Nº 5
2EJ.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A :

CRUZ BONILLA CHAVEZ

MEXICO, D. F. 1992

I N D I C E

CAPITULO 4. TEORIA DE JUEGOS

PRESENTACION.

El objetivo del presente trabajo es hacer una propuesta educativa en la materia de matemáticas en el Nivel Medio Superior, así como indicar algunos de los factores en los programas de estudio de esta materia que han contribuido a hacerla poco atractiva para el estudiante de este nivel. De esta forma, se propone la inclusión en los programas de estudio a una de las herramientas matemáticas que actualmente se utiliza para resolver una gran diversidad de problemas prácticos, la Investigación de Operaciones.

Una de las inquietudes que conducen al estudio del fenómeno educativo de nuestro país, es encontrar respuestas a la necesidad que tienen los educandos y a su vez los profesores de transmitir conocimientos que vayan a la par con los cambios que se producen en la sociedad y los avances científico-técnicos. Por lo que los planes y programas estudio de las instituciones educativas cobran una considerable importancia al respecto.

Es frecuente que el estudiante de bachillerato se pregunte ¿para qué sirven las matemáticas?, pregunta que se ha repetido en años anteriores, y que una gran mayoría la seguirá haciendo al proseguir sus estudios profesionales. A pesar de que la respuesta exista, pues sólo basta con mirar el mundo que nos rodea para intuir la amplia gama de posibilidades que tiene esta ciencia para describirlo.

Ahora bien, durante la formación educativa del estudiante es común que cuestione a quien le pretende enseñar matemáticas sobre el ¿por qué? y ¿para qué? de determinados conceptos o temas que se abordan, siendo lo usual el no recibir respuestas satisfactorias en estos casos, no obstante ser estas interrogantes de suma importancia en el proceso de la enseñanza.

En estas circunstancias, el uso de las matemáticas para resolver problemas de la vida real juega un papel muy importante, y las inquietudes de los estudiantes por saber el camino que deberá ser recorrido en su acontecer educativo deben encontrar respuestas claras y objetivas.

Por tal motivo, la parte central del trabajo está delineada por las interrogantes arriba citadas y su desarrollo se ha dividido en dos partes. En la primera se realiza un análisis sobre los contenidos de la materia de matemáticas en el bachillerato, los resultados del mismo hacen ver la necesidad de incorporar el estudio de tres áreas situadas dentro de la Investigación de Operaciones, a saber: Programación Lineal, Análisis de Redes y Teoría de Juegos. En la segunda se efectúa el desarrollo de los tres temas propuestos y con ello se señala una metodología a seguir para la enseñanza de los mismos.

El anexo A se ocupa para mostrar un panorama histórico de la Investigación de Operaciones y parte de su actual desarrollo, mientras que en el anexo B, se hace una descripción de cada una de las instituciones educativas que han sido consideradas para la realización del desarrollo de la propuesta; éstas son: Escuela Nacional Preparatoria, Colegio de Ciencias y Humanidades, Colegio de Bachilleres y los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos.

PARTE I: LAS MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO.

CAPITULO 1.

ANALISIS COMPARATIVO DE LOS PROGRAMAS VIGENTES

1.1 Introducción.

1.2 Los objetivos educativos en el bachillerato.

1.3 Análisis de los contenidos de matemáticas.

1.4 Conclusiones del análisis.

1.5 Investigación de Operaciones: una alternativa.

1.1. INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo consiste en fundamentar la propuesta para la incorporación de temas de Investigación de Operaciones en el Nivel Medio Superior (bachillerato). Para ello, se realiza un análisis comparativo de los contenidos de la materia de matemáticas en las cuatro instituciones educativas que han sido tomadas como base.

Por lo general, los planes y programas de estudio de bachillerato distan mucho de ser los idóneos para llevar a cabo una adecuada enseñanza. Así por ejemplo, la enseñanza de la matemática suele ser pura, con muy escasa información en cuanto a las aplicaciones que se pueden tener en esta ciencia. Por lo que se hace indispensable que este estudio vaya acompañado con alguna aplicación matemática elemental, para hacer más dinámico y menos rígido este proceso educativo en un nivel en el que el estudiante debe percibir la necesidad de estudiar los conceptos y las teorías matemáticas generales.

Asimismo, es notorio en los programas de matemáticas la repetitividad de temas que se presentan, tanto por los vistos desde la secundaria, como en el ciclo mismo del bachillerato. De igual manera puede cuestionarse la vigencia de los programas, algunos de los cuales resultan obsoletos, dados los avances que se han experimentado en la sociedad en los últimos años.

Es claro que al evitar los defectos que se evidencian en los programas, y substituirlos por su contraparte con miras a perfeccionarlos, se estará contribuyendo a lograr un mejor entendimiento de la matemática por parte del estudiante de bachillerato. Es en esta dirección en la que se orienta la propuesta educativa, cuyos fundamentos se basan en el análisis de los contenidos programáticos, ya que ésta es una forma de como se puede detectar la falta de aplicabilidad con la que se acostumbra enseñar la materia de matemáticas, a la vez que se determinan las asignaturas en las cuales es posible introducir los temas propuestos.

Este capítulo se desarrolla de la manera siguiente: en la sección 1.2 se señalan algunos de los objetivos que se deben de cumplir en la educación, en particular los objetivos que se persiguen en el bachillerato y los objetivos por alcanzar en la materia de matemáticas en este nivel. Asimismo, se menciona parte de la problemática subyacente en la búsqueda del cumplimiento de estos principios.

En la sección 1.3 se realiza el análisis sobre los contenidos programáticos de la materia de matemáticas en el nivel educativo antes mencionado. En la sección 1.4 se enuncian los resultados encontrados en el análisis efectuado y finalmente, en la sección 1.5 se propone la inclusión en los programas de estudio a tres áreas situadas en la Investigación de Operaciones.

1.2. LOS OBJETIVOS EDUCATIVOS EN EL BACHILLERATO.

"No hay nación grande si su escuela no es buena. Principio de educación: la escuela como institución normal de un país, depende mucho más del aire público en que íntegramente flota que del aire pedagógico artificialmente producido dentro de sus muros"

José Ortega y Gasset

El punto central de toda institución educativa es el plan de estudios; comprende todas las actividades programadas que proporcionan al maestro la labor de instruir, esto es, para hacer que la enseñanza progrese hacia fines previamente establecidos. Forman parte de él los estudios de la ciencia, el lenguaje, las artes y otros campos estudiados por los educandos. Al respecto, el art. 45 de la Ley Federal de Educación establece: "El contenido de la educación se definirá en los planes y programas, los cuales se formularán con miras a que el educando:

I. Desarrolle su capacidad de observación, análisis, interrelación y deducción;

II. Reciba armónicamente los conocimientos teóricos y prácticos de la educación;

III. Adquiera visión de lo general y de lo particular;

IV. Ejercite la reflexión crítica;

V. Acreciente su aptitud de actualizar y mejorar los conocimientos; y

VI. Se capacite para el trabajo socialmente útil", (Ley 1973).

En un sentido restringido, el plan de estudios es un arreglo sistemático de cursos destinados a satisfacer las necesidades de un alumno o de un grupo de alumnos. En su sentido más amplio, comprende la totalidad del ámbito escolar, incluidos todos los cursos, actividades y promociones ofrecidas a los estudiantes, entre otras cosas. Las materias de instrucción organizadas por unidades, las cuales deben ser seguidas y cumplidas, conforman el programa de estudios; éstos a su vez están constituidos por los temas, subtemas y los contenidos.

Desde luego que el éxito que se pudiera reflejar en una escuela, depende de los principios y de la operatividad del plan de estudios establecido para su funcionamiento. Para ello, una de las filosofías adoptadas para hacer que un plan educativo alcance sus fines propuestos, consiste en el cumplimiento de una triple exigencia, a saber: en primer término, los objetivos que a través de él se perciben: un "para qué". En segundo lugar, la materia objeto de la enseñanza: un "con qué". Y finalmente, los procedimientos adecuados para lograrlo: un "cómo".

En la tarea de hacer del educando una persona culta, es fácil advertir que su formación esta directamente ligada con los lineamientos emanados del plan de estudios, de ahí, que la observancia de los mismos deba de ser de suma importancia. Pues en ellos se depositan los objetivos mismos del concepto de educación que se han desarrollado en nuestra sociedad.

Una manera de dilucidar los objetivos que se persiguen en el proceso educativo, así como la problemática generada en torno a ellos, consiste en recurrir a la jerarquización establecida en el Sistema Educativo Nacional sobre las etapas o ciclos por las que tiene que pasar el educando en su quehacer académico. Y de esta forma, particularizar en el Nivel Medio Superior (bachillerato), que es el nivel escolar en donde se sitúa el estudio del presente trabajo.

El bachillerato constituye entre nosotros el ciclo superior de la enseñanza media. El inferior corresponde a la Escuela Secundaria, dependiente de la Secretaría de Educación. Este ciclo no puede considerarse como una simple ampliación del precedente. Tiene finalidades muy distintas, esencialmente formativas de la personalidad y algunas especificas, de preparación para una carrera profesional. [1]Sus objetivos podrían esquematizarse de la siguiente forma:

1. Desarrollo integral de las facultades del alumno para hacer de él un hombre cultivado.

2. Formación de una disciplina intelectual, que lo dote de un espíritu científico.

3. Formación de una cultura general que le de una escala de valores.

4. Formación de una conciencia cívica que le defina sus deberes frente a la familia, frente a su país y frente a la humanidad.

5. Preparación especial para abordar una determinada carrera profesional.

Satisfacer estos requerimdentos educativos demanda tiempo, consagración y encauzamiento de la vocación. Para lograr sus frutos, el bachillerato ha de buscar el equilibrio de sus finalidades particularmente entre la formación científica y la humanística del educando. No se puede inspirar en fines puramente pragmáticos de preparación para una carrera específica. Debe ser más amplio, más universal, más integral, donde se den lo mismo el desarrollo de los valores espirituales que el de las aptitudes concretas que demanda una profesión.

[1]De acuerdo a los objetivos de la Escuela Nacional Preparatoria.

La educación científica que se imparte en el bachillerato no consiste en una simple acumulación de conocimientos de las diversas disciplinas que forman el mundo de la ciencia, sino en la formación de una disciplina mental, en la formación de un criterio, propio de un espíritu crítico que razona. Busca que el alumno se explique el cómo y, de ser posible, el porqué de los fenómenos de la naturaleza, así como comprender las leyes que los rigen.

La educación humanística que se imparte no se concibe en el sentido habitual, como la adquisición obligada de lenguas clásicas y de las culturas de la antigüedad, particularmente la greco-romana. Con todo y su importancia innegable su orientación va en otro sentido, como resultado de las exigencias de nuestro tiempo. Buscando el desarrollo de una cultura propia del mundo de hoy, viva, dinámica, verdadero humanismo moderno que persiga el conocimiento del hombre, de su medio físico, de su historia, de sus relaciones sociales, del mundo de sus ideas.

Del correcto equilibrio entre estas dos formas de educación, la científica y la humanística, es como ha de resultar una educación integral, una armonía en el proceso formativo del alumno, que lo mismo prepara las facultades de su inteligencia que afina su sensibilidad y lo mismo fortalece su razón que pule su espíritu con el acercamiento a los valores de la cultura.

De esta forma de educación equilibrada, es como el bachiller es preparado cualquiera que sea su aspiración profesional. Es por ello, que en este ciclo es una necesidad ofrecer una base que sea igual para todos los alumnos, es decir, mediante lo que se conoce como el tronco común. Sólo después de lograda esta parte del proceso, usualmente en el último año del bachillerato, se abordan los estudios especiales de un área dada del conocimiento, de acuerdo con la profesión que se pretenda. Será este año el complemento de la formación integral del estudiante de este nivel educativo.

Por otro lado, es un hecho reconocido por la mayoría de las escuelas de enseñanza superior del país, que el mayor problema para realizar con éxito los estudios profesionales estriba en la eficacia del bachillerato. De la buena formación de los alumnos de este ciclo y de su correcta orientación va a depender, en gran parte, el éxito o el fracaso de las Instituciones del Nivel Superior.

Es innegable, así mismo, que cualquier persona advierte que la marcha de nuestros centros educativos preparatorios no ha alcanzado la calidad que se esperaba de ellos, sino por el contrario, se han caracterizado por la disminución de su rendimiento escolar. Así las cosas ha sido frecuente que en las Escuelas Profesionales se realicen periódicamente sesiones enfocadas al análisis de este problema educativo.

Incidir sistemáticamente en el tratamiento de este problema es uno de los factores más urgentes que deben encausarse con miras a darle solución, puesto que la mayor población de nuestro país es de jóvenes, y muchos de ellos habrán de concurrir a las aulas educativas de este y otros niveles.

Una de las medidas adoptadas tendientes a contrarrestar las deficiencias señaladas, así como la de actualizar el contenido de la enseñanza, fue la llevada a cabo por la Escuela Nacional Preparatoria en 1964 con el cambio del plan que regia por uno nuevo.

Ahora bien, haciendo referencia a esta institución educativa y considerando el plan de estudios en cuestión, no dejan de llamar la atención algunos de los puntos que condujeron a su aprobación. Más precisamente, se afirma: "En las numerosas Convenciones que se han celebrado en los últimos diez años para discutir el problema de la enseñanza Preparatoria se han señalado los obstáculos que más importa remover. Son sensiblemente los mismos en toda la República, aunque varíe su grado de importancia de un sitio a otro.

De cualquier modo, no hay escuela que no los sufra. Bastará con enunciarlos para darse cuenta de su valor:

I. El gran crecimiento -siempre en ascenso- de la población escolar que obliga a cada profesor a atender grupos muy numerosos de alumnos, más allá de lo que permite una sana pedagogía.

II. La preparación peculiar y limitada con que esos alumnos vienen de la Escuela Secundaria, cada vez más inclinada a la capacitación técnica, situación que aumenta la carga de trabajo del profesor de la preparatoria.

III. La falta general del hábito de estudio de parte de los alumnos, que les impide aprender por cuenta propia y los limita a una forma pasiva de aprendizaje.

IV. La escasez de profesores de la Preparatoria y la defectuosa preparación de muchos de ellos en el aspecto pedagógico, ya que en México la gran masa del profesorado es autodidacta.

V. Los bajos salarios que se cubre a los profesores, lo que obliga a muchos a impartir varias cátedras o a dividir su trabajo en varias actividades, con mengua del tiempo que debieran dedicar a la preparación de sus cursos o a la renovación de sus conocimientos.

VI. La escasez y en ocasiones falta de profesorado de carrera que trabajen a tiempo completo y se consagren de modo exclusivo a la enseñanza.

VII. La escasez y a veces la carencia de elementos materiales -laboratorios, bibliotecas, material audiovisual, etc.- que una enseñanza moderna requiere para ser realmente educativa, y para escaparse de la enseñanza verbalista entrando al estudio dirigido, a la observación y a la experimentación.

VIII. Los defectos inherentes al propio plan de estudios a los cuales se agregan el amontonamiento de asignaturas, la indefinición de programas y el apego a métodos tradicionales de enseñanza.

IX. La brevedad misma del tiempo que se destina al ciclo preparatorio, frente a la gran cantidad de disciplinas que se deben impartir y a las finalidades específicas que debe satisfacer la Preparatoria."

Es claro que los objetivos que se persiguen en el bachillerato, no podrán realizarse satisfactoriamente, si antes no se toman en cuenta factores como los expuestos en estos puntos.

Lo anterior es un medio conductor para reflexionar con más profundidad sobre la problemática educativa, ya que si se hace una traslación de la mayoría de los puntos señalados situándolos en el momento actual, es inmediato que prácticamente no sufren cambio alguno. O recíprocamente, si se enunciaran algunos de los problemas que actualmente influyen en el decaimiento de la calidad educativa, bastaría con citar en gran parte los señalados, y quizás algunos otros. Es decir, el problema educativo en nuestro país es un problema permanente y cada vez más complejo.

Con todo, los esfuerzos destinados a solucionar esta problemática no parecen ser lo suficientemente satisfactorios, como los dedicados al cambio del plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria ocurrido hace más de veinticinco años, que aunque con diversas modificaciones es el que actualmente esta vigente.

Esta breve incursión nos indica, en términos generales, que los fines educativos que se persiguen en el bachillerato deben contemplar no solo las directrices de desarrollo del pensamiento intelectual, sino que además, es necesario tomar en cuenta las externalidades sociales, económicas, políticas, etc. que pueden influir positiva o negativamente en el proceso educativo.

Ahora bien, situándonos en las materias que forman parte del plan de estudios en las Escuelas del Nivel Medio Superior, se verá que éstas se caracterizan por la interrelación que guardan entre sí, y cuya finalidad esencial en conjunto consiste en la formación integral del estudiante. Cada una, sin embargo, dada su naturaleza, persigue objetivos propios que la determinan. De esta forma, en el caso particular de la materia de matemáticas, a continuación se describen los objetivos que en ésta se persiguen:

1. Utilizar el método científico para organizar los procesos del pensamiento.

2. Utilizar la matemática como un lenguaje simbólico en la construcción de modelos que representen elementos de la realidad.

3. Analizar la aplicabilidad de la solución alcanzada.

4. Solucionar el problema por medio del manejo matemático del modelo.

5. Comprender la matemática como una ciencia que organiza y sistematiza elementos de la realidad.[1]

De los puntos señalados resulta evidente la participación de esta ciencia en la formación cultural del educando, y que aunada a la necesidad actual que experimenta el hombre de conocerla con el fin de poder entender los avances científico-técnicos que acontecen en la sociedad, conducen a situarla como una de las materias de estudio fundamentales en el bachillerato.

[1] Objetivos propuestos en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

Es difícil imaginar una institución educativa que pretenda preparar bachilleres, en donde se prescinda de las matemáticas. Ya que una de las características de esta ciencia, que no se conserva en otras, es su innegable presencia en la mayoría de las carreras profesionales.

Ahora bien, es un hecho conocido por quienes hacen que esta ciencia progrese de las cualidades que se desarrollan en el educando al tener una buena orientación en su estudio. Entre las que podemos citar: el mejorar su habilidad para descubrir cualidades en diversos objetos o fenómenos, distinguir y elaborar conexiones entre los objetos de estudio así como establecer hipótesis y leyes que conduzcan a un mejor conocimiento de la naturaleza.

Por otro lado, la realidad nos indica que en gran parte, los estudiantes desconocen o no practican las ideas directrices arriba citadas. Y que sigue manteniéndose la tradición en ellos de que la matemática es una ciencia árida y difícil.

Esto debido a que la práctica educativa de la mayoría de nuestros educadores conciben este proceso, como una simple transmisión de definiciones, procedimientos de mecanización de principios, formulismos innecesarios, etc., lo cual resulta contradictorio con la valorización y asimilación de un método que permita a los estudiantes adquirir una mentalidad crítica, transformadora, así como desarrollar su creatividad humana.

Con la idea de entender aún más el problema educativo de la enseñanza de la matemática en el bachillerato, en la siguiente sección se toma como punto de partida, el análisis de los contenidos de esta materia, y de esta forma conocer una de las peculiaridades que contribuyen a hacer poco atractiva esta ciencia en el estudiante de este nivel educativo.

1.3. ANALISIS DE LOS CONTENIDOS DE MATEMATICAS.

"La educación verdadera es praxis, reflexión y acción del hombre sobre el mundo para transformarlo"
Paulo Freire

Los estudios en torno a la problemática educativa en el caso particular de la matemática, es quizás uno de los más abordados. Esto obedece a que los indicios de que algo anda mal en esta materia, prácticamente han sido permanentes y los esfuerzos por mejorar esta situación no parecen ser lo suficientemente satisfactorios.

En este sentido, se conjeturó que la falta de temas atractivos en los programas de estudio de esta materia en el bachillerato contribuía al rechazo del estudiante por esta ciencia. Por esta razón se pensó, que una manera de esclarecer este fenómeno, consistía en hacer un análisis sobre los contenidos de la materia en las cuatro instituciones elegidas.

Para ello, se tomó como base el desglose de los contenidos agrupados en ocho temas que se desarrollan a través de los semestres o años del ciclo de duración del bachillerato. La información obtenida se muestra en los cuadros correspondientes para cada institución educativa, la cual se identifica con su nombre en la parte superior en el anexo B.

Es conveniente mencionar la ubicación cronológica de la elaboración de los programas de estudio de donde se tomó la información, para lo cual se procuró que fuera la más reciente.

Para el caso de la Escuela Nacional Preparatoria, los contenidos corresponden a las Areas I y II de los programas aprobados en 1974, incluyendo la asignatura optativa de Temas Selectos de Matemáticas. Es importante señalar que se contemplan algunas modificaciones a los mismos, que de aprobarse, entrarían en funciones a partir del primer año escolar de 1992.

En el Colegio de Ciencias y Humanidades los contenidos corresponden a los publicados en 1979. Cabe aclarar que cada plantel adopta sus propios criterios en cuanto a qué contenidos enseñar. Sin embargo, la adopción del esquema general que se ha hecho no incurre en omisiones, a la vez que se mantiene la coherencia del proyecto original.

Los programas de estudio de la materia de matemáticas en el Colegio de Bachilleres han sido objeto de modificaciones que datan del año de 1982 y 1983 con la más cercana ocurrida en 1988. Estos cambios no han sido globales, sino sólo para algunas asignaturas de la materia. Los contenidos exhibidos en el cuadro respectivo corresponden a los de estos años.

Para los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos se tomó como referencia a los contenidos del Area de Ciencias Sociales y Administrativas. En este caso, la información que se obtuvo no difiere considerablemente con respecto a las otras dos Areas que se estudian en estos Centros Educativos, ya que ésta corresponde a la de los años de 1989 y 1990, que es la más actual y en ella se contempla la homogeneidad de los temas de estudio de matemáticas en las tres Areas.

Teniendo como base el desglose de los contenidos en los cuadros respectivos, queda indicada la metodología a seguir para su análisis.

La lectura por renglones permite ubicar un tema específico, y para él, los contenidos que lo constituyen, mientras que las columnas determinan el semestre o año en que éstos son abordados.

El cuadro de contenidos que corresponde a la información que es común a los cuadros existentes de cada institución (ver anexo B), tiene como propósito mostrar una visión global de los contenidos de la materia que son enseñados en ellas. En este cuadro los temas de estudio se conservan, mientras que los semestres se conjuntaron en años. A continuación se exhibe este cuadro, para que posteriormente se enuncien las características encontradas en él.

A) PRIMER AÑO DEL BACHILLERATO.

Con frecuencia se ha mencionado que el primer año del bachillerato, es un compendio o una *síntesis* de los conocimientos impartidos en el ciclo de la secundaria. Desde luego que tal afirmación se enmarca en forma empírica debido a la información proporcionada a este respecto por profesores y estudiantes.

Sobre esta observación cabe cuestionar si en efecto es así, y de serlo, el porqué de este esquema seguido en este nivel escolar. Además, si se presenta en las cuatro instituciones educativas que se han seleccionado, o *sólo* en algunas de ellas. Su importancia resulta evidente si se hace un breve bosquejo sobre este asunto, resumido en los siguientes tres puntos:

1o. En el supuesto caso de que el estudiante que entra al ciclo del bachillerato, no haya tenido una buena orientación en el conocimiento de esta materia en el ciclo anterior, y que potencialmente sienta aversión hacia la misma, es de esperarse la consolidación de esta actitud en este nuevo nivel, al encontrarse que el programa de estudio que se ofrece al iniciar su nueva etapa escolar, es prácticamente el mismo que con anterioridad ya se le había presentado.

2o. De igual manera, aunque ahora suponiendo, que el estudiante que ingresa al bachillerato tiene inclinación y en cierta forma simpatía por la matemática, para él debe no serle tan grato el contemplar y repetir un año más, la práctica en esta ciencia. Pues su estudio ahora le podría parecer rutinario y sin importancia, con la creciente posibilidad de perder las cualidades en él cultivadas hacia esta rama del conocimiento.

3o. Si se observa el tercer año del bachillerato, en donde la mayoría de las escuelas de este nivel dedican este año a la preparación específica del educando para estudiar una carrera profesional.

Resulta inmediato pensar en las perspectivas futuras de un estudiante que no elija un área que contemple el estudio de las asignaturas de matemáticas. Pues su cultura en este campo será sumamente precaria, ya que la incorporación de nuevos conocimientos matemáticos en este ciclo escolar se daría en el primero y segundo año, que son precisamente los años en los que se refleja la repetición de algunos temas que ya han sido abordados en la secundaria.

Si se agrega la situación que actualmente se presenta en gran parte de las carreras profesionales, en las cuales se ha visto la necesidad de incorporar estudios de la ciencia matemática en sus planes de estudio, aunque no sean carreras que se vean directamente involucradas con las ciencias exactas. Se tendrá un factor más en desventaja en el bachilerato al no contemplar este fenómeno que actualmente se refleja en el acontecer educativo, el cual afecta principalmente a los estudiantes que en el tercer año no cursaron asignaturas de matemáticas y que supeditados a lo aprendido en el primero y segundo año, se situarán en condiciones desfavorables en el nivel profesional.

De lo anterior se desprende la necesidad de analizar los contenidos de la materia de matemáticas del ciclo de la secundaria, y confrontarlos con los del primer año del bachillerato con el fin de corroborar estas observaciones y algunas otras que pudieran surgir.

Por tal motivo, a continuación se muestra el cuadro que contiene esta información. En él, se dan los mismos ocho temas de estudio que se utilizaron para los cuadros del bachillerato. Es decir, en su estructura este cuadro es parecido al que se muestra en esta sección para la información concerniente a las cuatro instituciones del bachillerato, sólo que ahora corresponde a los contenidos de matemáticas en la secundaria.

CONTENIDO DE LOS TEMARIOS: "SECUNDARIA"

PRIMER AÑO	SEGUNDO AÑO	TERCER
rdinables rica les mentales cional se diez 6. Notacion cientifica 7. Sistema binario 8. Sistema base cinco 9. Numerador y denominador 10. Nums. racionales positivos 10.1 Divisibilidad 10.2 Forma decimal 10.3 Orden 10.4 Operaciones 11. Criba de Eratostenes 12. Los nums. enteros 12.1 Operaciones	1. Los numeros racionales 1.1 Negativos 1.2 Valor absoluto 1.3 Orden 1.4 Densidad 1.5 Operaciones 2. Numeros simetricos 3. Fracciones equivalentes 4. Fracciones irreducibles 5. Numeros decimales	
logicas rdad 5. Diagramas de Venn 6. Par ordenado 7. Producto cartesiano	1. Negacion de una proposicion 2. Valor de verdad 3. Conectivo Y 4. Conectivo O 5. Reciproco de una condicion 6. Bicondicional 7. Relacion de inclusion 8. Conjuntos 8.1 Complemento 8.2 Interseccion 8.3 Union 8.4 Igualdad	1. Rel. de equivalencia y de orden 2. La condicional 3. Bicondicional 4. Tablas de verdad 5. Igualdad de conjuntos
de un natural nes ultiple rciones gebraico	1. Variables y constantes 2. Expresiones algebraicas 3. Polinomios 4. Coeficientes y exponentes 5. Terminos semejantes 6. Grado de un polinomio 7. Potencias 8. Ecuaciones de primer grado 9. Resolucion de problemas 10. Ecuacion de primer grado con dos variables 11. Sistemas de ecuaciones lineales 12. Conjunto solucion 13. Metodos algebraicos para la sol. de sist. de ecuaciones 14. Aplicacion de los sistemas de ec. a la sol. de problemas	1. Patrones o modelos 2. Productos notables 3. Factorizacion 4. Trinomios cuadrados perfectos 5. Polinomios de segundo orden 6. Identidades y ecuaciones 7. Ecuacion de segundo orden 7.1 Ecuacion general 8. Funcion cuadratica 9. Metodo grafico para resolver la ecuacion cuadratica 10. Resolucion de en donde se e ec. cuadratic
nes con regla y compas acidad y peso	1. Transformaciones 2. Fig. homologas por traslacion 3. Postulado de Euclides 4. Angulos 5. Rotaciones 6. Simetrias 7. Rectas perpendiculares 8. Distancia de un punto a una recta 9. Aplicaciones de la simetria	1. Poligonos 2. Triangulos 2.1 Congruencia 2.2 Clasificacion 3. Cuadrilateros 4. Circunferencia 5. Circulo 6. Arcos y angulos centrales 7. Construcciones con regla y compas 8. Figuras semejantes 9. Teorema de Tha 10. Teorema funda 11. Figuras homot 12. Teorema de Pi 13. Segunda y cua 14. Funciones tri 15. Circulo unita 16. Resolucion de 17. Angulo de ele
	1. Funciones 2. Grafica de una funcion 3. Tabulacion 4. Variable independiente y dependiente 5. Proporcionalidad directa 6. Variacion inversa 7. Leyes de la fisica 8. Imagen y regla de correspondencia	
e datos rras de intervalos eterministicos entos ente probables grafica de las	1. Poblacion y muestra 2. Aplicaciones del muestreo 3. Diagramas de barras 4. Medidas de tendencia central 5. Probabilidad del complemento 6. Probabilidad de la union de eventos	1. Curvas de frecuencias 2. Probabilidad de la union de eventos 3. Probabilidad del complemento 4. Probabilidad de la interseccion de eventos 5. Las proporciones en la inferencia estadistica

De la secuencia de temas en los dos cuadros precedentes y los que se presentan en el anexo B, se puede concluir:

SISTEMAS NUMERICOS. La información proporcionada en el cuadro de la secundaria, indica que las bases para completar el estudio de los números reales en el bachillerato ya están dadas, puesto que las estructuras numéricas que son necesarias para su conocimiento ya se han abordado, a saber. Los números naturales, los números enteros y los números racionales, todos ellos con sus propiedades correspondientes. Lo que restaría introducir son los números irracionales, y con ello tener una representación completa del sistema de los números reales.

Sobre el mismo tema, se tiene que en el C.C.H. y C.B. se reconsideran las estructuras numéricas que dan soporte a los números reales, mientras que en la E.N.P. se adentra más directamente en su estudio y en los C.E.C.y.T. se aborda inclusive la estructura de los números complejos que también se enseñan en tercer año en la E.N.P.

Esta breve observación ya señala la orientación que se da en cada institución para enseñar un determinado tema en este año. Es decir, para el relativo a los números reales se tiene que en dos instituciones se inclinan por hacer una revisión de los conceptos que el educando supuestamente ya debe conocer, y con ello incurrir en la repetición de los mismos. Mientras que en las otras dos ya no sucede este fenómeno, sino por el contrario en una de ellas se utiliza el tiempo disponible para abordar otro tópico, en este caso el de los números complejos.

LOGICA Y CONJUNTOS. Con respecto a este tema se han trasladado parte de los comentarios al tercer año, ya que es donde se enseña la sección de lógica matemática en el C.C.H. y conjuntos en la E.N.P. Mientras que en el C.B. se dan ha conocer lógica en el primero y conjuntos en el segundo año. Pero en el C.C.H. y los C.E.C. y T. se da únicamente conjuntos en el primer año.

En el tema de conjuntos lo usual que se estudia, ya sea en el primero o en los otros dos años, es lo referente al concepto de conjunto, subconjunto, unión, intersección, diferencia, complemento, etc., lo cual ha sido dado a conocer paulatinamente en los tres años de la secundaria como puede apreciarse en el cuadro respectivo.

Ahora bien de la lógica matemática, lo que va a predominar es un nivel más elevado en cuanto a la introducción de nuevos conceptos ya que algunos de carácter elemental han sido enseñados en la secundaria.

En este caso se mantiene el tema de lógica en el bachillerato, pero no necesariamente es repetitivo como el tema de conjuntos, ya que en él se profundiza y avanza más. Situación que no ocurre para el tema de conjuntos en donde su estudio da la impresión de ser reducido o limitado, lo cual cae fuera de su contexto, pues por el contrario al igual que la lógica matemática sus perspectivas de estudio son considerablemente amplias.

ALGEBRA. Este tema es común en las cuatro instituciones, aunque en algunas se abarquen un poco más de conceptos, lo que si resulta evidente es que en gran medida son los dados a conocer en la secundaria.

Así, por ejemplo, de una manera resumida se tienen los siguientes contenidos enseñados en el primer año de bachillerato: expresiones algebraicas, polinomios, factorización, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado, etc. De tal forma que si se recurre a revisar los contenidos de la secundaria se verá que estos tópicos ya han sido enseñados en este ciclo escolar. Además se mantiene la profundidad o nivel de abstracción sobre los mismos lo que resta versatilidad a la enseñanza de estos conceptos.

Debe notarse también el hecho de que en la E.N.P. y el C.B. se abordan algunos de estos contenidos en el segundo año, como lo es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas en el C.B., mientras que en la E.N.P. el de las potencias.

Por otra parte, existe poca variación de los nuevos contenidos enseñados sobre este tema, algunos de ellos son: resolución de desigualdades lineales y de segundo grado, así como el de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales que se abordan en los C.E.C. y T.

Sin embargo para el caso particular de la E.N.P. Se tiene que es la institución en donde se hace patente la aplicabilidad de las desigualdades lineales y de las regiones delimitadas por ellas, aunadas al proceso algebraico para su establecimiento a partir de las condiciones generadas del planteamiento de un problema que involucra a dos incógnitas. Esto da como resultado la representación y resolución de problemas de programación lineal, lo que permite entender en parte el uso que puede tener la matemática para resolver problemas sencillos que se presentan en la realidad.

GEOMETRIA EUCLIDIANA. El estudio de este tema en el bachillerato no será algo desconocido para el estudiante, ya que gran parte de sus contenidos le fueron enseñados en la secundaria. Cabe aclarar que este tema ya no se aborda en la E.N.P. Pero en el C.C.H. se hace en el segundo año, mientras que en el C.B. y los C.E.C. y T. se estudia en este primer año.

De los contenidos dados a conocer en el bachillerato, se tienen: el de segmento, ángulo, la recta, triángulos, polígonos, círculo y circunferencia, así como el teorema de pitágoras, entre otros, que desde luego ya se estudiaron con anterioridad como se muestra en el cuadro de la secundaria. Y como se puede apreciar la introducción de nuevos tópicos es limitado, de entre estos figuran la axiomatización de la geometría, identidades trigonométricas y la existencia de otras geometrías.

Sobre el nivel de abstracción o rigor que se pueda presentar del tema en este nuevo ciclo escolar, se manifiesta principalmente por la axiomatización de los conceptos o bien por el énfasis en la demostración de los resultados enunciados. Asimismo, se resalta la importancia del proceso histórico que ha dado lugar a este campo de estudio de la matemática que data ya de hace más de dos mil años.

Como se mencionó, en el C.C.H. se aborda su estudio en el segundo año, tercer semestre. Sin embargo destaca la parte correspondiente en este tema al estudio de teoría de gráficas, la cual no se contempla en las demás instituciones.

Resulta interesante en este caso la omisión que se da del tema en la E.N.P., el cual, como se puede apreciar en su cuadro de contenidos ha venido a ser substituido en gran parte, por la sección correspondiente al estudio de la programación lineal que se ha ubicado en este año escolar y únicamente enseñado en esta institución educativa.

B) SEGUNDO AÑO DEL BACHILLERATO.

FUNCIONES. Este importante concepto se enseña más detenidamente en el tercer semestre en la E.N.P. y en el C.B., mientras que en el C.C.H. se hace en segundo semestre. En los C.E.C. y T. se retoma este tema en el segundo y cuarto semestre.

En semestres más adelante, se recordará una vez más al estudiante el concepto de función asi como desde la secundaria ya se le a hecho saber. Es decir, es un tema ya familiar para él y que además conoce de su importancia, pues es la manera en que se lo han hecho saber aunque nunca comprenda porque al igual que su rígida definición.

Sobre el conocimiento de este concepto sobresale el predominio axiomático que se ha seguido para su enseñanza, anticipándose al desarrollo natural que puede tener a partir de la observación de fenómenos elementales que se presentan en la sociedad o en la naturaleza. Esto es, el educando en un principio es inducido al estudio del concepto de función a partir de la definición, a las partes que la componen y a las distintas clases de funciones que existen para luego tabularlas y graficarlas.

Es aquí en donde se presenta una de las oportunidades más palpables para indicar al estudiante sobre las ventajas que tiene la matemática para transformar o describir fenómenos del quehacer cotidiano simples o complejos. En este caso, es común estudiar una gran variedad de funciones, sin embargo la mayoría de las veces no se sabe de donde se originaron o que resolverán, centrando más su estudio en la clasificación que éstas tienen o de sus cualidades analíticas. Por lo que, las raices generadoras del concepto son relegadas a un segundo plano, situando en uno primero, a las definiciones y a los formulismos algebraicos correspondientes a cada función.

GEOMETRIA ANALITICA. Su enseñanza en este año escolar es una característica común de las cuatro instituciones educativas. Un caso interesante se presenta en los C.E.C. y T., cuyo estudio se hace en el tercer semestre, mientras que en las otras tres instituciones se realiza en el cuarto semestre.

El estudio de este tema si resulta ser completamente nuevo en el bachillerato, de aquí que su conocimiento llegue a formar parte de la cultura matemática general del estudiante de este nivel.

En este tema usualmente se sabe las partes en que se dividirá el curso y el orden respectivo, a saber: plano cartesiano, la recta, la circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, etc. acompañados de los casos o variantes que se presentan en ellas.

Sin embargo, para algún estudiante puede parecerle extraño el no encontrar en el temario un punto que haga referencia a la historia de la geometría analítica, así como se hace por lo general para la geometría euclidiana. De igual manera le podría resultar interesante conocer sobre las relaciones existentes entre ambas disciplinas, si es que las hay, y del porqué de su estudio por separado.

Asimismo podría reflexionar sobre la mayor aplicabilidad que se presenta en la geometría euclidiana y la ausencia de ésta en la geometría analítica. Puesto que la primera se originó hace más de dos mil años, mientras que la segunda en no más de quinientos.

Sobre la necesidad de conocer la historicidad de la geometría analítica (y de hecho de las demás ramas de la matemática), es un problema que debe encontrar respuestas en la educación matemática, ya que ello significa avanzar hacia el establecimiento de una cultura general en el profesor que deberá ser reflejada en el estudiante.

Las teorías matemáticas no surgieron de la nada, tienen una razón de ser, y conocer los procesos que originaron su establecimiento pueden ser un factor que motive al estudiante a aprender matemáticas.

Ahora bien, la importancia de la geometría analítica por lo general se indica que será evidente cuando se aborden los estudios del cálculo diferencial e integral, por lo que el estudiante comprenderá paulatinamente de esta forma una de las características de la matemática, su aplicabilidad en si misma. Quedando, claro está la inquietud por utilizarla con mas objetividad en otros problemas que sean más representativos del acontecer cotidiano.

Por otra parte, es completado este año escolar en la E.N.P. con el estudio del álgebra, y en ella se contempla el conocimiento de las potencias, logaritmos y una parte correspondiente a identidades trigonométricas. En el C.B. se retoma también el estudio del álgebra para abordar los sistemas de ecuaciones, las ecuaciones cuadráticas, y una sección que forma parte de la teoría de conjuntos.

En el C.C.H. se dedica este año al estudio de la geometría euclidiana y a la geometría analítica básicamente, ya que es mínima la sección que se refiere a funciones. Por su parte en los C.E.C. y T. como se mencionó en un principio, se enseña en este año, cuarto semestre, el cálculo diferencial. Lo que constituye una gran diferencia en este segundo año y que por comodidad, el comentario respectivo sobre este tema se ha dejado para el siguiente año, porque es donde se enseña en las otras tres instituciones.

c) TERCER AÑO DEL BACHILLERATO.

En este año escolar el estudiante podrá conocer una de las herramientas matemáticas más frecuentemente utilizadas para describir fenómenos de la naturaleza o resolver problemas, el CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Como se recordará en los C.E.C. y T. este tema se empieza a estudiar en el segundo año, mientras que en las demás instituciones lo hacen en este año. Su conocimiento viene a ser algo nuevo en el acervo cultural del estudiante de este nivel.

En esta ocasión, para el estudio de uno de los puntos centrales del tema, se recurrirá al establecimiento de un esquema matemático que es el resultado de la observación y formalización de un fenómeno acontecido en la naturaleza, a saber, la medición de la rapidez de cambio. Esto se hace, generalmente, desde el punto de vista de acontecimientos que se presentan en la Física, la rapidez de cambio de un objeto (un móvil, partícula, etc.), y llegar a definir a través de un proceso geométrico el concepto de derivada. El esquema seguido sin lugar a dudas que es el deseable cada vez que se pretende dar a conocer un nuevo concepto. Es decir, interrelacionar a la naturaleza con la ciencia matemática.

Además en esta asignatura se menciona el desarrollo histórico que originó el concepto de la derivada de una función. Para el caso se recuerda el trabajo emprendido por I. Newton y G. Leibnitz por ser los precursores del cálculo diferencial, cuyo desarrollo lo hicieron de manera independiente, y de las ventajas y desventajas de su notación matemática utilizada.

Sin embargo, existen cosas por hacer en esta presentación del cálculo diferencial, ya que deja de lado a los estudiantes que están pensando en estudiar una carrera situada dentro de las ciencias sociales, como podría ser la economía.

Sobre este tema pueden hacerse una gran diversidad de interpretaciones del concepto de la derivada, así por ejemplo, se puede pensar en términos económicos y conocer las leyes que regulan los costos y los ingresos en la producción de un determinado producto. O bien se puede situar el estudio en el terreno de la biología y comprender algunos de los fenómenos inherentes a la reproducción de las especies de una población bajo ciertas condiciones, por citar algunos.

De esta forma, entonces ya no sólo se estaría determinando el punto máximo de una función generada para determinar el cubo de volumen máximo inscrito en una esfera de radio dado, o la altura a que deberá llegar un proyectil disparado hacia arriba. Sino que ahora también, el estudiante podría conocer la manera de calcular el nivel de producción óptimo de un producto para maximizar utilidades y reducir costos o bien la manera en que variará la rapidez de crecimiento de una población con respecto al tiempo.

Sobre la parte correspondiente al cálculo integral se puede establecer una línea de trabajo similar a la antes citada, y ampliar el panorama de las aplicaciones que se pueden dar en este tema, aplicaciones que vayan más allá de la física y de la matemática en sí. En este caso tendrá más sentido resolver la gran cantidad de problemas que se suelen dar tradicionalmente en esta asignatura; límites, derivadas, integrales, etc. Además de que se estaría impartiendo una enseñanza integral, que lo mismo beneficie a un futuro estudiante de ingeniería que a uno de economía.

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA. Es una de las asignaturas que más impulso han recibido en la actualidad y como resultado es su innegable presencia en el tercer año del bachillerato en las cuatro instituciones educativas consideradas.

Sobre la parte correspondiente a la teoría probabilística es conocida la dificultad en ella inherente, debido a la sutileza de sus cálculos, ya que usualmente no hay reglas directas que conduzcan a los resultados deseados. Originando que algunas veces al educando no le sea tan fácil comprender y analizar el comportamiento de los fenómenos aleatorios; lanzamiento de monedas, dados, extraer cartas o sacar bolas de una urna, etc.

Aquí también se menciona la parte histórica que dió origen a la teoría. Se plantean los distintos enfoques de la probabilidad y su desarrollo actual que estableció su carácter axiomático.

En este caso cobra una considerable importancia la conjugación de la parte experimental de los fenómenos aleatorios y la teoría matemática en ellos inmersa, lo que origina que su estudio no esté desprovisto de las aplicaciones inmediatas que se puedan dar en un entorno en donde muchos de los acontecimientos están dotados de factores probabilísticos.

Esta previa identificación de la asignatura, permite que en su posterior desarrollo se lleve a cabo con toda naturalidad el estudio de los contenidos ulteriores, tales como las diferentes maneras de enumerar objetos, la prueba de teoremas, verificación de resultados, etc., los cuales tienen sentido para el estudiante una vez que sabe de la importancia de éstos para su formación tanto práctica como teórica.

De manera similar se aborda el estudio de la teoría estadística, en donde a veces no resulta tan fácil diseñar una encuesta, determinar una muestra, interpretar diagramas de frecuencias, o inferir resultados, entre otros puntos. Pero que de cualquier forma el estudiante sabe que esta manejando elementos extraidos muchas de las veces de una realidad.

Esta viene a ser una de las motivaciones fundamentales que conducen al educando al conocimiento de las teorías matemáticas en una primera instancia, es decir, la aplicación de los resultados en un tiempo relativamente corto.

Estas dos áreas de la matemática, para el estudiante de bachillerato no le son desconocidas, pues de una manera elemental conoció sus principios en la secundaria. Sin embargo, su estancia en los programas de estudio en este tercer año ha reflejado su utilidad elemental y en mayores proporciones lo que le ha permitido su aceptación en la comunidad estudiantil. Quedando como trabajo permanente la búsqueda de mejores esquemas de estudio que la doten de mayores cualidades que de alguna manera las sigan fortaleciendo.

Para concluir los comentarios de este año escolar, toca hacer mención al tema de LOGICA Y CONJUNTOS. Que aunque ya se abordó en el primer año, aquí también se hace dado que figuran en los programas de estudio de la E.N.P. y del C.C.H.

La observación que sobresale es la forma en que la teoría de conjuntos se incorpora al programa de estudios: mientras que en el C.C.H. se enseña en el primer año, en la E.N.P. se da en el tercer año. Esto indica, que aunque los contenidos del tema no difieren considerablemente, los enfoques para su enseñanza si son distintos. Añadase el hecho de que la mayoría de los contenidos de este tema ya se dieron a conocer en la secundaria.

Una situación diferente se presenta para el caso de la lógica matemática, pues la profundidad con la que se aborda en el bachillerato es muy diferente al de la secundaria, además de la introducción de nuevos conceptos. Cobra una considerable importancia si se le relaciona con el actual avance en el terreno computacional, en donde muchos de los procedimientos empleados utilizan resultados emanados de la lógica matemática.

Por ejemplo, árboles de decisión y circuitos lógicos, que a su vez resultan ser una de las aplicaciones de esta disciplina, no obstante estar identificada por su carácter abstracto.

Para esta rama de la matemática también se presenta el problema operacional en cuanto al año en que debe ser enseñada. Ya que mientras en el C.C.H. se enseña en este tercer año, en el C.B. se hace en el primer año. Y como se observa en el cuadro respectivo de la E.N.P. y de los C.E.C. y T., en estas instituciones no se aborda el estudio de esta disciplina.

Una vez concluida la sección correspondiente al análisis comparativo de los contenidos de la materia de matemáticas en las cuatro instituciones elegidas, en la siguiente se realiza una síntesis de los resultados sobresalientes en esta parte y con ello indicar líneas orientadoras en el mejoramiento de nuestro sistema educativo en el nivel medio superior.

1.4. CONCLUSIONES DEL ANALISIS.

"El nivel de educación de cualquier sociedad puede ser medido por el grado de acceso efectivo de cada uno de sus miembros a la información y a las herramientas que, dentro de la misma sociedad, influyen sobre su vida."

Ivan Illich

La búsqueda de medios que permitan entender el fenómeno educativo de la matemática en el bachillerato, ha conducido al análisis anterior sobre los contenidos de esta materia en las cuatro instituciones consideradas. Y constituye un recurso por el cual es posible visualizar la brecha existente entre la realidad actual y los objetivos que supuestamente deben de cumplirse en la misma. Los resultados que se desprenden, entre otros factores, se enuncian enseguida para que posteriormente se mencionen los motivos de su apreciación:

1. Persiste la repetición de conceptos.

2. No es suficiente el avance en la introducción de temas contemporáneos de interés.

3. Se emplean los modelos y algoritmos, pero no se especifican los alcances y la estructura que éstos pueden tener.

4. Falta una mayor relación entre el mundo abstracto de los conceptos y el mundo material de los problemas cotidianos.

5. No existe información concreta sobre las aplicaciones de la matemática a diversos campos de la ciencia, aparte de los ya tradicionales.

Cada uno de estos puntos son indicativos de que faltan cosas por hacer en el terreno educativo en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas. Para una mejor comprensión de la problemática subyacente a estos resultados, a continuación se expresan más específicamente.

1. Persiste la repetición de conceptos. Con este punto lo que se indica, es la redundancia de conocimientos que se otorgan al estudiante de bachillerato en el primer año, el cual prácticamente es un repaso de lo estudiado en los tres años de secundaria. Al respecto, podría argumentarse que es para homogeneizar los conocimientos, lograr una mayor solidez de conceptos o para mantener la coherencia con los estudios del nivel inmediato inferior, etc. Lo cierto es que, lo que se logra, es crear una serie de aptitudes en el educando que lo hacen estudiar los contenidos de la materia únicamente porque están contemplados en el programa de estudios y no más.

De esto se desprende, que la articulación de conceptos de un nivel escolar a otro, no está del todo bien entendida.

En todo caso, si se van a reconsiderar elementos que al educando ya le fueron proporcionados en la secundaria, es menester hacerlo, pero sin recurrir por ello a todo el año o más. En este sentido, se puede emplear cuando mucho el primer semestre para hacer una revisión táctica de conceptos y el tiempo restante dedicarlo al estudio de nuevos temas que se apeguen a las necesidades e intereses de los alumnos.

2. No es suficiente el avance en la introducción de temas contemporáneos de interés. Este punto esta estrechamente relacionado con el primero por la presencia de contenidos que se repiten en las diferentes etapas, lo que no permite en éstas, introducir temas de vanguardia que substituyan a los existentes que resultan poco atractivos para los estudiantes.

o que no les van a ser útiles más adelante. Esto trae como consecuencia, que el espacio y el tiempo para abordar nuevos temas se encuentren saturados.

Este problema ha sido superado en el primer año en la E.N.P. con la introducción de la programación lineal, lo que viene a constituir un hecho significativo si se toma en cuenta que esta teoría desarrollada a mediados de este siglo ha substituido en este ciclo escolar a la geometría euclidiana, que ya ha sido estudiada durante los tres años de la secundaria.

De la misma manera podría abordarse el tema de las matrices, cuyo campo de estudio es bastante amplio y que puede resultar de interés para los alumnos. En este caso, otro tema proseguido en el bachillerato y que ha sido abordado paulatinamente en la secundaria es teoría de conjuntos, que omitiéndose daría cabida al tema de matrices.

Similarmente podrían enunciarse algunos otros temas, como los dos antes citados, de tal forma que fueran lo suficientemente importantes y atractivos que abarcaran la mayoría de las inquietudes de un estudiante cualquiera que fuera su vocación profesional.

3. Se emplean los modelos y algoritmos, pero no se especifican los alcances y la estructura que éstos pueden tener. A su vez este punto hace referencia, a la importancia que se le debe dar al conocimiento de un modelo y de un algoritmo. Es claro que durante el desarrollo de los temas en cada etapa, se están utilizando estos conceptos, pero de manera general y no explícita. Así se tiene que, el alumno usa modelos y aplica algoritmos, pero pocos están conscientes de este hecho.

Desde los inicios en la enseñanza de la matemática, el estudiante se vió en la necesidad de emplear modelos para representar fenómenos ocurridos en la naturaleza.

Principalmente en la física y la química en donde las ecuaciones manejadas representaban modelos matemáticos. Quedando como un punto importante en el bachillerato, precisar estos conceptos en cuanto a los tipos de modelos que usualmente se emplean para resolver problemas, así como también, la forma o estructura que debe tener un algoritmo.

De esta forma, el estudiante estará en mejores condiciones de poder construir un modelo, en este caso matemático, a la vez que emplee correctamente un algoritmo para su solución si existe, o en el mejor de los casos, que pueda ser capaz de construirlo.

Teniendo claros estos dos conceptos, es inmediata la ampliación del panorama para inferir que gran parte de los fenómenos que ocurren en la naturaleza (no sólo de la física o química) o en la sociedad, son susceptibles de poder ser formalizados matemáticamente. Y de ahí elaborar esquemas que permitan encontrar soluciones, si no óptimas, al menos sí con un buen grado de aproximación. Con esto tendría más sentido resolver problemas de optimización.

4. Falta una mayor relación entre el mundo abstracto de los conceptos y el mundo material de los problemas cotidianos. En este punto se hace mención de la característica que permanentemente debe existir en la enseñanza y que parcialmente se refleja en los contenidos de la materia de matemáticas. A saber, la dinámica que debe conducir al educando a prepararse para la vida, no sólo en el salón de clases, sino también en la sociedad.

De aquí, que la instrucción de la matemática cobre una mayor importancia, al cuestionar el papel que juega en los programas de estudio, ya que siempre se le ha considerado como una materia que se distingue por su utilidad práctica.

Argumento del todo válido, sin embargo, la actual forma de presentarla, ha hecho que no sea satisfactoria la conexión de los problemas que se desarrollan en clase con los problemas que se presentan en el mundo material. Es decir, el esquema axiomático con que se inicia un determinado tema, deja de lado la presentación de problemas concretos de los cuales se haga ver la necesidad de estructurar una serie de conocimientos, que después puedan ser formalizados. Y a partir de entonces, estar en condiciones de resolver toda una serie de problemas análogos o de diferente tipo.

La argumentación académica a la actual presentación es, por lo general, a su comodidad didáctica y al aprovechamiento del desarrollo axiomático que se ha tenido en esta ciencia. Cabe aclarar que no se está afirmando que estos dos aspectos son perjudiciales, sino por el contrario, su adecuada incorporación en el proceso educativo puede lograr mejores resultados. Lo que es cuestionable, es la ausencia de bases que permitan introducir en la enseñanza problemas reales, que deben hacer necesaria la edificación de los conceptos matemáticos. No solamente al inicio de un tema, sino también una vez que los conceptos, definiciones, teoremas, etc. han sido ampliamente estudiados.

El esquema axiomático puede ser seguido rigurosamente en los estudios que así lo requieran, en donde muchas de las veces no es necesario recurrir a hechos reales para ilustrar un nuevo concepto. Pero no en el momento en que el estudiante, en una primera instancia, necesita saber concretamente que problemas o elementos estará manejando, y después paulatinamente ascender a mayores niveles de abstracción.

5. <u>No existe información concreta sobre las aplicaciones de la matemática a diversos campos de la ciencia, aparte de los ya tradicionales.</u> Por último, este punto señala la falta de aplicabilidad de la matemática que se percibe en los contenidos a problemas concretos en los diversos campos de la ciencia.

Esto es, cuando se hace mención de la aplicación que tiene la matemática, generalmente, se le encuentra dentro de ella misma o en la física y la química. Hecho no del todo mal, pero no está por demás indicar claramente su utilidad en otras áreas del conocimiento no tan tradicionalès como hasta ahora se ha venido haciendo.

Así por ejemplo, aún es incipiente la información emanada en cuanto a la aplicabilidad de la matemática en áreas como las ciencias sociales y la biología, cuyos avances han hecho necesario introducir, cada vez más en sus esquemas, el uso de modelos matemáticos que ayudan a comprender muchos de los fenómenos que se presentan en las mismas.

Es preciso hacer funcionable la matemática en lo que se refiere a su aplicabilidad, ya que su orientación esta prácticamente dirigida a los estudiantes que proseguirán estudios situados dentro de las ciencias exactas. Además de enfocar realmente su uso en las actividades humanas, tratando con ello de explorar y aprovechar el vasto campo de estudio que ofrece la naturaleza y la sociedad.

En la siguiente sección, se hace referencia a una de las técnicas matemáticas empleadas para resolver problemas prácticos que pueden surgir en una gran diversidad de contextos, como una manera de ofrecer respuestas concretas en la búsqueda de temas lo suficientemente atractivos para los estudiantes del bachillerato.

1.5. INVESTIGACION DE OPERACIONES: UNA ALTERNATIVA.

> *"La educación tiene dos fines: por un lado, formar la inteligencia; por el otro, preparar al ciudadano. Los atenienses se fijaron más en lo primero; los espartanos, en lo segundo. Los espartanos ganaron. Pero los atenienses perviven en la memoria de los hombres"*
>
> *Bertrand Russell*

La presentación que actualmente se le da a la matemática en lo que se refiere a sus aplicaciones, como ya se mencionó, está orientada básicamente para aquellos alumnos que estudiarán una carrera situada dentro de las ciencias exactas, como podría ser; ingeniería, física, química o la misma carrera de matemáticas. Por lo que deja de lado a un gran sector de estudiantes, como aquellos que proseguirán carreras que se encuentran en las ciencias sociales y administrativas, tales como contaduría o economía, por citar algunas.

Además, se incurre en limitar el panorama de los diversos campos de aplicación de la matemática, y con ello, se puede llegar a condicionar o suprimir la vocación profesional del estudiante.

El compromiso por obtener mejores resultados en la enseñanza de las matemáticas es constante. Y hacer ver objetivamente las cualidades que tiene esta ciencia en la solución de problemas en diversos contextos, es primordial si queremos que una gran parte de los educandos en realidad la vean como una materia que los ayudará a resolver problemas y no como la materia que más obstáculos les acarrea.

Como una respuesta a la necesidad que se tiene de introducir temas contemporáneos de interés en el bachillerato, se propone como objeto de estudio, a tres áreas de la rama de las matemáticas conocida como Investigación de Operaciones, la cual se ha caracterizado por su utilización en la solución de problemas prácticos, y que con las modificaciones adecuadas puede ser abordada en este nivel. Las tres áreas de estudio son las siguientes; programación lineal, análisis de redes y teoría de juegos.

El campo de aplicación de estas herramientas matemáticas es lo bastante extenso, por lo que su estudio podría resultar de interés en general para cualquier estudiante, no importando cual sea su inclinación profesional. Además, se tiene la ventaja en esta rama de estudio de que, los problemas que se abordan usualmente son problemas más apegados a la cotidianeidad que se vive. A continuación se enuncian algunas características que se encuentran en la Investigación de Operaciones:

1. Es una técnica matemática orientada a resolver problemas prácticos en diversos campos del conocimiento.

2. El esquema teórico para su estudio puede ser abordado en el bachillerato.

3. Su desarrollo se logra a mediados de este siglo, es decir, es una disciplina matemática cuyos inicios son muy recientes.

4. La diversidad de sus aplicaciones beneficiaría, no sólo a los alumnos que potencialmente vayan a estudiar carreras que se ubican en las ciencias exactas, sino también a quienes pretenden estudiar carreras contempladas en las ciencias sociales y administrativas, entre otras.

5. Coadyuva a la formación de un pensamiento científico en el estudiante, ya que en la búsqueda de soluciones a los problemas se induce a la utilización de una metodología científica y a la necesidad de emplear un marco conceptual interdisciplinario.

Las técnicas empleadas en Investigación de Operaciones al abordar los problemas, tienen en común la mayoría de las veces, el que siempre tratarán de representar la situación dada mediante modelos matemáticos, para los cuales se buscará su solución a través de algoritmos.

Ahora bien, teniendo en cuenta que las sugerencias de cambio implican crítica, pero dado que existen factores que permiten proponer la incorporación o reforzamiento de elementos educativos en el Nivel Medio Superior, se especifican a continuación las tres áreas de Investigación de Operaciones factibles de ser enseñadas en este nivel, mencionando la asignatura que puede servir de base para su respectivo estudio.

Así mismo, una vez indicada la asignatura en que se propone la enseñanza de cada una, se menciona una forma en que éstas pueden incorporarse a un programa de estudios, señalando los objetivos por cumplir, su contenido programático y la bibliografía básica como también la complementaria.

PROGRAMACION LINEAL.

Es una de las técnicas más populares que utiliza la Investigación de Operaciones y de fácil acceso a su conocimiento. Considerando su estudio cuando intervienen dos variables de decisión es, prácticamente inmediata su enseñanza a través de la asignatura de geometría analítica, que se aborda en el segundo año. En este momento se tienen los elementos básicos para poder plantear y resolver en el plano cartesiano un modelo de programación lineal. Refuerzan lo anterior, los siguientes puntos que el estudiante ya ha cubierto hasta el momento.

1. Problemas que llevan al planteo de sistemas de dos o tres ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.

2. Métodos de solución de los sistemas del punto uno.

3. Regiones en el plano cartesiano.

4. Ecuaciones de la línea recta en el plano cartesiano.

De esta forma lo que resta es complementar estas partes con los conocimientos básicos de programación lineal. Una manera es como se hará en la parte dos del presente trabajo. Ahora bien se puede afirmar que la programación lineal, siempre podría formar parte del acervo cultural del estudiante de bachillerato, ya que la asignatura de geometría analítica siempre se encuentra en los programas de estudio en el segundo año del bachillerato.

Su incorporación puede estar indicada como sigue:

UNIDAD TEMATICA: PROGRAMACION LINEAL.

OBJETIVOS GENERALES.

Que el alumno:

-1. Sea capaz de construir un modelo de programación lineal.

-2. Resuelva un modelo de programación lineal.

-3. Ejercite su capacidad de decisión.

OBJETIVOS PARTICULARES.

Al finalizar las actividades realizadas, el alumno será capaz de:

-1. Interpretar el proceso histórico que dió origen a la programación lineal.

-2. Plantear correctamente modelos de programación lineal.

-3. Representar geométricamente modelos de programación lineal.

-4. Identificar geométricamente la solución óptima de un problema de programación lineal.

-5. Interpretar la solución óptima encontrada.

-6. Inferir el carácter interdisciplinario de la programación lineal con las demás materias del plan de estudios.

-7. Percibir la generalización que se le puede dar a esta teoría matemática.

CONTENIDO PROGRAMATICO.

1. Resumen histórico de la programación lineal. 1 Hr.
   1.1. Los inicios de la programación lineal.
   1.2. Los factores que dieron impulso a la programación lineal.

2. Modelos de programación lineal. 4 Hrs.
   2.1. Metodología a seguir para plantear un modelo de programación lineal.
   2.2. Planteamiento de modelos con dos variables.
   2.3. Identificación de las partes que integran un modelo de programación lineal.

3. Elementos de programación lineal. 4 Hrs.
   3.1. Definición de un modelo de programación lineal.
   3.2. Solución factible.
   3.3. Región de soluciones factibles.
   3.4. Punto extremo.
   3.5. Solución óptima.
   3.6. Conjunto convexo.

4. El método gráfico. 3 Hrs.
   4.1. Algoritmo para resolver un modelo de programación lineal con dos variables.

5. Problemas típicos de programación lineal. 2 Hrs.
   5.1. Enunciar y resolver problemas en diferentes contextos, tales como:
      a) Alimenticios.
      b) Inversión de capital.
      c) Agrícolas.
      d) Administrativos.
      e) Industriales.

TOTAL: 14 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

[1] A.S. Barsor ¿Qué es programación lineal?. México, D.F.: Limusa. (segunda edición, 1982).

[2] G. Hoel, Paul Matemáticas finitas y cálculo con aplicaciones a los negocios. México, D.F.: Limusa. (tr. García, D.R., 1a. reimpresión, 1980).

[3] S. Budnick, F. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. México, D.F.: Mc. Graw-Hill. (tr. Alatorre, M., 2a. ed. en español, 1990).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

[1] López de Medrano, S. Modelos matemáticos. México, D.F.: Trillas. Serie: Temas básicos. Area: Matemáticas. (1a. reimpresión, 1983).

[2] Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México, D.F.: Trillas. Serie de matemáticas. (tr. Zugazagoitia, J., 16a. reimpresión, 1990).

ANALISIS DE REDES.

Esta técnica matemática también es ampliamente utilizada para resolver una gran diversidad de problemas prácticos, muchos de los cuales pueden ser entendidos por el estudiante de bachillerato. En este caso, los elementos básicos para abordar esta teoría serian algo con los que el estudiante de este nivel no se encuentra muy familiarizado, como es el caso de la programacion lineal. Sin embargo, las caracteristicas de los problemas aqui tratados se manifiestan en el diario acontecer del estudiante, que la elaboración de los modelos matemáticos que los representan se construyen de una manera un tanto natural. Para ello, considérese la siguiente información que como mínimo se debe de emplear.

1. Tener un conjunto de puntos llamados nodos o vertices.

2. Tener un conjunto de líneas llamadas aristas o arcos.

3. Agregar información numérica a las aristas o a los arcos.

4. Aplicar un algoritmo para resolver el modelo generado por la información de los puntos anteriores.

La conjugación de los elementos que indican estos puntos y la lógica inmersa en cada problema, conducen a la elaboración de eficaces representaciones gráficas apegadas a la realidad, conocidas con el nombre de redes. Que vienen a ser una clase más de modelos matemáticos para resolver problemas.

En esta teoría, para la representación de los modelos, se prescinde de la recta real y del plano cartesiano. Por lo que, el lugar para su estudio puede ser a través de la geometria-euclidiana, que se da en el primero o segundo año. En la Escuela Nacional preparatoria podría ser abordado su conocimiento en la asignatura de Temas Selectos de Matemáticas.

Con todo, este tópico sería algo nuevo para muchos estudiantes y que les podría resultar interesante. Una metodología propuesta para la forma en que puede ser realizada su enseñanza, se presenta más adelante en la segunda parte. Por el momento se muestra, que su desarrollo puede quedar indicado en los programas de estudio de la siguiente manera:

UNIDAD TEMATICA: ANALISIS DE REDES.

OBJETIVOS GENERALES.
Que el alumno:

-1. Sea capaz de construir una red.

-2. Encuentre la solución en una red.

-3. Ejercite su capacidad de decisión.

OBJETIVOS PARTICULARES.
Al finalizar las actividades realizadas, el alumno será capaz de:

-1. Interpretar la evolución histórica que dió origen al análisis de redes.

-2. Plantear correctamente un modelo de análisis de redes.

-3. Encontrar la solución óptima en una red.

-4. Interpretar la solución óptima encontrada.

-5. Determinar el carácter interdisciplinario de esta teoría con las demás materias del plan de estudios.

CONTENIDO PROGRAMATICO.

1. Resumen histórico del análisis de redes.	1 Hr.
1.1 El desarrollo histórico de la teoría de gráficas.	
1.2 Los factores que dieron origen al concepto de red.	
2. Modelos de análisis de redes.	2 Hrs.
2.1 Metodología a seguir en el planteamiento de redes.	
2.1.a Redes integradas con aristas.	
2.1.b Redes integradas por arcos.	
3. Elementos de teoría de gráficas.	5 Hrs.
3.1 Concepto de gráfica.	
3.2 Gráficas dirigidas y no dirigidas.	
3.3 Gráficas conexas.	
3.4 Gráficas parciales.	
3.5 Arboles.	
3.6 Concepto de red.	
4. Métodos de solución.	4 Hrs.
4.1 Algoritmo para determinar el árbol de peso mínimo.	
4.2 Algoritmo para determinar la ruta más corta.	
TOTAL:	12 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

[1] Hernández Ayuso, M.C. Análisis de redes. Depto. de matemáticas, F.C., U.N.A.M. (vínculos matemáticos No. 161. 1988).

[2] López de Medrano, S. Teoría de gráficas. México, D.F.: ANUIES. Serie temas básicos. Area: Matemáticas. (1a. reimpresión, 1973).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

[1] López de Medrano, S. Modelos matemáticos. México, D.F.: Trillas. Serie temas básicos. Area: matemáticas. (1a. reimpresión, 1983)

[2] Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México, D.F.: Trillas. Serie temas básicos. (tr. Zugazagoitia, J., 16a. reimpresión, 1990).

TEORIA DE JUEGOS.

Los antecedentes académicos que se necesitan en este caso, son conceptos de geometría analítica y probabilidad, los cuales serían complementados con las definiciones y conceptos propios de la teoría. La asignatura que puede servir de base para estudiar este tópico es temas selectos de matemáticas en la E.N.P. o probabilidad en alguna de las otras instituciones.

Esta teoría esta íntimamente ligada a la programación lineal y en el mejor de los casos, un estudiante puede encontrar estas similitudes si en geometría analítica estudió programación lineal y un poco más adelante conoce la teoría de juegos para dos personas de suma cero.

En este tema el educando una vez más se percataría de la conjugación del álgebra con la geometría analítica, ya que los métodos empleados para resolver un juego, hacen uso de estas dos áreas de la matemática aunadas a la teoría probabilística. Al respecto, los puntos básicos que serían necesarios conocer son los siguientes.

1. Solución algebraica de sistemas de dos o tres ecuaciones con dos o tres incógnitas.

2. Solución geométrica de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3. Valor esperado de una variable aleatoria.

Sobre este tema prácticamente no hay indicios de su enseñanza en el bachillerato y su introducción podría ser algo novedoso y útil sobre todo para aquellos estudiantes que potencialmente vayan a estudiar una carrera profesional situada dentro de las ciencias sociales como podría ser economía, entre otras.

También para este tema se desarrolla en la segunda parte una metodología para su enseñanza. Su incorporación en los programas de estudio podría ser como sigue:

UNIDAD TEMATICA: TEORIA DE JUEGOS.

OBJETIVOS GENERALES.

Que el alumno:

-1. Sea capaz de construir el modelo que representa un juego.
-2. Resuelva el modelo que representa un juego.
-3. Ejercite su capacidad de decisión.

OBJETIVOS PARTICULARES.

Al finalizar las actividades realizadas, el alumno será capaz de:

-1. Interpretar el desarrollo histórico de la teoría de juegos.
-2. Plantear correctamente modelos de teoría de juegos.
-3. Obtener la solución algebraica de un juego.
-4. Identificar la solución geométrica de un juego.
-5. Interpretar la solución óptima encontrada.
-6. Percibir la generalización que se le puede dar a esta teoría.
-7. Identificar la relación existente de esta teoría y la programación lineal.
-8. Inferir el carácter interdisciplinario de la teoría de juegos con las demás materias del plan de estudios.

CONTENIDO PROGRAMATICO.

1. Resumen histórico de la teoría de juegos. 1 Hr.
   - 1.1 El origen de la teoria de juegos.
   - 1.2 El desarrollo histórico de la teoría de juegos y la programación lineal.

2. Modelos de teoría de juegos. 2 Hrs.
   - 2.1 Metodología a seguir en la elaboración de modelos de teoría de juegos.
   - 2.2 Modelos que involucran dos estrategias para cada jugador.
   - 2.3 Modelos que involucran a más de dos estrategias para un jugador.

3. Conceptos de teoría de juegos. 4 Hrs.
   - 3.1 Definición de un juego para dos personas de suma cero.
   - 3.2 Estrategia pura y estrategia mixta.
   - 3.3 Valor superior y valor inferior de un juego.
   - 3.4 Punto silla de un juego.
   - 3.5 Existencia de solución óptima de un juego.

4. Métodos de solución de un juego. 4 Hrs.
   - 4.1 Método algebraico.
   - 4.2 Método geométrico.

5. Problemas típicos de teoría de juegos. 3 Hrs.
   - 5.1 Enunciar y resolver problemas en diferentes contextos, tales como:
     - a) Laborales.
     - b) Políticos.
     - c) De mercadeo.

TOTAL: 14 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

[1] G. Hoel, Paul. Matemáticas finitas y cálculo con aplicaciones a los negocios. México, D.F.: Limusa. (tr. García, D.R., 1a. reimpresión, 1980).

[2] S. Budnick, F. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. México, D.F.: Mc. Graw-Hill. (tr. Alatorre, M., 2a. ed. en español, 1990).

[3] Venttsel, E.S. Introducción a la teoría de los juegos. México, D.F.: Limusa. (tr. Perez C., J., 1a. reimpresion, 1986).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

[1] López de Medrano, S. Modelos matemáticos. México, D.F.: Trillas. Serie: Temas básicos. Area: Matemáticas. (1a. reimpresión, 1983).

[2] Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México, D.F.: Trillas. Serie de matemáticas. (tr. Zugazagoitia, J., 16a. reimpresión, 1990).

Quedan por resolver grandes dificultades en la propuesta de temas que se hace, algunas de ellas se refieren a los recursos humanos necesarios para llevar a su realización el desarrollo de los mismos. Otra, la elaboración de material bibliográfico de apoyo, ya que el existente por lo general no es el adecuado para este nivel, entre otros factores.

Lo que se recomienda como factor vital es la adecuada planeación que debe de seguirse en la hipotética implantación de estos temas, así como en los de cualquier otro. Dejando atrás a las decisiones simplistas que se suelen dar en las instituciones educativas cada vez que se producen cambios en los programas de estudio.

Con todo, una vez determinada la ubicación en que los tres temas propuestos pueden ser abordados en el bachillerato, en la siguiente parte se desarrolla metodológicamente una forma en que éstos pueden ser enseñados.

PARTE II: DESARROLLO DE LOS TEMAS PROPUESTOS.

C A P I T U L O 2

P R O G R A M A C I O N   L I N E A L

2.1 INTRODUCCION.

En este capitulo se presenta parte de la teoria de programación lineal con la utilización del método gráfico para encontrar la solución a problemas de optimización que puedan representarse en el plano cartesiano. En la seccion 2.2 se considera un problema base que delineará la metodología concerniente para la elaboración de modelos matemáticos de programación lineal, éste involucra dos variables de decisión y con su empleo se especificarán las condiciones que deben de cumplirse en el problema.

En la sección 2.3 se da solución al problema anteriormente considerado mediante el empleo del método gráfico; ésto se logra mediante la interpretación geométrica de cada una de las condiciones que se establecieron en el modelo y con el análisis del comportamiento de una función llamada función objetivo o de utilidad que indicará que puntos del plano son los que habrá que seleccionar con el fin de obtener la mejor solución posible del problema.

Lo que a continuación se muestra en la sección 2.4 son los elementos y la teoría básica que justifican el procedimiento y los resultados empleados en las anteriores dos secciones y en general para resolver cualquier problema de programación lineal representable en el plano, para lo cual se enuncia el método a seguir una vez que se han formalizado los conocimientos necesarios.

Finalmente la sección 2.5 consiste de la aplicación de los resultados anteriores a diversos problemas considerados como usuales en el contexto de la programación lineal y así poder ilustrar y reforzar lo expuesto en las secciones precedentes.

2.2 UN PROBLEMA ESTUDIANTIL.

Con frecuencia algunas organizaciones o sociedades de personas se ven en la necesidad de solicitar apoyo económico o material con el fin de realizar sus proyectos para las cuales fueron creadas. Muchas de las veces las donaciones que se logran consisten de material del cual hay que decidir qué hacer con él y en qué medida o cantidad. Tal es el caso del siguiente problema.

La Sociedad de Alumnos de una escuela secundaria desea recabar fondos para la adquisición de una computadora. Para ello, fabricarán dos tipos de libreros en el taller de carpintería. Ellos disponen de 80 m^2 de madera y 7 lts de barniz que les fueron donados. Para los del tipo I requieren de 10 m^2 de madera y .5 lts de barniz, mientras que para los del tipo II requieren de 8 m^2 de madera y 1 lt de barniz. Los precios que han considerado para su venta son los siguientes; para los del tipo I a $ 300,000.00 y para los del tipo II a $ 250,000.00.

¿ Cuántos libreros de cada tipo deben fabricar si es que desean obtener el mayor ingreso posible en la venta ?

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Antes de iniciar la búsqueda de la solución del problema, no está por demás especificar claramente los objetivos que se deben cumplir:

1) El problema se refiere a una toma de decisión. Esto es, se tienen que indicar con toda precisión, cuántos libreros del tipo I y cuántos del tipo II hay que fabricar.

2) Que el ingreso en la venta sea óptimo (máximo).

3) Se tiene que garantizar la construcción de los libreros (factibilidad).

La reflexión anterior, nos da la pauta a seguir para obtener la solución del problema. Se empieza por especificar cada punto, para lo cual será necesario dar respuesta a la siguiente interrogante.

¿ Cuáles son las variables de decisión que indican la cantidad de libreros de cada tipo a fabricar ?

Esta pregunta se refiere al número de libreros del tipo I y del tipo II a fabricar, en cuyo caso la respuesta la establecemos matemáticamente de la siguiente forma:

X_1 = El número de libreros del tipo I a fabricar

X_2 = El número de libreros del tipo II a fabricar.

Con esto se ha resuelto la pregunta. Ahora podemos abordar la siguiente referida al ingreso óptimo, para ello nos preguntamos.

¿ A qué es igual el ingreso óptimo ?

Si X_1 es el número de libreros del tipo I a fabricar a un precio de \$ 300,000.00 y X_2 es el número de libreros del tipo II a fabricar a un precio de \$ 250,000.00. La respuesta resulta ser:

$$\text{ingreso} = 300\ 000\ X_1 + 250\ 000\ X_2$$

que por comodidad lo escribiremos

$$Z = 300\ X_1 + 250\ X_2$$

Es claro que este valor de Z lo queremos maximizar, pero ¡¡ es inmediato !! puesto que al incrementar los valores de X_1 y X_2 se incrementa el valor de Z. Así que el problema se reduce a determinar hasta que valor se puede incrementar Z, obteniendo los valores de X_1 y X_2 de tal forma que la disponibilidad de recursos limitados de madera y barniz se respeten para elaborar los libreros.

De esta manera se ha contestado la segunda interrogante. Finalmente para garantizar la construcción o factibilidad de las soluciones X_1 y X_2, se empieza por agrupar la información disponible en el problema como se muestra en la tabla 2.2.1.

TABLA 2-2-1

TIPO	MADERA (m^2)	BARNIZ (lts)	PRECIO ($x1000)
I	10	5	300
II	8	10	250
DISPONIBILIDAD	80	7	---

Esta visualización es muy cómoda y lograr este paso representa el primer avance en la solución del problema.

En el problema tenemos únicamente dos recursos que son; 80 m^2 de madera y 7 lts de barniz. De donde las condiciones que deben satisfacer los libreros fabricados son:

<u>Para la madera</u>: Como los libreros del tipo I requieren de 10 m^2 por unidad, entonces

$10\ X_1$ = cantidad de m^2 de madera utilizados al fabricar X_1 libreros del tipo I.

Similarmente para los libreros del tipo II, que requieren de 8 m^2 por unidad. Se tiene

$8\ X_2$ = cantidad de m^2 de madera utilizados al fabricar X_2 libreros del tipo II.

De donde

$$10\ X_1 + 8\ X_2 \leq 80.$$

Con ésto se indica que la utilización de madera en la fabricación de ambos tipos de libreros, no debe rebasar la disponibilidad que es de 80 m^2 de madera.

Para el barniz: Los libreros del tipo I requieren de .5 lts por unidad entonces

$$.5\ X_1 = \text{cantidad de lts de barniz empleados al fabricar } X_1 \text{ libreros del tipo I.}$$

De igual forma, para los libreros del tipo II que requieren de 1 lt por unidad. Se tiene

$$1\ X_2 = \text{cantidad de lts de barniz empleados al fabricar } X_2 \text{ libreros del tipo II.}$$

De donde

$$.5\ X_1 + 1\ X_2 \leq 7.$$

Lo cual indica, que la utilización de barniz en la fabricación de ambos tipos de libreros, no debe rebasar la disponibilidad que es de 7 lts de barniz.

A continuación se presenta la restricción que evita resultados negativos. Es decir, se debe asegurar la construcción de los libreros y en el peor de los casos no producir ningún librero. Esto se establece como:

$$X_1 \geq 0, \qquad X_2 \geq 0.$$

Resumiendo lo construído hasta el momento, el problema se puede plantear matemáticamente de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 300\ X_1 + 250\ X_2 \tag{2.2.1}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10\ X_1 + 8\ X_2 &\le 80 \\ .5\ X_1 + 1\ X_2 &\le 7 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$X_1, \quad X_2 \ge 0. \tag{2.2.3}$$

A esta formulación matemática se le conoce como un modelo de programación lineal. Este modelo como veremos más adelante en la sección 2.4, esta compuesto de tres partes, a saber, la función 2.2.1 llamada función objetivo o de utilidad. Las restricciones o condiciones del problema 2.2.2. y la condición de no-negatividad 2.2.3.

Hasta aquí el problema ha sido planteado explícitamente, en la siguiente sección daremos solución al problema mediante la aplicación del método gráfico.

2.3 EL METODO GRAFICO.

Este método propone empezar. Primero, por el análisis de las restricciones o condiciones del problema, lo que nos va ha determinar una región de soluciones factibles en el plano cartesiano Segundo, buscar la solución óptima en dicha región.

1er. PASO. DETERMINACION DE LA REGION DE SOLUCIONES FACTIBLES (S).
Considéremos el sistema de coordenadas rectangulares descrito por X_1 y X_2 que son el número de libreros a fabricar del tipo I y tipo II, respectivamente.

Como $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, únicamente se utilizará el primer cuadrante. Es decir, el lado derecho superior del plano cartesiano como a continuación se indica:

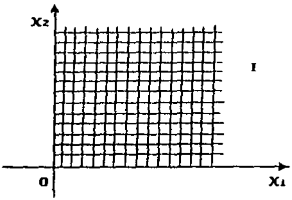


Figura 2.3.1

La representación gráfica de las desigualdades:

$$10\ X_1 + 8\ X_2 \leq 80 \qquad [1] \qquad (2.3.1)$$

$$.5\ X_1 + 1\ X_2 \leq 7 \qquad [2] \qquad (2.3.2)$$

es posible, si primeramente se consideran las desigualdades como igualdades. Esto es:

$$10\ X_1 + 8\ X_2 = 80 \quad [L_1] \qquad (2.3.3)$$

$$.5\ X_1 + 1\ X_2 = 7 \quad [L_2] \qquad (2.3.4)$$

Las cuales resultan ser las ecuaciones de dos líneas rectas en el plano X_1X_2. Despejando a la variable X_2, se tiene:

$$X_2 = \frac{-5}{4} X_1 + 10 \qquad (2.3.5)$$

$$X_2 = \frac{-1}{2} X_1 + 7 \qquad (2.3.6)$$

En la tabla 2.3.1 se dan valores para X_1 en cada recta, siendo un valor igual a cero (que es lo recomendable), así se obtienen los correspondientes valores de X_2.

TABLA 2.3.1

X_1	$X_2 = \frac{-5}{4} X_1 + 10$	$X_2 = \frac{-1}{2} X_1 + 7$
0	10	7
8	0	---
14	---	0

Localizando en el plano X_1X_2 los puntos obtenidos, se pueden trazar las rectas, las cuales se muestran en la siguiente figura.

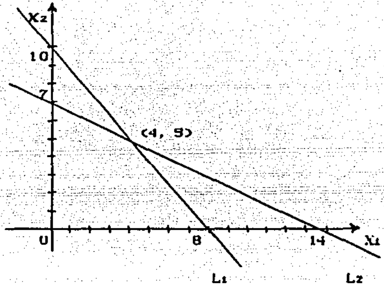
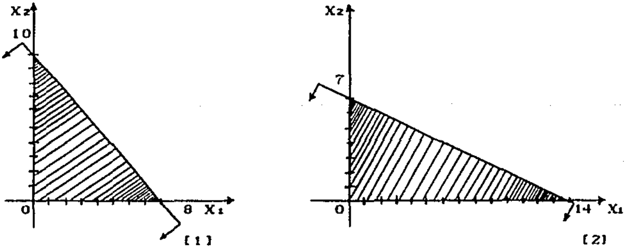
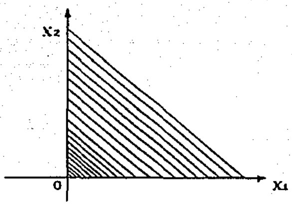


Figura 2.3.2

Una vez localizadas las rectas, ya es posible esquematizar las desigualdades (2.3.1) y (2.3.2), así como también las condiciones de no-negatividad. Estas se indican sombreadas en las figuras 2.3.3; (a), (b) y (c) respectivamente.



(a) (b)



(c)

Figura 2.3.3

Ahora bien las zonas resultantes, las podemos pensar como conjuntos de puntos, de tal forma que las podamos representar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\mathbb{A} = \{ (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : 10 X_1 + 8 X_2 \leq 80 \}$$

$$\mathbb{B} = \{ (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : .5 X_1 + 1 X_2 \leq 7 \}$$

$$\mathbb{C} = \{ (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : X_1, \quad X_2 \geq 0 \}$$

Esto tiene como resultado, el que, si se quiere encontrar la región en que se satisfagan simultáneamente las condiciones de disponibilidad de madera, barniz y la no negatividad. Entonces se tienen que encontrar los puntos (X_1, X_2) que queden comprendidos en la región (S) resultante de la intersección de los conjuntos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$. Dicha región se muestra sombreada en la figura 2.3.4.

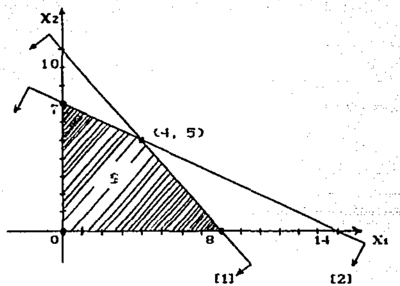


Figura 2.3.4

Los puntos (X_1, X_2) contenidos en la región sombreada son los candidatos a ser considerados como la solución del problema, de ahí la denominación de Región de Soluciones Factibles. De otra forma los puntos que no quedan en la región no satisfacen simultáneamante las condiciones, como los siguientes tres puntos:

P_1 = (1, 8). Evaluándose, se tiene:

$$10(1) + 8(8) = 74 \leq 80$$
$$.5(1) + 1(8) = 8.5 \geq 7$$
$$1 \geq 0, \quad 8 \geq 0.$$

Este punto cumple con la disponibilidad de madera y la condición de no-negatividad, pero no con la de barniz.

P_2 = (9, 1).

$$10(9) + 8(1) = 98 \geq 80$$
$$.5(9) + 1(1) = 5.5 \leq 7$$
$$9 \geq 0, \quad 1 \geq 0.$$

Lo cual indica, que cumple con la disponibilidad de barniz y con la condición de no-negatividad, pero no con la de madera.

P_3 = (10, 10).

$$10 (10) + 8 (10) = 180 \geq 80$$
$$.5 (10) + 1 (10) = 15 \geq 7$$
$$10 \geq 0, \quad 10 \geq 0.$$

Este punto cumple con la condición de no-negatividad, sin embargo no cumple con las condiciones en la disponibilidad de madera y barniz.

2o. PASO. DETERMINACION DE LA SOLUCION OPTIMA.

Es de interés ahora, buscar aquellos puntos de la región para los cuales, el valor de Z de la función objetivo alcance el mayor valor posible. Ya que de lograrse, se habrá resuelto el problema presentado a los alumnos. Aunque esto a primera vista no parece sencillo, ya que en la región hay un número infinito de puntos que cumplen con las restricciones. Empecemos con el punto (0, 0), obteniéndose:

$$10 (0) + 8 (0) = 0 \leq 80$$
$$.5 (0) + 1 (0) = 0 \leq 7$$
$$0 \geq 0, \quad 0 \geq 0.$$

El cual cumple con todas las restricciones, pero con una utilidad:

$$Z = 300 (0) + 250 (0) = 0.$$

Para el punto (3, 3) que se encuentra dentro de la región, se tiene:

$$10 (3) + 8 (3) = 54 \leq 80$$
$$.5 (3) + 1 (3) = 4.5 \leq 7$$
$$3 \geq 0, \quad 3 \geq 0.$$

Cumple con todas las restricciones y produce una utilidad de:

$$Z = 300 (3) + 250 (3) = 1\,450$$

que ya representa una utilidad mucho mejor que para el punto (0, 0)

Si el punto es (0, 7), que es un vértice de la región, se tiene:

$$10 (0) + 8 (7) = 56 \leq 80$$
$$.5 (0) + 1 (7) = 7 \leq 7$$
$$0 \geq 0, \quad 7 \geq 0.$$

el cual mejora aún más el valor de Z, ya que Z = 1750.

Sin embargo, este procedimiento no es práctico. Por lo que, para simplificar la búsqueda del punto o los puntos de la región que garanticen la utilidad óptima, se analizará el comportamiento geométrico de la función de utilidad.

$$Z = 300 X_1 + 250 X_2.$$

Esto se logrará asignándole valores a Z, por ejemplo, si Z = 750, se tiene:

$$750 = 300 X_1 + 250 X_2 \qquad (2.3.7)$$

de donde

$$X_2 = \frac{-6}{5} X_1 + 3 \qquad (2.3.8)$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (0, 3), (5/2, 0), los cuales permiten hacer su trazo que a continuación se ilustra:

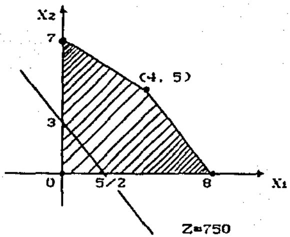


Figura 2.3.5

Obsérvese que los puntos (0, 3) y (5/2, 0) cumplen con todas las restricciones. Es decir:

$$10\ (\ 0\ ) + 8\ (\ 3\ ) = 24 \le 80$$
$$.5\ (\ 0\ ) + 1\ (\ 3\ ) = 3 \le 7$$
$$0 \ge 0, \qquad 3 \ge 0.$$

$$10\ (\ 5/2\ ) + 8\ (\ 0\ ) = 25 \le 80$$
$$.5\ (\ 5/2\ ) + 1\ (\ 0\ ) = 1.25 \le 7$$
$$5/2 \ge 0, \qquad 0 \ge 0.$$

con una utilidad de:

$$Z = 300\ (\ 0\ ) + 250\ (\ 3\ ) = 750$$
$$Z = 300\ (\ 5/2\ ) + 250\ (\ 0\ ) = 750$$

Además cualquier otro punto de la recta que se encuentre dentro de la región, también tendrá el mismo valor de utilidad igual a 750.

Una vez considerada esta recta, lo que se puede hacer a continuación es dar otros valores a Z, de tal forma que unos sean inferiores a 750 y otros mayores. Por ejemplo:

$$0 = 300\ X_1 + 250\ X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{-6}{5} X_1$$

$$100 = 300\ X_1 + 250\ X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{-6}{5} X_1 + \frac{2}{5}$$

$$1000 = 300\ X_1 + 250\ X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{-6}{5} X_1 + 4$$

$$2000 = 300\ X_1 + 250\ X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{-6}{5} X_1 + 8$$

$$3000 = 300\ X_1 + 250\ X_2 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{-6}{5} X_1 + 12$$

De donde se observa, que son las ecuaciones de líneas rectas con pendiente igual a -6/5. Por lo que son paralelas entre sí, estas rectas se muestran en la figura 2.3.6.

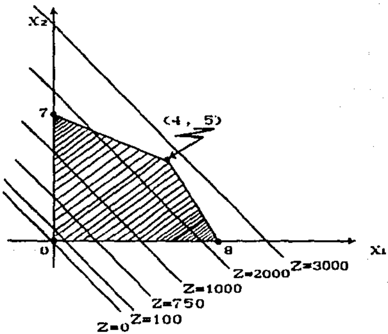


Figura 2.3.6

Gráficamente se observa que al desplazar la función objetivo Z hacia abajo, su valor disminuye. Por otra parte, al desplazarla hacia arriba, su valor aumenta. De donde, los puntos comprendidos entre, el valor de Z = 2000 y Z = 3000 parecen ser los importantes.

Lo anterior conduce a que, habrá que lograr el máximo desplazamiento de la función objetivo hacia arriba, de tal forma que no se violen las restricciones dadas (que no rebase la zona sombreada) y localizar el punto que garantize el mayor valor de Z.

El esquema geométrico indica que ésto se logrará en el punto de coordenadas (4, 5). Por lo tanto, este es el punto óptimo buscado, de donde:

$$X_1^* = 4 \text{ libreros del tipo I a fabricar}$$

$$X_2^* = 5 \text{ libreros del tipo II a fabricar.}$$

los cuales producen una venta óptima de:

$$Z^* = 300 (4) + 250 (5) = 2\ 450.$$

Que al agregarle los tres ceros omitidos al inicio y representando la cantidad en pesos, resultan ser $ 2,450,000.00 con lo que la Sociedad de Alumnos ya estaría en mejores condiciones de comprar la computadora.

Es así, que con este problema se ha podido ilustrar en qué consiste encontrar la solución de un problema de programación lineal, esto a partir de un proceso geométrico, el cual a su vez, es aplicable en general a cualquier problema que involucre dos variables de decisión y cuya justificación se desarrollará en la siguiente sección.

2.4 CONCEPTOS DE PROGRAMACION LINEAL

En esta sección se definen los conceptos y se explica parte de la teoría de programación lineal, mediante la formalización de los resultados empleados intuitivamente en nuestro ejemplo guía. Antes de proseguir enmarquemos el siguiente aspecto histórico.

» A finales del verano de 1947 se conjunto el trabajo de un gran número de matemáticos al publicar el Dr. George B. Dantzig el Método Simplex que es un procedimiento que resuelve sistemas de ecuaciones y/o desigualdades lineales en presencia de una función objetivo también lineal. A partir de este momento se emprendió un gran desarrollo en esta nueva teoría matemática a la cual se le llamó Programación Lineal que resulta ser sumamente útil en la solución de una amplia gama de problemas prácticos.

Tradicionalmente el tema de desigualdades lineales ocupaba un lugar significativo en los modelos de economía antes de que se formalizará la programación lineal, en este contexto se ubican las ideas de John Von Neumann para desarrollar la teoría del equilibrio económico, 1932. Similarmente W. Leontieff realiza la descripción de las relaciones interindustriales de una economía, 1936. Una faceta importante, aunque remota, la constituye el trabajo realizado por Quesnay, 1759, cuyos estudios tuvieron una considerable influencia en los precursores de la programación lineal como los antes citados y en L. Kantorovich quien en 1939 publica una extensa monografía intitulada "Métodos Matemáticos en la Organización y Planeación de la Producción".

En la década de los cincuenta queda cimentada la programación lineal con su aplicación en distintas áreas como la industria, la agricultura, la alimentación y sistemas de salud, entre otras. La aportación teórica para su estructuración recibe gran impulso y en este sentido citamos a H. Kuhn y A. Tucker al igual que Von Neumann que indica las bases de lo que sería la Dualidad y conjetura la relación existente entre la programación lineal y la teoría de juegos de suma cero para dos personas.«

Como se recordará, el modelo matemático del problema de la Sociedad de Alumnos era el siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 300\, X_1 + 250\, X_2 \qquad (2.4.1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10\, X_1 + 8\, X_2 &\leq 80 \\ .5\, X_1 + 1\, X_2 &\leq 7 \end{aligned} \qquad (2.4.2)$$

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0. \qquad (2.4.3)$$

Si se observa, el modelo básicamente esta formado de tres partes. Primero, la función (2.4.1) para la cual se busca obtener el valor óptimo que aseguraba la mejor venta posible de los libreros. Segundo, las desigualdades (2.4.2) indicaban que había limitaciones en la disponibilidad de los recursos de madera y barniz. La tercera componente (2.4.3) que aseguraba la construcción o factibilidad de los libreros.

Lo anterior lo podemos formalizar en la siguiente:

<u>DEFINICION 1</u>. *Un modelo de Programacion Lineal, se escribe como:*

$$\text{Optimizar } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \qquad (2.4.4)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &\leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &\leq b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n &\leq b_m \end{aligned} \qquad (2.4.5)$$

$$X_1, \quad X_2, \dots \quad, X_n \geq 0. \qquad (2.4.6)$$

Donde la palabra óptimizar puede significar maximizar ó minimizar. Así para nuestro ejemplo guía significó maximizar ganancias. Mientras que, para algún otro problema podría ser minimizar costos.

A la función lineal (2.4.4) se le llama *función objetivo* o *función de utilidad*. Las desigualdades lineales (2.4.5) se conocen como *restricciones* o *condiciones* del problema. De aquí las desigualdades "menor o igual", $\leq$, pueden ser reemplazadas por "mayor o igual", $\geq$, o bien por igualdades. Esto depende de la naturaleza del problema a resolver.

La restricción (2.4.6) es llamada *condición de no-negatividad*.

Reescribiendo el modelo matricialmente, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\text{Optimizar } Z = C\,X \\
&\text{sujeto a} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.4.7) \\
&\qquad\qquad A\,X \leq b \\
&\qquad\qquad\;\; X \geq 0.
\end{aligned}
$$

Esto nos permite definir las componentes de cada una de las tres partes anteriores; Al vector renglón $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de n-componentes, se le llama *vector de precios o costos unitarios*. El vector columna X con n-componentes, se le denomina *vector de actividades* y a sus componentes como *variables de decisión*. El vector columna b con m-componentes, se le conoce como *vector de disponibilidad de recursos*. El vector 0 con n-componentes, es el vector cero. Finalmente la matriz A de m-renglones con n-columnas, se le denomina *matriz de coeficientes tecnológicos* cada elemento a_{ij} con $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$ representa el número de unidades del recursos i que se necesita para producir una unidad de la actividad j.

Es así que el planteamiento del problema de la Sociedad de Alumnos resulta ser un problema de programación lineal, el cual tuvo su solución a través de un proceso geométrico en el plano cartesiano. En general, si consideramos problemas que involucren únicamente dos variables de decisión, el modelo queda:

$$
\begin{array}{l}
\text{Optimizar } Z = c_1X_1 + c_2X_2 \\
\text{sujeto a} \\
\qquad a_{11}X_1 + a_{21}X_2 \leq b_1 \\
\qquad a_{21}X_1 + a_{21}X_2 \leq b_2 \\
\qquad \ldots \\
\qquad a_{m1}X_1 + a_{21}X_2 \leq b_m \\
\\
\qquad X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0.
\end{array}
\qquad (2.4.8)
$$

Por otra parte, en el problema guía se había encontrado que algunos puntos del plano satisfacían las restricciones (2.4.2), mientras que otros no. A continuación se dan cinco puntos con estas características.

$$P_1 = (10, 10) \Rightarrow \begin{array}{l} 10\,(10) + 8\,(10) = 180 \geq 80 \\ .5\,(10) + 1\,(10) = 15 \geq 7 \end{array}$$

$$P_2 = (3, 3) \Rightarrow \begin{array}{l} 10\,(3) + 8\,(3) = 54 \leq 80 \\ .5\,(3) + 1\,(3) = 4.5 \leq 7 \end{array}$$

$$P_3 = (-1, 2) \Rightarrow \begin{array}{l} 10\,(-1) + 8\,(2) = 6 \leq 80 \\ .5\,(-1) + 1\,(2) = 1.5 \leq 7 \end{array}$$

$$P_4 = (-3, -2) \Rightarrow \begin{array}{l} 10\,(-3) + 8\,(-2) = -46 \leq 80 \\ .5\,(-3) + 1\,(-2) = -3.5 \leq 7 \end{array}$$

$$P_5 = (4, -3) \Rightarrow \begin{array}{l} 10\,(4) + 8\,(-3) = 16 \leq 80 \\ .5\,(4) + 1\,(-3) = -1 \leq 7. \end{array}$$

El punto P_1 no cumple con las restricciones, *mientras* que P_2, P_3, P_4 y P_5 sí las verifican. Estos cinco puntos se muestran en la figura 2.4.1.

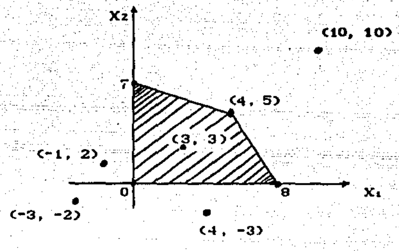


Figura 2.4.1

Ahora bien de los puntos P_2, P_3, P_4 y P_5 los tres últimos no cumplen con la condición de no-negatividad y sólo el punto P_2 la satisface. A la clase de puntos del plano que satisfacen ambas condiciones los caracterizamos en la siguiente definición.

DEFINICION 2. *Solucion Factible.* Es aquella solución dada por el vector columna X que satisface las condiciones:

$$A\ X \leq b$$
$$X \geq 0.$$

Una vez que se han localizado a todos los puntos en el plano que cumplen con ser soluciones factibles, ha quedado determinada una región (S) con características específicas. Para el problema guía sería la que se muestra en la siguiente figura.

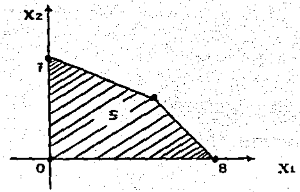


Figura 2.4.2

Como se observa dicha región esta determinada únicamente por la intersección de líneas rectas y en ella se encuentran los puntos que son soluciones factibles. A continuación especificamos esta región.

DEFINICION 3. *Región de Soluciones Factibles.* Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

Para el plano se denota como: $S = \{ X \in R^2 : A X \leq b, X \geq 0 \}$

Los puntos esquina que definen a S, como lo es el (0, 0), (8, 0) (4, 5) y (0, 7) del problema juegan un papel muy importante en la búsqueda de la solución del problema como más adelante se conocerá, por el momento los definimos.

DEFINICION 4. *Punto Extremo.* Un punto extremo X, es un vértice de la región de soluciones factibles.

Finalmente en el problema se tuvieron puntos, los cuales, algunos fueron mejor solución que otros, en el sentido de que al evaluarlos en la función objetivo, ésta mejoraba su valor, sin embargo el punto (4, 5) resulto ser el mejor entre todos, motivo por el cual le damos un nombre especial.

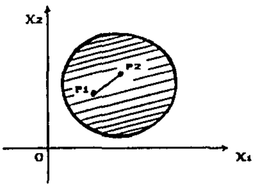
DEFINICION 5. *Solución Optima* (maximizando). El vector columna X^* es una solución óptima[1] de un problema de programación lineal, si es solución factible y además cumple:

$$C X^* \geq C X, \quad \forall X \in S.$$

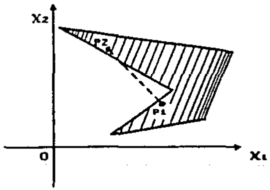
A continuación se enuncian dos teoremas que complementan el estudio realizado hasta el momento, el primero se refiere a una importante propiedad de la región de soluciones factibles y el segundo proporciona la información relevante en la búsqueda de la mejor solución de un problema de programación lineal mediante la relación existente entre la función objetivo y la región de soluciones factibles.

TEOREMA 1. *La región de soluciones Factibles (S) es un conjunto convexo.*

Se entiende por conjunto convexo aquel que, dados dos puntos cualesquiera dentro del conjunto, el segmento de recta que los une esta contenido completamente dentro del conjunto. A continuación se ilustra un conjunto convexo y uno que no lo es.



(a)
Conjunto convexo



(b)
Conjunto no-convexo

Figura 2.4.3

[1]El óptimo podría alcanzarse en toda una arista de S.

Sin embargo la región de soluciones factibles S no tiene la forma del conjunto convexo de la figura 2.4.3 (a), sino más bien como la que sigue.

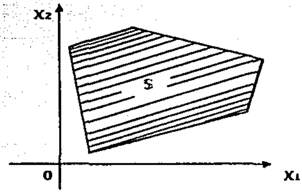


Figura 2.4.4

Ello se debe a que esta delimitada por la intersección de líneas rectas que son el resultado de las restricciones del problema, las cuales son ecuaciones y/o desigualdades lineales y los vértices son los puntos extremos. Si la región resultante es cerrada se le conoce como poliedro convexo.

TEOREMA 2. *La funcion objetivo de un programa de programacion lineal obtiene su valor maximo (o minimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.*

En la siguiente figura (2.4.5), S, es la región de soluciones factibles de un problema de programación lineal, en donde Zo es una posición específica de la función objetivo. El teorema 2 nos dice que, ya no es necesario considerar a todos los puntos que contiene S que como ya se mencionó son una infinidad, sino que ahora bastará con desplazar adecuadamente la función objetivo hacia los puntos extremos, los cuales son un número finito, evaluarlos en la función objetivo y determinar en cuál se tiene la mejor utilidad.

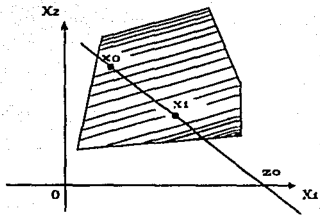


Figura 2.4.5

Hay que notar que cualquier punto que este comprendido en el segmento determinado por la intersección de la función objetivo y S, tiene la misma utilidad. En la figura (2.4.5) el punto Xo y el punto X_1 ilustran esta situación para la posición de Zo.

Por otra parte, cuando se menciona el desplazamiento de la función objetivo, este se entiende como la obtención de rectas paralelas de dicha función una vez que se determina una posición de inicio.

Finalmente con las anteriores definiciones y los dos teoremas, podemos enunciar el procedimiento a seguir para encontrar la solución de un problema de programación lineal.

METODO GRAFICO :

Paso 1. Determinar la Región de Soluciones Factibles.

Paso 2. Obtener los Puntos Extremos.

Paso 3. Evaluar la Función Objetivo. □

2.5 PROBLEMAS TIPICOS DE PROGRAMACION LINEAL.

A continuación se muestran tres problemas de programación lineal. Esto se hace con el fin de consolidar las ideas expuestas anteriormente, así como para ejemplificar el panorama de las aplicaciones que se tiene en esta área de la matemática .

En cada problema se mantiene, aunque resumida, la metodología que se propuso en el desarrollo de las secciones 2.2, 2.3 y 2.4.

I) PROBLEMA DE LA DIETA.

Un granjero para la alimentación de sus vacas necesita comprar dos tipos de alimentos, los cuales contienen proteínas, carbohidratos y grasas en las cantidades y costos que se indican en la tabla 2-5-1. Los demás ingredientes de relleno que pudierá contener cada alimento no se considerán. El sabe que , cada vaca debe recibir diariamente por lo menos 90 gmos de proteínas, 100 gmos de carbohidratos y 30 gmos de grasas.

¿ Qué cantidad de cada alimento deberá comprar con el fin de obtener una alimentación adecuada a un costo mínimo ?

TABLA 2-5-1

ALIMENTO	PROTEINAS (g/Kg)	CARBOHIDRATOS (g/Kg)	GRASAS (g/Kg)	COSTO ($/Kg)
I	20	50	20	500
II	30	25	35	300

PROGRAMA LINEAL:

Variables de decision:

X_1 = Cantidad del alimento I a comprar

X_2 = Cantidad del alimento II a comprar.

Funcion objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 500\ X_1 + 300\ X_2$$

Restricciones:

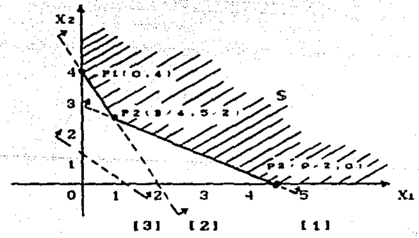
$20\ X_1 + 30\ X_2 \geq 90$ [1] protoínas

$50\ X_1 + 25\ X_2 \geq 100$ [2] carbohidratos

$20\ X_1 + 35\ X_2 \geq 30$ [3] grasas

$X_1,\quad X_2 \geq 0$ [4].

REGION DE SOLUCIONES FACTIBLES



VALORES DE LA FUNCION OBJETIVO

PUNTO EXTREMO	X_1	X_2	Z
P_1	0	4	1200
P_2^*	3/4	5/2	1125
P_3	9/2	0	2250

Se tiene que P_2 = (3/4, 5/2) resulta ser el punto extremo en donde la función objetivo obtiene su valor mínimo. Siendo entonces que el granjero deberá comprar 0.750 Kg. del alimento I y 2.5 Kg. del alimento II para cada vaca diariamente con el fin de propocionarles una alimentación adecuada a un costo mínimo de $ 1 125.00.

Como se observa la región de soluciones factibles no es cerrada o acotada, sin embargo sigue siendo un conjunto convexo.

a) *PROBLEMA DE INVERSION.*

Una persona dispone de un capital de $1 000 000.00 que puede trabajarlos en dos tipos de inversión ,A y B, produciendo 10% y 5% anualmente, respectivamente. Debido a ciertas condiciones bancarias considera que al menos el 20% del capital se destinará a la inversión A, no más del 50% para la B y la cantidad invertida en B no debe exceder las cinco terceras partes de la cantidad en A.

¿ Qué cantidad le conviene colocar en cada inversión con el fin de obtener el mayor interés posible ?

PROGRAMA LINEAL:

Variables de decisión:

X_1 = Cantidad a invertir en A

X_2 = Cantidad a invertir en B.

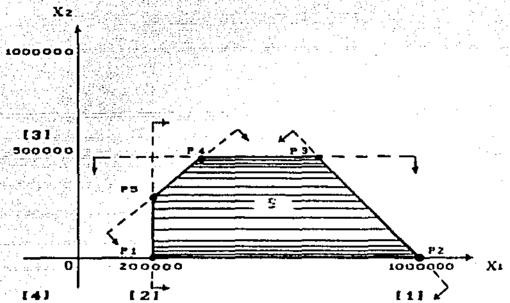
Función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = \frac{1}{10} X_1 + \frac{1}{20} X_2$$

Restricciones:

$$X_1 + X_2 \leq 1000\,000 \qquad [\,1\,]$$
$$X_1 \geq 200\,000 \qquad [\,2\,]$$
$$X_2 \leq 500\,000 \qquad [\,3\,]$$
$$-5X_1 + 3X_2 \leq 0 \qquad [\,4\,]$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0 \qquad [\,5\,]$$

REGION DE SOLUCIONES FACTIBLES



VALORES DE LA FUNCION OBJETIVO

PUNTOS EXTREMOS	X_1	X_2	Z
P_1	200 000	0	20 000
P_2^*	1000 000	0	100 000
P_3	500 000	500 000	75 000
P_4	300 000	500 000	55 000
P_5	200 000	1000000/3	36 000

El punto óptimo es P_2, por consiguiente le conviene colocar todo el capital en la inversión A. Esto le proporciona un interés de $ 100 000.00.

3) PROBLEMA AGRICOLA.

En una cooperativa de una región agrícola del Estado de Hidalgo, desean conocer qué cantidad de hectáreas de cada producto les conviene cultivar para obtener una utilidad máxima bajo el siguiente programa. Los recursos con que cuentan son: 15 has de tierra, 96 hrs de mano de obra y $ 360 000.00 de capital.

Sus actividades reales, o sea lo que se puede cultivar dada la naturaleza del suelo es maíz y trigo. Los correspondientes coeficientes técnicos para el cultivo del maíz son: una ha. de tierra, 8 hrs.-hombre y $ 36 000.00 de capital, con lo que se espera obtener un ingreso de $ 80 000.00 al vender el producto. Los coeficientes técnicos para el trigo, de manera similar son: una ha. de tierra, 8 hrs.-hombre y $ 24 000.00 de capital, esperando obtener $ 60 000.00 por la venta del producto.

<u>PROGRAMA LINEAL:</u>

Variables de decisión:

X_1 = Número de has a sembrar de maíz
X_2 = Número de has a sembrar de trigo.

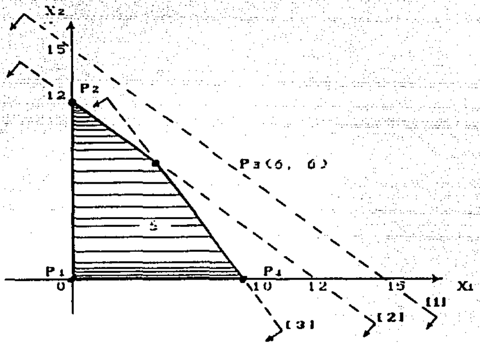
Función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 44\ 000\ X_1 + 36\ 000\ X_2$$

Restricciones:

$$X_1 + X_2 \le 15 \qquad [\ 1\ ]\ \text{tierra}$$
$$8\ X_1 + 8\ X_2 \le 96 \qquad [\ 2\ ]\ \text{trabajo}$$
$$36\ 000\ X_1 + 24\ 000\ X_2 \le 360\ 000 \qquad [\ 3\ ]\ \text{capital}$$
$$X_1,\ X_2 \ge 0.$$

REGION DE SOLUCIONES FACTIBLES



VALORES DE LA FUNCION OBJETIVO

PUNTO EXTREMO	X_1	X_2	Z
P_1	0	0	0
P_2	0	12	432 000
P_3*	6	6	480 000
P_4	10	0	440 000

El valor óptimo lo proporciona el punto extremo P_3, por lo que les conviene cultivar seis has de maíz y seis has de trigo. Esto les permitirá recuperar el capital invertido y obtener una ganancia cuando se vendan los dos productos.

CAPITULO 3

ANALISIS DE REDES

3.1 INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo es familiarizar al estudiante con el concepto de red, que es una clase de modelo matematico con el que escasamente ha trabajado a pesar de ser un valioso recurso para encontrar la solución a una gran diversidad de problemas prácticos que se presentan en ingeniería, planeación educativa y administración, entre otras areas. En particular podemos citar los problemas de comunicación (redes ferroviarias; eléctricas, autotransporte, etc.), producción-distribución y flujo de dinero.

Para ello, en la sección 3.2 se considera un problema típico que es resuelto intuitivamente mediante la aplicación de la teoría redes que se utilizará para motivar este estudio. Este problema se refiere a la manera en que habrá de construirse una red eléctrica que comunique a cinco ciudades aledañas a un costo minimo, cuya solución se da al encontrar el árbol de peso mínimo que resulta de la red asociada al problema. En la sección 3.3 se enuncia un problema que consiste en indicar la ruta que deberá ser recorrida por una persona que parte de una ciudad con destino a otra, de tal forma que el recorrido sea mínimo, este se resuelve al encontrar la ruta más corta entre dos vértices que representan dichas ciudades en la red correspondiente al problema.

La sección 3.4 esta dedicada a proporcionar los elementos necesarios de Teoría de Gráficas para comprender los algoritmos que resuelven formalmente los dos problemas de redes propuestos. Para encontrar el árbol de peso mínimo se hace uso del algoritmo de Kruskal, el cual se explica en la sección 3.5 en donde además se resuelve otro problema con el fin de ilustrar este algoritmo.

Para concluir el capítulo en la sección 3.6 se menciona la manera de resolver el problema de cómo encontrar la ruta más corta entre dos vértices en una red, esto se logra mediante la aplicación del algoritmo de Dijkstra, también se acompaña de un ejemplo que permite identificar aún más el método.

3.2 ¿COMO CONSTRUIR LA RED ELECTRICA?.

En una gran diversidad de problemas prácticos surge a menudo la necesidad de su representación gráfica mediante un esquema de puntos y líneas entre ellos que describan su situación y a través de ahí realizar un análisis que permita encontrar su solución. Esto da como resultado la creación de eficaces modelos matemáticos conocidos con el nombre de RED, los cuales permiten visualizar la situación real del problema originando que la solución sea encontrada directamente o bien mediante la búsqueda sistemática de algún algoritmo. En este contexto se encuentra el problema que ha continuación se trata.

PROBLEMA 1.

La compañía de Luz y Fuerza en su proyecto de expansión planea la implantación de sus servicios en cinco ciudades aledañas. Las distancias en kilómetros que hay entre cada ciudad se indican en la tabla 3.2.1. Para tener un ahorro en los costos de construcción la compañía tiene como objetivo minimizar la distancia total de tal forma que todas las ciudades queden comunicadas para proporcionar el servicio.

¿ Cómo deberá de construirse la red eléctrica para lograr su objetivo la compañía ?

TABLA 3-2-1

CIUDAD	A	B	C	D	E
A	0	10	13	8	11
B	10	0	7	12	9
C	13	7	0	2	5
D	8	12	2	0	4
E	11	9	5	4	0

La tabla 3.2.1 muestra las distancias entre las cinco ciudades, las cuales están indicadas por las letras A, B, C, D y E. El cero en la diagonal es la distancia de una ciudad a ella misma.

Obsérvese que la tabla es simétrica con respecto a la diagonal. Es decir, los números a_{ij} en la parte superior de la diagonal son exactamente los mismos que en la parte inferior solo que con los indices intercambiados a_{ji}. con ello se hace referencia a que da lo mismo considerar la distancia de una ciudad i a la ciudad j, que de la ciudad j a la ciudad i (Donde i,j pueden ser A, B, C, D o E).

Una forma de atacar el problema sería asociarle a la tabla 3-2-1 una matriz que en este caso, sería una matriz de distancias cuyos elementos a_{ij} representarán precisamente la distancia de la ciudad i a la ciudad j, como a continuación se ilustra.

$$
M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 10 & 13 & 8 & 11 \\
10 & 0 & 7 & 12 & 9 \\
13 & 7 & 0 & 2 & 5 \\
8 & 12 & 2 & 0 & 4 \\
11 & 9 & 5 & 4 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de distancias

En este contexto la solución estaría determinada por elementos algebraicos emanados del modelo matricial.

Por otra parte, un modelo que nos permite encontrar fácilmente la solución a este tipo de problemas y que nos da una representación gráfica "apegada a la realidad", es una RED. Antes de definirla, construiremos la red de nuestro problema. Se empieza por representar las ciudades A, B, C, D y E con pequeños círculos y unir éstos por medio de líneas a las que les asignaremos la distancia correspondiente entre ambas ciudades. Esto se ilustra en la figura 3.2.1.

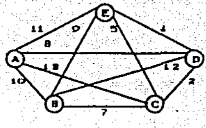


Figura 3.2.1

Con respecto a esta representación del problema, es conveniente hacer las siguientes observaciones:

a) La magnitud de cada línea que unen a cada pareja de círculos no corresponde a la distancia real que hay entre cada ciudad, sino que ésta es indicada por el valor que tiene asignado. Así por ejemplo, el segmento $\underline{AD}$ es mayor que el $\underline{AE}$ sin embargo le hemos asignado al primero 8 y al segundo 11.

b) El esquema que se exhibe no es único, es decir, pueden darse una gran diversidad de representaciones del problema manteniendo el mismo número de círculos y líneas, pero respetando el valor que corresponda a cada línea. La siguiente figura muestra otra representación del mismo problema.

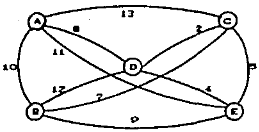


Figura 3.2.2

En este tipo de representaciones los círculos reciben el nombre de vértices o nodos, y las líneas que los unen se denominan aristas, asignandole valores reales a los vértices o a las aristas, a estos modelos gráficos los conoceremos con el nombre de red. Son una clase más de modelos matemáticos que se utilizan para resolver diversos problemas de optimización.

Se empieza por buscar ahora la solución del problema en nuestro modelo, que de ahora en adelante llamaremos red. Para ello, consideremos al problema en términos de este modelo, en cuyo caso los objetivos por cumplir son los siguientes:

1) Que los cinco vértices queden unidos.
(Que todas las ciudades queden comunicadas)

2) La distancia total de conexión entre los cinco vértices sea mínima. (La menor distancia en kilómetros empleada)

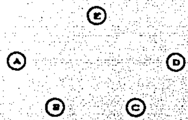
3) Indicar que aristas integran la red óptima.
(La solución del problema)

Para abordar el primer punto habrá que dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿ Cuántas aristas son necesarias para unir los cinco vértices?

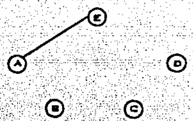
La respuesta la obtendremos a partir de la figura 3.2.1 al considerar únicamente los cinco vértices y posteriormente ir agregando aristas[1] de tal forma que las aristas entrantes su vértice final no coincida con uno de los vértices ya considerados en anteriores aristas; así proseguiremos hasta quedar los cinco vértices conectados (la primer arista la tomaremos arbitrariamente). En la figura 3.2.3 se ilustra secuencialmente este procedimiento.

[1] Por comodidad se omite su valor asignado.



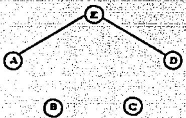
(a)

Vértices originales



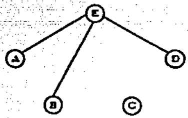
(b)

Se agrega la arista inicial



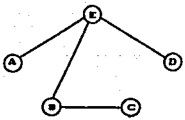
(c)

Se agrega la arista ED



(d)

Se agrega la arista EB



(e)

Se agrega la arista BC

Figura 3.2.3

En el inciso (e) se aprecia que han sido suficientes cuatro aristas para unir los cinco vértices siguiendo el anterior procedimiento.

Obsérvese que en el inciso (c) no convenía considerar la arista <u>AD</u> porque, si así fuera, aún faltarían dos vértices por unir y necesariamente se tendrían que utilizar otras dos líneas al menos para conectar todos los vértices. Esta situación se indica en la Figura 3.2.4.

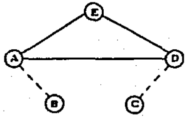
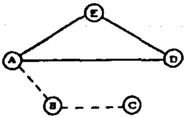
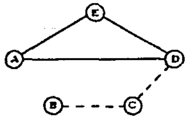


Figura 3.2.4

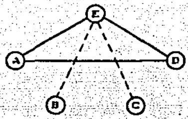
Las líneas punteadas indican una posible opción para unir los dos vértices restantes, aunque no es la única, como a continuación se ilustran otras tres posibilidades.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2.5

Una situación similar se tiene en el inciso (d) de la figura 3.2.3 al unir algunas de las aristas AB, AD o BD. Por ejemplo, si tomamos la AB se tiene:

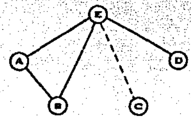


Figura 3.2.6

En este caso falta un vértice por conectar y al menos habría que utilizar otra arista para hacerlo, la línea punteada en la figura 3.2.6 indica una posibilidad.

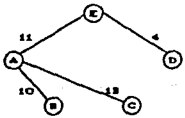
De la observación se aprecia, que al agregar una arista cuyo vértice final coincide con uno que ya fue considerado en otra arista, entonces resultan ser cinco aristas las que se utilizarían para que los cinco vértices queden unidos. Sin embargo, al evitar esta situación, resultan ser únicamente cuatro. Es decir, el número de vértices menos uno.

Por otro lado, es claro que con tres aristas no es posible unir los cinco vértices, pues siempre faltaría uno por unir.

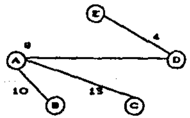
Podemos concluir que, para lograr el primer objetivo nos bastan cuatro aristas colocadas adecuadamente. En la figura 3.2.3 se hace ver que existen varias maneras de unir con cuatro aristas los cinco vértices o nodos.

Es conveniente especificar la situación que se presenta en la figura 3.2.4 y 3.2.6 con respecto a la secuencia de aristas que inciden en el mismo vértice, en este caso para la figura 3.2.4 la secuencia (E,A), (A,D), (D,E). Mientras que para la figura 3.2.6 se tiene (E,A), (A,B), (B,E). Cuando suceda este tipo de situaciones diremos que se ha formado un <u>ciclo</u> en la red.

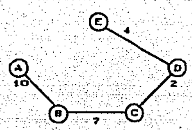
Pasemos ahora a considerar el segundo objetivo. Se empieza por establecer que se entiende por la <u>distancia total</u> de conexión (*DT*). Para ello diremos que es la suma de los valores asociados a cada arista que constituyen la conexión. A continuación se dan tres redes que forman parte de la red original para las cuales se calculará su distancia total.



(R_1)



(R_2)



(R3)

Figura 3.2.7

Las distancias totales son:

$$DT\ (R_1) = 10 + 13 + 11 + 4 = 38$$

$$DT\ (R_2) = 10 + 13 + 8 + 4 = 35$$

$$DT\ (R_3) = 10 + 7 + 2 + 4 = 23.$$

De estas tres redes, R_3 es la que tiene la menor distancia total, sin embargo, no se garantiza que ésta sea la menor que se obtenga de la red original. Aunque dicha comparación indica que debe existir alguna (Quizás no única) cuya distancia total sea mínima.

¿ Cómo encontrar la mejor solución ?

Enmarquemos la respuesta en los siguientes incisos.

a) Podemos determinar todas las soluciones posibles, comparar sus distancias totales y tomar la menor de ellas.

b) Se puede buscar un mecanismo de solución ya elaborado y aplicarlo.

La idea propuesta en el inciso a) es sin lugar a dudas un método seguro de llegar a dicha solución, sin embargo, después de hacer algunos intentos se vería que la dificultad para unir de diversas formas los cinco vértices crece extraordinariamente, aunque sepamos de antemano el número de posibilidades para hacerlo. En este caso existen $C_4^{10} = 210$ posibilidades (este número incluye algunos ciclos que desde luego no nos interesan).

En cuanto al inciso b), lo que en realidad se argumenta es la aplicación de un algoritmo de solución, estos consisten en una serie de pasos que nos permiten llegar a la solución deseada. Antes de recurrir a uno de ellos, intentemos construir el nuestro.

ALGORITMO *:

PASO UNICO.___ Tomé las 4 aristas de menor distancia. □

Suena bonito, pero veamos el resultado en la siguiente figura.

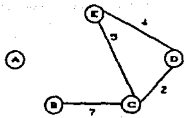


Figura 3.2.8

En el esquema se observa, que al considerar las primeras cuatro aristas de menor valor asignado, a quedado sin conectar el vértice A y ésto infringe la condición de que todos los nodos deben estar unidos. Por lo que nuestro algoritmo no funciona.

Retomemos el anterior razonamiento que no es del todo malo, ya que lo que se busca, es minimizar la distancia total y ésta es consecuencia de cada una de los valores de cada arista. Por lo que, sí hay que considerar, en efecto a las líneas de menor distancia.

Propongamos ahora el siguiente algoritmo para encontrar la solución óptima.

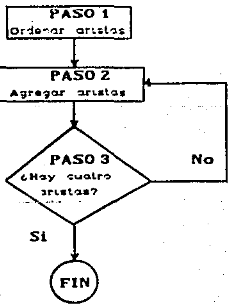
ALGORITMO **:

PASO 1.__Ordénese las diez aristas de menor a mayor de acuerdo al valor que tengan asignado.

PASO 2.__Agréguense las aristas de menor a mayor valor, pero de tal forma que no se formen ciclos.

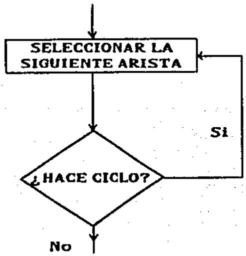
PASO 3.__Terminar cuando se tengan cuatro aristas. □

Este algoritmo lo podemos representar mediante el siguiente diagrama de flujo.



En el paso 2, obsérvese que seleccionamos la siguiente arista de menor valor, y después nos fijamos si forma ciclo con las anteriores que hemos seleccionado. Si forma ciclo, la desechamos y continuamos con la siguiente arista, hasta encontrar una que no forme ciclo. Este paso, lo podemos representar de la siguiente forma:

PASO 2



De esta forma podemos visualizar más comodamente la búsqueda de la solución a nuestro problema y no está por demás representar el diagrama de flujo en su conjunto, como a continuación se hace.

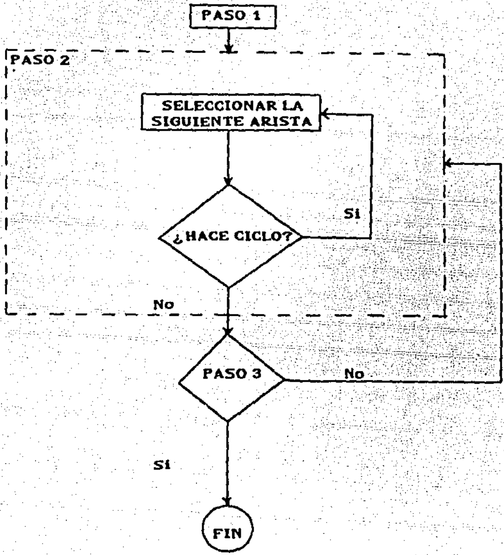
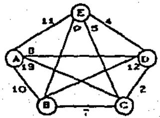


DIAGRAMA DE FLUJO CORRESPONDIENTE AL ALGORITMO ** DEL PROBLEMA 1

Apliquemos nuestro algoritmo ya mejorado. Para ello recordemos cuál era la red original.



RED ORIGINAL

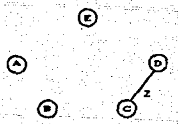
ALGORITMO ##:

ITERACION 1.

Paso 1.__*Ordenar las aristas.*

a_1=(C,D), a_2=(D,E), a_3=(C,E), a_4=(B,C), a_5 =(A,D)
a_6=(B,E), a_7=(A,B), a_8=(A,E), a_9=(B,D), a_{10}=(A,C)

Paso 2.__*Se elige la primer arista* a_1=(C,D)

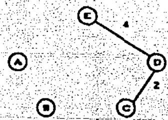


¿ *Forma ciclo ?*___ **NO. Entonces se agrega**
Número de aristas = 1.

Paso 3.__¿ *Numero de aristas = 4 ?*___ **NO. Volver al paso 2.**

ITERACION 2.

Paso 2.__*Se elige la arista* a2 = (D,E)



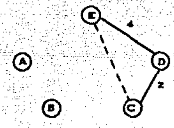
¿ *Forma ciclo* ?___NO. Entonces se agrega

Número de aristas = 2

Paso 3.__¿ *Numero de aristas* = 4 ?___NO. Volver al paso 2.

ITERACION 3.

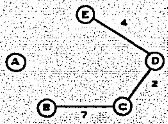
Paso 2.__*Se elige la arista* a3=(C,E).



¿ *Forma ciclo* ?___SI. Entonces no se agrega, volver al paso 2.

ITERACION 4.

Paso 2.__ ***Se elige la arista*** $a_4=(B,C)$.



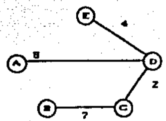
¿ *Forma ciclo* ?___**NO. Entonces se agrega.**

Número de aristas = 3.

Paso 3.__ ¿ *Número de aristas* = 4 ?___**NO. Volver al paso 2.**

ITERACION 5.

Paso 2.__ ***Se elige la arista*** $a_5=(A,D)$.



¿ *Forma ciclo* ?___**NO. Entonces se agrega.**

Número de aristas = 4

Paso 3___ ¿ *Número de aristas* = 4 ?___**SI. TERMINAR.** ***Se ha obtenido la la solución óptima.*** □

El algoritmo ** nos proporciona una distancia total mínima (*DTM*):

$$DTM = 2 + 4 + 7 + 8 = 21.$$

Se concluye, que las cinco ciudades pueden estar unidas con una distancia total mínima de 21 Kilómetros, la forma de hacerlo lo proporcionan las aristas en la red correspondiente a la quinta iteración.

De esta forma el personal de la Compañía de Luz y Fuerza ya se encontraría en mejores condiciones de tomar una decisión acertada para la construcción de la red eléctrica a un costo mínimo.

La eficacia de los pasos propuestos en el algoritmo ** se justificará más adelante en la sección 3.5 cuando enunciemos formalmente el algoritmo de Kruskal, que es uno de los existentes para resolver sistemáticamente este tipo de problemas, y que es en esencia el propuesto en la solución de nuestro problema.

3.3 ¿ QUE CAMINO DEBERA ELEGIR EL TRANSPORTISTA ?

A través de los viajes que el hombre realiza para trasladarse de un lugar a otro, desde tiempos muy remotos se ha cuestionado la manera de cubrir tales trayectos de la mejor manera posible, ya que de lograr ésto le acarrearía innumerables beneficios de toda índole. Así por ejemplo, nosotros en muchas ocasiones cuando queremos ir de una ciudad a otra, recurrimos a ver en el mapa los caminos que conducen a nuestro destino y elegimos el que nos parece más corto, sin embargo, no sabemos con certeza si la ruta elegida es la más corta.

El siguiente problema cae en este contexto, para el cual se encuentra su solución intuitivamente, para que posteriormente en la sección 3.6 se describa la manera sistemática de resolver esta clase de problemas.

PROBLEMA 2.

Una persona dedicada al transporte de mercancía que vive en la ciudad de Salamanca desea encontrar una ruta que minimice su traslado a la ciudad de Tijuana. Para ello, ha registrado la distancia en kilómetros en las carreteras que comunican a cinco ciudades intermedias; éstos datos se muestran en la tabla 3.3.1.

¿ Cuál deberá ser la mejor ruta posible para esta persona ?

TABLA 3.3.1

CIUDAD	S	A	B	C	D	E	T
S	0	1000	900	1400	M	2200	M
A	1000	0	M	200	1400	M	M
B	900	M	0	M	M	1200	M
C	1400	200	M	0	800	400	1000
D	M	1400	M	800	0	M	700
E	2200	M	1200	400	M	0	1000
T	M	M	M	1000	700	1000	0

En esta tabla las ciudades de Salamanca y Tijuana las hemos denotado por S y T respectivamente, mientras que a las cinco ciudades intermedias por A, B, C, D y E. La "M" significa que no hay conexión directa entre las ciudades correspondientes . El cero en la diagonal es la distancia de una ciudad a ella misma. Aquí también la tabla resulta ser simétrica con respecto a la diagonal y con ello se estipula que la distancia para ir de una ciudad a otra es la misma que de regreso (aunque no siempre sucede esto último).

En el problema 1 ya se había mencionado la importancia que se puede adquirir al asociarle a la tabla una matriz en la cual pueda inferirse la solución del problema. Analicemos nuevamente esta situación, para ello, en las cifras de la tabla omitamos dos ceros por comodidad y a M asignémosle el símbolo infinito "∞" para posteriormente aplicarle las leyes de la aritmética.

Matriz de distancias asociada al problema

$$
\mathbb{C} = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 10 & 9 & 14 & \infty & 22 & \infty \\
10 & 0 & \infty & 2 & 14 & \infty & \infty \\
9 & \infty & 0 & \infty & \infty & 12 & \infty \\
14 & 2 & \infty & 0 & 8 & 4 & 16 \\
\infty & 14 & \infty & 8 & 0 & \infty & 7 \\
22 & \infty & 12 & 4 & \infty & 0 & 10 \\
\infty & \infty & \infty & 16 & 7 & 10 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Donde cada elemento c_{ij} de $\mathbb{C}$ esta definido como:

c_{ij} = Distancia de la ciudad i a la ciudad j.

(Para i,j = S, A, B, C, D, E, T)

Como estamos interesados en minimizar la distancia entre cada ciudad, propondremos el siguiente producto de matrices que nos ayudará a encontrar la solución matricialmente del problema, y como se verá, no es el que comúnmente se nos ha enseñado. Definamos el producto #.[1]

DEFINICION. Sean $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ matrices cuadradas, entonces

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \,\#\, \mathbb{B}$$

Donde cada elemento c_{ij} de $\mathbb{C}$ es

$$c_{ij} = \min_{k} \left\{ a_{ik} + b_{kj} \right\} ; \; k = 1,2,\ldots,n.$$

Observe que para obtener los elementos c_{ij}, lo hacemos mediante los siguientes dos pasos:

Paso 1: Se toma el renglón i de $\mathbb{A}$ y la columna j de $\mathbb{B}$ como a continuación se indica.

[1] cfr. secc. 1.3, (2).

$$
\begin{array}{r}
\text{i-ésima} \rightarrow \\
\text{posición}
\end{array}
\begin{bmatrix}
 & & \\
a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{in} \\
 & &
\end{bmatrix}
\#
\begin{array}{c}
\text{j-ésima posición} \\
\downarrow \\
\begin{bmatrix}
b_{1j} \\
b_{2j} \\
\vdots \\
b_{nj}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

se obtienen las sumas:

$$a_{i1} + b_{1j}, \quad a_{i2} + b_{2j}, \ldots , a_{in} + b_{nj}.$$

Paso 2: Se toma el mínimo de estas sumas, este es c_{ij}. Es decir:

$$c_{ij} = \min_{k} \{ a_{ik} + b_{kj} \} \ ; \ k = 1, 2, \ldots , n.$$

El criterio que nos indicará que se ha obtenido la solución óptima consistirá en verificar que $\mathbb{C}^{K} = \mathbb{C}^{K+1}$ para algún número natural K. Esto significa que se ha encontrado la matriz de distancias más cortas para ir de una ciudad a otra pasando a lo más por $K-1$ ciudades intermedias. Es claro, que si siguiéramos calculando para $K+2$, $K+3, \ldots$ el resultado seguiría siendo el mismo. Esto es perfectamente lógico, ya que a nadie se le ocurriría pasar dos o más veces por una misma ciudad.

En nuestro caso, al efectuar esta "multiplicación" en la matriz de distancias por sí misma, estamos obteniendo la distancia más corta entre dos ciudades pasando a lo más por otra ciudad. Por ejemplo, si tomamos el elemento C_{ST}, estará determinado por el renglón S y la columna T correspondiente. Como se hace a continuación.

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & 0 & 10 & 9 & 14 & \infty & 22 & \infty \\
A & & & & & & & \\
B & & & & & & & \\
C & & & & & & & \\
D & & & & & & & \\
E & & & & & & & \\
T & & & & & & & \\
\end{array}
\;*\;
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & & & & & & & \infty \\
A & & & & & & & \infty \\
B & & & & & & & \infty \\
C & & & & & & & 16 \\
D & & & & & & & 7 \\
E & & & & & & & 10 \\
T & & & & & & & 0 \\
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & & & & & & & C_{ST} \\
A & & & & & & & \\
B & & & & & & & \\
C & & & & & & & \\
D & & & & & & & \\
E & & & & & & & \\
T & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Paso 1. $\{ a_{Sk} + b_{kT} \}$; $k = S, A, B, C, D, E, T.$

$$= \{ 0+\infty,\ 10+\infty,\ 9+\infty,\ 14+16,\ \infty+7,\ 22+10,\ \infty+0 \}$$

$$= \{ \infty,\ \infty,\ \infty,\ 30,\ \infty,\ 32,\ \infty \}$$

Paso 2. $C_{ST} = \min \{ \infty,\ \infty,\ \infty,\ 30,\ \infty,\ 32,\ \infty \} = 30.$

Esto quiere decir que la distancia más corta para ir de la ciudad de Salamanca a Tijuana pasando a lo más por una ciudad es 3000 kms, y habría que hacerlo por la ciudad intermedia C. (El valor de 14 determina a la columna correspondiente a C, mientras que 16 determina al renglón de C).

Hagamos el cálculo de C_{SE}. Es decir, encontrar la ruta más corta de la ciudad de Salamanca a la ciudad E pasando a lo más por una ciudad.

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & 0 & 10 & 9 & 14 & \infty & 22 & \infty \\
A & & & & & & & \\
B & & & & & & & \\
C & & & & & & & \\
D & & & & & & & \\
E & & & & & & & \\
T & & & & & & & \\
\end{array}
\;*\;
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & & & & & & 22 & \\
A & & & & & & \infty & \\
B & & & & & & 12 & \\
C & & & & & & 4 & \\
D & & & & & & \infty & \\
E & & & & & & 0 & \\
T & & & & & & 10 & \\
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & S & A & B & C & D & E & T \\
\hline
S & & & & & & C_{SE} & \\
A & & & & & & & \\
B & & & & & & & \\
C & & & & & & & \\
D & & & & & & & \\
E & & & & & & & \\
T & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Paso 1. $\{ a_{sk} + b_{kE} \}$; k = S, A, B, C, D, E, T.

$= \{ 0+22,\ 10+\infty,\ 9+12,\ 14+4,\ \infty+\infty,\ 22+0,\ \infty+10 \}$

$= \{ 22,\ \infty,\ 21,\ 18,\ \infty,\ 22,\ \infty \}$

Paso 2. $C_{SE} = \min \{ 22,\ \infty,\ 21,\ 18,\ \infty,\ 22,\ \infty \} = 18.$

Por lo que la ruta más corta de Salamanca a la ciudad E resulta ser de 1800 km. pasando también por la ciudad C.

Veamos que pasa en el cálculo de C_{BD}.

$$\begin{array}{c} \\ S\\A\\B\\C\\D\\E\\T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty & 12 & \infty \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right] \end{array} \# \begin{array}{c} \\ S\\A\\B\\C\\D\\E\\T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & \infty & & \\ & & & & 14 & & \\ & & & & \infty & & \\ & & & & 8 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & \infty & & \\ & & & & 7 & & \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ S\\A\\B\\C\\D\\E\\T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & C_{BD} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

Paso 1. $\{ a_{Bk} + b_{kD} \}$; k = S, A, B, C, D, E, T.

$= \{ 9+\infty,\ \infty+14,\ 0+\infty,\ \infty+8,\ \infty+0,\ 12+\infty,\ \infty+7 \}$

$= \{ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty \}$

Paso 2. $C_{BD} = \min \{ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\ \infty \} = \infty.$

Esto quiere decir que no hay ruta directa para ir de la ciudad B a la ciudad D, pasando a lo más por una ciudad.

De la misma manera podemos calcular las demás entradas de la matriz correspondiente al producto de nuestra matriz de distancias por ella misma. Más precisamente se tiene:

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \,\#\, \mathbb{C} = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 9 & 14 & \infty & 22 & \infty \\ 10 & 0 & \infty & 2 & 14 & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty & 12 & \infty \\ 14 & 2 & \infty & 0 & 8 & 4 & 16 \\ \infty & 14 & \infty & 8 & 0 & \infty & 7 \\ 22 & \infty & 12 & 4 & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 16 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \,\#\, \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 9 & 14 & \infty & 22 & \infty \\ 10 & 0 & \infty & 2 & 14 & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 0 & \infty & \infty & 12 & \infty \\ 14 & 2 & \infty & 0 & 8 & 4 & 16 \\ \infty & 14 & \infty & 8 & 0 & \infty & 7 \\ 22 & \infty & 12 & 4 & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 16 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 9 & 12 & 22 & 18 & 30 \\ 10 & 0 & 19 & 2 & 10 & 6 & 18 \\ 9 & 19 & 0 & 16 & \infty & 12 & 22 \\ 12 & 2 & 16 & 0 & 8 & 4 & 14 \\ 22 & 10 & \infty & 8 & 0 & 12 & 7 \\ 18 & 6 & 12 & 4 & 12 & 0 & 10 \\ 30 & 18 & 22 & 14 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Esta información nos indica que cada entrada es la distancia más corta de la ciudad i a la ciudad j (i,j = S, A, B, C, D, E, T) pasando a lo más por una ciudad.

Ahora si se quisiera encontrar la ruta más corta entre dos ciudades pero pasando a lo más por dos de ellas intermedias, lo que se tiene que obtener es $\mathbb{C}^3$, como a continuación se hace.

$$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \,\#\, \mathbb{C}^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 9 & 12 & 20 & 16 & 28 \\ 10 & 0 & 18 & 2 & 10 & 6 & 16 \\ 9 & 18 & 0 & 16 & 24 & 12 & 22 \\ 12 & 2 & 16 & 0 & 8 & 4 & 14 \\ 20 & 10 & 24 & 8 & 0 & 12 & 7 \\ 16 & 6 & 12 & 4 & 12 & 0 & 10 \\ 28 & 16 & 22 & 14 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

De aquí algunas distancias se han mejorado, por ejemplo $C_{ST} = 28$. Mientras que en $\mathbb{C}^2$ se tenía $C_{ST} = 30$.

La información que proporciona $\mathbb{C}^4$ es la ruta más corta entre dos ciudades pasando a lo más por tres ciudades intermedias. Es decir:

$$
\mathbb{C}^4 = \mathbb{C} \# \mathbb{C}^3 = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 10 & 9 & 12 & 20 & 16 & 26 \\ 10 & 0 & 18 & 2 & 10 & 6 & 16 \\ 9 & 18 & 0 & 16 & 24 & 12 & 22 \\ 12 & 2 & 16 & 0 & 8 & 4 & 14 \\ 20 & 10 & 24 & 8 & 0 & 12 & 7 \\ 16 & 6 & 12 & 4 & 12 & 0 & 10 \\ 26 & 16 & 22 & 14 & 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Nuevamente algunas distancias se han mejorado, y C_{ST} que en $\mathbb{C}^3$ tenía un valor de 28 ahora tiene 26.

Otro cálculo nos mostraría que $\mathbb{C}^5 = \mathbb{C}^4$, y con ello se estipula que se ha encontrado la solución óptima del problema. Es decir, la ruta más corta entre dos ciudades pasando a lo más por tres ciudades intermedias. Las distancias más cortas son las que indica la matriz $\mathbb{C}^4$.

Así que la solución matricial del problema, salir de la ciudad de Salamanca con destino a la ciudad de Tijuana de tal forma que el recorrido sea mínimo es 2600 km. Sin embargo, la matriz que nos indica este resultado, tiene la desventaja de no proporcionar explícitamente la información sobre cuál deben ser las ciudades intermedias por las que se habrá de hacer el recorrido.

Lo anterior es indicativo, que haciendo uso de una manera especial del álgebra de matrices, es posible encontrar la solución óptima a ciertos problemas, en particular al nuestro.

Por otro lado, retomemos el enfoque de encontrar la solución óptima a través de un modelo gráfico, como lo es una RED y aprovechar lo visto en el problema 1. Para ello, como en el problema se especifica que la persona viajará de la ciudad de Salamanca con destino a la ciudad de Tijuana y que la distancia de ida es igual a la de regreso. Haremos la lectura de la tabla de distancias considerando únicamente la parte superior con respecto a la diagonal, tomando primero el renglón y después la columna. Recordemos cuál era la tabla (omitiendo dos ceros en cada entrada).

TABLA DE DISTANCIAS

CIUDAD	S	A	B	C	D	E	T
S	0	10	9	14	M	22	M
A	10	0	M	2	14	M	M
B	9	M	0	M	M	12	M
C	14	2	M	0	8	4	16
D	M	14	M	8	0	M	7
E	22	M	12	4	M	0	10
T	M	M	M	16	7	10	0

Tratemos de representar las opciones en el recorrido que se puede seguir. Por ejemplo, para el nodo S la ruta inmediata la podemos indicar como lo muestra la siguiente figura.

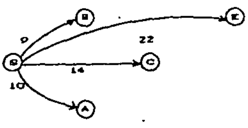


Figura 3.3.1

De igual forma podemos representar la ruta que se seguiría a partir del nodo A. Esta se indica en la figura 3.3.2.

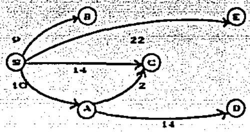
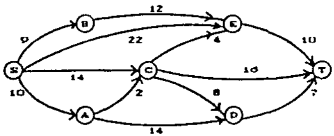


Figura 3.3.2

Si consideramos el avance que se realiza a partir de cada uno de los nodos restantes conforme se indica en la tabla, el resultado se reflejará en el esquema gráfico que se exhibe a continuación.



RED ASOCIADA AL PROBLEMA 2

Figura 3.3.3

De esta forma se representan gráficamente la diversidad de rutas a seguir con sus respectivas distancias asociadas a partir del nodo inicial S para llegar al nodo final T. Obsérvese que podría haberse tomado una doble dirección en algunas líneas, así por ejemplo, se puede ir de A a C y también de C a A, sin embargo se evitará ésto último al hacer la lectura en la tabla de distancias.

La diferencia entre esta red y la del problema 1, consiste en que las líneas tienen asociada una dirección con lo cual se estipula que únicamente se puede ir de un nodo i a un nodo j de la línea (i, j) y no al revés. A este tipo de líneas que tienen asociada una dirección las llamaremos ARCOS.

Una vez que se ha obtenido la red correspondiente del problema, se empieza a buscar su solución a través de nuestro modelo. Donde los objetivos que se tienen que cumplir son los siguientes:

1) Que los nodos S y T queden unidos. (la ciudad de Salamanca y Tijuana queden comunicadas).

2) Que la ruta sea la óptima. (la distancia recorrida sea la menor).

3) Indicar que arcos forman la ruta óptima. (La solución).

Con lo que respecta al primer punto, hay que notar que:

a) No es necesario que la ruta que se elija contenga a todos los nodos de la red.

b) La dirección de las flechas indican la trayectoria del nodo inicial S al nodo final T.

El inciso a) es evidente, mientras que en el b) lo que se indica es la existencia de por lo menos una ruta, a la cual le hemos llamado trayectoria, que une al nodo S con el nodo T que está constituida por los nodos y arcos intermedios, con lo cual se asegura que los nodos S y T quedan comunicados. Quedando satisfecho el primer punto.

Para abordar el segundo objetivo, consideremos tres trayectorias posibles de S a T, a las cuales las consideraremos como la secuencia de arcos que no repiten nodos en las cuales el nodo final de un arco es el nodo inicial del arco que le sigue en la secuencia. A continuación se indican tres trayectorias de S a T en la red del problema.

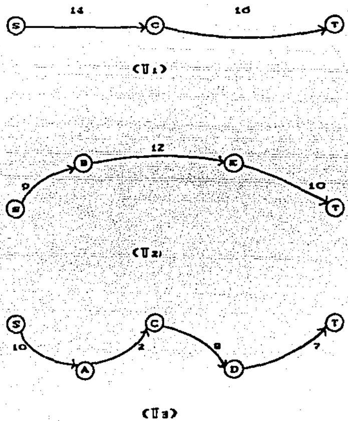


Figura 3.3.4

Para ello les calcularemos su distancia (D), que será la suma de los valores de los arcos que las forman. Es decir:

$$D(\Pi_1) = 14 + 16 + = 30$$
$$D(\Pi_2) = 9 + 12 + 10 = 31$$
$$D(\Pi_3) = 10 + 2 + 8 + 7 = 27.$$

De la misma manera podríamos calcular todas las posibles trayectorias de S a T y tomar aquella (quizás no única) que tuviera la distancia más pequeña con lo cual se resolvería nuestro problema. De esta forma estaríamos proponiendo el siguiente algoritmo de solución:

ALGORITMO *:

PASO UNICO: Calcúlence todas las trayectorias de S a T y elíjase la de menor distancia. □

Este método es seguro sin lugar a dudas, sólo que tiene la desventaja de ser sumamente exhaustivo, ya que encontrar todas las trayectorias posibles de S a T no es inmediato aunque conozcamos el número de maneras para hacerlo, por lo que prescindiremos de este algoritmo.

Por otro lado podemos aprovechar adecuadamente la idea de avanzar como lo indican las flechas de cada arco de la red, indicar este avance en cada nodo al cual le podemos asignar a la vez el nodo del cual proviene y su distancia desde el nodo inicial. Esto lo podemos hacer, por ejemplo mediante una "etiqueta" que contenga esta información.

Como cada nodo tiene asociado varias distancias desde el origen, elegiremos la menor de ellas. Con esto tendremos dos tipos de etiquetas, unas a las que llamaremos permanentes y son las que contienen la menor distancia recorrida desde el nodo inicial. A las otras las llamaremos temporales. Las marcaremos de la siguiente forma; [a, d] donde la "a" indica el predecesor o nodo del que se proviene y "d" es la distancia desde el origen.

Les asignaremos un "*" asterisco para indicar que es permanente y lo omitiremos en caso contrario.

Al ir asignando etiquetas a cada nodo en cada avance llegaremos al nodo final T, cuya etiqueta si es permanente habremos obtenido la solución óptima.

Esto lo especificaremos más precisamente, proponiendo un segundo algoritmo de solución:

ALGORITMO **:

Paso1. Marcar al nodo inicial S con la etiqueta permanente $[\Phi,0]^*$.
Diremos que es el último nodo con etiqueta permanente.

Paso2. Asígnese etiqueta temporal a los nodos inmediatos al último nodo con etiqueta permanente.
Al de menor distancia lo marcaremos con etiqueta permanente y será el último nodo de etiqueta permanente.

Paso3. Si el último nodo de etiqueta permanente es T, terminar.
Si no, regresar al paso 2. □

Observación. La etiqueta de S contiene como primer componente al conjunto vacío Φ, ya que este nodo no proviene de algún nodo. Su distancia de avance es cero.

Representemos el algoritmo ** mediante el siguiente diagrama de flujo.

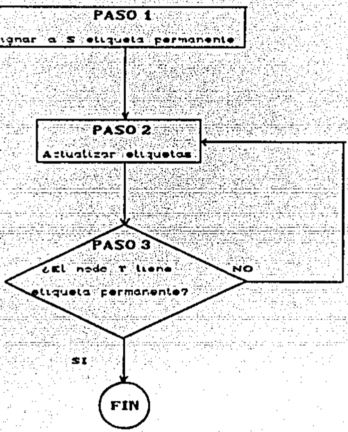
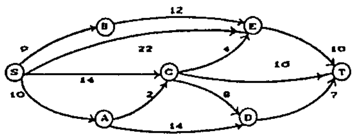


DIAGRAMA DE FLUJO CORRESPONDIENTE
AL PROBLEMA 2

Recordemos cuál era la red original y apliquemos el algoritmo ** el cual nos garantiza la obtención de la solución óptima.



RED ORIGINAL DEL PROBLEMA 2

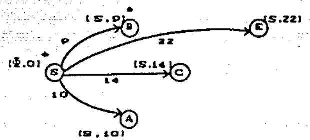
ALGORITMO **:

ITERACION 1.

Paso 1. $S \rightarrow [\Phi,0]^*$

Paso 2. Etiquetas temporales = $\{A[S,10],\ B[S,9],\ C[S,14],\ E[S,22]\}$

Mínima etiqueta temporal = $B[S,9]^*$



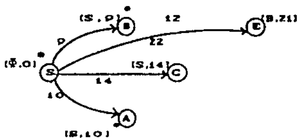
Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T ?__NO.

Regresar al paso 2.

ITERACION 2.

Paso 2. Etiquetas temporales = $\{A[S,10],\ C[S,14],\ E[B,21]\}$

Mínima etiqueta temporal = $A[S,10]^*$



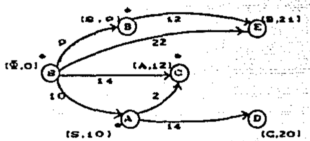
Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T?__NO.

Regresar al paso 2.

ITERACION 3.

Paso 2. Etiquetas temporales = {C[A,12], D[A,24], E[B,21]}

Mínima etiqueta temporal = C[A,12]*



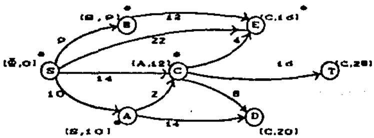
Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T?__NO.

Regresar al paso 2.

ITERACION 4.

Paso 2. Etiquetas temporales = {D[C,20], E[C,16], T[C,28]}

Mínima etiqueta temporal = E[C,16]*



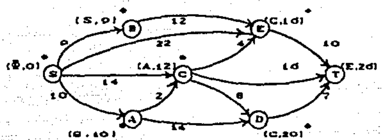
Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T?__NO.

Regresar al paso 2.

ITERACION 5.

Paso 2. Etiquetas temporales = {D[C,20], T[E,26]}

Mínima etiqueta temporal = D[C,20]*



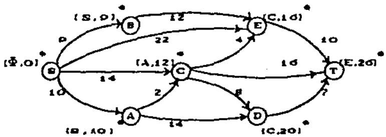
Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T?__NO.

Regresar al paso 2.

ITERACION 6.

Paso 2. Etiquetas temporales = {T[E,26]}

Mínima etiqueta temporal = T[E,26]*



Paso 3. ¿El último nodo de etiqueta permanente es T?__SI.

¡¡ TERMINAR !!

Nuestro algoritmo ** nos proporciona una distancia mínima de recorrido desde el nodo inicial igual a 26. Por lo que el segundo objetivo ha quedado satisfecho.

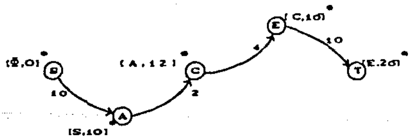
CONSTRUCCION DE LA RUTA MAS CORTA:

Para encontrar los arcos y nodos que integran la ruta óptima, lo haremos a partir de la información que nos proporciona la primer componente de cada etiqueta.

Esto es, si avanzamos de " atrás hacia adelante " según lo vayan indicando la primer componente de cada etiqueta permanente a partir del nodo final T, se llegará al vértice inicial S. Con lo cual se habrán encontrado los arcos y nodos que integran la ruta óptima. Esta secuencia es la siguiente:

$$T[E,\ 26]^{*} \longrightarrow E[C,\ 16]^{*} \longrightarrow C[A,\ 12]^{*} \longrightarrow A[S,\ 10]^{*} \longrightarrow S[\Phi,\ 0]^{*}$$

Así por ejemplo, la etiqueta del nodo T[E, 26]* indica que proviene del nodo E y éste a su vez su etiqueta E[C, 16]* indica que proviene del nodo C y así sucesivamente hasta llegar al nodo S con etiqueta [Φ,0]*. La solución se muestra a continuación.



LA RUTA MAS CORTA

Figura 3.3.5

El problema ha quedado resuelto en el modelo matemático y la solución para el transportista es; salir de la ciudad de Salamanca con dirección a la ciudad A, luego a las ciudades C, E y finalmente dirigirse a la ciudad de Tijuana con un recorrido mínimo de 2600 kms.

Debe observarse la analogía que tiene esta solución gráfica del problema con la solución que se ofrece en la matriz de distancias. La ventaja del algoritmo ** es evidente, ya que nos proporciona gráficamente las ciudades que conforman la ruta más corta.

El algoritmo ** es en esencia el inventado por J. B. Dijkstra, el cual se enunciará y explicará en la sección 3.6.

En el desarrollo de la solución de estos dos problemas, se ha podido detectar la similitud que guardan y esta radica principalmente en poder representarlos mediante un esquema de puntos y líneas entre ellos, para que ha partir de ahí se elabore un método a seguir que conduzca a la solución óptima.

Con el fin de formalizar los conceptos necesarios que permitan plantear y resolver sistemáticamente este tipo de problemas, se ha preparado en la siguiente sección un estudio sobre Teoría de las Gráficas. Para que posteriormente en las siguientes dos secciones se enuncien los algoritmos que conducen a la solución del problema de *cómo* encontrar el árbol de peso mínimo y la ruta *más* corta en una red. ※

3.4. ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFICAS.

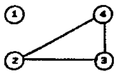
»El primer artículo que se conoce sobre Teoría de Gráficas se debe al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). En este se incluía la demostración de la imposibilidad de atravesar exactamente una vez todos los puentes de la antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, URSS) de tal forma que se retornara al punto de partida.

Ante la Academia Rusa de San Petersburgo en 1735, Euler argumentó su razonamiento, para ello se valió de un modelo matemático que representaba gráficamente la situación real que los habitantes de dicha ciudad no habían podido resolver. En este modelo las partes de la ciudad las representó por medio de puntos, mientras que por cada puente una línea la cual indicaba la unión con las partes de la ciudad.«

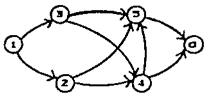
De esta forma el problema real se traslada a un problema en un modelo matemático, al cual actualmente se le conoce como una GRAFICA. Se empieza por definir lo que se entiende por una gráfica.

DEFINICION 3.4.1. Una *gráfica* es una pareja de conjuntos finitos $[\mathscr{X}, \mathbb{A}]$ donde $\mathscr{X}$ es un conjunto no vacío de puntos llamados *vértices* o *nodos*[1] y $\mathbb{A}$ es un conjunto de líneas que unen a todos o algunos de los vértices.

La simbolizaremos como $\mathbb{G} = [\mathscr{X}, \mathbb{A}]$. A continuación se dan cuatro ejemplos de gráficas.

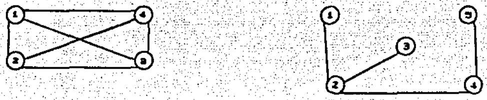


(c)



(d)

[1]Los elementos de $\mathscr{X}$, en general, serán un subconjunto de los numeros naturales o las primeras letras del alfabeto.



(a) (b)

Figura 3.4.1

En la figura 3.4.1 las cuatro representaciones cumplen con la definición, sin embargo cada una tiene características que las hacen ser diferentes. Por ejemplo, la gráfica en el inciso (a) está formada por cuatro vértices y seis líneas, estando los vértices mutuamente unidos. Mientras que en (b), la gráfica tiene cinco vértices y cuatro líneas, los vértices no están mutuamente unidos. En el inciso (c), se tienen cuatro vértices y tres líneas con la característica de que el vértice 1 no está unido a los demás vértices de la gráfica.

Finalmente en el inciso (d) se tienen seis vértices y ocho líneas. Además en esta gráfica las líneas están representadas mediante flechas que indican una dirección. Mientras que en las tres anteriores gráficas esto no sucedía. Esta última gráfica nos permite enunciar la siguiente definición.

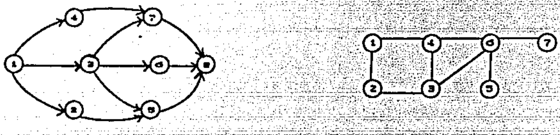
<u>DEFINICION 3.4.2</u>. Una gráfica es *dirigida* si sus elementos tienen una dirección indicada mediante una flecha; en este caso a las líneas se les llama *arcos*. Si la gráfica es no dirigida a las líneas se les llama *aristas*.

Al conjunto de arcos para gráficas dirigidas lo denotaremos como:

$$\mathbb{A} = \{ a = (i, j) \; / \; i, j \in \mathcal{V} \}$$

donde i es el vértice inicial y j es el vértice final del arco a.

Si la gráfica es no dirigida sus aristas estarán marcadas indistintamente. En la figura 3.4.2 el inciso (a) muestra una gráfica dirigida, mientras que en (b) la gráfica es no dirigida.



(a) (b)

Figura 3.4.2

El conjunto de vértices y arcos de la gráfica del inciso (a) se dan a continuación.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$$A = \{a_1= (1, 2), a_2=(1, 3), a_3=(1, 4), a_4=(2, 5), a_5 =(3, 5) \\ a_6= (3, 6), a_7=(3, 7), a_8=(4, 7), a_9=(5, 8), a_{10}=(6, 8) \\ a_{11}=(7, 8)\}.$$

Para la gráfica del inciso (b), se tiene:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$A = \{a_1=(1, 2), a_2=(2, 3), a_3=(1, 4), a_4=(3, 4), a_5=(3, 6) \\ a_6=(4, 6), a_7=(6, 5), a_8=(6, 7)\}$$

$$= \{a_1=(2, 1), a_2=(3, 2), a_3=(4, 1), a_4=(4, 3), a_5=(6, 3) \\ a_6=(6, 4), a_7=(5, 6), a_8=(7, 6)\}.$$

En este caso el intercambio de las componentes en las aristas del conjunto, hace referencia a que no importa el orden en que se tomen los vértices, ya que la gráfica es no dirigida.

Es conveniente antes de proseguir hacer las siguientes observaciones:

1) La representación de una gráfica no es única.

2) Pueden intersectarse las aristas o arcos, los puntos de intersección no forman parte de la gráfica.

3) Las aristas o arcos de una gráfica pueden ser líneas rectas o líneas curvas.

Para ejemplificar estos tres puntos consideremos la siguiente gráfica.

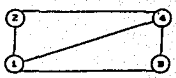
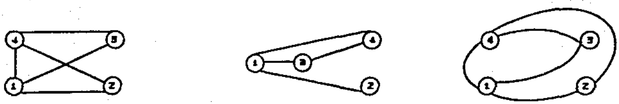


Figura 3.4.3

la cual tiene a su vez las siguientes representaciones:



(a) (b) (c)

Figura 3.4.4

En la gráfica del inciso (a) se conservan las líneas rectas, aunque existen dos que se intersectan. En el inciso (b) no hay intersección y las líneas siguen siendo rectas. Para el inciso (c) las líneas son curvas y no hay intersección.

Una vez hechas estas observaciones, pasemos a definir un concepto válido en gráficas dirigidas.

DEFINICION 3.4.3. Un *camino* en una gráfica dirigida es una secuencia de arcos en la cual el vértice final de uno es el vértice inicial del que le sigue en la secuencia.

Lo denotaremos por la secuencia de arcos que lo forman o por la secuencia de vértices extremos de los arcos. Así, por ejemplo, si $a_1=(i_1, i_2)$ es el primer arco y $a_q=(i_q, i_{q+1})$ es el último diremos que el camino va del vértice i_1 al vértice i_{q+1}.

En la gráfica de la figura 3.4.5 $\mathscr{C}_1=((1, 3), (3, 4), (4, 5))$ y $\mathscr{C}_2=((1, 2), (2, 5))$ son dos caminos distintos del vértice inicial 1 al vértice final 5.

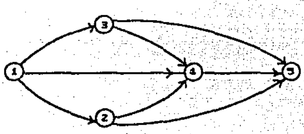
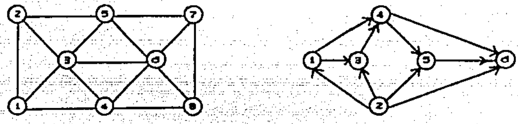


Figura 3.4.5

Un *camino simple* es un camino $a_1, a_2, \ldots, a_q$ tal que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Es decir, es un camino que no repite arcos. Una *trayectoria* del nodo i_0 al nodo i_p es un camino $\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{p-1}, i_p)\}$ en el cual ningún vértice se repite.

DEFINICION 3.4.4. Una *cadena* es una secuencia de aristas o arcos $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ donde toda a_i $(i=1,2,\ldots,q)$ está conectada a a_{i-1} por un extremo y a a_{i+1} por el otro.

En el inciso (a) de la figura 3.4.6 $\mathcal{C} = \{(1,2), (2,5),(5,6),(6,4)$ $(4,3), (3,6), (6,8)\}$ representa una cadena. Mientras en el inciso (b), $\mathcal{C} = \{(1,3), (3,4), (4,5), (5,2), (2,6)\}$ es una cadena.

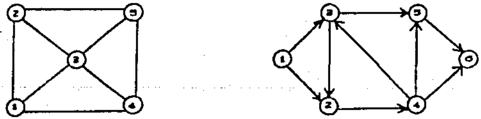


(a) (b)

Figura 3.4.6

<u>DEFINICION 3.4.9</u>. Un *ciclo* es una cadena cerrada $C(v_1,v_2,\dots,v_n,v_1)$ donde $v_i \neq v_j$ para toda $i\neq j$.

En la figura 3.4.7, en el inciso (a), $\mathcal{C} = \{(2,3), (3,5),(5,2)\}$ es un ciclo. Para el inciso (b), $\mathcal{C} = \{(3,2), (2,4),(4,3)\}$ representa un ciclo en la gráfica dirigida.

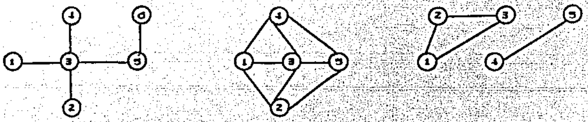


(a) (b)

Figura 3.4.7

La propiedad que a continuación se enuncia juega un papel importante en la búsqueda de la solución de los problemas que en este capítulo se han propuesto.

DEFINICION 3.4.6. Una gráfica es *conexa* si para todo par de vértices existe una cadena que los une.



Gráfica conexa (a) — Gráfica conexa (b) — Gráfica no-conexa (c)

Figura 3.4.8

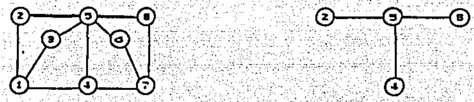
De acuerdo a la definición en los incisos (a), (b) de la figura 3.4.8 las gráficas son conexas. Resulta evidente en el inciso (c), que para los vértices 4,5 no es posible exhibir una cadena que los una con los demás vértices, aunque entre ellos sí exista, así que esta gráfica es no conexa. A las gráficas que son no conexas se les llama *inconexas*.

DEFINICION 3.4.7. Sea $\mathcal{G} = [\mathcal{X}, \mathcal{A}]$ una gráfica. Una *subgráfica* de $\mathcal{G}$ es la gráfica $\mathcal{G}s=[\mathcal{X}s, \mathcal{A}s]$, donde:

i) $\mathcal{X}s \subseteq \mathcal{X}$,

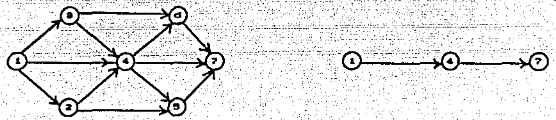
ii) $(i, j)\in\mathcal{A}s \Leftrightarrow i,j \in\mathcal{X}s$ e $(i, j)\in\mathcal{A}$.

Es decir, una subgráfica es una gráfica que consta de un subconjunto de los vértices de $\mathcal{G}$ y todas las aristas ó arcos de $\mathcal{G}$ que unen los vértices de tal subconjunto. A continuación se dan dos ejemplos.



Gráfica G   Subgráfica de G

(b)



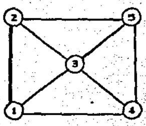
Gráfica G   Subgráfica de G

(a)

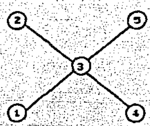
Figura 3.4.9

DEFINICION 3.4.8. Por una *gráfica parcial* de la gráfica $G = [V, A]$ se entenderá como la gráfica $G_P = [V, A_P]$, donde $A_P \subseteq A$.

Es decir, es aquella gráfica donde se conservan todos los vértices de la gráfica original, pero sólo se consideran algunas aristas o arcos. Como ejemplo, a continuación se dan dos gráficas para las cuales se obtiene una gráfica parcial.

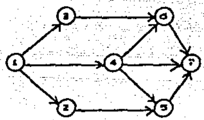


Gráfica $\mathcal{G}$

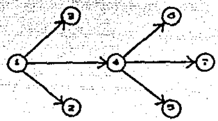


Gráfica parcial de $\mathcal{G}$

(b)



Gráfica $\mathcal{G}$



Gráfica parcial de $\mathcal{G}$

(a)

Figura 3.4.10

Es conveniente especificar la relación más estrecha que tienen los vértices con los arcos en una gráfica dirigida, ya que únicamente se ha mencionado la dirección que éstos tienen sin hacer mención de los vértices.

DEFINICION 3.4.9. Consideremos al vértice $i \in \mathcal{V}$ de una gráfica dirigida $\mathcal{G} = [\mathcal{V}, \mathbb{A}]$, el *sucesor* de i es todo vértice $j \in \mathcal{V}$ tal que exista el arco $(i, j) \in \mathbb{A}$. Se llama *predecesor* de i a todo vértice $k \in \mathcal{V}$ tal que exista el arco $(k, i) \in \mathbb{A}$. Se denotan respectivamente como:

$$\Gamma^{+}(i) = \{\text{sucesores de } i\} = \{j \in \mathcal{N} \ / \ (i,j) \in \mathcal{A}\},$$

$$\Gamma^{-}(i) = \{\text{predecesores de } i\} = \{k \in \mathcal{N} \ / \ (k,i) \in \mathcal{A}\}.$$

En la figura 3.4.11 se da una gráfica dirigida para la cual se dan el conjunto de sucesores y predecesores de los vértices S,C y T.

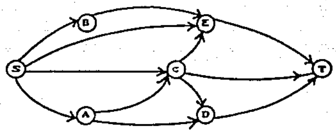


Figura 3.4.11

Esta gráfica como se recordará, corresponde a la representación del problema 2. Así que en ella tenemos:

$$\Gamma^{+}(S) = \{A,\ B,\ C,\ E\}$$

$$\Gamma^{-}(S) = \{\ \} = \Phi \qquad \text{(el conjunto vacío)}$$

$$\Gamma^{+}(C) = \{D,\ E,\ T\}$$

$$\Gamma^{-}(C) = \{S,\ A\}$$

$$\Gamma^{+}(T) = \{\ \} = \Phi$$

$$\Gamma^{-}(T) = \{C,\ D,\ E\}.$$

Puede suceder que en una gráfica dirigida algunos arcos tengan una doble dirección, tal como se indica en la siguiente figura con los arcos (3, 5) y (4, 6).

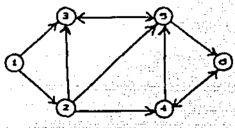
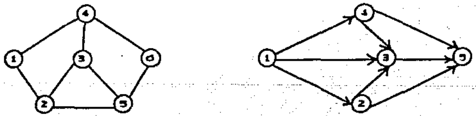


Figura 3.4.12

Los sucesores y predecesores del vértice 5, son: $\Gamma^{+}(5) = \{3, 6\}$ y $\Gamma^{-}(5) = \{2, 3, 4\}$.

<u>DEFINICION 3.4.10</u>. Decimos que $j \in \mathcal{N}$ es *vecino* del vértice $i \in \mathcal{N}$, si existe la arista $(i,j) \in A$. Si la gráfica es dirigida $j \in \mathcal{N}$ es vecino de $i \in \mathcal{N}$ si j es predecesor o sucesor de i. Se dirá que los vértices son *adyacentes*.

Denotamos a los vecinos de i como $\Gamma(i)$. Consideremos las siguientes dos gráficas para ejemplificar.



(a) (b)

Figura 3.4.13

Para la gráfica del inciso (a), se tiene $\Gamma(3) = \{2,4,5\}$. Mientras que en el inciso (b), $\Gamma(3) = \{ 1,2,4,5 \}$.

En general, si G es una gráfica dirigida se cumple:

$$\Gamma(i) = \Gamma^{+}(i) \cup \Gamma^{-}(i)$$

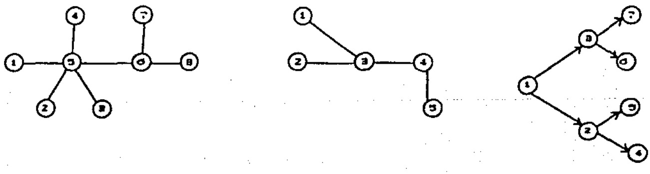
Al aplicar este resultado al vértice 3 de la gráfica del inciso (b), se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(3) &= \Gamma^{+}(3) \cup \Gamma^{-}(3) \\ &= \{5\} \cup \{1,\ 2,\ 4\} \\ &= \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}. \end{aligned}$$

Existe una clase de gráficas las cuales son de suma importancia para encontrar la solución a una gran diversidad de problemas de optimización, en particular a los problemas que se han propuesto en las siguientes dos secciones. Las caracterizamos en la siguiente.

<u>DEFINICION 3.4.11</u>. Un *árbol* es una gráfica $T = [V, A]$ conexa y que no contiene ciclos.

A continuación se dan tres ejemplos de árboles.



(a) (b) (c)

Figura 3.4.14

Obsérvese que un árbol puede derivarse de una gráfica conexa de la cual se obtiene una gráfica parcial conexa y sin ciclos. Especificaremos un poco más esta situación al enunciar el siguiente teorema, el cual proporciona la información básica para identificar un árbol.

TEOREMA 3.4.1. Sea $\mathbb{G} = [\mathcal{X}, \mathbb{A}]$ una gráfica con n-vértices ($n \geq 2$). Los postulados siguientes son equivalentes y caracterizan un árbol:

a) $\mathbb{G}$ es conexa y no contiene ciclos.

b) $\mathbb{G}$ no contiene ciclos y tiene n-1 aristas.

c) $\mathbb{G}$ no contiene ciclos y si se agrega una arista se forma exactamente un ciclo.

d) $\mathbb{G}$ es conexa y tiene n-1 aristas.

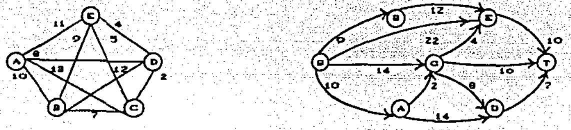
e) $\mathbb{G}$ es conexa pero deja de serlo si se elimina una arista.

f) Existe en $\mathbb{G}$, una única cadena entre todo par de vértices.

Es claro que las gráficas de la figura 3.4.14 cumplen con cualquiera de los postulados del teorema. Ahora recordemos que una de las características de los problemas de la sección 3.2 consistía en representar la distancia existente entre cada ciudad mediante un número real, el cual se asignaba a cada arista o arco de la gráfica correspondiente. Al número que se asigna a cada arista se le denomina el *peso* de la arista, mientras que para un arco se le llama la *longitud o costo* de dicho arco. De esto podemos enunciar lo que resulta ser una red.

DEFINICION 3.4.12. Una *red* $\mathbb{R} = [\mathcal{X}, \mathbb{A}, f]$, es una gráfica con una función real f definida sobre sus aristas o arcos o sobre sus vértices, o sobre ambos conjuntos.

Ejemplos de redes (las cuales ya nos son familiares).



(a) (b)

Figura 3.4.15

Es importante indicar que el peso o longitud de las aristas o arcos puede representar distancias, costos o tiempo entre otras medidas. Este concepto y el de árbol lo relacionamos en la siguiente definición.

<u>DEFINICION 3.4.13</u>. *El peso de un árbol* es la suma de los pesos en las aristas que lo forman. *La longitud de una ruta o camino* es la suma de las longitudes de los arcos que la forman.

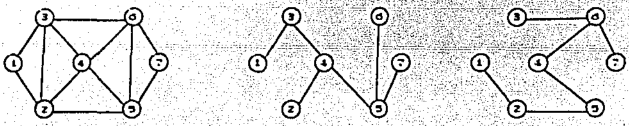
Una vez que se han dado las herramientas teóricas necesarias para tratar los problemas que pueden representarse por medio de una red, pasaremos a las siguientes dos secciones en las cuales se darán los algoritmos respectivos que permiten encontrar el árbol de peso mínimo y la ruta más corta en una red.

3.5 EL ARBOL DE PESO MINIMO

En esta sección se presenta el algoritmo que permite determinar sistemáticamente la solución al problema de cómo construir la red eléctrica de costo mínimo. El algoritmo es aplicable en general a cualquier red no dirigida conexa y tiene como objetivo proporcionar el árbol de peso mínimo de la red, con lo cual se asegura la obtención de la solución óptima. Primeramente daremos las siguientes dos definiciones.

<u>DEFINICION 3.5.1</u>. Sea $G = (V,A)$ una gráfica no dirigida. *Un árbol expandido de G*, es una gráfica parcial $T = (V, A')$ de G que es un árbol.

En la figura 3.5.1 se da una gráfica de la cual se obtienen dos posibles árboles expandidos.



<u>GRAFICA G</u> <u>ARBOLES EXPANDIDOS DE G</u>

Figura 3.5.1

Nótese que puede haber varios árboles expandidos de una gráfica, sin embargo únicamente consideraremos aquel que nos proporcione la información relevante para encontrar la solución de un problema. A este árbol lo caracterizamos en la siguiente.

DEFINICION 3.5.2. *El árbol expandido de peso mínimo* de una gráfica $\mathbb{G}$, es aquel árbol expandido de $\mathbb{G}$ cuyo peso es mínimo.

Es inmediato que al encontrar el árbol expandido de peso mínimo en una red, se determina la solución óptima de un problema propuesto a través de dicho modelo. Existen varias formas de hacerlo, aquí se hace uso del algoritmo de Kruskal que a continuación se enuncia:

ALGORITMO DE KRUSKAL.

Este algoritmo diseñado por J. B. Kruskal proporciona el árbol expandido de peso mínimo $\mathbb{T} = [\mathbb{V},\mathbb{A}']$ de una red $\mathbb{R} = [\mathbb{V},\mathbb{A},P]$ conexa con n-vértices y m-aristas.

El método consiste en ordenar las aristas en orden ascendente con respecto al peso de cada una. Las aristas se van examinando paulatinamente y se consideran parte del árbol de peso mínimo si es que no forman ciclo con las anteriores aristas ya consideradas, así se prosigue hasta obtener una gráfica sin ciclos. Una vez que se han obtenido n-1 aristas el algoritmo termina proporcionando el árbol expandido de peso mínimo de $\mathbb{R}$.

Debe observarse que en cada iteración la gráfica que se va obteniendo no necesariamente es conexa, sin embargo en la última, la gráfica si debe ser conexa. El número j nos indicará el número de iteraciones, mientras que k el número de aristas consideradas.

ALGORITMO.

Paso 1. Ordenar el conjunto de aristas de manera ascendente con respecto a su peso. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_r$ las aristas ordenadas.

Hacer $k = j = 0$ y $\mathbb{A}' = \Phi$.

Paso 2. Hacer $j = j+1$

Si la arista a_j no forma ciclo con las aristas de $\mathbb{A}'$, entonces $\mathbb{A}' = \mathbb{A}' \cup \{a_j\}$. Hacer $k = k+1$ e ir al paso 3.

Si la arista a_j forma ciclo ir al paso 3.

Paso 3. Si $k = n-1$, terminar. La gráfica $\mathbb{T} = [\mathcal{V}, \mathbb{A}']$ es el árbol expandido de peso mínimo de $\mathbb{P}$.

Si $k < n-1$ regresar al paso 2. □

Los problemas que se pueden resolver mediante este algoritmo se ubican sobre todo en redes de comunicación eléctrica, carretera, ferrocarrilera, aérea y marítima, entre otras. En donde los vértices pueden representar puntos de consumo eléctrico, terminales de autobuses, estaciones de ferrocarril, aeropuertos y puertos, mientras que las aristas pueden representar las líneas de alta tensión eléctrica, carreteras, vías de ferrocarril, rutas aéreas y marítimas.

Con el problema que se da a continuación se ejemplifica la funcionalidad del algoritmo. Debe observarse la analogía con el método de solución intuitiva que se aplicó al resolver el problema de la red eléctrica de la sección 3.2.

PROBLEMA.

Supóngase que en la red que se muestra en la figura 3.5.2 los vértices son centros de interés en una zona turística y los números en las aristas indican distancias en kilómetros entre ellos. El problema a resolver consiste en encontrar el árbol que con una longitud mínima comunique a todos los centros de interés, ya que con ello se logrará un ahorro en la construcción de carreteras que unan a dichos centros, además de no afectar considerablemente el medio ecológico circundante.

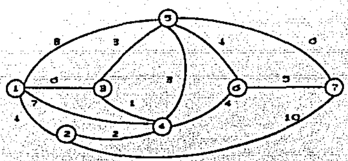


Figura 3.5.2

La gráfica es conexa, por lo que se puede aplicar el algoritmo de Kruskal ($n = 7$, $m = 13$).

ALGORITMO:

ITERACION 1.

Paso 1. (ordenar las aristas)

$a_1=(3,4)$, $a_2=(2,4)$, $a_3=(3,5)$, $a_4=(4,5)$, $a_5=(4,6)$, $a_6=(5,6)$

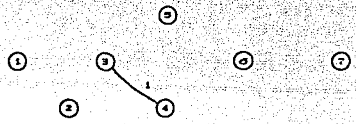
$a_7=(1,2)$, $a_8=(6,7)$, $a_9=(1,3)$, $a_{10}=(5,7)$, $a_{11}=(1,4)$,

$a_{12}=(1,5)$, $a_{13}=(2,7)$.

$k = j = 0$, $\quad A' = \Phi$.

Paso 2. $j = 0+1 = 1$. a_1 no forma ciclo $\rightarrow A' = \phi \cup \{a_1\} = \{a_1\}$

$k = 0+1 = 1$



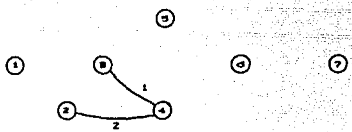
Paso 3. $k = 1 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 2.

Paso 2. $j = 1+1 = 2$. a_2 no forma ciclo $\Rightarrow A' = \{a_1\} \cup \{a_2\}$

$= \{a_1, a_2\}$

$k = 1+1 = 2$.



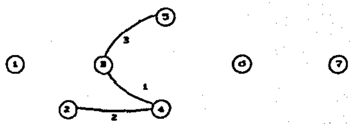
Paso 3. $k = 2 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 3.

Paso 2. $j = 2+1 = 3$. a_3 no forma ciclo $\rightarrow A' = \{a_1, a_2\} \cup \{a_3\}$

$= \{a_1, a_2, a_3\}$

$k = 2+1 = 3$

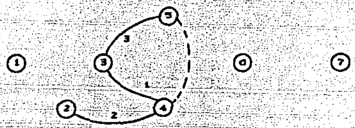


Paso 3. $k = 3 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 4.

Paso 2. $j = 3+1 = 4$. a_4 forma ciclo. No se agrega.

$k = 3$



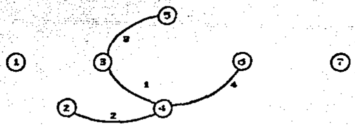
Paso 3. $k = 3 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 5.

Paso 2. $j = 4+1 = 5$. a_5 no forma ciclo $\Rightarrow A' = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_5\}$

$= \{a_1, a_2, a_3, a_5\}$

$k = 3+1 = 4$

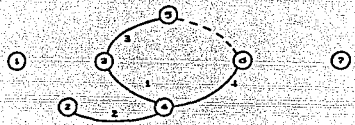


Paso 3. $k = 4 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 6.

Paso 2. $j = 5+1 = 6$. a_6 forma ciclo. No se agrega.

$k = 4$



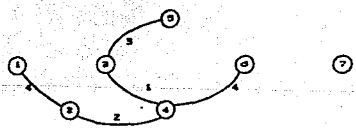
Paso 3. $k = 4 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 7.

Paso 2. $j = 6+1 = 7$. a_7 no forma ciclo $\Rightarrow \hat{A}' = \{a_1,a_2,a_3,a_5\} \cup \{a_7\}$

$= \{a_1,a_2,a_3,a_5,a_7\}$

$k = 4+1 = 5$

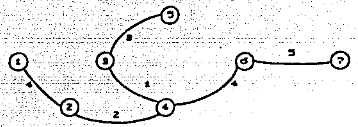


Paso 3. $k = 5 < 6$. Regresar al paso 2.

ITERACION 8.

Paso 2. $j = 7+1 = 8$. a_8 no forma ciclo $\Rightarrow A' = \{a_1,a_2,a_3,a_5,a_7\} \cup \{a_8\}$
$= \{a_1,a_2,a_3,a_5,a_7,a_8\}$

$k = 5+1 = 6$

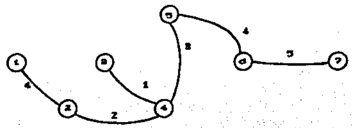


Paso 3. $k = 6 = n-1$. ¡¡TERMINAR!!. Se ha obtenido el árbol expandido de peso mínimo $A' = \mathbb{T}$. □

En la iteración 8 se muestra la solución óptima. A continuación se calcula su peso.

$$\mathcal{P}(\mathbb{T}) = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 19.$$

Obsérvese que al proponer el siguiente árbol expandido, $\mathbb{T}'$, de la misma gráfica:



Se obtiene que: $\mathcal{P}(\mathbb{T}') = 4 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 = 19$. Lo cual indica que el árbol de peso mínimo no es único.

Ahora bien las personas encargadas del proyecto de difusión de la zona turística, ya conocen que la distancia mínima que comunica a todos los centros de interés es de 19 km, y también saben que la forma de construir las carreteras no es única, por lo que las alternativas presentes resultan ser un factor para que la decisión que se tome disminuya el deterioro que se pudiera tener del medio ecológico de la zona. ▓

3.6 LA RUTA MAS CORTA.

En esta sección se da el algoritmo con el cual se determina la solución al problema de la ruta más corta entre dos vértices específicos S y T de una red $\mathbb{R} = [\mathcal{V}, \mathbb{A}, d]$ conexa con longitudes o costos no negativos.

Para que el problema tenga solución, debe cumplirse que exista por lo menos un camino que una a los dos vértices considerados. Definamos primeramente que se entiende por la ruta más corta.

DEFINICION 3.6.1. *La ruta mas corta* es aquella trayectoria que une al vértice inicial con el vértice final considerados que tiene longitud mínima.

ALGORITMO DE DIJKSTRA:

El propósito de este algoritmo diseñado por E. W. Dijkstra es encontrar la ruta más corta entre dos vértices específicos en una red. El método consiste en asignar "etiquetas" llamadas permanentes a los vértices cuya longitud de la ruta *más* corta del vértice inicial a ellos ya se conoce. Mientras que a los vértices restantes se les representa mediante otras etiquetas llamadas temporales.

Las etiquetas de cada vértice $\underline{x}$ están constituidas por dos componentes, a saber, la primera indica el vértice predecesor "a(x)" del vértice $\underline{x}$. La segunda indica la longitud "d(x)" temporal o permanente más corta desde el vértice inicial $\underline{s}$ al vértice $\underline{x}$. Las representaremos de la siguiente forma; $[a(x), d(x)]$ para los vértices con etiqueta temporal, mientras que para los vértices con etiqueta permanente, como $[a(x), d(x)]^*$.

La primera iteración considera al vértice inicial con etiqueta permanente. Los demás vértices con etiqueta temporal se irán mejorando continuamente en cada iteración hasta que sean asignados con etiqueta permanente y se llegue al vértice final, de esta forma se habrá encontrado la ruta más corta. Para indicar la ruta óptima se procede a ordenar las etiquetas permanentes a partir del vértice final hasta el vértice inicial conforme lo señale la primera componente de cada etiqueta.

ALGORITMO

(S es el vértice inicial y T el vértice final)

Paso 1. (Inicialización de etiquetas)

Sea $d(S) = 0$. Márquese la etiqueta de este vértice como permanente.

Sea $d(x) = \infty$ para todo vértice $x \neq S$ y considérense estas etiquetas como temporales.

Sean $a(x) = x$. (indicarán el predecesor de x)

Sea $p = S$.

Paso 2. (Actualización de etiquetas)

Para todo vértice $x \in \Gamma^{+}(p)$ que tenga etiqueta temporal, actualizar etiquetas de acuerdo a:

$$d(x) = \min \{ d(x), d(p) + d(p, x) \}$$

Si $d(x)$ se modificó, hacer $a(x) = p$.

Sea x^{*} tal que $d(x^{*}) = \min \{ d(x) : d(x) \text{ es temporal} \}$

Si $d(x^{*}) = \infty$, terminar. En este caso no existe ruta de S a T

En otro caso marcar la etiqueta $d(x^{*})$ como permanente.

Sea $p = x^{*}$.

Paso 3. Si $p = T$, terminar; $d(p)$ es la longitud óptima, las etiquetas $[a(x^{*}), d(x^{*})]$ forman la ruta más corta.

Si $p \neq T$, ir al paso 2. □

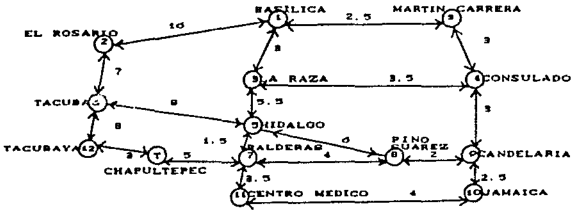
Es conveniente mencionar que el símbolo infinito "∞" se introduce al considerar una longitud o costo cuando no está definido. Por otra parte, debe hacerse una analogía con el método de solución intuitiva del problema 2 de la sección 3.3. Las aplicaciones que pueden tenerse de este algoritmo, aparte de la determinación de caminos de recorrido mínimo, es en problemas de distribución y asignación de recursos, entre otras.

En el siguiente problema se aplica el algoritmo con el fin de ilustrar su funcionalidad.

PROBLEMA

Se aprobó en fechas recientes un programa de conservación y protección del bosque de Chapultepec de la Ciudad de México. Motivo por el cual los alumnos de una escuela secundaria realizarán todos los sabados del semestre escolar en curso, una labor de servicio social en dicho bosque. Su traslado lo harán a través del Sistema de Transporte Colectivo METRO desde la estación "Martin Carrera" a la estación "Chapultepec".

Ellos desean conocer una ruta que les garantice el menor tiempo de viaje, teniendo a su disposición el siguiente mapa simplificado de la red general del sistema en el cual se indica el tiempo estimado (en minutos) entre las estaciones respectivas.



SOLUCION:

El problema ha resolver es encontrar la ruta más corta de la estación Martin Carrera (S) a la estación Chapultepec (T) del Metro. La red es conexa y existe al menos un camino que conecta a ambas estaciones, por lo que se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra.

ITERACION 1.

Paso 1. (inicialización de etiquetas)

$d(S) = 0$, se marca como permanente $[1, 0]^*$.

$d(x) = \infty$, para $x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,T$.

(se marcan como temporales)

$p = S$.

Paso 2. (se actualizan etiquetas)

$\Gamma^+(p) = \{1, 4\}$

$d(1) = \min \{d(1), d(S) + d(S,1)\} = \min \{\infty, 0 + 2.5\} = 2.5$

$a(1) = S$

$d(4) = \min \{d(4), d(S) + d(S,4)\} = \min \{\infty, 0 + 3\} = 3$

$a(4) = S$

$x^* = 1$ (vértice con mínima etiqueta temporal)

$d(1)$ se marca como permanente $[S, 2.5]^*$

$p = 1$.

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 2.

Paso 2.

$\Gamma^+(p) = \{S, 2, 3\}$

$d(S)$ ya es permanente

$d(2) = \min \{d(2), d(1) + d(1,2)\} = \min \{\infty, 2.5 + 16\}=18.5$

$a(2) = 1$

$d(3) = \min \{d(3), d(1) + d(1,3)\} = \min \{\infty, 2.5 + 3\} = 5.5$

$a(3) = 1$

$x^* = 4$

d(4) se marca como permanente $[S, 3]^*$

$p = 4$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 3.

Paso 2.

$\Gamma^{+}(p) = \{S, 3, 9\}$

d(S) ya es permanente

$d(3) = \min\{d(3), d(4) + d(4,3)\} = \min\{5.5, 3 + 3.5\} = 5.5$

no cambio

$d(9) = \min\{d(9), d(4) + d(4,9)\} = \min\{\infty, 3 + 3\} = 6$

$a(9) = 4$

$x^* = 3$

d(3) se marca como permanente $[1, 5.5]^*$

$p = 3$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 4.

Paso 2.

$\Gamma^{+}(p) = \{1, 4, 5\}$

d(1) es permanente

d(4) es permanente

$d(5) = \min\{d(5), d(3) + d(3,5)\} = \min\{\infty, 5.5 + 5.5\} = 11$

$a(5) = 3$

$x^* = 9$

d(9) se marca como permanente $[4, 6]^*$

$p = 9$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 5.

Paso 2.

$\Gamma^{+}(p) = \{4, 8, 10\}$

d(4) es permanente

$d(8) = \min \{d(8), d(9) + d(9,8)\} = \min \{\alpha, 6 + 2\} = 8$

$a(8) = 9$

$d(10) = \min \{d(10), d(9) + d(9,10)\} = \min \{\alpha, 6 + 2.5\} = 8.5$

$a(10) = 9$

$x^{*} = 8$

d(8) se marca como permanente $[9, 8]^{*}$

$p = 8$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 6.

Paso 2.

$\Gamma^{+}(p) = \{9, 5, 7\}$

d(9) es permanente

$d(5) = \min \{d(5), d(8) + d(8,5)\} = \min \{11, 8+6\} = 11$

no cambio

$d(7) = \min \{d(7), d(8) + d(8,7)\} = \min \{\alpha, 8 + 4\} = 12$

$a(7) = 8$

$x^{*} = 10$

d(10) se marca como permanente $[9, 8.5]^{*}$

$p = 10$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 7.

Paso 2.

$\Gamma^{+}(p) = \{9, 11\}$

d(9) es permanente .

$d(11) = \min\{d(11), d(10) + d(10,11)\} = \min\{\alpha, 8.5 + 4\} = 12.5$

$a(11) = 10$

$x^{*} = 5$

d(5) se marca como permanente $[3, 11]^{*}$

$p = 5$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 8.

Paso 2. $\Gamma^{+}(p) = \{3, 6, 7, 8\}$

d(3) es permanente

$d(6) = \min\{d(6), d(5) + d(5,6)\} = \min\{\infty, 11 + 8\} = 19$

$a(6) = 5$

$d(7) = \min\{d(7), d(5) + d(5,7)\} = \min\{12, 11 + 1.5\} = 12$

no cambio

d(8) es permanente

$x^{*} = 7$

d(7) se marca como permanente $[8, 12]^{*}$

$p = 7$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 9.

Paso 2. $\Gamma^{+}(p) = \{5, 8, 11, t\}$

d(5) es permanente

d(8) es permanente

$d(11) = \min\{d(11), d(7)+d(7,11)\} = \min\{12.5, 12 + 3.5\}=12.5$

no cambio

$d(T) = \min\{d(t), d(7) + d(7,t)\} = \min\{\infty, 12 + 5\} = 17$

$a(T) = 7$

$x^{*} = 11$

d(11) se marca como permanente $[10, 12.5]^{*}$

$p = 11$

Paso 3. $p \neq T$, regresar al paso 2.

ITERACION 10.

Paso 2. $\Gamma^{+}(p) = \{10, 7\}$

d(10) es permanente

d(7) es permanente

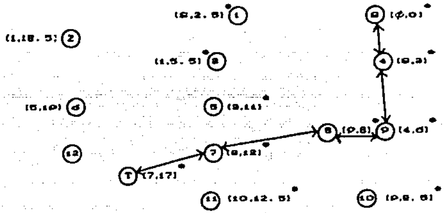
$x^{*} = T$

d(T) se marca como permanente

$p = T$

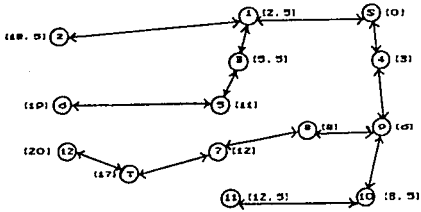
Paso 3. $p = T$. TERMINAR, se ha encontrado la ruta más corta. □

A continuación se exhibe la red en donde algunos vértices tienen asociados su etiqueta correspondiente, ya sea temporal o permanente. Esto nos permite determinar la ruta óptima, la cual se construye recursivamente a partir del vértice T hasta llegar al vértice S.



LA RUTA MAS CORTA

El problema ha quedado resuelto para los estudiantes, la ruta ha seguir se muestra en la red con un tiempo de recorrido de 17 minutos Obsérvese que, si se continúa el procedimiento de marcar todos los vértices con etiquetas permanentes, lo que se obtiene es la ruta más corta desde el vértice S a cada uno de los vértices de la red. El resultado es el siguiente.



C A P I T U L O 4

T E O R I A D E J U E G O S

4.1. INTRODUCCION.

Es común en la vida la presencia de un gran número de problemas competitivos o de conflicto en los cuales existen dos o más bandos opuestos y el resultado final depende básicamente de la combinación de las estrategias seleccionadas por los participantes de acuerdo a los intereses que persiguen. En algunos casos, las acciones pueden conducir al cooperativismo o acuerdo de los participantes, pero en otros esto no esta permitido. Este tipo de situaciones se presentan en economía, campañas políticas, tácticas mercantiles y militares, entre otras.

Estas situaciones pueden representarse mediante modelos matemáticos que si bien no contienen la totalidad de los factores que intervienen en la práctica, su solución si podrá indicar mejores cursos de acción racionales para los participantes. La teoría matemática orientada a modelar estas situaciones de competencia o de conflicto es la Teoría de Juegos.

El objetivo de este capítulo es ilustrar las ideas básicas de lo que trata la Teoría de Juegos, en particular, los denominados juegos bipersonales de suma cero. Para ello, en la sección 4.2, 4.3 y 4.4 se toma como punto de partida el planteamiento de un problema prototipo, para los cuales en cada sección se da su solución intuitiva como una manera de abordar y motivar dicho estudio. Para encontrar la solución del primero y segundo problema se hace uso de conceptos meramente algebraicos, mientras que para el tercero habrá de ser necesario utilizar un procedimiento gráfico.

En la sección 4.5 se dan los elementos que se consideran necesarios para hacer comprensible la Teoría de Juegos, para ello, algunas veces se hace referencia a los problemas resueltos intuitivamente para hacer ver la conexión que se tiene con la teoría.

En la sección 4.6 se describen los métodos para resolver un juego , para ello se dirá cuando es factible hacerlo algebráicamente o bien geométricamente, esto sera posible a partir de la información proporcionada por una matriz denominada de pagos o del juego, cuyas dimensiones pueden ser de mx2 ó 2xn.

La sección 4.7 esta dedicada a ejemplicar lo visto en la sección precedente mediante la solución de una serie de problemas, que a la vez sirven para enmarcar precisamente aquellos en los cuales se presentan los grupos antagónicos. El primero se refiere a un problema laboral (conflicto obrero-patronal), el segundo es de tipo electoral (campaña política de dos candidatos a una alcaldía) y el tercero se encuentra en un contexto beligerante (misión aérea de aeroplanos).

4.2. ¿ COMO ASEGURAR LA MEJOR VENTA DE UN PRODUCTO ?

PROBLEMA 1.

Dos compañías comparten el grueso del mercado para una clase particular de producto. Cada una está desarrollando ahora sus nuevos planes de mercadeo para el año siguiente,en un intento por participar de algunas ventas de la otra compañía. (Las ventas totales para el producto son relativamente fijas, de modo que una compañía sólo puede incrementar sus ventas ganándoselas a la otra). Cada compañía está considerando las siguientes posibilidades.

Compañía I.

A_1: mejorar la envoltura del producto,
A_2: incrementar la publicidad del producto, y
A_3: hacer una ligera reducción en el precio del producto.

Compañía II.

B_1: mejorar la envoltura del producto,
B_2: incrementar la publicidad del producto, y
B_3: hacer una ligera reducción en el precio del producto.

El departamento de mercadotecnia de la compañía I, ha estimado el efecto de cada combinación de las alternativas en el porcentaje incrementado de las ventas, esta información se muestra a continuación

Cia. II / Cia. I	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-4	1
A_2	3	1	2
A_3	2	-1	-3

¿ En que medida deberán aplicar sus alternativas ambas compañías ?

SOLUCION.

Antes de iniciar la búsqueda de la solución del problema, que será analizado como un juego (Entendiendo con ello, una situación competitiva entre las dos compañías, que se denominarán los jugadores y que se realizará mediante la aplicación del conjunto de sus alternativas), no está por demás asumir la representatividad de una de las compañías, digamos la de la compañía I y decir que seremos el jugador J_1, mientras que la compañía II, el jugador J_2 al cual supondremos que es tan capaz y racional como nosotros.

El problema se refiere a una toma de decisión, en cuyo caso deben establecerse concisamente los objetivos que se deben cumplir en la solución, a saber:

1) Especificar las estrategias que debe seguir cada jugador.

2) Indicar en qué medida se deben aplicar las estrategias.

3) Calcular el valor del juego.

Con lo que respecta al primer punto, resulta un tanto inmediato, ya que en este caso sólo es necesario redefinir las posibilidades que presenta cada compañía como las estrategias de cada jugador. Que es el nombre con el que se especifican a las variables o alternativas con las que cuenta cada jugador para el desarrollo del juego.

Así que el jugador J_1 cuenta con tres estrategias; A_1, A_2 y A_3, mientras que el jugador J_2 también con tres; B_1, B_2 y B_3. Por lo que se dirá que el juego es finito.

Para abordar el segundo punto, se empieza por enunciar la tabla de porcentajes de incremento en las ventas de la siguiente forma.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-4	1
A_2	3	1	2
A_3	2	-1	-3

MATRIZ DEL JUEGO

De acuerdo a las suposiciones del problema cada número representa el porcentaje de ventas que la compañía I logra conseguir de la compañía II cuando se aplica cada par de estrategias, de tal manera que lo conseguido por la compañía I es exactamente lo que pierde la compañía II. A la tabla que contiene esta información se le llamará matriz del juego y a los números que en ella aparecen los pagos o ganancias para el jugador J_1. Si se adoptara la representatividad de J_2 para resolver el juego, se enunciaria la matriz del juego como la mostrada, sólo que con los signos contrarios y se estipularia que serian sus pagos correspondientes.

Obsérvese que en todo caso, si se suman los pagos de J_1 con los de J_2, el resultado nos daria cero. Y dado que en el juego sólo intervienen dos jugadores, a esta clase de juegos se les llama juegos bipersonales de suma cero.

Ahora bien, desde el punto de vista de J_1 se esta interesado en aplicar adecuadamente sus estrategias contra las del oponente J_2, con el fin de obtener el mayor beneficio posible de la situación competitiva que se presenta. En este caso, es primordial tener presente que para cada una de las estrategias que se usen, habrá una respuesta representada por las estrategias de J_2, el cual se ha supuesto en igualdad de capacidad de respuesta que el jugador J_1.

Asi por ejemplo, si J_1 selecciona su estrategia A_1, podría ganar 1, o bien, podría perder tanto como 4.

Sin embargo, como J_2 es racional y, en consecuencia evitará hacer pagos grandes a J_1, parece probable que seleccionará la estrategia B_2 que conduce a una pérdida para J_1. Análogamente, seleccionando la estrategia A_3, J_1 podría ganar 2, pero, con mayor seguridad J_2 lo evitaría y le administraría una pérdida, que puede ser tan grande como 3 al seleccionar su estrategia B_3.

¿ Que línea de razonamiento le conviene seguir a cada jugador ?

Asumamos el hecho de que cada jugador adoptara una posición conservadora y tratara de obtener lo mejor de las peores condiciones prevalecientes. Es decir, el jugador J_1 al desarrollar cada una de sus estrategias, supondrá que el jugador J_2 le contestará con aquella estrategia que minimice su pago, por lo que tomará el mínimo que le proporcione cada estrategia. En consecuencia; una vez hecho lo anterior, eligirá el máximo de los números seleccionados y considerará que la estrategia correspondiente a este número es la que con seguridad le conviene usar.

De manera similar, el jugador J_2 al desarrollar cada una de sus estrategias, supondrá que su oponente el jugador J_2, le contestará con estrategias que maximicen su pérdida, por lo que adoptará el número máximo que le proporcione cada estrategia. Y hecho lo anterior, eligirá el mínimo de los números seleccionados. Por lo que la estrategia correspondiente a este número sera la que le convenga seleccionar si desea minimizar las pérdidas máximas en las que pudiera incurrir.

Lo anterior lo podemos ilustrar en la matriz del juego, anexando un renglón y una columna como a continuación se indica

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3	MINIMO
A_1	0	-4	1	-4
A_2	3	1	2	1
A_3	2	-1	-3	-3
MAXIMO	3	1	2	

de lo anterior se obtiene que:

$$\alpha = \text{Máximo} \{ -4, 1, -3 \} = 1$$
$$\beta = \text{Mínimo} \{ 3, 1, 2 \} = 1.$$

Al número α se le conoce como valor inferior del juego, y a β como valor superior del juego. A la estrategia correspondiente al valor α se le llama estrategia maximin, mientras que a la estrategia correspondiente a β estrategia minimax.

Nótese el interesante hecho de que en esta matriz de juego, la misma entrada proporciona tanto el valor inferior como el valor superior. La razón es que este número es tanto el mínimo de su renglón como el máximo de su columna. En general, la posición de cualquier entrada de este tipo se conoce con el nombre de punto de silla.

De existir un punto de silla, se dice que las estrategias correspondientes son óptimas y juntas forman la solución del juego. Este punto tiene la notable propiedad de que si uno de los jugadores se adhiere a esta estrategia óptima mientras que el otro no lo hace, entonces el jugador que se sale de esta estrategia óptima nunca puede ganar; en el mejor de los casos su ganancia seguirá siendo la misma, en el peor, su pérdida será mayor.

Cuando ocurre que $\alpha = \beta$ (lo cual no siempre sucede), al número común se le llamará valor del juego y se denotará con la letra ν. En nuestro caso $\nu = 1$ y se afirma que el juego es favorable para J_1, es decir, la compañía I. Luego se puede concluir que la compañía I deberá instrumentar su alternativa A_2, y la compañía II su alternativa B_2 (en ambos casos, incrementar la publicidad del producto), desechando por completo las restantes posibilidades. Esto acarreará un beneficio de una unidad en el porcentaje incrementado de las ventas para la compañía I. ※

4.3 ¿ EN QUE PROPORCION MOSTRAR AGUILA Y SOL ?

Desde la enseñanza elemental nos es familiar hacer el análisis de algunos experimentos aleatorios como, por ejemplo, el obtener una carta específica en el juego de naipes, lanzar un determinado número de dados o bien el lanzamiento de monedas, entre otros. Retomemos una variación de este último, como una manera de ilustrar una situación competitiva en donde la meta es la recreación de los jugadores.

PROBLEMA 2.

Dos personas, A y B, juegan a emparejar monedas. Cada jugador deposita una moneda y la cubre con la mano de manera que el otro no pueda verla. Si ambas monedas quedan igual (ambas con águila o ambas con sol), A gana un peso; en caso contrario, B gana un peso.

¿ Qué estrategias debe seguir cada jugador con el fin de obtener una ganancia óptima ?

SOLUCION.

En este juego, como en el anterior, se asumirá la representatividad de uno de los jugadores, digamos la de A y decir que seremos el jugador J_1, y B el jugador J_2. Se establece además la hipótesis de racionalidad para ambos jugadores, en general esto asi sucederá.

En el juego no se proporcionan las estrategias a seguir para cada jugador ni la matriz del juego, por lo que es necesario especificar estos puntos. Para ello, nótese que en el juego sólo se tienen dos jugadas que corresponden una a cada jugador con la característica de que ninguno sabe lo que ha hecho el otro, diremos en este caso que el juego no es de información perfecta.

Los objetivos que se deben cumplir en la solución son los siguientes:

1) Establecer las estrategias que debe seguir cada jugador,
2) Indicar en qué medida se deben aplicar las estrategias, y
3) Estimar el valor del juego.

Se empieza por contestar el primer punto. Dado que cada jugador sólo tiene una jugada personal, una estrategia para cualquiera de ellos consiste en la elección de una sola jugada. De esta forma se tienen dos estrategias, llamémoslas puras, las cuales se representarán de la siguiente manera

para el jugador J_1.

A_1: mostrar sol, y
A_2: mostrar águila.

De manera similar para el jugador J_2.

B_1: mostrar sol, y
B_2: mostrar águila.

De acuerdo a las reglas del juego, si se muestran dos soles o dos águilas, tendremos una ganancia de +1, mientras que si se muestra águila y sol, la ganancia sera de -1. Esta información se resume a continuación.

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_1	+1	-1
A_2	-1	+1

MATRIZ DEL JUEGO

Es claro que si el juego se realiza sólo una vez, entonces no puede decirse que una de las estrategias es mejor que la otra. Es decir, cualquiera de los jugadores puede hacer cualquier elección.

Sin embargo, si el juego se continua, la situación cambia, por ejemplo, supóngase que elegimos la estrategia A_1, y la seguimos usando. Después de cierto tiempo, nuestro oponente descubrirá nuestra estrategia y responderá a ella con la estrategia B_2, la cual garantiza que siempre perderemos. Por tanto, no nos convendria seguir repitiendo la misma estrategia. Esta situación ya se habia hecho patente en el problema 1, en todo caso lo que se hará a continuación es calcular el valor inferior y el valor superior del juego.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	MINIMO
A_1	+1	-1	-1
A_2	-1	+1	-1
MAXIMO	+1	+1	

α = Máximo {-1, -1} = -1
β = Mínimo {+1, +1} = +1

De aqui se llega a que cualquiera de las dos estrategias de J_1 son estrategias maximin, y lo mismo para J_2 en el que cualquiera de sus estrategias son estrategias minimax. Pero con la diferencia de que en este caso $\alpha \neq \beta$ ($\alpha < \beta$) lo cual no permite afirmar que se tiene la solución del juego como lo fue para el primer problema. Esto conduce a conjeturar lo siguiente:

¿ Existirá el valor del juego ν de tal forma que se encuentre entre el valor inferior α y el valor superior β ?

La respuesta existe y es afirmativa, quedando como trabajo ulterior la determinación del valor de ν. En este caso, al no presentarse un punto de silla en la matriz del juego, ha ocasionado una cierta -inestabilidad- en el juego. Esto es, cada vez que uno de los jugadores aplica una determinada estrategia, el otro siempre cuenta con la posibilidad de aplicar aquella con la cual siempre reducirá el beneficio de su oponente, y de esta forma, de continuar el desarrollo del juego no puede concluirse inmediatamente qué estrategia en particular será la que se tenga que usar.

Un método seguro para evitar que el oponente descubra la estrategia que usamos, es hacer la elección en cada etapa del juego, de tal forma que ni nosotros mismos sepamos lo que vamos a hacer en la siguiente. Por ejemplo, lanzando la moneda al aire antes de colocarla sobre la mesa. De esta forma las estrategias puras A_1 y A_2 se combinan al azar, aunque en una proporción definida. A esta forma de combinar las estrategias puras en una cierta proporción se le conoce como estrategias mixtas.

Para determinar el valor ν, recurramos a la idea que se tiene de estrategias mixtas. Para ello denotemos con $J_1^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}$ a nuestra estrategia mixta óptima que consta de la aplicación de las estrategias puras A_1 y A_2 en las proporciones x_1^* y x_2^*, respectivamente. Donde $x_1^* + x_2^* = 1$, con $x_1^*, x_2^* \geq 0$ (las proporciones son de hecho probabilidades).

Uno de los resultados básicos al aplicar las estrategias mixtas es el siguiente. Si el jugador J_2 aplica su estrategia pura B_1 mientras que nosotros nos mantenemos en nuestra estrategia mixta óptima, el resultado sera igual a la ganancia promedio ν. Es decir:

$$(+1)\ x_1^* + (-1)\ x_2^* = \nu.$$

De igual manera si J_2 aplica su estrategia pura B_2 y nosotros nos seguimos manteniendo en la estrategia mixta óptima, se tiene:

$$(-1)\ x_1^* + (+1)\ x_2^* = \nu$$

La información obtenida se resume a continuación

$$\begin{array}{l} (+1)\ x_1^* + (-1)\ x_2^* = \nu \\ (-1)\ x_1^* + (+1)\ x_2^* = \nu \\ \qquad x_1^* + \qquad x_2^* = 1;\ x_1^*,\ x_2^* \geq 0. \end{array}$$

Lo que se ha obtenido es un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas; x_1^*, x_2^* y ν. Este sistema se puede resolver directamente o empleando un método apropiado como podria ser la regla de Cramer, es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow x_2^* = \frac{1}{2}$$

$$\nu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$$

de donde $J_1^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

De manera similar, desde el punto de vista del jugador J_2, él asumirá que su estrategia mixta óptima es $J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$ de la cual no se apartará y nosotros aplicamos las estrategias puras A_1 y A_2, el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} (+1)\, y_1^* + (-1)\, y_2^* &= \nu \\ (-1)\, y_1^* + (+1)\, y_2^* &= \nu \\ y_1^* + \qquad y_2^* &= 1,\ y_1^*,\ y_2^* \geq 0. \end{aligned}$$

de donde se $y_1^* = 1/2$, $y_2^* = 1/2$ con $\nu = 0$. Por lo que su estrategia mixta óptima es: $J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

A la ganancia promedio $\nu = 0$ la llamaremos el <u>valor esperado del juego</u>. Y dado que en este caso vale cero se dice que el juego es equitativo. Los objetivos planteados al principio se han satisfecho, el significado que tienen los resultados indican que las estrategias óptimas para cada jugador es aplicar sus dos estrategias puras al azar en un número igual de veces.

4.4. ¿ QUE CADENA TELEVISORA SERA LA MEJOR ?

PROBLEMA 3.

Dos cadenas televisoras cubren el mismo territorio, y ambas tratan de obtener la mayor porción posible de audiencia entre los habitantes. El equipo de publicidad de la televisora A realizó un estudio con el fin de conocer las posibles ventajas que se obtendrían con la instrumentación de tres medidas que habrán de entrar en competencia con las tres medidas que se estima habrá de instrumentar la televisora B, en el transcurso del próximo año. Los resultados se muestran en la siguiente tabla, y representan el incremento de audiencia en millones de habitantes cuando una determinada alternativa se compara con las tres de la cadena B. Los valores positivos favorecen a la firma A, mientras que los negativos favorecen a la firma B.

TV B / TV A	B1 : PROGRAMAS CULTURALES	B2 : EVENTOS DEPORTIVOS	B3 : SERIES INFORMATIVAS
A1 : PROGRAMAS CULTURALES	2	9	-1
A2 : EVENTOS DEPORTIVOS	3	0	1
A3 : SERIES INFORMATIVAS	-2	-5	0

¿ Favorecen a la televisora A los resultados ?

SOLUCION.

El punto de partida es ahora la matriz del juego, ya que las estrategias para ambos jugadores, la televisora A y la televisora B, así como las ganancias para el primer jugador, la televisora A, ya están dadas.

Para ir en búsqueda de la solución del juego, es decir, determinar la proporción en que se aplicarán las estrategias de cada jugador y estimar el valor el juego, es conveniente hacer la siguiente observación.

Para ello se reproduce la tabla de resultados, que es la matriz del juego.

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	-1
A_2	3	0	4
A_3	-2	-5	0

MATRIZ DEL JUEGO

El jugador J_1 que esta interesado en máximizar la mínima ganancia, debe observar que la estrategia A_2 y la estrategia A_3 tienen en común una cierta característica, a saber, que las entradas correspondientes a la estrategia A_2 son todas mayores que las correspondientes entradas de la estrategia A_3. De ahi que le convenga eliminar del análisis a la estrategia A_3, ya que la ventaja que pudiera reflejar esta estrategia queda determinada por la estrategia A_2. Por lo que se dice que la estrategia A_2 domina a la estrategia A_3. Entonces la matriz queda reducida a la siguiente.

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	-1
A_2	3	0	4

En esta matriz ya no es posible hacer una reducción tanto en las estrategias de J_1 como desde el punto de vista de J_2 el cual esta interesado en minimizar la máxima pérdida.

Sin embargo, ahora la dimensión de la matriz del juego es de 2x3, analicemos como podemos superar esta dificultad. Para ello calculemos el valor inferior y el valor superior del juego.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3	MINIMO
A_1	2	3	-1	-1
A_2	3	0	4	0
MAXIMO	3	3	4	

De aquí: α = máximo $\{-1, 0\}$ = 0 y β = mínimo $\{3, 3, 4\}$ = 3. Por lo que $\alpha < \beta$, esto nos conduce a tratar de determinar el valor esperado del juego, ν, de antemano sabiendo que debe encontrarse entre 0 y 3. Como ahora la matriz no es de dimensión 2x2 parecería que el razonamiento del problema 2 no funciona para el cálculo de las proporciones (probabilidades) en que deberán de aplicarse las estrategias de ambos jugadores. Recordemos en qué consiste dicho razonamiento y apliquémoslo.

Supóngamos que ν es el valor esperado del juego y denotemos con

$$J_1^* = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{Bmatrix}$$

a la estrategia mixta óptima de J_1, aplicando A_1 y A_2 en las proporciones x_1 y x_2 con $x_1 + x_2 = 1$; $x_1, x_2 \geq 0$. Entonces, si J_2 aplica sus estrategias puras B_1, B_2 y B_3, mientras que J_1 se mantiene en su estrategia mixta óptima se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &= \nu \\ 3\,x_1 + 0\,x_2 &= \nu \\ -1\,x_1 + 4\,x_2 &= \nu \\ x_1 + x_2 &= 1;\; x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

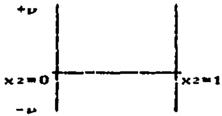
Lo cual representa un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que ya no es muy fácil de resolver como para el del problema 1. De intervenir en la solución las estrategias A_1 y A_2, así como las que lo hagan por parte de J_2, seran llamadas estrategias convenientes, es decir, son las que usará cada jugador.

Procedamos a resolver el sistema de la siguiente forma:

Como $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2$ con $x_1, x_2 \geq 0$. Entonces

$$2(1 - x_2) + 3\,x_2 = \mu \quad \Rightarrow \quad x_2 + 2 = \mu \qquad [B_1]$$
$$3(1 - x_2) + 0\,x_2 = \mu \quad \Rightarrow \quad -3\,x_2 + 3 = \mu \qquad [B_2]$$
$$-1(1 - x_2) + 4\,x_2 = \mu \quad \Rightarrow \quad 5\,x_2 - 1 = \mu \qquad [B_3]$$

Esto indica que μ varía linealmente con x_2, de aquí, que podamos realizar el trazo de estas rectas. Si tomamos en cuenta que el valor de x_2 esta comprendido en el intervalo [0, 1] consideraremos la siguiente representación gráfica, para que posteriormente hagamos el trazo respectivo de cada recta.



ESQUEMA GRAFICO INICIAL
Figura 4.4.1

Para el trazo de la primera recta $[B_1]$ en el esquema, demos los valores de 0 y 1 a x_2 con lo cual obtendremos las ordenadas correspondientes de μ, como a continuación se indica

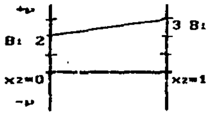


Figura 4.4.2

Análogamente se trazan (B_2) y (B_3) en el mismo esquema, indicando la intersección respectiva de las tres rectas. Esta situación se ilustra en la siguiente figura

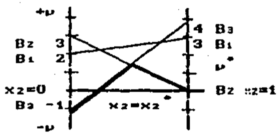


Figura 4.4.3

De aquí el jugador J_1 deberá seleccionar el valor de x_2 que máximiza el valor de ν. De hecho eligirá el valor de x_2 que dé el resultado de ν mínimo más grande, esto ocurre precisamente en el punto de intersección de las rectas (B_2) y (B_3). Es decir, es el punto más alto de la envolvente inferior.

Con esto queda determinado el valor óptimo $x_2 = x_2^*$, y con ello el de $x_1 = x_1^*$. Por lo que el problema ha quedado resuelto.

Los valores aproximados son los siguientes:

$$x_2^* \approx 1/2 \quad \rightarrow \quad x_1^* \approx 1/2; \qquad \nu \approx 3/2.$$

Obsérvese que las rectas corresponden precisamente a las estrategias B_1, B_2 y B_3 del jugador J_2. Además gráficamente se puede apreciar que la recta (B_1) no forma parte de la solución, esto representa una de las ventajas de este método gráfico el cual indica que estrategias son las que se deben considerar en la solución. Lo anterior lo podemos aprovechar de la siguiente manera.

Si A representa la matriz de ganancias reducida y A' es la correspondiente a las estrategias que forman parte de la solución, se tiene:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \qquad A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}$$

De aquí consideremos a la matriz A' cuya dimensión es de 2x2, por lo que podemos plantearnos el siguiente sistema de ecuaciones que ya nos es familiar:

$$\begin{aligned} 3\ x_1 + 0\ x_2 &= \nu \\ -1\ x_1 + 4\ x_2 &= \nu \\ x_1 + \ x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Del cual se obtienen los valores; $x_1^* = 1/2$, $x_2^* = 1/2$ con $\nu = 3/2$. Que son los valores óptimos exactos para J_1. Por otra parte, para el jugador J_2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3\ y_2 - \ y_3 &= \nu \\ 0\ y_2 + 4\ y_3 &= \nu \\ y_2 + \ y_3 &= 1. \end{aligned}$$

De donde; $y_2^* = 5/8$, $y_3^* = 3/8$ y $\nu = 3/2$. Los resultados finales son los siguientes:

$$J_1^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_2^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que la televisora A deberá considerar en iguales proporciones la implantación de programas culturales y eventos deportivos y no dar importancia a las series informativas. Por su parte a la televisora B le conviene aplicar en una proporción de 5/8 el desarrollo de eventos deportivos y en 3/8 para series informativas sin considerar el desarrollo de programas culturales. Como el valor esperado del juego es 3/2 esto quiere decir que el juego es favorable para la televisora A, es decir, el juego no es equitativo.

4.5 CONCEPTOS DE TEORIA DE JUEGOS.

Esta sección esta dedicada a formalizar las ideas desarrolladas en la solución intuitiva de los tres problemas prototipo. Con ello, a su vez se definirán y explicarán los conceptos básicos de la Teoría de Juegos. Primeramente esbocemos el siguiente aspecto histórico.

" En 1928 el matemático de origen austriaco John Von Neumann (1903-1957) cimenta la Teoría de Juegos. Area de las matemáticas que tuvo un desarrollo independiente y que actualmente se le ubica como parte de la Investigación de Operaciones, una de sus primeras aplicaciones se dió en los conflictos bélicos, sin embargo en épocas de paz y no obstante las limitantes surgidas en el análisis de las situaciones competitivas y de conflicto, los avances teóricos que se han desarrollado han permitido nuevas extensiones en otros campos. Así por ejemplo, es notoria la conexión existente entre esta teoría y la Programación Lineal inventada por George Dantzig años después. De igual forma sirvió para desarrollar la Teoría Estadística de Decisión, posteriormente ha dado cause a otros conceptos matemáticos de competitividad como los metajuegos y los debates entre otros."

La noción de juego desde luego ya nos es familiar y en algunos inclusive ya habremos participado, a saber el ajedrez, damas y juegos de cartas, etc. Por supuesto, en este contexto su finalidad es la recreación, mientras que para algunos otros juegos no podría serlo. Más precisamente definamos lo que se entiende por un juego.

DEFINICION 4.5.1. Un *Juego* es una situación competitiva entre n-personas o grupos, denominados jugadores, que se realiza bajo un conjunto de reglas previamente establecidas, con consecuencias conocidas.

En un juego, puede haber dos o más oponentes, entonces se habla de juegos para dos personas o, en general, para n-personas. Los jugadores en un juego para n personas pueden formar coaliciones permanentes o temporales durante el curso del juego, todos los miembros de una coalición permanente se consideran en conjunto como un jugador, puesto que tienen los mismos intereses. Por tanto, si existen dos coaliciones permanentes, el juego se reduce a un juego para dos personas, los cuales son el tipo de juegos que aquí se analizarán.

DEFINICION 4.5.2. *Reglas del juego*. Es un sistema de condiciones que regulan las acciones permisibles para cada jugador en cada etapa del juego.

DEFINICION 4.5.3. *Jugadas* Consisten en las decisiones que se toman en el curso del juego.

Ahora bien, dependiendo de la totalidad de las jugadas realizadas por cada bando se tendrá un resultado el cual puede ser un triunfo o una derrota y no siempre tiene una representación cuantitativa; pero usualmente es posible establecer algún tipo de escala con la cual pueda representarse el resultado como un número bien definido. Al resultado numérico de un juego se le llama valor del juego.

DEFINICION 4.5.4. *Juego de suma cero*. Se dice que un juego es un juego de suma cero si la suma de las ganancias es cero.

De esta definición se desprende que un bando pierde tanto como el otro bando gana, aritméticamente significa que la ganancia de uno de los bandos es exactamente igual a la ganancia del otro con el signo aritmético opuesto. Esto significa que en un juego de suma cero, las metas que persiguen los jugadores son totalmente opuestas.

En el desarrollo de la solución de nuestros problemas prototipo se hacía referencia en el análisis de la solución considerando solo a uno de los oponentes (el primer jugador), esto se pudo estipular ya que se trataban precisamente de juegos de suma cero. Por lo tanto, para este tipo de juegos, en general, sólo es necesario considerar la ganancia para uno de los bandos, digamos la del jugador J_1. Al cual podemos considerar como nuestro bando y asumir que será el bando ganador, y el jugador J_2 como el bando perdedor. Desde luego que esta suposición no representa una ventaja real para J_1, ya que para el mismo juego se puede tener el resultado opuesto simplemente cambiando el signo de todas la ganancias y dejando todo lo demás igual.

Por otra parte, como un juego se realiza mediante jugadas sucesivas, distinguiremos dos tipos de jugadas, las cuales se especifican a continuación.

<u>DEFINICION 4.5.5</u>. *Jugada personal.* Una jugada personal es una elección y ejecución consciente, por parte de uno de los jugadores, de una de las jugadas que sean posibles en la situación dada.

Un ejemplo de una jugada personal es cualquier jugada en un juego de ajedrez. El conjunto de posibilidades disponibles para una jugada personal está determinado por las reglas del juego y depende de la totalidad de las jugadas previas realizadas por ambos jugadores.

<u>DEFINICION 4.5.6</u>. *Jugada aleatoria.* Una jugada aleatoria es la elección de una posibilidad de entre un cierto número de ellas, no por la decisión de un jugador, sino por el resultado de algún experimento aleatorio.

Por ejemplo, si el juego requiere que se extraiga una carta al azar de una baraja completa, ésta es una jugada aleatoria con 52 resultados posibles cada uno con la misma probabilidad. Algunos juegos (como los juegos de cartas) son mixtos, ya que contienen tanto jugadas personales como aleatorias.

En un juego es importante saber con que tipo o cantidad de información se cuenta para cada jugador acerca de las jugadas del oponente. Así por ejemplo, en el ajedrez y las damas el jugador sabe de las jugadas realizadas por su oponente. Mientras que en el poker, los jugadores no saben cuáles cartas han recibido sus oponentes. Esto lo podemos caracterizar a continuación.

<u>DEFINICION 4.5.7</u>. *Juego de información perfecta*. Un juego en el cual cada participante, al hacer una jugada, conoce los resultados de todas las jugadas hechas previamente, sean éstas personales o aleatorias, se llama juego de información perfecta.

Desde luego que en la vida real la mayoría de las situaciones antagónicas no son juegos de información perfecta.

A continuación se define uno de los conceptos fundamentales de la teoría de juegos, a saber, el de estrategia.

<u>DEFINICION 4.5.8</u>. *Estrategia*. Por estrategia de un jugador se entiende el conjunto completo de reglas que determinan sus elecciones para todas las etapas que se originan en el curso del juego.

A las estrategias originales se les llama <u>estrategias puras</u>. Si en el juego, cada jugador tiene un número finito de estrategias posibles diremos que el juego es <u>finito</u>. Si el jugador J_1 (nuestro bando) tiene m estrategias y J_2 (nuestro oponente) tiene n estrategias el juego se denomina <u>juego de mxn</u>. Las estrategias de nuestro bando se indican como:

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

para nuestro oponente con

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

Si cada bando adopta una estrategia definida, digamos A_i y B_j, y si el juego sólo contiene jugadas personales, las estrategias A_i y B_j determinan unívocamente nuestra ganancia que se indica con a_{ij}.

Si el juego también contiene una o más jugadas aleatorias, nuestra ganancia para la pareja dada de estrategias A_i y B_j es una cantidad aleatoria y dependerá del resultado de todas las jugadas aleatorias.

En este caso, es posible calcular la ganancia promedio para la pareja de estrategias para todos los resultados posibles de las jugadas al azar. Para lo cual, se adoptara el cálculo de la esperanza matemática para a_{ij}. Es decir:

$$a_{ij} = p_1a_1 + p_2a_2 +, \dots ,+ p_na_n$$

donde p_i es la probabilidad del i-esimo resultado posible y a_i es la ganancia para este resultado ($i=1,2,\dots,n$). Se usa el mismo símbolo a_{ij} para la ganancia de ambos tipos de juego.

Si se conocen los valores a_{ij}(la ganancia o la ganancia promedio) para cada pareja de estrategias, estos los podemos agrupar en una tabla donde los renglones representen las estrategias de J_1 y las columnas las estrategias de J_2 como se muestra a continuación.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

MATRIZ DEL JUEGO

A este arreglo se le denomina matriz de ganancias (o consecuencias) o simplemente matriz del juego.

Una de las características que se encontraron en la solución de los dos problemas prototipo fue la necesidad de alternar las estrategias disponibles y asi poder establecer con que probabilidad se tendrían que aplicar, esto nos conducia a establecer lo que se entiende por una estrategia mixta la cual definimos a continuación.

DEFINICION 4.5.9. *Estrategia mixta.* Es aquella en la cual las estrategias puras disponibles se combinan al azar, aunque en una proporción definida.

Esto lo podemos expresar de la siguiente forma, sea

x_i = probabilidad de que el jugador J_1 use la estrategia A_i
$(i = 1,2,...,m)$

y_j = probabilidad de que el jugador J_2 use la estrategia B_j
$(j = 1,2,...,n)$

en donde m y n son los números de estrategias disponibles para J_1 y J_2, respectivamente. Como estos valores son probabilidades, necesitarian ser no negativos y dar como suma 1. Es decir

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad \text{con} \quad x_i \geq 0; \quad i = 1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad \text{con} \quad y_j \geq 0; \quad j = 1,2,...,n.$$

Una estrategia mixta la denotaremos de la siguiente forma para el jugador J_1 y J_2, respectivamente:

$$J_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que las estrategias puras $A_1, A_2,\dots,A_m$ se aplican con probabilidad $x_1, x_2,\dots,x_m$. De igual forma, para nuestro oponente que usara las estrategias puras $B_1, B_2,\dots,B_n$ con probabilidad $y_1, y_2,\dots,y_n$, respectivamente.

No siempre se utilizan todas las estrategias puras disponibles para un jugador al aplicar sus estrategias mixtas óptimas, aquellas estrategias puras que se usan se les llamará estrategias convenientes.

DEFINICION 4.5.10. *Estrategia óptima.* Una estrategia óptima para un jugador es una estrategia que le garantiza la ganancia media máxima posible (o, lo que es lo mismo, la pérdida media menor posible).

Una vez que se sabe lo que es una estrategia óptima, el siguiente paso es tratar de determinarla. Para ello, recordemos cual es la matriz del juego para el jugador J_1 y J_2.

$J_1 \backslash J_2$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

MATRIZ DEL JUEGO

Analicemos sucesivamente cada una de las estrategias disponibles para nuestro bando. Supongamos que elegimos la estrategia A_i, entonces siempre debemos considerar la posibilidad de que nuestro oponente nos conteste con la estrategia B_j, con la cual nuestra ganancia a_{ij} es tan pequeña como sea posible. De aquí que, para un i fijo debamos considerar el menor de los números a_{ij}, al cual designamos con α_i. Es decir

$$\alpha_i = \text{mín} \{ a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \} \qquad \text{para } i= 1,2,\ldots,m.$$

Como nuestro oponente es tan racional como nosotros, no podemos esperar ganar más de α_i. Si deseamos ser tan cautelosos como sea posible (no correr riesgos) debemos adoptar la estrategia A_i para la cual α_i es un máximo. Este valor lo denotamos con α.

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{máx } \alpha_i \qquad ; i=1,2,\ldots,m \\ &= \text{máx mín} \{ a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \} ; i=1,2,\ldots,m. \end{aligned}$$

A este número se le llama valor inferior del juego, o el maximin, es la ganancia máxima que puede ser garantizada en el caso de seguir una sola estrategia. A la estrategia correspondiente a este valor se le denomina estrategia maximin. Esta es nuestra estrategia más cautelosa; no importa que haga el oponente, podemos estar seguros de la ganancia α. Es un mínimo garantizado del que siempre podemos estar seguros mientras nos apegemos a esta estrategia.

De igual forma consideremos la situación para nuestro oponente, el jugador J_2, el cual está interesado en minimizar nuestra ganancia. Lo que primero debe hacer, es hallar la ganancia máxima para cada una de sus estrategias, por ejemplo, la de B_j resulta ser

$$\beta_j = \text{máx} \{ a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \} \qquad \text{para } j=1,2,\ldots,n.$$

A continuación lo que le convendría hacer, es elegir el menor de los números β_j . Es decir.

$$\beta = \min \beta_j \quad j=1,2,\ldots,n$$
$$= \min \max \{ a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \} \; ; \; j=1,2,\ldots,n.$$

A este valor β se le llama valor superior del juego, o el minimax; la estrategia correspondiente para β se llama estrategia minimax. Esta estrategia es la más conservadora de nuestro oponente; si la aplica en cada ocasión, ésta garantiza que nuestra ganancia nunca será mayor que β, no importa lo que hagamos. Por su definición, siempre se cumple que:

$$\alpha \leq \beta$$

En la matriz del juego se adiciona el cálculo de los valores α_i y β_j de la siguiente forma:

$J_1 \backslash J_2$	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
$\vdots$	...	...	...	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

Es común que a la aplicación de las estrategias más conservadoras de ambos jugadores, la estrategia maximin de J_1 y la estrategia minimax de J_2, se le llame "principio minimax", y algunas veces a ambas estrategias se les llama estrategias minimax.

Consideremos la matriz de juego del problema 3 para ilustrar una de las situaciones que ocurre con frecuencia en la búsqueda de la solución de algunos juegos, su -inestabilidad-.

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	3	-1	-1
A_2	3	0	4	0
A_3	-2	-5	0	-5
β_j	3	3	4	

MATRIZ DEL JUEGO PROBLEMA 3

De aquí se obtuvo que:

valor inferior $\alpha = 0$

valor superior $\beta = 3$.

Ahora, supóngase que usamos nuestra estrategia maximin A_2 y que nuestro oponente usa su estrategia minimax B_1. Si ambos bandos se adhieren a estas estrategias, la ganancia será 3. Pero si nuestro oponente se da cuenta de que hemos elegido la estrategia A_2, entonces, inmediatamente eligirá su estrategia B_2 y reducirá nuestra ganancia a 0; Ahora, si sabemos que ha elegido la estrategia B_2, podemos en este caso aplicar la estrategia A_1 y aumentar de nuevo nuestra ganancia a 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, si ambos bandos aplican sus estrategias minimax, la situación es inestable, ya que puede cambiar cada vez que uno de los bandos obtiene información acerca de la estrategia elegida por el bando contrario.

Diremos que el juego es inestable cuando ocurra que $\alpha < \beta$.

Sin embargo, existen algunos juegos para los cuales las estrategias minimax son estables. En este caso, el valor inferior y el valor superior son iguales. Es decir

$$\alpha = \beta.$$

Si esto sucede, se designa con la letra v a ambos valores. Esto es, $\alpha = \beta = v$, a este número se le denominará valor del juego.

A la siguiente matriz de juego se le calcula el valor inferior del juego $\alpha = 1$; su valor superior $\beta = 1$, los cuales resultan ser iguales. Por lo que, el valor del juego $v = 1$.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	1	4	1
A_2	0.5	-1	2	-1
A_3	0	0.5	3	0
β_j	2	1	4	

En geometría, un punto sobre una superficie que tiene la propiedad de ser simultáneamente un mínimo en una dirección y un máximo en la otra, se le llama punto silla. Haciendo analogía con este término obtenemos la siguiente definición.

DEFINICION 4.5.11. *Punto silla de la matriz.* Es el elemento a_{ij} correspondiente a las estrategias A_i y B_j que es al mismo tiempo el número menor en su renglón y el número mayor en su columna.

Cuando un elemento de la matriz tiene esta propiedad se dice que el juego tiene un punto silla.

Un punto silla, si existe, corresponde a una pareja de estrategias minimax. Se afirma que estas estrategias son óptimas y juntas forman la solución del juego. Esta solución tiene la notable propiedad siguiente. Si cualquiera de los jugadores se adhiere a su estrategia óptima, mientras que el otro no lo hace, entonces el jugador que se sale de su estrategia óptima nunca puede ganar; en el mejor de los casos su ganancia seguirá siendo la misma, en el peor, su pérdida será mayor.

La clase de juegos que tienen un punto silla, tienen un considerable interés teórico y práctico. En particular, se ha probado el siguiente.

TEOREMA 4.5.1. *Todo juego con informacion perfecta tiene un punto silla.*

De aquí, que para este tipo de juegos exista solución. Es decir, se garantiza una pareja de estrategias óptimas para los dos bandos, para la cual la ganancia promedio es igual al valor del juego. Si el juego sólo contiene jugadas personales, el uso de las estrategias óptimas determina unívocamente el pago, que es igual al valor del juego v.

De acuerdo con este teorema, el ajedrez debe tener un punto silla y, por lo tanto, debe tener una solución que determine las estrategias óptimas para ambos jugadores.

¿ Podría el lector intentar encontrar un punto silla en el juego de ajedrez ?

En general, es difícil encontrar una solución cuando un juego de mxn no tiene un punto silla. En particular, si m y n son grandes, a veces es posible simplificar el problema reduciendo desde el principio el número de estrategias en la matriz del juego. Esto se puede hacer si se eliminan las estrategias dominadas que pudiera tener la matriz. Diremos que la estrategia A_i domina a la estrategia A_k si:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \qquad \forall \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Por lo que, se puede eliminar a la estrategia A_k del proceso de decisión. En forma análoga para el jugador J_2, se tiene que, la estrategia B_j domina a la estrategia B_l si

$$a_{ij} \leq a_{il} \qquad \forall \; i = 1,2,\ldots,m.$$

Supóngase la siguiente matriz de juego para ejemplificar este concepto.

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40	34	30	33
A_2	38	35	36	37
A_3	28	33	35	38

Para el jugador J_2, que busca minimizar la máxima pérdida, la estrategia B_3 domina a la B_4, ya que $a_{i3} < a_{i4}$ para $i=1,2,3$. En este caso, se puede eliminar B_4. La matriz del juego quedaría

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3
A_1	40	34	30
A_2	38	35	36
A_3	28	33	35

Para el jugador J_1, que busca maximizar la mínima ganancia, la estrategia A_2 domina a la A_3, ya que $a_{2j} > a_{3j}$ para $j=1,2,3$. y, por lo tanto, se elimina este último renglón. La matriz del juego queda como

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3
A_1	40	34	30
A_2	38	35	36

A continuación se puede eliminar la estrategia B_1 ya que la dominan B_2 y B_3, es decir, $a_{i1} > a_{i2}$ y $a_{i1} > a_{i3}$, respectivamente, para $i=1,2$. La matriz simplificada es

J_1 \ J_2	B_2	B_3
A_1	34	30
A_2	35	36

Esta matriz, ya reducida, muestra un punto de silla. El valor del juego lo proporciona el punto de silla.

$$\alpha = \beta = \nu = 35$$

Por regla general, todas las estrategias dominadas deben eliminarse, antes de buscar una solución. Aunque no siempre quedará un punto silla en el proceso de reducción de la matriz. Por lo que, se requerirán de otras técnicas que se analizarán más adelante en la sección 4.6.

Por otra parte, es común que los valores inferior y superior no sean iguales. Es decir, que se satisfaga la desigualdad estricta

$$\alpha < \beta.$$

De aplicarse una estrategia pura única, considerando que nuestro oponente actuará en forma racional, la elección estaría determinada por el principio minimax que garantiza un resultado igual al valor inferior α del juego. Por lo que, nos gustaría incrementar este valor, para ello, tendríamos que recurrir al uso de las estrategias mixtas, que es lo que recomienda la Teoría de Juegos cada vez que se tenga que $\alpha < \beta$.

De ser así, debemos tener la certeza de que, en efecto, el resultado se mejorará admitiendo también las estrategias mixtas. Esto nos conduce a enunciar los dos siguientes teoremas:

TEOREMA 4.5.2. *Si uno de los jugadores se adhiere a su estrategia mixta optima, entonces la ganancia se mantendra igual al valor del juego, sin importar lo que haga el otro jugador siempre que el solo use estrategias convenientes.*

El siguiente se conoce como teorema fundamental de la teoría de juegos, algunas veces conocido como teorema minimax que fue probado por primera vez por John Von Neumann en 1928.

TEOREMA 4.5.3. *Si se admiten las estrategias mixtas asi como las puras, todo juego finito tiene por lo menos una solucion.*

Con este resultado se asegura que para todo juego finito existe una pareja de estrategias óptimas, tales que, el pago esperado es igual al valor del juego, y que si cualquiera de los jugadores se aparta de su estrategia óptima, solo puede perder.

Del teorema fundamental se deduce que todo juego finito tiene un valor, el valor ν de cualquier juego debe encontrarse entre los valores inferior y superior del juego. Es decir

$$\alpha \le \nu \le \beta.$$

4.6 SOLUCION ALGEBRAICA Y METODO GRAFICO.

a) SOLUCION ALGEBRAICA. La clase de juegos para los que es posible determinar su solución a través de un sencillo procedimiento algebraico son los juegos de 2x2. Considérese la siguiente matriz del juego.

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

JUEGO DE 2X2

Si existiera un punto silla, la solución consistiría de la pareja de estrategias puras que se intersectan en este valor. Supóngase que el juego no tiene punto silla, esto quiere decir que los valores inferior y superior son desiguales ($\alpha < \beta$), esto nos conduce a pensar en la aplicación de estrategias mixtas. Asumamos que nuestra estrategia mixta óptima es la siguiente.

$$J_1^* = \begin{Bmatrix} A_1, & A_2 \\ x_1^* & x_2^* \end{Bmatrix}$$

La cual tiene la propiedad de que no importa lo que haga el oponente la ganancia promedio será igual a v, el valor del juego. Como el juego no tiene punto silla, las dos estrategias de J_2 son convenientes. De aquí, que si nos adherimos a nuestra estrategia óptima, el oponente puede usar cualquiera de sus dos estrategias puras B_1, B_2 sin cambiar la ganancia media v. Esto proporciona las siguientes ecuaciones:

$$a_{11}\, x_1^* + a_{21}\, x_2^* = v \qquad (4.6.1)$$
$$a_{12}\, x_1^* + a_{22}\, x_2^* = v$$
$$\text{con } x_1^* + x_2^* = 1; \quad x_1^*,\, x_2^* \geq 0. \qquad (4.6.2)$$

Al resolver el sistema algebraico para las variables x_1^*, x_2^* y v se tiene:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})} \qquad (4.6.3)$$

$$v = \frac{(a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})}$$

donde: $(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12}) \neq 0$, ya que no existe punto silla.

Conociendo el valor del juego, $v = v^*$, también es posible calcular la estrategia óptima del jugador J_2 que es

$$J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$$

de donde se debe cumplir

$$a_{11}\, y_1^* + a_{12}\, y_2^* = v^* \qquad (4.6.4)$$
$$a_{21}\, y_1^* + a_{22}\, y_2^* = v^*$$
$$\text{con } y_1^* + y_2^* = 1;\ y_1^*,\ y_2^* \geq 0. \qquad (4.6.5)$$

Utilizando la ecuación de (4.5.4) y puesto que $y_2^* = 1 - y_1^*$, resulta:

$$y_1^* = \frac{v^* - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$y_2^* = 1 - y_1^* \qquad (4.6.6)$$

Esto nos ha permitido establecer un método para resolver juegos cuya matriz sea de 2x2. A continuación se aplican estos resultados a la matriz de juego

$J_1 \backslash J_2$	B_1	B_2
A_1	-1	3
A_2	2	-4

El juego no tiene punto silla (α = -1, β = 2), por lo que, la solución esta dada en términos de estrategias mixtas, las cuales son

$$J_1^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \qquad J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

de aquí:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})} = \frac{(-4) - 2}{(-1-4) - (2+3)} = \frac{3}{5}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} - a_{12})} = \frac{(-1) - (3)}{-10} = \frac{2}{5}$$

$$v = \frac{(a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} - a_{12})} = \frac{(-1)(-4) - (2)(3)}{-10} = \frac{1}{5}$$

Para el segundo jugador, se tiene:

$$y_1^* = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{1/5 - 3}{(-1) - (3)} = \frac{7}{10}$$

$$y_2^* = 1 - y_1^* = 1 - 7/10 = 3/10.$$

por lo que: $J_1^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$, $J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 7/10 & 3/10 \end{pmatrix}$.

b) METODO GRAFICO. Para los juegos de 2x2 también es posible aplicar un procedimiento geométrico para encontrar su solución, esto nos permitirá extender el procedimiento a juegos de 2xn y mx2. Analicemos en que consiste este método.

Supóngase la siguiente matriz de juego

$J_1 \backslash J_2$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	A_{21}	a_{22}

MATRIZ DE JUEGO 2X2

Considérese el plano cartesiano XY. Nuestras estrategias, A_1 y A_2 asociemoslas con el eje X de la siguiente forma; A la estrategia A_1 la hacemos corresponder con el valor de X = 0 y la estrategia A_2 con X = 1. Por el punto A_1 trácese la perpendicular I-I y por A_2 la perpendicular II-II. Como se indica en la figura 4.6.1.

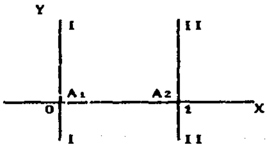


Figura 4.6.1

Las ganancias para la estrategia A_1 se marcaran sobre el eje I-I, mientras que las ganancias para A_2 sobre el eje II-II.

Supongamos que nuestro oponente aplica su estrategia B_1. Esta define un punto sobre el eje I-I y un punto sobre el eje II-II, cuyas ordenadas son a_{11} y a_{21} respectivamente. Con la unión de estos puntos queda definida la recta B_1B_1 (diremos que esta recta representa la estrategia B_1 de J_2).

Ahora, si el jugador J_1 aplica su estrategia mixta

$$J_1 = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{Bmatrix}$$

contra la estrategia pura B_1 del jugador J_2 entonces, la ganancia promedio; $a_{11}\ x_1 + a_{21}\ x_2$, esta dada por la ordenada del punto M sobre la recta B_1B_1 con abscisa x_2. Esta situación se muestra a continuación

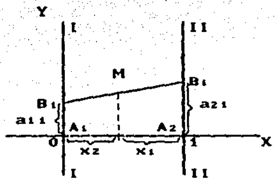


Figura 4.6.2

Analogamente, si J_2 aplica su estrategia B_2, se definirán dos puntos, uno sobre el eje I-I y otro sobre el eje II-II con ordenadas a_{12} y a_{22} respectivamente. Ahora quedará definida la recta B_2B_2, la cual se gráfica, suponiendo que ésta se intersecta en un punto N con la recta B_1B_1.

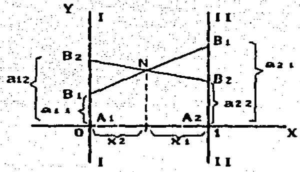
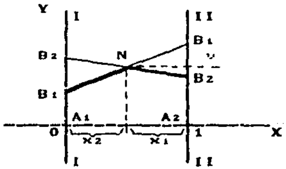


Figura 4.6.3

Para encontrar una estrategia óptima de J_1, se construye la frontera inferior delimitada por las estrategias B_1 y B_2, es decir, la que conforma el trazo de B_1NB_2. Esta frontera se muestra con la línea quebrada gruesa en la figura 4.6.4.



SOLUCION GRAFICA DE UN JUEGO DE 2X2

Figura 4.6.4

Esta frontera inferior da la ganancia mínima para todas nuestras estrategias mixtas. El punto N, en el cual este mínimo es un máximo, define tanto la solución como el valor del juego. La ordenada del punto N es el valor del juego y su abscisa es x_2, la probabilidad de la estrategia A_2 en la estrategia mixta óptima del jugador J_1.

Es importante hacer notar que la solución no siempre se encuentra en el punto de intersección de las estrategias, ya que esta puede ocurrir sobre el eje I-I o sobre el eje II-II.

Considérese la siguiente matriz de juego para ilustrar el método gráfico.

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_1	-1	3
A_2	2	-4

MATRIZ DEL JUEGO

SOLUCION GRAFICA DEL JUEGO

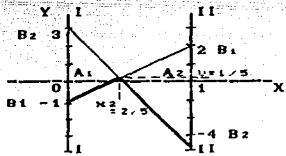


Figura 4.6.5

El método gráfico para resolver juegos de 2x2 lo podemos aprovechar adecuadamente para encontrar la solución de juegos de 2xn. Es decir, que nuestro bando tenga únicamente dos estrategias A_1 y A_2, y que el oponente tenga un número finito n de estrategias B_1, B_2,...,B_n. Específicamente, supóngase que se tiene la matriz de juego.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

MATRIZ DEL JUEGO DE 2XN

Como se recordará, en el caso del juego de 2x2 se definían dos rectas que representaban las estrategias B_1 y B_2 del oponente y que estas generaban una región conformada por la frontera inferior de dichas rectas, en donde se encontraba la solución del juego. De igual forma procederemos ahora, solo que en este caso será necesario trazar n rectas, las generadas por las n estrategias de J_2, y elegir el punto N máximo de la <u>frontera inferior</u>. Este punto proporciona la solución del juego.

Supóngase que se tiene el siguiente diagrama

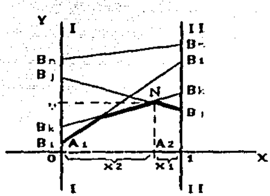


Figura 4.6.6

En este caso la estrategia óptima del oponente es una combinación de las dos estrategias convenientes, B_j y B_k, las cuales se intersectan en el punto N que proporciona la solución del juego (si en N se intersectan más de dos estrategias, se toman dos adecuadamente).

Si se quisiera obtener con precisión los valores del juego, tanto para J_1 y como para J_2, se puede considerar únicamente la matriz del juego reducida, correspondiente a las estrategias B_j y B_k, y aplicar en caso necesario el procedimiento algebraico descrito en la sección 4.6.a.

J_2 / J_1	B_j	B_k
A_1	a_{1j}	a_{1k}
A_2	a_{2j}	a_{2k}

MATRIZ DEL JUEGO REDUCIDA

Para ello, la solución óptima del jugador J_1 estaría dada por:

$$J_1^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

mientras que para el oponente J_2 es

$$J_2^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \ldots B_j \ldots B_k \ldots B_r \\ 0 & 0 \ldots y_j \ldots y_k \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

Como ejemplo, considérese la siguiente matriz de juego y su correspondiente solución gráfica.

J_2 / J_1	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	-1
A_2	4	2	$\frac{1}{2}$	3

MATRIZ DEL JUEGO DE 2X4

SOLUCION GRAFICA DEL JUEGO

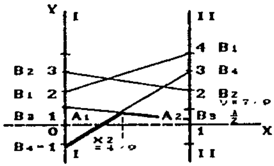


Figura 4.6.7

Para resolverlo algebraicamente se considera la matriz reducida.

J_1 \ J_2	B_3	B_4
A_1	1	-1
A_2	$\frac{1}{2}$	3

MATRIZ DEL JUEGO REDUCIDA

por lo que la solución exacta, esta dada por:

$$x_1 = \frac{3 - (1/2)}{(1 + 3) - (1/2 - 1)} = \frac{5}{9}$$

$$x_2 = \frac{1 - (-1)}{(1 + 3) - (1/2 - 1)} = \frac{4}{9}$$

$$\upsilon = \frac{(1)(3) - (1/2)(-1)}{(1 + 3) - (1/2 - 1)} = \frac{7}{9}.$$

De donde se obtiene: $y_3 = \dfrac{7/9 - (-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{8}{9}$, $\quad y_4 = \dfrac{1}{9}$.

por lo que las estrategias mixtas son:

$$J_1^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 5/9 & 4/9 \end{pmatrix}, \qquad J_2^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

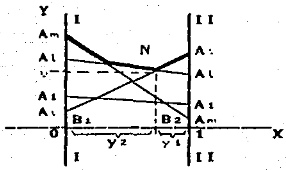
Para un juego de mx2, donde se tienen m estrategias para J_1 y el oponente sólo tiene dos. El problema puede resolverse en forma análoga utilizando una variación del método gráfico. Supóngase que se tiene la matriz del juego

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}

MATRIZ DEL JUEGO DE MX2

El problema se resuelve para el jugador J_2. Para ello, en el esquema gráfico se reemplaza A_1 por B_1 y A_2 por B_2 en el eje X. Las rectas que representan a las m estrategias de J_1 son las que ahora se trazan uniendo los puntos correspondientes sobre las perpendiculares I-I y II-II.

Una vez hechos los trazos de las rectas, se considera la frontera superior. En dicha frontera, se proporcionan las ganancias máximas para J_1. Se elige el punto N más bajo, en el cual este máximo es un mínimo, se define tanto la solución como el valor del juego. La ordenada del punto N es el valor del juego y su abscisa es y_2, la probabilidad de la estrategia B_2 en la estrategia mixta óptima de J_2. Esta situación se ilustra en la figura 4.6.8 en donde se supone que se intersectan las estrategias A_i y A_l.



SOLUCION GRAFICA DE UN JUEGO DE MX2

Figura 4.6.8

Aquí de nuevo se tiene la ventaja de quedar reducida la matriz del juego original a una de 2x2 la correspondiente a la intersección de las estrategias de J_1 en el punto N. Es decir

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_i	a_{i1}	a_{i2}
A_l	a_{l1}	a_{l2}

MATRIZ DEL JUEGO REDUCIDA

Con ello, es posible aplicar el procedimiento algebraico para encontrar los valores exactos de la solución del juego. Para ejemplificar este método, considérese la siguiente matriz de juego con su correspondiente solucion gráfica.

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_1	1	5
A_2	3	4
A_3	4	1
A_4	2	2

MATRIZ DEL JUEGO DE 4X2

SOLUCION GRAFICA DEL JUEGO

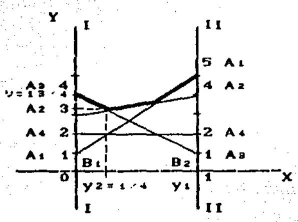


Figura 4.6.9

En términos algebraicos se considera la matriz reducida para encontrar la solución con exactitud.

J_1 \ J_2	B_1	B_2
A_2	3	4
A_3	4	1

MATRIZ DEL JUEGO REDUCIDA

Aplicando las fórmulas algebraicas se tiene:

$$x_2 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})} = \frac{1 - 4}{(3 + 1) - (4 + 4)} = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} + a_{12})} = \frac{3 - 4}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$v = \frac{(a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{21} - a_{12})} = \frac{3 - 16}{-4} = \frac{13}{4}.$$

El cálculo para el segundo jugador es:

$$y_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{13/4 - 4}{3 - 4} = \frac{3}{4}$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 1 - 3/4 = 1/4$$

de donde se concluye que:

$$J_1^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Hasta aquí, ha sido posible resolver con cierta sencilles juegos cuya matriz es de 2x2 y nos hemos extendido a los de dimensión de 2xn y mx2, donde m y n pueden ser cualquier número natural. Para ello, en ambos casos recurrímos a un procedimiento geométrico para encontrar la solución del juego. Este hecho nos fue posible, gracias a que en esta clase de juegos se involucran a dos estrategias de alguno de los jugadores y esto nos permitio elaborar el diagrama geométrico que representaba la situación del problema.

Sin embargo, para juegos cuyas dimensiones son mayores estos métodos prácticamente son imposibles, y habrá que desarrollar técnicas que se estudian en el nivel profesional, a saber Programación Lineal.

4.7. PROBLEMAS TIPICOS.

En esta sección se amplia el panorama de la Teoría de Juegos mediante la exposición de tres problemas. En la solución se aplicarán los resultados desarrollados y formalizados en las anteriores secciones de manera ya simplificada.

A) CONFLICTO OBRERO-PATRONAL.

El Sindicato de Trabajadores de la Industria del Acero debe delinear sus estrategias para argumentar el aumento de salario durante las sesiones de la revisión del Contrato Colectivo de Trabajo con la Empresa. El sindicato considera, por diversas razones históricas, promover alguna de las siguientes estrategias:

A_1: demandas extremadamente exageradas
A_2: demandas exageradas
A_3: demandas razonables
A_4: demandas leves, favorables a la empresa; no al sindicato.

Por su parte, la empresa supone, también por diversas razones históricas, que pueden ocurrir alguna de las siguientes situaciones con el sindicato, por lo que las considera como sus estrategias:

B_1: proponer ofertas demasiado realistas
B_2: proponer ofertas realistas
B_3: propiciar una oferta difícil
B_4: prever cambios de postura del sindicato durante las negociaciones.

Supóngase, que a través de un intermediario el sindicato y la empresa conocen la siguiente matriz de consecuencias, previa la negociación:

EMPRESA / SINDICATO	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	100	80	50	90
A_2	80	70	60	85
A_3	50	50	40	70
A_4	0	40	15	10

% DE AUMENTO CON RESPECTO AL SALARIO ACTUAL

¿Qué estrategias les conviene aplicar al sindicato y a la empresa si desean obtener un beneficio óptimo?.

SOLUCION:

Es claro que este es un juego para dos personas de suma cero, en donde el jugador J_1 es el sindicato y el jugador J_2 la empresa. Las estrategias para cada bando, así como la matriz del juego ya se proporcionan.

Realizemos el cálculo del valor inferior y el valor superior, para ello hagamos uso de la matriz del juego.

EMPRESA / SINDICATO	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	100	80	50	90	50
A_2	80	70	60	85	60
A_3	50	50	40	70	40
A_3	0	40	15	10	0
β_j	100	80	60	90	

Se obtiene que: $\alpha = \text{máx}\{ 50, 60, 40, 0 \} = 60$

$\beta = \text{mín}\{ 100, 80, 60, 90 \} = 60.$

Esto indica que el juego tiene un punto de silla. Por lo tanto

$$v = 60.$$

La estrategia maximin del sindicato es A_2. Es decir, se deberá mantener con una posición de tal forma que sus demandas sean exageradas, esto le proporciona una ganancia del 60% sobre el salario actual.

La estrategia minimax de la empresa es B_3. Con ello, estará suponiendo que las demandas del sindicato serán leves, lo cual le permite establecer que el mínimo de los máximos porcentajes a que le conviene acceder es del 60%.

B) CAMPAÑA POLITICA DE DOS CANDIDATOS.

Una semana antes de las elecciones, dos candidatos a la presidencia de una alcaldía municipal, consideran a las mismas tres comunidades como importantes y merecedoras de una serie de visitas. Ya que ninguna visita es útil a menos que se haya realizado suficiente trabajo de avance por parte del grupo del candidato, cada candidato deberá hacer planes antes de saber la elección realizada por su oponente. Los grupos comisionados por ambos lados muestran idénticas proyecciones. La siguiente tabla da la ganancia estimada (en miles de votos) para cada combinación de visitas del candidato I en esta semana.

CANDIDATO II / CANDIDATO I	Comunidad 1 B_1	Comunidad 2 B_2	Comunidad 3 B_3
Comunidad 1 A_1	8	-2	4
Comunidad 2 A_2	-5	6	-6
Comunidad 3 A_3	2	-4	-1

MILES DE VOTOS A FAVOR DEL CANDIDATO I

¿ Qué comunidades deberán visitar ambos candidatos si desean obtener la mejor votación posible en la contienda ?

SOLUCION:

Hay dos jugadores, J_1 y J_2, en el juego el candidato I y el candidato II, respectivamente. El jugador J_1 tiene tres estrategias puras A_1 (visitar la comunidad 1), A_2 (visitar la comunidad 2) y A_3 (visitar la comunidad 3). Las estrategias del jugador J_2 coinciden con las del jugador J_1.

La matriz del juego es conocida y a partir de ésta encontremos el valor inferior y el valor superior del juego.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	8	-2	4	-2
A_2	-5	6	-6	-6
A_3	2	-4	-1	-4
β_j	8	6	4	

De acuerdo a estos cálculos, se tiene que:

$$\alpha = \text{máx} \{ -2, -6, -4 \} = -2$$

$$\beta = \text{mín} \{ 8, 6, 4 \} = 4.$$

Se ha encontrado que $\alpha < \beta$, esto indica que no existe punto silla que, por lo tanto, la solución esta dada en términos de estrategias mixtas. Primeramente, analizemos si es que hay dominancia.

Como los elementos de A_1 son todos mayores que los respectivos elementos de A_3, la estrategia A_1 domina a la estrategia A_3. La matriz del juego reducida es la siguiente.

J_1 \ J_2	B_1	B_2	B_3
A_1	8	-2	4
A_2	-5	6	-6

De aquí, se tiene que los elementos de B_3 son todos menores que los respectivos elementos de B_1, por lo que, la estrategia B_3 domina a la estrategia B_1. La matriz del juego queda.

J_1 \ J_2	B_2	B_3
A_1	-2	4
A_2	6	-6

Esta matriz de juego ya no es posible reducirla, sin embargo podemos aplicar el método algebraico, ya que su dimensión es de 2x2. Se tiene:

$$x_1 = \frac{(-6) - 6}{(-2-6) - (6+4)} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{(-2) - 4}{(-2-6) - (6+4)} = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{(-2)(-6) - (4)(6)}{(-2-6) - (6+4)} = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = \frac{2/3 - 4}{(-2) + (-4)} = \frac{5}{9}$$

$$y_3 = 1 - y_2 = 4/9.$$

Se han obtenido las estrategias mixtas óptimas:

$$J_1^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 5/9 & 4/9 \end{bmatrix}.$$

Se concluye que, el candidato I debe descartar por completo las visitas a la comunidad 3, luego las visitas a la comunidad 1 deben ser considerada, ya que la probabilidad de votos a favor sería de 2/3 en relación a las visitas que también debe realizar a la comunidad 2 en la que, la probabilidad de votos a favor es de 1/3. De aplicar estos resultados en las visitas, el candidato I obtendrá aproximadamente 2/3 ≈ 666 votos de cada mil a favor en promedio, que serán ganados al candidato II.

Por su parte, el candidato II debe desechar sus visitas a la comunidad 1 y dedicarle su tiempo a la comunidad 2 que le garantiza una probabilidad de 5/9 de votantes en relación a su visita a la comunidad 3, cuya probabilidade de votos a favor es de 4/9. De no aplicar estos resultados el candidato II aumentaría en promedio aún más la pérdida de votos que pudiera tener a favor.

c). MISION AEREA DE AEROPLANOS.

El bando A envía dos bombarderos, I y II, a una misión contra su su oponente, el bando B. El bombardero I siempre va a la cabeza y el bombardero II detrás. Uno de los bombarderos (de antemano no se sabe cuál) lleva una bomba y el otro actúa como escolta.

Sobre el territorio de B, los bombarderos son atacados por uno de los aviones de caza de B. Los bombarderos vuelan en tal forma que si el avión de caza ataca al II, sólo quedará bajo el fuego de las armas de II, mientras que si ataca al I, quedará bajo el fuego de las armas de ambos bombarderos. La probabilidad de que el avión de combate sea derribado es 0.3 en el primer caso y 0.7 en el segundo.

Si el avión caza no es derribado, la probabilidad de que derribe al bombardero que ataca es 0.6 (y, de allí, la probabilidad de que no lo derribe es 0.4). La misión de los bombarderos es arrojar la bomba en el objetivo; la del avión de combate es impedirlo, es decir derribar el avión que lleva la bomba.

a) para el bando A_ ¿Cuál bombardero debe llevar la bomba?

b) para el bando B_ ¿A cuál bombardero se debe atacar?.

SOLUCION:

En este juego debemos construir la matriz del juego ya que no esta dada. La ganancia para A consiste en la probabilidad de que el portador de la bomba no sea derribado, por lo que, las estrategias de A son:

A_1: el bombardero I es el portador de la bomba;

A_2: el bombardero II es el portador de la bomba.

Las estrategias del bando B son:

B_1: el bombardero I es atacado;

B_2: el bombardero II es atacado.

Una vez definidas las estrategias lo que sigue es construir la matriz del juego. Es decir, se encontrará la ganancia promedio para cada pareja de estrategias de la siguiente forma.

1. A_1B_1 (I es el portador; I es atacado)

La bomba será lanzada hacia el objetivo si sucede:

i) al atacar a I, el avión de caza es derribado 0.7, o bien

ii) el avión de combate no es derribado (0.3) pero, no logra derribar al bombardero (0.4). Por lo que

$$a_{11} = (0.7)(1) + (0.3)(0.4) = 0.82.$$

2. A_2B_1 (II es el portador; I es atacado)

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 (I es el portador; II es atacado)

$$a_{12} = 1.$$

4. A_2B_2 (II es el portador; II es atacado)

$$a_{22} = (0.3)(1) + (0.7)(0.4) = 0.58.$$

La matriz del juego resultante se muestra a continuación

A \ B	B_1	B_2
A_1	0.82	1
A_2	1	0.58

El valor inferior del juego es α = 0.82; el valor superior es β = 1, ésto indica que no existe punto silla. Por lo tanto, la solución debe ser una pareja de estrategias mixtas. La aplicación del método algebraico proporciona.

$$x_1 = \frac{0.58 - 1}{(0.82 + 0.58)-(1 + 1)} = 0.7$$

$$x_2 = \frac{0.82 - 1}{(0.82 + 0.58)-(1 + 1)} = 0.3$$

$$v = \frac{(0.82)(0.58) - (1)(1)}{(0.82 + 0.58)-(1 + 1)} = 0.874$$

$$y_1 = \frac{0.874 - 1}{0.82 - 1} = 0.7$$

$$y_2 = 1 - 0.7 = 0.3.$$

La estrategia óptima del bando A es:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Esto indica que, el bombardero I debe ser el portador de la bomba con más frecuencia que el bombardero II. Como v = 0.874 ésta resulta ser la probabilidad de que el portador de la bomba no sea derribado y, por lo tanto, pueda arrojar la bomba hacia el objetivo.

La estrategia óptima del bando B es:

$$B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Lo cual indica que el bombardero I debe ser atacado con más frecuencia que el bombardero II.

ANEXO A: ORIGENES DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

RESUMEN HISTORICO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

Los origenes del campo de estudio conocido como Investigacion de Operaciones, a diferencia de otras áreas de la matematica, no son remotos, al contrario son muy recientes, pues su auge se logra a mediados de este siglo. Como cualquier otra disciplina no surgio de la nada, sino por el resultado de varios procesos que se dieron independientemente y que en ella cristalizaron.

Su desarrollo encuentra sus vestigios en la Segunda Guerra Mundial en la cual, la administración militar de Gran Bretaña llamó a un equipo de cientificos para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa aerea y terrestre del país. Su objetivo era determinar la utilización de los recursos militares limitados. Las aplicaciones incluían entre otras, estudios de utilización más efectiva del radar recientemente inventado. El establecimiento de este equipo cientifico marcó la primera actividad normal de Investigación de Operaciones.

El nombre de Investigación de Operaciones fué dado aparentemente porque el equipo estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones (militares). Desde su nacimiento, este nuevo campo de toma de decisiones se ha caracterizado por el uso del conocimiento científico a través del esfuerzo de equipos interdisciplinarios, con el propósito de determinar la mejor utilización de los recursos limitados.

Los resultados alentadores logrados por los equipos de investigación de operaciones británicos, motivaron a la administración militar de los Estados Unidos a comenzar actividades similares. Las aplicaciones éxitosas de los equipos de Estados Unidos incluyeron el estudio de problemas logísticos de distribución de los recursos militares dispersos por todo el mundo, la invención de nuevos modelos de vuelo y la utilización efectiva del equipo electrónico, entre otras.

Después de la guerra, el éxito de los equipos militares atrajo la atención de los administradores industriales, quienes estaban buscando soluciones a sus problemas, los cuales estaban llegando a ser más agudos debido a la introduccion de la especialización funcional en las organizaciones empresariales, esto originó la búsqueda de herramientas efectivas emanadas de la Investigación de Operaciones que resolvieran esos problemas.

Aunque se ha acreditado a Gran Bretaña la iniciación de la Investigación de Operaciones como nueva disciplina, los Estados Unidos tomaron pronto el liderazgo en este campo rápidamente creciente.

Los modelos primitivos de programación matemática utilizados en Investigación de Operaciones se encuentran en los trabajos del economista Quesnay en 1759. Los modelos lineales, tienen como precursores a Jordan en 1873, Minkowsky en 1896 y a Farkas en 1903. Los modelos dinámicos probabilísticos tienen su origen en Markov a finales del siglo pasado. Los modelos de líneas de espera se originan con los estudios de Erlang a principios del siglo XX, mientras que los modelos de inventarios, así como el de tiempos y movimientos, se lleva a cabo en los años veintes de este siglo. El problema de asignación se estudia por los hungaros Konig y Egorvary en la segunda y tercera décadas de este siglo. Von Neumann cimenta la Teoría de Juegos en 1928 y desarrolla más tarde la Teoría de Preferencias en colaboración del economista O. Morgenstern. Los problemas de distribución se estudian por el ruso Kantorovich en 1939. El Matemático norteamericano George B. Dantzig desarrolla el Método Simplex en el verano de 1947, dando origen a la Programación Lineal.

En la década de los cincuenta con el desarrollo de las computadoras y el interés despertado en los administradores industriales la Investigación de Operaciones se extiende y sus principales colaboradores, entre otros son:

Richard Bellman en Programación Dinámica. Kuhn y Tucker en Programación No Lineal. Gomory trabaja en Programación Entera. Ford y Fulkerson se dedican a Redes de Optimización. Markowitz realiza estudios en Simulación. Arrow, Karlin, Scarf y Whitin en Inventarios Raiffa participa en Análisis de Decisiones y Howar prosigue estudios de los Procesos Markovianos de Decisión.

La generalización de la Investigación de Operaciones han tratado de darla Churchman, Ackoff y Arnoff a quienes se debe la siguiente definición:

"La Investigación de Operaciones es la aplicación por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombres-máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización".

Cabe aclarar, que la mayoría de quienes práctican los diferentes campos de la ciencia, algunas veces ni siquiera los han definido aceptablemente. Sin embargo, la anterior definición sienta una base útil para adquirir un conocimiento inicial de la naturaleza de la Investigación de Operaciones, especialmente cuando se le relaciona con los antecedentes históricos que se acaban de describir.

ESTADO ACTUAL Y ENSEÑANZA.

Actualmente la Investigacion de Operaciones se aplica en el sector privado y público de paises desarrollados como en vias de desarrollo, en áreas como la industria, el sector salud, comunicaciones y transportes, así como en el sistema educativo entre otras.

Por su parte, la Programación Lineal, ha sido utilizada en problemas de combinación de materiales, transportación, asignación de personal y en problemas alimenticios. La teoría de líneas de espera ha tenido su aplicación en problemas referentes a la congestión del tránsito aéreo y telefónico, al igual que en el mantenimiento de máquinas sujetas a descomposturas. Las redes de optimización han desempeñado un papel importante cuando se trata de resolver problemas de construcción de oleoductos, cableado eléctrico, flujo de productos y reducción de costos, entre otros. Las demás ramas de la Investigación de Operaciones también han tenido éxito cuando se les ha aplicado a diversos contextos.

Más precisamente con el fin de conocer los avances logrados en esta disciplina, en 1972, [1]E. Turban presentó un informe acerca de una encuesta relativa a actividades de Investigación de Operaciones que proporcionó una instantánea de las actividades en 1969. Se enviaron cuestionarios por correo a los directores de Investigación de Operaciones/Ciencia de la Administración (como también se le conoce) de 475 compañías. Estas compañías fueron seleccionadas de una lista de la revista Fortune sobre las 500 más importantes, usando las 300 corporaciones industriales más grandes, 50 corporaciones industriales extraídas de las colocadas entre el lugar 300 y 500, y las 25 compañías más grandes en cada una de las categorías de servicio, bancos, empresas de servicio público, comercio, seguros y transporte.

[1]vid. pp. 5,6. (12).

Fueron regresados 107 cuestionarios; de éstos, 47 (o casi la mitad) mencionaban que tenían un departamento especial en su administración que se encargaba principalmente de actividades de Investigación de Operaciones. Además, 13 compañías indicaban que pretendían establecer un departamento de este tipo en un futuro cercano. Además, las tasas de crecimiento causan la impresión de que el 4% de estas compañías tenían establecidos los departamentos antes de 1950, el 15% entre 1951 y 1959, el 50% entre 1960 y 1965 y el 30% después de 1965. Otro hallazgo un tanto interesante es que casi todos los departamentos informaban directamente al presidente, al vicepresidente o al contralor de la compañía. La investigación también indicó con qué amplitud se habían aplicado las técnicas de Investigación de Operaciones a los proyectos comunes; los resultados se muestran en la siguiente tabla.

TECNICAS	No.DE PROYECTOS	FRECUENCIA DE USO (%)
ANALISIS ESTADISTICO	63	29
SIMULACION	54	25
PROGRAMACION LINEAL	41	19
INVENTARIOS	13	6
PERT CPM	13	6
PROGRAMACION DINAMICA	9	6
PROGRAMACION NO LINEAL	7	4
COLAS	2	1
PROGRAMACION HEURISTICA	2	1
DIVERSOS	13	6

Resulta evidente que, en general, las técnicas usadas con mayor amplitud fueron el análisis estadístico, simulación y programación lineal. Además, la encuesta reveló que en la mayoría de los proyectos reportados se usó la computadora.

Un estudio similar es llevado a cabo años más tarde por W. N. Ledbetter y J.F.Cox, cuando en 1977, informaron acerca de una encuesta también realizada con información de la revista Fortune.

Se consideraron 500 empresas (lista de 1975) referente a la utilización de las técnicas de Investigación de Operaciones en ellas. Se obtuvieron 176 respuestas. De ellas se concluyó que el análisis de regresión, programación lineal y simulación eran las más populares, reforzando en consecuencia el estudio de Turban. Ledbeter y Cox preguntaron acerca del uso comparativo de siete técnicas de Investigación de Operaciones y se les pidió a las compañías que indicaran la frecuencia de uso en una escala de cinco puntos. La tabla siguiente muestra estos resultados.

TECNICA	No. DE RESP.	GRADO DE USO (%)* 1 (NUNCA)	2	3	4	5 (MUY FREC.)	MEDIA
ANALISIS DE REGRESION	74	9.5	2.7	17.6	21.6	48.6	3.97
PROGRAMACION LINEAL	78	15.4	14.1	21.8	16.7	32.0	3.36
SIMULACION (EN PRODUCCION)	70	11.4	15.7	25.7	24.3	22.9	3.31
MODELOS DE REDES	69	39.1	29.0	15.9	10.1	5.8	2.14
TEORIA DE COLAS	71	36.6	39.4	16.9	5.6	1.4	1.96
PROGRAMACION DINAMICA	69	53.6	36.2	7.2	0.0	2.9	1.62
TEORIA DE JUEGOS	67	59.7	25.4	8.9	6.0	0.0	1.61

* Los porcentajes que se muestran estan basados en el numero de respuestas para cada tecnica.

En México, la Investigación de Operaciones se utiliza dentro del sector de servicios públicos, entre otros en la Compañía Nacional de Subsistencias Populares, Secretaría de Obras y Servicios Públicos, Secretaría de Comunicaciones y Transportes, Secretaría de Recursos Hidráulicos, Comisión Federal de Electricidad, Instituto Mexicano del Seguro Social, Departamento del Distrito Federal, Petróleos Mexicanos, la Secretaría de la Presidencia, el Banco de México y la Secretaría de Educación Pública.

Se han fundado en todo el mundo sociedades profesionales dedicadas a este campo y a actividades relacionadas. En los Estados Unidos, la Operations Research Society of America, ORSA,(Sociedad de Investigación de Operaciones de América), establecida en 1952, y The Institute of Management Science,TIMS, (Instituto de Ciencias de la Administración), fundado en 1953. Además existen asociaciones Canadienses, Europeas, Asiáticas y Latinoamericanas.

La mayoría de estas organizaciones se encuentran afiliadas a la International Federation of Operational Research Societies, IFORS, (Federación Internacional de Sociedades de Investigación de Operaciones). Se editan periódicamente en los diversos organismos publicaciones que informan sobre nuevas investigaciones y aplicaciones en este campo.

En México existe el Instituto Mexicano de Sistemas e Investigación de Operaciones, A.C., IMSIO, fundado en 1981. El cual tiene entre otras funciones, organizar sesiones de trabajo, conferencias, seminarios, así como la publicación de material de investigación y divulgación.

En la mayor parte de los países que practican la Investigación de Operaciones se han implantado programas profesionales y de posgrado (maestrías y doctorados) en esta especialidad. En el caso de México, la Universidad Nacional ofrece esta opción a través de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería y del Instituto de Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Mientras que en el Instituto Politécnico Nacional en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas.

En el nivel de Licenciatura existen una gran diversidad de carreras en donde se abordan en sus respectivos planes de estudio temas sobre Investigación de Operaciones. Algunas de ellas son; Actuaría, Matemáticas, Contaduría, Ingeniería, Administración de empresas y Economía, entre otras.

En el Nivel Medio Superior se encuentra información sobre problemas de programación lineal en los libros de apoyo para los estudiantes de Preparatoria del Sistema Nacional de Educación para Adultos, así como en los programas de la Escuela Nacional Preparatoria. Con lo que respecta a las demás instituciones educativas consideradas en este estudio no se encuentran indicios sobre la enseñanza de estos tópicos, siendo en este sentido, como se pretende contribuir con la realización del presente trabajo.

ANEXO B: INSTITUCIONES EDUCATIVAS CONSIDERADAS

Existen en nuestro medio educativo una gran diversidad de centros docentes públicos y privados que ofrecen los estudios correspondientes al Nivel Medio Superior (bachillerato), cada uno con esquemas propios en el contenido de los planes de estudio. Muchos de ellos dependen directamente de la Secretaría de Educación Pública, mientras que otros de Universidades o Centros de Estudios similares.

De esta forma en la Universidad Nacional Autónoma de México se encuentra la Escuela Nacional Preparatoria (E.N.P.) y el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H.). En el Instituto Politécnico Nacional se cuenta con los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (C.E.C. y T.), y como Organismo Descontralizado del Estado se tiene al Colegio de Bachilleres (C.B.).

Se han tomado como base a las instituciones antes mencionadas del Nivel Medio Superior para la realización de la propuesta de temas. Considerando que no se pretende que sean estrictamente representativas de todos los organismos de este nivel, sin embargo, si resultan una buena muestra de lo acontecido en el Distrito Federal. Con ello hay que destacar que muchos de los centros docentes públicos y privados de las entidades federativas, por diversas razones, han ajustado sus programas y planes de estudio a los de estas instituciones educativas.

En lo que sigue se hace una breve descripción de las cuatro instituciones; se hace notar el año de su fundación, algunos de los factores que intervinieron en su creación, así como algunos de sus fines y principios que rigen su marcha. Al final se anexa el cuadro que contiene los contenidos de la materia de matemáticas, dicha información servirá para desarrollar el análisis sobre los mismos en el capítulo 1.

A) ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA (U.N.A.M.).

La fundación de la Escuela Nacional Preparatoria fue ordenada por la ley de 2 de diciembre de 1867; esta ley y el reglamento de 24 de enero de 1868 establecieron el plan de estudios bajo el cual iba a funcionar el nuevo establecimiento. Fue patente que la inauguración de la Escuela tuvo lugar el 18 de enero de 1868; en la inteligencia que se estima que el principio de los cursos se fijó para el 1o. de febrero de ese año. Claro es que la organización de la enseñanza para el Distrito Federal y el establecimiento de la Escuela Nacional Preparatoria constituían una novedad agresiva y una reforma a fondo. Pronto los ataques y las maniobras emprendidas en su contra también iban a manifestarse. En verdad la existencia de la preparatoria y la acción emprendida para atacarla iban a constituir un capítulo más de la lucha entre el Nuevo Régimen y el antiguo Régimen, pues el plantel era un cambio en orden a la preocupación educativa, al que tenían que oponerse los intereses conservadores.

El fundador de la Escuela Nacional Preparatoria fue don Gabino Barreda, abogado y médico, alumno de Augusto Comte, el filósofo y sociólogo francés, a quien se tiene como el padre del positivismo. Esta doctrina sirvió de base ideológica a Barreda con objeto de organizar los estudios de la nueva escuela.

No puede perderse de vista que la encomienda que le dió el presidente Juárez fue en los momentos inmediatos a la restauración de la República. Eran los tiempos en los que había que consolidar los cambios económicos, políticos y sociales de México. De otro modo los riesgos y los sacrificios por los que acababa de pasar la nación quedarían en cosas vanas y con resultados estériles. La primera modificación hecha al lema de Comte: "Amor, Orden y Progreso", fue la de "Libertad, Orden y Progreso", con la cual Barreda ponía de manifiesto el conocimiento que tenía de la realidad mexicana.

El contenido educativo en las Ciencias se acogió en los estudios preparatorianos, especialmente el de las matemáticas. En el nuevo plantel los métodos de comprobación sustituían al principio de autoridad y a la educación verbalista propios del Antiguo Régimen. Además los diferentes grados en la enseñanza de las matemáticas darían capacidad al alumno de razonar sin los malabarismos de la escolástica, antes bien con la lúcida manera de las verdades que admiten demostración. Las matemáticas servían de base al aprendizaje del razonamiento lógico y por esto fue el propósito de colocar a la Lógica en los años superiores de la Preparatoria, una vez que el educando había estudiado aritmética, álgebra, trigonometría analítica y las nociones fundamentales del cálculo infinitesimal.

Los conocimientos de los fenómenos naturales, del mundo físico que rodea al hombre, de los antecedentes históricos racionales y universales, y el acercamiento a las lenguas clásicas y vivas, esto último para complementar el estudio del castellano, si bien daba la impresión de constituir una enseñanza enciclopédica, el propósito estaba en apartarse de lo superficial de la enseñanza, con objeto de imprimir profundidad a los conocimientos. Así lo aconsejaba la propedéutica, con miras a la educación superior. Si a la Preparatoria se le tomaba como el puente entre el plantel elemental y la escuela profesional, entonces se buscaba que el profesionista adquiriese conocimientos que lo llevaran a servir mejor a la sociedad.

A la formación del plan de estudios siguió la designación de la planta de profesores. Se acogió a maestros con el mayor prestigio intelectual de la época. Fue de rigor que ese prestigio estuviera fincado en el campo de las nuevas tendencias educativas, o bien dispuesto a servir a los propósitos del flamante establecimiento. Liberales como Ignacio Ramírez e Ignacio Manuel Altamirano quedaron vinculados a la enseñanza preparatoria; naturalistas como Alfonso Herrera y Leopoldo Río de la Loza, románticos a la manera de Manuel M. Flores.

Aún en los aspectos políticos se fueron aceptando personas vinculadas con el partido conservador o que habían servido al imperio de Maximiliano. Lo importante era que fuesen personas calificadas en sus especialidades y que tuvieran la calidad moral para preparar a las nuevas generaciones.

Es obvio que las incidencias del medio político tuvieron que repercutir en la conducta de los hombres en el poder, así como en el Colegio de San Ildefonso. Si dentro del régimen habíanse operado cambios ideológicos y de concepción para los asuntos del gobierno, de la Preparatoria habían egresado dos o más generaciones, cuyos puntos de vista, ante los problemas nacionales discrepaban, según quedó comprobado en la actuación de ellas. Cabe señalar que esta renovación en las generaciones ha sido fundamental para la vida de la Preparatoria la que, hay que repetirlo, se fundó con sentido nacional y para servicio de la Nación se ha conservado como plantel educativo.

Justo Sierra, discípulo de Gabino Barreda, estuvo en posibilidad de completar y dar cima en el campo de la enseñanza a la educación nacional. Al sostener que la enseñanza en el segundo grado debía ser eminentemente positiva, sin negar la importancia a la Metafísica, antes bien reconociendo que es la filosofía de una religión o de una irreligión; y que , como decía Paul Janet, la Metafísica brota de la Teología y hay un parentesco y una afinidad estrechísima entre sus doctrinas.

Sierra explicó que, si se enseñara la Metafísica era, preciso dar la palabra a la voz al espiritualismo, al materialismo, al panteismo, al pesimismo, al agnosticismo. E interrogaba: ¿Y cómo excluir alguno de ellos sin atribuir al Estado el papel de definidor de un dogma filosófico, sin resucitar el concepto bizantino de la omnisciencia y de la omnipotencia gubernamental? ¿Y cómo dar la palabra a todos sin hacer terminar el ciclo de estudios preparatorios en el caos y la noche intelectual?.

No era que se negara el trascendental interés de esos problemas, sino que debía evitarse crear "la más desastrosa anarquía intelectual que produce en los cerebros jóvenes el semiconocimiento de sistemas de lucha, cuando aún no tienen elementos de juicio suficiente para abstraer una verdad total y asimilársela".

En orden a la organización de la enseñanza, bajo la inspiración de Justo Sierra, la rama de Humanidades tomó la categoría que ameritaba, equiparándola en importancia a la rama de Ciencias. Desde entonces, hasta nuestros días, las Ciencias y las Humanidades constituyen las enseñanzas paralelas en la Escuela Nacional Preparatoria.

De la vida activa que siempre se ha llevado en la Escuela Nacional Preparatoria es razón cierta y encomiable el paso de las diferentes generaciones de alumnos y profesores. Por sus frutos son conocidos. Ante la imposibilidad de ampliar el registro de nombres, se enuncian algunos. El "Ateneo de la Juventud" cuyos principales exponentes fueron Antonio Caso y José Vasconcelos; la generación de 1915, después conocida como la de los "Siete Sabios", en donde brillaron alumnos como Manuel Gómez Morín y Vicente Lombardo Toledano; la generación de 1929 que obtuvo la autonomía universitaria y luchó por la libertad de cátedra, contó entre sus principales componentes a Alejandro Gómez Arias y a Salvador Azuela, a los que hay que agregar a Raúl Noriga y José Muñoz Cota; el grupo de los "barandales", coetáneo a los alumnos que fueron Octavio Paz, Manuel Moreno Sánchez, Roberto Guzmán Araujo y José Manuel Terán Mata: Todos ellos son muestras eminentes de lo que el plantel de San Ildefonso ha rendido en su misión de preparar a las nuevas generaciones.

La enseñanza de las Humanidades implantada por Justo Sierra trajo consigo la pléyade de humanistas laicos, maestros, Francisco Canale, Jesús Díaz de León y Francisco Rivas.

Los poetas modernistas asimismo encontraron en la Preparatoria una tribuna de sus enseñanzas de literatura y por eso en los cursos o en conferencias los nombres de Enrique González Martínez, Luis G. Urbina y Amado Nervo, prestigiaron a la enseñanza. Con el paso de los años siguió la costumbre y así, Ramón López Velarde, Jaime Torres Bodet y después literatos como Agustín Yáñez engalanaron el cuerpo docente del plantel. Del grupo de historiadores la remembranza se fija en Fernando Iglesias Calderón, historiador liberal; en Eulalia Guzmán que durante el curso de su vida ha velado con gran dignidad intelectual por los fueros del indigenismo mexicano.

No está fuera de propósito recordar que en las paredes de la Preparatoria renació el muralismo mexicano, y que en el Anfiteatro, así como en los corredores, los tres grandes muralistas: José Clemente Orozco, Diego Rivera y David Alfaro Siqueiros, tanto como sus respectivos alumnos, unieron sus esfuerzos para adornar los patios de la escuela.

Por cierto, al mismo tiempo en que se presenciaba el renacimiento del muralismo mexicano, la generación de 29 cursaba sus años preparatorios y entre el número de las alumnas se contaban Frida Kahlo y Helia Bravo; la primera que fue insigne pintora, y Helia que dedicó una benemérita labor a estudiar y clasificar científicamente a las miles de plantas que constituyen por excelencia la flora mexicana, como son las cactáceas.

De entre los filósofos destacó el maestro Miguel Angel Ceballos para quien la Lógica es reflexión sobre la ciencia y por ende es una teoría de la ciencia. Pues dice que la lógica se mueve en el trabajo de enseñar a conocer, dentro de los resultados de las ciencias particulares; en ellas descubre la esencia del método, definición, hipótesis, principio, ley y prueba.

Por lo que se refiere a los maestros de ciencias la nómina es abundante pero a grandes trazos deben registrarse los nombres de los Díaz Covarrubias; años más adelante, Nápoles Gándara, Arturo Lamadrid, Manuel López Aguado y Sotero Prieto; a Isaac Ochoterena el ilustre naturalista; y como se sucedieron los años, Nabor Carrillo Flores, Marcelino García Junco, Carlos Graef Fernández y Héctor Murillo han dictado las clases de Matemáticas, Física o Química.

El acierto de las designaciones se ha hecho más riguroso para los casos de los directores de la Preparatoria. Y de nueva cuenta el registro de los nombres debe ceñirse al mínimo por exigencias de la brevedad: A hombres tan ilustres como los primeros positivistas Gabino Barreda, Porfirio Parra, Manuel Flores han sucedido en la dirección del plantel Miguel Schultz y Antonio Caso. Ezequiel Chávez que del positivismo advino a un catolicismo laico. Moisés Sáenz. Vicente Lombardo Toledano que del catolicismo fue rehaciendo su cultura hasta llegar al marxismo. Pedro de Alba, el insigne humanista; Raúl Pous; Vicente Méndez Rostro, ilustre maestro de literatura.

Algunos de los egresados de la Preparatoria, con el tiempo llegaron a dirigir a la Universidad de México. entre algunos de ellos podemnos citar a los rectores: Antonio Caso, José Vasconcelos, Manuel Gómez Morín, Alfonso Caso, Genaro Fernández Mc. Gregor, Nabor Carrillo y Javier Barros Sierra.[1]

Los planes de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria suman un total de catorce que van desde el primero puesto en funciones en 1868 hasta el más actual aprobado en 1964, que como ya se mencionó, es el que aún está vigente aunque con diversas modificaciones.

[1] Prol. (10).

Una vez hecha esta remembranza histórica de la Escuela Nacional Preparatoria, retomamos el caso particular de la materia de matemáticas. Para ello, lo que resta por mostrar es el siguiente cuadro en donde aparecen los contenidos de la materia que son enseñados durante los tres años. Esta información corresponde a los programas vigentes a partir del año de 1974.[1]

[1] cfr. [28].

CONTENIDO DE LOS TEMARIOS: "ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA-UNAM"

PRIMER AÑO	SEGUNDO AÑO	TERCER AÑO
...dades de las numeros reales ...n numeros reales ...n de un numero		1. Diferentes sistemas de numeracion 2. El sistema decimal 3. Expresion de un numero decimal en otro sistema y reciprocamente 4. Numeros complejos 4.1. Operaciones 4.2. Representacion Grafica 4.3. Suma y resta graficamente 4.4. Forma trigonometrica 4.5. Potencias 4.6. Formula de De Moivre 4.7. Raices
		1. Definicion de conjunto 2. Correspondencia biunivoca 3. Subconjuntos 4. Conjunto universal 5. Conjunto vacio 6. Conjuntos incomunes 7. Operaciones con conjuntos 7.1. Complemento 7.2. Union 7.3. Interseccion 7.4. Diferencia
... lineales ...nita ...primer grado ...nita ...movimiento uniforme ...mezclas ...e ...neales con 2 incognitas ... lineales 10. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incognitas 11. Problemas de primer grado con dos incognitas 12. Desigualdades que resuelven un problema de programacion lineal 13. Ecuacion de segundo grado con una incognita 14. Factorizacion 15. Desigualdades de segundo grado con una incognita	1. Algebra de potencias 2. Logaritmos 3. Logaritmos en distintas bases 4. Leyes de los logaritmos 6. Existencia del numero e	1. Formas indeterminadas 2. Teoria de ecuaciones 2.1. Division sintetica 2.2. Polinomio entero y racional 2.3. Teorema del residuo 2.4. Teorema del factor 2.5. Teorema fundamental 2.6. Ecuaciones de grado superior 3. Desigualdades 4. Analisis combinatorio 5. Binomio de Newton 6. Triangulo de Pascal 7. Progresiones 7.1. Aritmetica 7.2. Geometrica 7.3. Geometrica decreciente 8. Matrices 9. Definicion de grupo 10. Subgrupos 11. Grupos ciclicos 12. Homomorfismos e isomorfismos 13. El grupo del tetraedro
	1. Solucion de problemas de angulos 2. Identidades trigonometricas	* Correspondiente al area I y II, incluye Temas selectos de matematicas
	1. Funcion real de una variable real 2. Relaciones entre dos conjuntos 3. Dominio y contradominio de una funcion 4. Funcion identica y constante 5. Tablas de valores del dominio y contradominio 6. Grafica de funciones 7. Funciones racionales 8. Funciones trigonometricas 9. Periodicidad de funciones 10. Funciones inversas de las funciones trigonometricas 11. Grafica de funciones inversas 12. Funcion exponencial 13. Funcion logaritmica 14. Aplicaciones de las funciones logaritmica y exponencial	1. Relaciones 2. Funciones algebraicas, trascendentes, implicitas, explicitas, racionales, irracionales, enteras, fraccionarias, uniformes, multiformes 3. Funciones continuas y discontinuas 4. Funciones crecientes y decrecientes
...e primer grado ...e ...una recta ...rigen de una recta ...iferentes casos de ... la recta ... de dos rectas ...n grafica de ... una desigualdad lineal con dos variables 7. Representacion grafica de parejas de ecuaciones lineales con dos incognitas 8. Conjunto solucion de un sistema de desigualdades que resuelven un problema de programacion lineal 9. Calculo de valores maximos o minimos en punto vertices de un problema de programacion lineal 10. Solucion geometrica de las ecuaciones de segundo grado	1. Ecuaciones correspondientes a lugares geometricos 2. Ecuaciones de funciones polinomiales, rectas y conicas 3. Interseccion de curvas 4. Simetrias de una curva 5. Asintotas de curvas 6. Ecuacion de la hiperbola 7. Tangentes	
		1. Limite de una funcion 2. Limites de funciones algebraicas y trigonometricas 3. Continuidad de una funcion 4. Derivada de una funcion 5. Derivada de funciones algebraicas y exponenciales 6. Derivadas sucesivas 7. Tangente y normal a una curva 8. Maximos y minimos de una funcion 9. Puntos de inflexion 10. Concavidad de una curva 11. Aplicaciones de maximos y minimos 12. Integral indefinida 13. Metodos de integracion 14. Integracion de funciones trigonometricas 15. Integracion de fracciones racionales 16. Integral definida 17. Teorema fundamental del calculo 18. Calculo de area y volumenes
		1. Sucesos diversos 2. Probabilidad simple 3. Probabilidad compuesta 4. Distribucion de frecuencias 5. Promedios 6. Media 7. Mediana 8. Modo 9. Valor probable y esperanza 10. Probabilidad teorica y real

B) COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES (U.N.A.M.).

El 26 de enero de 1971, el Consejo Universitario, ante la necesidad de la Universidad de formar nuevos tipos de profesionistas y especialistas que la realidad nacional requiere, y para eliminar (al máximo posible) las fronteras artificiales entre los distintos campos del saber humano, aprobó la creación de un nuevo organismo: el Colegio de Ciencias y Humanidades.

Los objetivos generales del C.C.H., para todos sus niveles de enseñanza, son:

1. Establecer el mecanismo permanente de innovación de la Universidad, capaz de realizar funciones distintas sin tener que cambiar toda su estructura universitaria, adaptando el sistema a los cambios y necesidades de la propia Universidad y del país.

2. Preparar estudiantes para cursar estudios que vinculen las humanidades, las ciencias, las técnicas, a nivel de bachillerato, de licenciatura, de maestría y de doctorado.

3. Proporcionar nuevas oportunidades de estudio acordes con el desarrollo de las ciencias y las humanidades en el siglo XX y hacer flexibles los sistemas de enseñanza para formar especialistas y profesionistas que puedan adaptarse a un mundo cambiante en el terreno de la ciencia, la técnica y la estructura social y cultural.

4. Intensificar la interdisciplina entre especialistas, escuelas, facultades, centros e instituciones de investigación de la Universidad.

5. Promover el mejor aprovechamiento de los recursos humanos y técnicos de la Universidad.

OBJETIVOS DEL BACHILLERATO.

Los objetivos generales del ciclo de bachillerato del C.C.H., son:

1. El desarrollo integral de la personalidad del educando, su realización plena en el campo individual y su cunplimiento satisfactorio como miembro de la sociedad.

2. Proporcionar la educación a nivel medio superior indispensable para aprovechar las alternativas profesionales o académicas tradicionales y modernas, por medio del dominio de los métodos fundamentales del conocimiento (los métodos experimental e histórico social) y de los lenguajes (español y matemáticas).

3. Constituir un ciclo de aprendizaje en que se combinen el estudio en las aulas, en el laboratorio y en la comunidad.

4. Capacitar a los estudiantes para desempeñar trabajos y puestos en la producción y los servicios, por su capacidad de decisión y de innovación, sus conocimientos y por la formación de su personalidad que implica el plan académico.

PLAN DE ESTUDIOS.

El bachillerato del CCH aparece socialmente comprometido con el cambio; académicamente, con la ciencia, y pedagógicamente, con la participación de los educandos.

Una concepción simplificada de la ciencia, como un proceso siempre repetible de observación, racionalización y aplicación o comprobación, permite comprender, con claridad el sentido de las asignaturas que constituyen el plan de estudios del bachillerato del C.C.H, la estructura de cada uno de sus programas, y la selección de experiencias de aprendizaje propias del sistema de enseñanza del mismo.

Si entendemos a la ciencia como un proceso social e histórico de sistematización del conocimiento comprobable y transferible, será fácil reconocer en ese proceso tres fases principales que se necesitan y se repiten dialécticamente. Quienes pretenden hacer ciencia observan, primero, los diversos fenómenos o cambios que la realidad les presenta; en segundo lugar, formulan hipótesis racionales que permiten establecer relaciones causales de carácter general (leyes) y en un tercer paso, ratifican estas hipótesis mediante la comprobación o aplicación.

El plan de estudios del bachillerato del C.C.H., y todas las actividades que rige, están orientadas a facilitar que los educandos puedan aprender cómo es que se aprende. Por esta razón, es indispensable recordar siempre que lo que se persigue fundamentalmente es que los alumnos cobren conciencia del método con el que están logrando los conocimientos, asimilándolos, interpretándolos, sistematizándolos, aplicándolos. Lo promordial es facilitar a los estudiantes la posibilidad de repetir y recuperar la experiencia de hacer ciencia.

Toda esperiencia de aprendizaje, toda sesión de trabajo, toda unidad temática, todo programa de asignatura y el mismo plan general, tienen como primordial preocupación facilitar a los alumnos la toma de conciencia sobre las condiciones y los mecanismos por los que se adquiere un conocimiento sistematizado.

La experiencia de aprendizaje más típica será la solución de problemas. La sesión de trabajo fomentará la reflexión en común y buscará la síntesis colectiva o individual.

La unidad temática, estará dada por la unidad de objetivos de aprendizaje dentro de programas de asignatura que siempre harán explícito el método por el que el conocimiento se adquiere.

El plan mismo está diseñado de manera que los tres primeros semestres hacen particular énfasis en la forma de conocer la naturaleza (área del método experimental) y la sociedad (área de análisis histórico-social), así como las formalizaciones del lenguaje español y las matemáticas. El cuarto semestre, en cada una de las áreas, insistirá en la síntesis racional: teorías matemáticas y síntesis de geometría y álgebra, método experimental, teoría de la historia, ensayos de investigación y análisis de la expresión escrita. Los semestres quinto y sexto, formados por asignaturas optativas, insistirán en la comprobación del dominio de los métodos de conocimiento y su aplicación a campos específicos de la ciencia buscando, por una parte, la formación universal de los alumnos y, por otra, la orientación profesional y la capacitación propedéutica al nivel de licenciatura.

Hay que hacer hincapié en que cada curso dará una visión introductoria y general de la asignatura, y, de ninguna manera, una especialización en la misma.

El bachillerato del C.C.H., pretenderá posibilitar, en sus egresados, primero, una actitud ante la realidad y el conocimiento científico de la misma; segundo, la aptitud de reflexión metódica, sistemática y rigurosa así como las que se requieren para inquirir, adquirir, ordenar y calificar información. Por último, en el curso de las asignaturas que componen el plan de estudios, los alumnos deberán obtener la información o los conocimientos básicos que los capaciten para estudios superiores. Es obvio, sin embargo, por la sola extensión del universo de información, que ningún fruto durable podrá obtenerse si no se logra la capacitación actitudinal y metodológica propugnada.

En resumen: para entender y valorar la significación de cada una de las asignaturas concretas que integran el Plan, será indispensable ubicarlas siempre en el área y semestre a que corresponden.[1]

[1] cfr. (24).

Reglas y criterios de aplicación del plan de estudios.

1o. El estudiante que haya cubierto todos sus créditos del presente plan podrá seguir cualquier carrera de la Universidad o cualquiera de las combinaciones de carreras interdisciplinarias que establezca el Colegio de Ciencias y Humanidades al nivel licenciatura.

Su dominio básico de las matemáticas, del método experimental, del análisis histórico-social, su capacidad y hábito de lectura de libros clásicos y modernos, su conocimiento del lenguaje para la redacción de escritos y ensayos, su capacidad de informarse y documentarse para la elaboración de trabajos y de organizar el material en ficheros, notas, cuadros, así como su posibilidad de leer y traducir un idioma extranjero, en particular el inglés o el francés, le permitirán, con probabilidades de éxito, seguir las carreras existentes o las interdisciplinarias que se creeen pues se buscará que al final de su formación sepa aprender, sepa informarse y estudiar sobre materias que aún ignora, recurriendo para ello a los libros, enciclopedias, periódicos, revistas, cursos extraordinarios que siga fuera de programa, sin pretender que en la Unidad se de una cultura enciclopédica, sino los métodos y técnicas necesarios y el hábito de aplicarlos a problemas concretos y de adquirir nuevos conocimientos.

Se extenderá diploma de bachiller a los alumnos que hayan cubierto todos los créditos.

El estudiante estará capacitado igualmente para desempeñar trabajos y puestos en la producción y los servicios por su capacidad de decisión, innovación, estudio y por la formación de la personalidad que implica el plan académico, pudiendo complementar su cultura con otra técnica y aplicada, ya sea mientras sigue los cursos académicos del plan, ya sea una vez terminado el mismo.

2. Unidades Técnicas y de Artes Aplicadas. La Unidad Académica elaborará próximamente planes de estudio para el adiestramiento de los alumnos en técnicas, artes aplicadas y oficios que se impartirán a los alumnos: a) en las propias escuelas de la Universidad que ya participan en este tipo de enseñanza, como la Escuela Nacional de Artes Plásticas, en la Escuela Nacional de Música, los centros de extensión universitaria; b) en las unidades que se funden en lo sucesivo; c) en los centros de producción de servicios que establezcan planes de cooperación para la formación de personal técnico. Estos estudios tendrán carácter optativo. Se extenderá diploma de técnico, nivel de bachillerato a los estudiantes que cumplan con los planes respectivos y podrán extenderse antes de que el estudiante termine el plan académico del bachillerato.

3. Permanentemente el Colegio revisará y en su caso, actualizará el plan de estudios. Los programas deberán ser publicados anualmente.

4. Cada plantel de la Unidad Académica organizará conferencias destinadas a explicar el presente plan de estudios y sus reglas de aplicación. Organizará conferencias y mesas redondas explicando el significado de las materias útiles para los distintos tipos de trabajo interdisciplinario, etc. Las conferencias de orientación deberán versar también sobre técnicas, oficios y artes aplicadas. Se publicarán cuadernos de orientación profesional sobre las distintas materias y su relación con la formación humanista científica, tecnológica y artística, etc.

5. Los alumnos podrán, sin asistir a clases, acreditar los cursos de lenguas extranjeras mediante un examen que demuestre su capacidad de traducción y comprensión del inglés o francés.

6. La metodología de la enseñanza hará énfasis en el ejercicio y la práctica de los conocimientos teóricos impartidos.

En los talleres de redacción se harán ejercicios de composición, resúmenes, cuadros clasificadores, notas, ensayos o artículos.

Por último, es necesario hacer notar que los egresados de las nuevas unidades académicas podrían seguir cualquiera de las carreras profesionales que ofrece actualmente la Universidad, o las que en el futuro pudieran ofrecerse, con la particularidad de que el bachiller egresado de estas unidades, según se dijo antes, contaría no solo con la formación teórica fundamental correspondiente a este ciclo de estudios, sino como es deseable con un adiestramiento práctico y técnico que lo capacitaría para incorporarse productivamente al trabajo.[1]

A continuación se muestra el cuadro de los contenidos de la materia de matemáticas que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades, éstos corresponden a los publicados en 1979.[2]

[1] vid. pp. 101,102. (17).

[2] cfr. (24).

CONTENIDOS DE LAS TEMATICAS "COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES - U.N.A.M."

	SEGUNDO SEMESTRE	TERCER SEMESTRE	CUARTO SEMESTRE	QUINTO SEMESTRE	SEXTO SEMESTRE
[illegible]				1. Enunciados compuestos 1.1. Negación 1.2. Conjunción 1.3. Disyunción 1.4. Condicional 1.5. Bicondicional 1.6. Simbolización 2. Árboles de [illegible] 2.1. Tablas de verdad 2.2. Formas normales 3. Tautologías 4. Contradicciones 5. Equivalencias 6. Inferencia 7. Lógica [illegible] 8. Circuitos lógicos y aplicaciones	[illegible]
	1. Lenguaje Algebraico 2. Traducción del Lenguaje común al lenguaje algebraico 3. [illegible] 3.1. Enteros 3.2. Racionales 4. Radicales 5. Polinomios 6. Factorización 7. Ecs. de 1er. Grado 8. Ecs. de 2do. Grado 9. Sist. de Ecs. lineales 9.1. Representación Gráfica 9.2. Consistencia y unicidad de soluciones				
		1. Historia de la Geometría 2. Axiomatización de la Geom. 3. Segmento 4. Ángulo 5. Rectas Perpend. y Paralelas 6. Triángulos 6.1. Clasificación 6.2 Rectas y Ptos. notables 7. Simetría 8. Polígonos 8.1 Área 9. Congruencia de triángulos 10 Semejanza de triángulos 11 Teorema de Pitágoras 12 Resolución de triángulos 12.1. Ley de los Senos y Cosenos 13 El Círculo y Rectas notables 14 Otras Geometrías 15. Teoría de gráficas			
	1. Concepto de Función 2. Valuación de Funciones 2.1. Lineales 2.2. Cuadráticas 3. Gráficas de una función	1. Funciones Trigonométricas 1.1. Gráficas 1.2. Periodicidad 2. Medida de ángulos 3. Identidades Trigonométricas		1. Variables y Constantes 2. Elementos de una Función 3. Gráficas de Funciones 4. Funciones algebraicas y no algebraicas 5. Funciones Continuas y no Continuas 6. Funciones Crecientes y Decrecientes 7. Álgebra de Funciones 8. Función de Función	
			1. El plano cartesiano 2. Distancia en el Plano 3. División de un segmento 4. Pendiente 5. Ángulo entre dos rectas 6. Paralelismo y Perpendicularidad 7. La recta 8. La circunferencia 9. La Elipse 10 La Parábola 11 La Hipérbola 12 Ec. Gral. de las Cónicas 13 Cambio de Coordenadas 14 Rotaciones 15 Tangentes a una curva 16 Geom. Analítica como modelo de la Geom. Euclidiana 17 Aplicaciones		
				1. Concepto de Límite 1.1 Límites Laterales 1.2. Existencia de Límite 1.3 Operaciones de Límite 1.4 Límites especiales 1.5 Continuidad usando el criterio de límite 2. Concepto de Derivada 2.1. Álgebra de Derivadas 2.2. Derivadas Implícitas 2.3. Derivadas de Orden Superior 3. Aplicaciones de la Derivada 3.1 Velocidad Instantánea y Tangentes 3.2 Máximos y Mínimos 3.3. A la Economía	[illegible]
				1. Estadística Descriptiva 1.1. Muestra y Población 1.2. Variables Aleatorias 1.3. Tabla de Distribución de Frec. 1.4. Gráficas 1.5. Frecuencia Relativa 1.6 Intervalos de Clase 1.7. Frecuencia Acumulada 2. Medidas de Centralización 2.1. Moda 2.2. Mediana 2.3. Percentiles 2.4. Media 3. Medidas de Dispersión 3.1. Rango 3.2. Rango Intercuartílico 3.3. Desviación Media 3.4. Varianza 3.5. Desviación Estándar 4. Probabilidad Clásica 5. Frecuencia Relativa 6. Probabilidad Axiomática 7. Probabilidad Condicional 8. Eventos Independientes	[illegible]

c) COLEGIO DE BACHILLERES.

El Colegio de Bachilleres es una institución oficial creada en el año de 1973 cuya función es la de proporcionar educación en el nivel medio superior a los egresados de secundaria, prepararlos para continuar estudios en las instituciones de enseñanza superior y capacitarlos para que puedan incorporarse en actividades socialmente productivas.

La institución cuenta con modernos planes y programas de estudio, funcionables instalaciones y profesorado eficiente en continua actualización, con el fin de que sus alumnos logren una adecuada formación integral.

Dos de sus objetivos fundamentales están encaminados a proporcionar a los estudiantes una formación propedéutica y una capacitación terminal.

Formación propedéutica. Es la preparación que ofrece la institución para que sus egresados puedan continuar estudios de nivel superior. El plan de estudios del Colegio de Bachilleres busca lograr un equilibrio entre las disciplinas científicas y las humanísticas, para que sus alumnos puedan posteriormente afrontar con éxito el estudio de cualquier carrera profesional.

Capacitación terminal. Tomando en cuenta que en ocasiones los egresados del ciclo de bachillerato no pueden o no desean seguir estudios por diversas causas, o que necesitan trabajar para poder realizar sus estudios a nivel superior, el Colegio de Bachilleres ofrece a sus alumnos una preparación técnica que los capacita para el trabajo. De esta forma, sus egresados pueden incorporarse a la vida económica del país y contribuir a su desarrollo. A este respecto, el Colegio de Bachilleres procura que la capacitación específica que proporciona a sus alumnos sea fundamentalmente práctica.

Otras actividades. Para que los alumnos logren una verdadera formación integral, el Colegio de Bachilleres les brinda la oportunidad de desarrollar sus actitudes artísticas y deportivas, con la orientación de profesores competentes. Los alumnos que lo deseen pueden formar parte de los talleres de teatro, danza, artes plásticas o música; o bien, pueden organizarse en equipos para prácticar algún deporte.

Además, el Colegio de Bachilleres organiza eventos culturales de diverso tipo, con el objeto de apoyar el ambiente académico de la institución: visitas a museos, concursos de oratoria, de cuento, de poesía; conferencias, mesas redondas, cine-clubes, etc. Igualmente organiza la participación de los alumnos interesados en prestar un servicio social, en forma de brigadas de apoyo a programas comunitarios (alfabetización, reforestación, etc.).

El Colegio de Bachilleres cuenta con modernas aulas, laboratorios y talleres, salas audivisuales y bibliotecas. Además, ofrece servicios de orientación escolar y vocacional así como atención médica, a fin de contribuir al buen desarrollo académico y físico de sus alumnos.

Dado que es una institución oficial, los estudios que realizan sus estudiantes son reconocidos por todas las instituciones de enseñanza superior. Esto significa que el egresado del Colegio de Bachilleres puede inscribirse en cualquier universidad o institución de enseñanza superior del país, si cubre los requisitos de ingreso.

Cada semestre el Colegio de Bachilleres recibe nuevos alumnos y los requisitos para ingresar son haber concluido los estudios del ciclo medio básico (secundaria) y aprobar el concurso de selección.

Aparte del sistema escolarizado, el Colegio de Bachilleres cuenta con un sistema abierto de enseñanza.

Este sistema esta destinado para aquellas personas que por algún motivo no han continuado sus estudios de bachillerato y no pueden asistir regularmente a clases. Aún cuando una persona haya dejado de estudiar hace tiempo, si tiene completos sus estudios de secundaria, puede inscribirse en el sistema abierto del Colegio de Bachilleres y cursar el ciclo de enseñanza media superior.

El sistema abierto se basa en el autodidactismo, es decir, en la capacidad para estudiar por cuenta propia en el tiempo y lugar que se tenga disponible. No hay límite de edad para inscribirse en este sistema abierto. Sus estudios tienen igual rigor y validez que los realizados en el sistema escolar.[1]

Las áreas de capacitación terminal que se cursan a partir del tercer semestre al sexto, son las siguientes:

1) Administración de recursos humanos.
2) Empresas turísticas.
3) Laboratorista químico.
4) Dibujo industrial.
5) Organización y métodos.
6) Dibujo arquitectónico y de construcción.
7) Biblioteconomía.
8) Contabilidad.
9) Higiene y seguridad en el trabajo.
10) Sociedades cooperativas.

En el cuadro siguiente se muestran los contenidos de la materia de matemáticas que se imparten en el Colegio de Bachilleres con modificaciones que datan a partir de 1982.[2]

[1] vid. pp. 101-103. (17).
[2] cfr. (20).

TEMARIO DE LAS TUTORÍAS: " COLEGIO DE BACHILLERES "

	SEGUNDO SEMESTRE	TERCER SEMESTRE	CUARTO SEMESTRE	QUINTO SEMESTRE	SEXTO SEMESTRE
... y [illegible]					
	1. Lenguaje y forma lógica 1.1. Lenguaje natural y lenguaje simbólico 1.2. Lógica proposicional y lógica cuantificacional 1.3. Necesidad y suficiencia 1.4. Negación de enunciados 1.5. Equivalencia de enunciados 2. Métodos de prueba y argumentación 2.1. Razonamiento lógico 2.2. Argumentación 2.3. Estructura 3. Criterios de verdad y método científico 3.1. Lógica de la dialéctica 3.2. La prueba científica 3.3. El método científico	1. Relaciones 2. Conjuntos 3. Subconjuntos 4. Producto cartesiano			
[illegible] de sistemas de ecuaciones lineales [illegible]		1. Ecuaciones lineales 2. Sistemas de ecuaciones lineales 2.1. Problemas que llevan al planteo de sistemas de ecuaciones lineales 3. Ecuaciones cuadráticas 3.1. Problemas que llevan al planteo de ecuaciones cuadráticas 3.2. Solución de ecuaciones cuadráticas			
	1. Antecedentes históricos 2. El método de la geometría euclidiana 3. Punto, recta y plano 4. Segmento 5. Ángulo 6. Triángulo 6.1. Propiedades 6.2. Clasificación 6.3. Congruencia 6.4. Semejanza 6.5. Teorema básico de la proporcionalidad 7.1. Teorema de Pitágoras 8. Polígonos 8.1. Clasificación 9. Circunferencia y círculo 9.1. Líneas y ángulos asociados 10. Perímetro y área 11. Ley de los senos y de los cosenos 12. Identidades trigonométricas				
	1. Definición y notación de función 2. Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo 3. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano 3.1. Funciones para cualquier ángulo 3.2. Gráficas de las funciones trigonométricas	1. Funciones 1.1. Representación algebraica 1.2. Notación y gráficas de funciones 2. Funciones polinomiales 3. Funciones lineales 4. Funciones cuadráticas 5. Funciones creciente y decreciente		1. Función real de variable real 2. Clasificación de funciones 2.1. Algebraicas 2.2. Trascendentes 3. Función polinomial 4. Función racional 5. Función exponencial 6. Función logarítmica 7. Funciones trigonométricas	
		1. Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales	1. La recta 1.1. Pendiente e inclinación 1.2. Ángulo entre dos rectas 1.3. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad 1.4. Ecuación general 2. Distancia de un punto a una recta 3. Región en el plano 4. Circunferencia 5. La parábola 6. La elipse 7. La hipérbola 8. Ecuación general de las cónicas 9. Coordenadas polares 9.1. Relación con el sistema de coordenadas cartesianas		
				1. Propiedades de las funciones 1.1. Continuidad 1.2. Límite 2. La derivada de una función 2.1. Algebraicas 2.2. Trascendentes 2.3. Derivaciones sucesivas 3. Máximos y mínimos de una función 4. Criterios de la primera y segunda derivada 5. Concavidad 6. Problemas de máximos y mínimos	1. Integral [illegible] 1.1. Función [illegible] 1.2. Integrad[illegible] algebrai[illegible] trascend[illegible] 2. Métodos de [illegible] 2.1. Integra[illegible] de variab[illegible] 2.2. Integra[illegible] 2.3. Integra[illegible] [illegible]
				1. Clasificación de la estadística 2. Presentación de datos 3. Distribuciones de frecuencias 3.1. Escalas de medición 3.2. Distribución de frecuencia absoluta y relativa 3.3. Distribución de frecuencias acumuladas 4. Gráficas 4.1. Histograma y polígono de frecuencias 4.2. Gráficas circulares, diagramas de barras, pictogramas y gráficas de líneas 5. Medidas descriptivas 6. Medidas de tendencia central 7. Medidas de dispersión 8. Correlación lineal 9. Regresión lineal 10. Enfoque histórico de la probabilidad 11. Frecuencia relativa 12. Concepto de probabilidad 13. Probabilidad condicional e independencia 14. Procedimientos elementales de conteo	1. Distribuci[illegible] probabili[illegible] aleatorias 2. Función de [illegible] de probabil[illegible] 2.1. Variables [illegible] 2.2. Función [illegible] 2.3. Función [illegible] acumulat[illegible] 2.4. Función [illegible] acumulat[illegible] 3. Distribuci[illegible] probabili[illegible]

D) CENTROS DE ESTUDIOS CIENTIFICOS Y TECNOLOGICOS (I.P.N.).

El Instituto Politécnico Nacional, partícipe activo en la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior, desde hace muchos años atrás, y miembro de su Consejo Nacional, ha aportado sus experiencias y ha recogido las que han vivido otras Instituciones.

Como consecuencia de los acuerdos de la ANUIES, en torno a la educación media superior tomados en Villahermosa en abril de 1971, se aprestó a reestructurar este ciclo educativo trayendo como consecuencia la creación de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos que iniciaron su funcionamiento en septiembre de 1971.

Cabe recordar que aún antes de la fundación del Instituto Politécnico Nacional su ciclo de educación media se le denominó inicialmente Preparatoria Técnica que comprendían cuatro años de estudio. En 1935 se subdividió en dos niveles, la Prevocacional de dos años (correspondiente al ciclo de educación media básica) y la Vocacional de dos años (correspondiente al ciclo de educación media superior). Tiempo después la Prevocacional se organizó en tres años operándose en su estructura académica algunos cambios hasta quedar establecida en 1959 la Secundaria Técnica denominándose entonces Escuelas Tecnológicas. Estas se suprimieron del Instituto por Decreto Presidencial en el año de 1969, por lo cual, quedó únicamente dentro del Instituto el ciclo Vocacional.

Este ciclo Vocacional debemos recordar que también fue objeto, en el transcurso del tiempo, de modificaciones en su estructura académica, pues, había Vocacionales específicas para determinadas Escuelas Superiores y en 1963 se introdujo una modificación para crearse la Preparatoria Técnica, que siendo de dos años, el primero era común y el segundo contenía varias opciones cuya formación propedéutica servía para determinadas Escuelas Superiores.

Ahora con la Reforma Educativa, en septiembre de 1971 estas escuelas fueron objeto de una reestructuración académica radical para denominarse Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos. Su estructura académica está diseñada para cursarse en tres años subdivididos en seis semestres académicos, a través de los cuales, al mismo tiempo que se da una formación de Bachilleres en Ciencias se otorga un adiestramiento y capacitación de orden técnico, que permite al educando que cada dos semestres adquiera un crédito que lo califica como técnico en una especialidad, lo que constituye las salidas colaterales.

Al finalizar los seis semestres, el educando recibe su diploma de Bachiller en: Ciencias de Ingeniería y Físico Matemáticas, Ciencias Médico Biológicas y Ciencias Sociales y Administrativas. Con esta formación puede proseguir estudios superiores bien sea en el propio Instituto Politécnico Nacional, en los Tecnológicos Regionales o en una Universidad. Recibe además previo servicio social y tesis correspondiente el Diploma de técnico en la especialidad que haya cursado. Es decir, la fase terminal en este tipo de Instituciones permite tres opciones: una, continuar estudios técnicos; dos, continuar estudios universitarios y tres, incorporarse a los procesos de producción. Esto es alcanzable en vista de que se otorga a los estudiantes una formación científica estricta, combinada armónicamente con una formación humanística y además una capacitación técnica especializada.

Con este espíritu renovador, la primera Vocacional que fue objeto de esa transformación fue la No. 6 correspondiente al área de Ciencias Médico Biológicas, la cual fue simultáneamente dotada de un edificio que facilitara las labores académicas reestructuradas. Sucesivamente se fueron transformando todas las Vocacionales y se concluyó en esta formación a las Escuelas Técnicas a nivel medio como son las Escuelas Técnicas Industriales: Wilfrido Massieu, Juan de dios Bátiz y Luis Enrique Erro.

De esta suerte el nivel de Educación Media Superior en el Instituto Politécnico Nacional se atiende ahora en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos.

Al mismo tiempo que se llevó a cabo la reestructuración académica en estos nuevos Centros, se tomaron las medidas necesarias para dotarlos de las instalaciones adecuadas en talleres, laboratorios y equipo para facilitar su desarrollo; pero además, en algunos de ellos se han introducido implementos modernos de educación como son los circuitos cerrados de televisión y los laboratorios de idiomas. Los primeros se instalaron en los C.E.C. y T. números 2, 4 y 8 y los segundos se instalaron en los C.E.C. y T. números 5, 7 y Luis Enrique Erro.

En cuanto a las prácticas escolares, ahora se han hecho extensivas a los C.E.C. y T., dado que los alumnos ahora tienen una formación más completa que les permite acudir a los diversos Centros de trabajo y producción a observar los procesos industriales y participar en ellos de suerte que opera en forma eficiente el Plan Escuela-Industria.

Las carreras técnicas que se imparten en cada uno de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos dependientes del Instituto Politécnico Nacional, son las siguientes:

I. Area de Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas: Técnico en Electrónica, Técnico en Máquinas y Herramientas, Técnico en Construcción, Técnico Electricista, Técnico en Fundición, Técnico en Dibujo Industrial, Técnico Industrial, Técnico Mecánico, Técnico en soldadura, Técnico en Plásticos, Técnico en Mantenimiento de Máquinas e Instalaciones Industriales, Técnico en Programación, Técnico en Maquinado y Metrología, Técnico en Comunicaciones Eléctricas y Técnico en Sistemas Térmicos.

II. Area de Ciencias Médico-Biológicas: Técnico Laboratorista Químico y Técnico en Agrobiología.

III. Area de Ciencias Sociales y Administrativas: Técnico en Administración de Empresas, Técnico en Contabilidad Industrial, Técnico en Comercio Exterior, Técnico en Economía y Estadística, Técnico Fiscal, Técnico en Administración Financiera, Técnico en Mercadotécnia, Técnico en Administración de Empresas Turísticas, Técnico en Contabilidad, Técnico en Ventas y Técnico en Dirección de Oficinas.[1]

Hasta aquí se ha descrito a grandes rasgos el origen de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos. Lo que se muestra en el siguiente cuadro es la información en cuanto a los contenidos de los temas de matemáticas que son impartidos en dichos Centros, estos corresponden a los años de 1989 y 1990. Se tomó como referencia a los del Area de Ciencias Sociales y Administrativas.[2]

[1] vid. pp. 271-276. (21).

[2] cfr. (26).

CONTENIDO DE LAS [illegible] : CENTRO DE ESTUDIOS CIENTIFICOS Y TECNOLOGICOS - I.P.N.

[illegible]	SEGUNDO SEMESTRE	TERCER SEMESTRE	CUARTO SEMESTRE	QUINTO SEMESTRE	SEXTO [illegible]
					[illegible] AREA CIENC[illegible]
[illegible] Cartesiano [illegible]					
[illegible] y Proporciones [illegible] de 1er. grado dos incóg. [illegible] de 1er. grado tres incóg. [illegible] de 2do. grado [illegible] de Ec. 2do. grado [illegible]	1. Logaritmos 2. Ecuaciones Logarítmicas 3. Ecuaciones Exponenciales 4. Ecuaciones Trigonométricas				
	1. [illegible] 2. [illegible] 3. Semirrecta y segmento de recta 4. Ángulos 5. Paralelismo y Perpendicularidad 6. Triángulos 7. Teorema de Tales 8. Teorema de Pitágoras 9. Polígonos 10. Cuadriláteros 11. Circunferencia y Círculo 12. Sólidos Geométricos 13. Ley de Senos y Cosenos 14. Cálculo de área				
	1. Funciones Trigonométricas 2. Funciones Trigonom. Inversas 3. Función Exponencial y Logarít. 4. Gráficas 5. Aplicaciones		1. Función Real 2. Clasificación de Funciones 2.1. Polinomiales 2.2. Racionales 2.3. Irracionales 3. Funciones Crecientes y Decrecientes		
		1. Plano Cartesiano 2. Distancia entre dos puntos 3. Pendiente de Recta 4. Ecuaciones de una Recta 5. La Recta 6. Dist. de un punto una recta 7. Circunferencia 8. Elipse 9. Parábola 10. Hipérbola 11. Ec. gral. de 2do. Grado 12. Cambio de Coordenadas 13. Rotaciones			
			1. Continuidad de una Función 2. Límite de una Función 2.1. Operaciones 3. Derivada de una Función 3.1. Operaciones 4. Derivadas de Funciones 4.1. Algebraicas 4.2. Trascendentes 4.3. Logarítmicas 4.4. Exponenciales 4.5 Trigonométricas 5. [illegible] de una curva 6. Ecuación y Longitud de la Tangente y la normal 7. Máximos y mínimos 8. Puntos de Inflexión 9. Concavidad de una curva 10. Aplicaciones	1. Integral Indefinida 2. Integración de Funciones Algebraicas 3. Métodos de Integración 4. Integración por Cambio de Variable 5. Integración por partes 6. Integración por descomposición de Fracciones Parciales 7. Integral Definida 8. Teorema Fundamental del Cálculo 9. Aplicaciones	
					1. [illegible] 1.1. [illegible] 1.2. [illegible] 2. [illegible] 3. [illegible] 4. [illegible] 5. Gráficas 6. [illegible] 7. [illegible] 8. [illegible] 9. [illegible] 10. [illegible] 11. [illegible]

COMENTARIOS FINALES.

El compromiso por buscar y proponer alternativas que fortalezcan los programas educativos es permanente, motivo que condujo a la realización del presente trabajo. Es evidente que en el terreno matemático faltan cosas por hacer, ya que los cambios que continuamente experimenta la sociedad en el ámbito científico-técnico obliga a actualizar constantemente sus contenidos, aunado también a la problemática inherente en los procedimientos que se siguen en su enseñanza.

No sería sorprendente encontrar datos estadísticos extremistas que indicaran la poca inclinación que tienen los estudiantes de bachillerato por las matemáticas. Asimismo, si se tomará en cuenta el índice de deserción que ocurre en las escuelas donde se imparte la carrera de matemáticas, se vería que la aguda situación que se presenta en esta ciencia no sólo es propia de un determinado nivel escolar, sino que se presenta también en los demás que integran el Sistema Educativo Nacional. Estas y otras reflexiones se podrían hacer en torno a esta problemática educativa, en esto resalta lo siguiente:

1) La formación reciente de la actividad matemática en México.

2) Falta de información en lo que respecta al panorama de las aplicaciones de esta ciencia.

3) La carencia de programas de estudio atractivos para los estudiantes.

Con estos y otros factores se percibe la necesidad de acercar a otro tipo de matemáticas a los estudiantes, de tal forma que sean congruentes con sus intereses y las circunstancias cambiantes.

Ahora bien, como respuesta a la interrogante planteada sobre la utilidad de la matemática que es preciso responder en el bachillerato, se ha propuesto como objeto de estudio en este nivel educativo a tres técnicas matemáticas situadas dentro de la Investigación de Operaciones. De esta forma a la vez se pretende contrarrestar la deficiencia encontrada en los programas de estudio sobre la falta de aplicabilidad con que se presentan los contenidos de esta materia.

Con el desarrollo de las tres técnicas, en la segunda parte se ha establecido una metodología que puede ser empleada al abordar el estudio de cada una en el bachillerato. En este sentido se trata de hacer énfasis en la forma en que se puede inducir al educando a cultivar el aprendizaje a través de una serie de reflexiones que lo conduzcan al descubrimiento.

Con todo, para poder llevar a cabo el desarrollo de la propuesta, fué necesario exhibir parte de los objetivos que se persiguen en la educación, además de justificar objetivamente la incorporación de los temas factibles de ser enseñados en el Nivel Medio Superior. Para terminar es necesario agregar las siguientes consideraciones:

1. La enseñanza de la matemática debe ser adaptada a las necesidades de los distintos tipos de estudiantes del bachillerato.

2. Debe hacerse dinámica la instrucción matemática manteniendo una estrecha relación con los avances que acontecen en la sociedad.

3. Los cambios o modificaciones que sean realizados en los programas de estudio deben estar sujetos a una adecuada planeación.

Finalizo diciendo que esta aportación a perseguido como idea esencial, la de participar en la continua edificación de un ambiente académico propicio que coadyuve a consolidar la matemática en nuestro medio educativo.

BIBLIOGRAFIA

I. SOBRE EDUCACION Y ENSEÑANZA

[1] Aragón B., Misael y Valiente B., Santiago. *En el amable mundo de la matemática*. México: Patria. (3a. ed., 1989).

[2] Bonilla R., Elisa. *Algunos aspectos de la enseñanza del álgebra de matrices*. Depto. de Matemáticas, F.C.-U.N.A.M. (Comunicación Interna No. 4, 1980).

[3] Castelnuovo, Emma. *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas. (tr. Robledo V., Felipe. 2a. ed., 1990).

[4] Freire, Paulo. *La educacion como práctica de la libertad*. México: Siglo XXI. (tr. Ronzoni, Lilián. 14a. ed., 1974).

[5] Klaus, D. J. *Técnicas de individualización e innovación de la enseñanza*. México: Trillas. (tr. Patán L., F. y Huerta I., J. 2a. ed., 1979).

[6] Martínez, J., Murillo, H. y Rosas, L.O. *Manual de didáctica de la matemática*. Centro de Didáctica, U.N.A.M., 1972.

[7] Muñoz Izquierdo, Carlos. *El problema de la educacion en México: ¿laberinto sin salida?*. México: Centro de Estudios Educativos, A.C. (2a. ed., 1983).

[8] Zapata, Mario. *¿ Qué está pasando en la educacion básica ?*. México: Ayuso, 1976.

II. SOBRE INVESTIGACION DE OPERACIONES

[9] Bazaraa, M. S. y Jarvis, J. J. *Programación Lineal y Flujo en Redes.* México: Limusa. (tr. Hernández, L.O. y Del Valle, M. 2a. reimpresión, 1986).

[10] Calvillo Vives., G. *Metodos de la Programación Lineal.* México: CINVESTAV, I.P.N. (V Coloquio del Departamento de Matemáticas. Pátzcuaro, Mich., 1987).

[11] Hernández Ayuso,M.C. *Analisis de Redes.* Depto. de Matemáticas, F.C.-U.N.A.M. (Vínculos Matemáticos No. 161, 1988).

[12] Hillier, F. y Lieberman, G. *Introducción a la Investigación de Operaciones.* México: Mc. Graw-Hill. (tr. Pérez C., J. H. y González O., M. 1a. ed. en español, 1986).

[13] Kaufmann, A. y Faure, R. *Invitacion a la Investigacion de Operaciones.* México: CECSA. (tr. Lanuza E., J.A. y Ramos, S. 1a. reimpresión en español, 1967).

[14] Prawda Witenberg, Juan. *Metodos y Modelos de Investigacion de Operaciones.* México: Limusa. (Vol. I, 7a. reimpresión, 1987).

[15] Taha, H. A. *Investigación de Operaciones: una introducción.* México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. (tr. Acosta F., J.J., 2a. ed., 1988).

[16] Venttsel, E.S. *Introducción a la Teoria de los Juegos.* México: Limusa. (tr. Pérez C., J. 1a. reimpresión, 1986).

III. COMPLEMENTARIA

[17] De la Rosa R., Carlos O. *El bachillerato en Mexico.* C.B., 1981

[18] G. Hoel, Paul *Matematicas finitas y calculo con aplicaciones a los negocios.* México: Limusa.
(tr. García D., R. 1a. reimpresión, 1989).

[19] González R., M. *Antologia de la Escuela Nacional Preparatoria.* México: B. Costa-Amic, edif.
(Colección Pensamiento de América. Vol. 6., SEP, 1967).

[20] López de Medrano, S. *Modelos Matemáticos.* México: Trillas.
(Serie: Temas Básicos. 1a. reimpresión, 1983).

[21] Mendoza A., Eusebio. *El Politecnico las leyes y los hombres.* México: B. Costa-Amic, edif. (Tomo II, 1975).

[22] *Ley Federal de Educación.* Centro de Estudios Educativos, A.C. (Texto y comentario por A.M., Rodrigo y M. I., Carlos, 1973).

[23] Escuela Nacional Preparatoria,U.N.A.M., Depto. de matemáticas, Programas de estudio de la materia de matemáticas, 1974.

[24] Colegio de Ciencias y Humanidades, U.N.A.M., Dir. de la Unidad Académica del Bachillerato, Programas de estudio de la materia de matemáticas, 1979.

[25] Colegio de Bachilleres, Dir.de Planeación Académica, Programas de estudio de la materia de matemáticas; 1982, 1983 y 1988.

[26] Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos,I.P.N., Dir. de Educación Media Superior, Programas de estudio de la materia de matemáticas; 1989 y 1990.