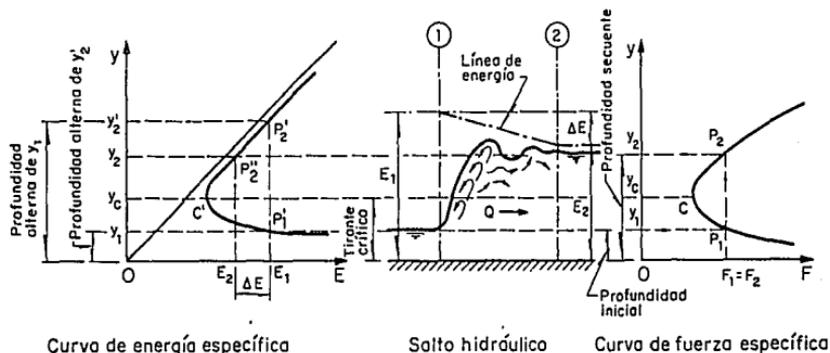


FIG 3.2 Salto hidráulico interpretado por curvas de energía y fuerza específica.

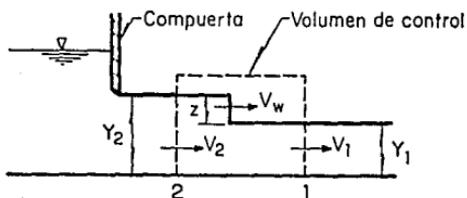
### 3.2 FLUJO NO PERMANENTE. VELOCIDAD ABSOLUTA DE ONDA Y CELERIDAD

El fenómeno transitorio en un flujo a superficie libre es generalmente relacionado con la propagación de ondas, este fenómeno en un canal abierto da por resultado un desplazamiento apreciable de partículas de agua en dirección paralela al flujo. La velocidad con la que viaja una onda, relativa a la velocidad del flujo, es llamada celeridad,  $c$ , esta velocidad es diferente a la velocidad del flujo,  $V$ , la cual representa la rapidez temporal del cambio de posición de una partícula fluida. La velocidad de onda absoluta,  $V_w$ , en canales abiertos, es la velocidad de la onda relativa a una cierta sección fija del canal, matemáticamente

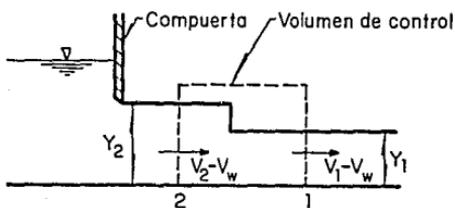
es igual a la suma vectorial de la velocidad del flujo y la celeridad de la onda.

$$V_w = V + c \quad (3.1)$$

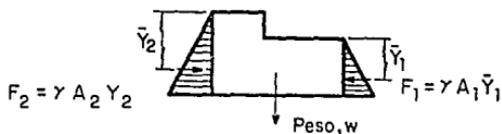
Cuando la onda se propaga a través de agua quieta, la celeridad es igual a la velocidad absoluta de la onda  $V_w$ .



a) Flujo no permanente



b) Flujo permanente equivalente



c) Diagrama de cuerpo libre del volumen de control

FIG 3.3 Velocidad absoluta de onda y celeridad.

Para un flujo unidimensional, la celeridad de onda es positiva si viaja en dirección del flujo (hacia aguas abajo), o negativa si viaja en sentido contrario (hacia aguas arriba); por lo tanto la ecuación 3.1 puede ser escrita,

$$V_w = V \pm c \quad (3.2)$$

En la fig 3.3a se observa un flujo en el instante  $t = 0$ , en el cual, una compuerta localizada aguas arriba es abierta repentinamente, lo que provoca que el gasto inicial  $Q_1$  sea incrementado, obteniendo un gasto final  $Q_2$ . Este incremento produce una onda de altura,  $z$ , la cual viaja en dirección aguas abajo.

Se nombra al tirante y a la velocidad del flujo de la sección que se encuentra a la derecha del frente de onda (condiciones iniciales) como  $y_1$  y  $V_1$  y a las variables correspondientes del lado izquierdo como  $y_2$  y  $V_2$ . La velocidad de la masa de agua entre la compuerta y el frente es aumentada de  $V_1$  a  $V_2$ , por lo que la cantidad de movimiento también crece.

Si  $V_w$  es la velocidad absoluta de onda, el flujo no permanente de la fig 3.3a puede ser convertido a flujo permanente si la velocidad  $V_w$ , es ahora la velocidad del volumen de control en dirección opuesta a la velocidad del flujo (fig 3.3b).

De acuerdo con la fig 3.3b la ecuación de continuidad puede ser escrita de la siguiente manera

$$Q = A_1 (V_1 - V_w) = A_2 (V_2 - V_w) \quad (3.3)$$

Para establecer la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se hacen las consideraciones siguientes:

- 1.- La distribución de presión en las secciones 1 y 2 es hidrostática.
- 2.- La pendiente de la plantilla del canal es igual a 0.
- 3.- No se toma en cuenta la fricción.

Se dice que las fuerzas que actúan sobre el volumen de control (fig 3.3c) son:

$$\text{Fuerza en dirección aguas arriba} \quad F_1 = \gamma \bar{y}_1 A_1 \quad (3.4)$$

$$\text{Fuerza en dirección aguas abajo} \quad F_2 = \gamma \bar{y}_2 A_2 \quad (3.5)$$

donde  $\bar{y}_1$  y  $\bar{y}_2$  son las distancias respecto a la superficie libre a los centroides de las áreas  $A_1$  y  $A_2$ .

De acuerdo a la segunda ley de movimiento de Newton, la razón de cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen de control por unidad de tiempo, es igual al producto de la masa por el cambio en la velocidad por unidad de tiempo, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{razón de cambio de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_w) [(V_1 - V_w) - (V_2 - V_w)] \quad (3.6)$$

simplificando

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{razón de cambio de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} = \frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_w)(V_1 - V_2) \quad (3.7)$$

La fuerza resultante,  $F$ , actúa sobre el volumen de control en dirección aguas abajo, la cual representa a la diferencia entre las presiones hidrostáticas sobre las áreas  $A_2$  y  $A_1$ , en las secciones 2 y 1, respectivamente

$$F = F_2 - F_1 = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (3.8)$$

Aplicando la segunda ley de movimiento de Newton, es posible igualar las ecs 3.7 y 3.8 de la siguiente manera

$$\frac{\gamma}{g} A_1 (V_1 - V_w)(V_1 - V_2) = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (3.9)$$

de la ec 3.3 se obtiene

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} (V_1 - V_w) + V_w \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ec 3.10 en la 3.9 y reordenando términos resulta

$$(V_1 - V_w)^2 = \frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (3.11)$$

Dado que la onda se encuentra en movimiento con dirección aguas abajo, la velocidad que tiene será mayor a la velocidad del flujo inicial  $V_1$ , por lo que, al despejar a  $V_w$  de la ec 3.11 se obtiene

$$V_w = V_1 + \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)} \quad (3.12)$$

Un caso podría ser que no hubiera flujo aguas abajo de la compuerta, y ésta se abriera repentinamente, por lo lo cual  $V_1 = 0$ , entonces la velocidad absoluta de la onda  $V_w$  es igual al término del radical de la ec 3.12. Si se despeja al radical, se escribe

$$V_w - V_1 = \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)} \quad (3.13)$$

Previamente se ha definido la celeridad, como la velocidad de una onda relativa al medio en que está viajando. Dado que  $V_w - V_1$  es la velocidad de onda relativa a la velocidad inicial del flujo,  $V_1$ ; de la ec 3.13 se encuentra la ecuación general de la celeridad

$$c = \pm \sqrt{\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)} \quad (3.14)$$

El signo positivo es usado cuando la onda viaja hacia aguas abajo, y negativo cuando esta viaja hacia aguas arriba.

De la ec 3.3 se puede despejar a  $V_w$  quedando la siguiente expresión

$$V_w = \frac{A_2 V_2 - A_1 V_1}{A_2 - A_1} \quad (3.15)$$

Sustituyendo la ec 3.3 en la 3.9 se encuentra una relación entre los tirantes del flujo de las secciones 1 y 2, y del gasto, de la manera siguiente

$$\frac{\gamma}{g} Q (V_1 - V_2) = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (3.16)$$

o bien

$$\frac{\gamma Q}{g} \left[ \frac{A_1}{A_1} V_1 - \frac{A_2}{A_2} V_2 \right] = A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1 \quad (3.17)$$

simplificando

$$\beta_1 Q^2 \left[ \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} \right] = A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1 \quad (3.18)$$

de esta manera se ha obtenido una relación de tirantes y gasto entre las secciones 1 y 2.

### 3.3 FUNCIÓN CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Ya que en un principio se desconoce la pérdida de energía asociada con el salto hidráulico, la aplicación de la ecuación de la energía antes y después del salto, no proporciona un medio adecuado de análisis. Por otra parte, debido a la gran variación de velocidad media entre los dos extremos del salto y al hecho de que no se requiere conocer los cambios de energía interna, es más adecuada la aplicación del principio de cantidad de movimiento en el análisis de este fenómeno.

Considérese un tramo horizontal de un canal de sección transversal cualquiera, donde se produce un salto hidráulico y, el volumen de control limitado por las secciones 1 y 2 (antes y después del salto), por el fondo del canal y por la superficie libre (fig 3.4).

Como se puede observar, el volumen de control mostrado en la fig 2.1 es similar al de la 3.4, en éste último no se ha dividido la fuerza de presión de aguas abajo en dos componentes (es decir  $P_2 = F_2 + F_3$ ).

Ahora, para la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento, se considera que se satisfacen las siguientes hipótesis:

- 1) El canal es de pendiente pequeña y de sección transversal constante. ( $F_5 = 0$ , fig 2.1)
- 2) Se desprecia la resistencia de fricción originada en la pared del canal, debido a la poca longitud del tramo en que se desarrolla el salto. ( $F_4 = 0$ , fig 2.1)
- 3) Dentro del tramo, no existe ningún obstáculo que pudiera ocasionar una fuerza de empuje dinámico desde el exterior.
- 4) Se considera que la distribución de velocidades en las secciones 1 y 2 es prácticamente uniforme y los coeficientes de Boussinesq  $\beta_1 = \beta_2$

son iguales a 1.

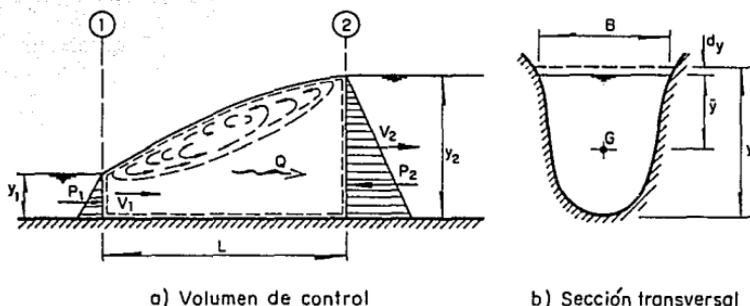


FIG 3.4 Análisis del salto hidráulico.

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control en estudio se expresa de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{suma de las fuerzas que actúan} \\ \text{sobre el volumen de control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{cantidad de movimiento} \\ \text{en el volumen de control} \end{array} \right\}$$

Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son los empujes totales debidos a la presión hidrostática; de acuerdo a la fig 3.4, las fuerzas que van en dirección del flujo y la cantidad de movimiento que entra al volumen de control se consideran positivas, por lo tanto

$$\gamma \bar{y}_1 A_1 - \gamma \bar{y}_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} A_1 V_1^2 - \frac{\gamma}{g} A_2 V_2^2 \quad (3.19)$$

donde  $\gamma$  es el peso específico del agua,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\bar{y}_1$  y  $\bar{y}_2$  son las profundidades de los centros de gravedad de las áreas en las secciones 1 y 2, respectivamente (fig 3.4b). Dividiendo entre  $\gamma$ , expresando la velocidad en términos del gasto  $Q$ , y reordenando, la ecuación anterior se puede expresar como

$$\frac{Q^2}{g A_1} + \bar{y}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + \bar{y}_2 A_2 \quad (3.20)$$

En esta ecuación se observa que los términos de ambos miembros son análogos, los cuales son la llamada función de cantidad de movimiento. A esta función también se le conoce como fuerza específica, ya que los elementos de la ecuación anterior tienen dimensiones de fuerza por

unidad de peso.

Para un gasto dado, la cantidad de movimiento es función únicamente del tirante, de manera similar a la energía específica. Para un valor dado de la función de cantidad de movimiento, la curva tiene dos posibles tirantes  $y_1$  y  $y_2$  que reciben el nombre de secuentes o conjugados.

### 3.4 ECUACIÓN DE TIRANTES CONJUGADOS

En este inciso se hace una revisión de la ecuación de tirantes conjugados tanto para flujo permanente como para no permanente.

Ordenando términos, la ec 3.2 queda

$$\bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_1} - \frac{Q^2}{g A_2} \quad (3.21)$$

factorizando el lado derecho de la ecuación anterior

$$\bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g} \left[ \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} \right] \quad (3.22)$$

Esto significa que las ecs 3.22 (flujo permanente) y 3.18 (flujo no permanente) sólo difieren en el gasto  $Q$ , ya que en él interviene la velocidad absoluta de onda  $V_w$ . Por lo que tal velocidad influye en la relación entre tirantes conjugados.

Multiplicando por  $A_2$  y realizando pasos algebraicos se puede escribir

$$\bar{y}_2 \left[ \frac{A_2}{A_1} \right]^2 A_1^2 - \bar{y}_1 \left[ \frac{A_2}{A_1} \right] A_1^2 = \frac{Q^2}{g} \left[ \frac{A_2}{A_1} \right] - \frac{Q^2}{g} \quad (3.23)$$

multiplicando por  $\frac{1}{\bar{y}_1 A_1^2}$ , considerando que  $Q = A_1 V_1$  y arreglando términos, resulta

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} \left[ \frac{A_2}{A_1} \right]^2 - \left[ \frac{A_2}{A_1} \right] - \frac{A_1^2 V_1^2}{g \bar{y}_1 A_1^2} \left[ \frac{A_2}{A_1} \right] + \frac{A_1^2 V_1^2}{g \bar{y}_1 A_1^2} = 0 \quad (3.24)$$

factorizando queda

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right) - \frac{V_1^2}{g \bar{y}_1 A_1^2} \left( \frac{A_2}{A_1} + 1 \right) = 0 \quad (3.25)$$

de esta manera de ha obtenido la ecuación de tirantes conjugados.

### 3.4.1 Ecuación de tirantes conjugados. Flujo permanente

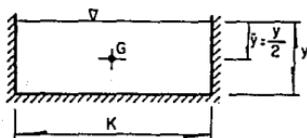


FIG 3.5 Sección rectangular.

La sección rectangular ofrece importantes simplificaciones en el análisis de las ecuaciones planteadas, por ello en lo siguiente las ecuaciones obtenidas son aplicables a una sección como la mostrada en la fig 3.5.

En este tipo de sección existen las siguientes igualdades

$$F^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{V^2}{g y} ; \quad A = K y ; \quad \bar{y} = (1/2) y \quad (3.26)$$

donde F es el número de Froude y, ahora K es el ancho de plantilla.

Considerando que las condiciones en el régimen supercrítico son conocidas, y haciendo algunos pasos algebraicos, la ec 3.25 se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{y_2^3}{y_1^3} - \frac{y_2}{y_1} - 2 F_1^2 \left[ \frac{y_2}{y_1} - 1 \right] = 0 \quad (3.27)$$

factorizando, se tiene

$$\frac{y_2}{y_1} \left[ \frac{y_2}{y_1} + 1 \right] \left[ \frac{y_2}{y_1} - 1 \right] - 2 F_1^2 \left[ \frac{y_2}{y_1} - 1 \right] = 0 \quad (3.28)$$

simplificando la ec 3.28, resulta

$$\frac{y_2^2}{y_1^2} + \frac{y_2}{y_1} - 2 F_1^2 = 0 \quad (3.29)$$

la incógnita a despejar es la relación de tirantes conjugados  $\frac{y_2}{y_1}$ .

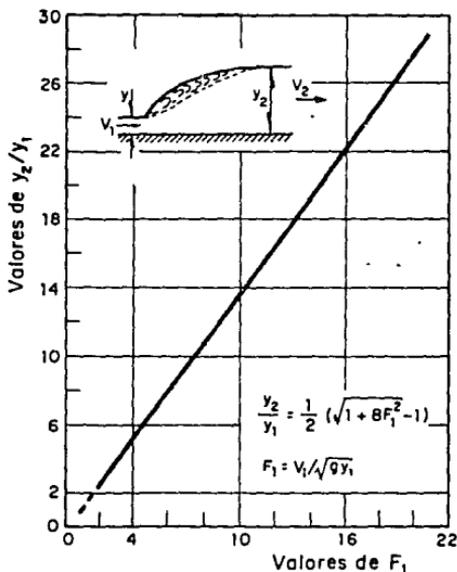


FIG 3.6 Relación entre  $F_1$  y  $y_2/y_1$  para un salto hidráulico en un canal rectangular horizontal.

Para encontrar el valor de la raíz positiva se utiliza la siguiente expresión

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right] \quad (3.30)$$

En la fig 3.6 se muestra la gráfica de la ec 3.30.

### 3.4.2 Ecuación de tirantes conjugados. Flujo no permanente

El salto hidráulico móvil es un fenómeno local con movimiento, consiste en un cambio de régimen rápido (supercrítico) a lento (subcrítico), desplazándose éste a lo largo del canal en cualquier sentido. En él se toma en cuenta la velocidad absoluta de onda,  $V_w$ . Si un observador se mueve a lo largo del canal con una velocidad igual a la de onda, éste verá un salto hidráulico estacionario. Cuando la velocidad absoluta de onda,  $V_w$ , es 0, se tiene el caso de salto hidráulico estacionario.

Considerando lo anterior y con base en la ec 3.3, la ec 3.24 se puede emplear en flujo no permanente, de la manera siguiente

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right) - \frac{A_1^2 (V_1 - V_w)^2}{g \bar{y}_1 A_1^2} \left( \frac{A_2}{A_1} \right) + \frac{A_1^2 (V_1 - V_w)^2}{g \bar{y}_1 A_1^2} = 0 \quad (3.31)$$

Se ha tomado en cuenta el gasto que pasa por la sección 1 ya que las condiciones conocidas corresponden al régimen supercrítico. Ahora factorizando y haciendo las simplificaciones, para flujo en un canal rectangular, se obtiene

$$\frac{y_2^3}{y_1^3} - \frac{y_2}{y_1} - \frac{2 (V_1 - V_w)^2}{g y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} - 1 \right) = 0 \quad (3.32)$$

Mediante un procedimiento similar al empleado para llegar a la ec 3.29, la ec 3.32 se expresa como sigue

$$\frac{y_2^2}{y_1^2} + \frac{y_2}{y_1} - \frac{2 (V_1 - V_w)^2}{g y_1} = 0 \quad (3.33)$$

La ec 3.33 es la ecuación de tirantes conjugados para flujo no permanente. Las ecs 3.29 y 3.33 son iguales cuando el flujo es permanente, es decir; para  $V_w = 0$ .

### 3.5 CELERIDAD, VELOCIDAD ABSOLUTA Y ALTURA DE ONDA EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR

Las ecs 3.14 y 3.15 son de tipo general, y pueden ser utilizadas para canales que tengan cualquier forma su sección transversal. Para sección rectangular, estas ecuaciones tienen importantes simplificaciones.

Si se considera un canal rectangular que tiene un ancho  $K$ ,  $\bar{y}_1 = \frac{1}{2} y_1$ ;  $\bar{y}_2 = \frac{1}{2} y_2$ ;  $A_1 = K y_1$ ;  $y$ ,  $A_2 = K y_2$ ; al sustituir las anteriores expresiones en la ec 3.14 y simplificando, resulta la siguiente ecuación

$$c = \sqrt{\frac{g y_2}{2 y_1} (y_1 + y_2)} \quad (3.34)$$

Cuando la altura de onda  $z$ , es pequeña comparada con la profundidad del flujo, se tiene  $y_1 \approx y_2 \approx y$ . Por lo que se puede simplificar la ec 3.34 y llegar a

$$c = \sqrt{g y} \quad (3.35)$$

Para un canal de sección transversal rectangular, la ecuación de continuidad (ec 3.3) puede escribirse como

$$K y_1 (V_1 - V_w) = K y_2 (V_1 - V_w) \quad (3.36)$$

de esta manera se obtiene que

$$V_w = \frac{y_1 V_1 - y_2 V_2}{y_1 - y_2} \quad (3.37)$$

La altura de la onda es igual a  $y_2 - y_1$ . Si  $y_2 > y_1$  la onda se considera positiva, y si  $y_2 < y_1$  entonces es una onda negativa. Las ecs 3.36 y 3.37 son llamadas condiciones de choque, en ellas aparecen 5 variables  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_w$ . Los valores de dos de ellas pueden ser determinados por iteraciones sucesivas de estas ecuaciones, siempre que los valores de las otras tres variables sean conocidos.

Cuando una onda viaja en dirección aguas abajo, la velocidad absoluta de onda será

$$V_w = V_1 + c \quad (3.38)$$

despejando  $c$  de la ec 3.38, y tomando a  $V_w$  de la ec 3.37, e igualándola con la ec 3.34, se obtiene

$$\frac{y_1 v_1 - y_2 v_2}{y_1 - y_2} - v_1 = \sqrt{\frac{g y_2}{2 y_1} (y_1 + y_2)} \quad (3.39)$$

realizando algunos pasos algebraicos

$$\begin{aligned} & \left[ y_1 v_1 - y_2 v_2 \right]^2 - 2 \left[ y_1 v_1 - y_2 v_2 \right] v_1 \left[ y_1 - y_2 \right] + \\ & + v_1^2 \left[ y_1 - y_2 \right]^2 = g \frac{y_2}{2 y_1} \left[ y_1 - y_2 \right] \left[ y_1^2 - y_2^2 \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

factorizando se obtiene

$$\left[ v_1 - v_2 \right]^2 = \frac{g}{2 y_1 y_2} \left[ y_1 - y_2 \right] \left[ y_1^2 - y_2^2 \right] \quad (3.41)$$

Como la ec 3.41 representa la relación entre las velocidades y tirantes, inicial y final de una onda, también se pueden determinar los tirantes  $y_1$  ó  $y_2$  utilizando algún método numérico iterativo.

Si se obtiene la raíz y al término del lado derecho se le multiplica por la celeridad, expresada en la ec 3.34, y tomando en cuenta que la altura de onda, es igual a  $y_2 - y_1$ , se obtiene de la ec 3.41

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{g}{2 y_1 y_2} \left[ y_1 - y_2 \right] \left[ y_1^2 - y_2^2 \right]} \frac{\sqrt{\frac{g y_2}{2 y_1} (y_1 + y_2)}}{c} \quad (3.42)$$

haciendo operaciones, resulta que

$$v_1 - v_2 = \pm \frac{g z}{c} \frac{(y_1 + y_2)}{2 y_1} \quad (3.43)$$

En el lado derecho de la ec 3.43 se emplea el signo (+) si el frente de onda avanza hacia aguas arriba y (-) si avanza en sentido opuesto.

Cuando la altura de onda es pequeña comparada con la profundidad del flujo,  $y_1 \cong y_2$ , en este caso la ec 3.43 se puede escribir

$$v_1 - v_2 = \frac{g z}{c} \quad (3.44)$$

En la fig 3.7 se muestra una onda positiva, ya que la profundidad aguas abajo del frente de onda (punto 1), es menor con respecto a la profundidad aguas arriba del frente (punto 2). De acuerdo a la ec 3.35 la celeridad de onda  $c$ , es mayor en el punto 2 que en el 1.

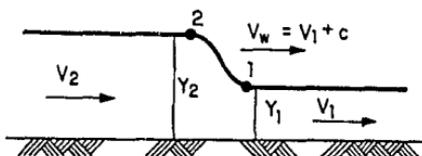


FIG 3.7 Movimiento de una onda positiva.

Durante el intervalo de tiempo  $t$ , el frente de onda se mueve hacia adelante, una distancia igual a  $V_w t$ . La velocidad de la onda es más grande que cualquiera de las velocidades medias  $V_1$  y  $V_2$ .

De acuerdo con la ec 3.35 la celeridad es igual a la velocidad crítica del flujo, ya que corresponde al número de Froude igual a uno.

Cuando en número de Froude, en un flujo es menor a uno, se trata de un flujo subcrítico por lo que

$$\frac{V}{\sqrt{g y}} < 1 \quad (3.45)$$

es decir,

$$V < \sqrt{g y} \quad (3.46)$$

De acuerdo con la ec 3.35 la ec 3.46 puede ser escrita como

$$V < c \quad (3.47)$$

Cuando la velocidad del agua es más grande que la celeridad, las ondas viajarán solamente hacia aguas abajo.

## 4. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

### 4.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es establecer una técnica que pueda ser usada para obtener la solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico. Un caso particular de este tipo de ecuaciones es el de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales cuasi-lineales con dos variables dependientes y dos independientes. Las combinaciones lineales de las ecuaciones diferenciales se encuentran en las derivadas de dos funciones desconocidas en una dimensión espacial. Para este tipo de ecuación hay dos direcciones, conocidas como características, para las cuales se encuentran las variaciones de las funciones.

Las aproximaciones en diferencias finitas de dos ecuaciones diferenciales parciales son obtenidas de acuerdo a las derivadas de cada dirección característica. En este método se pueden emplear aproximaciones de primer o segundo orden para las derivadas; y para encontrar el valor de las funciones en puntos específicos de una malla, se recurre a métodos de interpolación.

Las direcciones características pueden extenderse a  $n$  ecuaciones diferenciales parciales cuasi-lineales con dos variables

independientes, para ello hay que encontrar sus direcciones características. Para  $n$  ecuaciones, existen  $n$  direcciones características en cualquier punto. Cuando  $n > 2$  no es muy recomendable este método ya que incrementa significativamente el tiempo de cálculo; porque las curvas características pasan a ser superficies características.

#### 4.2 DEFINICIONES Y DERIVACIÓN DEL MÉTODO

Un sistema de ecuaciones cuasi-lineales con dos variables independientes ( $t, x$ ) y dos variables dependientes ( $V, \omega$ ), puede ser escrito de la siguiente manera

$$L_1 = A_1 V_t + B_1 V_x + C_1 \omega_t + D_1 \omega_x + E_1 \quad (4.1)$$

$$L_2 = A_2 V_t + B_2 V_x + C_2 \omega_t + D_2 \omega_x + E_2 \quad (4.2)$$

donde  $A_1, A_2, \dots, E_2$  son funciones que dependen de  $t, x, V, \omega$ . Además  $V_t = \partial V / \partial t$ ,  $\omega_x = \partial \omega / \partial x$ , ... . En las siguientes consideraciones se supone que las funciones introducidas son continuas y sus derivadas también.

Si se considera una combinación lineal de  $L_1$  y  $L_2$ :

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \quad (4.3)$$

$$L = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) V_t + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) V_x + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) \omega_t + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) \omega_x + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) \quad (4.4)$$

Ahora si  $x = x(t)$  es la ecuación de una curva, entonces  $dx/dt$  es la pendiente de la línea tangente en un punto de dicha curva.

Como  $V = V(t, x)$  y  $\omega = \omega(t, x)$  se tiene que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx, \quad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \quad (4.5)$$

La expresión diferencial  $L$  puede ser escrita de la siguiente manera

$$dt L = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)dv + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)d\omega + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2)dt \quad (4.6)$$

Dado que  $V_t = \partial V/\partial t$ ,  $\omega_t = \partial \omega/\partial t$ ,  $V_x = \partial V/\partial x$  y  $\omega_x = \partial \omega/\partial x$ , y de acuerdo con las ecs 4.4 y 4.5, se puede escribir

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2} \quad (4.7)$$

En este caso, en la expresión diferencial L (ec 4.4) las derivadas de V y  $\omega$  están combinadas, por lo que sus derivadas están en la misma dirección, particularmente  $dx/dt$ . Esta dirección es llamada "dirección característica".

De la ec 4.7 se despeja la relación  $\lambda_1/\lambda_2$ , como sigue

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{A_2 dx - B_2 dt}{A_1 dx - B_1 dt} = \frac{C_2 dx - D_2 dt}{C_1 dx - D_1 dt} \quad (4.8)$$

igualando a 0, queda

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1) dx^2 + (A_2 D_1 + B_2 C_1 - B_1 C_2 - A_1 D_2) dt dx + (B_1 D_2 - B_2 D_1) dt^2 = 0 \quad (4.9)$$

haciendo cambio de variables

$$\begin{aligned} a &= A_1 C_2 - A_2 C_1 & c &= B_1 D_2 - B_2 D_1 \\ 2b &= -A_2 D_1 - B_2 C_1 + B_1 C_2 + A_1 D_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

ahora, la ec 4.9 se puede expresar

$$a(dx)^2 - 2b dt dx + c(dt)^2 = 0 \quad (4.11)$$

Para la ec 4.11 existen dos raíces, estas se obtienen por medio de la expresión general para encontrar las raíces de un polinomio de segundo grado. De acuerdo con el valor que tenga el discriminante se puede clasificar una ecuación diferencial parcial en tres tipos, si,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 & \quad \text{elíptica} \\ b^2 - 4ac = 0 & \quad \text{parabólica} \\ b^2 - 4ac > 0 & \quad \text{hiperbólica} \end{aligned}$$

Para el caso de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, siempre existen dos raíces distintas. En este caso siempre es distinto de cero al menos uno de los coeficientes. Se supone que

$$a \neq 0 \quad (4.12)$$

Esta condición siempre será necesaria cuando se introduzcan otras coordenadas en vez de  $(t, x)$ ; por lo tanto siempre  $dt \neq 0$  para la dirección característica  $(dt, dx)$ , y la pendiente de ésta es

$$\zeta = \frac{dx}{dt} \quad (4.13)$$

Dividiendo entre  $dt^2$  a la ec 4.11 y considerando la 4.13, se obtiene

$$a \zeta^2 - 2 b \zeta + c = 0 \quad (4.14)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones reales diferentes  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ , es decir,

$$\begin{aligned} \zeta_+ &= \left[ b + (b^2 - a c)^{1/2} \right] a^{-1} \\ \zeta_- &= \left[ b - (b^2 - a c)^{1/2} \right] a^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En el punto  $(t, x)$ , las dos direcciones características están dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \zeta_+ \quad \frac{dx}{dt} = \zeta_- \quad (4.16)$$

Las variables  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son funciones generales que dependen de  $V$ ,  $\omega$ ,  $t$ , y  $x$ .  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$  estarán en función de estas variables, entonces las ecs 4.16 se expresan de la siguiente manera

$$\frac{dx}{dt} = \zeta_+(t, x, V, \omega) \quad \frac{dx}{dt} = \zeta_-(t, x, V, \omega) \quad (4.17)$$

La solución de  $V(t, x)$ ,  $\omega(t, x)$  del sistema de ecuaciones (ecs 4.1 y 4.2), se puede obtener mediante la ec 4.17, en la cual se llega a obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Éstas definen a dos familias de curvas características,  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ , en el plano  $(t, x)$ , y corresponden a la solución de  $V(t, x)$ ,  $\omega(t, x)$ . Por otra parte estas familias de curvas corresponden a coordenadas curvilíneas.

Ahora si  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$  están en función de  $t$  y  $x$  solamente, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \zeta_+(t,x), \quad \frac{dx}{dt} = \zeta_-(t,x)$$

Con ésto se simplifica el problema, ya que al sustituir las ecs 4.16 en la 4.8, se obtiene

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{A_2 \zeta_+ - B_2}{A_1 \zeta_+ - B_1} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{A_2 \zeta_- - B_2}{A_1 \zeta_- - B_1} \quad (4.18)$$

Si se determina una expresión para  $\lambda_1$  o para  $\lambda_2$  de la ecuación anterior y ésta se sustituye en la ec 4.6; se encuentran las expresiones siguientes

$$F dV + (a \zeta_+ - G) d\omega + (K \zeta_+ - H) dt = 0 \quad (4.19)$$

$$F dV + (a \zeta_- - G) d\omega + (K \zeta_- - H) dt = 0 \quad (4.20)$$

donde

$$F = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

$$G = B_1 C_2 - B_2 C_1$$

$$K = A_1 E_2 - A_2 E_1$$

$$H = B_1 E_2 - B_2 E_1$$

$$(4.21)$$

De esta manera se han obtenido las cuatro ecuaciones características

$$\left. \begin{array}{l} dx - \zeta_+ dt = 0 \\ F dV + (a \zeta_+ - G) d\omega + (K \zeta_+ - H) dt = 0 \end{array} \right\} \text{para } \zeta_+ \quad (4.22) \quad (4.23)$$

$$\left. \begin{array}{l} dx - \zeta_- dt = 0 \\ F dV + (a \zeta_- - G) d\omega + (K \zeta_- - H) dt = 0 \end{array} \right\} \text{para } \zeta_- \quad (4.24) \quad (4.25)$$

En el sistema de ecs 4.22 a 4.25 se observa que en ellas sólo contienen derivadas totales. De acuerdo con los pasos matemáticos realizados, la solución de este sistema es la solución del original (ecs 4.1 y 4.2).

### 4.3 DIFERENCIAS FINITAS

Una aproximación de diferencias finitas puede ser expresada por la siguiente fórmula:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \approx f(t_0) (t_1 - t_0) \quad (4.26)$$

y será llamada de primer orden o aproximación lineal.

En la fig 4.1, el punto K es el punto de intersección de la característica  $\zeta_+$  que parte de P y de la característica  $\zeta_-$  que parte de Q, por lo que las condiciones en los puntos P y Q son conocidas ( $t_p, x_p, v_p, \omega_p, t_q, x_q, v_q, \omega_q$ ); en estos puntos se apoyan las curvas características para poder determinar las condiciones en el punto K ( $t_k, x_k, v_k, \omega_k$ ).  $t_p$  es el promedio de los valores de x cercanos al punto P, esto mismo se dice de todas las demás variables con subíndice.

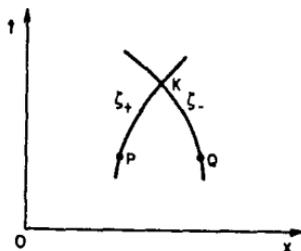


FIG 4.1 Punto de Intersección de las líneas características  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ .

Aplicando la ec 4.26, se hace la siguiente aproximación lineal del sistema de ecs 4.22 a 4.25

$$x_k - x_p - (\zeta_+)_p (t_k - t_p) = 0 \quad (4.27)$$

$$F_p (u_k - v_p) + (a \zeta_+ - G)_p (\omega_k - \omega_p) + (K \zeta_+ - H)_p (t_k - t_p) = 0 \quad (4.28)$$

$$x_k - x_0 - (\zeta_-)_0 (t_k - t_0) = 0 \quad (4.29)$$

$$F_0 (u_k - V_0) + (a\zeta_- - G)_0 (\omega_k - \omega_0) + (K\zeta_- - H)_0 (t_k - t_0) = 0 \quad (4.30)$$

De esta manera  $\zeta_+$ ,  $\zeta_-$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $H$ , son funciones de  $t$ ,  $x$ ,  $V$ , y  $\omega$ . Éstas son evaluadas en los puntos  $P$  y  $Q$  donde pueden ser conocidas. Para obtener los valores de  $t_k$  y  $x_k$ , se tienen que resolver simultáneamente las ecs 4.27 y 4.29. Las soluciones de estas ecuaciones son sustituidas en las ecs 4.28 y 4.30 que también deben de ser resueltas simultáneamente para obtener los valores de  $V_k$  y  $\omega_k$ .

Existen diversas formas de emplear el sistema de ecs 4.27 a 4.30, y de así obtener una solución numérica aproximada al sistema original de ecuaciones diferenciales parciales. Uno de los métodos es, empleando la malla de las características. Este método es fácil de aplicar cuando  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$  dependen de  $t$  y de  $x$  únicamente. Las ecs 4.27 y 4.29 pueden ser integradas inmediatamente, de esta manera se obtiene la malla de las características antes del cálculo de  $V$  y  $\omega$ . Otra forma es usar intervalos constantes, y en cada intervalo fijar los valores iniciales de  $V$  y  $\omega$ .

#### 4.4 INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

En el inciso anterior se describió la conveniencia de fijar valores a intervalos constantes, pero es muy poco probable que los valores obtenidos correspondan exactamente a los intervalos establecidos. Por lo tanto, es necesario interpolar.

Los primeros métodos de interpolación se basaron en intervalos igualmente espaciados y ajustar líneas rectas. En la práctica los valores que se obtienen corresponden a espaciamientos desiguales y tienen variación no lineal, para esto es ventajoso hacer una interpolación polinomial.

Ahora, considerando una serie de puntos  $f(x_i)$  donde  $x_i$ , representa los valores en espacios irregulares, y el subíndice  $i$  puede tomar cualquier valor sobre la integral entre 0 y  $n$ . Una aproximación de la interpolación polinomial entre los valores de  $x$ , puede ser llevada a obtener el polinomio más apropiado de grado  $n$  para  $n + 1$  puntos. En la

fig 4.2 se muestra un ejemplo típico para  $n = 7$ .

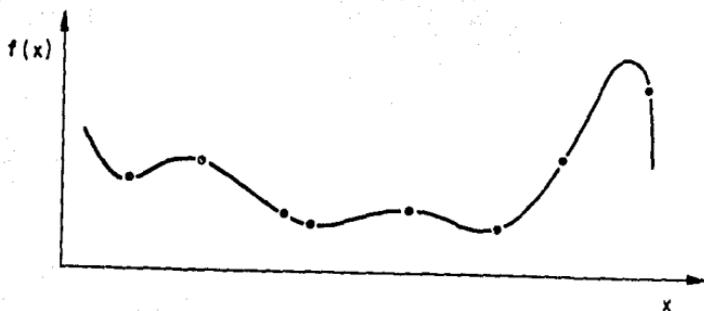


FIG 4.2 Polinomio de grado 7 para 8 puntos en espaciamentos no uniformes.

En este caso se encuentran  $n + 1$  coeficientes para un polinomio de grado  $n$ , de esta manera se puede determinar el valor de  $f(x)$  para cualquier  $x$ , para ello será necesario resolver un sistema de  $n + 1$  ecuaciones lineales.

Se define a un polinomio de grado  $n$  asociado a cualquier punto  $x_j$  como

$$P_j(x) = A_j(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n) \quad (4.31)$$

donde  $A_j$  es una constante, y como se observa el factor  $(x - x_j)$  es omitido, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$P_j(x) = A_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i) \quad (4.32)$$

Cuando el valor de  $x$  es igual al de  $x_i$  correspondiente al valor buscado, el polinomio se hará igual a cero ya que existe el factor  $x_i - x_i$  que es igual a cero. La expresión anterior se escribe para un punto específico  $x_k$ , de la siguiente manera

$$P_j(x_k) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ A_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) & k = j \end{cases} \quad (4.33)$$

si el factor  $A_j$  se define como

$$A_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)} \quad (4.34)$$

entonces la ec 4.33 se expresa como

$$P_j(x_k) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \quad (4.35)$$

Donde  $P_j(x)$  son los polinomios de grado  $n$ , los cuales son definidos de una manera semejante, es decir, son igual a cero para cualquier punto excepto para un punto  $(x_k)$  donde  $k = j$ . A los polinomios  $P_j(x)$  se les conoce como "polinomios de Lagrange".

Una combinación lineal de los polinomios  $P_j(x)$  se expresa como sigue

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) P_j(x) \quad (4.36)$$

lo que es también un polinomio de grado  $n$ . Si se selecciona un punto cualquiera, por ejemplo  $x_2$ , entonces el polinomio para este punto es el siguiente

$$P_n(x_2) = f(x_0) P_0(x_2) + f(x_1) P_1(x_2) + \dots + f(x_n) P_n(x_2) \quad (4.37)$$

Dado que los polinomios  $P_j(x_2)$  son igual a cero, menos para  $P_2(x_2)$  el cual es igual a 1, por lo que la ec 4.37 queda reducida a la expresión que se escribe a continuación

$$P_n(x_2) = f(x_2) P_2(x_2) = f(x_2) \quad (4.38)$$

Con el polinomio de grado  $n$  para  $x_2$  se puede conocer el valor de la función  $f(x_2)$ . De esta manera se puede decir que el polinomio  $P_n(x)$  es el polinomio más apropiado para  $n + 1$  puntos.

Con el fin de comprender mejor este tipo de interpolación, se plantea el siguiente ejemplo.

Considerando la fig 4.3 se requiere conocer el valor de la función en  $x_p$ .

De acuerdo a lo explicado en este capítulo, resultará más adecuado hacer una interpolación de Lagrange de tres puntos, por lo que resulta un polinomio de segundo orden.

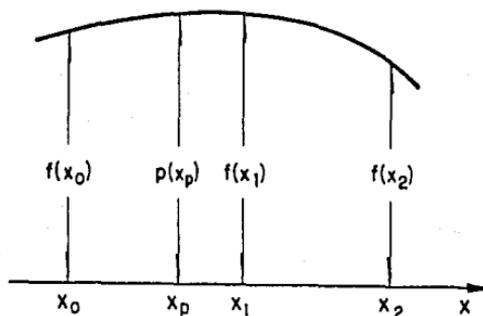


FIG 4.3 Interpolación para encontrar  $x_p$ .

$$P(x_p) = f(x_0) P_0(x_p) + f(x_1) P_1(x_p) + f(x_2) P_2(x_p) \quad (4.39)$$

siendo

$$P_0(x_p) = \frac{(x_p - x_1)(x_p - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (4.40)$$

$$P_1(x_p) = \frac{(x_p - x_0)(x_p - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad (4.41)$$

$$P_2(x_p) = \frac{(x_p - x_0)(x_p - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (4.42)$$

como

$$f(x_p) \cong p(x_p) \quad (4.43)$$

Así se conoce el valor de la interpolación polinomial para  $x_p$ . Cuando la variable  $x_p$  se encuentra cercana al centro del espacio entre  $x_0$  y  $x_1$

(fig 4.3), este tipo de interpolación puede producir un error mayor.

Ejemplo:

En la tabla 4.1 se muestran los valores de la función  $f(x_i)$  correspondientes a los puntos  $x_i$ . Para conocer el valor de la función cuando  $x_1 = 7$ , se requiere hacer una interpolación polinomial.

	1	0	1	2	3
$x_i$	1	2	4	8	
$f(x_i)$	1	3	7	11	

Tabla 4.1 Valores de la función  $f(x_i)$ .

De acuerdo con lo planteado se desea conocer  $f(7)$ , por lo que se hace una interpolación de Lagrange de 4 puntos, el polinomio de tercer orden que resulta, es el siguiente

$$P(7) = 1 P_0(7) + 3 P_1(7) + 7 P_2(7) + 11 P_3(7) \quad (4.44)$$

donde

$$P_0(7) = \frac{(7-2)(7-4)(7-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = 0.7142$$

$$P_1(7) = \frac{(7-1)(7-4)(7-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = -1.5$$

$$P_2(7) = \frac{(7-1)(7-2)(7-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} = 1.25$$

$$P_3(7) = \frac{(7-1)(7-2)(7-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = 0.5357$$

De acuerdo con las ecs 4.43 y 4.44 se obtiene

$$f(7) = 0.7142 + 3(-1.5) + 7(1.25) + 11(0.5357) = 10.8571$$

Con esto se ha encontrado el valor de la función para  $x = 7$ .

## 5. MODELO NUMÉRICO

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el modelo numérico empleado para la simulación para flujo no permanente gradual y para el rápidamente variado (salto hidráulico). En este modelo se emplea el método de las características.

El modelo numérico simula el flujo gradualmente variado a superficie libre e incluye las ecuaciones del salto hidráulico.

Para describir el comportamiento del flujo no permanente en canales abiertos es necesario integrar las ecuaciones diferenciales parciales 2.10 y 2.33 (ecuaciones de Saint-Venant), que son de tipo hiperbólico con dos variables dependientes ( $y$ ,  $V$ ); para ello se toma en cuenta a las condiciones iniciales y de frontera. Uno de los métodos numéricos adecuados para la solución de estas ecuaciones es el de las características.

La teoría del método de las características, aplicada como método de integración de las ecuaciones de Saint-Venant, es una de las formas más confiables para lograr la modelación del flujo no permanente, ya que ésta ha sido comparada con un gran número de observaciones.

El método de las características es una forma de resolver dos ecuaciones diferenciales parciales simultáneamente, sustituyéndolas por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, para ello es necesario que todas las derivadas sean definidas y continuas (capítulo 4). Las ecuaciones diferenciales parciales son convertidas a su forma característica y posteriormente son resueltas por un esquema de diferencias finitas.

## 5.2 ECUACIONES DE SAINT-VENANT

La derivación de las ecuaciones de Saint-Venant y las hipótesis sobre las cuales fueron basadas se mencionaron en el capítulo 2. La forma obtenida de éstas es la siguiente

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

$$g \frac{\partial y}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = g (S_0 - S_f) \quad (5.2)$$

donde  $x$  es la distancia horizontal a la sección considerada desde el origen (aguas arriba),  $t$  es el tiempo,  $y$  es la profundidad del agua,  $A$  es el área hidráulica,  $B$  es el ancho de superficie libre,  $V$  es la velocidad media del agua,  $S_0$  es la pendiente del fondo,  $g$  es la aceleración de la gravedad.

También se considera que la pendiente de la línea de energía  $S_f$  es igual a

$$S_f = \frac{n^2 |V| V}{r^{4/3}} \quad (5.3)$$

donde  $n$  es el coeficiente de rugosidad de Manning y  $r$  el radio hidráulico. En la ecuación anterior se ha tomado en cuenta el sentido del flujo a través del valor absoluto de la velocidad.

## 5.3 MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

A continuación se describirá una forma de resolver el sistema original de ecuaciones diferenciales parciales (ecs 5.1 y 5.2), donde se aplicará el desarrollo hecho en el capítulo 4.

La celeridad se define como

$$c = \sqrt{\frac{g A}{B}} \quad (5.4)$$

De la ecuación anterior se obtiene la siguiente igualdad

$$g = \sqrt{\frac{g A}{B}} \sqrt{\frac{g B}{A}} = c \sqrt{\frac{g B}{A}} \quad (5.5)$$

de esta manera la ec 5.2 es igual a

$$c \sqrt{\frac{g B}{A}} \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = g (S_0 - S_f) \quad (5.6)$$

Conviene plantear la forma que adquiere la variable de estado de Escoffier,  $\omega$ , definida como

$$\omega = \int_0^y \sqrt{\frac{g B}{A}} dy = \int_0^y \sqrt{\frac{g A}{B}} \frac{B}{A} dy = \int_0^A c \frac{dA}{A} \quad (5.7)$$

De acuerdo con la ec 5.7

$$d\omega = \sqrt{\frac{g B}{A}} dy \quad (5.8)$$

Aplicando la ec 5.8 en la ec 5.6 se encuentra otra forma de expresar la ecuación dinámica, resultando

$$L_1 = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0 \quad (5.9)$$

Se demostró en el capítulo 2 que la ecuación de continuidad se puede escribir de la siguiente manera (ec 2.10)

$$A \frac{\partial v}{\partial x} + v B \frac{\partial y}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.10)$$

al multiplicar por  $\sqrt{\frac{g}{A B}}$  queda

$$\sqrt{\frac{g A}{B}} \frac{\partial v}{\partial x} + v \sqrt{\frac{g B}{A}} \frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\frac{g B}{A}} \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.11)$$

de acuerdo con la ec 5.4 la 5.11 se puede escribir como

$$c \frac{\partial V}{\partial x} + v \sqrt{\frac{g B}{A}} \frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\frac{g B}{A}} \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.12)$$

De acuerdo con la ec 5.8, la ecuación de continuidad ahora se puede expresar de la siguiente manera

$$L_2 = c \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (5.13)$$

Si se define a  $V_t = \partial V / \partial t$ ,  $V_x = \partial V / \partial x, \dots$ , las ecs 5.9 y 5.13 resultan

$$L_1 = A_1 V_t + B_1 V_x + C_1 \omega_t + D_1 \omega_x + E_1 \quad (5.14)$$

$$L_2 = A_2 V_t + B_2 V_x + C_2 \omega_t + D_2 \omega_x + E_2 \quad (5.15)$$

Como se puede observar estas ecuaciones son del tipo de las ecs 4.1 y 4.2 por lo que se puede emplear el método derivado en el capítulo 4. Observando las ecuaciones anteriores (ecs 5.9 a 5.15) se identifican fácilmente los valores de las funciones  $A_1$ ,  $B_1$ , etc., resultando ser los siguientes

$$\begin{array}{ll} A_1 = 1 & A_2 = 0 \\ B_1 = v & B_2 = c \\ C_1 = 0 & C_2 = 1 \\ D_1 = c & D_2 = v \\ E_1 = g (S_0 - S_f) & E_2 = 0 \end{array} \quad (5.16)$$

De acuerdo con el desarrollo del capítulo 4, empleando la ec 4.14 se obtienen las direcciones características. Para conocer los coeficientes de esta ecuación (a, b, c), se aplican las ecs 4.10, obteniendo así los siguientes valores

$$a = 1 ; \quad b = v ; \quad c = v^2 - c^2 \quad (5.17)$$

Se pueden obtener las soluciones reales diferentes ( $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ ), por medio de la expresión general para encontrar las raíces reales de un polinomio de segundo orden, de esta manera

$$\zeta_+ = V + c \quad \zeta_- = V - c \quad (5.18)$$

En las otras dos ecuaciones características se aplicarán las ecs 4.23 y 4.25, el valor de sus coeficientes (F, G, K, H), se determina mediante las ecs 4.21, resultando lo siguiente

$$\begin{aligned} F &= c & G &= V \\ K &= 0 & H &= c g(S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (5.19)$$

con estos valores sustituyéndolos en la ec 4.23, y dividiendo entre dt esta ecuación queda expresada para este caso particular de la siguiente manera

$$c \frac{dV}{dt} + (\zeta_+ - V) \frac{d\omega}{dt} = c g(S_0 - S_f) \quad (5.20)$$

De la ec 5.18 se despeja el valor de c

$$c = \zeta_+ - V \quad (5.21)$$

al sustituir la ec 5.21 en la 5.20, dividiendo entre c a toda la ecuación y tomando en cuenta la propiedad de linealidad de la derivada parcial, la ec 5.20 queda

$$\frac{d}{dt} (V + \omega) = g (S_0 - S_f) \quad (5.22)$$

De la misma manera, pero ahora empleando la ec 4.25, es posible determinar la siguiente ecuación característica

$$\frac{d}{dt} (V - \omega) = g (S_0 - S_f) \quad (5.23)$$

#### 5.4 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Si se integra la ec 5.8, para el caso de una sección rectangular se obtiene

$$\omega = 2c = 2\sqrt{gy} \quad (5.24)$$

Al sustituir la ec 5.24 en las 5.22 y 5.23, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt} (V + 2c) = g (S_f - S_0) \quad (5.25)$$

$$\frac{dx}{dt} = V + c \quad (5.26)$$

$$\frac{d}{dt} (V - 2c) = g (S_f - S_0) \quad (5.27)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - c \quad (5.28)$$

De esta manera se obtienen las expresiones más comunes en el empleo del método de las características.

#### 5.4.1 Resistencia al flujo y pendiente del fondo nulas

El sistema de ecs 5.25 a 5.28 que corresponde a las ecuaciones fundamentales de flujo a superficie libre, en su versión de derivadas totales, en este caso particular, pueden ser resueltas mediante un procedimiento analítico.

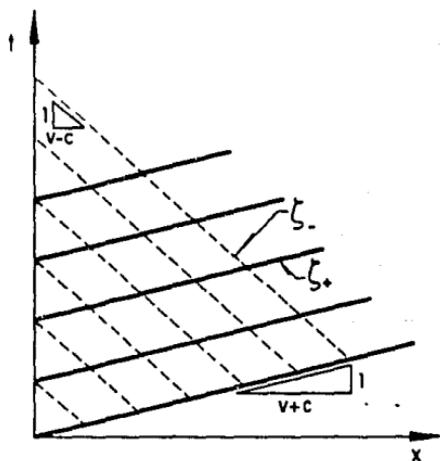


FIG 5.1 Curvas características en el plano X-t.

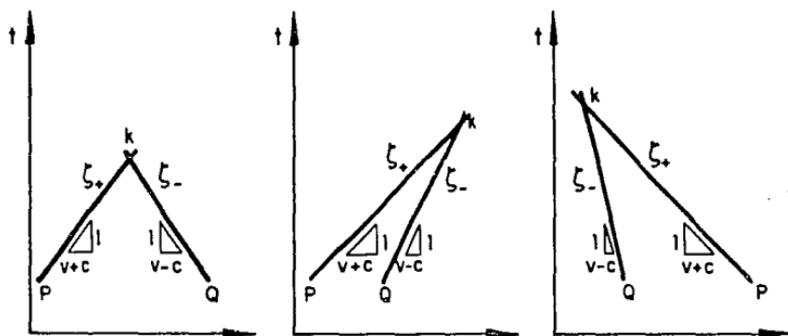
Al considerar que  $S_0 = S_f = 0$  las ecs 5.22 y 5.23 son igual a cero, por lo que las derivadas totales de  $V + \omega$ , y  $V - \omega$  son cero, lo que quiere decir que estas cantidades son constantes. Tales constantes son conocidas como invariantes de Riemann y su valor es único para cada

característica. Esto significa que si dos observadores se mueven con velocidad constante, uno con velocidad  $V + c$ , notará que  $V + \omega$  no cambia. De igual manera sucederá para el otro observador desplazándose con una velocidad  $V - c$ . En la fig 5.1 se muestran dos familias de curvas dibujadas, éstas representan las trayectorias de los observadores en el plano  $x-t$ . Para la primera clase ( $\zeta_+$ ), estas líneas tienen pendiente  $1/(V + c)$  y sobre ellas  $V + \omega$  es constante, de manera similar sucede para las características negativas ( $\zeta_-$ ).

#### 5.4.2 Resistencia al flujo

Cuando un canal prismático tiene en sus paredes y en el fondo una resistencia al esfuerzo cortante diferente de cero ( $S_f \neq 0$ ), las ecs 5.25 a 5.28 dan lugar a funciones no lineales para el tirante. Para resolver las ecuaciones se tiene que recurrir a un procedimiento de tipo numérico. En este caso, los miembros del lado izquierdo de las ecs 5.25 y 5.27 se les conoce como quasi-invariantes de Riemann cuando las cantidades del lado derecho de estas ecuaciones son suficientemente pequeñas.

#### 5.5 TIPO DE FLUJO



(a) Subcrítico ( $v > 0$ ) (b) Supercrítico ( $v > 0$ ) (c) Supercrítico ( $v < 0$ )

FIG 5.2 Pendiente de las líneas características según el tipo de flujo.

Es importante distinguir, que de acuerdo al tipo de flujo (subcrítico o supercrítico) la malla de las características cambia. Cuando el flujo

es subcrítico, es decir  $|V| < c$  en la ec 5.26 se aprecia que para la característica positiva,  $dx/dt > 0$ , por lo cual la pendiente es positiva en el plano  $x-t$ . Mientras que en la ec 5.28 sucede lo contrario (fig 5.2a).

En régimen subcrítico las líneas características negativas ( $\zeta_-$ ) se llegan a encontrar con la condición de frontera aguas arriba y las  $\zeta_+$  alcanzan a la frontera aguas abajo.

Cuando el flujo es supercrítico,  $|V| > c$ , en este caso ambas características tienen pendiente positiva en el plano  $x-t$  (fig 5.2b). Por lo que ninguna línea característica se encuentra con la frontera aguas arriba.

### 5.6 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Para resolver las ecuaciones de Saint-Venant es necesario partir de condiciones iniciales, las cuales pueden ser las de un flujo permanente en el canal. Para ello se especifican los valores del tirante y de la velocidad en cada sección a lo largo del eje  $x$  del dominio de estudio de manera que se cumpla el sistema de ecs 5.1 y 5.2.

En flujo subcrítico las condiciones iniciales sólo influyen en el cálculo del comportamiento del flujo, en las primeras etapas (etapa de calentamiento); las condiciones de frontera en ambos tipos de flujo son las que van a determinar el comportamiento del flujo en tiempos posteriores.

Las condiciones de frontera tanto aguas arriba como aguas abajo de un canal, están dadas por el tipo de régimen que se presente en la sección inicial y final del tramo en estudio, el cual puede ser subcrítico, crítico o supercrítico. El número de condiciones especificadas en la frontera es igual al número de características que terminan en ella.

Las posibilidades para la frontera pueden ser las siguientes:

#### a) FLUJO SUBCRÍTICO. FRONTERA AGUAS ARRIBA

Se requiere dar una condición de frontera (una relación entre  $V$  y  $\omega$ ), esta puede ser dada por un hidrograma de descarga o un limnigrama, para que con la ecuación de la característica negativa (ec 5.27) se conozcan

los valores de  $V$  y  $\omega$  (fig 5.3a)

b) FLUJO SUBCRITICO. FRONTERA AGUAS ABAJO

Se necesita una condición de frontera y la ecuación de la característica positiva (ec 5.25) para que en la frontera se encuentre  $V$  y  $\omega$  (fig 5.3b)

c) FLUJO SUPERCRTICO. FRONTERA AGUAS ARRIBA

Se deben de dar dos condiciones de frontera: el gasto (hidrograma) y el tirante (limnigrama) de esta manera se obtiene  $V$  y  $\omega$  (fig 5.3c).

d) FLUJO SUPERCRTICO. FRONTERA AGUAS ABAJO

No se requiere de condiciones de frontera. Con las ecs 5.25 y 5.27 se puede obtener  $V$  y  $\omega$ , en caso necesario, por requerirse en un punto fijo, se realiza una interpolación (fig 5.3d).

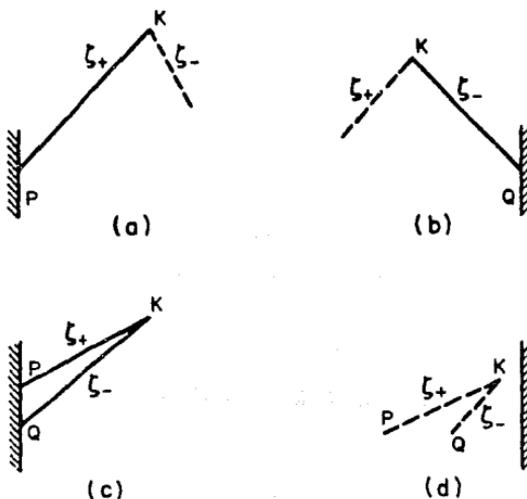


FIG 5.3 Condiciones de frontera ( $V > 0$ ).

## 5.7 SOLUCIÓN NUMÉRICA

### 5.7.1 Puntos interiores

Existen varias técnicas numéricas para resolver las ecuaciones del método de las características las cuales se pueden clasificar en simples, donde se manejan aproximaciones de primer orden, y de orden superior, donde se obtiene una mayor precisión en los resultados, ya que se emplean aproximaciones de segundo orden en adelante.

La mejoría que se logra dar con los métodos de orden superior, en el cálculo de las variables hidráulicas no es significativa comparado con los resultados obtenidos con métodos simples, por lo cual en el desarrollo de este trabajo se ha escogido un método de primer orden.

Para poder encontrar la solución de las ecs 5.25 y 5.26 es necesario formar una malla de rectángulos con base igual a  $\Delta x$  y de altura  $\Delta t$  y se acepta que en los vértices de la base (asociados al tiempo anterior) se conocen las variables  $V$ ,  $c$  y  $\omega$ .

En la fig 5.4 se observa una línea de pendiente positiva ( $1/(V+c)$ ) que parte del punto P y llega al punto K, tomando en cuenta esta figura la ec 5.26 se escribe en diferencias finitas como

$$\frac{x_K - x_P}{\Delta t} = V_P + c_P \quad (5.29)$$

y la ec 5.25 como

$$\frac{(V_K + \omega_K) - (V_P + \omega_P)}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2}(S_P + S_N) \right] \quad (5.30)$$

Igualmente, para la línea de pendiente  $1/(V-c)$  que va del punto Q al punto K, las ecs 5.27 y 5.28 quedan de la siguiente manera

$$\frac{x_K - x_Q}{\Delta t} = V_Q - c_Q \quad (5.31)$$

$$\frac{(V_K - \omega_K) - (V_Q - \omega_Q)}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2}(S_Q + S_N) \right] \quad (5.32)$$

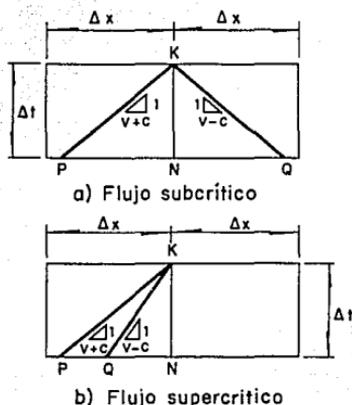


FIG 5.4 Líneas características y celdas de la malla.

En las ecs 5.29 a 5.32, las literales tienen un subíndice que indica el punto donde son consideradas.

Sumando las ecs 5.30 y 5.32 y al despejar  $V_K$ , se llega a

$$V_K = \frac{1}{2} \left[ V_P + \omega_P + V_Q - \omega_Q + g (2S_0 - S_N - \frac{1}{2} (S_P + S_Q)) \Delta t \right] \quad (5.33)$$

Obtenida  $V_K$ , se puede calcular  $\omega_K$  de la ec 5.30 como sigue

$$\omega_K = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_P + S_N) \right] \Delta t + V_P + \omega_P - V_K \quad (5.34)$$

En las ecs 5.33 y 5.34 se necesita conocer  $V_P$ ,  $\omega_P$ ,  $S_P$ ,  $V_Q$ ,  $\omega_Q$ ,  $S_Q$ . Sin embargo, los puntos P y Q casi nunca se ubican en los vértices de la base de los rectángulos de la malla, donde sí se conocen  $x$ ,  $V$ ,  $\omega$ ,  $c$  y  $S$ .

Para conocer los valores de las variables de interés en los puntos P y Q, se emplea la interpolación de Lagrange de tres puntos (segundo orden). En el inciso 4.4 se explicó brevemente este método de interpolación; en este capítulo se presenta la aplicación de este tipo

de interpolación al método de las características, para ello se considera la fig 4.3.

En el punto  $x_p$  (fig 4.3) es necesario conocer el valor de las variables  $V$ ,  $c$  y  $\omega$ , donde sólo se conoce el valor de éstas en los puntos  $x_0$ ,  $x_1$  y en  $x_2$ .

Para llevar a cabo la interpolación se considera que

$$f(x_0) = V_0 + c_0 \quad (5.35)$$

$$f(x_1) = V_1 + c_1 \quad (5.36)$$

$$f(x_2) = V_2 + c_2 \quad (5.37)$$

Además

$$P(x) = P(x_p) = V_p + c_p \quad (5.38)$$

igualando la ec 5.29 con la 5.38, resulta

$$P(x_p) = \frac{x_k - x_p}{\Delta t} \quad (5.39)$$

Sustituyendo la ec 5.39 en la 4.39 y tomando en cuenta a las ecs 4.40 a 4.42 y 5.35 a 5.37 se obtiene la ecuación

$$A x_p^2 + B x_p + C = 0 \quad (5.40)$$

donde

$$A = a + b + c \quad (5.41)$$

$$a = f(x_0) / (x_0 - x_1) (x_0 - x_2) \quad (5.42)$$

$$b = f(x_1) / (x_1 - x_0) (x_1 - x_2) \quad (5.43)$$

$$c = f(x_2) / (x_2 - x_0) (x_2 - x_1) \quad (5.44)$$

$$B = - \left[ a(x_1 + x_2) + b(x_0 + x_2) + c(x_0 + x_1) - \frac{1}{\Delta t} \right] \quad (5.45)$$

$$C = a x_1 x_2 + b x_0 x_2 + c x_0 x_1 - \frac{x_k}{\Delta t} \quad (5.46)$$

la raíz de la ec 5.40 que interesa es la positiva, por lo que

$$x_p = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.47)$$

Ya obtenido el valor de  $x_p$ , éste se sustituye en la ecs 4.40 a 4.42 para obtener los valores de  $P_0(x_p)$ ,  $P_1(x_p)$  y  $P_2(x_p)$ ; con los cuales se hace una interpolación de tipo polinomial para estimar  $V_p$  y  $c_p$  mediante

$$V_p = V_0 P_0(x_p) + V_1 P_1(x_p) + V_2 P_2(x_p) \quad (5.48)$$

$$c_p = c_0 P_0(x_p) + c_1 P_1(x_p) + c_2 P_2(x_p) \quad (5.49)$$

La variable  $\omega_p$  se calcula en función de  $c_p$  o bien como

$$\omega_p = \omega_0 P_0(x_p) + \omega_1 P_1(x_p) + \omega_2 P_2(x_p) \quad (5.50)$$

De acuerdo con la fig 4.3 se ha supuesto que el punto P está dentro del intervalo, es decir que  $x_0 \leq x_p \leq x_2$  y que  $x_0 \leq x_1 \leq x_2$ . Además que  $x_k = x_1$  (o algunas veces  $x_k = x_2$ , en el régimen supercrítico). Cuando al calcular  $x_p$  con la ec 5.47 no cumple con lo anterior, se requiere escoger otros valores de  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  hasta lograr que  $x_p$  se encuentre dentro del intervalo. Los valores de  $y_p$  y  $S_p$  se obtienen a partir de  $V_p$  y  $\omega_p$ .

Para encontrar las variables asociadas al punto Q se sigue un método similar al anterior, pero para él se considera

$$f(x_0) = V_0 - c_0 \quad (5.51)$$

$$f(x_1) = V_1 - c_1 \quad (5.52)$$

$$f(x_2) = V_2 - c_2 \quad (5.53)$$

de esta manera se determinan los coeficientes de la ec 5.40, después se encuentra el valor de  $x_q$  por medio de la 5.47; posteriormente mediante las ecs 4.40 a 4.42 se calcula  $P_0(x_q)$ ,  $P_1(x_q)$  y  $P_2(x_q)$ , con esto se puede determinar  $V_q$ ,  $c_q$  y  $\omega_q$  con las siguientes expresiones

$$V_q = V_0 p_0(x_q) + V_1 p_1(x_q) + V_2 p_2(x_q) \quad (5.54)$$

$$c_q = c_0 p_0(x_q) + c_1 p_1(x_q) + c_2 p_2(x_q) \quad (5.55)$$

$$\omega_q = \omega_0 p_0(x_q) + \omega_1 p_1(x_q) + \omega_2 p_2(x_q) \quad (5.56)$$

De acuerdo a lo anterior, en la siguiente secuela de cálculo se aplica

el método de las características a puntos que no pertenecen a las fronteras

1. Se calculan los valores de las funciones  $f(x_p)$  con las ecs 5.35 a 5.37.
2. Con las ecs 5.40 a 5.47, se obtiene  $x_p$ .
3. Se calculan  $V_p$ ,  $c_p$  y  $\omega_p$  con las ecs 5.48 a 5.50.
4. Se determina  $y_p$  (en función de  $\omega_p$  ó  $c_p$ ),  $r_p$  y  $S_p$ .
5. Se calculan los valores de las funciones  $f(x_0)$  con las ecs 5.51 a 5.53.
6. Considerando las ecs 5.40 a 5.47, se obtiene  $x_0$ .
7. Se determina  $V_0$ ,  $c_0$ , y  $\omega_0$  con las ecs 5.54 a 5.56.
8. Se encuentra  $y_0$  (en función de  $\omega_0$  o  $c_0$ ),  $r_0$  y  $S_0$ .
9. Se calcula  $V_k$  con la ec 5.33.
10. Se obtiene  $\omega_k$  con la ec 5.34.
11. Se encuentran  $y_k$ ,  $c_k$ ,  $r_k$  y  $S_k$  a partir de  $\omega_k$ .

En las fronteras se sigue un procedimiento semejante para obtener  $\omega_k$  o  $c_k$ , de acuerdo con el tipo de flujo, y el del problema por resolver.

### 5.7.2 Condición de frontera

#### REGIMEN SUBCRITICO

##### AGUAS ARRIBA

En este caso la línea característica negativa ( $\zeta_-$ ) se llega a encontrar con la frontera aguas arriba por lo que sólo se toman las ecuaciones de la línea característica negativa (ecs 5.27 y 5.28), éstas quedan asociadas con el gasto  $Q$ , como condición de frontera en esta sección, los valores de las variables dependientes  $y_k$  y  $V_k$  quedan en función de la condición de frontera establecida, para conocer sus valores se realiza lo siguiente

De acuerdo con la ec 5.32, agrupando los términos que contengan a  $y_k$

$$V_k - \omega_k = g \Delta t \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_0 + S_N) \right] + V_0 - \omega_0 \quad (5.57)$$

Si el lado derecho de la ec 5.57 se designa como  $\alpha$ , expresando al el

lado izquierdo en términos de  $y_k$ , y tomando en cuenta que se utiliza una sección rectangular se obtiene

$$\frac{Q}{y_k B} - 2 \sqrt{g y_k} - \alpha = 0 \quad (5.58)$$

haciendo álgebra, se llega a la siguiente expresión

$$\frac{Q}{B} - y_k \left[ 2 (g y_k)^{1/2} - \alpha \right] = 0 \quad (5.59)$$

Para encontrar el valor de  $y_k$  se propone emplear el método de Newton-Raphson de primer orden.

Conociendo el valor  $y_k$ , se obtiene fácilmente el valor de  $V_k$ , de esta manera se encuentra los valores de las variables dependientes de la característica negativa ( $\zeta_-$ ).

#### AGUAS ABAJO

En este caso se toman en cuenta las ecuaciones de la línea característica positiva ( $\zeta_+$ ) (ecs 5.25 y 5.26), ya que ésta alcanza a la frontera aguas abajo. Las ecuaciones se asocian con una condición de frontera  $y_f$ , que es el tirante en la sección final del canal.

En régimen subcrítico dependiendo del valor del tirante final  $y_f$ , se pueden presentar los siguientes tipos de perfiles en la sección aguas abajo del canal.

$$M1 \quad y_f > y_n > y_c$$

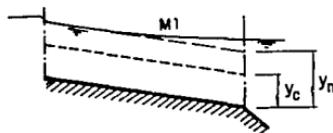


FIG 5.5 Perfil M1.

Este perfil (fig 5.6), se presenta cuando en el extremo de aguas abajo del canal se encuentra con un depósito de agua, el cual mantiene un nivel mayor al tirante normal, este perfil es conocido como curva de remanso.

$$M2 \quad y_n > y_f \approx y_c$$

En la fig 5.6 se muestra un ejemplo de este perfil, como se observa el nivel máximo que puede tener la masa de agua donde descarga debe ser menor al tirante normal  $y_n$ , y el nivel mínimo que puede tener esta masa es el vacío, ya que el tirante menor que se puede presentar en este caso es el tirante crítico.

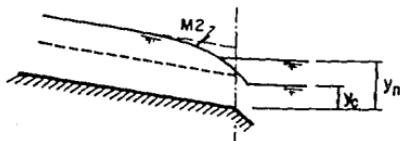


FIG 5.6 Perfil M2.

$$S1 \quad y_f > y_c > y_n$$

Este tipo de perfil (fig 5.7) generalmente empieza aguas arriba con un salto, el nivel aguas abajo es mayor que el  $y_c$ , podría ser el caso de una descarga en un depósito donde la elevación del agua es mayor al tirante crítico.

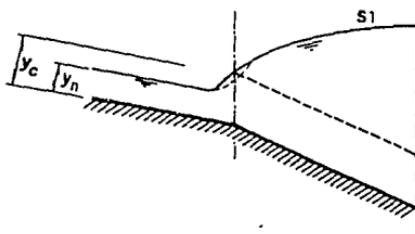


FIG 5.7 Perfil S1.

Como se puede observar, el tirante final  $y_k$ , es la condición de frontera, ésta se debe de dar en cada tiempo (limnigrama). De esta manera se obtiene  $\omega_k$ , con la ec 5.24.

De la ec 5.30 se obtiene  $V_k$

$$V_k = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_p + S_N) \right] \Delta t - \omega_k + V_p + \omega_p \quad (5.60)$$

Con la ecuación anterior se obtiene el valor de  $y_k$  y  $V_k$ , para esta sección.

#### TIRANTE CRÍTICO COMO CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ABAJO.

Cuando se transita un hidrograma en un canal para un determinado tiempo se conoce el gasto de entrada, pero no el gasto en la última sección aguas abajo debido al efecto transitorio que se presenta en él, por lo tanto no se dispone del valor del tirante crítico  $y_c$  en la última sección en un determinado tiempo.

Para obtener el valor del tirante crítico en la sección de aguas abajo, se propone lo siguiente.

De acuerdo con la ec 3.45, la velocidad crítica es igual a

$$V_k = \sqrt{g y_c} \quad (5.61)$$

esto quiere decir, que la velocidad en el punto k (última sección) es igual a la velocidad crítica, y ésta tiene la misma magnitud que la celeridad es decir

$$V_k = c_k = \sqrt{g y_k} \quad (5.62)$$

Como se ha visto previamente, en esta sección sólo se puede tomar en cuenta las ecuaciones de la línea característica positiva (ecs 5.25 y 5.26), y de acuerdo con la 5.24, la 5.30 se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{(c_k + 2c_k) - (V_p + \omega_p)}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_p + S_N) \right] \quad (5.63)$$

Despejando de la ecuación anterior los términos que contienen a  $y_k$ , resulta

$$(g y_k)^{1/2} + 2 (g y_k)^{1/2} = \Delta t g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_P + S_N) \right] + V_P + \omega_P \quad (5.64)$$

resolviendo para  $y_k$ , se obtiene

$$y_k = \left[ \frac{1}{3 g^{1/2}} \left[ \Delta t g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_P + S_N) \right] + V_P + \omega_P \right] \right]^2 \quad (5.65)$$

De esta manera se ha obtenido el valor del tirante crítico ( $y_k = y_c$ ) en la sección final aguas abajo del canal.

### REGIMEN SUPERCRTICO

#### AGUAS ARRIBA.

En este caso se tienen que establecer dos condiciones de frontera, el gasto  $Q$ , y el tirante inicial  $y_1$ , de esta manera se les ha asignado a las variables dependientes ( $y_k$  y  $V_k$ ), los valores de la solución del sistema de ecs 5.25 a 5.28.

#### AGUAS ABAJO.

En esta sección no se tiene que establecer ninguna condición de frontera ya que las dos características ( $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ ) tienen pendiente positiva, por lo que las variables dependientes ( $y_k$  y  $V_k$ ), se pueden calcular de la misma manera que en las secciones interiores.

### 5.8 CONDICIÓN DE FRONTERA MÓVIL

Hasta ahora se ha planteado únicamente el modelo numérico, para flujo gradualmente variado, este modelo también contempla el cambio de régimen rápido a lento, determinando la velocidad y la trayectoria del salto hidráulico. En este cambio se produce una discontinuidad de las variables dependientes ( $y$  y  $V$ ).

La trayectoria del salto variará en el plano  $x-t$ , cumpliendo con las

ecuaciones del tirantes conjugados para flujo no permanente (inciso 3.4.2), respetando también la siguiente desigualdad

$$V_1 + c_1 > V_1 - c_1 > V_w > V_2 - c_2 \quad (5.66)$$

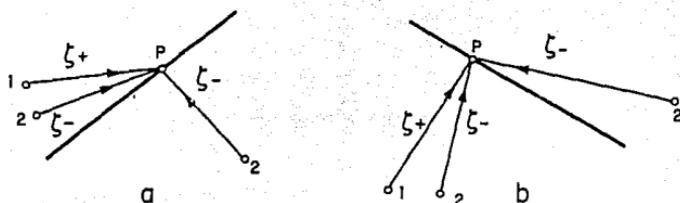


FIG 5.8 Cálculo de la trayectoria del frente a partir de las líneas características.

En la fig 5.8, se muestra la línea que representa la frontera móvil, la cual es alcanzada por dos líneas características ( $\zeta_+$  y  $\zeta_-$ ) de aguas arriba y por una ( $\zeta_-$ ) de aguas abajo.

La forma de conocer la ubicación del cambio de régimen, consiste en determinar la posición del frente en cada intervalo de tiempo, tomando en cuenta las ecuaciones de tirantes conjugados para flujo no permanente (ec 3.33) y las ecuaciones proporcionadas por las líneas características que alcanzan al frente.

La trayectoria del salto hidráulico puede considerarse como una condición de frontera móvil dentro de la zona de estudio, donde ésta es dividida por la trayectoria del salto, en régimen supercrítico (aguas arriba) y régimen subcrítico (aguas abajo).

De acuerdo con la fig 5.8 se observa que en la parte del régimen subcrítico, en la sección inicial; al igual que en el caso general, el valor de las variables dependientes se determinan de acuerdo con las ecuaciones de la línea característica negativa y una condición de frontera, ahora esta condición debe de cumplir con la ecuación de tirantes conjugados para flujo no permanente. En régimen supercrítico, las líneas características alcanzan la frontera móvil, sobrepasándola,

por lo que la red de las líneas características en esta parte, se forma independientemente de esta condición de frontera. Con las ecuaciones de las líneas características y haciendo una interpolación es posible obtener los valores del tirante y la velocidad en la frontera ( $y_{1K}$ ,  $V_{1K}$ ).

Para conocer la ubicación y la velocidad del salto se plantea un sistema de nueve ecuaciones, el cual es resuelto de manera iterativa.

$$\frac{x_{1K} - x_{1P}}{\Delta t} = V_{1P} + c_{1P} \quad (5.67)$$

$$\frac{(V_{1K} + \omega_{1K}) - (V_{1P} + \omega_{1P})}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_{1P} + S_{1N}) \right] \quad (5.68)$$

$$\frac{x_{1K} - x_{1Q}}{\Delta t} = V_{1Q} - c_{1Q} \quad (5.69)$$

$$\frac{(V_{1K} - \omega_{1K}) - (V_{1Q} - \omega_{1Q})}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_{1Q} + S_{1N}) \right] \quad (5.70)$$

$$\frac{x_{2K} - x_{2Q}}{\Delta t} = V_{2Q} - c_{2Q} \quad (5.71)$$

$$\frac{(V_{2K} - \omega_{2K}) - (V_{2Q} - \omega_{2Q})}{\Delta t} = g \left[ S_0 - \frac{1}{2} (S_{2Q} + S_{2N}) \right] \quad (5.72)$$

$$\frac{y_{2K}^2}{y_{1K}^2} + \frac{y_{2K}}{y_{1K}} - \frac{2(V_{1K} - V_w)^2}{g y_{1K}} = 0 \quad \text{TIRANTES CONJUGADOS} \quad (5.73)$$

$$V_w = \frac{V_{2K} y_{2K} - V_{1K} y_{1K}}{y_{2K} - y_{1K}} \quad \text{VELOCIDAD ABSOLUTA DE ONDA} \quad (5.74)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_K - x_N}{\Delta t} = V_{wK} \quad (5.75)$$

La secuencia de cálculo que se propone para conocer los valores de las incógnitas en la frontera móvil ( $y_{1K}$ ,  $V_{1K}$ ,  $y_{2K}$ ,  $V_{2K}$ ,  $V_w$ ) es la siguiente:

- 1) Se propone el valor de  $V_w$ .

- 2) Como se conoce  $x_n$ , que corresponde a la posición del frente en el tiempo anterior, se puede encontrar el valor de  $x_k$  a partir de la ec 5.75.
- 3) En régimen supercrítico, la frontera del extremo aguas abajo de la zona en estudio, no requiere de una condición de frontera; por lo que las ecuaciones de las líneas características del régimen supercrítico (ecs 5.67 a 5.70) aportan los valores de las variables  $y_{1k}$  y  $V_{1k}$  (régimen supercrítico en la frontera móvil).
- 4) Con la ec 5.73, se encuentra el valor de la raíz positiva de la relación  $(y_{2k}/y_{1k})$ , obteniendo así el valor de  $y_{2k}$ .
- 5) Con el valor de  $y_{2k}$  y con las ecs 5.71 y 5.72 se determina  $V_{2k}$ .
- 6) Se calcula  $V_w$  con la ec 5.74 y se compara con el valor propuesto, la diferencia entre ambos valores debe de ser menor que la tolerancia establecida, de lo contrario se tendrá que hacer una nueva iteración.

## 6. EJEMPLOS

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan ejemplos en los cuales se aplica el modelo numérico antes planteado, el cual se puede emplear para la simulación de flujo no permanente tanto para régimen subcrítico como para supercrítico, esta modelación se encuentra limitada por condiciones de frontera que varían gradualmente. Cuando el flujo cambia de régimen de supercrítico a subcrítico se considera la ecuación de tirantes conjugados para flujo no permanente.

Con este modelo es posible obtener la trayectoria del salto hidráulico de velocidad variable. La velocidad del salto es variable ya que las condiciones de frontera tanto aguas arriba como aguas abajo varían gradualmente. Esto mismo se puede observar en un canal de laboratorio: la velocidad con que se mueve el salto hidráulico varía de acuerdo con las condiciones de frontera.

Para poder observar mejor el alcance de este trabajo se han escogido tres ejemplos de flujo no permanente, el primero es con variación del nivel en la condición de frontera aguas abajo, el segundo tiene un gasto variable como condición de frontera aguas arriba, y el tercero cuenta con ambas condiciones de frontera.

Para la simulación de los ejemplos se ha empleado una computadora personal Hewlett Packard Vectra 486, empleando como lenguaje de programación Quikbasic. Al final de cada ejemplo se indica el tiempo que duró la simulación.

## 6.2 EJEMPLOS

Para cada ejemplo se dieron como condiciones iniciales, las características hidráulicas de un flujo a régimen permanente.

En todos los ejemplos se plantea un canal de laboratorio de sección rectangular con las siguientes características:

Ancho de base	0.40 m
Longitud	20.00 m
Coefficiente de rugosidad $n$ de Manning	0.01

Para el cálculo se ha utilizado un intervalo de distancia de 0.50 m y de tiempo de 0.05 s, garantizando de esta manera la estabilidad del esquema.

### EJEMPLO 1

Gasto constante con variación del nivel aguas abajo como condiciones de frontera.

En este ejemplo se simula un flujo en el canal antes descrito, con una pendiente de plantilla del 3%, un gasto constante de  $0.045 \text{ m}^3/\text{s}$ . Por lo tanto la condición de frontera aguas arriba es gasto constante, y el nivel del agua en esta sección es constante (0.054 m); mientras que la condición de frontera aguas abajo está representada por la fig 6.1, la cual representa un limnigrama lineal.

La variación del nivel del agua, en la última sección es de 0.054 a 0.48 m en un tiempo total de 100 segundos. El instante  $T = 0$  se toma cuando las condiciones iniciales del modelo se han establecido, en ese momento el nivel aguas abajo del canal es de 0.05 m el cual se aproxima al tirante normal en la sección  $X = 20$  m. El valor final del nivel en esta sección es de 0.48 m el cual se mantiene durante 50 segundos.

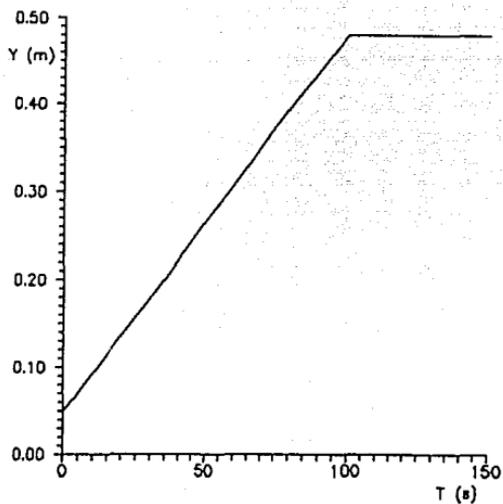


FIG 8.1 Limnigrama en la sección final.

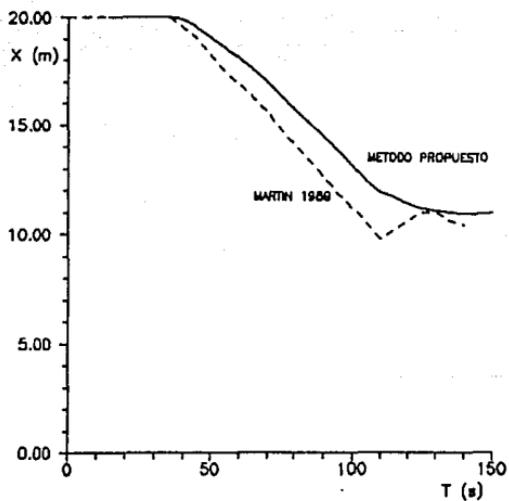
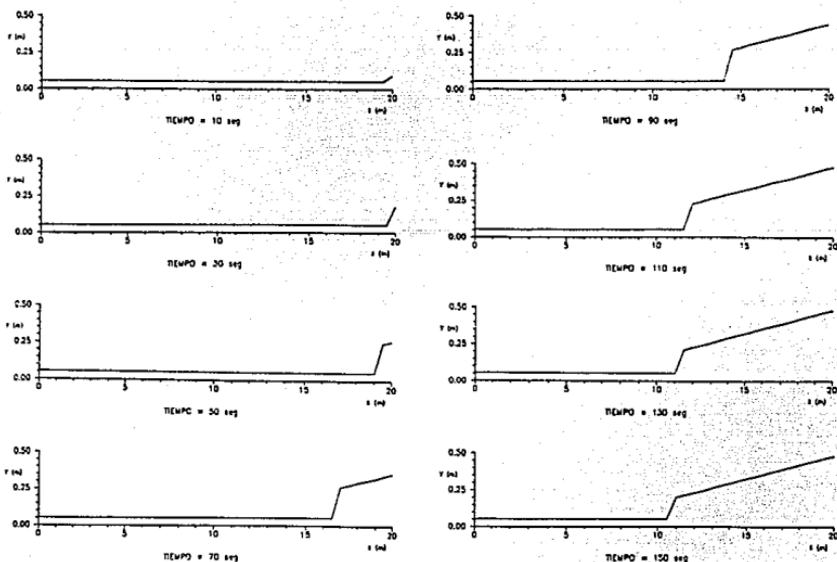


FIG 8.2 Localización del salto hidráulico

En la fig 6.2 se muestra la posición del salto hidráulico en cada tiempo, los resultados modelo son comparados con otro modelo, propuesto por Martin 1989; en esta figura se observa que ambas gráficas tienen la misma tendencia, los cambios de las pendientes de las curvas se presentan en tiempos iguales, aunque los valores en la distancia difieren un poco; a partir del tiempo = 130 s los valores de ambos métodos son muy parecidos.

Al comparar figuras 6.1 y 6.2, se puede observar que el desplazamiento del salto está muy relacionado con la variación de la condición de frontera aguas abajo, a medida que el nivel del agua en la última sección se eleva, el salto se mueve hacia aguas arriba.

En el apéndice A se muestran en forma de tabla las características del flujo en determinados instantes, junto con su respectivo perfil. El tiempo que duró la computadora en hacer la simulación fue de 14 min. A continuación se muestran algunos perfiles del agua correspondientes a este ejemplo.



## EJEMPLO 2:

Gasto variable con nivel constante en la sección extrema aguas abajo.

Se desea determinar las características del flujo en el mismo canal del ejemplo anterior, con pendiente  $S = 0.01$ ; el gasto tendrá una variación lineal: en el tiempo 10 seg el gasto es de  $0.01998 \text{ m}^3/\text{s}$  y en el tiempo 160 seg es de  $0.0372 \text{ m}^3/\text{s}$ , manteniéndose constante el restante tiempo; el nivel del agua en el extremo aguas arriba del canal no cambia (0.06 m). La condición de frontera aguas abajo, es un nivel constante igual a 0.14 m.

En la fig 6.3 se muestra la posición del salto en el tiempo que dura el ensayo, tanto el calculado como el medido en laboratorio (Martin 1989). En este caso se puede observar que cuando el gasto aumenta el salto hidráulico se barre hacia aguas abajo. En esta figura se observa que los valores obtenidos mediante el método propuesto son muy semejantes a los valores medidos.

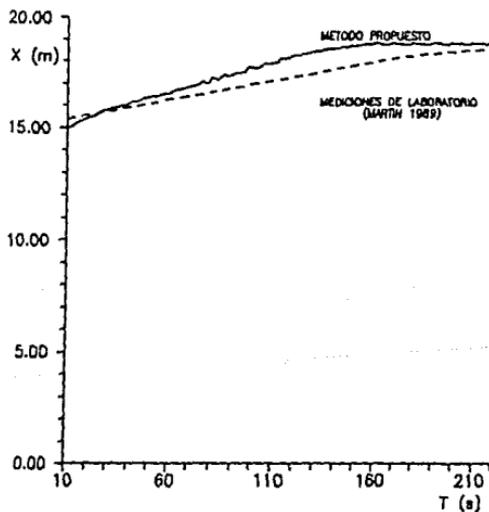
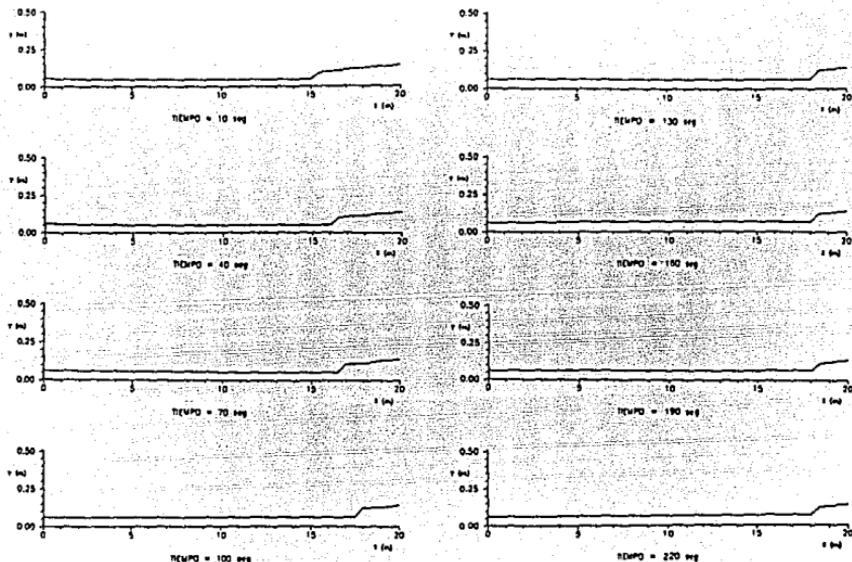


FIG 6.3 Localización del salto hidráulico.

En el apéndice B se encuentran tablas con las características principales del flujo en determinados instantes, junto con el perfil

del agua en ese mismo instante. La computadora tardó 20 min en hacer esta simulación. Los perfiles del agua en tiempos determinados son los siguientes:



### EJEMPLO 3:

Gasto variable como condición de frontera aguas arriba y nivel del agua en el extremo inferior variable como condición de frontera aguas abajo.

Las características físicas del canal son las mismas que las de los ejemplos anteriores, la pendiente de la plantilla del canal es  $S = 0.01$ , la variación del gasto de entrada es lineal: hasta el tiempo 10 seg es de  $0.01998 \text{ m}^3/\text{s}$  para llegar a ser de  $0.0372 \text{ m}^3/\text{s}$  en el tiempo 160 seg; el nivel del agua en la sección extrema aguas arriba es constante (0.06 m), la variación del nivel aguas abajo no es lineal (fig 6.4).

En la fig 6.5 se muestra la trayectoria del salto durante el tiempo que duró la modelación, y se puede comparar con los valores obtenidos en el laboratorio (Martín 1989). En esta figura se observa que existe una diferencia entre los valores medidos y los valores obtenidos con el método propuesto.

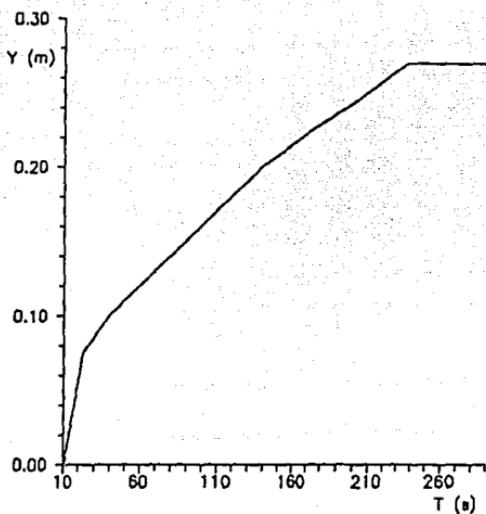


FIG 6.4 Limnigrama en la sección final.

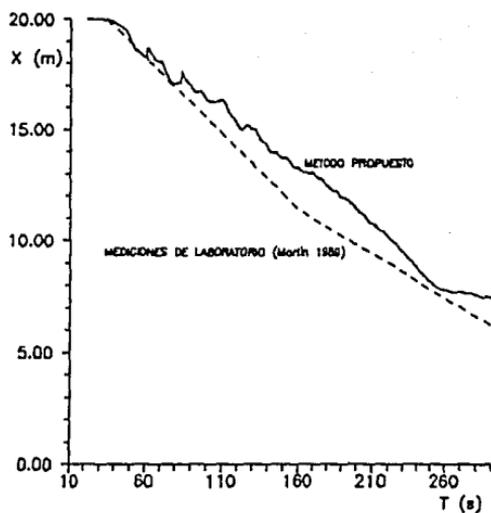
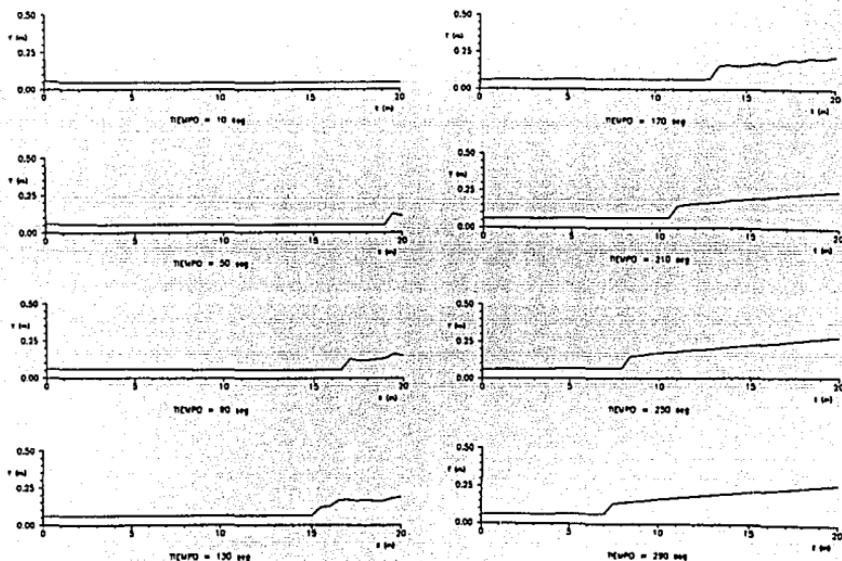


FIG 6.5 Localización del salto hidráulico.

En el anexo C se muestran las tablas con las características del flujo y sus perfiles del agua correspondientes. El tiempo de computadora en este ejemplo fue de 21 min. A continuación se muestran los perfiles correspondientes a este ejemplo, en los cuales se puede apreciar el movimiento del salto hidráulico.



## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo con los resultados de los ejemplos planteados en el capítulo seis, se puede decir que se pueden conocer las características hidráulicas del flujo no permanente considerando el posible movimiento de saltos hidráulicos. Para ello se elaboró un modelo numérico que puede ser utilizado en una computadora personal.

Se encontró que manejando intervalos de tiempo y de distancia relativamente pequeños en función de la longitud del canal, se puede manejar tanto el flujo subcrítico como el supercrítico, ya que cuando se presenta el salto hidráulico es necesario simular los dos tipos de flujo en el mismo instante (supercrítico aguas arriba y subcrítico aguas abajo). Esto es posible tanto en pendiente de fondo subcrítica como en supercrítica.

Emplear intervalos de tiempo y de distancia pequeños, en la simulación de un flujo no permanente, aumenta el tiempo de cálculo pero éste es compensado con la estabilidad y precisión del método; además si se cuenta con una computadora personal cuya velocidad de cálculo sea entre 20 y 30 Mhz, el tiempo de cálculo es aceptable.

Ahora, para establecer las condiciones iniciales y los intervalos de tiempo y de distancia; es conveniente auxiliarse con algún método de

cálculo para flujo permanente que consideren saltos hidráulicos, de esta manera, el tiempo que requiere el modelo numérico para estabilizarse en las condiciones iniciales se reduce considerablemente.

Al comparar los resultados de los ejemplos con algunos valores reportados, se obtuvo una semejanza adecuada, por esta razón se puede decir que el método propuesto es confiable.

Las ecuaciones de tirantes conjugados, celeridad y velocidad absoluta de onda se encuentran interrelacionadas ya que en ellas se han tomado en cuenta los principios de continuidad y de cantidad de movimiento, como se observa en las ecuaciones 3.18 y 3.22.

La ecuación de tirantes conjugados en flujo no permanente, toma en cuenta la velocidad absoluta de onda. En este trabajo se hizo una revisión de las ecuaciones para un canal de sección rectangular (ecs 3.29 y 3.33).

De acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo, se puede decir que el método de las características, es sencillo y práctico en el estudio del flujo no permanente tanto en régimen subcrítico como en supercrítico; además las condiciones de frontera son sencillas de manejar.

El salto hidráulico se ha considerado dentro del modelo numérico como una condición de frontera móvil, que divide el cálculo de los puntos interiores, pudiéndose calcular de acuerdo con el tipo de régimen en que se encuentran: supercrítico aguas arriba del salto y subcrítico aguas abajo. Tomando en cuenta esta condición de frontera móvil, es posible determinar la trayectoria continua del salto hidráulico.

En los ejemplos planteados en el capítulo seis se observa que el movimiento del salto hidráulico, depende más de la variación del nivel aguas abajo que de la variación de gasto aguas arriba. Esto se debe que, al subir el nivel aguas abajo, este se aleja del tirante crítico, pudiéndose obtener perfiles subcríticos mas largos. En cambio, cuando el gasto aumenta aguas arriba, varían al mismo tiempo el tirante crítico y el normal en menor escala, dependiendo del tipo de pendiente.

Conocer la dirección y la velocidad del salto hidráulico en la

simulación de un flujo no permanente puede ser importante en el dimensionamiento de una obra de conducción que esté sujeta a un gasto variable. También sería útil para los casos de un canal de un sistema de riego o un colector de una red de alcantarillado donde el gasto no es constante y el tirante aguas abajo de la conducción sea variable.

## REFERENCIAS

1. Chaudhry M. H. (1979), "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold, New York, N.Y.
2. Chow V. T. (1959), "Open-channel Hydraulics", MacGraw-Hill International Book Company, New York.
3. Fuentes M. O. A. (1987), "Desarrollo de un modelo matemático de ondas de ruptura", Informe interno del Instituto de Ingeniería UNAM, México, D.F.
4. Fuentes M. O. A. y Martínez A. P. F. (1988), "Introducción a los métodos numéricos aplicados a la hidráulica", IMTA, México.
5. Fuentes M. O. A. y Osnaya R. J. (1991), "Rotura de embalses", Informe interno del Instituto de Ingeniería UNAM, México D.F.
6. Henderson F. M. (1969), "Open channel flow", Macmillan Company, New York.
7. Hornobeck R. W. (1975), "Numerical Methods", Quantum Publishers, Inc., New York, N.Y.
8. Mahmood K. and Yevjevich V. (1975), "Unsteady flow in open channels", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A.
9. Martín V. J. P. (1989), "Estudio hidráulico de la propagación del resalto móvil", Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
10. Ralston A. and Wilf H. S. (1960), "Mathematical methods for digital computers", John Wiley & Sons Inc., U.S.A.
11. Sivaloganathan K. (abril 1974), "Free surface flow computations by characteristics", Journal of the Hydraulics Division, ASCE.
12. Sotelo A. G. (1974), "Hidráulica General Volumen I: Fundamentos", LIMUSA, México D.F.

13. Sotelo A. G., "Apuntes de Hidráulica II", Facultad de Ingeniería-UNAM, México D.F.
14. Stoker J. J. (1957), "Water Waves", Interscience Publishers Inc, New York.
15. Streeter L. V. and Wylie E. B. (1986), "Mecánica de los fluidos", McGraw-Hill, U.S.A.
16. Townson J. M. (1991), "Free-surface hydraulics", Unwin Hyman, London.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## APENDICE

En esta sección se presentan los resultados numéricos del modelo antes planteado en forma más detallada.

Esta sección está dividida en tres partes (A, B, y C), cada una corresponde a los datos de las características del flujo de cada uno de los ejemplos planteados en el capítulo 6. Esta información está dada en forma de tablas, en ellas se da la información siguiente:

- X distancia medida desde el origen 0, en m.
- V velocidad media del flujo, en m/s.
- C celeridad, en m/s.
- W variable de estado de Escoffier, en m/s.
- Y tirante del flujo, en m.
- Q gasto calculado tomando en cuenta la velocidad media y el tirante en la sección indicada, en m<sup>3</sup>/s.

En la parte inferior de cada tabla se anexa el perfil del agua correspondiente al tiempo indicado.

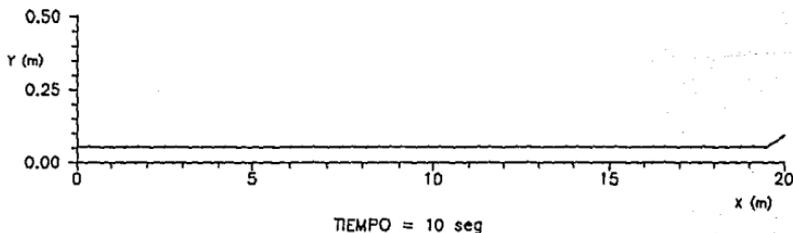
## SECCION A

### EJEMPLO 1

Tiempo = 10 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 0  
Velocidad del salto = 0

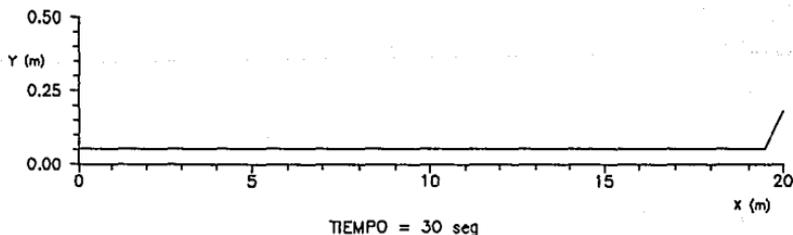
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
13.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
14.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
15.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
16.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
17.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
18.000	2.101	0.725	1.449	0.054	0.045
19.000	2.101	0.725	1.449	0.054	0.045
20.000	1.210	0.955	1.909	0.093	0.045



Tiempo = 30 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 20      m  
Velocidad del salto = 0      m/s

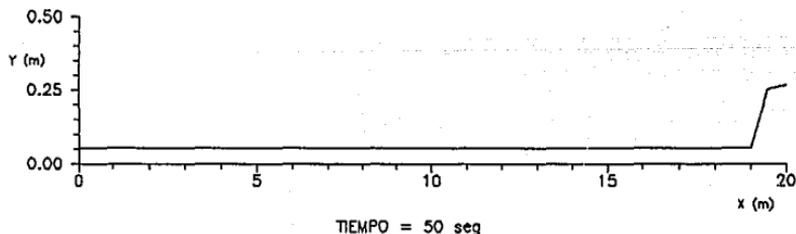
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
13.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
14.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
15.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
16.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
17.000	2.100	0.724	1.449	0.054	0.045
18.000	2.101	0.724	1.449	0.054	0.045
19.000	2.101	0.724	1.449	0.054	0.045
20.000	0.628	1.325	2.651	0.179	0.045



Tiempo = 50 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 19.04546 m  
Velocidad del salto = - 0.1057137 m/s

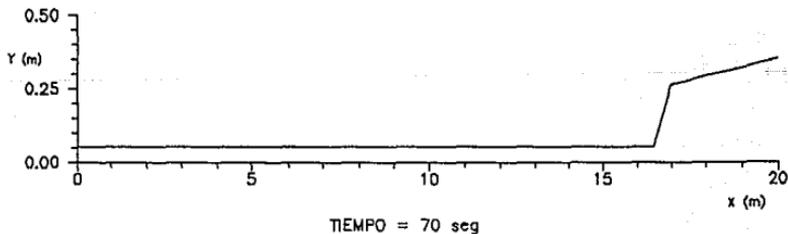
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
13.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
14.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
15.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
16.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
17.000	2.100	0.724	1.449	0.054	0.045
18.000	2.101	0.724	1.449	0.054	0.045
19.000	2.101	0.724	1.449	0.054	0.045
20.000	0.424	1.612	3.224	0.265	0.045



Tiempo = 70 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 16.9668 m  
Velocidad del salto = - 0.1349836 m/s

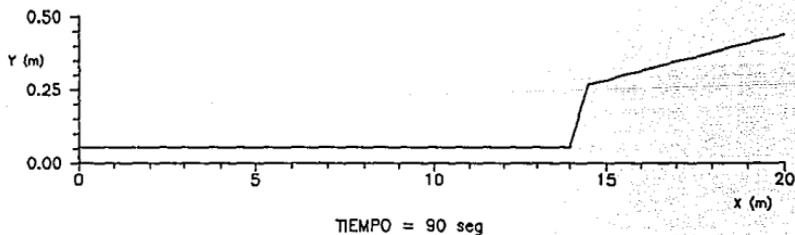
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
13.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
14.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
15.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
16.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
17.000	0.429	1.604	3.207	0.262	0.045
18.000	0.383	1.690	3.380	0.291	0.045
19.000	0.333	1.771	3.542	0.320	0.043
20.000	0.280	1.855	3.710	0.351	0.039



Tiempo = 90 seg       $Q = .045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 14.44081 m  
Velocidad del salto = - 0.1369407 m/s

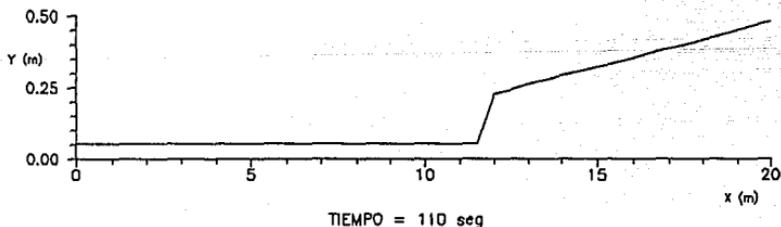
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
13.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
14.000	2.100	0.725	1.449	0.054	0.045
15.000	0.427	1.658	3.316	0.281	0.048
16.000	0.372	1.747	3.494	0.311	0.046
17.000	0.310	1.838	3.676	0.345	0.043
18.000	0.277	1.916	3.833	0.375	0.042
19.000	0.233	2.002	4.004	0.409	0.038
20.000	0.211	2.070	4.140	0.437	0.037



Tiempo = 110 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 11.92882 m  
Velocidad del salto = - 0.061907 m/s

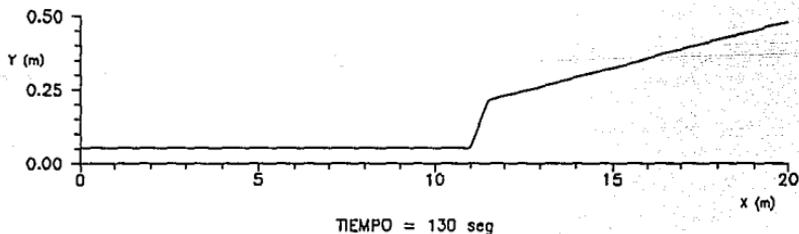
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	0.498	1.487	2.975	0.226	0.045
13.000	0.450	1.600	3.201	0.261	0.047
14.000	0.413	1.690	3.381	0.292	0.048
15.000	0.377	1.775	3.550	0.322	0.048
16.000	0.339	1.864	3.728	0.355	0.048
17.000	0.314	1.945	3.889	0.386	0.048
18.000	0.290	2.023	4.046	0.418	0.048
19.000	0.267	2.101	4.202	0.450	0.048
20.000	0.252	2.169	4.339	0.480	0.048



Tiempo = 130 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 11.08069 m  
Velocidad del salto = -0.0208504 m/s

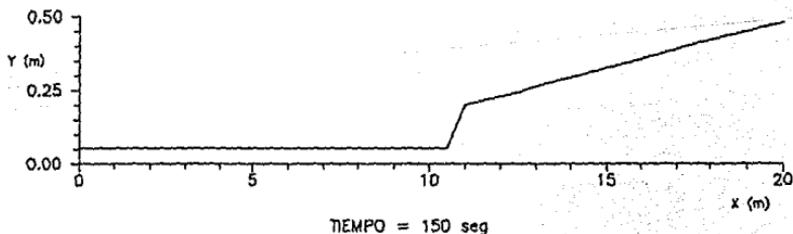
X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
12.000	0.497	1.496	2.992	0.228	0.045
13.000	0.447	1.592	3.183	0.259	0.046
14.000	0.383	1.693	3.386	0.293	0.045
15.000	0.343	1.783	3.565	0.324	0.045
16.000	0.313	1.867	3.734	0.356	0.045
17.000	0.287	1.949	3.898	0.388	0.045
18.000	0.265	2.027	4.054	0.419	0.044
19.000	0.246	2.100	4.201	0.450	0.044
20.000	0.231	2.169	4.339	0.480	0.044



Tiempo = 150 seg       $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 10.97613 m  
Velocidad del salto = 0.0004640 m/s

X	V	C	W	Y	Q
0.000	2.083	0.727	1.455	0.054	0.045
1.000	2.087	0.727	1.454	0.054	0.045
2.000	2.090	0.726	1.453	0.054	0.045
3.000	2.092	0.726	1.452	0.054	0.045
4.000	2.094	0.726	1.451	0.054	0.045
5.000	2.095	0.725	1.451	0.054	0.045
6.000	2.096	0.725	1.450	0.054	0.045
7.000	2.097	0.725	1.450	0.054	0.045
8.000	2.098	0.725	1.450	0.054	0.045
9.000	2.099	0.725	1.450	0.054	0.045
10.000	2.099	0.725	1.449	0.054	0.045
11.000	0.568	1.394	2.787	0.198	0.045
12.000	0.498	1.498	2.996	0.229	0.046
13.000	0.419	1.606	3.212	0.263	0.044
14.000	0.380	1.696	3.391	0.293	0.045
15.000	0.344	1.784	3.569	0.325	0.045
16.000	0.314	1.871	3.741	0.357	0.045
17.000	0.283	1.955	3.910	0.390	0.044
18.000	0.262	2.031	4.063	0.421	0.044
19.000	0.244	2.102	4.205	0.451	0.044
20.000	0.230	2.169	4.339	0.480	0.044



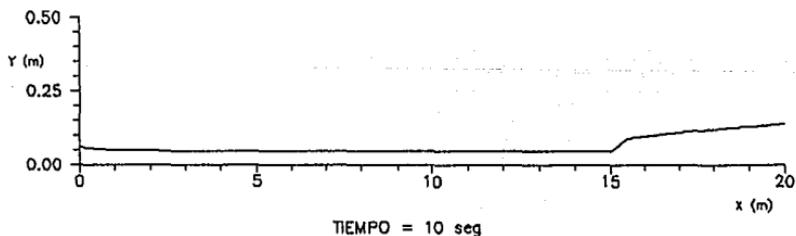
## SECCION B

### EJEMPLO 2

Tiempo = 10 seg       $Q = 0.01998 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 15.00022 m  
Velocidad del salto = 0.0044636 m/s

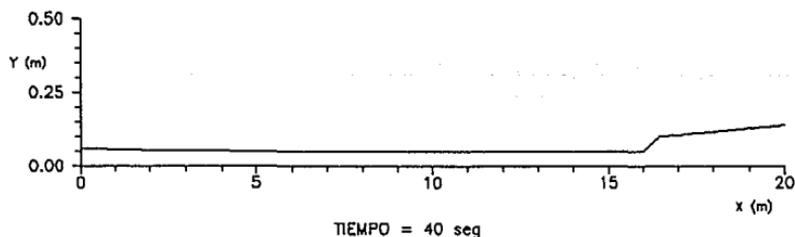
X	V	C	W	Y	Q
0.000	0.833	0.767	1.534	0.060	0.020
1.000	0.983	0.705	1.411	0.051	0.020
2.000	1.040	0.685	1.371	0.048	0.020
3.000	1.066	0.678	1.356	0.047	0.020
4.000	1.087	0.671	1.341	0.046	0.020
5.000	1.087	0.672	1.343	0.046	0.020
6.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
7.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
8.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
9.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
10.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
11.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
12.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
13.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
14.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
15.000	1.087	0.671	1.343	0.046	0.020
16.000	0.516	0.975	1.950	0.097	0.020
17.000	0.458	1.034	2.067	0.109	0.020
18.000	0.413	1.089	2.178	0.121	0.020
19.000	0.386	1.133	2.266	0.131	0.020
20.000	0.353	1.171	2.343	0.140	0.020



Tiempo = 40 seg       $Q = 0.02342 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 16.09274 m  
Velocidad del salto = 0.0621617 m/s

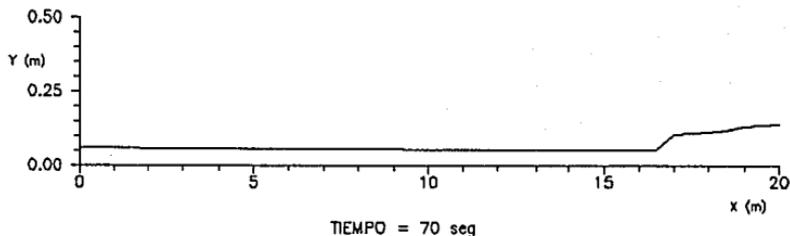
X	V	C	W	Y	Q
0.000	0.976	0.767	1.534	0.060	0.023
1.000	1.045	0.741	1.482	0.056	0.023
2.000	1.086	0.726	1.452	0.054	0.023
3.000	1.112	0.716	1.433	0.052	0.023
4.000	1.128	0.710	1.420	0.051	0.023
5.000	1.139	0.706	1.411	0.051	0.023
6.000	1.146	0.702	1.405	0.050	0.023
7.000	1.151	0.700	1.400	0.050	0.023
8.000	1.154	0.698	1.396	0.050	0.023
9.000	1.155	0.697	1.393	0.050	0.023
10.000	1.156	0.695	1.391	0.049	0.023
11.000	1.156	0.694	1.388	0.049	0.023
12.000	1.156	0.693	1.386	0.049	0.023
13.000	1.155	0.692	1.385	0.049	0.023
14.000	1.155	0.692	1.383	0.049	0.023
15.000	1.154	0.691	1.382	0.049	0.022
16.000	1.153	0.690	1.380	0.049	0.022
17.000	0.540	1.027	2.053	0.108	0.023
18.000	0.511	1.067	2.135	0.116	0.024
19.000	0.447	1.129	2.258	0.130	0.023
20.000	0.422	1.171	2.343	0.140	0.024



Tiempo = 70 seg       $Q = 0.02687 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 16.86128 m  
Velocidad del salto = 0.0072631 m/s

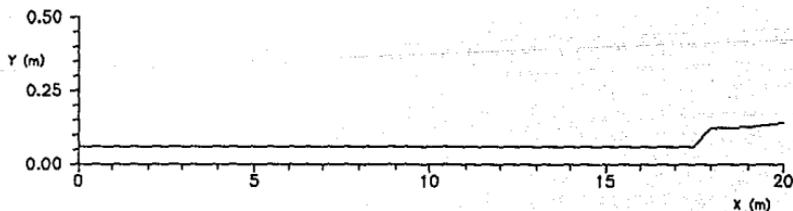
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.120	0.767	1.534	0.060	0.027
1.000	1.147	0.757	1.515	0.059	0.027
2.000	1.167	0.750	1.501	0.057	0.027
3.000	1.182	0.745	1.490	0.057	0.027
4.000	1.192	0.741	1.482	0.056	0.027
5.000	1.200	0.738	1.476	0.056	0.027
6.000	1.206	0.735	1.471	0.055	0.027
7.000	1.209	0.733	1.467	0.055	0.027
8.000	1.212	0.732	1.463	0.055	0.026
9.000	1.214	0.730	1.461	0.054	0.026
10.000	1.214	0.729	1.458	0.054	0.026
11.000	1.215	0.728	1.456	0.054	0.026
12.000	1.215	0.727	1.455	0.054	0.026
13.000	1.215	0.726	1.453	0.054	0.026
14.000	1.214	0.726	1.451	0.054	0.026
15.000	1.214	0.725	1.450	0.054	0.026
16.000	1.213	0.724	1.449	0.054	0.026
17.000	0.627	1.024	2.047	0.107	0.027
18.000	0.617	1.055	2.110	0.114	0.028
19.000	0.486	1.146	2.292	0.134	0.026
20.000	0.484	1.171	2.343	0.140	0.027



Tiempo = 100 seg       $Q = 0.03031 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 17.72085 m  
Velocidad del salto = - 0.0281281 m/s

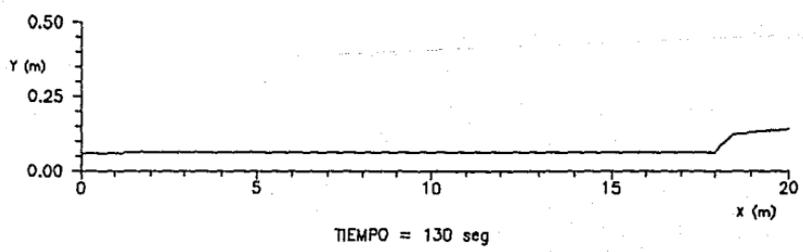
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.263	0.767	1.534	0.060	0.030
1.000	1.263	0.767	1.534	0.060	0.030
2.000	1.263	0.767	1.533	0.060	0.030
3.000	1.264	0.766	1.532	0.060	0.030
4.000	1.265	0.765	1.530	0.060	0.030
5.000	1.266	0.764	1.528	0.060	0.030
6.000	1.268	0.763	1.526	0.059	0.030
7.000	1.268	0.762	1.524	0.059	0.030
8.000	1.269	0.761	1.522	0.059	0.030
9.000	1.269	0.760	1.521	0.059	0.030
10.000	1.270	0.760	1.519	0.059	0.030
11.000	1.270	0.759	1.518	0.059	0.030
12.000	1.269	0.758	1.516	0.059	0.030
13.000	1.269	0.757	1.515	0.059	0.030
14.000	1.269	0.757	1.514	0.058	0.030
15.000	1.268	0.756	1.512	0.058	0.030
16.000	1.267	0.756	1.511	0.058	0.030
17.000	1.267	0.755	1.510	0.058	0.029
18.000	0.623	1.091	2.182	0.121	0.030
19.000	0.639	1.110	2.221	0.126	0.032
20.000	0.566	1.171	2.343	0.140	0.032



Tiempo = 130 seg       $Q = 0.03376 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 18.43554 m  
Velocidad del salto = 0.0148619 m/s

X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.407	0.767	1.534	0.060	0.034
1.000	1.385	0.773	1.545	0.061	0.034
2.000	1.369	0.777	1.554	0.062	0.034
3.000	1.356	0.780	1.561	0.062	0.034
4.000	1.347	0.783	1.566	0.063	0.034
5.000	1.340	0.784	1.569	0.063	0.034
6.000	1.335	0.786	1.571	0.063	0.034
7.000	1.331	0.786	1.572	0.063	0.034
8.000	1.328	0.786	1.573	0.063	0.034
9.000	1.326	0.787	1.573	0.063	0.033
10.000	1.324	0.786	1.573	0.063	0.033
11.000	1.322	0.786	1.572	0.063	0.033
12.000	1.321	0.786	1.572	0.063	0.033
13.000	1.320	0.786	1.571	0.063	0.033
14.000	1.319	0.785	1.570	0.063	0.033
15.000	1.318	0.785	1.569	0.063	0.033
16.000	1.318	0.784	1.569	0.063	0.033
17.000	1.317	0.784	1.568	0.063	0.033
18.000	1.316	0.783	1.567	0.063	0.033
19.000	0.660	1.121	2.241	0.128	0.034
20.000	0.606	1.171	2.343	0.140	0.034

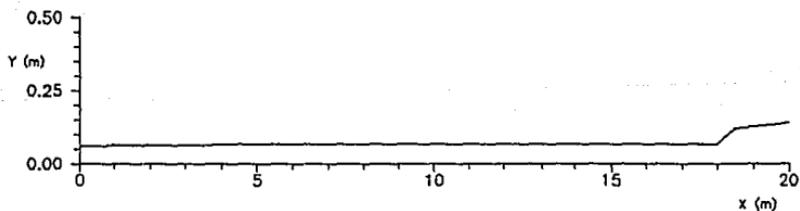


Tiempo = 160 seg       $Q = 0.03720 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 18.80107 m

Velocidad del salto = 0.0089564 m/s

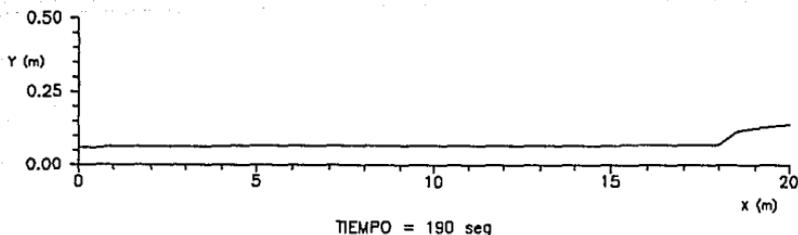
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.512	0.776	1.553	0.061	0.037
2.000	1.481	0.784	1.569	0.063	0.037
3.000	1.456	0.791	1.582	0.064	0.037
4.000	1.436	0.796	1.592	0.065	0.037
5.000	1.420	0.800	1.601	0.065	0.037
6.000	1.408	0.804	1.607	0.066	0.037
7.000	1.398	0.806	1.612	0.066	0.037
8.000	1.390	0.808	1.616	0.067	0.037
9.000	1.384	0.809	1.618	0.067	0.037
10.000	1.379	0.810	1.620	0.067	0.037
11.000	1.375	0.811	1.621	0.067	0.037
12.000	1.372	0.811	1.622	0.067	0.037
13.000	1.370	0.811	1.622	0.067	0.037
14.000	1.368	0.811	1.622	0.067	0.037
15.000	1.366	0.811	1.622	0.067	0.037
16.000	1.365	0.811	1.621	0.067	0.037
17.000	1.364	0.810	1.621	0.067	0.037
18.000	1.363	0.810	1.620	0.067	0.036
19.000	0.735	1.115	2.230	0.127	0.037
20.000	0.667	1.171	2.343	0.140	0.037



Tiempo = 190 seg      Q = 0.03720 m<sup>3</sup>/s

Distancia al salto = 18.81387 m  
Velocidad del salto = 0.0016319 m/s

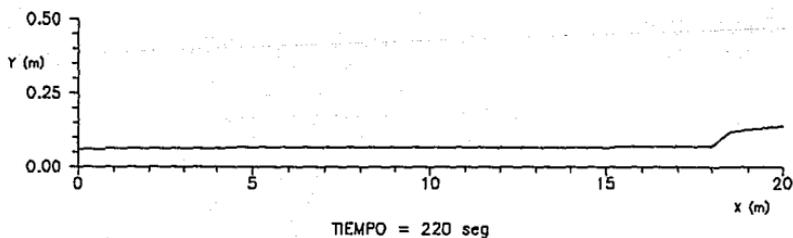
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.516	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.408	0.805	1.609	0.066	0.037
8.000	1.400	0.807	1.614	0.066	0.037
9.000	1.393	0.809	1.618	0.067	0.037
10.000	1.388	0.810	1.620	0.067	0.037
11.000	1.384	0.811	1.623	0.067	0.037
12.000	1.381	0.812	1.625	0.067	0.037
13.000	1.379	0.813	1.626	0.067	0.037
14.000	1.377	0.814	1.627	0.068	0.037
15.000	1.375	0.814	1.628	0.068	0.037
16.000	1.374	0.814	1.629	0.068	0.037
17.000	1.373	0.815	1.629	0.068	0.037
18.000	1.372	0.815	1.630	0.068	0.037
19.000	0.741	1.109	2.218	0.125	0.037
20.000	0.662	1.171	2.343	0.140	0.037



Tiempo = 220 m/s      Q = 0.03720 m<sup>3</sup>/s

Distancia al salto = 18.80458 m  
Velocidad del salto = 0.0006176 m/s

X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.516	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.408	0.805	1.609	0.066	0.037
8.000	1.400	0.807	1.614	0.066	0.037
9.000	1.393	0.809	1.618	0.067	0.037
10.000	1.388	0.810	1.620	0.067	0.037
11.000	1.384	0.811	1.623	0.067	0.037
12.000	1.381	0.812	1.625	0.067	0.037
13.000	1.379	0.813	1.626	0.067	0.037
14.000	1.377	0.814	1.627	0.068	0.037
15.000	1.375	0.814	1.628	0.068	0.037
16.000	1.374	0.814	1.629	0.068	0.037
17.000	1.373	0.815	1.629	0.068	0.037
18.000	1.372	0.815	1.630	0.068	0.037
19.000	0.738	1.112	2.223	0.126	0.037
20.000	0.664	1.171	2.343	0.140	0.037



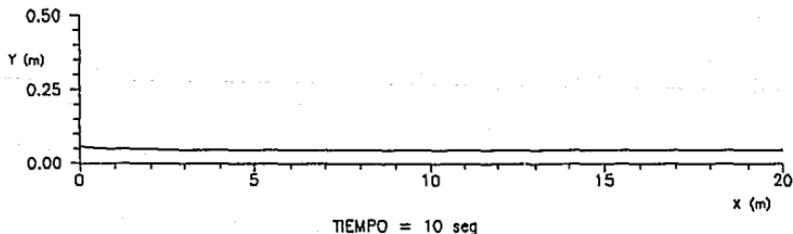
## SECCION C

### EJEMPLO 3

Tiempo = 10 seg       $Q = 0.01998 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 0  
Velocidad del salto = 0

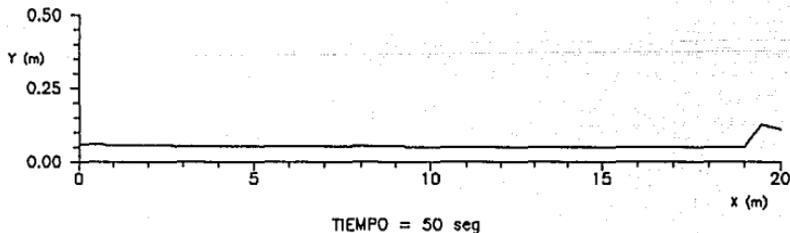
X	V	C	W	Y	Q
0.000	0.832	0.767	1.534	0.060	0.020
1.000	0.984	0.704	1.408	0.051	0.020
2.000	1.038	0.685	1.371	0.048	0.020
3.000	1.067	0.677	1.353	0.047	0.020
4.000	1.086	0.670	1.341	0.046	0.020
5.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
6.000	1.089	0.672	1.343	0.046	0.020
7.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
8.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
9.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
10.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
11.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
12.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
13.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
14.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
15.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
16.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
17.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
18.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
19.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020
20.000	1.089	0.671	1.343	0.046	0.020



Tiempo = 50 seg      Q = 0.02457 m<sup>3</sup>/s

Distancia al salto = 19.00221 m  
Velocidad del salto = - 0.1336063 m/s

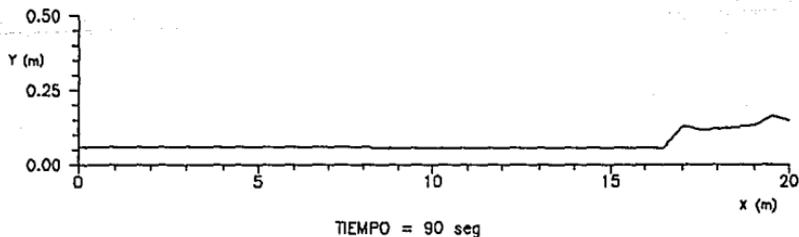
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.024	0.767	1.534	0.060	0.025
1.000	1.077	0.747	1.495	0.057	0.025
2.000	1.111	0.735	1.470	0.055	0.025
3.000	1.134	0.727	1.454	0.054	0.024
4.000	1.149	0.721	1.442	0.053	0.024
5.000	1.159	0.717	1.434	0.052	0.024
6.000	1.166	0.714	1.428	0.052	0.024
7.000	1.170	0.712	1.423	0.052	0.024
8.000	1.173	0.710	1.419	0.051	0.024
9.000	1.175	0.708	1.416	0.051	0.024
10.000	1.176	0.707	1.414	0.051	0.024
11.000	1.176	0.706	1.412	0.051	0.024
12.000	1.176	0.705	1.410	0.051	0.024
13.000	1.176	0.704	1.408	0.051	0.024
14.000	1.175	0.703	1.407	0.050	0.024
15.000	1.174	0.703	1.405	0.050	0.024
16.000	1.173	0.702	1.404	0.050	0.024
17.000	1.172	0.701	1.402	0.050	0.024
18.000	1.171	0.700	1.401	0.050	0.023
19.000	1.170	0.700	1.400	0.050	0.023
20.000	0.529	1.041	2.082	0.111	0.023



Tiempo = 90 seg       $Q = 0.02916 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 16.86053 m  
Velocidad del salto = - 0.1083452 m/s

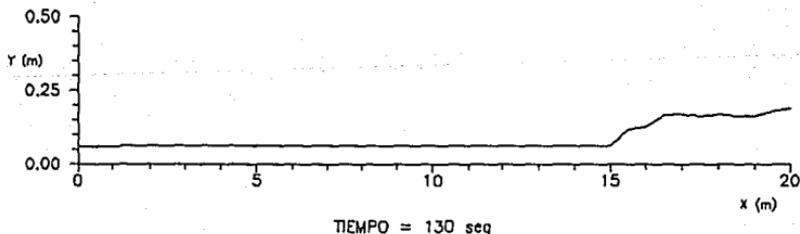
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.215	0.767	1.534	0.060	0.029
1.000	1.223	0.764	1.529	0.060	0.029
2.000	1.229	0.762	1.524	0.059	0.029
3.000	1.235	0.760	1.519	0.059	0.029
4.000	1.240	0.758	1.515	0.059	0.029
5.000	1.243	0.756	1.512	0.058	0.029
6.000	1.246	0.754	1.509	0.058	0.029
7.000	1.248	0.753	1.506	0.058	0.029
8.000	1.250	0.752	1.504	0.058	0.029
9.000	1.251	0.751	1.502	0.058	0.029
10.000	1.251	0.750	1.500	0.057	0.029
11.000	1.252	0.749	1.498	0.057	0.029
12.000	1.251	0.748	1.496	0.057	0.029
13.000	1.251	0.747	1.495	0.057	0.029
14.000	1.251	0.747	1.493	0.057	0.028
15.000	1.250	0.746	1.492	0.057	0.028
16.000	1.250	0.745	1.491	0.057	0.028
17.000	0.550	1.123	2.246	0.129	0.028
18.000	0.722	1.074	2.148	0.118	0.034
19.000	0.609	1.141	2.283	0.133	0.032
20.000	0.503	1.215	2.430	0.151	0.030



Tiempo = 130 seg       $Q = 0.03375 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 15.02383 m  
Velocidad del salto = 0.0059848 m/s

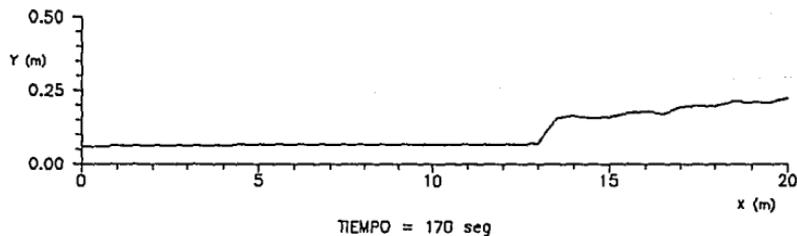
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.406	0.767	1.534	0.060	0.034
1.000	1.385	0.773	1.545	0.061	0.034
2.000	1.369	0.777	1.554	0.062	0.034
3.000	1.356	0.780	1.561	0.062	0.034
4.000	1.347	0.783	1.566	0.063	0.034
5.000	1.340	0.784	1.569	0.063	0.034
6.000	1.335	0.786	1.571	0.063	0.034
7.000	1.331	0.786	1.572	0.063	0.034
8.000	1.328	0.786	1.573	0.063	0.034
9.000	1.325	0.787	1.573	0.063	0.033
10.000	1.324	0.786	1.573	0.063	0.033
11.000	1.322	0.786	1.572	0.063	0.033
12.000	1.321	0.786	1.572	0.063	0.033
13.000	1.320	0.786	1.571	0.063	0.033
14.000	1.319	0.785	1.570	0.063	0.033
15.000	1.318	0.785	1.569	0.063	0.033
16.000	0.669	1.107	2.214	0.125	0.033
17.000	0.369	1.290	2.579	0.170	0.025
18.000	0.433	1.291	2.581	0.170	0.029
19.000	0.565	1.259	2.517	0.162	0.037
20.000	0.416	1.367	2.733	0.191	0.032



Tiempo = 170 seg       $Q = 0.03719 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 13.03112 m  
Velocidad del salto = - 0.0777578 m/s

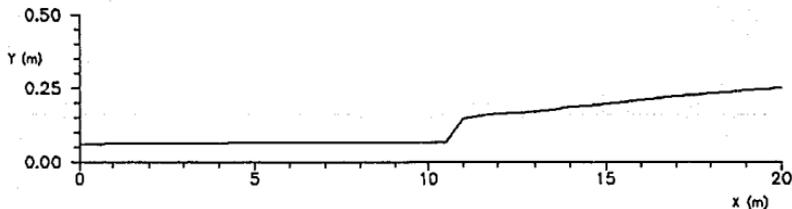
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.515	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.407	0.805	1.610	0.066	0.037
8.000	1.399	0.807	1.615	0.067	0.037
9.000	1.392	0.810	1.619	0.067	0.037
10.000	1.387	0.811	1.623	0.067	0.037
11.000	1.383	0.813	1.625	0.067	0.037
12.000	1.380	0.814	1.627	0.068	0.037
13.000	1.378	0.814	1.629	0.068	0.037
14.000	0.550	1.261	2.523	0.162	0.036
15.000	0.595	1.243	2.486	0.158	0.038
16.000	0.455	1.326	2.653	0.180	0.033
17.000	0.412	1.369	2.739	0.191	0.032
18.000	0.428	1.389	2.778	0.197	0.034
19.000	0.405	1.431	2.862	0.209	0.034
20.000	0.377	1.475	2.950	0.222	0.033



Tiempo = 210 seg       $Q = 0.03719 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 10.74017 m  
Velocidad del salto = - 0.0360706 m/s

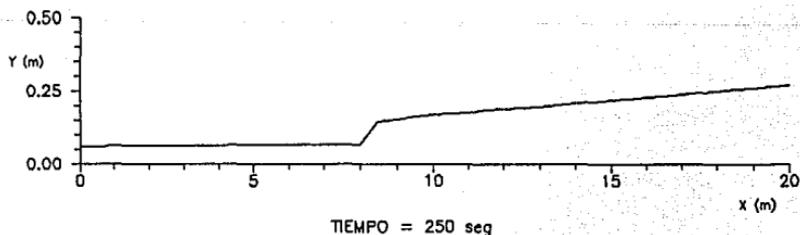
X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.515	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.407	0.805	1.609	0.066	0.037
8.000	1.400	0.807	1.614	0.066	0.037
9.000	1.393	0.809	1.617	0.067	0.037
10.000	1.388	0.810	1.620	0.067	0.037
11.000	0.642	1.191	2.383	0.145	0.037
12.000	0.531	1.268	2.535	0.164	0.035
13.000	0.551	1.283	2.566	0.168	0.037
14.000	0.480	1.347	2.694	0.185	0.036
15.000	0.463	1.384	2.768	0.195	0.036
16.000	0.433	1.431	2.862	0.209	0.036
17.000	0.411	1.474	2.948	0.222	0.036
18.000	0.392	1.512	3.023	0.233	0.037
19.000	0.386	1.540	3.080	0.242	0.037
20.000	0.376	1.567	3.134	0.251	0.038



Tiempo = 250 seg       $Q = 0.03719 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 8.150045 m  
Velocidad del salto = - 0.0514818 m/s

X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.515	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.407	0.805	1.609	0.066	0.037
8.000	1.400	0.807	1.614	0.066	0.037
9.000	0.605	1.228	2.456	0.154	0.037
10.000	0.536	1.289	2.579	0.170	0.036
11.000	0.534	1.319	2.638	0.177	0.038
12.000	0.495	1.365	2.730	0.190	0.038
13.000	0.496	1.389	2.778	0.197	0.039
14.000	0.459	1.431	2.862	0.209	0.038
15.000	0.429	1.465	2.931	0.219	0.038
16.000	0.410	1.496	2.992	0.228	0.037
17.000	0.391	1.531	3.063	0.239	0.037
18.000	0.373	1.567	3.133	0.250	0.037
19.000	0.360	1.597	3.195	0.260	0.037
20.000	0.347	1.627	3.253	0.270	0.037



Tiempo = 290 seg       $Q = 0.03719 \text{ m}^3/\text{s}$

Distancia al salto = 7.480098 m  
Velocidad del salto = -0.0025866 m/s

X	V	C	W	Y	Q
0.000	1.550	0.767	1.534	0.060	0.037
1.000	1.515	0.775	1.551	0.061	0.037
2.000	1.487	0.783	1.566	0.063	0.037
3.000	1.464	0.789	1.578	0.064	0.037
4.000	1.445	0.794	1.588	0.064	0.037
5.000	1.430	0.798	1.597	0.065	0.037
6.000	1.417	0.802	1.604	0.066	0.037
7.000	1.407	0.805	1.609	0.066	0.037
8.000	0.662	1.175	2.350	0.141	0.037
9.000	0.607	1.227	2.454	0.154	0.037
10.000	0.569	1.271	2.541	0.165	0.038
11.000	0.529	1.315	2.631	0.177	0.037
12.000	0.502	1.353	2.707	0.187	0.038
13.000	0.484	1.387	2.773	0.196	0.038
14.000	0.459	1.423	2.846	0.207	0.038
15.000	0.429	1.462	2.925	0.218	0.037
16.000	0.404	1.498	2.996	0.229	0.037
17.000	0.388	1.530	3.060	0.239	0.037
18.000	0.376	1.563	3.125	0.249	0.037
19.000	0.365	1.595	3.191	0.260	0.038
20.000	0.354	1.627	3.253	0.270	0.038

