323801
2
2ej

ESCUELA DE ACTUARIA
DE LA
UNIVERSIDAD ANAHUAC

CON ESTUDIOS INCORPORADOS
A LA U. N. A. M.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD ANAHUAC
VINCE IN BONO MALUM

"DOMINACION ESTOCASTICA EN TEORIA DE LA UTILIDAD LINEAL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA EL ALUMNO:

SANTOS FLORES ESLAVA

ASESOR: ACT. MANUEL ROMAN ENRIQUEZ

MEXICO, D. F. 1992

I N D I C E

CAPITULO II

AVERSION AL RIESGO

CAPITULO III

GENERACION DE FAMILIAS DE FUNCIONES DE UTILIDAD

CAPITULO IV

DOMINACION ESTOCASTICA

CAPITULO V

APLICACIONES

CONCLUSIONES

APENDICE

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

En la aplicación del análisis de decisiones a la solución de situaciones problemáticas se tienen varias dificultades por resolver. Entre ellas, se encuentra que es difícil conocer completamente la función de utilidad que refleje las preferencias del decisor.

En particular, nosotros estamos interesados en la solución de situaciones problemáticas que ocurren bajo condiciones de Riesgo para un decisor que muestra aversión al riesgo.

Ante este panorama se intenta mostrar que el enfoque de Dominación Estocástica para la ordenación de alternativas de riesgo (representadas por distribuciones de probabilidad objetivas) es un enfoque adecuado para tomar decisiones con información parcial sobre las preferencias de decisores y su comportamiento hacia el riesgo.

Para lograr dicho objetivo, en nuestra tesis se hace una revisión de los conceptos fundamentales involucrados.

En el Capitulo I se revisa la Teoría de la Utilidad Lineal de Daniel Bernoulli y de Von Neumann y Morgenstern.

En el Capitulo II se estudia al concepto de Aversión al Riesgo intentando presentar y aclarar las ideas originales de Arrow y Pratt.

El Capitulo III muestra como se pueden generar Familias de Funciones de Utilidad que representen un determinado comportamiento hacia el riesgo por parte de decisores con funciones de utilidad en dichas familias.

En el Capitulo IV, se estudian los grados de Dominación Estocástica hasta el estado actual, obteniéndose algunas implicaciones de relevancia.

Finalmente, en el Capitulo V se revisan implicaciones del enfoque de Dominación Estocástica en algunos asuntos de Teoría del Riesgo. Se dan referencias sobre aplicaciones de Dominación Estocástica en Economía y Finanzas.

Nosotros creemos que este trabajo puede ser útil para aquellos estudiosos de Teoría de Decisiones, Seguros, Economía y Finanzas entre otros campos. Así también, pensamos que nuestra tesis puede ser útil brindando referencias bibliográficas y como documento de apoyo en cursos relacionados al tema central de la Teoría de la Utilidad y en la práctica, a la ordenación de Prospectos de Riesgo .

CAPITULO I

TEORIA DE LA UTILIDAD LINEAL

1.1.- ANTECEDENTES

En esta sección revisamos las ideas fundamentales motivadas por los trabajos de Daniel Bernoulli y Von Neumann y Morgenstern que dieron origen a la Teoría de la Utilidad Lineal en cuya elaboración y desarrollo han participado diferentes autores durante un periodo que abarca más de dos siglos y que continua recibiendo atención en nuestros días.

1.1.1.- DANIEL BERNOULLI.

Cuando los matemáticos empezaron a estudiar problemas monetarios en condiciones de riesgo, el principio de elección utilizado generalmente fue el de seleccionar aquella alternativa con el más alto valor esperado.

Bernoulli [*1] [*2] (1738, p. 31) reporta que en 1713, fue publicada una lista de cinco problemas sobre azar y probabilidad por el matemático Montmort, los cuales fueron diseñados por Nicolás Bernoulli (primo de Daniel), entonces profesor de la Universidad de Basilea.

El último de esos problemas, conocido actualmente en la literatura como la paradoja de San Petersburgo, se describe como sigue (Bernoulli, 1713, p. 31) :

Pedro lanza una moneda al aire y continúa con este experimento hasta que aparezca un " **sol** ". Pedro está de acuerdo en dar un ducado a Pablo si resulta " **sol** " en la primera tirada, dos ducados si se consigue " **sol** " en la segunda, cuatro ducados si " **sol** " aparece en la tercera, ocho en la cuarta, 16 en la quinta, y asi sucesivamente, de modo que el número de ducados a pagar a Pablo es duplicado en cada siguiente tirada. Supongamos que se quiere calcular el valor esperado del juego para Pablo, y que se le pregunta a Pablo por que cantidad estaría dispuesto a vender su derecho a participar en el juego considerando que él obtuvo ese derecho gratis.

*1 : Theocharis (1983, p. 14), reporta que Daniel Bernoulli fue el primero en utilizar en un documento de carácter economico, cálculo diferencial y geometria analitica.

*2 : Cuando se mencione la fecha 1738 para el articulo de Daniel Bernoulli, se hace mencion a la traduccion del latin al ingles de L. Sommer publicada en Econometrica en 1954.

Nicolás Bernoulli observó que el valor esperado del juego es infinitamente grande,

$$(1/2) * 1 + (1/4) * 2 + (1/8) * 4 + (1/16) * 8 + \ldots + \ldots$$

$$(1/2)^n * 2^{n-1} + \ldots = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$n = 1,2,3.....$$

he hizo notar que si bien el valor esperado del juego para Pablo es infinitamente grande, tendría que admitirse que una persona racional, estaría dispuesta a vender su derecho a participar en el juego por una cantidad tal como veinte ducados. Por otra parte, no se podría encontrar a alguien dispuesto a arriesgar su riqueza, o una buena parte de ella, para participar en un juego como éste.

Nicolás mostró que el principio de maximizar el valor esperado no tenía validez para ayudar a decidir a Pablo. Nicolás le preguntó a su primo Daniel Bernoulli su opinión al respecto.

En 1738, Daniel Bernoulli publicó su Teoría sobre la Medición de Riesgos, en la ciudad de San Petersburgo (esta ciudad le dio nombre a la ahora famosa paradoja), considerando lo siguiente :

Bernoulli argumenta que para distintos individuos el valor que representa conseguir un incremento en su riqueza puede ser distinto, considerando las diferentes situaciones financieras que dichos individuos pueden mostrar.

Para Bernoulli, riqueza es " comida, ropa, todas las cosas que se pueden agregar para la conveniencia de la vida, y aún el lujo - (cualquier cosa que pueda contribuir a la satisfacción de un deseo de cualquier tipo)". (Bernoulli, 1738, p. 25).

Por otro lado, hace notar que el valor de un artículo no debe de ser basado en su precio si no en la utilidad que produce al individuo el tener dicho artículo y que esa utilidad es dependiente de las particulares circunstancias de dicho individuo.

Bernoulli menciona como ejemplo, que el obtener una ganancia de mil ducados representa una utilidad mayor para un hombre pobre que para un hombre rico.

Introduciendo este concepto de utilidad, Bernoulli establece su regla para evaluar alternativas de riesgo como sigue (Bernoulli, 1713, p. 24) :

" Si la utilidad de cada ganancia esperada posible es multiplicada por el número de maneras en que esta puede ocurrir, y si dividimos el total de estos productos por el total número de casos posibles, una utilidad media (o expectativa moral) será obtenida, y la ganancia que corresponda a esta utilidad será igual al valor del riesgo en cuestión. "

Fishburn (1988, p. 2), interpreta la anterior regla de la siguiente forma, haciendo mención a valor subjetivo en lugar de utilidad.

Considerense distribuciones de probabilidad p, p' y q sobre un conjunto X de ganancias ($x \geq 0$) y pérdidas ($x < 0$).

Una alternativa riesgosa p' sobre niveles de riqueza debería ser evaluada por su valor subjetivo esperado $\sum v(w)\, p'(w)$, donde :

v es el valor subjetivo del nivel de riqueza w para un individuo.
p' es la probabilidad de que se logre ese nivel de riqueza.

Por otro lado, si w_0 es la riqueza presente para un individuo y $p(x) = p'(w_0 + x)$ es la distribución de probabilidad inducida por p' sobre incrementos a la riqueza presente, entonces el valor subjetivo esperado de p es

$$E(v,p) = \sum_{x \in X} v(w_0 + x)\, p(x)$$

donde p es más deseable que q cuando $E(v,p) > E(v,q)$.

De esta forma, en la interpretación de Fishburn, Bernoulli muestra como su teoría resuelve la paradoja de San Petersburgo, encontrando una única solución a la ecuación

$$\sum_n v(w_0 + 2^{n-1}) * 2^{-n} = v(w_0 + s)$$

para cualquier w_0 finita, en donde **s es el mínimo precio de venta o valor monetario equivalente.**

1.1.2.- LA FUNCION DE UTILIDAD DE DANIEL BERNOULLI.

Daniel Bernoulli supone que utilidad es mensurable y también que la función que la describe es cóncava.

Presenta la siguiente proposicion (1738, p. 25);

" Cualquier incremento en riqueza, no importa que insignificante, sea, resultará siempre en un incremento de utilidad, el cual es inversamente proporcional a la cantidad de bienes ya poseídos ".

Esto también se interpreta en el sentido de que la utilidad de la riqueza no se incrementa linealmente sino que se incrementa a una tasa decreciente. Esto se le conoce en la literatura de Economía como el principio de utilidad marginal decreciente de riqueza (Fishburn, 1988, pp. 1-2).

Lo anterior lleva a Bernoulli (1738, pp. 27-28) a la siguiente expresión :

$$1)\quad dy = b\,\frac{dx}{x}\quad, \text{ en donde}$$

dy , representa el incremento en utilidad.
dx , representa el incremento de riqueza.
b , es un factor de proporcionalidad.
x , riqueza

integrando 1),

$$2)\quad y = \int d\,\frac{dx}{x} = b \log x + C$$

con la condición inicial y = 0, para el nivel de riqueza inicial a, resulta.

$$3)\quad C = -\,b \log a$$

sustituyendo 3) en 2), tenemos :

$$4)\quad y = \log \frac{x}{a}$$

La gráfica de la función de utilidad de Bernoulli tiene una forma conocida.

1.1.3.- SUPER PARADOJAS.

Arrow (1965, p. 59), menciona que la paradoja de San Petersburgo no fue solucionada completamente por Bernoulli, lo cual fue hecho notar por el matemático Karl Menger en 1934, quién encontró que para funciones de utilidad no acotadas, es posible construir una paradoja similar.

Jensen (1967, p. 5) muestra el siguiente ejemplo :

La riqueza inicial de Pablo es 1, y en lugar de 2^i, se le da 2^{2^i}, como pago. En este caso, resulta :

$$\ln(s) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} * \ln 2^{2^i} = \ln 2\ (\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} * 2^i\ )$$

$$= \ln 2 \,(\, 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots.. \,)$$

En donde resulta que alguien interesado en comprarle a Pablo su derecho a participar en el juego, debería pagar una cantidad s, la cual es inmensamente grande.

Esto lleva a que la función de utilidad deberá ser acotada.

Para una revisión del problema de las Super-paradojas, se puede consultar a Samuelson (1986, pp. 133-163).

1.1.4.- GABRIEL CRAMER.

Daniel Bernoulli reporta que un matemático suizo, Gabriel Cramer, también resolvió independientemente la paradoja de San Petersburgo. En palabras de Cramer en su carta a Nicolás Bernoulli, en la página 33 del artículo de Daniel Bernoulli de 1738, se anota lo siguiente :

" Usted preguntó por una explicación de la discrepancia entre el cálculo matemático y la interpretación vulgar. Yo creo que ésta (discrepancia) resulta del hecho de que, en su teoría, los matemáticos evaluan dinero en proporción a la cantidad, en tanto que, en la práctica, la gente con sentido común evalua el dinero en proporción a la utilidad que puede obtener de él ".

1.1.5.- PRIMEROS ENFOQUES SOBRE UTILIDAD MENSURABLE.

De acuerdo a Fishburn (1988, p. 3), la idea de Bernoulli de utilidad marginal decreciente se convirtió en una pieza central de la teoría sin riesgo de la economía del consumidor durante la segunda mitad del siglo diecinueve. En Fishburn (1988, p. 3) se da bibliografía para detalles históricos.

Fishburn relata que durante este periódo, el término utilidad fue adoptado como el término estándar para lo que algunos autores llamaron valor subjetivo, valor moral, o satisfacción psíquica.

Utilidad fue vista predominantemente " como una entidad psicológica " mensurable en su propio derecho y se desató un debate en la literatura acerca del grado en que utilidad era mensurable.

A finales del siglo diecinueve y principios del siglo veinte, predominó la corriente ordinalista impulsada por Edgeworth, Fisher, Pareto y Slutsky, la cual insistió que utilidad representaba nada más que la ordenación de las preferencias de un individuo sobre paquetes de consumo o alternativas futuras sin riesgo, por lo que no tenía sentido hablar de grados de medida de utilidad más allá de ordenaciones simplemente.

Fishburn relata (1988, p. 4) que a pesar de la amplia aceptación de la posición ordinal durante los años 1920s y 1930s se observó un resurgimiento en el interés en medir la intensidad de utilidad, despertado por el uso del enfoque axiomático en Matemáticas. Los proponentes del enfoque de medibilidad incluían a Frisch, Lange y Alt, quienes axiomatizaron la comparación de diferencias de preferencias o intensidades de preferencia en maneras ligeramente distintas (Fishburn, 1970, capítulo 6, hace una revisión de esta idea, considerando diferentes autores).

Su argumento básico era que los individuos hacen, en efecto, comparaciones de intensidad o fortaleza de preferencias todo el tiempo y que es posible tener información precisa sobre de tales comparaciones.

Antes de continuar definimos el concepto de función de valor.

Una función v que asocia un número real v(x) a cada punto x en un espacio de valuación, se dice que es una función de valor que representa la estructura de preferencias de un decisor dado que :

$$x' \sim x'' \iff v(x') = v(x'')$$

Es decir, que x' es indiferente a x'' si y sólo si los valores relativos o utilidades son iguales.

En el enfoque de intensidades de preferencia se dice que una función v es " **mensurable** " en el sentido en que puede ser completamente determinada una vez que se tienen los valores v_0 y v_1 que corresponden a los valores de preferencia para los extremos del rango de riqueza X, y que se puede encontrar el valor de preferencia v(x) correspondiente a aquel nivel de riqueza x para el cual la intensidad de preferencia del extremo superior sobre x es igual a la preferencia de x sobre el extremo inferior del rango de riqueza. Es decir, $v(x) = (v_0 + v_1)/2$. Puntos adicionales pueden ser obtenidos tomando el valor v(x) obtenido como extremo inferior o superior y repitiendo el proceso antes descrito.

Otra condición para que una función v sea mensurable es que si se tienen dos funciones v y v', entonces estas se puedan relacionar en la forma

1.1) $v'(x) = a * v(x) + b$, para todas las $x \in X$, donde a y b son números reales con $a > 0$.

Este enfoque de utilidad mensurable o utilidad cardinal se puede precisar asumiendo una relación binaria >* sobre X x X, donde X es el conjunto de cosas a ser evaluadas y (x,y) >* (z,w), se interpreta como que para un individuo la intensidad de preferencia de x sobre y excede a la intensidad de preferencia de z sobre w.

Intensidad de preferencia igual se define por $(x,y) \sim (z,w)$ si no sucede que (x,y) >* (z,w) ni tampoco que (x,y) *< (z,w).

Con estas ideas, la relación de intensidad de preferencia $>^*$ sobre X, se puede definir por : $x \succ y$ si $(x,y) >^* (y,y)$.

Fishburn (1988, p. 4), proporciona referencias bibliográficas que muestran que bajo conjuntos de axiomas lo suficentemente fuertes, se puede obtener la representación de utilidad para diferencias de intensidades de preferencia comparables.

$$(x,y) >^* (z,w) \text{ si y sólo si } v(x) - v(y) > v(z) - v(w),$$

donde v es única bajo transformaciones lineales positivas.

1.1.6.- INTERPRETACION SOBRE LA TEORIA DE LA UTILIDAD ESPERADA DE BERNOULLI.

De acuerdo a Fishburn (1988, p. 5) el anterior enfoque de utilidad mensurable coloca la teoría de utilidad esperada de Bernoulli sobre un fundamento más riguroso estableciendo un soporte axiomático para la función de valor v utilizada bajo el operador esperanza, con la ventaja de que esta función es única bajo transformaciones lineales positivas.

El teorema de la utilidad esperada de Bernoulli se puede escribir de la siguiente forma :

Sea X un conjunto arbitrario no vacio, y sea P_x el conjunto de todas las medidas de probabilidad simples sobre X, de modo que p está en P_x si y sólo si $p(x) \geq 0$ para todos los x , y $p(x) > 0$ para a lo más un número finito de $x \in X$, y $\sum p(x) = 1$.

Teorema 1. Se supone que v y v' son dos funciones sobre X con contradominio en los reales. Entonces, para todas las medidas de probabilidad simples p, $q \in Px$, se cumple :

$$\sum v(x)p(x) > \sum v(x)q(x) <==> \sum v'(x)p(x) > \sum v'(x)q(x)$$

si y sólo si existen dos números reales a y b, con $a > 0$, tales que

$$v'(x) = a\, v(x) + b \quad \text{para todos los } x \in X.$$

La demostración se incluye en Fishburn (1988, p. 5).

Con la inclusión del enfoque axiomático, se dice que una Teoría de la utilidad esperada es una una Teoría de la utilidad de Bernoulli si consiste de lo siguiente (Fishburn, 1988, p. 6) :

1.- Un conjunto X de resultados y un conjunto P_x de distribuciones de probabilidad o medidas sobre X.

2.- Una función de utilidad v basada en las diferencias de preferencias comparables sin riesgo e invariante bajo transformaciones lineales positivas.

3.- El principio de elección dice que las distribuciones más deseables, o sus correspondientes alternativas riesgosas, son aquellas que maximizan la utilidad esperada $\sum v(x)p(x)$.

Lo anterior lleva a decir que en la Teoría de la utilidad esperada de Bernoulli, las preferencias entre distribuciones de probabilidad están definidas por utilidades esperadas.

1.2.- LA TEORIA DE VON NEUMANN Y MORGENSTERN.

1.2.1.- PRESENTACION.

Arrow (1971, p. 26), menciona que le correspondió a Von Neumann y Morgenstern dar un conjunto claro de axiomas de elección entre distribuciones de probabilidad que llevan a la hipótesis de maximizar esperada, " **la cual fue convincente** ".

En 1944 Von Neumann y Morgenstern introdujeron su teoría de la utilidad esperada para la ordenación de alternativas de riesgo, en la que un individuo elige racionalmente (**normativamente**) aquella alternativa con la máxima utilidad esperada.

En su teoría, Von Neumann y Morgenstern presentan un tratamiento riguroso sobre la existencia de una función de utilidad que mide las preferencias de un individuo. Ellos formulan un conjunto de hipótesis sobre el comportamiento de dicho individuo en relación a su evaluación de preferencias, establecen dichas hipótesis como axiomas y muestran que dichos axiomas implican la existencia de una función de utilidad que las mide. Dicha función de utilidad tiene la propiedad de que es invariante bajo transformaciones lineales positivas lo cual lleva a que no se requiera un cero absoluto o una unidad absoluta de utilidad.

1.2.2.- ELECCION DE UN SISTEMA DE AXIOMAS.

En la elección de su sistema de axiomas, los cuales implicarán la existencia una función de utilidad invariante bajo transformaciones lineales positivas, Von Neumann y Morgenstern (1953, p. 25), consideran que :

"... una elección de axiomas no es una tarea puramente objetiva. Usualmente se espera lograr algún objetivo definitivo (algún teorema específico o teoremas específicos van a ser derivados de los axiomas) y hasta este grado el problema es exacto y objetivo. Pero más allá de lo anterior hay siempre otros asuntos importantes de una naturaleza menos exacta. Los axiomas no deberían de ser tan numerosos, el sistema que formen deberá ser tan simple y transparente como sea posible, y cada axioma deberá tener un significado intuitivo inmediato, por el cual su adecuabilidad pueda ser juzgada directamente ".

El enfoque de Von Neumann y Morgenstern ha atraído la atención de distintos autores. Algunos de ellos han dado sus propias versiones de los axiomas y de la prueba de existencia de la función de utilidad mensurable, que difieren en algún sentido con la versión original de Von Neumann y Morgenstern.

Sinn (1983, p. 80), considera que la presentación de axiomas es principalmente un asunto de " **sabor** ", por lo que no es sorprendente que los axiomas presentados originalmente por Von Neumann y Morgenstern, en el curso del tiempo han observado considerable alteración.

Nosotros en este trabajo no estamos presentando una nueva versión de los axiomas. Hemos elegido el enfoque de Jensen (1967) en la versión de Fishurn (1988), por su enfásis en la ordenación de distribuciones de probabilidad, preparando el terreno para tratar el tema de Dominación Estocástica.

1.2.3.- CONSIDERACIONES BASICAS Y LINEALIDAD.

Von Neumann y Morgenstern empiezan su teoría con una relación $\succ$ sobre un conjunto convexo P y después hacen hipótesis acerca del comportamiento de $\succ$ sobre P, las cuáles se establecen de manera formal como axiomas.

Von Neumann y Morgenstern muestran que esos axiomas implican la existencia de una función con valores en los números reales, con las siguientes propiedades :

Propiedad de Preservacion del Orden.

La función preserva el orden inducido por la relación de preferencia $\succ$ sobre el conjunto convexo P.

1.3) $p \succ q$ si y sólo si $u(p) > u(q)$

Propiedad de Linealidad.

Esta función es además lineal en la operación combinación convexa :

Para cualquier p y q $\in$ P, y para toda ß tal que $0 \leq ß \leq 1$,

1.4) $u(ßp + (1-ß)q) = ßu(p) + (1-ß)u(q)$.

Una función con valores en los reales, sobre un conjunto convexo que satisface 1.4) para $0 \leq ß \leq 1$ y para todas las p, q en dicho conjunto, se llama una funcional lineal. Si la mencionada funcional satisface ademas 1.3) se llama una funcional lineal que preserva el orden.

Los anteriores conceptos de la teoría de Von Neumann y Morgenstern se interpretan de la siguiente forma :

La relación de preferencia $\succ$ es un primitivo de la teoría, y se escribe $p \succ q$ y se lee " **p se prefiere a q** ". Esta relación se aplica a la comparación de alternativas de riesgo representadas por distribuciones de probabilidad.

Aunque el conjunto P no necesita ser un conjunto de distribuciones de probabilidad o medidas, es conveniente interpretarlo asi. Hernstein y Milnor en su enfoque axiomático a utilidad mensurable tratan P como un conjunto convexo más general (Hernstein y Milnor, 1953, p. 292).

Antes de continuar se introduce la siguiente definición :

Cuando p y q son medidas simples sobre X, $ßp + (1-ß)q$ asigna probabilidad $ßp(x) + (1-ß)q(x)$ para todo $x \in X$, de modo que $ßp + (1-ß)q$ es también una medida simple sobre X.

Cuando p y q son distribuciones de probabilidad o medidas sobre un álgebra A' de eventos, $(ßp + (1-ß)q)(M) = ßp(M) + (1-ß)q(M)$ para cada M $\in$ A', por lo que $ßp + (1-ß)q$ es también una medida de probabilidad sobre A'.

1.2.4.- REPRESENTACION DE UTILIDAD ESPERADA.

El enfoquede Von Neumann y Morgenstern no hace mención a los resultados en X, excepto cuando interpreta P como un conjunto de distribuciones sobre X. En esta interpretación de P, se supone que P contiene cada medida que asigna probabilidad 1 a algún resultado x y que se define u sobre X de u sobre P de la siguiente manera :

1.6) $u(x) = u(p)$ cuando $p(x) = 1$.

La representación de utilidad esperada se puede obtener como un Teorema (Fishburn, 1988, p. 8).

Teorema 2. Si u es una funcional lineal sobre un conjunto convexo P de medidas de probabilidad sobre X que contiene cada medida puntual y si u se extiende a X por 1.6, entonces, para cada medida simple p en P,

1.7) $u(p) = \sum u(x)p(x)$.

Arrow (1971, p. 28) interpreta este teorema de la siguiente manera :

" Hay un metódo de asignar utilidades individuales a las consecuencias individuales de modo que la utilidad asignada a cualquier distribución de probabilidad es la utilidad esperada bajo la utilidad de los resultados ".

Fishburn comenta (1988, p. 9), que cuando Von Neumann y Morgenstern publicaron su teoría fue objeto de mal entendimiento y polémica. a) por un lado, provocado por el uso del término utilidad, el cual había sido utilizado por mucho tiempo como una medida de satisfacción psíquica.

" Muchos escritores habrían deseado que Von Neumann y Morgenstern hubiesen usado un término distinto de utilidad para su función de valor a fin de evitar mezclar confusamente dicho término con sus usos anteriores en economía, sin embargo, el término utilidad quedó establecido en la literatura ".; y b) por otro lado, debido al " estilo conciso, directo y un tanto enigmático " de expresar sus axiomas.

Resolver esos malos entendidos llevó cerca de diez años con la intervención de escritores como Marschak, Strotz, Baumol, Luce y Raiffa, entre otros.

1.2.5.- EL TEOREMA DE LA UTILIDAD LINEAL.

El enfoque de la Teoría de la Utilidad Lineal se suscribe al llamado " **Principio de Reducción** ", el cual supone que :

" **Para propósitos comparativos de preferencias y elección en decisiones de riesgo, es suficiente caracterizar cada alternativa en términos de su distribución de probabilidad sobre resultados potenciales** ".

Bajo este principio se supone que las probabilidades de los resultados son dadas o conocidas o fácilmente computables.

Las teorías de la utilidad esperada de Bernoulli y Von Neumann y Morgenstern han invocado y se han apoyado sobre el Principio de Reducción como un principio normativo clave para dichas teorías.

Fishburn (1988, pp. 9-14), establece los axiomas y el teorema de la utilidad lineal (de Von Neumann y Morgenstern) siguiendo a Jensen (1967) considerando los siguientes conceptos : que en su versión original se encuentran en Von Neumann y Morgenstern (1953, pp. 15-29 y pp. 617-632).

Sea P un conjunto no vacío de medidas de probabilidad p, q... definido sobre un σ-álgebra basada en X.

Entonces, para cada $p \in P$, $p(A) \geq 0$ para cada $A \in A'$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ cuando A y B son dos eventos disjuntos en A', y P = 1 sobre el conjunto universal X en A'.

Por definición A' es cerrado bajo complemento y uniones finitas.

Se supone que P es un conjunto convexo, por lo que $\beta p + (1-\beta)q$ está en P cuando p, q están en P y $0 \leq \beta \leq 1$.

Sobre P se define una relación de preferencia $\succ$ la cual se interpreta como preferencia estricta.

La relación de indiferencia sobre P se define como :

$$p \sim q \quad \text{cuando no se da que } p \succ q \text{ ni tampoco que } q \succ p$$

La relación de preferencia e indiferencia se define como :

$$p \succsim q \quad \text{cuando} \quad p \succ q \quad \text{o cuando} \quad p \sim q$$

Se suponen las siguientes propiedades de $\succ$:

a) $\succ$ es asimétrica.

Para toda p, q $\in$ P, cuando p $\succ$ q, no se da que q $\succ$ p.

b) Cuando $\succ$ es asimétrica, la relación de indiferencia $\sim$ es reflexiva (p $\sim$ p) y simétrica (si p $\sim$ q, entonces q $\sim$ p).

c) En general, se dice que una relación binaria R sobre P es transitiva si para cualquier p, q, r $\in$ P,

(p R q, q R r) ==> p R r.

y que es negativamente transitiva si para cualquier p, q, r $\in$ P,

(no (p R q), no (q R r)) ==> no (p R r)

o de manera equivalente :

p R r ==> (p R q o q R r).

Se dice que una relación R que es asimétrica y negativamente transitiva es un " **orden débil** " (en sentido asimétrico).

Cuando se supone que $\succ$ es asimétrica y transitiva, pero no se supone ser transitiva, entonces nos referimos como un orden parcial, en vez de orden débil.

Se supone que la relación $\succ$ sobre P es un orden débil, lo cual implica lo siguiente :

Las relaciones de preferencia, indiferencia y preferencia e indiferencia ($\succ$, $\sim$, $\succsim$) son transitivas y además :

(p $\sim$ q , q $\succ$ r) ==> p $\succ$ r

(p $\succ$ q , q $\sim$ r) ==> p $\succ$ r.

El considerar la hipótesis de orden débil, implica que la relación de indiferencia $\sim$ es una relación de equivalencia (es reflexiva, simétrica y transitiva) sobre P, y que las clases de equivalencia del conjunto cociente P/$\sim$, (cada una de las cuales consiste de todas aquellas medidas de probabilidad indiferentes una con respecto a otra) estan totalmente ordenadas aplicando la relacion de preferencia $\succ$ sobre P/$\sim$.

Los axiomas de Jensen (1967) de la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern, en la versión de Fishburn (1988, p. 10) son los siguientes :

Se consideran tres axiomas para $\succ$ sobre P, los cuales se aplican para cualquier p, q, $r \in P$ y para cualquier $0 < \beta < 1$.

A1. Orden :

$\succ$ sobre P es un orden débil

A2. Independencia :

$$p \succ q \Longrightarrow \beta * p + (1-\beta) * r \succ \beta * q + (1-\beta)\, r$$

A3. Continuidad :

$$(p \succ q,\ q \succ r) \Longrightarrow [\sigma p + (1-\sigma) r \succ q\ ,\ y\ q \succ \tau p + (1-\tau) r$$

para algunas σ y τ en (0,1)]

1.2.6.- INTERPRETACION DE LOS AXIOMAS.

El axioma A1 de ordenación débil ha sido el principal soporte de la concepción económica de racionalidad desde los tiempos de Bernoulli y Cramer (Fishburn, 1988, p. 10).

El axioma A2 es también conocido como una hipótesis de linealidad. Dice que si p se prefiere a q entonces cualquier combinación convexa de p y una r es preferible a otra de q y r. O en otras palabras, que la preferencia entre mezclas debería depender únicamente entre p y q.

En la lista de axiomas de Von Neumann y Morgenstern publicada en 1944, el axioma de independencia no se encontraba presente.

Samuelson (1953), hace notar lo anterior en su trabajo " **Probability, Utility, and the Independence Axiom** ", y al pie de la página 673, dice :

" Alrededor de 1950, Marschak, Dalkey, Nash y otros, independientemente hicieron notar la crucial importancia del axioma de independencia. Anterior a esto, los axiomas de Von Neumann y Morgenstern confundieron y cuestionaron a muchos economistas, incluyéndome a mí. Un número de interpretaciones de aquellos axiomas... parecieron materializar el espíritu de los mismos, sin llevar todavía a una utilidad cardinal aditiva. Marschak, yo, y otros hemos llegado a sospechar que el axioma de la independencia había sido supuesto en los conceptos pre-axiomaticos de la discusión de Juegos ".

Malinvaud (1953, p. 679), apoya la idea de Samuelson sobre el axioma de independencia.

En la literatura algunos autores hacen referencia al " **axioma de independencia de Samuelson-Malinvaud** ".

El axioma A3 está diseñado para evitar que una distribución de probabilidad sea infinitamente preferible a otra y permite garantizar que distribuciones de probabilidad ó medidas en P sean mapeadas en números reales que preserven la relación de preferencia sobre P.

Con los anteriores axiomas es posible obtener el **TEOREMA DE LA UTILIDAD LINEAL**.

Teorema 3. Se supone que P es un conjunto convexo no vacio de medidas de probabilidad definido sobre un álgebra booleana. de subconjuntos de X, y que $\succ$ es una relacion binaria sobre P.

Entonces, los axiomas A1, A2, y A3, son ciertos si y sólo si existe una funcional lineal u sobre P tal que, para cualquier p, $q \in P$, $p \succ q \iff u(p) > u(q)$.

Además, tal funcional lineal u es única bajo transformaciones lineales positivas.

La demostración del teorema se encuentra en Fishburn (1988, pp. 11-14).

Para Arrow (1971, p. 94), " **una función de utilidad es, después de todo, una manera de representar un orden de preferencias** ".

1.2.7.- EXTENSION HACIA MEDIDAS NO SIMPLES.

La extensión de la representación de utilidad esperada en el caso de medidas de probabilidad simples sobre X al caso de medidas no probabilidad **no** simples sobre X, hace necesaria la consideración de axiomas adicionales (Fishburn, 1988, pp. 21-23). Se consideran los casos cuando u es acotada y cuando u no lo es.

Cuando p es una medida de probabilidad **no** simple sobre X, la representación de utilidad esperada, es la siguiente :

$$1.8\ )\quad u(p) = \int_X u(x)\,dp(x)$$

Fishburn (1970, capitulo 10) da ejemplos en los que se muestra que se necesitan axiomas más allá de A1, A2, y A3, para poder llegar a la representación 1.8.

Las pruebas de los teoremas se dan en Fishburn (1982).

CASO 1. Cuando u es acotada :

Para 1.8), se utilizan los siguientes principios de Dominación.

Para toda p, q $\in$ P, para toda A $\in$ A', y para toda y $\in$ X, se aplican los siguientes principios de Dominación :

A4. Dominación :

Supóngase que p(A) = 1.

Entonces, [x $\succ$ q para toda x $\in$ A] ==> p $\succsim$ q, y

[q $\succ$ x para toda x $\in$ A] ==> q $\succsim$ p.

A4'. Dominación :

Supóngase que p(A) = 1.

Entonces, [x $\succsim$ y para toda x $\in$ A] ==> p $\succsim$ y, y

[y $\succsim$ x para toda x $\in$ A] ==> y $\succsim$ p.

El axioma débil A4'., se puede usar bajo aditividad contable :

Teorema 4. Supóngase que A' es un álgebra Booleana de subconjuntos de X que contiene cada conjunto con un sólo elemento, P es un conjunto de medidas de probabilidad sobre A' que contiene cada medida puntual y es cerrado bajo combinaciones convexas contables y bajo medidas condicionales, $\succ$ es una relación binaria sobre P que satisface A1, A2, A3, y A' contiene cada intervalo de preferencia. Entonces, existe una funcional lineal acotada u que preserva el orden sobre P que satisface 1.8 para toda p $\in$ P, si se mantiene A4, o si todas las medidas en P son numerablemente aditivas y se mantiene A4'.

CASO 2. Cuando u es no necesariamente acotada.

En este caso se define un axioma adicional de truncamiento a fin de evitar que se generen valores esperados infinitos, a este respecto se pueden encontrar detalles en Fishburn (1988, pp. 23-24).

Cuando se elimina la hipótesis de que P es cerrado bajo combinaciones convexas contables, entonces u puede ser no acotada.

1.3.- GENERALIZACIONES SOBRE LA TEORIA DE LA UTILIDAD LINEAL. (COMENTARIOS).

Diferentes autores que han revisado la validez de los axiomas de Von Nuemann y Morgenstern o la validez del enfoque de utilidad esperada para explicar o describir el comportamiento de individuos en condiciones de Riesgo, han utilizando argumentos teóricos o experimentales y han encontrado falla(s) de algun(os) de los los axiomas originalmente propuestos por los mencionados autores. Esto ha motivado a diversos autores a generar un número grande de nuevos modelos que generalizan la Teoría de la Utilidad Lineal.

Una interrogante importante del enfoque normativo es decidir que violaciones de los axiomas de Von Neumann y Morgenstern .son "artefactos" experimentales y qué violaciones constituyen rechazos fundamentales de los axiomas por personas inteligentes y bien informadas.

En este sentido se hace necesario distinguir entre el enfoque de una teoría normativa y una teoría descriptiva.

Los términos normativo y descriptivo señalan usos e interpretaciones particulares de la teoría de decisiones.

El enfoque normativo esta interesado con criterios de coherencia, consistencia y de racionalidad en los patrones de preferencias, los cuales son establecidos como axiomas.

No se supone necesariamente que el comportamiento real de decisores en situaciones de elección se adhiere a los axiomas; lo que se presupone es que gente razonable que entiende los axiomas estaría de acuerdo en que sus preferencias y sus elecciones sigan el lineamiento axiomático.

En la literatura se hace mención también a otros términos tales como racional, prescriptivo y recomendatorio para indicar el enfoque normativo.

Por otro lado, el enfoque descriptivo busca identificar patrones en las preferencias de un individuo o elecciones reales y subsecuentemente desarrollar un modelo que caracterize estos patrones de comportamiento real, que pueda ser usado para predecir preferencias o elecciones que no han sido reveladas todavía. La teoría descriptiva esta interesada en el comportamiento real del decisor en situaciones de elección más que en lineamientos ó criterios para decisiones " correctas ".

Términos afines al enfoque descriptivo son : "psicológico", "predictivo", "positivo", explicativo, del comportamiento y situacional.

Es deseable distinguir entre el enfoque normativo y el enfoque descriptivo. Lo es por dos razones :

a) Primera : mucha de la evidencia empirica para preferencias declaradas o elecciones reales involucra el aspecto descriptivo o del comportamiento en la Teoría de Decisiones; y

b) Segundo : nuestro comentario sobre las generalizaciones de la Teoría de la utilidad lineal que mencionaremos a continuación, enfatizan a las teorías y enfoques que van por el lado normativo de la Teoría de Decisiones.

Autores que han influenciado sustancialmente la investigación y generación de nuevos modelos que acomodan fallas del sistema original de axiomas de Von Neumann y Morgenstern son Maurice Allais (1953) y Kanemhan y Tversky (1979).

Maurice Allais (1953) encontró una falla del axioma de independencia en su ampliamente comentada " **Paradoja de Allais** ".

Kanheman y Tversky en sus trabajos experimentales han encontrado lo que han llamado " **efectos de marco de referencia** ", en donde observan que las decisiones de los individuos se ven afectados por la forma en que le son presentadas ciertas preguntas relacionadas con el problema a resolver (Fishburn, 1988, p. 27).

Actualmente el lector puede encontrar una literatura muy amplia sobre teorías que generalizan la teoría de la utilidad lineal.

Un lector interesado en profundizar en esta dirección puede consultar Fishburn (1988) en donde se encuentra una presentación sistemática de los rasgos que caracterizan dichas teorías.

Brevemente mencionamos que existen teorías que tienen en común el que suscriben el principio de reducción y suponen que la relación de preferencia $\succ$ sobre un conjunto P de medidas de probabilidad es asimétrica.

En esta dirección tenemos teorías que acomodan (entre otras) fallas del axioma de independencia, transitividad y/o que relajan el principio de linealidad.

Un análisis detallado se puede encontrar en Fishburn (1988, Capitulos 2, 3, 4 y 5).

Fishburn (1988) también revisa la generalización del enfoque de utilidad esperada para considerar decisiones en condiciones de incertidumbre. En su capitulo 7 revisa el enfoque de Savage sobre " **los estados del mundo** ", el cual relaja el principio de reducción utilizando el enfoque de probabilidad subjetiva en la llamada Teoría de la utilidad Esperada Aditiva.

Una generalización no comentada por Fishburn (1988), es el enfoque de las preferencias estado-dependientes de Drèze (1987) quien propone su Teorema de las Expectativas Morales. Drèze apoya su Trabajo sobre el enfoque de Savage.

CAPITULO II

AVERSION AL RIESGO

2.1.- CONSIDERACIONES PREVIAS.

El concepto de aversión al riesgo es considerado ampliamente en la literatura de Seguros, Finanzas y Economía, por aceptar un tipo de comportamiento al que se apegan muchos individuos cuando hacen elecciones entre alternativas riesgosas.

En este capítulo estamos interesados en estudiar el concepto de aversión al riesgo para funciones de utilidad monótonas crecientes, dedicando atención primordial a las propiedades que considera el enfoque de Dominación Estocástica discutido más adelante en el capítulo IV de este trabajo.

Debido a lo anterior, nosotros no consideramos el caso de comportamiento de inclinación hacia el riesgo por parte del decisor, ni el análisis de aversión relativa al riesgo. Otro caso que no consideramos es el análisis del comportamiento ante el riesgo de aquellos individuos que tienen funciones de **utilidad monótonas decrecientes** o funciones de utilidad no monótonas. Un estudio de estos casos es realizado por Keeney y Raiffa (1976, pp. 174-188).

Con estas consideraciones, como lo veremos en seguida, restringimos nuestra atención al espacio de aquellas funciones de utilidad que muestran una forma cóncava.

Llama la atención el que hecho de que en la literatura uno de los resultados más contundentes es la expresión que mide la aversión al riesgo de un decisor. Debido a esto nos detenemos a revisar las ideas que llevaron a Arrow y a Pratt a descubrir en forma separada dichas funciones.

Arrow (1971, p. 25) hace mención " **que Keynes pensó que la conducta debería ser guiada no solamente por la utilidad esperada sino también por alguna medida de riesgo** ".

Asi mismo, Arrow (1971, p. 90) argumenta que " **desde los tiempos de Bernoulli, los individuos tienden a mostrar aversión al riesgo en la toma de riesgos, y que aversión al riesgo es una explicación de muchos fenómenos en el mundo económico** ".

Para el análisis de las actitudes hacia el riesgo de un decisor es necesario introducir los siguientes conceptos (Keeney y Raiffa, 1976, pp. 141-142).

2.2.- CONCEPTOS BASICOS.

En esta sección definimos los conceptos básicos que entran en el análisis de aversión al riesgo, aclarando qué entendemos por riesgo y el tipo de funciones de utilidad al que restringimos nuestro análisis.

El atributo en que un decisor este interesado se representa por X, el cual está representado por un sub-conjunto de los números reales.

Las consecuencias del atributo X son consecuencias monetarias.

2.2.1.- CONCEPTO DE RIESGO.

Para diversos autores el riesgo se centra alrededor de la frase " **posibilidad de pérdida** ", en la que en la determinación de la cantidad de riesgo que un curso de acción tiene entran en consideración las magnitudes de las probabilidades así como de las pérdidas (ver, por ejemplo, Slovic, 1968).

2.2.2.- MONOTONICIDAD.

Se le considera una caracteristica cualitativa de las funciones de utilidad, la cual muestra implicaciones de las preferencias de un decisor sobre loterias y consecuencias.

A efectos de clarificar el concepto de monotonicidad distinguimos entre monotonicidad creciente, monotonicidad decreciente y no monotonicidad.

Definición : Monotonicidad Creciente.

Se dice que una función de utilidad u es monótona creciente cuando para cualquier $x_1, x_2 \in X$

$$x_2 > x_1 \iff u(x_2) > u(x_1).$$

Definición : Monotonicidad Decreciente.

Se dice que una función de utilidad u es monótona decreciente cuando para cualquier x_1, $x_2 \in X$

$x_1 > x_2 \iff u(x_2) > u(x_1)$.

Definición : No Monotonicidad.

Una función de utilidad es no monótona cuando es monótona creciente para un intervalo del atributo X y monótona decreciente para otro intervalo del mismo atributo X.

2.2.3.- CERTEZA EQUIVALENTE.

Para los siguientes conceptos nos apoyamos en Keeney y Raiffa (1976, p. 143).

En la teoría de Von Newmann y Morgenstern una lotería es un sorteo entre bienes, mercancías u opciones o consecuencias con una probabilidad dada o conocida de antemano. A saber L (π P_i ; X_1, ..., X_n) describe la lotería de n consecuencias con una probabilidad definida : X_i se obtiene con probabilidad P_i, $\sum P_i = 1$, $P_i > 0$ para todo i. La lotería no es una mescla o combinación, es decir, si se obtiene X_i no se obtendrá X_j ($j \neq i$).

Sea L una lotería que produce consecuencias x_1, x_2, x_3, ..., x_n con probabilidades p_1, p_2, p_3, ..., p_n.

Sea x~ la variable aleatoria que denota las consecuencias inciertas.

La consecuencia esperada se denota como :

$$E(x\sim) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i$$

La utilidad esperada de esta lotería es

$$E(u(x\sim)) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \, p_i$$

Definición : Una certeza equivalente de la lotería L, es una cantidad x^ tal que el decisor es indiferente entre L y la cantidad x^ con certeza.

La anterior definición implica que :

$u(x^\wedge) = E(u(x\sim))$ o en otras palabras,

$x^\wedge = u^{-1}\ (\ E(u\sim)\ ).$

En el caso de funciones de utilidad monótonas, la certeza equivalente de cualquier lotería es única.

Cuando las consecuencias de una lotería se describen de acuerdo a una función de densidad de probabilidad, entonces la consecuencia esperada de dicha lotería es :

$$E(x\sim) = \int x f(x)\, dx$$

La certeza equivalente $x^\wedge$ es la solución a la expresión

$$u(x^\wedge) = \int u(x) f(x)\, dx$$

La propiedad de que una función de utilidad es invariante bajo transformaciones lineales positivas, se puede aprovechar para establecer la siguiente definición :

Definición : Dos funciones de utilidad u_1, u_2, son **estratégicamente equivalentes** ($u_1 \sim u_2$) si y sólo si ellas implican la misma ordenación de preferencias para cualesquiera dos loterías.

Esta definición lleva a que la certeza equivalente para ambas funciones de utilidad es la misma.

$$u_1 \sim u_2 \implies u_1^{-1}\, E(u_1(x\sim)) = u_2^{-1}\, E(u_2(x\sim))$$

Cuando el atributo X es monetario, la certeza equivalente CE de una lotería L es llamada certeza monetaria equivalente[*3].

*3 : PRATT (1964) UTILIZA EL TERMINO " EFECTIVO EQUIVALENTE " PARA LA CERTEZA MONETARIA EQUIVALENTE.

2.2.4.- AVERSION AL RIESGO.

A fin de obtener una mejor visión del surgimiento de la función de aversión al riesgo propuesta independientemente por Arrow y por Pratt, se revisarón las publicaciones de estos autores (1964, Pratt; 1971,Arrow) intentado captar las ideas principales que llevaron a cada uno de ellos a plantear de manera separada la función de aversión al riesgo conocida en la literatura de Seguros, Investigación de Operaciones, Economía, Finanzas y otras áreas, **como la medida de aversión al riesgo de Arrow - Pratt.**

Con el fin de comprender los conceptos de dichos autores ha sido de invaluable apoyo el texto de Keeney y Raiffa (1976, capítulos 1 y 4).

Arrow (1971, p. 91), en su Teoría de la Aversión al Riesgo, persigue el objetivo de " **discutir más especificamente las medidas de aversión al riesgo y mostrar que, en conjunción con la hipótesis de utilidad esperada, pueden ser usadas para obtener resultados cualitativos más que cuantitativos en teoría eonómica** ".

En el pensamiento de Arrow, aversión al riesgo se puede utilizar para explicar fenómenos económicos como el de Seguros.

Muestran aversión al riesgo aquellos inversionistas que prefieren comprar instrumentos del mercado de dinero (renta fija) a instrumentos del mercado de capitales, tales como acciones (renta variable).

Para Arrow (1971, p. 90), un adverso al riesgo es aquel individuo que partiendo de una posición de certeza es renuente a tomar una apuesta actuarialmente justa " **De antemano, este individuo es renuente a tomar una apuesta que es actuarialmente injusta para él** ".

De acuerdo a Keeney y Raiffa (1976, p. 149), " **la intuición dice que una persona adversa al riesgo es aquella que se comporta conservadoramente** "; se ilustra lo anterior con la siguiente situación :

Si un decisor tiene una lotería con dos consecuencias x_1, x_2 donde (x_1 es menos preferida a x_2) y cada consecuencia ocurre con probabilidad 1/2, entonces la consecuencia esperada de la lotería es $(x_1 + x_2)/2$. Supongamos que a dicho decisor se le pide establecer su preferencia entre recibir dicha consecuencia esperada con certeza, o recibir x_1 o x_2 con probabilidad 1/2.

Si el decisor prefiere recibir la consecuencia esperada con certeza sobre el resultado de la lotería, dicho decisor establece que prefiere eliminar el riesgo asociado con la lotería recibiendo con certeza el monto de la consecuencia esperada, el cual es libre de riesgo.

Cuando un decisor muestra esta actitud hacia **todas las loterias**, se dice que dicho decisor es adverso al riesgo.

Definición : Un decisor es adverso al riesgo si prefiere la consecuencia esperada de cualquier lotería **no degenerada** (ninguna consecuencia individual ocurre con probabilida 1) a la lotería misma.

Dicha definición se puede representar de la siguiente forma :

Sea x~ la variable aleatoria que describe las posibles consecuencias de una lotería. Entonces un decisor es adverso al riesgo cuando para todas las loterias no degeneradas

1) $u(E(\tilde{x})) > E(u(\tilde{x}))$

Con los anteriores conceptos, se puede establecer el siguente teorema (Keeney y Raiffa 1976, p. 149).

Teorema 5. Un decisor es adverso al riesgo si y sólo si su función de utilidad es cóncava.

Prueba : Si un decisor es adverso al riesgo, podemos considerar una lotería que produce x_1 con probabilidad p y x_2 con probabilidad (1-p).

Aplicando 1), se obtiene :

$u(px_1 + (1-p)x_2) > pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$

lo cuál es la definición de concavidad estricta.

La conversa también resulta de inmediato.

Basta con probar para una lotería de dimensión 2 y extenderse por inducción.

2.3.- MEDIDAS DE AVERSION AL RIESGO.

En esta sección revisamos las hipótesis y criterios que Arrow y Pratt utilizaron para llegar a la expresión de sus medidas de aversión al riesgo.

2.3.1.- EL ENFOQUE DE ARROW.

Arrow estaba interesado en obtener resultados cualitativos más que cuantitativos, apoyado en la teoría económica.

2.3.1.1.- HIPOTESIS Y CONSIDERACIONES.

Sea Y = riqueza, y

u(Y) = utilidad total de la riqueza Y.

Arrow considera riqueza en el sentido de Bernoulli. Aunque menciona que " **para muchos propósitos Y se toma como el valor monetario de los bienes poseidos (se incluye dinero en efectivo) a precio de mercado** ".

Arrow supone lo siguiente :

a) u(Y) es **dos veces diferenciable**, y considera

u(Y)' como utilidad marginal de riqueza,

u(Y)'' como tasa de cambio de utilidad marginal con respecto a riqueza.

b) siempre es deseable mayor riqueza, por lo tanto :

1) u(Y)' > 0.

Lo que deriva que u es una función creciente de Y.

c) u es acotada.

Con estas hipótesis y con el concepto de aversión al riesgo, Arrow (1971, p. 93) observa que :

Lema 1. Para un individuo adverso al riesgo, u(Y)' es estrictamente decreciente cuando Y se incrementa.

Para llegar a esta observación, Arrow considera un individuo con riqueza inicial Y_0, a quien se le ofrece una lotería de ganar o perder una cantidad h > 0. La probabiliadad de ocurrencia de las consecuencias Y_0 + h, y Y_0 - h, es 1/2 respectivamente.

Para esta lotería, la consecuencia esperada es Y_0.

Por la definición de aversión al riesgo y por la hipótesis de utilidad esperada, se tiene :

$$u(Y_0) > 1/2\ u(Y_0 - h) + 1/2\ u(Y_0 + h)$$

Esto lleva a

$$u(Y_0) - u(Y_0 - h) > u(Y_0 + h) - u(Y_0)$$

$$\frac{u(Y_0) - u(Y_0 - h)}{h} > \frac{u(Y_0 + h) - u(Y_0)}{h}$$

Tomando el limite en ambos lados, cuando h tiende a cero, se observa que el cambio en u cuando Y_0 es incrementada se va haciendo más pequeño.

En el lenguage de derivadas, se observa que la derivada de u cuando Y_0 es incrementada muestra un comportamiento decreciente.

Aun cuando el lema 1 es una condición necesaria y suficiente para aversión al riesgo, todavia no se esta en condición de obtener la medida de aversión al riesgo.

2.3.1.2.- OBTENCION DE MEDIDAS DE AVERSION AL RIESGO.

Para Arrow (1971, p. 94), una medida de aversión al riesgo debe ser invariante bajo transformaciones lineales positivas de la función de utilidad. De esta forma las preferencias del individuo no se ven alteradas.

Con este requerimiento en mente, Arrow observa que si se piensa utilizar la tasa de cambio de $u(Y)'$ como una medida de aversión al riesgo, ésta no cumple el requerimiento planteado, porque si $u(Y)'$ es multiplicada por una constante positiva, la segunda derivada queda afectada por dicha constante.

Por otro lado, si se usa la razón $u(Y)''/u(Y)'$, esta razón sí permanece invariante bajo transformaciones lineales positivas.

En efecto, si $u(Y) = a\ u\^(Y) + b$, con $a > 0$

entonces : $u(Y)' = a\ u\^'(Y)$, y $u(Y)'' = a\ u\^''(Y)$, por lo que al tomar la razón, la constante desaparece.

Arrow concluye (1971, p. 94), que si la medida de aversión al riesgo es invariante bajo transformaciones lineales positivas de la función de utilidad, y no depende de derivadas de orden mayor que dos, entonces esta medida debe ser determinada por la razon $u(Y)''/u(Y)'$ y posiblemente por Y.

Arrow define las siguientes dos medidas de aversión al riesgo :

2) $r(Y)_A = -u(Y)''/u(Y)'$, Aversión al Riesgo Absoluta.

3) $r(Y)_R = -Y\,u(Y)''/u(Y)'$, Aversión Relativa al Riesgo

Por el Lema 1., $u(Y)'' < 0$ para una función de utilidad que muestra aversión al riesgo.

El hecho de que la segunda derivada sea menor que cero, también se desprende del hecho de que la función de utilidad de un decisor adverso al riesgo es cóncava.

Lo que hace ver que las medidas de aversión al riesgo definidas arriba son positivas para un decisor adverso al riesgo.

2.3.2.- EL ENFOQUE DE PRATT.

Pratt (1964), está interesado en obtener resultados cualitativos y cuantitativos, apoyado en conceptos actuariales.

2.3.2.1.- HIPOTESIS Y CONSIDERACIONES.

Sea $u(x)$ una función de utilidad sobre consecuencias monetarias, que considera nivel de riqueza total (activos totales de un individuo). Ruina equivale a $x = 0$.

Definición : Dos funciones de utilidad $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son equivalentes si y solamente si existen constantes a y b , tales que :

1) $u_1(x) = a\,u_2(x) + b$, donde $a > 0$.

Es decir, son equivalentes si implican la misma ordenación de preferencias sobre cualesquiera dos loterías.

Sea x~ la variable aleatoria que representa consecuencias monetarias inciertas. Los riesgos que representa esta variable aleatoria son no degenerados (no constantes con probabilidad 1).

Asi también, hace las siguientes hipótesis :

a) Las funciones de utilidad pueden ser acotadas pero no lo necesitan ser. Se supone, sin embargo, que son **lo suficientemente regulares** para justificar las pruebas.

b) Son dos veces diferenciables con primera derivada positiva. Esto se requiere para que las medidas de aversión al riesgo esten definidas y sean continuas.

c) Las variables aleatorias pueden, pero no requieren en forma indispensable, tener distribuciones de probabilidad " objetivas ".

Para Pratt, el concepto de **PRIMA DE RIESGO** es un concepto básico.

Pratt considera un decisor que tiene una loteria L en donde las consecuencias inciertas se representan por la variable aleatoria x~. Asi también, considera el caso en que este decisor esta indiferente entre recibir la certeza equivalente de su loteria o quedarse con su loteria y recibir un resultado incierto.

Definición : Considerando la situación antes descrita, la prima de riesgo (PR) de una loteria L cuyas consecuencias inciertas se representan por x~ es la diferencia entre el valor esperado x~ y su certeza equivalente x^.

En simbolos :

2) $PR = E(x\sim) - x\hat{} = E(x\sim) - u^{-1}\ E(u(x\sim))$

Para efectos de su análisis, Pratt hace ver que la prima de riesgo depende de x~ y de la función de distribución de x~, solamente para efectos notacionales.

Es decir : PR(x~,z).

Para un riesgo no favorable x~, Pratt (1964, p. 124), define la **PRIMA DE SEGURO** (PS) de tal forma que el decisor este indiferente entre enfrentar un riesgo x~ y pagar la cantidad cierta PS, donde :

3) $PS = PR - E(x\sim) = -\ x\hat{}$

2.3.2.2.- OBTENCION DE LAS MEDIDAS DE AVERSION AL RIESGO.

La indiferencia del decisor en la situación descrita arriba se puede escribir :

1) $u(x_0 + x\hat{}) = u(x_0 + E(x\sim) - PR) = E(u(x_0 + x\sim))$

donde x_0 representa un nivel de la riqueza total del individuo, antes de la lotería, o recibir la certeza equivalente de dicha lotería.

Pratt considera un " **riesgo actuarialmente neutral** ", es decir, considera un riesgo x~ tal que su valor esperado $E(x\sim) = 0$, y que su varianza es muy pequeña.

Con la anterior consideracion, 1) se puede escribir como :

2) $u(x_0 - PR) = E(u(x_0 + x\sim))$

Al tomar la expansión de Taylor de u en ambos extremos de la ecuación, resulta.

3) $u(x_0 - PR) = u(x_0) - PR * u'(x_0) + 1/2 * PR^2 * u''(x_0) + \ldots$

4) $E(u(x_0 + x\sim)) =$

$E(u(x_0) + u'(x_0) * x\sim + 1/2 * u''(x_0) * x\sim^2 + 1/3! * u^3 (x_0) * x\sim^3 + \ldots)$

$= u(x_0) + 1/2 * u''(x_0)\ E(x\sim^2) + 1/3! * u^3 (x_0) * E(x\sim^3) + \ldots$

Si se desprecian los términos de orden mayor a 1 y a 2 en ambas ecuaciones y si comparamos, resulta :

$- PR * u'(x_0) \approx 1/2 * E(x\sim^2) * u''(x_0)$

como $E(x\sim^2) = \sigma^2 - E(x\sim)$, y $E(x\sim) = 0$, entonces :

5) $PR \approx 1/2 * \sigma^2 * r(x_0)$, donde

$r(x_0) = - u''(x_0) / u'(x_0)$

Pratt (1964, pp. 125-126), va más allá y estudia dos casos más :

a) Un riesgo " **actuarialmente no neutral** ", es decir $E(x\sim) = m$, donde m es distinto de cero.

b) El caso especial de una loteria con dos consecuencias. Una ganancia h o una pérdida -h, h > 0.

En ambos casos llega a la misma expresión para la función $r(x_0)$.

Pratt considera que una función de utilidad que exprese aversión al riesgo por parte de un decisor se modela una forma cóncava, pero que para definir una medida de aversión al riesgo no es conveniente utilizar únicamente $u''(x)$ o la curvatura $u''(x)*(1+(u'(x))^2)^{-3/2}$, porque cuando una función de utilidad se somete a una transformación lineal positiva, la segunda derivada o la curvatura quedarían afectadas por una constante positiva.

AVERSION AL RIESGO LOCAL

En cambio si se utiliza $r(x)$ como una medida de aversión al riesgo local el comportamiento del decisor expresado en su función de utilidad no se ve afectado por una transformación lineal positiva de su función de utilidad.

$$6)\quad r(x) = -u''(x)/u'(x)$$

Por concavidad en la función de utilidad $u''(x) < 0$. La anterior expresión es equivalente a :

$$7)\quad r(x) = -\frac{d}{dx}\log u'(x)$$

La condición de que $u(x)$ es dos veces diferenciable con primera derivada positiva, lleva a que $r(x)$ es definida y también es continua.

Pratt (1964, p. 126), interpreta $r(x)$ como una medida de aversión local al riesgo o una " **propensidad local a asegurarse** " por parte del individuo, en el punto x , bajo la función de utilidad u.

Además observa que aún cuando no establece una medida de aversión al riesgo a nivel global, sí es posible hacer comparaciones de riesgo a nivel global porque la medida de aversión local al riesgo $r(x)$ asociada a una función de utilidad u **contiene toda la informacion relacionada con dicha función de utilidad.**

Lo anterior se observa resolviendo la ecuación diferencial expresada en 7:

$$-r(x)\,dx = d\log u'(x)$$

$$-\int r(x)\,dx = \log u'(x) + C$$

o lo que es lo mismo :

$$e^{-\int r(x)\,dx} = e^{\log u'(x) + C} = e^{C}\,u'(x)$$

integrando nuevamente, resulta

$$8) \quad \int e^{-\int r(x)\,dx}\,dx = u(x)\,e^{C} + b$$

se observa que e^C es positivo, por lo que también se puede escribir lo siguiente :

$$9a) \quad u^*(x) = \int e^{-\int r(x)\,dx}\,dx$$

$$9b) \quad u^*(x) = a\,u(x) + b, \text{ donde } a = e^C > 0.$$

La expresión 9a) por un lado muestra que la función de aversión r(x) contiene toda la información acerca de una función de utilidad por lo que es posible hablar de aversión al riesgo a nivel global.

Con la expresión 9b), Keeney y Raiffa establecen un teorema como sigue :

Teorema 6. Dos funciones de utilidad u y u* son estratégicamente equivalentes si y sólo si tienen la misma función de aversión al riesgo.

Prueba : Sea $u^*(x) = a\,u(x) + b$, donde $a > 0$.

Para la primera parte de la prueba,

$r_1(x) = -\,u^{*\prime\prime}(x)/u^{*\prime}(x) = -\,a\,u''(x)\,/\,a\,u'(x) = r_2(x)$

La segunda parte se demuestró anteriormente.

Los siguientes resultados se toman de Keeney y Raiffa (1976, pp. 162-163):

Teorema 7. Si r es positiva para toda x, entonces u es cóncava y el decisor es adverso al riesgo.

Teorema 8. Si $r_1(x) > r_2(x)$ para toda x, entonces, $PR_1(x,x\sim) > PR_2(x,x\sim)$ para toda x y para toda x~.

AVERSION AL RIESGO PROPORCIONAL

Pratt (1964, p.p. 133 - 134), adicionalmente revisa el caso de aversión al riesgo en proporción del nivel de riqueza de un individuo, definiendo $r^*(x) = xr(x)$.

2.4.- ANALISIS DE LA FUNCION DE AVERSION AL RIESGO ABSOLUTA.

El análisis empieza con la pregunta ¿ Qué sucede con la prima de riesgo (PR) de un individuo cuando la riqueza de dicho individuo aumenta ?

Se emplea el término " **absoluta** " siguiendo a Arrow.

2.4.1.- AVERSION AL RIESGO DECRECIENTE.

Esta situación describe el comportamiento de un individuo cuando al aumentar sus recursos patrimoniales está dispuesto a pagar una cantidad menor por su seguro contra un riesgo dado.

Es decir, este decisor está en una posición de poder enfrentar un riesgo mayor, dado que puede pagar el riesgo en que incurre.

Definición : Un decisor es adverso al riesgo decrecientemente si :

1) Es adverso al riesgo (PR > 0 para cualquier lotería y para cualquier x).

2) Su prima de riesgo (PR) para cualquier lotería se decrementa cuando la cantidad de referencia aumenta.

Pratt (1964, pp. 134-135), establece el siguiente teorema el cual hace operacional el concepto de aversión al riesgo decreciente. Ver Keeney y Raiffa (1976, p. 166).

Teorema 9. La función de aversión al riesgo r para una función de utilidad u es decreciente si y sólo si la prima de riesgo PR(x,x~) es una función decreciente de x para cualquier x~.

Prueba.

Sabemos que $r_1(x) > r_2(x)$ implica $PR_1(x,x\sim) > PR_2(x,x\sim)$, lo cual es la primera parte de la prueba.

La conversa se prueba en Pratt (1964, p. 131), y en Keeney y Raiffa (1976, p. 166).

Para Pratt, la parte 2 de la anterior definición establece aversión al riesgo decreciente en sentido estricto.

Por los teoremas 7 y 9, la parte 1 de la definición mencionada arriba equivale a $r(x) > 0$.

Se utiliza aquí la presentación anterior de aversión al riesgo decreciente para introducir y comparar el enfoque equivalente de Arrow.

2.4.2.- AVERSION AL RIESGO ABSOLUTA DECRECIENTE.

Arrow (1971, p. 96) menciona este concepto de aversión al riesgo decreciente, cuando r(x) es positiva y decreciente cuando x crece, como aversión al riesgo absoluta decreciente.

Este último término ha tenido una amplia aceptación por parte de distintos autores en la literatura y es el término utilizado usualmente.

2.4.3.- AVERSION AL RIESGO CONSTANTE.

Teorema 10. La función de aversión al riesgo es constante si y sólo si la prima de riesgo PR(x,x~) es una función constante de x para toda lotería x~.

Definición : Un decisor es constantemente adverso al riesgo si r es una constante positiva, neutral al riesgo si r es cero, y es propenso al riesgo si r es una constante negativa.

Teorema 11.

$u(x) = -e^{-cx} \iff r(x) = c > 0$ (aversión constante al riesgo)

$u(x) = x \iff r(x) = c = 0$ (neutralidad al riesgo)

$u(x) = e^{-cx} \iff r(x) = c < 0$ (propensión al riesgo)

Prueba :

Si $c > 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} \log u'(x) = -c$$

integrando :

$$\log u'(x) + d = -cx$$

exponenciando :

$$e^{\log u'(x) + d} = e^{d}\, u'(x) = e^{d} \frac{d}{dx} u(x) = e^{-cx}$$

integrando otra vez :

$$1\ )\qquad \int e^{-cx}\, dx = -\frac{e^{-cx}}{c}$$

$$2\ )\qquad -\frac{e^{-cx}}{c} = e^{d}\, u(x) + h,$$

h y d son constantes de integración.

de la expresion 2) resulta claro que $u(x) = -e^{-cx}$

Las pruebas para los restantes casos son similares.

La conversa resulta evidente.

Se observa la siguiente propiedad para aversión al riesgo constante, Pratt (1964, p. 130) :

Para una función de utilidad con aversión constante el riesgo, $u(x) = a*u(x + k)$, para cualquier k, con $a > 0$. En otras palabras, el comportamiento de un decisor que muestra aversión constante no cambia cuando su nivel de riqueza cambia.

Esto se revisa como sigue :

Considérese $u(x + k) = -e^{-c(x+k)} = -e^{-cx}\, e^{-k} = a\, u(x)$

donde $a = e^{-k} > 0$, $u(x) = -e^{-cx}$

2.5.- COMENTARIO SOBRE LOS ENFOQUES DE ARROW Y PRATT.

Se observa que Arrow obtuvo sus resultados de tipo cualitativos apoyándose en la teoria económica, en tanto que Pratt busco resultados cualitativos y cuantitativos basado en conceptos actuariales.

Observamos que para Arrow y Pratt el concepto clave para llegar a las medidas de aversión al riesgo es la consideración de que la expresión para dichas medidas deberia mantener la invariancia bajo transformaciones lineales positivas de la función de utilidad de un decisor. Bajo este criterio se descartan la segunda derivada y la curvatura como posibles medidas de aversión al riesgo.

En contraste, Pratt va más lejos en su análisis al estudiar las propiedades de aversión al riesgo. Como veremos en el capítulo III, obtiene resultados para la generación de familias de funciones de utilidad.

Por su parte Arrow (1971, p. 166), da el nombre de Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente al comportamiento observado por un individuo quién está dispuesto a pagar una prima de riesgo positiva menor cuando sus recursos patrimoniales aumentan. Este es el término usualmente mencionadado en la literatura, en lugar del término de " **aversión al riesgo decrecientemente** " propuesto por Pratt.

2.6.- GENERALIZACIONES DE LAS MEDIDAS DE AVERSION AL RIESGO DE ARROW - PRATT (COMENTARIO).

Este comentario no afecta al desarrollo de este trabajo. Se da como complemento bibliográfico para aquellos lectores interesados en revisar la conexión con algunas Generalizaciones de la Teoría de la Utilidad Lineal. Así también, plantea una linea de Investigación posterior.

Hasta donde sabemos los trabajos en esta dirección han sido realizados por Ross (1981) y por Machina y Neilson (1987).

CAPITULO III

GENERACION DE FAMILIAS DE FUNCIONES DE UTILIDAD

3.1.- PRESENTACION.

El concepto de familia de funciones de utilidad busca simplificar la determinación de la función de utilidad de un decisor, reduciendo la gama de funciones de utilidad posibles para dicho decisor. Esto se logra planteando una propiedad que represente la actitud hacia el riesgo del decisor.

Esta propiedad implicará la forma funcional de la(s) posibles funciones de utilidad que cumplan dicha propiedad, cuando sea posible.

La consideración de ciertas operaciones sobre funciones de utilidad también muestra ser útil en la obtención de familias de funciones de utilidad. Pratt (1964) presenta operaciones que generan funciones de utilidad con Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente.

Se presenta también como ejemplo la familia de funciones de utilidad que muestra Tolerancia Lineal al Riesgo.

3.2.- GENERACION DE FAMILIAS.

Dada la importancia del concepto de familias de funciones de utilidad, es importante contar con un mecanismo para la generación de ciertas familias que representen un determinado comportamiento observado por individuos o decisores.

En esta sección mostramos que desde los tiempos de Pratt (1964) ya se contaba con el mecanismo para génerar funciones de utilidad. Este remite a la utilización de una " adecuada " ecuación diferencial que recoja el comportamiento de un decisor. Pratt se anticipó y encontró operaciones que generan funciones de utilidad con Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente.

Observamos que Bernoulli (1738) ya utilizó una ecuación diferencial para capturar el comportamiento económico (Capitulo I de este trabajo).

Por otro lado es posible definir familias de funciones de utilidad utilizando el enfoque para generar conjuntos. En este caso la propiedad a utilizarse deberia representar algún tipo de comportamiento hacia el riesgo, aunque esto no es necesario.

3.2.1.- OPERACIONES.

Pratt (1964, p. 131), se interesó en encontrar funciones de utilidad que muestren Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente.

Muestra que operaciones especificas aplicadas a funciones de utilidad que presentan Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente, producen funciones de utilidad con esta propiedad.

Para efectos de notación, emplearemos las iniciales ARAD, cuando hagamos referencia a funciones de utilidad con Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente.

Las operaciones citadas se definen en los siguientes teoremas :

Teorema 12. Supongamos que $a > 0$. Entonces, $u_1(x) = u(ax + b)$ es una función de utilidad con ARAD para $x_0 \leq x \leq x_1$, si y sólo si $u(x)$ es un función que muestre ARAD para $ax_0 + b \leq x \leq ax_1 + b$.

Prueba : Esto se sigue de

$r_1(x) = a\, r(ax + b)$

Teorema 13. Si $u_1(x)$ es ARAD para $x_0 \leq x \leq x_1$, y $u_2(x)$ es ARAD para $u_1(x_0) \leq x \leq u_1(x_1)$, entonces $u(x) = u_2(u_1(x))$ es ARAD para $x_0 \leq x \leq x_1$, a menos que una de ellas sea lineal sobre un x y la restante muestre aversión constante al riesgo.

Prueba : Considerese $\log u'(x) = \log u_2'(u_1'(x)) + \log u_1'(x)$, y por lo tanto, $r(x) = r_2(ul(x))\, u_1'(x) + r_1(x)$

El siguiente teorema se da en la interpretación de Keeney y Raiffa (1976, p. 170). El original se encuentra en Pratt (1964, pp. 131-132).

Teorema 14. Una función de utilidad que sea la suma ponderada de dos o más funciones de utilidad que son ARAD o que tienen aversión al riesgo constante sobre un intervalo $[x_0, x_1]$, es ARAD (o tienen aversión al riesgo constante sobre $[x_0, x_1]$, y excepto en subintervalos donde las funciones de utilidad ponderadas tiene una aversión al riesgo constante y de la misma magnitud, esta función es ARAD).

Prueba : Sea $u = u_1 + h\,u_2$, donde $h > 0$.

Entonces :

$$r = -\frac{u''}{u'} = -\frac{u_1'' + h\,u_2''}{u_1' + h\,u_2'}$$

$$= -\left(\frac{u_1''}{u_1' + h\,u_2'} + \frac{h\,u_2''}{u_1' + h\,u_2'}\right)$$

pero $u_1'' = -r_1 u_1'$, $u_2'' = -r_2 u_2'$.

sustituyendo :

$$r = \frac{u_1'}{u_1' + h\,u_2'} r_1 + \frac{u_2'}{u_1' + h\,u_2'} r_2$$

Derivando r, llegamos a la expresión :

$$r' = \frac{u_1'\,r_1' + h\,u_2' r_2'}{u_1' + h\,u_2'} - \frac{h\,[\,r_1 - r_2\,]^2\,u_1'\,u_2'}{[\,u_1' + h\,u_2'\,]^2}$$

Por aversión al riesgo, $u_1' > 0$, $u_2' > 0$.

Como r es decreciente o es constante, se nota que $r_1' \leq 0$, $r_2' \leq 0$.

Si $r_1' = r_2'$, se nota que $r' = r_1' = r_2'$, y este es el caso de aversión al riesgo constante.

Si $r_1' \neq r_2'$, sigue que $r' < 0$, lo cual corresponde aversión al riesgo absoluta decreciente.

El caso general

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,u_i, \qquad c_i > 0$$

sigue de aplicación repetida de la prueba.

3.2.2.- DEFINICION DE UNA PROPIEDAD.

A) EJEMPLO DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES CON ARAD

Pratt (1964, p. 133), muestra ejemplos de funciones de utilidad que presentan ARAD, las cuales son obtenidas por aplicaciones de los teoremas arriba mencionados.

Ejemplo 1.

Considerese la siguiente propiedad expresada en P1.

P1 $u'(x) = (x^a + b)^{-c}$, donde $a > 0$, $c > 0$.

Se observa que $u(x)$ es una función con ARAD en la región $x > (\max (0, -b, b(a-1))^{1/a}$, para eleciones apropiadas de los parámetros a, b.

Lo anterior resulta si analizamos $r'(x) < 0$.

Para esta $u(x)$, su función de aversión al riesgo es :

$$r(x) = \frac{ac}{x + bx^{1-a}} = - \frac{d}{dx} \log u'(x)$$

La función de utilidad es ARAD si $r'(x) < 0$, es decir, si

$$r'(x) = \frac{- ac \, [1 - b(a - 1) \, x^{-a}}{[x + b \, x^{1-a}]^2} < 0$$

Primero

$r'(x)$ existe para valores de x tales que

$$\left| x + b \, x^{1-a} \right| > 0$$

de aquí se indica que $x > 0$, ó bien

a) $x > (-b)^{1/a}$

b) $0 < x < (-b)^{1/a}$ con $b < 0$.

Segundo

$r'(x) < 0$, si $-1 + b(a -1) \, x^{-a} < 0$

De aqui resulta $x > [b \, (a - 1)]^{1/a}$

Aplicando el teorema 12 a P1 y con una elección adecuada de los valores de ciertos parámetros, se obtiene la siguiente lista de funciones de utilidad (Pratt, 1964, p. 133), las cuales muestran la propiedad de Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente.

P2 $a = 1, 0 < c < 1$; $u(x) = (x + d)^q$, con $d \geqslant 0$, $0 < q < 1$

P3 $a = 1$, $c = 1$; $u(x) = \log (x + d)$, con $d \geqslant 0$

P4 $a = 1$, $c > 1$; $u(x) = -(x + d)^{-q}$, con $d \geqslant 0$, $q > 0$

P5 $a = 2$, $c = .5$; $u(x) = \log(x + d + [(x + d)^2 + b]_2)$, con $d \geqslant |b|^{1/2}$

P6 $a = 2$, $c = 1$; $u(x) = \arctan(sx + t)$ ó $\log(1-(sx +t)^{-1})$ con $s > 0, t \geqslant 1$

P7 $a = 2$, $c = 1.5$; $u(x) = [1 + (sx + t)^{-2}]^{-1/2}$ ó $-[1 - (sx + t)^{-2}]^{-1/2}$ con $s > 0$, $t \geqslant 1$

Ejemplo 2.

Por la aplicación del teorema 13 a P3, se obtiene la siguiente familia de funciones de utilidad con ARAD :

para $x > 0$

P8 $u(x) = \log (d_1 + \log((x + d_2))$, con $d_1 \geqslant 0$, $d_2 \geqslant 0$, $d_1 + \log d_2 \geqslant 0$

Ejemplo 3.

Por la aplicación del Teorema 14, tenemos la siguiente mezcla exponencial la cual es una función con ARAD, para $x > 0$, cuando $b \neq d$.

P9 $u(x) = - a e^{-bx} - c e^{-dx}$, con $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$, $d > 0$

B) FAMILIA DE FUNCIONES QUE PRESENTAN TOLERANCIA LINEAL AL RIESGO

Esta familia también se le conoce como la familia de funciones de utilidad que presentan Aversión Absoluta al Riesgo Hiperbólica.

Esta familia contiene a aquellas funciones de utilidad que satisfacen la siguiente condición :

$- u'(x) / u''(x) = a + bx,$ donde a y b son constantes

Las funciones de utilidad que pertenecen y agotan esta familia (Rubinstein, 1977, p. 12), son las siguientes :

a) $u(x) = b / ((1 - b) (1 - a)^{1-b}), \quad b \neq 0, 1$

b) $u(x) = - a e^{x/a} \quad , \quad b = 0.$

c) $u(x) = \ln (a + x) \quad , \quad b = 1.$

Rubinstein (1977), revisa la aplicación de esta familia en Finanzas.

3.3.- CONCLUSION.

En este capítulo se muestra que se puede generar una familia de funciones de utilidad eligiendo una condición apropiada la cual puede tomar la forma de una ecuación diferencial. En términos generales la generación de una familia de funciones de utilidad se puede dar siguiendo el enfoque para generar conjuntos. La familia resultante será aquel conjunto de funciones de utilidad que satisfagan la propiedad ó condición establecida.

Si hacemos referencia a una determinada familia de funciones de utilidad estamos interesados en un espacio de funciones más pequeño. Esto simplifica el encontrar la función de utilidad de un individuo, o bien, nos ayudará a encontrar una función de utilidad si contamos con información parcial sobre las preferencias de un individuo. Lo que se ve más claro en el enfoque de Dominación Estocástica estudiado en el siguiente capítulo.

CAPITULO IV

DOMINACION ESTOCASTICA

4.1.- ANTECEDENTES.

De acuerdo a Fishburn (1989), Dominación Estocástica provee al análisis de decisiones con un enfoque para comparar alternativas de riesgo bajo información incompleta acerca de utilidades.

Russell y Seo (1989, p. 59), dicen que si el analista de decisiones conoce la función de utilidad del decisor, entonces podria sin problemas ordenarle sus preferencias. Sin embargo, es dificil conocer completamente la función de utilidad de los decisores. Lo que si se sabe o puede saber son algunas caracteristicas sobresalientes del decisor. Por lo que dependiendo de lo que se sabe, será el grado en que se le pueda ayudar a ordenar sus alternativas en un problema de riesgo dado.

Lo anterior condujo a dichos autores a establecer que " **teniéndose información incompleta acerca de la función de utilidad de un decisor, lo mejor que se puede hacer es clasificarlo de acuerdo a una o más familias de funciones de utilidad** ".

Esto lleva a que cualquier elección apropiada entre dos alternativas de riesgo para un decisor, sería también apropiada para cualquier otro individuo cuya función de utilidad está en la misma familia, dada que una familia define los limites y alcances a considerar.

Con lo anterior en mente, se llega a que las siguientes preguntas son equivalentes :

a) Si se sabe que la función de utilidad de Pedro puede ser caracterizada en forma especifica ¿ qué elección deberia hacer ?.

b) Si todos los individuos que consideremos tienen funciones de utilidad que pueden ser caracterizadas en forma especifica **¿ qué elección, aquellos individuos deberian hacer unánimamente ?**

Para Russell y Seo, la pregunta (b), marca la linea de investigación de Dominación Estocástica.

Las reglas de Dominación Estocástica establecen procedimientos para descubrir ordenaciones unánimes apropiadas de alternativas riesgosas para funciones de utilidad dentro de familias especificas.

4.2.- DEFINICION DE HIPOTESIS.

Se suponen las siguientes hipótesis (Fishburn, 1989, p. 5).

Las consecuencias son números reales x, y ...., asociadas con niveles de riqueza, pagos monetarios ó incrementos a la riqueza.

Todos los resultados posibles están en un intervalo cerrado I que es acotado por la izquierda. I puede ser [0, 1] ó [0, oo).

Las medidas de probabilidad p, q, ..., que describen prospectos de riesgo se definen al menos sobre los sub-conjuntos de Borel de los números reales con P (I) = 1 y P(A) = 0 cuando $A \cap I = \emptyset$, para algún otro sub-conjunto A.

Una medida P es simple si su soporte es finito, es decir, si P ({x}) suma 1 para un número finito de x, en cuyo caso podemos escribir P(x) en lugar de P({x}).

La función de distribución de una medida P sobre los reales se define por:

$F(x) = P (\{ y \mid y \leq x \})$ para todos los números reales x con las condiciones siguientes :

> Cuando I = [0, 1], ó I = [0, oo), F(x) = 0 para todas las x < 0.
>
> Cuando I = [0, oo), se supone que F(x) --> 1, en tanto x --> oo.
>
> Se puede advertir, con base en lo anterior, que F(x) es no decreciente y contínua por la derecha.

Las funciones de distribución de medidas simples son funciones escalón con un número finito de escalones.

4.3.- FAMILIAS DE FUNCIONES DE UTILIDAD EN D.E.

Para la definición de familias de funciones de utilidad en Dominación Estocástica, se considera la actitud hacia el riesgo del decisor, por establecer restricciones que delimitan la información que se podrá tener sobre las familias de funciones de utilidad resultantes.

Para la definición de las siguientes familias nos apoyamos en Fishburn y Vickson (1978).

En las siguientes definiciones de familias de funciones de utilidad, se supone que la función de utilidad, así como sus respectivas derivadas involucradas son continuas y acotadas sobre I con la finalidad de que los valores de utilidad esperada sean finitos.

4.3.1.- FUNCIONES DE UTILIDAD CRECIENTES.

Esta es la restricción más débil sobre funciones de utilidad u(x) de riqueza.

En este trabajo se supone que u es estrictamente creciente y acotada, es decir :

$u(x) < u(y)$ si $x < y$, para $x, y \in I$, y además existe un M tal que $u(x) \leq M$ para todas las $x \in I$.

Se supone también que u es una vez diferenciable con primera derivada continua y acotada sobre I. La primera derivada es positiva sobre el interior de I. Formalmente :

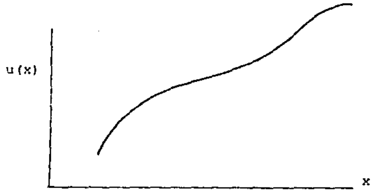
$U_1 = \{ u \mid u, u'$ son continuas y acotadas sobre I, $u' > 0$ sobre $I^\circ \}$

donde I° es el interior de I. Si $I = [0, 1]$, entonces $I^\circ = (0, 1)$. Si $I = [0, \infty)$, entonces $I^\circ = (0, \infty)$.

Se dice que U_1, contiene las funciones de utilidad de aquellos individuos que prefieren " más dinero a menos dinero ", o bien, en otras palabras U_1, contiene aquellas funciones de utilidad que presentan utilidad marginal positiva.

La gráfica de una función de utilidad $u \in U_1$, puede mostrar la siguiente forma :

FIG 4.1



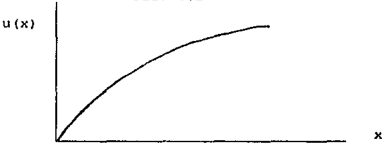
De la forma de u(x) se observa que aparte de la no saciedad ($u'(x) > 0$) U_1, no especifica claramente un tipo de actitud hacia el riesgo. Individuos cuya función de utilidad se encuentren en U_1, pueden ser propensos, adversos, o bien pueden mostrar neutralidad hacia el riesgo. Esto se ve por la convexidad, concavidad o linealidad de u(x) en diferentes segmentos de la curva.

4.3.2.- FUNCIONES DE UTILIDAD CONCAVA CRECIENTES.

En algunas aplicaciones de Economía, Finanzas, Seguros y algunas otras áreas, se juzga razonable restringir la atención a una sub-familia de U_1, la familia de funciones de utilidad que corresponden a un comportamiento de aversión hacia el riesgo.

Sabemos que aversión al riesgo requiere concavidad en la forma funcional de la función de utilidad.

FIG. 4.2



Por simplicidad se restringe la atención a concavidad estricta, es decir :

$\beta\, u(x) + (1 - \beta)\, u(y) < u(\beta x + (1 - \beta) y)$, para $x, y \in I$, y $\beta \in [0, 1]$.

Se supone que la sub-familia U_2 de funciones de utilidad u estrictamente concavas de U_1, tienen segunda derivada u'' continua y acotada sobre I.

La concavidad de la función de utilidad lleva a que u' es estrictamente decreciente, ó a que $u'' < 0$. Formalmente :

$U_2 = \{ u \mid u \in U_1,\ u''$ continua y acotada sobre $I,\ u'' < 0$ sobre $I' \}$

Hay un número de formas simples de funciones de utilidad en U_2, que son usadas por distintos autores por la simplicidad en su tratamiento teórico (Fishburn y Vickson, 1978, p. 55). Algunos ejemplos son :

1.- La función potencia, $u(x) = -x^{-c}$, con $c > 0$, cuando $I = [\ a, b\ ]$, ó $I = [\ a, \infty\ )$ con $a > 0$.

2.- La función potencia $u(x) = x^c$, $0 < c < 1$, y la función logarítmica $u(x) = \log(x)$, cuando I es un intervalo cerrado acotado contenido en $(\ 0, \infty\ )$.

3.- La función exponencial $u(x) = -e^{-cx}$, $c > 0$, $I = [\ a, \infty\ )$, con a finita.

Considerando la medida de Arrow - Pratt de aversión absoluta el riesgo (r), r(x) es positiva para todas las x positivas en I'.

4.3.3.- FUNCIONES DE UTILIDAD CON ARAD.

Considerando la medida de aversión al riesgo absoluta de Arrow - Pratt (r) no creciente en x , cuando es positiva, es posible definir una familia de funciones de utilidad U_d que es subconjunto de U_2, tal que r es acotada y continuamente diferenciable sobre I y $r' \leq 0$ sobre I. Formalmente :

$$U_d = \{\ u \mid u \in U_2,\ r' \text{ continua, acotada y no positiva sobre } I\ \}$$

En esta definición de U_d no se exige que r sea estrictamente decreciente.

Una condición necesaria para la existencia de r'sobre I' es la existencia de la tercera derivada u''' de u.

Lo anterior se nota si observamos que :

$$r'(x) = [\ -u'(x)\ u'''(x) + u''(x)^2\ ]\ /\ [\ u'(x)\ ]^2$$

entonces $r'(x) \leq 0$ solamente si $u'(x)\ u'''(x) \geq u''(x)^2$

para todas las $x \in I'$. Como $u' > 0$ y $u'' < 0$ en I', esta última desigualdad requiere que $u''' < 0$ para todas las $x \in I'$.

La familia U_d contiene las funciones de utilidad de aquellos individuos adversos al riesgo que están dispuestos a pagar una prima de riesgo menor cuando sus recursos patrimoniales aumentan.

4.3.4.- FUNCIONES DE UTILIDAD CON TERCERA DERIVADA POSITIVA.

Para la familia U_d de funciones de utilidad la condición de que $u''' > 0$, es una condición necesaria, más no suficiente.

Es posible tener $u''' > 0$ y no tener aversión al riesgo absoluta decreciente. El siguiente ejemplo lo confirma :

Sea $u(x) = x - cx^2 + b\,x^3$, donde b es un valor positivo muy pequeño.

Se nota que u está en U_2 sobre $I = [\ 0,\ 1/4c\ ]$, cuando $0 \leq b < 4c^2/3$, y tiene tercera derivada positiva si $b > 0$.

Pero si $b < 4c^2/6$, entonces $r'(x) > 0$ para los valores pequeños de x. Es decir, encontramos un caso en el que no se da $r'(x) < 0$ y por lo tanto no hay aversión al riesgo absoluta decreciente.

Si se considera una familia de funciones de utilidad que muestre $u' > 0$, $u'' < 0$, y $u''' > 0$, se tiene una familia que es sub-conjunto de U_2, pero que contiene a U_d. Formalmente :

$U_3 = \{\ u \mid u \in U_2,\ u'''$ continua y acotada sobre I, $u''' > 0$ sobre $I'\ \}$

La condición de que $u' > 0$, $u'' < 0$ y $u''' > 0$, indica que la utilidad se incrementa a una tasa decreciente.

4.3.5.- FUNCIONES DE UTILIDAD COMPLETAMENTE MONOTONAS.

Si consideramos funciones de utilidad cuyas primeras k derivadas se alternan en signo, podemos definir una familia de funciones de utilidad de la siguiente forma :

$U_k = \{\ u \mid (-1)^j\, u^{(j+1)}(x) \geq 0,\ j = 0, 1, \ldots, k-1$ y para toda $x \in I\ \}$

Si extendemos k hasta infinito, es decir, consideramos aquellas funciones de utilidad con derivadas de todos los ordenes que muestran alternancia en signo, podemos definir la familia de funciones de utilidad completamente monótonas como U_{oo}, extendiendo la definición de U_k.

4.4.- REGLAS DE DOMINACION ESTOCASTICA.

Las reglas de Dominación Estocástica se definirán de acuerdo a los principios de DE, en donde la preferencia entre dos alternativas de riesgo, sera unánime para todos aquellos individuos cuyas funciones de utilidad están en alguna familia U, (las cuales hemos definido arriba). Dentro de una familia U de funciones de utilidad, cualquier función de utilidad producirá la misma ordenación de alternativas de riesgo para todos los individuos cuyo comportamiento es representado por U.

4.5.- D.E. DE ORDEN K.

Empezamos la discusión de las reglas de Dominación Estocástica planteando desde un principio los conceptos necesarios para Dominacón Estocástica de orden k. Donde k es un entero positivo arbitrario, con la intención de mostrar la generalidad y poderío del concepto de Dominación Estocástica. Posteriormente, se revisan los casos particulares de Dominación Estocástica de grados k = 1,2,3, incluyéndose también el estado en que se encuentra Dominación Estocástica para funciones de utilidad que presentan Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente, hasta donde sabemos.

Para la siguiente discusión se puede consultar Fishburn (1989).

Para cualquier función de distribución F sobre la linea real IR, se considera :

$F^1 = F$, y para cada $k \geqslant 1$, se considera también la expresión

$$F^{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^k(y)dy \quad \text{para todos los } x \in \mathbb{R}.$$

La expresión anterior muestra series de sucesivas funciones acumulativas que dan lugar a relaciones de Dominación Estocástica no estrictas ($\geqslant_k$) y estrictas ($>_k$).

Para cualesquier funciones de distribución F, G sobre IR, y para cada $k \in (1, 2, 3, \ldots\ldots)$,

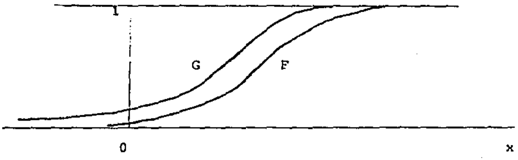
$$F \geqslant_k G \quad \text{si} \quad F^k(x) \leq G^k(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}$$

$$F >_k G \quad \text{si} \quad F \geqslant_k G \text{ y } F \neq G$$

Lo anterior se lee : " **F es preferida o indeferente respecto a G en el k-ésimo grado de Dominación Estocástica si ...**".

Se hace notar que en las anteriores definiciones las relaciones de DE se definen sobre todos los reales IR y no solamente sobre I. La distinción entre IR e I es inmaterial para el primero y segundo grados de DE, sin embargo, si es importante para grados del tercero en adelante cuando I es acotado por arriba. Se sugiere consultar Fishburn (1989).

FIG. 4.3



En la gráfica 4.3 arriba, se nota que la probabilidad de que F produzca un resultado mayor que x, es al menos tan grande como la probabilidad de que G produzca un resultado mayor que x. Cuando $F >_1 G$, G se encuentra estrictamente arriba de F para algunos intervalos de resultados no degenerados.

El análisis es similar para F^k comparado contra G^k para grados de DE mayores o iguales a 2.

La siguiente gráfica muestra el caso para k = 2.

En la figura 4.4a. se observa que DE del primer grado no es suficiente para ordenar las distribuciones de probabilidad F y G. En la figura 4.4b. se nota que bajo DE del segundo orden la alternativa F se prefiere a G.

FIG. 4.4a

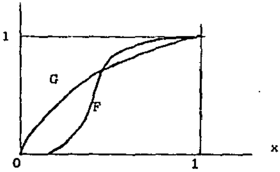
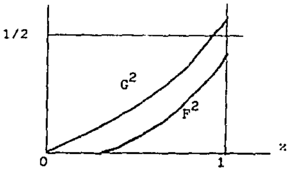


FIG. 4.4b



El siguiente Teorema se encuentra en Fishburn, (1989, p. 7).

Teorema 15. Si se supone que I = [0, 1] o I = [0, oo), y que F y G son funciones de distrubución que corresponden a medidas de probabilidad que asignan probabilidad 1 a I.

Entonces para cada k $\in$ (1, 2, 3, ...),

$$F >_k G \Longleftrightarrow \int_I u(x)dF(x) > \int_I u(x)dG(x),$$

para todas las u $\in U_k$.

Para cada familia U_k se pide que las derivadas sean continuas y acotadas sobre I de modo que las utilidades esperadas sean finitas..

Se hace notar que las derivadas u^k que entran en la definición de U_k, muestran un patrón alternante de signos positivos y negativos.

4.6.- PROPIEDADES.

Apoyándonos en Fishburn y Vickson (1978, p. 64), se pueden observar las siguientes propiedades :

a) Asimetria : Si $F >_k G$, entonces es falso que $G >_k F$

b) Transitividad : Si $F >_k G$ y $G >_k H$, entonces $F >_k H$.

En otras palabras, las relaciones de DE son ordenes parciales sobre conjuntos de alternativas riesgosas.

c) Si una familia de funciones de utilidad es un sub-conjunto de otra familia más grande, la Dominación en la clase más grande necesariamente implica Dominación en la familia más pequeña, pero no inversamente.

$$F >_1 G \Longrightarrow F >_2 G \Longrightarrow F >_3 G \Longrightarrow \ldots.\ F >_k G$$

Esta propiedad permite ordenar conjuntos más grandes de distribuciones de probabilidad (no apoyamos en Whitmore, 1970, p. 458), en el sentido de que si se tienen distribuciones de probabilidad que no puedan ser ordenadas por DE del primer grado, se intentará ordenar dichas distribuciones de probabilidad por DE del segundo grado, sub-secuentemente por DE del tercer grado,o por algún otro grado mayor de DE.

4.7.- PRIMERO, SEGUNDO, TERCER GRADO DE D.E.

En esta sección se comentan sobre los primeros tres grados de DE cuyo desarrollo ha sido motivado, entre otros campos por la Economía y las Finanzas, áreas en las cuales han sido ampliamente aplicadas.

Se pueden encontrar discusiones sobre la aplicación de estos grados de DE en Teoría del Portafolios en Whitmore y Findlay (1978).

4.7.1.- PRIMER GRADO DE D.E.

Se considera á Quirk y Saposnik entre los primeros autores en hacer notar esta relación en la toma de decisiones bajo riesgo en economía (Bawa 1982). En 1962, estos autores publicarón su artículo sobre " **Admisibilidad y Funciones de Utilidad Mensurable** ".

Para ellos el aplicar la Teoría de la utilidad lineal al problema de elección entre distribuciones de probabilidad de ingreso es natural el que los ordenes de preferencia entre distribuciones de probabilidad satisfagan el criterio de que "**más ingreso es preferible a menos ingreso**". Con este criterio fue definida la familia U_1.

4.7.2.- SEGUNDO GRADO DE D.E.

De acuedo a Whitmore (1970, p. 457), Hadar y Russell publicaron en 1969 en " **American Economic Review** ", su artículo sobre " **Reglas para la Ordenación de Prospectos Riesgosos** ", en el cuál intrudujeron el nombre de Dominación Estocástica de Primer Grado y Dominación Estocástica del Segundo Grado para cada una de sus dos reglas.

Hadar y Russell en su mencionado artículo, para Dominación Estocástica de Segundo Grado consideraron el subconjunto de funciones de utilidad de la familia U_1, que contiene aquellas funciones de utilidad que presentan aversión al riesgo global débil (requiere solamente la condición de que u'' sea no positiva).

4.7.3.- TERCER GRADO DE D.E.

Esta fue publicada por Whitmore en 1970, quien se apoyó en la medida de aversión al riesgo absoluta, en el enfoque de Pratt (publicado en 1964, el cual se describe en el segundo capítulo de este trabajo).

Whitmore se mostró interesado en la regla para ordenar prospectos (alternativas) de riesgo para aquellos individuos cuya prima de riesgo se hace más pequeña cuando cuando su riqueza aumenta.

Es decir, si $r = -\dfrac{u''}{u'}$, entonces la condición a buscar es : $r' \leq 0$.

$$r' = (-u''' u' + u''^2) / u'^2$$

En la expresión de r' se nota que si $u' > 0$ y $u'' < 0$, entonces $r' \leq 0$ si $u''' > 0$

Sin embargo, dependiendo de los valores relativos de u' y u'' también se podrá dar que $r' \gtrless 0$.

Whitmore definio U_3 con la condición de que $u''' > 0$.

En el enfoque de Whitmore se nota que si se restringe una familia de funciones de utilidad a solamente aquellas que cumplan $r' \leq 0$ se obtendrá una regla de ordenación más fuerte. Sin embargo, Whitmore aclara (1970, p. 458), que no intenta construir dicha regla. En otras palabras, Whitmore prepara el camino a la regla de Dominación Estocástica para la familia de funciones de utilidad que presentan aversión al riesgo absoluta decreciente, y hasta ahí.

4.8.- D.E. EN LA FAMILIA DE FUNCIONES DE UTILIDAD CON ARAD.

En la sección 4.3.3., se presentó la familia de funciones de utilidad que observan aversión al riesgo absoluta decreciente como una sub-familia de U_2. En el comentario sobre el trabajo de Whitmore (1970), sobre U_3, se nota que U_d es un sub-conjunto propio de U_3, lo cual lleva a una regla más fuerte de Dominación Estocástica.

La regla de DE sobre U_d es más fuerte que el tercer grado de DE en el sentido de que es capaz de ordenar más pares de prospectos aleatorios.

Fishburn y Vickson (1978, p. 83), presentan la siguiente definición :

Definición 1. Para $F \neq G$, se escribe :

$$F >_d G \text{ si y sólo si } E(u,F) > E(u,G) \text{ para todas las } u \in U_d$$

Nos referimos a $>_d$ como Dominación Estocástica para ARAD.

Los mencionados autores hacen la distinción de que a causa de la definición de U_d bajo la propiedad de aversión al riesgo no creciente, en oposición a aversión al riesgo absoluta decreciente, es posible tener casos en los que $E(u,F) = E(u,G)$ para alguna u que este en U_d, cuando $F >_d G$, pero que en este caso siempre existira otra $u \in U_d$ para la cual $E(u,F) < E(u,G)$.

En el comentario arriba transcrito sobre el trabajo de Whitmore (1970), se deja ver que hay una posible relación entre U_3 y U_d.

Fishburn y Vickson (1978, p. 83), se plantean la pregunta de ¿ Cual es la relación, si hay alguna, entre DE del tercer grado y DE bajo ARAD ?. Revisan lo anterior contemplando dos casos. El primero cuando los valores esperados son iguales y el segundo cuando estos son distintos.

Ellos encuentran que DE del tercer grado y DE bajo ARAD son equivalantes cuando los valores esperados son iguales. En el otro caso DE bajo ARAD es más fuerte.

En el caso de valores esperados iguales, enuncian el siguiente Teorema :

Teorema 16. Si $\mu_F = \mu_G$, entonces $F >_d G$ si y sólo si $F >_3 G$.

La prueba de este teorema se da en Fishburn y Vickson (1978, pp. 83-84).

Si los valores esperados son distintos DE bajo ARAD es más fuerte.

Fishburn y Vickson se hacen la pregunta de ¿ Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para DE bajo ARAD cuando los valores esperados son diferentes ?.

Vickson (1975, p. 1440), muestra que la familia de funciones de utilidad U_d se puede representar partiendo de la medida de aversión al riesgo absoluta de Arrow-Pratt :

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \text{ en}$$

donde $u \in U_d$ si

$$u'(x) = u'(a) \exp\left[-\int_a^x r(y)\,dy \right], \text{ para toda } x.$$

Sin embargo, reportan Fishburn y Vickson (1978, Apéndice 2a, p. 106), que no pueden dar una condición general simple para la regla de DE bajo ARAD. Estos autores escriben lo anterior debido a que : " **La Teoría de representación integral apropiada ..... parece estar sin descubrir** ".

La solución parcial que dan se apoya en un algoritmo de programación dinámica propuesto por Vickson en 1975. Se pueden encontrar detalles de este algoritmo en los artículos de Vickson publicados en 1975 y en 1977.

4.9.- D.E. EN LA FAMILIA DE FUNCIONES DE UTILIDAD COMPLETAMENTE MONOTONAS.

Este enfoque es una generalización de DE de grado k, extendiendo k hasta infinito.

En este tópico se considera la familia de funciones de utilidad U_{oo}, sobre (0, oo) cuyas derivadas de todos los órdenes alternan en signo. En matemáticas, aquellas funciones que observan este comportamiento, se llaman " **completamente monótonas** ".

Whitmore (1989), comenta que aparentemente esta generalización no se basa en algún requerimiento de tipo económico, aunque se puede mostrar que todas las funciones de utilidad completamente monótonas presentan aversión al riesgo absoluta no creciente.

Aunado a lo anterior, los resultados adicionales que se obtienen son bastante útiles. Esto se ve evidente en el trabajo de Brockett y Golden (1987).

Whitmore (1989, p. 78) hace notar que U_{oo} es un subconjunto de U_3.

4.9.1.- CARACTERIZACION.

Brockett y Golden (1987), observan que la forma estructural de las funciones de utilidad en U_{oo}, se puede obtener directamente de la Teoría de la Transformada de Laplace, apoyándose en el lema de Bernstein.

El lema de Bernstein se enuncia a continuación.

Lema de Bernstein : Una condición necesaria y suficiente para que una función Ψ definida sobre (0, oo) sea la Transformada de Laplace de una medida positiva μ es que su primera derivada sea negativa con subsecuentes derivadas alternando en signo. Además, dada una Transformada de Laplace Ψ existe una única medida positiva μ la cual corresponde a Ψ.

Entonces, por el Lema de Bernstein, la familia U_{oo} consiste de todas aquellas funciones de utilidad cuyas utilidades marginales u' son Transformadas de Laplace. En simbolos :

$$u'(x) = \int_0^{oo} \exp(-rx)\mu(dr), \quad x > 0$$

$$\text{donde } r = - \frac{u''}{u'}$$

es la medida de Aversión al Riesgo Absoluta de Arrow-Pratt.

El siguiente teorema permite obtener una primera caracterización de las funciones de utilidad de U_{oo}.

Teorema 17. Para cualquier u en U_{oo}, se selecciona cualquier x_0, tal que $-oo < u(x_0) < oo$.

Entonces, existe una medida μ sobre (0, oo) tal que :

$$u(x) = u(x_0) + \int \{ [1 - \exp (-r(x - x_0))] / r \}\mu(dr)$$

donde $x \geqslant 0$.

Es decir, u es una mezcla de funciones de utilidad con aversión al riesgo absoluta constante, con parámetro r. Es decir :

$$u_r(x) = \{ 1 - \exp (-r(x - x_0)) \} / r$$

la cual esta en la clase de equivalencia de las funciones de utilidad exponenciales con aversión al riesgo absoluta constante de parámetro r.

La prueba de este teorema y su corolario (mencionado a continuación) se encuentra en Brocket y Golden (1987, p. 958).

Whitmore (1989, p. 78), llega al resultado del anterior teorema apoyándose en la propiedad de que U_k y U_{oo} son conos convexos en sus respectivos espacios de funciones. Es decir, en el caso de U_{oo} para cualquier u_1, $u_2 \in U_{oo}$ y c_1, $c_2 \geqslant 0$, $c_1u_1 + c_2u_2 \in U_{oo}$.

Brumelle y Vickson (1975) reportan que se puede mostrar que las familias de funciones de utilidad U_1, U_2, U_3 y U_d son conos convexos en sus respectivos espacios de funciones.

Corolario : Si $u(0) = 0$, para una función de utilidad $u \in U_{oo}$, entonces la representacion simplificada siguiente sucede :

$$u(x) = \int_{0}^{oo} \{ [1 - \exp(- rx)] / r \} \mu (dr).$$

Ademas, si $\int_{0^+}^{oo} \{ 1/r \} \mu (dr) < oo$, cuando la medida μ es discreta y finita o tiene soporte contenido en un intervalo $[a,b]$, $0 < a < b < oo$, entonces la representación de la forma :

$$u(x) = a0 + a1x - \int_{0^+}^{oo} e^{-rx} \mu (dr) / r$$, se puede usar

para representar la clase de equivalencia de las funciones de utilidad en U_{oo}.

La siguiente tabla muestra algunas familias comunes de funciones de utilidad (Brockett y Golden 1987, p. 958), que se encuentran en U_{oo} con adecuadas expresiones de medidas.

ALGUNAS FUNCIONES DE UTILIDAD EN U_{oo}

FUNCIONES DE UTILIDAD	PUNTO DE APOYO x_0	MEDIDA $\mu(dr)$
$u(x) = \ln(a + bx)$	$(1-a)/b$	$e^{-r/b}\,dr$
$u(x) = -(a + bx)^{-c}$, $c > 0$	$(1-a)/b$	$r^{c}\, e^{-r/b}\,dr$
$u(x) = (a + bx)^{d}$, $0 < d < 1$	$(1-a)/b$	$r^{-d}\, e^{-r/b}\,dr$
$u(x) = [1 - \exp(-rx)]/r$	0	unidad puntual de masa en r

Whitmore (1989, p. 81), llega esencialmente a las mismas familias comunes de funciones de utilidad.

Brockett y Golden (1987, p. 958), dan el siguiente resultado.

Teorema 18. Sea x_0 un valor arbitrario para el cual $U(x_0) \neq 0$. Una condición necesaria y suficiente para que $u \in U_{oo}$ es que $c(x) = \exp\{ - U(x + x_0) + U(x_0) \}$ sea la Transformada de Laplace de una distribución de probabilidad infinitamente divisible.

Se hace notar que la Transformada de Laplace de una variable aleatoria X, es la función generadora de momentos de -X, y el logaritmo de la función generadora de momentos para una distribución de probabilidad es llamado la función generadora acumulativa de la distribución.

Con la anterior consideracion, el Teorema 18 se puede describir como sigue : $u \in U_{oo}$ si y sólo si $U(x + x_0) - U(x_0)$ es la función generadora acumulativa de una distribución de probabilidad infitamente divisible.

4.9.2.- REGLA DE D.E.

Esta es dada por Brockett y Golden (1987, p. 959), en el siguiente teorema.

Teorema 19. Sean X y Y dos variables aleatorias no negativas valuadas por un decisor con una función de utilidad $u \in U_{oo}$, se supone que $E[u(X)]$ y $E[u(Y)]$ existen , aunque no necesitan ser finitas.

Para una variable aleatoria sea $\Psi_Z(t) = E[e^{-tZ}]$, la Transformada de Laplace de Z.

1) Si $\Psi_X(t) \geqslant \Psi_Y(t)$ para toda t, y $u \in U_{oo}$ es tal que $E[u(X)]$ y $E[u(Y)]$ existen, entonces $E[u(Y)] \geqslant E[u(X)]$, y por lo tanto, Y es preferida a X.

2) Si Y es preferida a X por decisores con funciones de utilidad $u \in U_{oo}$, entonces, $\Psi_X(t) \geqslant \Psi_Y(t)$.

4.10.- IMPLICACIONES.

En esta sección hacemos mención a algunas implicaciones de DE para la ordenación de prospectos de riesgo, el tratamiento de aversión absolutamente decreciente, elecciones grupales, y la aproximación de funciones de utilidad.

4.10.1.- SIMPLIFICACION EN LA ORDENACION DE PROSPECTOS DE RIESGO.

El grado de Dominación Estocástica para la familia de funciones de utilidad completamente monótonas, es un grado más fuerte, puesto que U_{oo} es un sub-conjunto estricto de U_d el cual a su vez es un sub-conjunto estricto de U_3 (Whitmore, 1989, p. 78, 84), provocando con esto que se pueda ordenar un número más grande de distribuciones de probabilidad.

Por otro lado, si observamos el Teorema 19, la ordenación de prospectos de riesgo (alternativas) se simplifica dado que la comparación entre dichos prospectos se reduce a la comparación de sus respectivas funciones generadoras de momentos, las cuales en los casos ampliamente conocidos se encuentran tabuladas en textos de probabilidad.

4.10.2.- ALTERNATIVA AL PROBLEMA DE D.E. PARA ARAD.

Whitmore (1989, p. 78), menciona que se puede mostrar que todas las funciones de utilidad en U_{oo} muestran aversión al riesgo absoluta no creciente.

Lo anterior, en adición a que U_{oo} es sub-conjunto estricto de U_d nos lleva a inferir que en aquellos casos en los que la aversión al riesgo es absoluta decreciente, los resultados para las funciones de utilidad completamente monótonas se pueden usar como alternativa a la solución del algoritmo de programación dinámica de Vickson (1975, 1977), si el problema lo permite.

4.10.3.- APOYO A LAS ELECCIONES DE GRUPO.

Brockett y Golden (1987, p. 960), observan que en el caso funciones de utilidad más complicadas las elecciones de decisores con funciones de utilidad en U_{oo} se pueden determinar observando las elecciones de decisores que muestren Aversión al Riesgo Absoluta Constante. Si todos los decisores con aversión al riesgo absoluta constante, estan de acuerdo en que Y se prefiere a X, entonces todos los decisores con función de utilidad $u \in U_{oo}$ estarán de acuerdo en la misma preferencia.

Si consideramos lo anterior, y si consideramos el Teorema de Pratt para combinaciones lineales de funciones de utilidad (Capítulo 2 de este trabajo), esto nos lleva a decir que , en el caso de que los parámetros de aversión al riesgo r de los decisores con aversión al riesgo absoluta constante, sean todos de valor distinto, y si se está interesado en encontrar una función de utilidad representante para el grupo, dicha función de utilidad representante observará comportamiento al riesgo absoluta decreciente.

Este resultado parece ser soportado por la investigación empirica considerando que Rimm (1968) reporta que los individuos como grupo están dispuestos a tomar mayor riesgo del que estarian dispuestos a tomar individualmente.

En la dirección de decisiones grupales, se pueden consultar las siguientes referencias : Wilson (1968), Raiffa (1968), Mirkin (1979).

4.10.4.- APROXIMACION DE FUNCIONES DE UTILIDAD EN U_{oo}.

Brockett y Golden (1987, p. 963), muestran que si se tiene un conjunto de puntos (x_i , $u(x_i)$) con i = 0 ,,,,,$2n_0$, donde los x_i, se encuentran a distancias equidistantes, el problema de aproximar una función de utilidad u en U_{oo}, involucra encontrar los $2n_0$ + 1 parámetros en una expresión de la forma :

$$u(x) = a_0 - \sum_{i=1}^{n0} a_i e^{-b_i x}$$

Una estratégia para encontrar los parámetros a_i y b_i, se encuentra en el Apéndice del articulo de los mencionados autores. Otra puede ser el enfoque de ajuste de curvas con funciones exponenciales de Froberg (1985, Capítulo 15.5).

Para la obtención de los valores de utilidad $u(x_i)$ se puede consultar Keeney y Raiffa (1976, pp. 189-212), Farquhar (1984) y Schlaifer (1969), (1971).

CAPITULO V

APLICACIONES

5.1.- TEORIA DEL RIESGO.

En esta sección revisamos algunos conceptos de teoría de la utilidad lineal y Dominación Estocástica en algunas implicaciones para la determinación de un principio de prima y hacia la ordenación de riesgos.

5.1.1.- INTRODUCCION.

El campo de seguros dio origen a la profesión actuarial y durante el trancurso de los años ha motivado su desarrollo a fin de contar con mejores elementos en la cuantificación de riesgos para proteger mejor los intereses de la sociedad.

Así también los conceptos actuariales originados dentro del campo de seguros han influido el pensamiento económico en el desarrollo de modelos que expliquen el comportamiento hacia el riesgo. Los ejemplos son abundantes , basta con mencionar aquí a Arrow (1971).

En este trabajo, en particular, estamos interesados en comentar sobre algunas implicaciones de los resultados de la teoría de la utilidad lineal y del enfoque de Dominación Estocástica hacia la ordenación de riesgos : La determinación de primas que tomen adecuadamente el riesgo, tomando en cuenta las **preferencias del asegurador y del asegurado**.

Antes de continuar, deseamos clarificar algunos conceptos importantes :

Asegurador : La institución establecida para ayudar a reducir las consecuencias financieras de los daños ó la destrucción de la propiedad. Le llamaremos compañia aseguradora.

Poliza : Contrato emitido por el asegurador que promete al dueño de una propiedad el pago de una cantidad definida igual o menor a la pérdida financiera en caso de que dicha propiedad fuese dañada o destruida durante la vigencia del mencionado contrato.

Asegurado : La entidad individual que quiere proteger su propiedad contra daños contingentes, que ponen en peligro su situación financiera.

Reclamación : El pago contingente relacionado a la cantidad de la pérdida.

Prima : La cantidad pagada por el asegurado para gozar de los derechos prometidos bajo una póliza para asegurar su propiedad.

5.1.2.- LA FUNCION DE UTILIDAD DEL ASEGURADO.

Las preferencias del asegurado se pueden tomar en cuenta considerando que tiene una función de utilidad de riqueza u(w), en donde w es su riqueza, la cual se mide en términos monetarios.

El principio de decisión del asegurado es el de maximizar utilidad esperada. Se considera la siguiente información :

El asegurado enfrenta una posible pérdida debido a eventos aleatorios que pueden dañar su propiedad.

Se supone que la distribución de las pérdidas aleatorias X es conocida.

Se supone además que la función de utilidad u del asegurado es una función de utilidad monótona creciente (prefiere más dinero a menos dinero), y que incrementos adicionales en su riqueza resultan en incrementos menores de utilidad. Es decir, que dicho asegurado observa utilidad marginal decreciente. Como sabemos (capitulo II de este trabajo), estas consideraciones llevan a que $u' > 0$, $u'' < 0$.

En otras palabras, se supone que el asegurado muestra aversión al riesgo.

5.1.3.- LA FUNCION DE UTILIDAD DEL ASEGURADOR.

Se supone que el asegurador es adverso al riesgo, por lo que sigue una politica conservadora que le permita mantener sólidez financiera a fin de hacer frente a sus compromisos con sus asegurados. En esta dirección, se hace necesario contar con elementos que permitan tomar en consideración esta actitud conservadora y determinar adecuadamente primas que reflejen dicha actitud hacia el riesgo.

En la práctica es dificil tener toda la información para obtener la función de utilidad de un decisor, por lo que se hace necesario contar con un enfoque que permita obtener resultados con una base de información parcial sobre la función de utilidad de dicho decisor. En este sentido, el enfoque de Dominación Estocástica puede ser aplicado si se sabe que el decisor muestra alguna caracteristica de aversión al riesgo y eligiendo su función de utilidad de una familia que cumpla con dicha propiedad. Los resultados obtenidos con tal función de utilidad serán válidos para todos aquellos decisores que compartan la misma actitud hacia el riesgo.

5.1.4.- DETERMINACION DE PRIMA.

Antes de empezar la discusión distinguiremos las tres componentes que intervienen en la determinación del monto de una prima de seguro.

1.- Cargo por las reclamaciones monetarias esperadas.

2.- Cargo por gastos.

3.- Cargo por Riesgo.

CRITERIO DE VALOR ESPERADO.

Si la función de utilidad del asegurador es aproximada por una linea recta, entonces el monto de la prima corresponde al valor esperado de la distribución de las pérdidas $E[X] = m$. La prima determinada por el valor esperado de las pérdidas se llama prima neta o prima pura. Para que el asegurador cubra gastos, impuestos, rentabilidad, y alguna cantidad contra experiencia adversa, puede cargar algún porcentaje de la prima pura, para llegar al monto de prima que negociara con el asegurado. Por su parte, el individuo que busca asegurarse comprará seguro sólo si paga una cantidad $G \leq E[X]$.

El criterio del valor esperado tiene las siguientes desventajas :

1.- Este criterio no explica porqué un individuo compra seguro pagando una prima mayor al valor esperado del riesgo en cuestión sabiendo que debería pagar una cantidad G menor a dicho valor esperado.

2.- El criterio de valor esperado simplifica el cálculo de la prima si por el impacto del riesgo se ajusta la prima con algún porcentaje determinado de alguna forma. Sin embargo en un cálculo de esta naturaleza no se estará midiendo el riesgo involucrado para obtener una prima adecuada al riesgo en cuestión.

CRITERIO DE MAXIMIZAR UTILIDAD ESPERADA.

La decisión del individuo para comprar seguro.

El individuo decidirá entre comprar una póliza pagando una prima G - resultando en riqueza w - G y utilidad u(w - G) - dejando que el asegurador asuma los gastos en caso de siniestro, contra no comprar seguro - resultando en riqueza w - X y utilidad u(w - G) - asimilando por su cuenta un importe X en caso de siniestro (X es variable aleatoria).

El asegurado compra seguro sólo si $u(w-G) \geqslant E[u(w-X)]$, es decir sólo si recibe una utilidad esperada mayor.

En tanto G aumenta $u(w-G)$ decrece, por lo que la pregunta es ¿ cuál es la cantidad más grande G que el individuo pagará por seguro ?

La respuesta es la solución G de la ecuación $u(u-G) = E[u(w-X)]$.

La decisión del asegurador de vender seguro.

Sea w la riqueza presente del asegurador y sea $u(w)$ su utilidad correspondiente.

Si H es la prima que el asegurador recibe para asumir la pérdida X su riqueza cambia de w a w + H - X.

El asegurador emite una póliza sólo si $E[u(w+H-X)] \geqslant u(w)$, es decir emite una póliza sólo si incrementa su utilidad esperada.

Cuando H decrece también lo hace $E[u(w+H-X)]$, por lo tanto, la pregunta es ¿ cuál es la prima H más pequeña (que representa negocio para el asegurador) de modo que la utilidad esperada del asegurador no decresca (cayendo abajo de $u(w)$), al emitir cobertura por el riesgo X.

H es la solución de la ecuación $E[u(w+H-X)] = u(w)$.

Implicaciones de aversión al riesgo en decisiones de seguros.

De la desigualdad de Jensen para decisores adversos al riesgo

$$E[u(Y)] \leq u(E[Y]) \text{ , se}$$

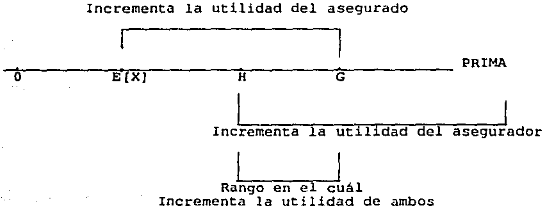
sigue que la máxima G que un individuo está dispuesto a pagar para que un asegurador asuma el impacto financiero de una pérdida X es mayor que el valor esperado E[X]. Por otra parte, la mínima prima H que el asegurador aceptará para asumir la pérdida X es mayor que la pérdida esperada E[X].

De esta forma se ve que desaparece la contradicción existente bajo el enfoque del valor esperado.

Con el enfoque de maximizar utilidad esperada, se nota que para ambos, el asegurado y el asegurador, el seguro puede mejorarles su utilidad si H < G.

FIG. 5.1

Linea de Prima.



Función de utilidad corporativa.

De la discusión anterior vemos que el enfoque de la teoría de la utilidad lineal permite conciliar las preferencias del asegurado y del asegurador, así también nos permite considerar el riesgo involucrado.

Para el asegurador es conveniente contar con una función de utilidad corporativa que refleje las preferencias hacia el riesgo de su institución.

Considerando que es difícil determinar una función de utilidad corporativa, dicha dificultad se simplifica si hacemos algunas hipótesis sobre la actitud hacia el riesgo por parte del asegurador y utilizamos el enfoque de Dominación Estocástica para trabajar información parcial relativa a dicha función de utilidad corporativa

Si reconocemos que los directivos están de acuerdo únanimemente en el comportamiento hacia el riesgo de la compañía, y que observan una política conservadora hacia el riesgo, entonces se puede decir que la función de utilidad del asegurador debera reflejar aversión al riesgo.

Aplicando los resultados obtenidos en el capítulo IV de este trabajo, se puede dar un tratamiento adecuado a los requerimientos de la compañía, si se supone que su función de utilidad corporativa en un elemento de U_{oo}, con la ventaja de que la determinación de la prima se podrá realizar considerando la función generadora de momentos de los riesgos considerados.

En esta dirección, la función de utilidad corporativa del asegurador (Freidfeldner, 1975) puede ser de la forma :

$$u(x) = (1 - \exp(-rx))/ r,$$

En donde lo que queda por determinar es un valor adecuado del coeficiente de aversión al riesgo r.

Si la función de utilidad corporativa es un elemento de la familia exponencial, se contará también con la propiedad de que se mantiene el comportamiento conservador del asegurador, dado que bajo una función de utilidad exponencial el comportamiento hacia el riesgo no cambia con incrementos de riqueza (capítulo 2 de este trabajo).

Siendo la función de utilidad una función exponencial, el asegurador no necesita saber exactamente la estructura del portafolios de polizas ó de la posición financiera de la compañía.

De acuerdo a Freifelder (1975) es difícil tener en la práctica la anterior informacion.

Freifelder (1975) hace notar que la elección de una función de utilidad exponencial es adecuada porque **además** cumple con los siguientes axiomas :

1.- Las primas deberían ser calculadas sobre contratos individuales y deberían ser basadas sobre la probabilidad de su distribución de pérdidas.

2.- Las primas deberían contener un cargo por riesgo y las primas resultantes deberían reflejar las preferencias del asegurador.

3.- a) Las primas no deberían discriminar entre los tenedores de pólizas dentro de la misma clase o los tenedores de pólizas de diferentes clases.

b) Si las pérdidas sobre dos contratos son variables aleatorias independientes, los cargos de prima no deberían depender del orden en el que las pólizas entraron al portafolio.

De esta forma, los requerimientos planteados en los anteriores axiomas son satisfechos por una función de utilidad que pertenece a U_{oo}.

REGLA PARA EL CALCULO DE PRIMAS

Esta regla es de la forma :

$$u(x) = E[\, u(x + P - z)\,] = \int u(x + P - z)\,dF(z)$$

En donde x es la riqueza actual del asegurador, la cual se puede ver afectada por la aceptación de un nueva póliza (un nuevo riesgo).

F(z) es la distribución de probabilidad de las pérdidas totales (variable aleatoria z).

En este modelo para la determinación de primas, la utilidad de la situación financiera del asegurador es igual a la utilidad después de aceptar un nuevo riesgo en su portafolios.

Bajo la anterior regla para la determinación de primas, el cargo por prima se determina por la siguiente expresion :

$$P = (1/r) \ln \int \exp(rz)\,dF(z)$$

La cuál se puede escribir como :

$P = (1/r) \ln M_z(r)$, en donde

$$\int \exp(tz)\ dF(z) = M_z(r)$$

En la expresión del cálculo de la prima se observa que dicha prima depende sobre el valor del coeficiente de aversión al riesgo r y de la función generadora de momentos de la distribución de las pérdidas. En los casos de distribuciones ampliamente conocidas, estas se encuentran tabuladas en textos de probabilidad.

El parámetro r de aversión al riesgo se puede determinar considerando la probabilidad de ruina y el capital inicial, es decir :

$$r = 1/q \log (1/e)$$

En donde q es el capital inicial, y se puede considerar como margen de solvencia necesario ó como aquella parte de los recursos totales que el asegurador está dispuesto a gastar en situaciones adversas.

e = probabilidad de ruina.

Otra propiedad de una función de utilidad corporativa exponencial se ve en el siguiente teorema.

Teorema 20. Si los cargos por primas se basan sobre una función de utilidad exponencial, el total de cargos por primas requeridos para una clase de contratos independientes es igual a la suma de las primas requeridas para cada uno de los contratos individuales.

Probabilidad de Ruina.

El concepto de probabilidad de ruina se ve claro considerando la función de excedente financiero del asegurador. Esta función considera el exceso de un fondo inicial más primas cobradas, sobre las reclamaciones pagadas.

Esta función se define por :

$$U(t) = w + ct - S(t), \qquad t \geq 0$$

donde :

t = tiempo
$U(t)$ = excedente financiero del asegurador al tiempo t
w = fondo inicial
c = tasa constante continúa de arribo de primas
$S(t)$ = total de reclamaciones al tiempo t

Esta función modela las variaciones en la cantidad de excedente financiero sobre un periodo extendido de tiempo.

En este modelo se ignoran tasa de interés y otros factores que afectan al excedente financiero.

Es importante notar que la definición de excedente financiero es una adecuada definición matemática más no contable.

Si U(t) es positiva se dice que el negocio está con números negros. Si U(t) es negativa, entonces se dice que el negocio está en números rojos.

Se nota que la función de excedente financiero se incrementa linealmente (con pendiente c), excepto en aquel tiempo (t) cuando ocurre una reclamación.

El valor de función de excedente financiero podría ser negativo en ciertos tiempos. Cuando esto ocurre por primera vez se dice que ha ocurrido ruina. Cabe hacerse notar que este término no es equivalente a insolvencia. La ocurrencia del evento de ruina puede no ser catastrófico para el asegurador si es posible restablecer el excedente financiero a una cantidad positiva.

Es importante mencionar que el cuantificar la probabilidad de ruina es útil para el asegurador dado que le permite tener una medida del riesgo financiero en su organización.

La expresión general para la probabilidad de ruina es :

$$e(w) = \frac{e^{-Rw}}{E\,[\,e^{-R\,U(t)} \mid t < \infty\,]}$$

donde : U(t) = excedente financiero al tiempo de ruina, con capital inicial w, dado que ocurra ruina. R es coeficiente de ajuste.

Dado que no es posible dar una evaluación explicita para el denominador en expresión anterior, Bowers et al (1986, p. 353), Brockett (1984), Brockett (1985), dan expresiones para encontrar cotas para la probabilidad de ruina.

5.1.5.- CONSIDERACIONES SOBRE ORDENACION DE RIESGOS.

En esta sección se revisan algunos criterios para la ordenación de riesgos propuestos por Goovaerts et al (1990) y su relación con las reglas de ordenación de Dominación Estocástica.

Goovaerts (1990, p. 9), considera que diferentes decisores tendrán preferencias opuestas para varios pares de riesgos, pero que si se consideran aquellas preferencias compartidas por todos los decisores involucrados, las preferencias combinadas constituirán un orden parcial de todos los riesgos.

Se supone que un decisor compara dos riesgos sobre la hipótesis de que consigue la misma prima para ambos riesgos.

Los riesgos se definen como variables aleatorias y sobre el conjunto de riesgos se define un orden parcial, digamos $<_p$ el cual es una relacion binaria con las siguientes propiedades :

Transitividad : Si $X <_p Y$ y $Y <_p Z$, entonces $X <_p Z$

Reflexividad : $X <_p X$

Antisimetria : Si $X <_p Y$ y $Y <_p X$, entonces X y Y son idénticos.

Se hace notar que para antisimetría, no es necesario que sean la misma variable aleatoria. Es sufiente en muchos casos que sus distribuciones estén de acuerdo. Algunos órdenes parciales no distinguen entre riesgos que tiene sus primeros momentos iguales.

En un orden parcial puede haber pares de riesgos X y Y que no son comparables.

Un " **orden total** ", tiene la propiedad de que cada par de riesgos es comparable:

Sucede que $X <_p Y$, o que $Y <_p X$, o ambos.

Orden inducido por todos los adversos al riesgo.

Como la maneja Goovaerts et al (1990) , este enfoque corresponde a Dominación Estocástica de segundo grado y se puede usar si se conoce la distribución de las pérdidas.

Definición : El riesgo X es preferido sobre el riesgo Y por todos los decisores adversos al riesgo ($X <_{ar} Y$) si :

$E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$, para cualquier función de utilidad cóncava no decreciente

Ordenacion Stop-loss.

Este orden corresponde a Dominación Estocástica del primer grado para aquellos decisores con funciones de utilidad en U_1. Es un orden de Dominación Estocástica muy débil, sin embargo simple de aplicar, ya que ordena riesgos sólo en terminos del valor esperado de las distribuciones de las pérdidas. Es útil cuando no se tiene mayor información sobre la estructura de momentos de las distribuciones de las pérdidas.

Si X, Y son dos riesgos, entonces X precede a Y en el orden stop-loss si sus primas stop-loss son uniformemente ordenadas.

$$E[((X - d)_+)] \leq E[((Y - d)_+)]$$

para todos las retenciones $d \geq 0$.

Orden de alto grado Stop-loss (grado n).

Este enfoque para la ordenación de riesgos permite aplicar Dominación Estocástica para aquellos decisores con funciones de utilidad en U_{oo}, sobre la base de información limitada con la estructura de momentos de la distribución de las pérdidas.

Es decir, cuando no se conoce la forma de la función generadora de momentos de la distribución de las pérdidas.

Conforme el decisor obtenga mayor información sobre la estructura de momentos, podrá ordenar más pares de riesgos.

Definicion : El riesgo X precede al riesgo Y en el orden stop-loss de grado n , escrito como :

$X <_{(n)} Y$ si $E[X^k] \leq E[Y^k]$, $k = 1, 2, 3, 4 \ldots n-1$

y para cada retencion $d \geq 0$, se tiene

$$E[((X - d)_+)^n] \leq E[((Y - d)_+)^n]$$

El orden de alto grado stop-loss ordena riesgos considerando que se conocen los primeros n - 1 momentos de las distribuciones de las pérdidas alrededor de cada retención.

Bajo el enfoque de orden alto grado stop-loss (grado n), se pueden ordenar riesgos con información parcial sobre la estructura de momentos de la distribución de las pérdidas.

Orden para funciones de utilidad con n-1 derivadas que alternan en signo.

Este orden corresponde al orden de Dominación Estocástica de grado k, y corresponde a un orden más débil respecto al orden inducido por Dominación Estocástica para individuos con funciones de utilidad U_{oo}.

Teorema 21. (para funciones de utilidad n veces diferenciables)

Se tiene $X <_{(n)} Y$ si y sólo si $E[\ u(\ -X\ )\ ] \geqslant E[\ u(\ -Y\ )\ ]$ para todas las funciones de utilidad u(x) que tienen n-1 derivadas continuas de signos alternantes :

$(-1)^{k-1}\ u^{k}\ (x) \gtreqless 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$, y con

$(-1)^{n-1}\ u^{n}\ (x) \gtreqless 0$, y no crecientes en x.

Orden Exponencial.

Este enfoque para la ordenación de riesgos corresponde al orden de Dominación Estocástica para funciones de utilidad en U_{oo}, dado que supone funciones de utilidad de la forma :

$u(x) = -\ e^{-ax}$ son elementos de U_{oo}.

Se hace notar que este enfoque puede ordenar más pares de riesgos que el orden de alto grado stop-loss (grado n), si se conoce la función generadora de momentos de las distribuciónes de las pérdidas.

Definición : Orden exponencial.

El riesgo X precede al riesgo Y en orden exponencial, escrito como $X <_e Y$, si para cada coeficiente de aversión al riesgo a, se tiene que $E[\exp(aX)] \leq E[\exp(aY)]$

De esta forma, $X <_e Y$ si y sólo si X tiene una función generadora de momentos más pequeña para todos los argumentos positivos.

Se hace notar que bajo orden exponencial el efecto del nivel de retención d es irrelevante para la ordenación de riesgos.

5.2.- OTRAS APLICACIONES.

El enfoque de Dominación Estocástica ha sido aplicado en diversas áreas de Economía, Finanzas, Seguros, entre otras. Bawa (1982) ofrece una amplia bibliografía ha este respecto.

Se pueden consultar las siguientes fuentes para aplicaciones en :

Itagaki	(1989)	Comercio Internacional.
Kroll y Levy	(1989)	Inversiones, Estructura de Capital, y Costo de Capital.
Pratt	(1989)	Tasas de Interés y Demanda de Bonos.
Withmore y Findlay	(1978)	Teoría del Portafolios.

CONCLUSIONES

Dada la naturaleza de nuestra tesis consideramos apropiado mostrar nuestras conclusiones capitulo por capitulo.

Capitulo I

a) El pensamiento de Bernoulli sigue teniendo influencia hasta nuestros dias.

b) La versión de los axiomas de Von Neumann y Morgenstern en la interpretación de Jensen (1967) es adecuada para soportar los resultados de la Teoría de la Utilidad Lineal y el enfoque de Dominación Estocástica porque establecen claramente que los aspectos a ordenar son distribuciones de probabilidad o medidas.

Capitulo II

a) El enfoque cualitativo y con apoyo de teoría económica de Arrow y el enfoque cuantitativo y con apoyo de conceptos actuariales de Pratt llegan al mismo punto para producir uno de los resultados más contundentes para medir el comportamiento hacia el riesgo de decisores. Las medidas de aversión al riesgo propuestas independientemente por ellos han permitido el desarrollo de distintos campos de conocimiento, en particular de la medida de aversión absoluta al riesgo que ya muestra una enorme influencia en la construcción del edificio de Dominación Estocástica.

En la tarea de entender a Pratt ha sido un apoyo invaluable el texto de Keeney y Raiffa (1976). Tiene una utilidad pedagógica y operativa.

Capitulo III

a) El concepto de familias de funciones de utilidad es el concepto clave para poder manejar información parcial en relación a las preferencias y la actitud hacia el riesgo de decisores. En particular se nota que la definición de una apropiada ecuación diferencial que recoja el comportamiento de decisores permite generar una familia de funciones de utilidad adecuada para dichos decisores.

Capitulo IV

a) En nuestra revisión de los fundamentos de Dominación Estocástica y en particular con los resultados del grado de Dominación Estocástica para funciones de utilidad completamente monótonas encontramos que la comparación de prospectos de riesgo se puede dar por la comparación de sus respectivas funciones generadoras de momentos, **si estas son conocidas**. Esto es una enorme simplificación en cálculo con la ventaja de que se tiene un orden más fuerte de Dominación Estocástica.

Considerando que U_{oo} es un subconjunto incluido en todas las familias de funciones de utilidad discutidas en este trabajo, si un decisor restringe su función de utilidad a ser un elemento de U_{oo}, simplificará el proceso para la ordenación de los cursos de acción que tenga enfrente.

b) Considerando también que todas las funciones de utilidad en U_{oo} muestran aversión al riesgo no decreciente, los resultados en U_{oo} se pueden utilizar como alternativa al algoritmo de Programación dinámica de Vickson para funciones de utilidad con ARAD cuando el problema lo permita.

c) Se nota que las funciones de utilidad en U_{oo} son mezclas de funciones de utilidad exponenciales. Si una función de utilidad en U_{oo} se aproxima por una combinación lineal de funciones de utilidad exponenciales, por el Teorema de Pratt (capítulo II), para combinaciones lineales de funciones de utilidad exponenciales, en donde si todas las funciones de utilidad exponenciales individuales tienen coefiente de aversión al riesgo distinto, la aproximación observa aversión al riesgo absoluta decreciente. En particular si dicha mezcla de funciones de utilidad se utiliza como la función de utilidad representante para decisiones unánimes grupales, el grupo podrá observar comportamiento de aversión al riesgo absoluta decreciente.

Capitulo V

a) Si para la determinación de primas, la función de utilidad corporativa es una función de utilidad exponencial que es elemento de U_{oo}, se simplifica el cálculo de dicha prima, al cálculo de la función generadora de momentos para el valor del coeficiente de aversión al riesgo, el cual puede ser determinado considerando la probabilidad de ruina y el capital inicial del asegurador. Esta función de utilidad corporativa cumple ademas adecuados axiomas.

b) En lo que respecta a la ordenación de riesgos, se deduce que los criterios para la ordenación de riesgos de Goovaerts et al (1990), suponen algún grado de Dominación Estocástica y su aplicabilidad y poder para ordenar riesgos dependen de la información con que el decisor cuente en relación a la distribución de las pérdidas, considerando que dicho decisor se suscribe a la familia de funciones de utilidad del grado de Dominación Estocástica correspondiente. La ordenación de riesgos sera unánime para aquellos grupos de decisores que se suscriban a la misma familia de funciones de utilidad.

En particular, para aquellos decisores con funciones de utilidad en U_{oo}, en el caso de que no conozca completamente la estructura de momentos de las distribuciones de probabilidad de los riesgos, resulta que se podrá intentar una ordenación con el enfoque del Orden de alto grado stop-loss (grado n). Se podran ordenar más pares de riesgos en cuanto se conozcan más momentos de las mencionadas distribuciones.

C O N C L U S I O N E S G E N E R A L E S

El enfoque de Dominación Estocástica permite trabajar con información parcial sobre la función de utilidad de un decisor en la ordenación de prospectos de riesgo en términos de las funciones de distribución acumulativas ó de las funciones generadoras de momentos de dichos prospectos.

Si, por otro lado, no se conoce completamente la estructura de momentos de la función de distribución de los prospectos de riesgo, se podria realizar una ordenación de dichos prospectos con la consideracion de los criterios de Goovaerts et al en Teoría del Riesgo, y para prospectos de riesgo que no tengan que ver con seguros se podría considerar una retención igual a cero.

F U T U R A I N V E S T I G A C I O N

El avance de la Teoría de la Utilidad Lineal hacia modelos más generales es una invitación abierta en sus implicaciones para Dominación Estocástica y sus aplicaciones en Teoría del Riesgo.

APENDICE

MEDIDAS DE PROBABILIDAD.

(Fishburn, 1970, p. 105).

Definición : Una medida de probabilidad simple p sobre X es una función valuada en los números reales, definida sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X, tal que :

1.- $p(A) \geq 0$ para cada $A \subseteq X$

2.- $p(X) = 1$

3.- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ cuando $A, B \subseteq X$, y $A \cap B = \emptyset$

4.- $p(A) = 1$ para algún finito $A \subseteq X$

Es la propiedad 4, la que distingue a p como una medida simple.

$p(\{x\})$, la cual se escribe como $p(x)$ es la probabilidad asignada por p al conjunto unitario $\{x\}$ de X.

COMBINACIONES CONVEXAS DE MEDIDAS

(Fishburn, 1970, p. 106).

Definicion : Si p y q son medidas de probabilidad simples sobre X, y $a \in [0,1]$, entonces $ap + (1 -a)q$ es la función que asigna el número $ap(A) + (1 - a)q(A)$ a cada $A \subseteq X$.

De la definición resulta que $ap + (1-a)q$ es una medida de probabilidad simple sobre X.

(Fishburn, 1970, p. 130).

En forma general, medidas de probabilidad se definen sobre álgebras booleanas de conjuntos. Considerense el complemento de A con respecto a X, $A^c = \{ x \mid x \in X$ y x no $\in A \}$ y la siguiente unión numerable de subconjuntos de X.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ x \mid x \in A_i \text{ para algunas } i \in \{ 1, 2, 3....\} \}$$

Definición : Una álgebra booleana A' para X es un conjunto de subconjuntos de X, tales que :

1.- $X \in A'$

2.- $A \in A' \implies A^c \in A'$

3.- $A, B \in A' \implies A \cup B \in A'$

Una sigma-álgebra A' es una álgebra booleana que satisface

4.- $A_i \in A'$ para $i = 1, 2, 3 \ldots \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A'$

Notas :

La más pequeña sigma álgebra y álgebra booleana es $\{ o, X \}$.

La más grande sigma álgebra y álgebra booleana es es conjunto de todos los subconjuntos de X.

Se supone que para cada $x \in X$, $\{x\} \in A'$

Si X es un conjunto finito, entonces una álgebra booleana sobre X, es también una sigma álgebra.

Si X = R (el conjunto de los números reales), con C el conjunto de todos los intervalos en R. La sigma álgebra generada por C se llama álgebra de Borel y sus elementos son conjuntos de Borel.

MEDIDAS DE PROBABILIDAD Y COMBINACIONES CONVEXAS CONTABLES

(Fishburn, 1970, capitulo 10, p. 131).

Definicion : Si p es una medida de probabilidad sobre A' y $a_i \geq 0$

, para $i = 1, 2, 3 \ldots$ y si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, entonces

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$ es la funcion sobre A' que asigna el número

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i(A)$ para cada $A \in A'$

Lema : La función $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$ es una medida de probabilidad sobre A'

Definición : Un conjunto P de medidas de probabilidad sobre A' es cerrado bajo combinaciones convexas numerables si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i \in P \text{ cuando } p_i \in P \text{ y } a_i \geq 0,$$

$$\text{para } i = 1, 2, 3 \ldots \text{ y} \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

MEDIDAS DE PROBABILIDAD NUMERABLEMENTE ADITIVAS

Definición : Una medida de probabilidad p sobre A' es numerablemente aditiva si y sólo si

$$p(\cup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

cuando $A_i \in A'$ para $i = 1, 2, 3 \ldots .$ $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in A'$ y

$A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$.

Esta definición aplica cuando A' es una álgebra booleana o una sigma álgebra.

MEDIDAS DE PROBABILIDAD DISCRETAS

Definición : Una medida de probabilidad p sobre A' es discreta si y sólo si $\{x\} \in A'$ para cada $x \in X$, A' es una sigma álgebra, p es numerablemente aditiva y $P(A) = 1$ para alguna contable $A \in A'$.

Todas las medidas simples son discretas.

Medidas discretas no simples sobre el conjunto de subconjuntos de X = { 1, 2, 3......} incluyen por ejemplo a la distribución geométrica o la distribución Poisson entre otras.

Lema : Si p sobre A' es una medida discreta entonces $p(x) = 0$ para todos, excepto para un número contable de $x \in X$ y $p(A) = \sum_{x \in X} p(x)$ para toda $A \in A'$.

En otras palabras, una medida discreta queda descrita por las probabilidades puntuales $p(x)$.

BIBLIOGRAFIA

Allais, Maurice, " Le Comportment de L'homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulates et Axiomes de L'ecole Americaine ", Econometrica, 21 (1953), pp. 503-546.

Arrow, Kenneth, Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Helsinki : Yrjo Jahnssonin Sattio, 1965.

Arrow, Kenneth, Essays on the Theory of Risk-Bearing, Chicago : Markham Publishing Company, 1971.

Bawa, V.S., " Stochastic Dominance : a Research Bibliography ", Management Science, 28 (1982), pp. 698 - 712.

Bernoulli, Daniel, " Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk ", Econometrica, 22 (1954), pp. 23-36. Traducción del latin por Dr. Louise Sommer, " Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis ", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V (Articulos de la Imperial Academy of Sciences in Petersburgo, Vol. V), 1738, pp. 175-192.

Bowers, N.L., H. Gerber, J. Hickman, D. Jones and C. Nesbitt, Actuarial Mathematics, Itasca, Illinois : The Society of Actuaries, 1986.

Brockett, P.L., " Aproximating Moment Sequences to Obtain Consistent Estimates of Distribution Functions ", Sankhya : The Indian Journal of Statistics, 1977, Vol. 39., Series A, Pt. 1, pp. 32-44.

Brockett, P.L. y Samuel H. Cox, Jr., " Optimal ruin calculation using Partial Stochastic Information ", Transactions, Society of Actuaries, Vol XXXVI, 1984, pp. 49-61.

Brockett, P.L. y Samuel H. Cox, Jr., " Insurance Calculations Using Incomplete Information ", Scandinavian Actuarial Journal, 1985, pp. 94-108.

Brockett, P.L. y Linda L. Golden, " A Class of Utility Functions Containing all the common Utility Functions ", Management Science, 33 (1987), pp. 955-964.

Brumelle, S.L. y R.G. Vickson, " A Unified approach to Stochastic Dominance ", en Stochastic Optimization Models in Finance, editado por W.T. Ziemba y R.G. Vickson, Academic Press : New York, 1975.

Dreze, Jacques H, Essays on Economic Decisions under Uncertainty, Cambridge University Press : Cambridge, 1987.

Farquhar, Peter H., " Utility Assesment Methods ", Management Science, 30 (1984), pp. 1283-1300.

Feller, William, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, New York : John Wiley and Sons, 1966.

Fishburn, P.C, Utility Theory for Decision Making, New York : John Wiley and Sons, 1970.

Fishburn, P.C., y Raymond G. Vickson, " Theoretical Foundations of Stochastic Dominance ", en Stochastic Dominance, editado por Whitmore, G.A. y M.C. Findlay, Lexington, Massachusetts : D.C. Heath and Company, 1978.

Fishburn, P.C., " Continua of Stochastic Dominance Relations for Un bounded Probability Distributions ", Journal of Mathematical Economics, 7 (1980), pp. 271-285.

Fishburn, P.C., The Foundations of Expected Utility, Dordrecht, Holland : Reidel, 1982.

Fishburn, P.C., Nonlinear Preference and Utility Theory, Baltimore, Maryland : The John Hopkins University Press, 1988.

Fishburn, P.C. " Stochastic Dominance in Non Linear Utility Theory ", Studies in the Economics of Uncertainty, ed. Thomas B. Fomby y Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.

Freifelder, Leonard, " Statistical Decision Theory and Credibility Theory Procedures ", en Credibility Theory and Application, ed. A.M. Kahn, New York : Academic Press, 1975.

Froberg Carl-Erik, Numerical Mathematics, Menlo Park, California : The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.

Gooevarts, M.J, R. Kass, A.E. Van Heerwaarden and T. Bauwelinckx, Effective Actuarial Methods, Amsterdam : North-Holland, 1990.

Hadar, Josel y William R. Rusell, " Rules for Ordening Uncertain Prospects ", American Economic Review, 1969.

Herstein, I.N. y John Milnor, " An Axiomatic Aproach to Measurable Utility ", Econometrica, 21 (1953), pp. 291-297.

Itagaki, Takao, " Optimal Tariffs and Quotas under Uncertain International Transfer ", en Studies in the Economics of Uncertainty, eds. Thomas B.Fombyy Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.

Jensen, Niels, E., " An Introduction to Bernoullian Utility Theory ", Swedish Journal of Economics, 1967, pp. 163-183.

Kahneman, Daniel y Amos Tversky, "Prospect Theory: an Analisys of Decisions Under Risk", Econometrica, 47(1979).

Keeney, R.L, Raiffa, H., Decisions with Multiple Objectives : Preference and Value Tradeoffs, New York : John Wiley and Sons, 1976.

Kroll, Yoram y Haim Levy, " Investment, Capital Structure and Cost of Capital : Revisited ", en Studies in the Economics of Uncertainty, eds. Thomas B. Fombyy Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.

Machina, Mark J., y William S. Neilson, " The Ross Characterization of Risk Aversion : Strenghthening and Extention ", Econometrica, 55 (1987), pp. 1139-1149.

Malinvaud, E., " Note on Von Newmann-Morgenstern's Strong Independence Axiom ", Econometrica, 20 (1952), p. 679.

Mirkin, Boris G., Group Choice, editado por Peter Fishburn, New York; John Wiley and Sons, 1979.

Pratt, John, W. " Risk Aversion in the Small and in the Large ", Econometrica, 32 (1964), pp. 122-136.

Pratt, John, W., " Utility Functions, Interest rates, and the Demand for Bonds ", en Studies in the Economics of Uncertainty, eds. Thomas B.Fomby y Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.

Quirk, J.P., y Rubin Saposnik, " Admissibility and Measurable Utility Functions ", Rev. Econom. Studies, Vol. 29 (1962), pp. 140-146.

Raiffa, Howard, Introductory Lectures on Choices under Uncertainty, Menlo Park California : Addison-Wesley, 1968.

Rimm, Y. " Personality and Group Decisions Involving Risk ", en Essays in the Theory of Risk and Insurance, ed. Hammond, J.D., Glenview, Illinois : Scott, Foresman and Company, 1968.

Ross, Stephen, A., " Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large ", Econometrica, 49 (1981), pp. 621-638.

Rubinstein, Mark, " The Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Finance ", en Financial Decision Making under Uncertainty, eds. Haim Levy y Marshall Sarnat, New York : Academic Press, 1977.

Russell, W.R. y T.K. Seo, " Representative Sets for Stochastic Dominance Rules ", en Studies in the Economics of Uncertainty, eds. Thomas B. Fomby y Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.

Samuelson, P.A., " Probability, Utility, and the Independence Axiom ", Econometrica, 20 (1952), pp. 670-678.

Samuelson, P.a., " St. Petersburgo Paradoxes : Defenged, Dissected, and Historically Described ", Vol. V, The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, Cambridge, Massachussets : The MIT Press, 1986.

Schlaifer, Robert, Analysis of Decisions under Uncertainty, New York, McGraw-Hill, 1969.

Schlaifer, Robert, Computer Programs for Elementary Decision Analysis, Boston : Harvard University, 1971.

Sinn, Hans-Werner, Economic Decisions under Uncertainty, Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1983.

Slovic Paul, " Assessment of Risk-Taking Behavior ", en Essays in the Theory of Risk and Insurance, ed. Hammond, J.D., Glenview, Illinois : Scott, Foresman and Company, 1968.

Theocharis, Reghinos D., Early Developments in Mathematical Economics, Philadelphia, Pennsylvania : Porcupine Press, (1961, 1983).

Vickson, R.G., " Stochastic Dominance Tests for Decreasing Absolute Risk Aversion. I. Discrete Random Variables ", Management Science, Vol. 21 (1975), pp. 1438-1446.

Vickson, R.G., " Stochastic Dominance Tests for Decreasing Absolute Risk-Aversion II : General Random Variables ", Management Science, Vol 23 (1977), pp. 478-489.

Von Neumann, J. y Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, 3rd. Edition, Princeton : Princeton University Press, (1944, 1947), 1953.

Wilson, Robert, " The Theory of Syndicates ", Econometrica, 36 (1968), pp. 119-132.

Whitmore, G.A., " Third-Degree Stochastic Dominance ", American Economic Review, Vol. 60 (1970), pp. 457-459.

Whitmore, G.A, y M.C. Findlay, Stochastic Dominance, Lexington, Massachusetts : D.C. Heath and Company, 1978.

Whitmore, G.A., " Stochastic Dominance for the Class of Completely Monotonic Utility Functions ", en Studies in the Economics of Uncertainty, eds. Thomas B. Fomby y Tae Kun Seo, New York : Springer Verlag, 1989.