0 1131 7 2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

INVERSION UNIDIMENSIONAL DE SISMOGRAMAS DE SEUDOREFLEXION UTILIZANDO ONDAS SH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO TORRES VERA

Ciudad Universitaria 1992

ÍNDICE

ÍNDICE 1

RESUMEN 2

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN 3

CAPÍTULO 2 INVERSIÓN DE SISMOGRAMAS DE REFLEXIÓN 7

2.1 DECONVOLUCIÓN DINÁMICA 7

2.1.1 RECURSIÓN POLINOMIAL PARA INVERSIÓN POR DECONVOLUCIÓN DINÁMICA 7

2.1.2 ITERACIÓN DE LA DECONVOLUCIÓN DINÁMICA 10

2.1.3 DECONVOLUCIÓN DINÁMICA ESTABILIZADA 11

2.2 FILTRO INVERSO 13

2.2.1 LA RECURSIÓN DE LEVINSON Y LA RECURSIÓN INVERSA 13

2.2.2 ITERACIÓN DEL FILTRO INVERSO 19

2.2.3 RECURSIÓN DE LEVINSON ESTABILIZADA 19

CAPÍTULO 3 INVERSIÓN DE SISMOGRAMAS DE SEUDOREFLEXIÓN 23

CAPÍTULO 4 RESULTADOS NUMÉRICOS 30

4.1 DECONVOLUCIÓN DINÁMICA 30

4.2 FILTRO INVERSO 36

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES 45

REFERENCIAS 46

APÉNDICE A ANTECEDENTES 48

APÉNDICE B DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE REFLEXIÓN 73

APÉNDICE C TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ 96

APÉNDICE D PROGRAMAS DE CÓMPUTO DE LOS ALGORITMOS 102

AGRADECIMIENTOS 109

RESUMEN

El problema inverso en sismología implica la determinación, a partir de datos, de la estructura del subsuelo. Existen diversas formas de resolverlo. Los métodos basados en el modelo de Tierra estratificada con capas horizontales, homogéneas y no absorbentes se han desarrollado a partir de técnicas de deconvolución. El problema principal en el cálculo de los coeficientes de reflexión de sismogramas es la inestabilidad del proceso de inversión debido al ruido. En este trabajo se revisan dos de las técnicas más sencillas de inversión de sismogramas de reflexión de incidencia normal, analizando el caso de inversión unidimensional y los problemas de inestabilidad que se presentan. El primer método calcula directamente los coeficientes de reflexión del sismograma y se conoce como "deconvolución dinámica". El segundo método, aquí llamado "filtro inverso", consta de dos fases: 1) la construcción de un filtro causal por factorización de la función por medio de la recursión de Levinson y 2) el filtrado del sismograma. El sismograma "filtrado" es una buena aproximación para la secuencia de los coeficientes de reflexión. Se demuestra que, pese a la sencillez de ambos métodos, se puede obtener una buena aproximación de los coeficientes de reflexión. Se presentan ejemplos numéricos, sin y con ruido, para incidencia normal de ondas acústicas (P), y se plantea el procedimiento de solución para el caso de incidencia oblicua de ondas elásticas SH. Se observa que, a pesar de la sencillez de estos métodos, es posible realizar una buena aproximación de los coeficientes de reflexión y, debido a la rapidez del proceso, se pueden utilizar en análisis elementales de inversión.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La inversión sismica es un proceso que involucra el reconocimiento de la estructura fisica y las propiedades del subsuelo a través de mediciones realizadas, generalmente, en la superficie del terreno. Para entender este proceso es necesario conocer los procesos fisicos involucrados en la generación de los datos y utilizar el modelo convolucional de la tierra. Con el método de inversión se obtiene la información de la estructura del subsuelo donde se propagaron las ondas sismicas contenidas en los registros.

En sismologia de exploración el interés que motiva el estudio de la inversión es la idea de obtener el modelo de tierra a partir de los datos obtenidos en superficie de las ondas que se propagaron en el interior de la tierra (Resnick, 1990). Este interés ha producido gran cantidad de estudios e investigaciones; por ejemplo:

1) Gretener en 1961, O'Brien y Lucas en 1971 y Goetz y otros en 1979 (Resnick, 1990) realizaron estudios de las velocidades de propagación en medios estratificados mediante los tiempos de viaje.

2) Futterman en 1962 (Resnick, 1990) realizó estos mismos estudios, pero en el dominio de la frecuencia, donde determinó la dependencia de la atenuación de la energia con respecto a la frecuencia.

El análisis matemático de este problema, en su forma original, comenzó en los siglos XVIII y XIX, donde gente como Bernoulli, Euler, Lagrange y Green realizaron estudios de las ecuaciones de propagación de ondas. Ya en el siglo XX, Rayleigh y Webster utilizaron la ecuación de onda en una dimensión para describir la propagación acústica. A partir de estos desarrollos, Stewart en 1922 y Mason en 1927 desarrollaron filtros para tratar de obtener el modelo de tierra. Posteriormente, Morse realizó en 1948 el desarrollo teórico de la dispersión de ondas en un medio estratificado (Resnick, 1990).

Para poder aprovechar y comprobar estos desarrollos durante la década de 1960, se realizaron estudios de modelado directo. Goupillaud (1961) y Robinson (1967), entre otros, desarrollaron las herramientas para el modelado directo unidimensional, durante la primera mitad de esta década. Anstey, Trorey, D'Erceville y Kunetz (Resnick, 1990) desarrollaron los modelos discretos de un medio estratificado horizontalmente con homogeneidad lateral (modelo de Goupillaud), en los que los coeficientes de reflexión se obtienen mediante las "pérdidas" de energía en cada interfase.

Con todos estos avances, ya durante la década de 1970, las aportaciones al estudio de inversión fueron numerosas: Robinson y Treitel (1977, 1978), Robinson (1975), Claerbout (1976), Schoenberger y Levin, Spencer, Ruter y Schepers (Resnick, 1990), realizaron múltiples simulaciones directas e inversas con diversas técnicas.

Durante la década de 1980 surgieron numerosos trabajos. Destacan, entre otros, Aki y Richards (1980), Robinson (1982) y Ferber (1985), quienes trabajaron en la inversión unidimensional de incidencia normal de ondas P. Scherbaum (1987a,b,c) extendió esta formulación para casos de incidencia oblicua de ondas SH.

En el presente trabajo se analizan y discuten de dos de las técnicas más sencillas de inversión unidimensional de incidencia normal de ondas P: la deconvolución dinámica y el filtro inverso. La deconvolución dinámica es un método sencillo propuesto por

Kunetz en 1963 (Resnick, 1990) y después implementado por Robinson (1967). En él, la influencia de cada capa se elimina en forma iterativa para encontrar la serie de coeficientes de reflexión. El problema de esta técnica, sin embargo, es la inestabilidad causada por la presencia de ruido en los sismogramas que se desea invertir. Para resolver este problema, Ferber (1985) planteó la solución mediante un estudio estadístico en el que, con un análisis de la varianza, se puede realizar lo que aquí se llama estabilización, mediante la remoción de esta varianza calculada a partir de los sismogramas.

El segundo método, aquí llamado filtro inverso, es una solución que se basa en el problema originalmente planteado por Norbert Wiener, que condujo al filtro predictivo que lleva su nombre. Posteriormente, Robinson (1967, 1975) amplió este trabajo y Robinson y Treitel (1977, 1978) plantearon la solución para el problema de inversión de sismogramas marinos, encontrando : .blemas de inestabilidad por ruido. Ferber (1985) retomó estos planteamientos y propuso un método para estabilizar la inversión mediante el mismo análisis estadístico que utilizó para la deconvolución dinámica.

Con base en estos antecedentes, en el presente trabajo se procede a realizar la inversión de sismogramas sintéticos sin presencia de ruido, utilizando la técnica de Robinson y Treitel (1978). Posteriormente, se agrega ruido a los sismogramas y se comparan resultados para los dos casos.

También se discute el planteamiento de Scherbaum (1987a, b, c) para la inversión de sismogramas ante incidencia oblicua de ondas SH. La técnica utilizada en el presente trabajo se basa en la ecuación de Kunetz-Claerbout (Claerbout, 1976) que, en su forma original, establece la interrelación entre la respuesta de transmisión y reflexión en un medio estratificado horizontalmente ante incidencia normal de ondas P (Goupillaud, 1961). Scherbaum

(1987a, b, c) extendió esta formulación al problema de incidencia oblicua de ondas SH utilizando registros de temblores que representan la respuesta de transmisión de un medio estratificado horizontalmente para una fuente a profundidad y un receptor en superficie. Así, estos registros pueden transformarse a una respuesta de reflexión para una fuente y un receptor en la superficie. Esta respuesta de "seudoreflexión" puede ser invertida para obtener las impedancias acústicas utilizando técnicas bien establecidas de procesamiento de datos geofísicos (deconvolución dinámica, filtro inverso).

La inversión de sismogramas de seudoreflexión conduce a obtener las correspondientes series de coeficientes de reflexión en la misma forma en que se procede para invertir sismogramas de reflexión para fuentes y receptores en superficie. La estructura Toeplitz del sistema de ecuaciones permite utilizar eficientemente el algoritmo de Levinson (Claerbout, 1976). Los coeficientes de reflexión se calculan a partir de los coeficientes de un filtro de predicción de error para el sismograma de transmisión y la influencia de cada capa se considera recursivamente. El modelo de velocidad vs profundidad se construye considerando densidades constantes.

Para el arreglo geométrico de fuente natural, la inversión del sismograma de transmisión tiene un modelo de velocidad-profundidad con tiempos de viaje correspondientes al espesor aparente de las capas individuales y, si el ángulo de incidencia se conoce, el espesor puede ser corregido geométricamente. Para datos donde la relación señal-ruido es pequeña, el mayor problema con la inestabilidad del algoritmo de Levinson se reporta con la inversión de los sismogramas de reflexión 'real' (Scherbaum, 1987a, b, c).

CAPÍTULO 2

INVERSIÓN DE SISMOGRAMAS DE REFLEXIÓN

2.1 DECONVOLUCIÓN DINÁMICA

La deconvolución dinámica es un método iterativo para deconvolucionar la influencia de las primeras k capas en sismogramas de reflexión, resultando los sismogramas de reflexión para k+1 capas. La obtención de los coeficientes de reflexión es simple: el primer coeficiente del filtro convolutivo se calcula a través de la recursión de Robinson (1967) y los siguientes mediante la deconvolución dinámica.

2.1.1 RECURSIÓN POLINOMIAL PARA INVERSIÓN POR DECONVOLUCIÓN DINÁMICA

Examinando la función presentada por los polinomios P_k y Q_k y usando la transformación de Lorentz para las primeras k capas (Apéndice A), obtenemos

$$\begin{bmatrix} D_{k+1} \\ U_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{S^{-k/2}}{\sigma_k} \begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R_1 \end{bmatrix},$$

donde U y D son los rayos ascendente y descendente, respectivamente, P y Q son polinomios en Z con coeficientes p y q, respectivamente, P^R y Q^R son los polinomios reversos, S es la variable de la transformada de Laplace y σ_k es el factor de transmisión de viaje

$$\sigma_k = t_k \; t_{k-1} \; \ldots \; t_1 .$$

O bien

$$D_{k+1} = \sigma_k^{-1} S^{-k/2} (P_k^R + Q_k R_1^R)$$

$$U_{k+1} = \sigma_k^{-1} S^{-k/2} (Q_k + P_k R_1).$$

Este pulso descendente U_{k+1} se refleja en la interfaze k+1 al tiempo (k+1)/2 y produce el pulso inicial de la onda ascendente. Ya que el pulso incidente tiene amplitud σ_k y el coeficiente de reflexión es c_{k+1}, el pulso inicial ascendente tiene amplitud $\sigma_k c_{k+1}$. Este pulso ascendente llega a la cima de la capa k+1 al tiempo (k/2)+1. Así, U_{k+1} es de la forma

$$U_{k+1} = \sigma_k \, c_{k+1} \, S^{(k/2)+1} + \text{(términos de orden superior de S)}.$$

Se tienen ahora dos ecuaciones para U_{k+1}. Igualando éstas se obtiene

$$\sigma_k \, c_{k+1} \, S^{(k/2)+1} + \text{(términos de orden superior de S)} = \sigma_k^{-1} S^{-k/2} (Q_k + P_k R_1),$$

y eligiendo solamente los términos fuera de $S^{(k/2)+1}$ del lado derecho, éste queda en la forma

$$\sigma_k^{-1} S^{-k/2} [(q_{k,1} S + \ldots + q_{k,k} S^k) + (p_{k,0} + \ldots + p_{k,k-1} S^{k-1}) (r_1 S + \ldots + r_{k+1} S^{k+1} + \ldots)],$$

donde el término $S^{(k/2)+1}$ puede verse como

$$\sigma_k^{-1} S^{-k/2} [(p_{k0} \, r_{k+1} + \ldots + P_{k,k-1} \, r_2) S^{k+1} + \text{(términos de potencias superiores)}].$$

Ahora, igualando los términos $S^{(k/2)+1}$ en los lados derecho e izquierdo, se obtiene

$$\sigma_k\, c_{k+1}\, S^{(k/2)+1} = \sigma_k^{-1}\, S^{-k/2}\, (p_{k0}\, r_{k+1} + \ldots + P_{k,k-1}\, r_2)\, S^{k+1}$$

lo cual da

$$c_{k+1} = \frac{P_{k0}\, r_{k+1} + P_{k1}\, r_k + \ldots + P_{k,k-1}\, r_2}{\sigma_k^2} \quad \ldots \ldots \quad (2.1)$$

De esta manera se tiene el siguiente esquema basado en Robinson (1967) para la recursión de P y Q e invertir el sismograma de reflexión sin superficie libre r_1, r_2, r_3, ... Como paso inicial, se hace $c_1 = r_1$, $\sigma_1^2 = 1 - c_1^2$, $P_1(S) = 1$, $Q_1(S) = -c_1 S$. Entonces, se ejecuta el siguiente ciclo para k = 1 hasta el número total de capas que se van a considerar. Esto implica

Calcular c_{k+1} mediante la fórmula (2.1).

Calcular $\sigma_{k+1}^2 = (1 - c_{k+1}^2)\, \sigma_k^2$,

Calcular $P_{k+1}(S) = P_k(S) - c_{k+1} S\, Q_k^R(S)$, y

Calcular $Q_{k+1}(S) = Q_k(S) - c_{k+1} S\, P_k^R(S)$.

De esta manera se obtiene la serie de coeficientes de reflexión c_1, c_2, c_3, ... de la cual se puede calcular la función de impedancia requerida. Finalmente, se escribe la siguiente expresión para el sismograma de reflexión R_{k+1} en la capa k+1

$$R_{k+1} = \frac{U_{k+1}}{D_{k+1}} = \frac{Q_k + P_k R_1}{P_k^R + Q_k^R\, R_1}$$

$$= \frac{\sigma_k\, c_{k+1}\, S^{(k/2)+1} + (\text{términos de potencias superiores})}{\sigma_k\, S^{k/2} + (\text{términos de potencias superiores})}$$

$$= c_{k+1}\, '' + (\text{términos de potencias superiores}).$$

De esta ecuación se observa que el primer rebote de R_{k+1} es $c_{k+1}S$.

2.1.2

ITERACION DE LA DECONVOLUCION DINAMICA

Como se menciono en las secciones anteriores se puede realizar una inversión mediante la deconvolución dinámica. Ahora, si $x(j)$, $j = 1, \ldots, n$, es el pulso de reflexión del sismograma, $w(j)$, $j = 1, \ldots, n$, es ruido blanco con varianza σ^2, $\hat{x}(j) = x(j) + w(j)$, $j = 1, \ldots, n$, es el sismograma ruidoso, $r(j)$, $j = 1, \ldots, n$, la secuencia de los coeficientes de reflexión, y $X(Z)$, $W(Z)$ y $R(Z)$ denotan sus correspondientes transformadas Z, la iteración del esquema descrito en la sección precedente es como sigue:

Inicio

$$r(0) = x(1), \quad v^2(0) = 1 - r^2(0) \qquad \ldots \quad (2.2a)$$

$$P(0,Z) = 1 \text{ y } Q(0,Z) = 0$$

Desde k hasta k+1

$$r(k+1) = \frac{1}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} P(k,j)\, x(k+1-j) \qquad \ldots \quad (2.2b)$$

$$v^2(k+1) = [1 - r^2(k+1)]\, v^2(k) \qquad \ldots \quad (2.2c)$$

$$P(k+1,Z) = P(k,Z) - r(k+1)\, Z\, Q^R(k,Z)$$

$$Q(k+1,Z) = Q(k,Z) - r(k+1)\, Z\, P^R(k,Z), \qquad \ldots \quad (2.2d)$$

donde $P(k,Z)$ y $Q(k,Z)$ son polinomios en Z con coeficientes $p(k,j)$ y $q(k,j)$, $j=0,\ldots,k$ y $P^R(k,Z) = Z^k P(k,Z^{-1})$ y $Q^R(k,Z) = Z^k Q(k,Z^{-1})$.

2.1.3

DECONVOLUCIÓN DINÁMICA ESTABILIZADA

La idea principal en el algoritmo de estabilización es la estimación de la varianza para los coeficientes de reflexión (Ferber, 1985). Si se usa como estimación de la varianza el cuadrado de los coeficientes de reflexión reales, ésta variación se considera la varianza real. Igualmente, si a $r(j)$ se le considera la varianza para $\hat{r}(j)$, es decir, $E[\hat{r}(j)] = r(j)$ donde E denota esperanza matemática de $\hat{r}(j)$, se suma la varianza a $r^2(j)$. Esto es, $E[\hat{r}(j)]=r^2(j) + V[r(j)]$, donde V denota el operador varianza.

Junto con la estimación de la varianza de los coeficientes de reflexión estimados, es posible decidir si los coeficientes de reflexión son significativamente diferentes del ruido o no, seleccionándolos para hacerlos cero. Para esta prueba los coeficientes de reflexión se comparan con la escala estándar de desviación de la varianza estimada. El factor de escala c usualmente varía entre 2 y 4.

La iteración estabilizada es (Ferber, 1985):

Inicio

Estimar σ^2 para la variación de ruido y c>0

$$r(0) = x(1), \quad v(0) = 1 - r^2(0) + \sigma^2 \quad \ldots (2.3a)$$

Prueba

$$|r(0)| < c\sigma \Rightarrow r(0) = 0 \text{ y } v^2(0) = 1 \quad \ldots (2.3b)$$

$$P(0,Z) = 1 \text{ y } Q(0,Z) = 0 \qquad . . . (2.3c)$$

Desde k hasta k+1

$$r(k+1) = \frac{1}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} P(k,j)\, x(k+1-j), \qquad . . . (2.3d)$$

$$e^2(k+1) = \frac{\sigma^2}{v^2(k)} \sum_{j=0}^{k-1} p^2(k,j), \qquad . . . (2.3e)$$

$$v^2(k+1) = [1 - r^2(k + 1) + e^2(k+1)]v^2(k) \qquad . . . (2.3f)$$

Prueba

$$|r(k+1)| < c2(k+1) \Rightarrow r(k+1) = 0 \text{ y } v^2(k+1) = v^2(k), \qquad . . . (2.3g)$$

$$P(k+1,Z) = P(k,Z) - r(k + 1)ZQ^R(k,Z),$$
$$Q(k+1,Z) = Q(k,Z) - r(k + 1)ZP^R(k,Z). \qquad . . . (2.3h)$$

Con ésto podemos realizar la inversión mediante deconvolución dinámica.

2.2

FILTRO INVERSO

Los sismogramas sintéticos unidimensionales de incidencia normal para una tierra con estratificación horizontal, perfectamente acústica, integran la esencia en la construcción del modelo convolucional de la tierra. Robinson (1975) y Robinson y Treitel (1977) han emprendido la revisión de la teoría básica y la han expresado en el lenguaje de los ingenieros en comunicación. Además, han puesto particular énfasis en el flujo de energía en un medio estratificado, el cual introduce la definición de la función espectral descendente neta. Ésta cantidad iguala la diferencia entre la energía descendente y ascendente en cualquier capa y es la propiedad de un espectro de energía. Es decir, es no negativa para todas las frecuencias. En particular, la función espectral neta de la capa superior es llamada función espectral del medio estratificado. En éstos artículos los autores demuestran que ésta función espectral sirve de punto de partida para la inversión unidimensional recursiva de sismogramas marinos de incidencia normal, para la cual el coeficiente de reflexión en la superficie es $c_o = \pm 1$. Ésta tarea es perfecta para la generación de los filtros de predicción de error de incrementos sucesivos de longitud, los cuales producen los coeficientes de reflexión estimados y sucesivos incrementos de profundidad.

2.2.1

LA RECURSIÓN DE LEVINSON Y LA RECURSIÓN INVERSA

Considerando la solución de las ecuaciones normales, es decir, la determinación de la varianza v y la deconvolución o determinación del operador de predicción de error a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} (donde $a_o = 1$) para las ecuaciones normales (Apéndice B)

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \phi_1 & \cdots \phi_n \\ \phi_1 \phi_0 & \cdots \phi_{n-1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot \quad \cdot & \\ \phi_n \phi_{n-1} & \cdots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n0} \\ a_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad \ldots (2.4)$$

donde ϕ es la autocorrelación del sismograma, a es el filtro que se desea obtener y V es la varianza de predicción de error.

Ésta forma de escribir las ecuaciones normales utiliza la propiedad de simetria de la autocorrelación ($\phi_t = \phi_{-t}$). La matriz cuadrada de los coeficientes de autocorrelación es simétrica y puede resolverse con la recursión de Levinson tal como lo describe Robinson (1967) y Robinson y Treitel (1978). Ésta recursión procede a través de k = 0, 1, 2, ..., n. En cada paso se tienen tres entidades llamadas la varianza, la discrepancia y el operador de coeficientes que se utilizan para el cálculo de las correspondientes cantidades modificadas del siguiente paso. Se asume que los coeficientes de autocorrelación son conocidos. Los coeficientes del operador obtenidos en el paso final se requieren para los coeficientes del operador de deconvolución.

Ahora, describiendo la recursión de Levinson para los pasos k. a k + 1. En el paso k se tienen los valores numéricos de

varianza: υ_k
operador: $\alpha_{k0}, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kk}$ (con $\alpha_{k0} = 1$)
discrepancia: Δk

La varianza y el operador se definen como las ecuaciones normales de orden k; la discrepancia se define como una ecuación adicional anexada al final de las ecuaciones normales. Más especificamente, la varianza, operador y discrepancia dan los valores numéricos que satisfacen los argumentos de las ecuaciones normales de orden k dadas por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_k & \phi_{k+1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \cdots & \phi_{k-1} & \phi_k \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \phi_k & \phi_{k-1} & \cdots & \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_{k+1} & \phi_k & \cdots & \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{kk} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_k \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \Delta_k \end{bmatrix}.$$

Ahora, manipulando los argumentos de las ecuaciones normales de orden k para obtener las ecuaciones normales de orden k+1. Éstas se expresan como

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_k & \phi_{k+1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \cdots & \phi_{k-1} & \phi_k \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \phi_k & \phi_{k-1} & \cdots & \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_{k+1} & \phi_k & \cdots & \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k0} & & \\ \alpha_{k1} & - \gamma_{k+1} & \alpha_{kk} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \alpha_{kk} & - \gamma_{k+1} & \alpha_{k1} \\ 0 & - \gamma_{k+1} & \alpha_{k0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_k - \gamma_{k+1} & \Delta_k \\ & 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & 0 \\ \Delta_k - \gamma_{k+1} & V_k \end{bmatrix}$$

donde ésta ecuación matricial representa las ecuaciones normales de orden k+1 dando la última entrada en el lado derecho igual a cero, esto es

$$\Delta_k - \gamma_{k+1} + V_k = 0.$$

Ésta ecuación sirve para definir γ_{k+1} como la relación de la discrepancia previa con la varianza previa. Así, se van sumando los cálculos para el paso k al k+1 como sigue:

Dados V_k, α_{ki} y Δ_k, primero se calcula la relación

$$\gamma_{k+1} = \frac{\Delta k}{V k}$$

con γ_{k+1} así determinado, la nueva varianza y el nuevo operador se calculan en la forma:

$$V_{k+1} = V_k - \gamma_{k+1}\,\Delta_k = V_k(1 - \gamma^2_{k+1})$$

$$\alpha_{k+1,0} = \alpha_{k0} = 1$$

$$\alpha_{k+1,1} = \alpha_{k1} - \gamma_{k+1}\,\alpha_{kk}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{k+1,k} = \alpha_{kk} - \gamma_{k+1}\,\alpha_{k1}$$

$$\alpha_{k+1,k+1} = -\gamma_{k+1}\,\alpha_{k0} = -\gamma_{k+1}.$$

La nueva discrepancia es entonces la calculada en la forma

$$\Delta_{k+1} = \alpha_{k+1,0}\,\phi_{k+2} + \alpha_{k+1,1}\,\phi_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+1,k+1}\,\phi_1.$$

Ésto completa los cálculos para los pasos k a k+1. Inicialmente para k = 0 se tiene

$$V_0 = \phi_0, \qquad \alpha_{00} = 1 \text{ y } \qquad \Delta_0 = \phi_1.$$

La recursión procede entonces para k=1, 2, ..., n. En k = n el operador Toeplitz α_{n0}, α_{n1}, α_{n2}, ..., α_{nn} satisface la ecuación normal (2.4) y aquí se requiere el operador de predicción de error

$$\alpha_{n0} = a_{n0} = 1\ ,\ \alpha_{n1} = a_{n1},\ \ldots,\ \alpha_{nn} = a_{nn}.$$

Así, para orden n, los coeficientes del operador de Toeplitz α_{ni} y los coeficientes del operador de predicción de error a_{ni} que constituyen An(z) son los mismos. Con el operador de predicción de error fundamentado, deconvolucionando la traza sísmica en superficie, se obtiene

$A_n V_1 = -Q_n \varepsilon$.

En este punto se asume que la fuente impulsiva c es unitaria (ε = 1) y que se conoce el valor del coeficiente de reflexión c_0 en la superficie. De la deconvolución se sabe que $-Q_n\varepsilon = Q_n$. Así, se puede sumar c_0Q_n a $A_n = P_n - c_0Q_n$ para obtener

$$A_n + c_0Q_n = (P_n - c_0Q_n) + c_0Q_n = P_n.$$

Se tienen P_n y Q_n y los coeficientes de Z^n en Q_n son $-c_n$. También se tienen los coeficientes de reflexión c_n. Con ésto conocido se pueden utilizar las ecuaciones de recursión inversa para hallar P_{n-1}, Q_{n-1} y los coeficientes de reflexión c_{n-1}, y así sucesivamente, hasta obtener $P_1 = 1$, $Q_1 = -c_1Z$ y el coeficiente de reflexión c_1. Finalmente, se sabe que $P_0 = 1$ y $Q_0=0$.

Ya que $A_k = P_k - c_0Q_k$ y la secuencia de P_k y Q_k son determinados por la recursión inversa dada, usando la secuencia A_k para k=0, 1, 2, ..., n. Esto es, la recursión inversa de una secuencia del operador. También se tiene la secuencia de operadores de la recursión de Levinson como se ilustra en la Tabla 1a.

Tabla 1a

RECURSIÓN INVERSA	RECURSIÓN DE LEVINSON
a_{00}	α_{00}
a_{10}, a_{11}	α_{10}, α_{11}
a_{20}, a_{21}, a_{22}	α_{20}, α_{21}, α_{22}
.	.
.	.
.	.
$a_{n-1,0}$, $a_{n-1,1}$, ..., $a_{n-1,n-1}$	$\alpha_{n-1,0}$, $\alpha_{n-1,1}$, ..., $\alpha_{n-1,n-1}$
a_{n0}, a_{n1}, ..., a_{nn}	α_{n0}, α_{n1}, ..., α_{nn}

Sabemos que en el inicio y en el final de los operadores de la recursión inversa y la recursión de Levinson es la misma. Cada secuencia se asocia con la secuencia de constantes, como se ilustra en la tabla siguiente:

Tabla 1b

RECURSIÓN DIRECTA	RECURSIÓN DE LEVINSON
c_0 = Cantidad dada	—
c_1	γ_1
c_2	γ_2
.	.
.	.
.	.
c_{n-1}	γ_{n-1}
c_n	$\gamma_n = -c_0 c_n$

En la recursión inversa las constantes son los coeficientes de reflexión c_i, mientras que en la recursión de Levinson las constantes son las relaciones γ_i de la discrepancia previa con la varianza previa. Para hacer uso de la recursión inversa se supone que se conoce el coeficiente c_0 y no γ_0. En otras palabras, cada recursión determina las respectivas constantes sólo para $i = 1$. En la Tabla 1b se indica que $\gamma_n = -c_0 c_n$. Esta igualdad puede establecerse como sigue: el polinomio de predicción de error es $A_n(z) = P_n(z) - c_0 Q_n(z)$, y el término de $P_n(z)$ es cero mientras que el último término de $Q_n(z)$ es $-c_n Z^n$ y tenemos que $a_{nn} = -\gamma_n$ porque los operadores de orden n son los mismos. Es decir, α_{nn} = a_{nn} que es la igualdad requerida.

2.2.2

ITERACIÓN DEL FILTRO INVERSO

La ecuación anterior se resuelve mediante la recursión de Levinson. La recursión es (Ferber, 1985):

Inicio

$$v(0) = \phi(0), \; a(0,0) = 1 \text{ y } \Delta(0) = \phi(1) \quad \ldots \; (2.5a)$$

Desde k hasta k+1

$$\gamma(k+1) = \frac{\Delta(k)}{V(k)}, \quad \ldots \; (2.5b)$$

$$v(k+1) = v(k) - \Delta^2(k) / v(k), \quad \ldots \; (2.5c)$$

$$a(k+1,0) = a(k,0) = 1$$

$$a(k+1,j) = a(k,j) - \gamma(k+1)\, a(k+1-j), \; (j = 1, \ldots, k)$$

$$\ldots \; (2.5d)$$

$$a(k+1,k+1) = -\gamma(k+1),$$

$$\Delta(k+1) = \sum_{j=0}^{k+1} a(k+1,j)\, \phi(k+2-j) \quad \ldots \; (2.5e)$$

donde $a(n,1), \ldots, a(n,n)$ y $v(n)$ son la solución final.

2.2.3

RECURSIÓN DE LEVINSON ESTABILIZADA

Si $\Phi(Z)$ denota la función espectral calculada del sismograma ruidoso y σ^2 una estimación para la varianza del ruido. Entonces,

$$\psi(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-j} w(k)\, w(k+j)$$

se utiliza para estimar la función de autocovarianza del proceso del ruido blanco. La varianza de ésta estimación se calcula por (Ferber, 1985)

$$V[\psi(j)] \approx \sigma^2 / m.$$

El problema para encontrar a(n,1), ..., a(n,n) y v(n) (2.4), se resuelve con la recursión de Levinson estabilizada.

Como con la deconvolución dinámica, la estabilización no remueve la varianza en su término cuadrático. Es decir, la varianza se usa como estimación de la discrepancia cuadrática. La varianza estimada se usa nuevamente para probar la discrepancia, resultando en una prueba para los coeficientes parciales de correlación, la cual se marca con cero si la discrepancia no es significativamente diferente del ruido.

Empezar con la función espectral valuada en cero es correcto. La expresión matemática está dada por

$$E[\phi(0)] = \phi(0) - \sigma^2 \qquad . . . (2.6)$$

y resulta en la estimación

$$E[\phi(0) + \sigma^2] = \phi(0) \qquad . . . (2.7)$$

que da una nueva justificación estadística de la conocida estabilización por preblanqueo (Ferber, 1985).

La estabilización es:

Inicio

$$v(0) = \phi(0) + \sigma^2, \quad a(0,0) = 1 \text{ y } \Delta(0) = \phi(1) \qquad \ldots \; (2.8a)$$

$$s = \sigma^2 / m \quad \text{y} \quad d = s$$

Prueba

$$|\Delta(0)| < cd \Rightarrow \Delta(0) = 0 \qquad \ldots \; (2.8b)$$

Para k hasta k+1

$$\gamma(k+1) = 0$$
$$v(k+1) = v(k),$$
$$a(k+1,j) = a(k,j) \quad (j=0, \ldots, k),$$
$$a(k+1),k+1) = 0 \qquad \ldots \; (2.8c)$$

Si $\Delta(k) = 0$ ir a (2.8g).

$$\gamma(k+1) = \frac{\Delta(k)}{v(k)}, \qquad \ldots \; (2.8d)$$

$$v(k+1) = v(k) - (\Delta^2(k) - d) / v(k), \qquad \ldots \; (2.8e)$$

$$a(k+1,j) = a(k,j) - \gamma(k+1)\, a(k+1-j), \qquad (j=1, \ldots, k)$$

$$a(k+1,k+1) = -\gamma(k+1), \qquad \ldots \; (2.8f)$$

$$\Delta(k+1) = \sum_{j=0}^{k+1} a(k+1),j)\, \phi(k+2-j), \qquad \ldots \; (2.8g)$$

$$d = s\, [\sum_{j=0}^{k+1} a^2(k+1,j)], \qquad \ldots \; (2.8h)$$

Prueba

$$|\Delta(k+1)| < cd \Rightarrow \Delta(k+1) = 0. \qquad \text{. . . (2.81)}$$

Este proceso se demuestra con los sismogramas ruidosos de los ejemplos 5,6,7,8 (Capitulo 4) obtenidos mediante recursión de Levinson estabilizada, y conduce a una buena estimación de los coeficientes del filtro inverso como en el caso no estabilizado (con la aproximación relativa de la secuencia de los coeficientes de reflexión).

CAPÍTULO 3

INVERSIÓN DE SISMOGRAMAS DE SEUDOREFLEXIÓN

La ecuación de Kunetz-Claerbout para el problema de transmisión acústica en un medio estratificado establece la relación entre la respuesta de transmisión y de reflexión para incidencia vertical de ondas P en un medio estratificado horizontalmente. Además, expresa que el sismograma de reflexión, debido a una fuente impulsiva en la superficie, es una parte de la correlación del sismograma debido a una fuente impulsiva a profundidad y un receptor en superficie. Por adaptación de la ecuación a la transmisión de ondas SH, la ecuación de Kunetz-Claerbout puede utilizarse para coeficientes de reflexión y transmisión dependientes del ángulo de incidencia. Así, los sismogramas de transmisión SH pueden ser utilizados para calcular el correspondiente sismograma de seudoreflexión, que puede ser invertido para conocer la estructura de impedancia al utilizar el algoritmo de Levinson. Si el ángulo de incidencia es conocido, una corrección geométrica en el modelo de impedancia resultante puede mejorar la resolución del espesor de las capas. En contraste a la inversión de sismogramas de reflexión, el algoritmo de Levinson muestra resultados estables en la inversión de sismogramas de transmisión con presencia de ruido adicional. Esta estabilización de ruido es inherente a la ecuación de Kunetz-Claerbout para sismogramas de ondas SH (Scherbaum, 1987a, b, c).

Las ondas SH de registros locales sugieren aplicaciones importantes. Debido a la falta de conversión de modos, su incidencia oblicua puede tratarse fácilmente. Los trabajos de Scherbaum (1987a, b, c) muestran la aplicación de la ecuación de Kunetz-Claerbout a la inversión de sismogramas ruidosos ante incidencia oblicua de ondas SH.

La ecuación de Kunetz-Claerbout, en su forma original, da la relación entre la respuesta de reflexión de un medio estratificado horizontalmente para incidencia vertical de ondas P y la correspondiente respuesta de transmisión. Considerando las propiedades de reflexión y transmisión para ondas SH, una ecuación equivalente puede usarse si se restringe para ángulos de incidencia subcritica. Para cualquier interfase, los coeficientes de transmisión y reflexión r', t' y r, t para la incidencia de arriba y abajo, respectivamente, están dados por

$$r' = \frac{\rho_1 V_1 \cos(\phi_1) - \rho_2 V_2 \cos(\phi_2)}{\rho_1 V_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 V_2 \cos(\phi_2)} \qquad \ldots (3.1)$$

$$t' = \frac{2 \rho_1 V_1 \cos(\phi_1)}{\rho_1 V_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 V_2 \cos(\phi_2)} \qquad \ldots (3.2)$$

$$r = r' \qquad \ldots (3.3)$$

$$t = \frac{2 \rho_2 V_2 \cos(\phi_2)}{\rho_1 V_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 V_2 \cos(\phi_2)}, \qquad \ldots (3.4)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 denotan los ángulos de incidencia en respecto a la vertical, ρ_1 y ρ_2 las densidades y V_1 y V_2 la velocidades de fase en el medio superior e inferior de la interfase, respectivamente. Dado que la amplitud de onda debe ser continua a traves de la interfase, se tiene

$$t = 1 + r \qquad \ldots (3.5)$$

$$t' = 1 + r' \,. \qquad \ldots (3.6)$$

Usando (3.1) - (3.6), las porciones de ascenso (U,U') y descenso (D,D') del campo de ondas en el medio primario y no primario se puede escribir como

$$U' = tU + r'D' \qquad \ldots (3.7)$$

$$D = rU + t'D' \,. \qquad \ldots (3.8)$$

Combinando (3.5)-(3.8) se obtiene

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}' = \frac{1}{t'} \begin{bmatrix} 1 & r' \\ r' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} . \qquad \ldots (3.9)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión para las ondas SH del problema (3.9) dependen de los ángulos de incidencia individuales, donde para la k'esima capa es

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}'_{k+1} = \frac{1}{t'_k} \begin{bmatrix} 1 & r' \\ r' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k$$

de donde, para despejar la matriz de U y D,

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -1 & r' \\ 0 & t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ -c' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}$$

Simplificando (Claerbout, 1976)

$$\begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}'_{k+1} = \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{-1/2} & 0 \\ 0 & Z^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k =$$

$$= \frac{1}{t_k\, Z^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & c_k \bar{Z} \\ c_k & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k . \qquad \ldots (3.10)$$

y, por conservación de energia,

$$\text{Flujo}(w) = Y_k\, (U(Z)\, \tilde{U}(1/Z) - D(Z)\, \tilde{D}(1/Z))_k .$$

Ahora, tomando la conjugada Hermitiana de (3.10) (Claerbout, 1976)

$$\begin{bmatrix} U(1/Z) & D(1/Z) \end{bmatrix}_{k+1} = \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} U(1/Z) & D(1/Z) \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} Z^{1/2} & c_k Z^{1/2} \\ c_k Z^{-1/2} & Z^{-1/2} \end{bmatrix}$$

y, combinándola con (3.10),

$$\begin{bmatrix} U(1/Z) & D(1/Z) \end{bmatrix}_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(Z) \\ V(Z) \end{bmatrix}_{k+1} =$$

$$\frac{1}{t_k^2} \begin{bmatrix} \bar{U} & \tilde{D} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 - c_k^2 & 0 \\ 0 & c_k^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}_k$$

y, como $(1 - c_k^2) / t_k^2 = t'_k / t_k = Y_k / Y_{k+1}$,

$$Y_{k+1} \Big[U(1/Z)\, \bar{U}(Z) - D(1/Z)\, D(Z) \Big]_{k+1} = Y_k \Big[U(1/Z)\, \bar{U}(Z) - D(1/Z)\, D(Z) \Big]_k$$

Finalmente, poniendo todo en función de Y_1

$$Y_1 \Big\{ R(1/Z)\, R(Z) - \Big[1 + R(1/Z) \Big] \Big[1 + R(Z) \Big] \Big\} = -Y_k\, E(1/Z)\, E(Z)$$

o bien,

$$1 + R(Z) + R(1/Z) = \frac{Y_k}{Y_1} \left(X(Z)\, X(1/Z) \right)$$

y, si $Y_k / Y_1 = 1 / (\pi\, dt)$, entonces

$$1 + R(Z) + R(1/Z) = \frac{1}{\pi\, dt} \left(X(Z)\, X(1/Z) \right), \qquad . \; . \; . \; (3.11)$$

donde $R(Z)$ es la transformada Z de la respuesta de reflexión, $X(Z)$ es la transformada Z de la respuesta de transmisión y $\pi\, dt$ es la matriz de capa.

La ecuación (3.11) establece el importante resultado que la parte causal de la autocorrelación del sismograma de transmisión SH para una fuente impulsiva en la profundidad y un receptor en superficie es igual al sismograma de reflexión de ondas SH para una fuente impulsiva en superficie y un receptor en superficie. Así, los sismogramas de transmisión para fuentes impulsivas a profundidad pueden ser usados para calcular el correspondiente sismograma de reflexión.

Los sismogramas de "seudoreflexión" pueden invertirse para obtener las correspondientes series de coeficientes de reflexión en la misma forma que se procede para invertir sismogramas de reflexión para fuentes y receptores en la superficie (Scherbaum 1987a). La estructura Toeplitz del sistema de ecuaciones permite utilizar eficientemente el algoritmo de Levinson. Los coeficientes de reflexión pueden calcularse, sucesivamente, a partir de los coeficientes de un filtro de predicción de error para el sismograma de transmisión y la influencia de cada capa se considera en forma recursiva.

El contenido de frecuencias de los coeficientes de seudoreflexión se distorsiona levemente debido al método de síntesis. Si el ángulo de incidencia se conoce, el espesor puede ser corregido por una simple corrección geométrica con el factor $1/\cos(\phi)$, donde ϕ es el ángulo de incidencia. Para datos ruidosos, el mayor problema con la inestabilidad del algoritmo de Levinson se reporta con la inversión de los sismogramas de reflexión 'real'. Scherbaum (1987a) mostró que cuando ocurre inestabilidad la matriz Toeplitz está mal condicionada.

Si el sismograma de transmisión ruidoso $f(t)$ se considera como la superposición de una señal libre de ruido $s(t)$ y el ruido blanco no correlacionado $n(t)$, este puede escribir como

$$f(t) = s(t) + n(t) \qquad \ldots (3.12)$$

Tomando la función de autocorrelación de Papoulis

$$R_{ff}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau), \qquad \ldots (3.13)$$

donde $R_{ff}(\tau)$, $R_{ss}(\tau)$ y $R_{nn}(\tau)$ son las funciones de autocorrelación de la señal compuesta, la señal libre de ruido, y el ruido, respectivamente, y $R_{sn}(\tau)$ y $R_{ns}(\tau)$ son las funciones de correlación de la señal libre de ruido y el ruido. Dado que se asume que el ruido no está correlacionado, su autocorrelación es esencialmente un pulso en un tiempo de retraso cero y su amplitud es una medida de la función del ruido. La función de correlación R_{sn} se relaciona con la función de autocorrelación de la señal individual de la siguiente expresión (Scherbaum, 1987c)

$$R_{sn}(\tau)^2 \leq R_{ss}(\tau)\ R_{nn}(\tau) \qquad \ldots (3.14)$$

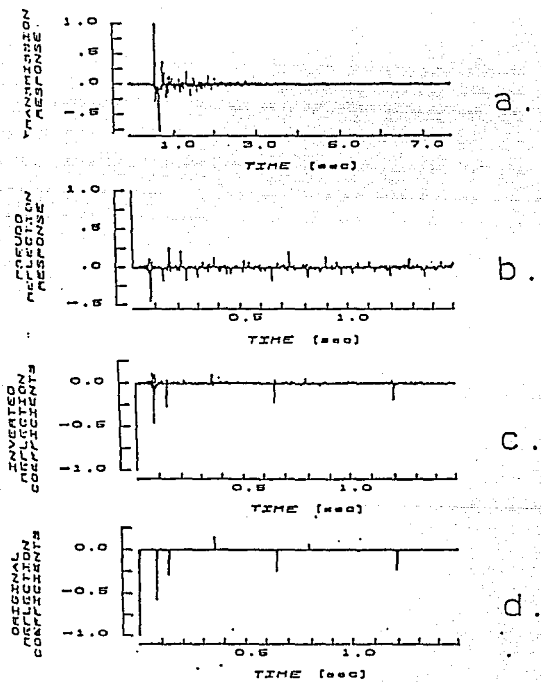
Ya que $R_{nn}(\tau)$ desaparece para retrasos de tiempo diferentes de cero, R_{sn} también se reduce a un impulso mayor que cero solamente para retrasos en tiempos mucho mayores de cero. Así, (3.11) se reduce a

$$\begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= R_{ss}(\tau) + \text{constante para } \tau = 0 \\ &= R_{ss}(\tau) \text{ para } \tau \neq 0. \end{aligned}$$

Para no correlacionar el ruido, los sismogramas originales deben utilizarse solo para el cálculo del primer coeficiente de reflexión. En la práctica esto no sucede pero en la inversión de Levinson la influencia del ruido se reduce drásticamente para la respuesta de seudoreflexión.

La aplicación de la ecuación de Kunetz-Claerbout para el problema de incidencia subcritica de ondas SH ofrece una oportunidad para invertir los sismogramas de transmisión de temblores para coeficientes de reflexión subyacentes. Además, desde el primer paso en el cálculo de seudoreflejos (el cálculo de la función de autocorrelación) el efecto del ruido en los datos se reduce drásticamente. Así, la ecuación de Kunetz-Claerbout ofrece una estabilización inherente de ruido para la inversión de sismogramas de transmisión.

La aplicación a registros de microtemblores obtenida por los registros de sitio (Scherbaum, 1987) ofrece una oportunidad para comparar los resultados de la inversión de Levinson realizada con datos reales del registro sónico como se muestra en la siguiente figura tomada de Scherbaum (1987a).



CAPITULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 DECONVOLUCION DINAMICA

Para probar la efectividad del algoritmo de deconvolución dinámica se realizaron cuatro ejemplos con sismogramas sintéticos. En la Figura 1 se muestra el ejemplo 1 en el que se grafica el sismograma sintético (Figura 1b) que se obtuvo para los coeficientes de reflexión (Figura 1a) correspondientes a la estratigrafía usada en el trabajo de Ferber (1985). A partir de este sismograma se realizó la inversión unidimensional mediante el método de deconvolución dinámica. En la Figura 1c se muestran los resultados de este procedimiento sin estabilización y en la Figura 1d el mismo proceso pero estabilizado. Se nota que la diferenciaes mínima diferencia alguna entre estas dos últimas gráficas ya que al no existir ruido no hay inestabilidad numérica.

En la Figura 2a se muestra el sismograma sintético con el que se realizó el ejemplo 2. Este se generó con el sismograma del ejemplo anterior, pero agregando un nivel de ruido de 1% con respecto a la amplitud máxima de la señal (Figura 2b). Al realizar el proceso de inversión no estabilizada (Figura 2c) se notan unos seudocoeficientes de amplitud pequeña, pero claramente distinguibles, que son producto del ruido. En el caso de la inversión estabilizada (Figura 2d) se aprecia la ventaja de este proceso ya que la inversión es "correcta" y no existen coeficientes falsos.

En el ejemplo 3 el sismograma (Figura 3a) tiene un nivel de 5% de ruido aditivo (Figura 3b) que se distingue fácilmente. Al

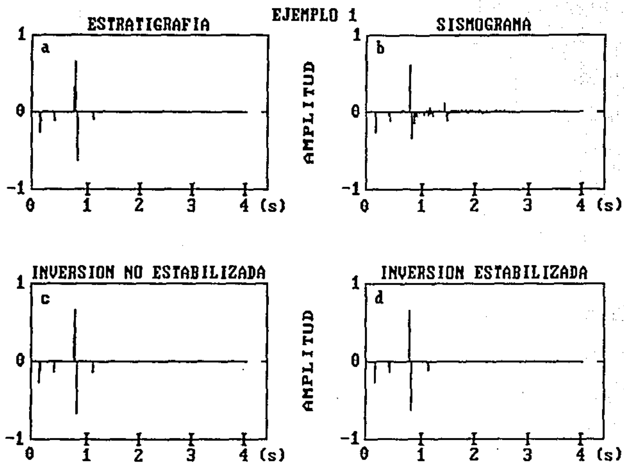


FIGURA 1.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS SIN RUIDO, MEDIANTE DECONVOLUCION DINAMICA

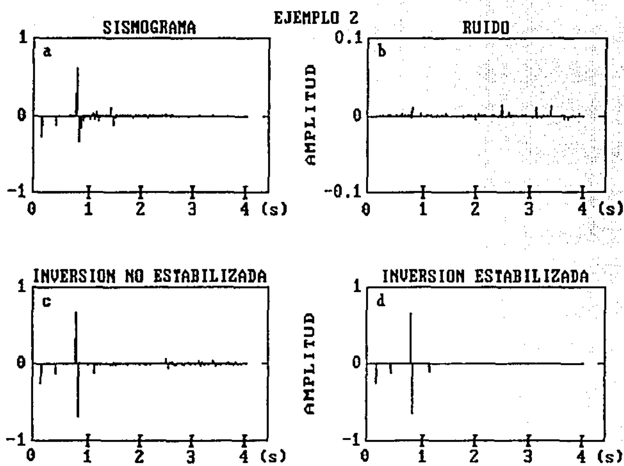


FIGURA 2.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON NIVEL BAJO DE RUIDO, MEDIANTE DECONVOLUCION DINAMICA

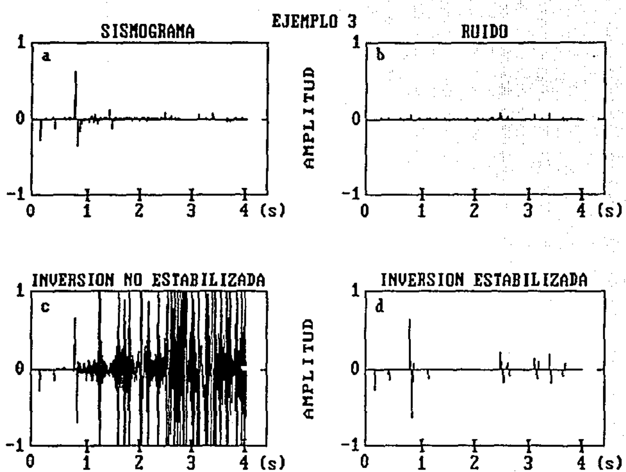


FIGURA 3 -EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON NIVEL MEDIO DE RUIDO, MEDIANTE DECONVOLUCION DINAMICA realizar la inversión sin el proceso de estabilización (Figura 3c) los resultados presentan problemas claros de inestabilidad por lo que son poco útiles, pero al realizar la inversión con el algoritmo de estabilización (Figura 3d) los problemas de estabilidad después de 1 segundo se corrigen.

En el caso del ejemplo 4, el sismograma (Figura 4a) tiene un nivel de ruido (Figura 4b) del 10% y se aprecia claramente el problema de la inestabilidad (Figura 4c) porque existen problemas de coeficientes falsos prácticamente en toda la columna. En el caso del procedimiento estabilizado (Figura 4d) la diferencia es notable aunque no se logra una inversión perfecta debido al alto nivel de ruido. Al final de la columna invertida con estabilización aparece un evento grande que se debe al contenido de energía del ruido que al final se acumula.

Después del desarrollo y análisis de estos cuatro ejemplos podemos darnos cuenta de que el algoritmo de inversión sin estabilizar es efectivo sólo en casos en los que no existe presencia de ruido, ya que aun con un nivel bajo de ruido (1%) existen problemas y se generan coeficientes falsos, mientras que el algoritmo de estabilización funciona bastante bien hasta con un nivel de ruido del 10%. Esto no ofrece resultados perfectos, pero si de buena calidad para una inversión tan simple y rápida como esta. Con este método se pueden obtener resultados confiables cuando el sismograma tiene un nivel de ruido de hasta 10-15%, que en muchos casos se considera alto, razón por la que podría aplicarse a sismogramas reales.

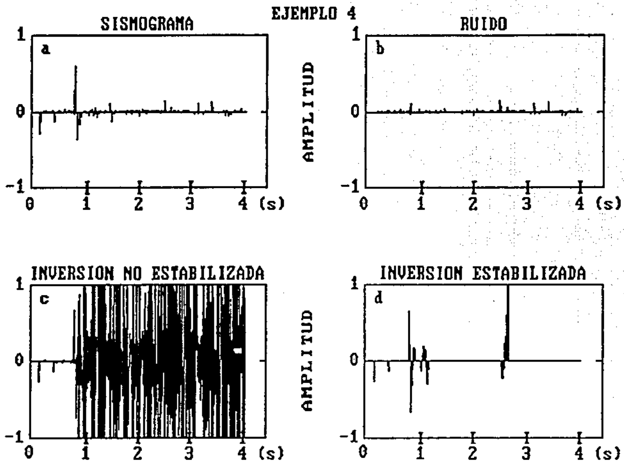


FIGURA 4.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON NIVEL ALTO DE RUIDO; MEDIANTE DECONVOLUCION DINAMICA

4.2 FILTRO INVERSO

En los ejemplos en los que se realizó el procedimiento del filtro inverso o de Wiener se distingue que el proceso, por su naturaleza, no es tan exacto como en el caso de la deconvolución dinámica, ya que primero se genera un filtro, que no es exacto, que después se aplica a la señal.

En el ejemplo 5 podemos apreciar los resultados de la inversión al no existir ruido, notando que la aproximación es buena. En la Figura 5 podemos apreciar los coeficientes correspondientes a la estratigrafía supuesta (Figura 5a) tomada de Ferber (1985), el sismograma generado con esta estratigrafía (Figura 5b), el filtro que se genera con el método descrito (Figura 5c) y la inversión lograda al aplicar este filtro al sismograma (Figura 5d).

En el ejemplo 6 se ven los efectos de inestabilidad por la presencia de ruido. En la Figura 6 se muestran el sismograma original sumando el mismo nivel de ruido del ejemplo 2 (Figura 2b). Se aprecia que el filtro generado (Figura 7a) tiene variaciones que no se presentan en el caso sin ruido. Además, se notan seudoreflejos en la inversión generada (Figura 7b) que no existen en la estratigrafía real ni en la inversión sin ruido. En el procedimiento estabilizado se aprecia como el filtro (Figura 7c) tiene menos variaciones y, por lo tanto, la inversión (Figura 7d) tiene un aspecto más limpio y no existen tantos seudocoeficientes de reflexión.

Apartir del ejemplo 7 se aprecia la efectividad del método. En la Figura 8 se muestra el sismograma más el nivel de ruido utilizado en el ejemplo 3 (Figura 3b). En este caso se aprecia como aumentan los problemas inducidos por el ruido, ya que en el

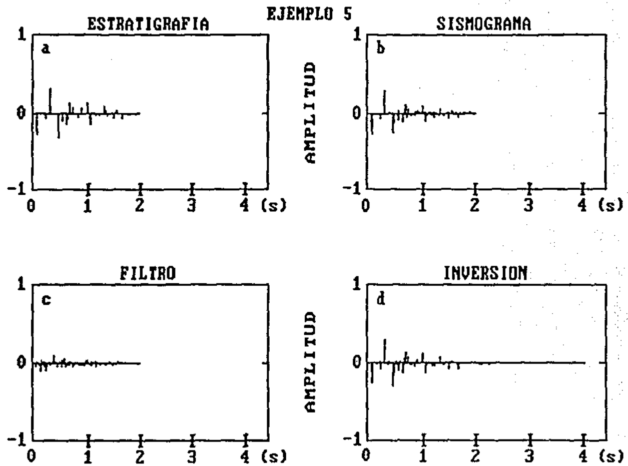


FIGURA 5.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS SIN RUIDO, MEDIANTE FILTRO INVERSO

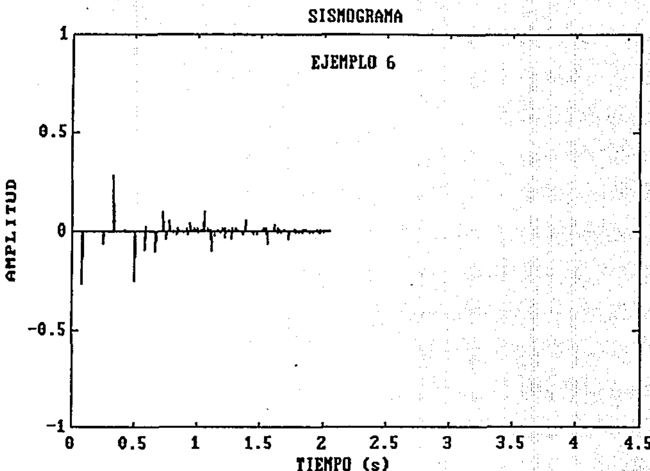


FIGURA 6.- SISMOGRAMA PARA INVERSION CON UN NIVEL BAJO DE RUIDO

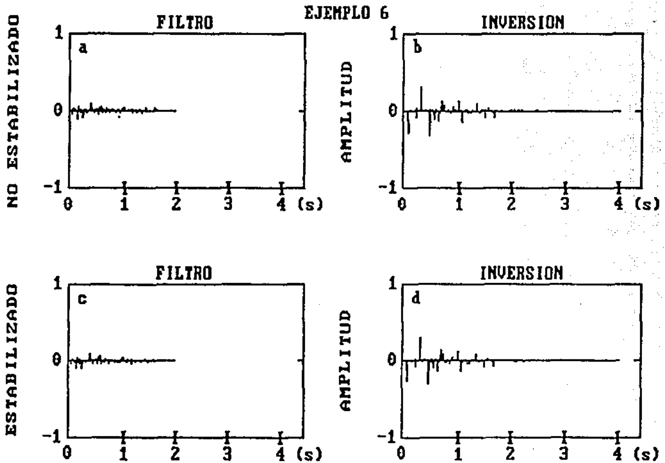


FIGURA 7.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON UN NIVEL BAJO DE RUIDO, MEDIANTE FILTRO INVERSO

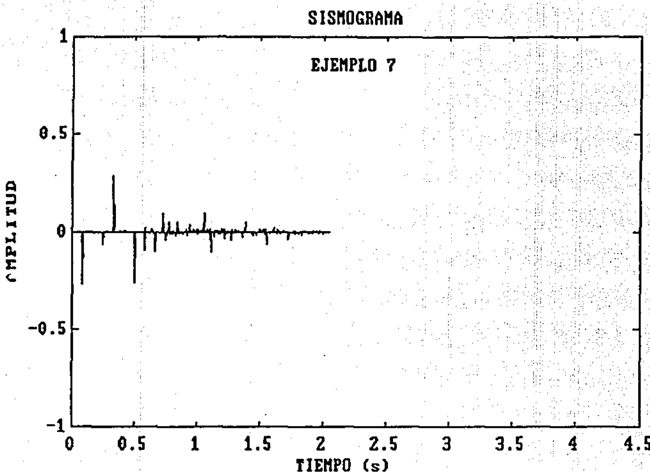


FIGURA 8.- SISMOGRAMA PARA INVERSION CON UN NIVEL MEDIO DE RUIDO

filtro generado (Figura 9a) se nota el grado de inestabilidad debido a una mayor cantidad de ruido. Esto repercute en la inversión (Figura 9c) porque existe una mayor presencia de coeficientes falsos. En el caso donde se aplica el algoritmo con la técnica de estabilización se nota como disminuyen los problemas de inestabilidad. En la Figura 9c se muestra el filtro generado con este algoritmo y se distingue claramente una menor variación en él, así como también en la inversión obtenida (Figura 9d) que representa los reflejos en una forma más limpia.

En un caso extremo (Figura 10) se aprecia la gran inestabilidad que existe en el filtro (Figura 11a) y, consecuentemente, en los coeficientes (Figura 11b) obtenidos en la inversión. En la Figura 11c podemos apreciar la estabilización del filtro (Figura 11c) y sus resultados (Figura 11d).

Como se aprecia, el intervalo de precisión es aproximadamente el mismo (10-15% de ruido) en el filtro inverso y en la deconvolución dinámica, pero la precisión es mayor en el caso de la deconvolución dinámica, por las razones ya expuestas. A pesar de la simplicidad de los métodos, estos son efectivos en la inversión de sismogramas de reflexión siempre y cuando se tenga en un nivel de ruido del 10-15% con respecto a la amplitud máxima del sismograma.

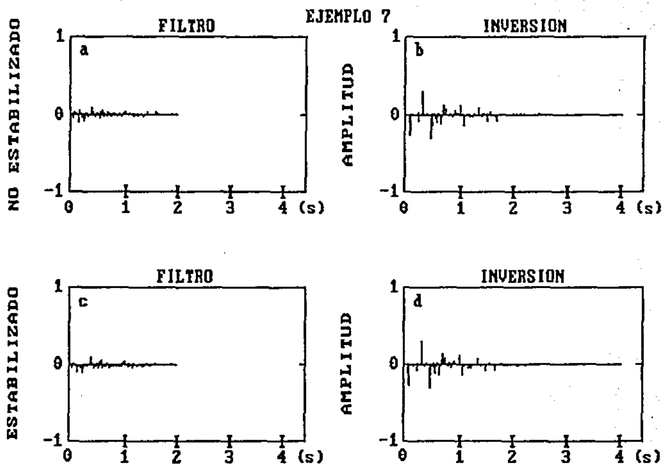


FIGURA 9.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON UN NIVEL MEDIO DE RUIDO, MEDIANTE FILTRO INVERSO

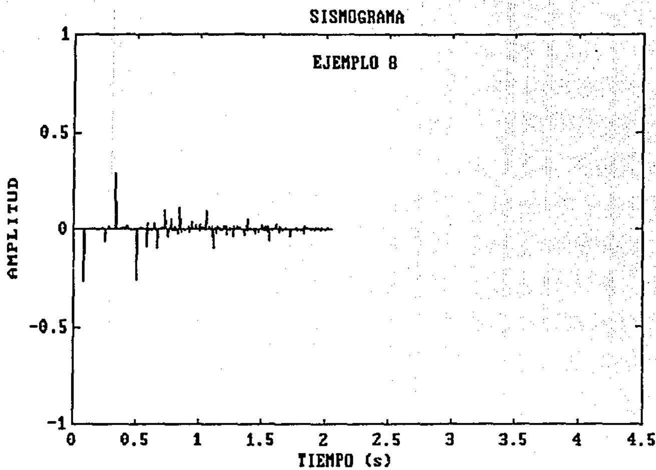


FIGURA 10.- SISMOGRAMA PARA INVERSION CON UN NIVEL ALTO DE RUIDO

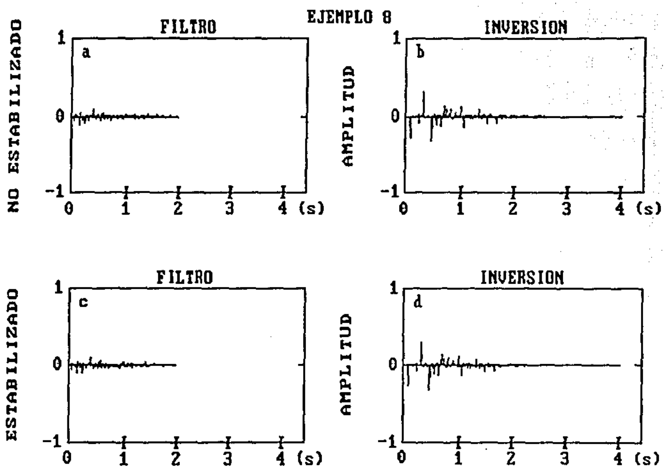


FIGURA 11.-EJEMPLO EN EL QUE SE MUESTRA LA INVERSION EN SISMOGRAMAS CON UN NIVEL ALTO DE RUIDO, MEDIANTE FILTRO INVERSO

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

La estabilización de la inversión de un sismograma debido a la remoción de la varianza inducida por el ruido se muestra para eventos con el uso de la varianza estimada. El cálculo adicional consiste en e un producto escalar por pasos iterativos. Para sismogramas de reflexión impulsivos, la deconvolución dinámica es superior al filtro inverso porque es exacta y necesita menos cálculos.

A pesar de todas las restricciones y consideraciones que se hacen, se aprecia que estos métodos son una herramienta poderosa para análisis básicos de sismogramas de reflexión y pueden utilizarse para estimaciones preliminares de los coeficientes de reflexión.

Asi, este metodo se puede aplicar para el caso de ondas SH y en calculo de los coeficientes de reflexión para sismogramas de seudoreflexión. Esta continuación del método descrito para ondas compresionales (P), en un medio elastico, y que se plantea para ondas de corte (SH) es posible gracias a que cumplen con las mismas condiciones. Es decir, no existe conversión de ondas en el caso inicial por ser incidencia normal y, por su naturaleza, tampoco en el caso de ondas SH existe conversión de onda, además de que el análisis matemático es muy similar.

REFERENCIAS

Aki, K. y Richards, P.G., 1980, Quantitative seismology: Theory and methods, Vol 2, W. H. Freeman, San Francisco.

Beiser, A., 1973, Conceptos de fisica moderna, McGraw-Hill, Nueva York.

Claerbout, J.F., 1968, Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response, Geophysics 33, 264-269.

Claerbout, J.F., 1976, Fundamentals of geophysical data processing: with applications to petroleum prospecting, McGraw-Hill, Nueva York.

Ferber, R.G., 1985, Stabilization of Normal-Incidence Seismogram Inversion Removing The Noise-Induced Bias, Geophys. Prosp. 33, 212-223.

Goupillaud, P., 1961, An approach to inverse filtering of near surface layer effects from seismic records, Geophysics 26, 754-760.

Lorentz, H., Einstein, H., Minkowski y Weyl, H., 1923, The principles of relativity, A collection of original papers on the special and general Theory of relativity, Constable and company, Ltd., Londres.

Resnick, J.R., 1990, Stratigraphic Filtering, Pageoph 132, 49-65.

Robinson, E.A., 1967, Multichanel time series analysis with digital computer programs, Holden-Day, San Francisco.

Robinson, E.A., 1975, Dynamic predictive deconvolution, Geophys. Prosp. 23, 780-798.

Robinson, E.A., 1982, Spectral approach to geophysical inversion by Lorentz, Fourier, and Radon transforms, Proc IEEE 70, 1039-1054.

Robinson E.A. y Treitel S., 1977, The spectral function of a layered system and the determination of waveforms at depth, Geophys. Prosp. 25, 434-459.

Robinson E.A. y Treitel S., 1978, The fine structure of the normal incidence synthetic seismogram, Geophys. J. R. astr. Soc. 53, 289-309.

Scherbaum, F., 1987a, Seismic imaging of the site response using microearthquake recordings, Part I: Method, Bull. Seism. Soc. Am. 77, 1905-1923.

Scherbaum, F., 1987b, Seismic imaging of the site response using microearthquake recordings, Part II: Application to the Swabian Jura, Southwest Germany, seismic network, Bull. Seism. Soc. Am. 77, 1924-1944

Scherbaum, F., 1987c, Levinson inversion of earthquake geometry SH-Transmission seismograms in the presence of noise, Geophys. Prosp. 35, 987-802.

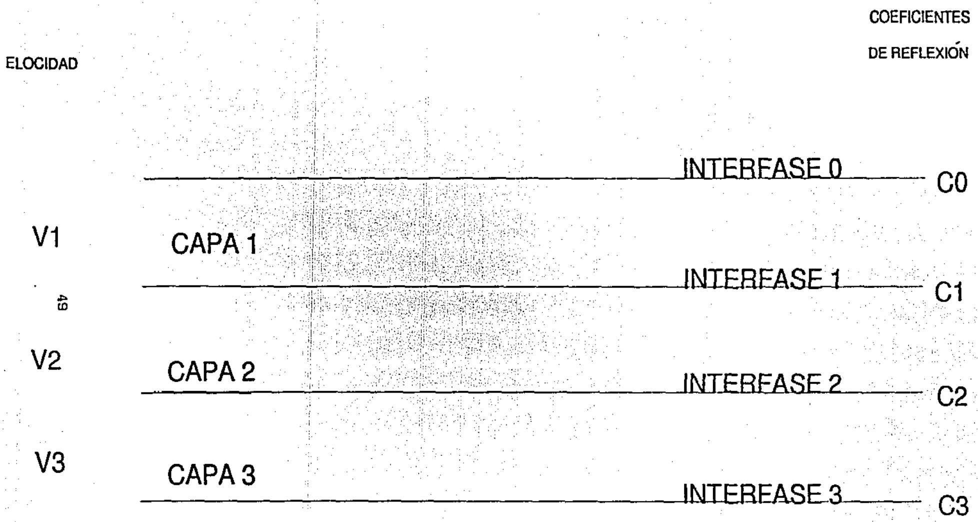
APÉNDICE A: ANTECEDENTES

MODELO DE TIERRA ESTRATIFICADA DE GOUPILLAUD

El problema de determinar las propiedades de la Tierra a partir de ondas reflejadas es ya clásico en sismología de reflexión (Robinson, 1982). Como un primer paso en su análisis matemático, el problema es usualmente simplificado suponiendo que la corteza terrestre está constituida por una secuencia de capas sedimentarias. El modelo de Goupillaud (1961) (Figura 1) aproxima la heterogeneidad de la Tierra como una secuencia de capas horizontales, homogéneas, isótropas y sin absorsión. Este modelo está sujeto a ondas compresionales viajando verticalmante (incidencia normal). Por sencillez, se supone que dos veces el tiempo de viaje en cada capa es igual a una unidad de tiempo. El semiespacio superior (el aire) es llamado el semiespacio 0, la primera capa se llama capa 1, la siguiente capa 2 y así sucesivamente. La interfase 0 es la interfase debajo del semiespacio 0, la interfase 1 es la interfase debajo de la capa 1 y así sucesivamente.

C_k es el coeficiente de reflexión para las ondas descendentes que inciden en la interfase k. El coeficiente de reflexión para las ondas ascendentes que inciden en la interfase k es igual a $-C_k$. Se supone que la amplitud de las ondas se mide en unidades tal que el cuadrado de la amplitud es proporcional a la energía. Entonces el coeficiente de transmisión a través de la interfase k es igual a $(1 - C_k^2)^{1/2}$ para cada onda ascendente y descendente. Todas las ondas son muestreadas con un intervalo unitario de tiempo. Aunque las ondas existan a través de toda la capa, sólo consideraremos las medidas en la cima de la capa (Figura 2). Esto se hace para simplificar su conteo. Si el número de la capa es impar, el tiempo se mide en valores enteros; n = 0, 1, 2, ... Si la capa es par, el tiempo se mide en valores enteros más media unidad: n + 0.5 = 0.5, 1.5, 2.5, ... Esto es porque la onda tarda

Figura 1



MODELO DE GOUPILLAUD

Figura 2

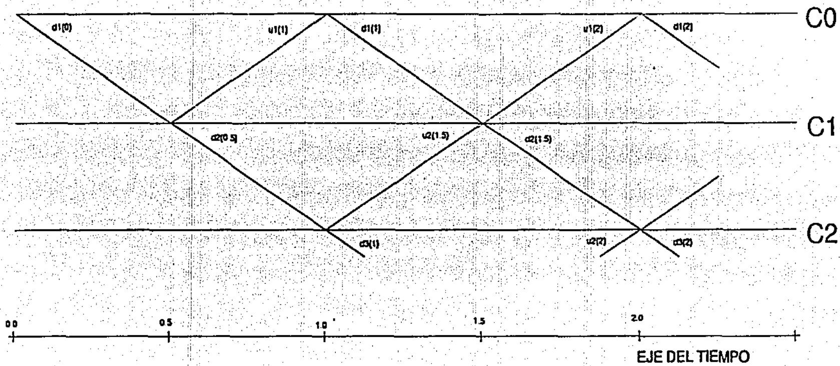


DIAGRAMA ESPACIO-TIEMPO

en atravesar una capa sólo media unidad. Por ejemplo, si una onda impulsiva descendente se manda al tiempo 0 en la cima de la capa 1, entonces llega a la cima de la capa 2 al tiempo 0.5, a la cima de la capa 3 al tiempo 1.0, a la cima de la capa 4 al tiempo 1.5 y así sucesivamente.

Como en geofísica Z se utiliza como la dimensión de la profundidad, utilizaremos la transformada de Laplace en lugar de la transformada Z. La variable S en la transformada de Laplace corresponde a la variable Z^{-1} en la transformada Z. La onda descendente en la cima de la capa k se denota por $d_k(n)$ si k es impar y por $d_k(n+0.5)$ si k es par, donde n es entero. La función generadora es

$$D_k(S) = \sum_n d_k(n)\ S^n \qquad \text{(k impar)}$$

$$D_k(S) = \sum_n d_k(n+0.5)\ S^{n+0.5}. \qquad \text{(k par)}$$

La correspondiente transformada Z se obtiene haciendo $S = Z^{-1}$. Similarmente, la función generadora la onda ascendente $U_k(n)$, para k impar y $U_k(n+0.5)$ para k par. Esta representa las mediciones en la cima de las capas y se define por $U_k(S)$.

LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Cuando Maxwell derivó la ecuación de onda electromagnética, pronto se vino a conocer que está no es invariante bajo la transformación Galileana (Robinson, 1982). Sin embargo, es invariante bajo la transformación de Lorentz (Apéndice C), y esta observación fue un factor clave para Einstein en el desarrollo de la teoría especial de la relatividad (Lorentz et al., 1923). La transformación de Lorentz puede escribirse como

$$D_2 = \frac{1}{(1-c_1^2)^{1/2}}[D_1 - c_1U_1]$$

$$U_2 = \frac{1}{(1 - c_1^2)^{1/2}} [-c_1 D_1 + U_1],$$

donde D_1 y U_1 son, respectivamente, las coordenadas de espacio y tiempo en un evento realizado en 1, D_2 y U_2 son, respectivamente, las coordenadas de tiempo y espacio en un evento realizado en 2, y c_1 ($|c_1| < 1$) es la velocidad (en unidades naturales, siendo la velocidad de la luz unitaria) entre dos eventos. La transformación de Lorentz es una consecuencia de la invarianza del intervalo entre dos eventos. Por sustitución directa, puede verse que las coordenadas de dos eventos deben satisfacer la ecuación (Robinson, 1982)

$$D_2^2 - U_2^2 = D_1^2 - U_1^2$$

en transición de un evento de referencia a otro.

Ahora veremos la relación entre las ondas en el modelo de Coupillaud. En lugar del tratamiento normal, trataremos de poner la relación en una forma general. Sabiendo que las ondas deben cumplir la ecuación de onda. Hagamos $D_1(S)$ y $U_1(S)$, respectivamente, las funciones generales de las ondas descendente y ascendente en la cima de la capa 1, y $D_2(S)$ y $U_2(S)$ las correspondientes funciones de la capa 2. Podemos decir que el movimiento de la onda puede describirse por la transformación de Lorentz

$$D_2(S) = \frac{1}{(1 - c_1^2)^{1/2}} [S^{1/2} D_1(S) - c_1 S^{-1/2} U_1(S)]$$

$$U_2(S) = \frac{1}{(1 - c_1^2)^{1/2}} [-c_1 S^{1/2} D_1(S) + S^{1/2} U_1(S)].$$

La constante c_1 ($|c_1| < 1$) es el coeficiente de reflexión de la interfase entre dos capas. Esta transformación de Lorentz es una consecuencia de la invarianza de la energía descendente en las capas. Por sustitución directa puede mostrarse que (Lorentz, 1923)

$$D_2\bar{D}_2 - U_2\bar{U}_2 = D_1\bar{D}_1 - U_1\bar{U}_1$$

donde la barra indica que S se sustituye por S^{-1}; es decir, $\bar{D}(S) = D(S^{-1})$. Esta ecuación indica que la energía en cada capa es la misma porque no existe absorsión y esta relación de energía es un factor físico que implica el modelo.

RECURSIÓN POLINOMIAL

La transformación de Lorentz entre dos capas adyacentes puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} U_{k+1} \\ D_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{S^{-1/2}}{t_k} \begin{bmatrix} S & -c_k \\ -c_k S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k \\ U_k \end{bmatrix},$$

donde el símbolo t_k denota el coeficiente de transmisión $(1 - c_k^2)^{1/2}$. Con base en esta relación matricial, Robinson (1967) define los polinomios $P_k(S)$ y $Q_k(S)$, y los polinomios inversos (donde R denota inversos) dados por

$$P_k^R\,(S) = S^K\, P_k(S^{-1})$$

$$Q_k^R(S) = S^K\, Q_k(S^{-1}).$$

Estos polinomios se definen por la ecuación

$$\begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -c_k \\ -c_k S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & -c_{k-1} \\ -c_{k-1} S & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} S & -c_1 \\ -c_1 S & 1 \end{bmatrix}.$$

Por inspección, podemos encontrar el primero y el último coeficiente de estos polinomios. Así, tenemos que

$$P_k(S) = 1 + \ldots + c_1\, c_k\, S^{k-1}$$

$$Q_k(S) = -c_1\, S + \ldots - c_k\, S^k$$

$$P_k^R\, (S) = c_1\, c_k\, S + \ldots + S^k$$

$$Q_k^R\, (S) = -c_k + \ldots - c_1\, S^{k-1}.$$

Ademas, los polinomios para capas adyacentes se relacionan por

$$\begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -c_k \\ -c_k S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1}^R & Q_{k-1}^R \\ Q_{k-1} & P_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación conduce a la recursión directa de Robinson (1967)

$$P_k = P_{k-1} - c_k\, S\, Q_{k-1}^R$$

$$Q_k = Q_{k-1} - c_k\, S\, P_{k-1}^R$$

y a la recursión inversa

$$P_{k-1} = \frac{1}{1 - c_1^2}\, [P_k - c_k\, Q_k^R]$$

$$Q_{k-1} = \frac{1}{1 - c_1^2}\, [Q_k + c_k\, P_k^R].$$

Ahora sustrayendo las ecuaciones de la recursión se obtiene

$$(P_k - Q_k) = (P_{k-1} - Q_{k-1}) - c_k\, S\, (Q_{k-1}^R - P_{k-1}^R)$$

de donde, haciendo co el coeficiente de reflexión de la interfase 0 ($|c_0|=1$), y definiendolo como $c_0=1$, se tiene que el polinomio A_k es $A_k = P_k - c_0 Q_k$ y se obtiene la recursión de Robinson (1967)

$$A_k = A_{k-1} + c_k \; S \; A^R_{k-1}.$$

Los polinomios de segunda clase se definen como $B_k = P_k + c_0 Q_k = P_k + Q_k$ y podemos ver que esto satisface la recursión

$$B_k = B_{k-1} - c_k \; S \; B^R_{k-1}$$

Esto conduce a la recursión inversa de Levinson

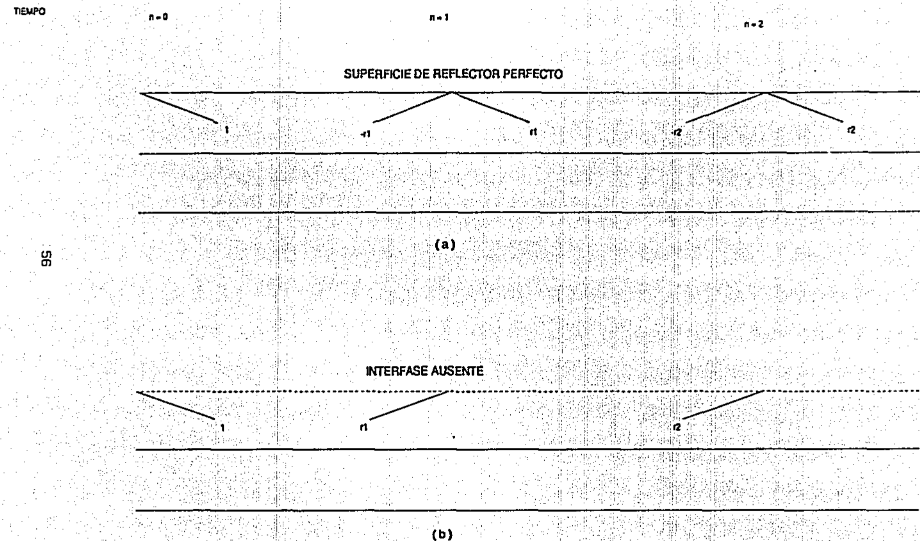
$$A_{k-1} = \frac{1}{1 - c_k^2} [A_k - c_k \; A^R_k].$$

SISMOGRAMAS DE REFLEXIÓN CON SUPERFICIE LIBRE Y SIN SUPERFICIE LIBRE

consideremos ahora el experimento sísmico ideal. La fuente es un pulso unitario descendente, se introduce en la cima de la capa 1 al tiempo cero y continúa hacia abajo donde experimenta reflexiones y refracciones múltiples dentro del sistema. Parte de la energía regresa a la cima de la capa 1, donde se registra en forma de traza sísmica, la cual se denota por la secuencia r_1, r_2, r_3,... donde el subíndice indica el tiempo discreto (Figura 3).

Hay dos tipos de condiciones de frontera comúnmente impuestas en la interfase superior (interfase 0 con coeficiente de reflexión c_0). Una condición de frontera libre, la cual dice que la interfase 0 (la interfase tierra-aire) es un reflector perfecto ($|c_0| = 1$). Esta condición de superficie libre se aproxima al caso marino de sismogramas "suaves" (mar tranquilo) donde la superficie del agua (interfase 0) es virtualmente un reflector perfecto. La otra condición es el caso sin superficie libre. Por conveniencia notacional, cambiaremos la superficie no libre como la interfase 1; esto es, la interfase tierra-aire se toma como la interfase 1. Esta puede tomar un coeficiente de reflexión c_1 arbitrario (no

Figura 3


TIEMPO
n = 0
n = 1
n = 2
SUPERFICIE DE REFLECTOR PERFECTO
1
-r1
r1
-r2
r2
(a)
INTERFASE AUSENTE
1
r1
r2
(b)

perfecto), donde $|c_1|<1$. La interfase 1 representa la superficie de la tierra y la interfase 0 no existe ($c_0=0$). Así, las condiciones sin superficie libre son $c_0 = 0$ y c_1 arbitrario.

Resumiendo, un sismograma marino ideal se generaría con el modelo de Goupillaud y condición de superficie libre ($|co| = 1$). Así, el coeficiente de reflexión para la onda ascendente es $-c_0$, el cual es -1, al igual que un pulso ascendente $-r_n$ es reflejado en un pulso descendente r_n. Por su parte, un sismograma terrestre típico se genera con el modelo de Goupillaud y condición sin superficie libre. Es decir, $c_0 = 0$ y $|c_1| < 1$ (la interfase 1 es la interfase de la tierra).

Kunetz en 1962 (Robinson, 1975) obtuvo la solución para la inversión de sismogramas de reflexión con superficie libre. El método de inversión da la serie de coeficientes de reflexión c_1, c_2, c_3, ... a partir de la cual la función de impedancia de la tierra puede ser calculada en función de la profundidad. Robinson (1967) reformuló la solución de Kunetz en términos de la recursión de Levinson y dió algoritmos para el proceso directo (generación del sismograma) y el proceso inverso (obtencón de los coeficientes de reflexión).

El método de inversión de Gelfand y Levitan representa la solución del problema de inversión para sismogramas de reflexión para superficie no libre. La forma discreta de la ecuación de Gelfand y Levitan se presenta en Aki y Richards (1980) para el caso de un medio finito inhomogéneo. Esto es, un medio inhomogéneo limitado por medios homogéneos en ambos lados. La ecuación discreta de Gelfand-Levitan se utiliza en un medio inhomogéneo no limitado. La deconvolución dinamica resulta de resolver la ecuación de Gelfand-Levitan y utiliza la recursión iterativa de los polinomios P y Q (Robinson, 1967). Esta recursión representa, para el caso sin superfice libre, la contraparte de la recursión de Levinson para el caso de superficie libre.

INVERSIÓN DE KUNETZ DE SISMOGRAMAS DE REFLEXIÓN CON SUPERFICIE LIBRE

Tomemos el modelo de Goupillaud con la condición de superficie libre, $c_0=1$, y un impulso unitario como fuente en el tiempo cero (Figura 3). La fuente da origen a una onda ascendente en la primera capa como resultado de las reflexiones y refracciones de las interfases inferiores. Denotemos esta onda ascendente por $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, ... esto es,

$$U_1(n) = -r_n \qquad (\text{para } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

representa el movimiento de la onda incidiendo en la superficie libre desde abajo. La superficie libre es un reflector perfecto (con coeficiente de reflexión ascendente $-c_0=-1$). La onda ascendente serefleja de regreso para producir la onda descendente

$$d_1(n) = r_n, \qquad (\text{para } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

donde la totalidad de la onda descendente en la cima de la capa 1 está formada por esta porción reflejada junto con el pulso de la fuente inicial

$$d_1(0) = 1.$$

Siendo r_1, r_2, ... el sismograma de reflexión, entonces

$$R(S) = r_1S + r_2S^2 + r_3S^3 + \ldots$$

es la función generadora del sismograma de reflexión y

$$U_1(S) = -R(S)$$
$$D_1(S) = 1 + R(S).$$

Usando la propiedad de invarianza de la transformación de Lorentz, la energía total descendente en la capa 1 esta dada por

$$D_1\bar{D}_1 - U_1\bar{U}_1 = (1 + R)\ (1 + \bar{R}) - R\bar{R} = 1 + R + \bar{R},$$

donde se usa la convención de que una barra sobre una función indica que cada S se remplaza por S^{-1}. Si vamos hasta el basamento, podemos asumir que se ha alcanzado una profundidad donde las ondas no se reflejan hacia arriba, pudiéndose escribir

$$U_\infty = 0.$$

Así, en esta profundidad "infinita" se tiene que

$$D_\infty\bar{D}_\infty - U_\infty\bar{U}_\infty = D_\infty\bar{D}_\infty$$

y se llega a un punto importante para un modelo de tierra estratificado que se utiliza mucho en análisis espectral. La definición

$$\Phi(\omega) = D_\infty(e^{-iw})\ D_\infty(e^{iw})$$

es una función de densidad espectral (es decir, una función no negativa de Φ). Usando la invarianza del total de la energía descendente de la capa, podemos establecer que

$$\Phi(\omega) = 1 + R(e^{-iw}) + R(e^{iw})$$

es la misma función de densidad espectral. Sin embargo, el sismograma, completado por el pulso inicial y, por simetría,

$$\ldots,\ r_{-3},\ r_{-2},\ r_{-1},\ 1,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots$$

es una función de autocorrelación simetrica. Que el sismograma sea el miembro derecho de una función de autocorrelación es un resultado obtenido por Kunetz en 1962.

El encontrar los coeficientes de reflexión r_1, r_2, r_3, ... representa el problema inverso. La función de impedancia de la tierra se calcula a partir de las series de coeficientes de reflexión. La transformación de Lorentz de la capa 0 a la capa k+1 puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} D_{k+1} \\ U_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{S^{-k/2}}{\sigma_k} \begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + R \\ -R \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_k = t_1 \; t_2 \; \ldots \; t_k$ es el producto de coeficientes de transmisión a través de la capa k. Usando esta ecuación matricial, resuelta para D_{k+1}, y remplazando S por S^{-1}, se forma $\bar{D}_{k+1}$. También se resuelve para U_{k+1} y tenemos que

$$\bar{D}_{k+1} - U_{k+1} = \frac{S^{-0.5}}{\sigma_k} \; A_k \; (1 + R + \bar{R}).$$

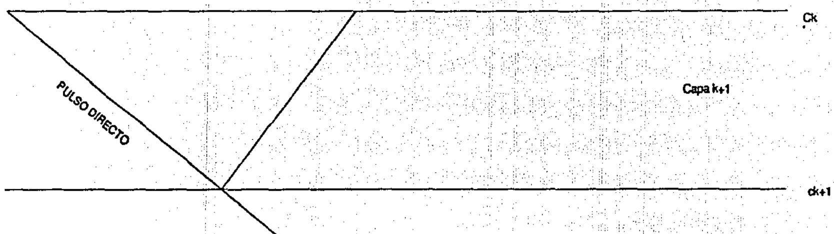
Si An se define como $A_n = P_n - Q_n$ y $\Phi = 1 + R + \bar{R}$, se tiene que

$$A_k \Phi = \sigma_k S^{0.5k} \; (\bar{D}_{k+1} - U_{k+1}).$$

La función D_{k+1} es la función generada por la onda descendente a la cima de la capa k+1 (Figura 4). Esta onda descendente está constituida por el pulso directo $d_{k+1}(0.5k)$ junto con los siguientes pulsos $d_{k+1}(0.5k + 1)$, $d_{k+1}(0.5k + 2)$,... y que el pulso directo es el resultado de las transmisiones a través de las primeras k interfases, se observa que el pulso directo es el producto de esos k coeficientes de transmisión, esto es,

$$d_{k+1}(0.5k) = t_1 t_2 \; \ldots \; t_k = \sigma_k.$$

Figura 4



REFLEXION DE UN PULSO DIRECTO

El instante de tiempo de este pulso directo es 0.S. Por lo tanto,

$$D_{k+1}(S) = \sigma_k S^{0.5k} + (\text{términos de orden superior de S}).$$

La función U_{k+1} es la función generada por la onda ascendente a la cima de la capa 1. El primer pulso de la onda ascendente es la reflexión del pulso directo descendente en la interfase k+1. Así, la magnitud de este primer pulso ascendente es $\sigma_k c_{k+1}$; esto es, es igual a la magnitud de los pulsos directos descendentes multiplicados por los coeficientes de reflexión c_{k+1}. Como una unidad de tiempo transcurre en un viaje ida-vuelta en una capa k+1, el primer pulso de la onda ascendente en la capa k+1 ocurre en una unidad de tiempo más tarde que el primer pulso de la onda descendente en la capa k+1. Esto es, el primer pulso ascendente a la capa k+1 ocurre en el tiempo 0.5 + 1. Por ello,

$$U_{k+1}(S) = \sigma_k c_{k+1} S^{0.5k+1} + (\text{términos de orden superior de S})$$

y usando esta expresión se obtiene que

$$A_k \Phi = \sigma_k\ S^{0.5k}\ [(\text{términos de orden inferior de S}) + \sigma_k S^{-0.5k}$$

$$-\sigma_k c_{k+1} S^{0.5k+1} + (\text{términos de orden superior de S})].$$

O bien,

$$A_k \Phi = \sigma_k^2\ \ [(\text{términos de potencias negativas}) + 1 - c_{k+1} S^{k+1} +$$

$$+ (\text{términos de potencias superiores})]$$

donde $\sigma_k^2 = (t_1 t_2 \ldots t_k)^2$ es el coeficiente de transmisión de doble vi je a través de la interfase k. Ahora viene la observación crítica: las potencias de S desde 1 hasta k faltan en el lado derecho de la ecuación anterior. Vamos a explicar este hecho. Se igualan coeficientes en cada lado de esta ecuación para las potencias de S desde 0 hasta k+1. Obteniendo así las ecuaciones (una por cada potencia desde 0 hasta k+1) dadas por

$$
\begin{array}{lllllll}
a_{k0}r_0 & + a_{k1}r_1 & + \dots & + a_{kk}r_k & = & \sigma_k^2 \\
a_{k0}r_1 & + a_{k1}r_0 & + \dots & + a_{kk}r_{k-1} & = & 0 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
a_{k0}r_k & + a_{k1}r_{k-1} & + \dots & + a_{kk}r_0 & = & 0 \\
a_{k0}r_{k+1} & + a_{k1}r_k & + \dots & + a_{kk}r_1 & = & \sigma_k^2\, c_{k+1}.
\end{array}
$$

Aquí, a_{k0}, a_{k1}, ..., a_{kk} son los coeficientes del polinomio A_k y $a_{k0} = 1$ y $r_0 = 1$. Como hemos visto, el resultado de Kunetz dice qur r_k es una función de autocorrelación. Entonces, estas ecuaciones son ecuaciones normales (Robinson, 1982) y la recursión de Levinson se puede usar para resolverlas. El resultado es el algoritmo de inversión (Robinson, 1967) que encuentra los coeficientes de reflexión de sismogramas con superfice libre (caso marino).

INVERSION DE GELFAND-LEVITAN DE SISMOGRAMAS DE REFLEXION SIN SUPERFICIE LIBRE

Regresando al sismograma de reflexión sin superficie libre, esto es, al sismograma producido por el modelo de Coupillaud con la condición de superficie no libre $c_1 = 0$ y c_1 arbitrario (Figura 3b) con un impulso unitario como fuente. El sismograma resultante está tomado de una onda ascendente en la primera capa. Esto es,

$$U_1(n) = r_n \qquad \text{(para } n = 1, 2, 3, \dots).$$

Como la interfase 0 está ausente (c_0=0) la onda ascendente no se vuelve a reflejar dentro del medio. La onda descendente en la cima de la capa 1 es simplemente la fuente del pulso inicial

$d_1(0) = 1,\ d_1(n) = 0 \quad$ (para $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Ahora, siendo $R(S) = r_1 S + r_2 S^2 + \ldots$ la función generadora del sismograma de reflexión, $U_1(S) = R(S)$ y $D_1(S) = 1$, la transformación de Lorentz es

$$\begin{bmatrix} D_{k+1} \\ U_{k+1} \end{bmatrix} = \sigma_k^{-1} S^{-0.5k} \begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix}$$

que conduce a

$$D_{k+1} = \sigma_k^{-1} S^{-0.5k} (P_k^R + Q_k^R R)$$

$$U_{k+1} = \sigma_k^{-1} S^{-0.5k} (Q_k + P_k R).$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se lega a

$$D_{k+1} + U_{k+1} = \sigma_k^{-1} S^{-0.5} (G_k^R + RG_k),$$

donde G_k se define como

$$G_k(S) = P_k(S) + Q_k^R(S) = g_{k0} + g_{k1}S + \ldots + g_{k,k-1}S^{k-1}$$

$$= (1 - c_k) + g_{k1}S + \ldots + (c_1 c_k - c_1)S^{k-1}.$$

Como $g_{k0} = 1 - c_k$, es posible hallar c_k tan rápido como se determine g_{k0} y la serie de coeficientes de reflexión y, por lo tanto, la función de impedancia de la tierra se puede encontrar directamente de la secuencia g_{10}, g_{20}, g_{30}, ... El pulso directo $d_{k+1}(k/2)$ es el producto de los coeficientes de transmisión $\sigma_k = t_1 t_2 \ldots t_k$ y sus arribos en el tiempo 0.5k. El primer tiempo de U_{k+1} arriba al tiempo 0.5+1. Así, $D_{k+1} + U_{k+1}$ tiene la forma

$$D_{k+1} + U_{k+1} = \sigma_k S^{0.5k} + (\text{términos superiores de } S)$$

y

$$\sigma_k S^{0.5k} + (\text{términos superiores}) = \sigma_k^{-1} S^{-0.5k}(G_k^R + RG_k)$$

que conduce a

$$G_k^R + RG_k = \sigma_k^2 S^k + (\text{términos de orden superior}).$$

Esta ecuación muestra que los coeficientes de $G_k + RG_k^R$ para las potencias 1, 2, ..., k-1 son cero y el coeficiente para las potencias k es igual a σ_k^2 ; esto es,

$$\begin{aligned}
g_{k,k-1} + g_{k0}r_1 &= 0\\
g_{k,k-2} + g_{k0}r_2 + g_{k1}r_1 &= 0\\
&\cdots\\
g_{k1} + g_{k0}r_{k-1} + \cdots + g_{k,k-2}r_1 &= 0\\
g_{k0} + g_{k0}r_k + \cdots + g_{k,k-2}r_2 + g_{k,k-1}r_1 &= \sigma_k^2
\end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones es la versión discreta de la ecuación de Gelfand-Levitan (Robinson, 1982).

Dado el sismograma de reflexión de superficie libre r_1, r_2, ..., el método de inversión de Gelfand-Levitan implica resolver el sistema de ecuaciones anterior para cada una de las k = 1, 2, ..., N. Para k = 1, el conjunto es

$$g_{10} + g_{10}r_1 = \sigma_1^2.$$

Para k = 2,

$$\begin{aligned}
g_{21} + g_{20}r_1 &= 0\\
g_{20} + g_{20}r_2 + g_{21}r_1 &= \sigma_2^2.
\end{aligned}$$

Resolviendo para g_{10}, g_{20}, ..., encontramos quelos coeficientes de reflexión están dados por

$$c_1 = 1 - g_{10}$$
$$c2 = 1 - g20$$

y así sucesivamente.

Si se define $a_{k1} = g_{k,k-1}$, $a_{k2} = g_{k,k-2}$, ..., $a_{k,k-1} = g_{k1}$, $a_{kk} = g_{k0} - 1$, las ecuaciones de Gelfand-Levitan se reducen a

$$\begin{bmatrix} ak1 \\ ak2 \\ \\ \cdots \\ akk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r1 \\ 0 & 0 & r1 & r2 \\ & & & \\ & & \cdots & \\ r1 & r2 & rk\text{-}1 & rk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ak1 \\ ak2 \\ \\ \cdots \\ akk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r1 \\ r2 \\ \\ \cdots \\ rk \end{bmatrix} = 0$$

que se reconoce como la contraparte discreta de la ecuación integral de Gelfand-Levitan (Aki y Richards, 1980)

$$a(\tau,t) + \int_{-t}^{\tau} a(\tau,\beta)\ r(t+\beta)\ d\beta + r(t+\tau) = 0$$

INVERSIÓN SÍSMICA POR DECONVOLUCIÓN DINÁMICA

El método de Gelfand-Levi an, junto con muchos métodos modernos relacionados, ha recibido amplio reconocimiento. Sin embargo, en lugar de la propuesta dada en la sección precedente, la industria petrolera propone el problema desde un punto de vista diferente. Este esquema computacional de inversión iterativa es el método de deconvolución dinámica (Robinson, 1975). La inversión por deconvolución dinámica está basada en la estructura física del sismograma de reflexión. La clave es que el sismograma de reflexión está generado a partir de los coeficientes de reflexión por medio de la fórmula de adición de Einstein (Lorentz et al., 1923). El reconocimiento de este hecho hace de la inversión de un sismograma de reflexión algo muy simple desde el punto de vista computacional.

La deconvolución dinámica para la inversión de sismogramas de reflexión de una superficie no libre usa las mismas convenciones que las que se utilizaron en la sección anterior. El registro de campo del sismograma de reflexión r_1, r_2, r_3, ... se representa por su función generadora R(S), la cual se denota por $R_1(S)$ ya que el sismograma registrado en campo ocurre en la capa 1. Se tiene entonces que

$$R_1(S) = r_1 S + r_2 S^2 + r_3 S^3 + \ldots =$$
$$= c_1 S + (\text{términos de orden superior de } S).$$

$R_1(S)$ debe tener esta forma porque $c_1 S$ representa el primer rebote de la interfase 1. No pueden aparecer reflexiones múltiples al tiempo del primer rebote y se considera que la capa 2 se expande hasta llenar el hueco del semiespacio superior, es decir, no hay interfase 1. Ahora la interfase de la cima es la interfase 2. El sismograma resultante en esta expresión de la capa 2 se representa por su función generadora

$$R_2(S) = c_2 S + (\text{términos de orden superior de } S),$$

donde $c_2 S$ representa el primer rebote. Después, se expande la capa 3 hasta llenar el vacio del semiespacio superior. El sismograma de reflexión resultante tiene como función generadora

$$R_3(S) = c_3 S + (\text{términos de orden superior de } S),$$

donde $c_3 S$ representa el primer rebote. Así, conceptualmente se tiene un conjunto de sismogramas de reflexión (k = 1, 2, 3, ...) con funciones generadoras

$$R_k(S) = c_k S + (\text{términos de orden superior de } S),$$

donde $c_k S$ representa el primer rebote en la interfase k. Podemos, sin embargo, hacer la siguiente conclusión importante. Dado el sismograma de reflexión para la capa k, es posible hallar inmediatamente el coeficiente de reflexión c_k para la capa k porque c_k' es simplemente el primer coeficiente que aparece en el sismograma. Esta conclusión representa la mitad de la solución del problema de inversión. La otra mitad del problema implica la determinación del conjunto de sismogramas de reflexión (La información dada en la cima del sismograma $R_1(S)$). El sismograma $R_1(s)$ es el único registrado físicamente en el campo por un equipo sísmico.

FORMULA DE ADICIÓN DE EINSTEIN

Si se intentan aplicar las leyes de la mecánica de Newton a partículas cargadas de ultra alta velocidad, entonces se encuentra una contradicción insuperable. Esto es, la simple suma de velocidades no es aplicable en electrodinámica. En cambio, se debería usar la fórmula de adición de Einstein para combinar velocidades, lo cual garantiza que la velocidad resultante nunca excederá la velocidad de la luz. Del mismo modo, en la combinación de los coeficientes de reflexión para un sistema de capas resulta que la contraparte de la fórmula de adición de Einstein se usa para garantizar que el resultado de reflectividad no pueda exceder la unidad en magnitud. Se define la entrada como un pulso unitario descendente al tiempo cero, incidente en la interfase superior de un sistema sedimentario, y la salida como la onda reflejada en la superficie del semiespacio. La respuesta de transmisión del sistema es la respuesta de reflexión y el tren de ondas transmitidos debajo del basamento.

Considerando un sistema sedimentario de n-1 capas con coeficientes de reflexión r_0, r_1, ..., r_{n-1} y otro sistema sedimentario de n capas con los mismos coeficientes de reflexión r_0, r_1, ..., r_{n-1} con el coeficiente adicional r_n. Para esos mismos coeficientes de reflexión, la capa n del segundo sistema es del mismo material que el semiespacio n del primer sistema y todas las capas anteriores son idénticas en ambos sistemas (Figura 5).

Combinando la respuesta de reflexión R_{n-1} del sistema de n-1 capas con el coeficiente de reflexión r_n en una forma que proporcione la respuesta de reflexión R_n del sistema de n capas, respecto a la Figura 6, la respuesta de reflexión R_n está construida de una serie infinita de componentes, es decir:

1) el impulso r_n resulta de la reflexión ascendente del impulso de la capa n,

2) el tren de impulsos $t_n R_{n-1} t_n$ resulta de la transmisión descendente del impulso de la fuente a través de la interfase n, reflexión ascendente del sistema de n-1 capas y transmisión ascendente a través de la interfase n,

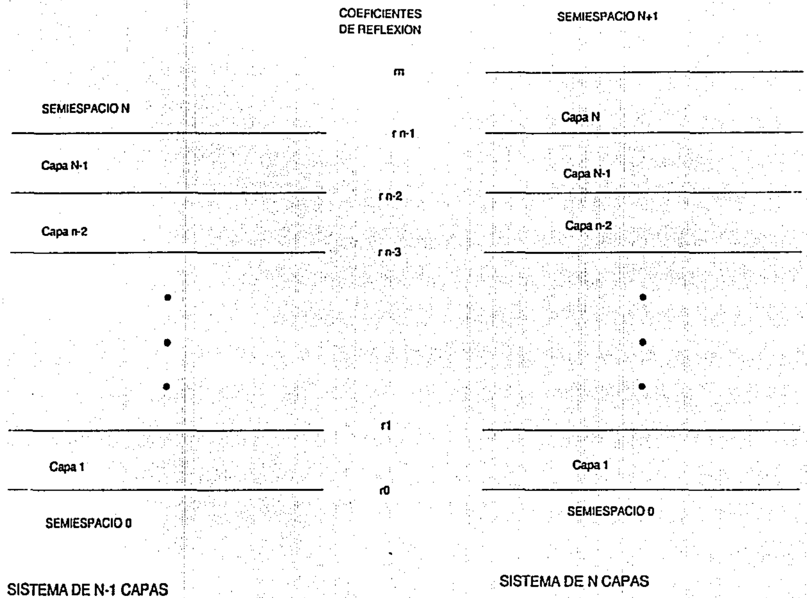
3) el tren de impulsos $t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} t'_n$ resulta de la transmisión descendente de la fuente impulsiva a través de la interfase n, reflexión ascendente del sistema de n-1 capas, reflexión descendente de la interfase n, reflexión ascendente a través de la interfase n y así sucesivamente.

El impulso (1) en la superficie ocurre al tiempo del pulso de la fuente, el tren de impulsos (2) ocurre con un retraso de una unidad de tiempo (es decir un retraso de dos veces el tiempo de viaje a través de la capa n), el tren de impulsos (3) ocurre con un retraso de dos unidades de tiempo y así sucesivamente. Resumiendo, de todas las contribuciones se tiene

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n Z + t_n R_{n-1} r'_n R_{n-1} t'_n Z^2 + \ldots,$$

que puede factorizarse como

Figura 5


COEFICIENTES
DE REFLEXION
SEMIESPACIO N+1
rn
SEMIESPACIO N
Capa N
r n-1
Capa N-1
Capa N-1
r n-2
Capa n-2
Capa n-2
r n-3
r1
Capa 1
Capa 1
r0
SEMIESPACIO 0
SEMIESPACIO 0
SISTEMA DE N-1 CAPAS
SISTEMA DE N CAPAS

$$R_n = r_n + t_n R_{n-1} t'_n \approx [1 + r'_n R_{n-1} Z + (r'_n R_{n-1} Z^2) + \ldots],$$

lo cual, sumando las series geométricas de los paréntesis, conduce a

$$R_n = r_n + \frac{t_n R_n - 1 t_n Z}{1 - r'_n R_{n-1} Z}.$$

y usando la relación dada anteriormente entre los coeficientes de reflexión y transmisión,

$$R_n = \frac{r_n + R_{n-1}}{1 + r_n R_{n-1} Z}.$$

Esta ecuacion se use para combinar r_n y R_{n-1} para R_n y es de la misma forma matemática que la fórmula de adición de Einstein en la teoria de la relatividad para combinar dos velocidades dando la velocidad resultante. Esto representa la contraparte de la fórmula de adición de Einstein en el caso del medio estratificado.

Escribiendo esta última expresión en función de los coeficientes de reflexión

$$R_n = \frac{R_{n-1} - c_{n-1}}{1 - R_{n-1} c_{n-1}}$$

se tiene que, necesariamente, R_n es menor que la unidad. Un coeficiente de reflexión nunca puede exceder una magnitud unitaria. Un coeficente de reflexión mayor que la unidad es tan imposible como en fisica una velocidad mayor que la de la luz. Así, para los coeficientes de reflexión de un sistema estratificado, se debe usar la fórmula de adición de Einstein.

Finalmente relacionan o la fórmula e adición de Ei stein con la transformada de Lorentz

$$\begin{bmatrix} D_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{S^{-1/2}}{t_1} \begin{bmatrix} S & -c_1 \\ -c_1 S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R_1 \end{bmatrix}$$

lleva a

$$t_1 \, S^{1/2} D_2 = S - c_1 R_1$$

$$t_1 \, S^{1/2} U_2 = -c_1 S + R_1 .$$

El sismograma de reflexión R_2 se obtiene deconvolucionando de la onda ascendente U_2 la onda descendente D_2; esto es

$$R_2 = \frac{U_2}{D_2} = \frac{R_1 - c_1 S}{S - R_1 c_1}$$

que es la fórmula de adición de Einstein.

APÉNDICE B: DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE REFLEXIÓN

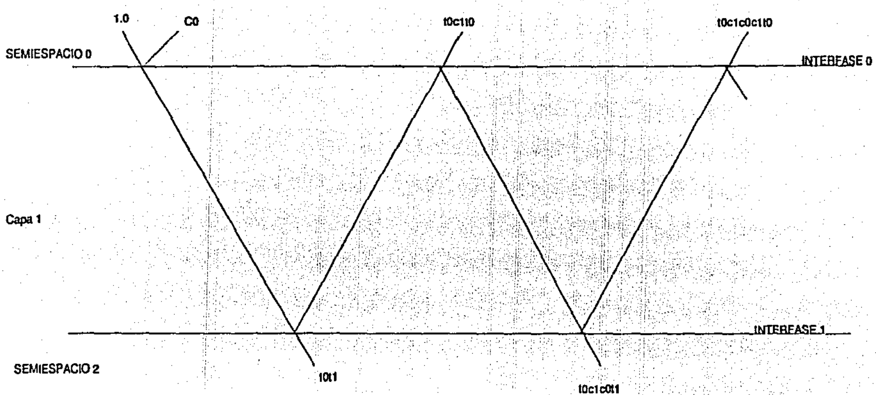
Como un ejemplo introductorio, cosideremos el caso de una capa simple (capa 1) rodeada por capas seminfinitas (capa 0 arriba, capa 2 abajo). Consideremos la situación en la cual un pulso unitario descendente en un semiespacio 0 incide sobre la cima de la interfase (interfase 0) y no hay incidencia de ondas ascendentes en la interfase inferior (interfase 1). La Figura 7 muestra la reflexión y transmisión del impulso ascendente. Se asume siempre incidencia normal, pero dado que se dibuja la escala de tiempo a lo largo del eje horizontal, los rayos aparecen en la figura como si fueran de incidencia no normal. c_0 y c_1 son los coeficientes de reflexión en las interfases 0 y 1 y t_0 y t_1 son los coeficientes de transmisión. Es posible determinar directamante la intensidad de los varios rayos que aparecen en la figura. Por ejemplo, el primer rayo reflejado es igual a c_0; es decir, el coeficiente de reflexión de la interfase superior. Entonces, $c_0' = -c_0$, $t_0' = t_0$ y $t_1'=t_1$ son los coeficientes de reflexión y transmisión ascendentes. El rayo descendente que es transmitido a través de la interfase 0, reflejado en la interfase 1 y transmitido ascendentemente a través de la interfase 0 es igual a $t_0c_1t_0'$ Similarmente, el rayo que se transmite descendiendo a través de la interfase 0, reflejado de la interfase 1, reflejado de la interfase 0, reflejado en la interfase 1 y, finalmente, transmitido hacia arriba a través de la interfase 0 da $t_0c_1c_0'c_1t_0'$.

Por razonamiento similar, se completan en los registros de la Figura 7.

La forma de onda transmitida está dada por los coeficientes

$t_0\ t_1,\ t_0(c_1c_0'\ )\ t_1,\ t_0(c_1c'_0)\ (c_1c'_0)\ t_1,$

Figura 7



REFLEXION Y TRANSMISION EN UNA CAPA SIMPLE

$t_0(c_1c_0')\ (c_1c_0')\ (c_1c_0')\ t_1,\ \ldots$

y la forma de onda reflejada está dada por los coeficientes

$c_0,\ t_0c_1t_0',\ t_0c_1c_0'c_1t_0',\ t_0c_1c_0'c_1c_0'c_1t_0',$

$t_0c_1c_0'c_1c_0'c_1c_0'c_1t_0',\ \ldots$

Así, la transformada Z de la onda transmitida es (donde el tiempo de viaje a través de la capa es igual a media unidad de tiempo, correspondiente a $Z^{1/2}$)

$$
\begin{aligned}
T(Z) &= t_0t_1Z^{1/2} + t_0(c_1c_0')\,t_1Z^{3/2} + t_0(c_1c_0')\,t_1^2Z^{5/2} + \ldots \\
&= t_0t_1Z^{1/2}(1 + c_1c_0'Z + (c_1c_0')^2Z^2 + \ldots) \\
&= \frac{t_0t_1Z}{1 - c_1c_0'Z}\,,
\end{aligned}
$$

donde la serie para T(Z) converge ya que $|c_1c_0'| < 1$

Similarmente, la transformada Z de la onda reflejada es

$$R(Z) = \frac{c_0 + c_1Z}{1 - c_1c_0'Z}$$

Interpretando ahora este resultado nos lleva a pensar que R(Z) es la transformada Z de la traza sísmica observada en la superficie. Entonces, R(Z) consiste de dos factores

$$R(Z) = (c_0 + c_1Z)\ (1 - aZ + a^2Z^2 - a^3Z^3 + \ldots),$$

donde $a = -c_1c_0'$. El primer factor $(c_0 + c_1Z)$ es llamado el factor del coeficiente de reflexión, mientras el segundo, $(1 - aZ + a^2Z^2$

$- a^3Z^3 + \ldots)$, es llamado factor de reverberación. Es decir,

$$R(Z) = \text{factor del coeficiente de reflexión (factor de reverberación)}$$

También, $Z^{1/2}t_0t_1$ se conoce como el factor de transmisión directa o

$$T(Z) = (Z^{1/2}t_0t_1)(1 - aZ + a^2Z^2 - a^3Z^3 + \ldots),$$

$$T(Z) = \text{factor de transmisión directa (factor de reververación).}$$

La función espectral $\phi(Z)$ del sistema estratificado está dada por la diferencia entre la energía descendente y ascendente. Esto es (Robinson y Treitel, 1977)

$$\phi(Z) = 1 - R(Z)\, R(Z^{-1}) \qquad \text{(B.2.1)}$$

y representa la transformada Z de la función de autocorrelación fs.

Sustituyendo para R(Z) y $R(Z^{-1})$, tenemos

$$\phi(Z) = 1 - \frac{c_0 + c_1Z}{1 - c_1c_0'Z}\;\frac{c_0 + c_1Z^{1/2}}{1 - c_1c_0'Z^{-1}}\,.$$

lo cual da

$$\phi(Z) = \frac{(1 - c_n^2)\;(1 - c_0^2)}{(1 - c_1c_0Z)(1 - c_1c_0'Z\;\;)}$$

$$= \frac{V}{(1 + aZ)\ (1 + aZ\ \ )},\qquad (B.2.2)$$

donde renombramos $c'_0 = -c_0$. El numerador de esta expresión para $\phi(Z)$ es una constante, llamada la varianza de predicción de error (Robinson y Treitel, 1977),

$$V = (1 - c_0^2)\ (1 - c_1^2) = (1 + c_0)\ (1 - c_0)\ (1 + c_1)\ (1 - c_1)$$
$$= t_0\ t'_0\ t_1\ t'_1$$

y el denominador es

$$(1 + aZ)\ (1 + aZ^{-1})$$

Pero (1 + aZ) es el inverso del factor de reververasión y asi se presenta el operador de deconvolución para remover la reververasión. De la siguiente forma

$$(1 - aZ + a^2Z^2 - a^3Z^3 + \dots)\ (1 + aZ) = 1,$$

y tenemos $R(Z)\ (1 + aZ) = c_0 + c_1Z$, (B.2.3)

lo cual dice que

transformada Z de la traza de superficie (transformada Z del operador deconvolución) = factor coeficiente de reflexión

Resumiendo los resultados del ejemplo introductorio. Observando la traza sismica en la superficie debido al impulso unitario de la secuencia r_0, r_1, r_2, r_3, ...

Primero se calcula la autocorrelación de esta traza,

$$\psi_s = \sum_{t=0}^{\infty} r_t\ +\ |s| r_t \qquad (B.2.4)$$

y de la autocorrelación ϕ_s, definida como

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1 - \psi_0 \quad \text{para } s = 0 \\ \phi_s &= -\psi_s \quad \text{para } s \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{(B.2.5)}$$

Aquí se usa la representación para la funcón espectral (eq. B.2.1), y reconocemos que $R(Z)\ R(Z^{-1})$ es la transformada Z de la autocorrelación de la traza sismica de superficie.

La expresión (B.2.2) para la función espectral $\phi(Z)$ podemos escribir

$$\phi(Z)\ (1 + aZ) = \frac{V}{1 + aZ^{-1}}$$

o

$$(\ldots + \phi_{-1}Z^{-1} + \phi_0 + \phi_1 Z + \ldots)(1 + aZ)$$

$$= V(1 - aZ^{-1} + a^2Z^{-2} - \ldots),$$

donde la expresión de $1/(1 + aZ^{-1})$ en las potencias cero y negativos de Z (es decir las potencias no positivas de Z) converge porque $1 + aZ$ es de fase mínima (esto ya que $|a| = |c_1 c'_0| < 1$). Si igualamos los coeficientes de Z_0 y Z_n en ambas ecuaciones de esta relación, obtenemos las ecuaciones normales

$$\begin{aligned} \phi_0 + a\phi_1 &= V \\ \phi_1 + a\phi_0 &= 0 \end{aligned}$$

donde $\phi_{-1} = \phi_1$ por propiedad de simetría de la función de autocorrelación.

Ahora calculando el operador prediccón de error (es decir operador de deconvolución) con el coeficiente (1,a) por solución de las ecuaciones normales para el operador a y la varianza de predicción de error V.

Finalmente, aplicando el operador deconvolución (1,a) a la traza sismica obtenemos los coeficientes de reflexión, esto es

$$(r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots) * (1,a) = (c_0, c_1).$$

EL CASO GENERAL

En el caso de n capas sujetas a un pulso descendente inicial en la cima de la interfase 0, la transformada Z de la onda transmitida en el semiespacio n+1 es

$$T(Z) = \frac{t_0 t_1 \ldots t_n}{P_n(Z) - c_0 Q_n(Z)} Z^{n/2}$$

y la transformada Z de la onda reflejada en el semiespacio 0 es

$$R(Z) = \frac{c_0 P_n(Z) - Q_n(Z)}{P_n(Z) - c_0 Q_n(Z)} = r_0 - r_1 Z + r_2 Z^2 + \ldots, \qquad \text{(B.3.1)}$$

donde la secuencia r_0, r_1, r_2, ... representa el sismograma observado en superficie. Los polinomios fundamentales $P_n(Z)$ y $Q_n(Z)$ se genera recursivamente en la forma,

$$P_n(Z) = P_{n-1}(Z) - c_n Z^n Q_{n-1}(Z^{-1})$$

$$Q_n(Z) = Q_{n-1}(Z) - c_n Z^n P_{n-1}(Z^{-1}) \qquad \text{(B.3.2)}$$

Siguiendo el metodo anterior, el tiempo de recorrido doble de incidencia normal es el mismo en cada capa, e igual a una unidad de tiempo. Esta relación fue derivada por Robinson (1967).

En este punto, definimos los polinomios $A_n(Z$ y B_n $Z)$ como

$$A_n(Z) = P_n(Z) - c_0Q_n(Z) \qquad \text{(B.3.3)}$$

y

$$B_n(Z) = c_0P_n(Z) - Q_n(Z). \qquad \text{(B.3.4)}$$

En terminos de estos polinomios, podemos ver que

$$T(Z) = \frac{t_0t_1 \dots t_nZ^{n/2}}{An(Z)} \qquad \text{(B.3.5)}$$

y

$$R(Z) = \frac{B_n(Z)}{A_n(Z)} \qquad \text{(B.3.6)}$$

La función espectral

$$\phi(Z) = 1 - R(Z)R(Z^{-1})$$

La cual sustituimos para $R(Z)$ y $R(Z^{-1})$ y desarrollamos la función

$$\phi(Z) = (1 - c_0^2) \frac{P_n(Z)\ P_n(Z^{-1}) - Q_n(Z)\ Q_n(Z^{-1})}{[P_n(Z) - c_0Q_n(Z)][P_n(Z^{-1}) - c_0Q_n(Z^{-1})]}$$

tenemos

$$(1-c_0^2) = (1 + c_0)(1 - c_0) = t_0t'_0$$

y, apartir de Robinson (1967)

$$P_n(Z)P_n(Z^{-1}) - Q_n(Z)Q_n(Z^{-1}) = t_1t'_1t_2t'_2 \dots t_nt'_n.$$

Asi la función espectral es

$$\phi(Z) = \frac{V}{[P_n(Z) - c_0Q_n(Z)][P_n(Z^{-1}) - c_0Q_n(Z^{-1})]} \qquad (B.3.7)$$

donde V es la varianza predicción de error

$$V = t_0t'_0t_1t'_1t_2t'_2 \ \ldots \ t_nt'_n$$

En terminos de $A_n(Z)$ de la función espectral es

$$\phi(Z) = \frac{V}{A_n(Z)A_n(Z^{-1})} \qquad (B.3.8)$$

Lo cual puede escribirse como

$$\phi(Z)A_n(Z) = \frac{V}{A_n(Z^{-1})}$$

Donde T(Z) esta dado por

$$T(Z) = \frac{t_0t_1 \ \ldots \ t_n}{A_n(Z)} Z^{n/2}$$

es estable, esto da que $A_n(Z)$ es de fase minima. Aqui la expansión de $1 / (A_n(Z^{-1}))$ involucra solamente las potencias no positivas de Z. Por que el primer coeficiente de $P_n(Z)$ es 1, y el primer coeficiente de $Q_n(Z)$ es cero (Robinson, 1967), por lo tanto el primer coeficiente de $A_n(Z)$ es uno. Asi el coeficiente correspondiente a Z_0 en la expansión de $1 / (A_n(Z^{-1})$ en las potencias no positivas de Z es uno, y

$$\phi(Z)A_n(Z)$$
$$= [1 + (\text{terminos que contienen potencias negativas de } Z)]V$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la transformada Z de la convolución de la autocorrelación $(\ldots, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots)$ con el operador $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donde, como hemos visto anteriormente, $a_0 = 1$. El coeficiente de Z^0 en esta convolución es igual al coeficiente de Z^0 en el lado derecho, esto es,

$$a_0\phi_0 + a_1\phi_{-1} + \ldots + a_n\phi_{-n} = V$$

El coeficiente de Z^k (donde $k > 0$) es la misma convolución y es igual al coeficiente de Z^k en el lado derecho, esto es

$$a_0\phi_k + a_1\phi_{k-1} + \ldots + a_n\phi_{k-n} = 0. \qquad k > 0$$

En la ecuación para V, por el primer n de la ecuación para $k > 0$, hecho en la ecuación normal, el cual es

$$\begin{aligned} a_0\phi_0 &+ a_1\phi_{k-1} + \ldots + a_n\phi_{-n} = V \\ a_0\phi_1 &+ a_1\phi_0 + \ldots + a_n\phi_{1-n} = 0 \\ &\ldots \\ a_0\phi_n &+ a_1\phi_{n-1} + \ldots + a_n\phi_0 = 0 \end{aligned} \qquad (B.3.9)$$

La solución de esa ecuación normal da los coeficientes a_0, a_1, ..., a_n del polinomio $A_n(Z)$, esos coeficientes representan el operador predicción de error el cual se utiliza para deconvolucionar la traza sismica.

Resumiendo, para la traza sismica observada en superficie r_t (para $t = 0, 1, 2, \ldots$), se calcula la autocorrelación

$$\psi_s = \sum_{t=0}^{\infty} r_{t+|s|} r_t$$

y la forma de autocorrelación ϕ_s definida como

$\phi_0 = 1 - \psi_0$ para $s = 0$

$\phi_s = -\psi_s$ para $s \neq 0$

Se calcula el operador predicción de error $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_0 = 1$, y se calcula la varianza de predicción de error, V, por solución de las ecuaciones normales antes dadas. Este operador de predicción de error es el operador deconvolución requerido. Usando este operador de predicción de error se deconvoluciona la traza sismica, lo cual da los coeficientes $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, esto es,

$$(r_0, r_1, r_2, \ldots) * (1, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= (b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots).$$

Este resultado sigue de la ecuación (B.3.6), la cual puede escribirse

$$A_n(Z)R(Z) = B_n(Z)$$

En otras palabras, los coeficientes $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ así obtenidos son los coeficientes del polinomio $B_n(Z)$ dados por la ecuación (B.3.4).

En este caso general, los coeficientes $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ no son los coeficientes de reflexión $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Sin embargo, si olvidamos todos los productos de 3 ó más coeficientes de reflexión en $B_n(Z)$ (estos productos son terminos de orden superior, porque cada coeficiente de reflexión se asume que es un número mucho menor que uno en magnitud), entonces en efecto tenemos

$$(b_0, b_1, \ldots, b_n) \approx (c_0, c_1, \ldots, c_n),$$

y por lo tanto la deconvolución predictiva, aqui descrita da la serie de coeficientes de reflexión requeridos para esta aproximación. Si hacemos una aproximación similar en $A_n(Z)$, resulta

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \approx (1, \sigma_1, a_2, \ldots, \sigma_n),$$

Donde los valores σ_1, σ_2, ..., σ_n son los coeficientes de autocorrelación de los coeficientes de reflexión c_0, c_1, ..., c_n para retrasos 1, 2, ..., 3.

Ilustremos esta aproximación para el caso n = 2, haciendo uso de la recursión formulada (B.3.2) tenemos

$$\begin{aligned}B_n(Z) &= c_0P_2(Z) - Q_2(Z) = c_0(1 + c_1c_2Z) - (-c_1Z - c_2Z^2) \\ &= c_0 + c_1Z + c_2Z^2 + c_0c_1c_2Z^3 \\ &= c_0 + c_1Z + c_2Z^2 + (\text{terminos de orden} \geq c_ic_jc_k).\end{aligned}$$

Similarmente

$$A_2(Z) = P_2(Z) - c_0Q_2(Z) = (1 + c_1c_2Z) - c_0(-c_1Z - c_2Z^2)$$

$$= 1 + (c_0c_1 + c_1c_2)Z + c_0c_2Z^2 = 1 + \sigma_1Z + \sigma_2Z^2,$$

Asi que, de echo, la aproximación es exacta para n = 2.

Del mismo mode, en el caso n = 3, obtenemos

$$B_3(Z) = c_0 + c_1Z + c_2Z^2 + c_3Z^3 + (\text{terminos de orden superior})$$

y

$$A_3(Z) = 1 + (c_0c_1 + c_1c_2 + c_2c_3)Z + (c_0c_2 + c_1c_3 + c_0c_1c_2c_3)Z^2$$
$$+ c_0c_3Z^3$$

$$= 1 + (c_0c_1 + c_1c_2 + c_2c_3)Z + (c_0c_2 + c_1c_3)Z^2 + c_0c_3Z^3$$

$$+ \text{(terminos de orden superior)}.$$

$$= 1 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \sigma_3 Z^3 + \text{(terminos de orden superior)}.$$

En general tenemos

$$B_n(Z) = c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \dots + c_n Z^n$$

$$+ \text{(terminos de orden superior)}.$$

$$A_n(Z) = 1 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \dots + \sigma_n Z^n$$

$$+ \text{(terminos de orden superior)}.$$

Finalmente, es de interes para considerar un teorema de conservación de energia para el caso general.

De Robinson y Treitel (1977), tenemos

$$(D_{n+1}\,\bar{D}_{n+1} - U_{n+1}\,\bar{U}_{n+1}) = \frac{t_0 t_1 \dots t_n}{t'_0 t'_1 \dots t'_n}\,(D_0\bar{D}_0 - U_0\bar{U}_0),$$

donde D_0 y U_0 son las transformadas Z de las ondas descendente y ascendente en la cima de la capa 0, y donde D_{n+1} y U_{n+1} son las correspondientes transformadas Z de esas ondas en la cima del semiespacio n+1. La notación de la barra sobre la transformada Z denota tiempo inverso.

Haciendo el pulso descendente inicial de magnitud unitaria, $Do = 1$. No existe onda ascendente en el semiespacio n + 1, asi que $U_{n+1} = 0$. Haciendo $T_{n+1} = D_{n+1}$ es la tranformada Z de la onda transmitida en el semiespacio inferior, y haciendo $R_0 = U_0$ la transformada Z de la onda reflejada en el semiespacio 0. Por lo tanto podemos escribir

$$T_{n+1}\bar{T}_{n+1} = \frac{t_0 t_1 \dots t_n}{t'_0 t'_1 \dots t'_n}(1 - R_0\bar{R}_0)$$

o

$$t'_n \frac{t_0 t_1 \dots t_n}{t'_0 t'_1 \dots t'_n} T_{n+1}\bar{T}_{n+1} + R_0\bar{R}_0 = 1,$$

lo cual dice que $(t'_0 t'_1 \dots t'_n)/(t_0 t_1 \dots t_n)$ veces la energia transmitida por la energia reflejada es igual a 1. Ahora la energia del pulso fuente descendente es $D_0^2 = 1^2 = 1$, y así la relación anterior es un teorema de la conservación de energia para nuestro medio estratificado.

Tenemos

$$\frac{t'_i}{t_i} = \frac{Z_i + 1}{Z_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $Z_i = \rho_i V_i$ es la impedancia acustica de la capa i (ρ_i = densidad y V_i = velocidad, de la onda compresional), el teorema de conservación de energia puede escribirse

$$\frac{\rho_{n+1} V_{n+1}}{\rho_0 V_0} T_{n+1}\bar{T}_{n+1} + R_0\bar{R}_0 = 1$$

LA RECURSION INVERSA

Si nosotros deseamos hacer la aproximación anterior, podemos en su lugar usar un metodo de recursión inversa para encontrar los coeficientes de reflexión. Después de la deconvolución, nosotros disponemos del operador predicción de error (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) y la serie de coeficientes casireflexión (b_0, b_1, b_2, ..., b_n), los cuales tienen transformada Z $A_n(Z)$ y $B_n(Z)$, respectivamente.

Desde Robinson y Treitel (1977), tenemos

$$\begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & -c_k \\ -c_k Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1}^R & Q_{k-1}^R \\ Q_{k-1} & P_{k-1} \end{bmatrix}$$

De aqui sigue que

$$\begin{bmatrix} P_{k-1}^R & Q_{k-1}^R \\ Q_{k-1} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - c_k^2} \begin{bmatrix} Z & -c_k \\ -c_k Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k^R & Q_k^R \\ Q_k & P_k \end{bmatrix}$$

Asi, dados P_k y Q_k, podemos obtener P_{k-1} y Q_{k-1} mediante la relación recursiva

$$P_{k-1} = \frac{1}{1 - c_k^2} [P_k + c_k Q_k^R]$$

$$Q_{k-1} = \frac{1}{1 - c_k^2} [Q_k + c_k P_k^R] \qquad \text{(B.4.1)}$$

Las ecuaciones (B.3.3) y (B.3.4) son

$$A_k = P_k - c_o Q_k$$
$$B_k = c_o P_k - Q_k$$

y sigue que

$$A_{k-1} = \frac{1}{1 - c_k^2} [A_k - c_k B_k^R]$$

$$B_{k-1} = \frac{1}{1 - c_k^2} [B_k - c_k A_k^R] \qquad \text{(B.4.2)}$$

Estas dos últimas ecuaciones representan la relación deseada de la recursión inversa para determinar los polinomios A_{k-1} y B_{k-1} apartir de los polinomios A_k y B_k y los coeficientes de reflexión c_k.

Resumendo el metodo para determinar los coeficientes de reflexión por la recursión inversa. Despues de la deconvolución, tenemos $A_n(Z)$ y $B_n(Z)$. Tenemos tambien los coeficientes de reflexión c_n de las n-ava interfase, por que c_n es el coeficiente de Z^n en el polinomio $B_n(Z)$, esto es, $b_n = c_n$. Siguiendo que $B_n(Z) = c_0P_n(Z) - Q_n(Z)$, Robinson (1967), entonces tenemos que $b_n = c_n$. Con esta igualdad podemos usar la recursión inversa formulada anteriormente para obtener A_{n-1}. Usando estas cantidades, empleamos la recursión inversa para obtener A_{n-2}, B_{n-2}, c_{n-2}, y asi sucesivamente, hasta obtener A_0, B_0, c_0. Asi la recursión inversa determina la serie de coeficientes de reflexión (c_0, c_1, c_2, ..., c_n).

EJEMPLOS NUMERICOS

Ilustremos ahora los conceptos introducidos en las secciones previas con dos ejemplos numéricos:

Ejemplo 1

Consideremos un caso de tres capas, tal que el tiempo de viaje doble es el mismo e igual a una unidad de tiempo, y la correspondiente secuencia de coeficientes de reflexión es (c_0, c_1, c_2, c_3) = (0.85, 0.01, 0.10, -0.03). En las tablas B1a, B1b y B1c resumen los calculos pertinentes

Tabla B1a

Ejemplo 1.- Resultados de la recursión directa

i	c_i	b_{3i}	a_{3i}	σ_i
0	0.85	0.08500	1.0000	0.7335
1	0.01	0.0083	0.0065	0.0065
2	0.10	0.0997	0.0847	0.0847
3	-0.03	-0.0300	-0.0255	-0.0255

c_i = los coeficientes de reflexión dados

b_{3i} = los coeficientes de cuasireflexión

a_{3i} = los coeficientes del operador deconvolución

σ_i = autocorrelación de los coeficientes de reflexón c_i

Tabla B1b

Ejemplo 1.- Recursión inversa

i	r_i	ψ_i	ϕ_i
0	0.0850	0.7234	0.2766
1	0.0028	0.0022	-0.0022
2	0.0277	0.0235	-0.0235
3	-0.0870	-0.0074	0.0074
4	-0.0220		
5	0.0015		
6	0.0000		
7	-0.0020		
8	0.0000		
9	. . .		

r_i = sismograma superficial.

ψ_i = autocorrelación de r_i

ϕ_i = autocorrelación correspondiente a la función espectral (eq. (B.2.5)).

Tabla B1c

Ejemplo 1.- Resultados de la recursión inversa

i	a_{3i}	b_{3i}	c_i
0	1.0000	0.0850	0.85
1	0.0065	0.0083	0.01
2	0.0847	0.0997	0.10
3	-0.0255	-0.0300	-0.03

a_{3i} = coeficientes del operador deconvolución.

b_{3i} = coeficientes de cuasireflexión.

c_i = coeficientes de reflexión estimados.

El problema directo consiste en el calculo recursivo de los polinomios $A_k(Z)$ y $B_k(Z)$, k = 0, 1, 2, 3 para los coeficientes de reflexión dados (eqs. (B.3.2),(B.3.3) y (B.3.4)), la tabla B1a lista los coeficientes finales de los polinomios $A_3(Z)$ y $B_3(Z)$, llamados

a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}

y

b_{30}, b_{31}, b_{32}, b_{33}

La tabla tambien lista la autocorrelación de los coeficientes de reflexión dados, llamado σ_i , i = 0, 1, 2, 3. Se observan semejanzas entre los coeficientes de reflexión c_i y los coeficientes de cuasireflexión b_{3i} bastante buena y que la semejanza entre los coeficientes σ_i y a_{3i} es perfecta para cuatro digitos significativos, excepto para i = 0. Realizando la división polinomial, (B.3.6) se obtiene la transformada Z del sismograma superficial $R(z)$, los principales coeficientes r_i se listan en la tabla B1b.

La inversa o problema inverso consiste en el cálculo recursivo de los polinomios $A_k(z)$ y $B_k(z)$, $k = 3, 2, 1, 0$ para dar el sismograma superficial en transformada Z $R(z)$. Se comienza por el cálculo del operador deconvolución $A_3(z)$, así se debe resolver las ecuaciones normales (B.3.9). En orden, sucesivamente, se debe obtener la autocorrelación ϕ_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Se debe calcular primero la autocorrelación de la secuencia ri, llamada ψ_i (B.2.4), con la cual se obtiene ϕ_i con la ecuación B.2.5. Estas dos correlaciones se tabulan en la tabla B1b.. En el presente ejemplo las ecuaciones normales (B.3.9) se resuelven con $a_0 = 1$ para $n = 3$. Esta solución da el filtro deconvolución $A_3(z)$ y la varianza predicción de error υ. Después se opera con el sismograma observado en la forma $A_3(z)\ R(z) = B_3(z)$ (ver ecuación B.3.6). Así se produce $B_3(z)$, la transformada Z de la serie de los coeficientes de cuasi-reflexión b_{3i}, $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Los coeficientes a_{3i} y b_{3i} obtenidos de esta forma se muestran en la tabla B1c. Se observa que el parecido entre el problema directo (tabla B1a) e inverso (tabla B1c) en los valores de sus coeficientes de $A_3(z)$ y $B_3(z)$ es perfecta. El último coeficiente de $B_3(z)$, llamado b_{33}, es idéntico a c_3, el coeficiente de reflexión del modelo. Finalmente la refcursión inversa (B.4.2) se aplica sucesivamnete para producir

$A_2(z)$, $B_2(z)$, y c_2
$A_1(z)$, $B_1(z)$, y c_1
$A_0(z)$, $B_0(z)$, y c_0,

donde $a_{\infty} = 1$, y $b_{\infty} = c_0$. Los valores de los coeficientes de reflexión c_i obtenidos por la recursión inversa completa se muestra en la tabla B1c. Comparando con los valores dados c_i en la tabla B1a se muestra que el parecido es perfecto, y que la inversión ha sido correctamente ejecutada.

E mplo 2

El ejemplo anterior es muy simple. Un modelo más complicado de 20 capas se muestra en la tabla B2a. aqui se muestran sólo los coeficientes de los polinomios $A_{20}(z)$ y $B_{20}(z)$, tan buena como la autocorrelaciuón de los coeficientes de reflexión llamados σ_i. La inversión se realiza nuevamente pero se omiten los detalles. Se observa remarcadamente el buen parecido entre los coeficientes de reflexión dominantes c_i y sus correspondientes coeficientes de cuasi-reflexión $b_{20,1}$. En muchos casos es perfectamente aceptable la estimación de los coeficientes de reflexión los cuales pueden ser hechos directamente por inspección del numerador $B_n(z)$ de

$$R(z) = \frac{Bn(z)}{An(z)}$$

lo cual es la ecuación (B.3.6). Para la aproximación, (es decir, despreciando los productos de tres o más coeficientes de reflexión c_j) la recursión inversa (B.4.2) pueden omitirse para los cálculos. Se nota el gran parecido entre los coeficientes a_{20} y los coeficientes σ_i. Realmente, esta función de aproximación σ_i (llamada la función de autocorrelación de los coeficientes de reflexión c_i) es el operador de deconvolución deseado.

Tabla B2a

i	c_i	$b_{20,i}$	$a_{20,i}$	σ_i
0	0.85	0.8500	1.0000	0.8440
1	0.02	0.0378	0.0379	0.0379
2	0.00	-0.0021	-0.0026	-0.0031
3	-0.01	0.0197	0.0265	0.0267
4	0.01	0.0260	0.0271	0.0262
5	0.20	0.2299	0.2050	0.2043
6	0.04	0.0655	0.0631	0.0607
7	0.03	0.0241	0.0187	0.0185

8	0.01	0.0261	0.0254	0.0193
9	0.01	0.0372	0.0392	0.0352
10	0.12	0.1387	0.1228	0.1190
11	0.04	0.0730	0.0713	0.0673
12	-0.01	-0.0101	-0.0087	-0.0090
13	0.00	0.0139	0.0145	0.0091
14	-0.02	0.0208	0.0282	0.0208
15	0.04	0.0503	0.0447	0.0408
16	0.16	0.1584	0.1339	0.1335
17	-0.04	-0.0383	-0.0325	-0.0337
18	0.02	0.0258	0.0229	0.0206
19	0.18	0.1804	0.1534	0.1532
20	0.01	0.0100	0.0085	0.0085

FUENTE EN LA PRIMERA CAPA

En nuestra discusión para este punto, hemos considerado que la fuente es un impulso unitario descendente en la cima del semiespacio 0 (es decir, sobre la interfase 0). Ahora es instructivo considerar en lugar del caso para el cual la fuente es un impluso descendente de magnitud c en la cima de la capa 1 (es decir, sobre la interfase 0), como se muestra en la figura 2. Donde los coeficientes V_1, V_2, V_3, ... representa el sismograma en la superficie. La onda descendente en la capa 1 se genera el pulso inicial c por la onda ascendente reflejada, que es

$$D_1(z) = c - c_0 V_1(z)$$

Siendo $t(z)$ la transformada Z de la onda transmitida, esto es, $t(z)$ es la transformada Z de la onda descendente en la cima del semiespacio n+1. Ahora se puede ir a través del desarrollo análogo al dado por Robinson (1967). Asi, se tiene la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Z^{-n/2}}{t'_1\ t'_2\ \dots\ t'_n} \begin{bmatrix} P^R_n & Q^R_n \\ Q^R_n & P_n \end{bmatrix}$$

y resolviendo para V y T se obtiene

$$U_1 = \frac{-Q_n\ \varepsilon}{P_n - c_0 Q_n} = \frac{-Q_n\ \varepsilon}{A_n}$$

donde $A_n = P_n - c_0 Q_n$, y

$$T = \frac{Z^{n/2} c t_1 t_2 \dots t_n}{P_n - c_0 Q_n} = \frac{Z^{n/2} c t_1 t_2 \dots t_n}{A_n} .$$

Nuevamente ϕ denota la función espectral para la capa 1, esto es,

$$\phi = D_1 \bar{D}_1 - U_1 \bar{U}_1 = (\varepsilon - c_0 \bar{U}_1) - U_1 \bar{U}_1$$

lo cual da

$$\phi = \varepsilon^2 - c_0 \varepsilon (U_1 + \bar{U}_1) - (1/c_0^2) U_1 \bar{U}_1$$

Esta es la fórmula que se usa para el cálculo de los coeficientes de autocorrelación ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... a partir de la traza sísmica observada V_1, V_2, V_3, ... Se conoce de Robinson y Treitel (1977) que

$$\phi = \frac{t'_1 t'_2 \dots t'_n}{t_1 t_2 \dots t_n} T\ T^{\cdot}$$

lo cual da

$$\phi = \frac{c^2 t_1 t'_1 t_2 t'_2 \ldots t_n t'_n}{(P_n - c_0 Q_n)(P_n - c_0 Q_n)}$$

Así, la función espectral es

$$\phi = \frac{V}{A_n A_n}$$

con $A_n = P_n - c_0 Q_n$ (ecuación B.3.3) donde la invarianza υ_1 es ahora

$$V = c^2 t_1 t'_1 t_2 t'_2 \ldots t_n t'_n = (c^2(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)\ldots(1 - c_n^2)$$

en vez de

$$V = t_0 t'_0 t_1 t'_1 t_2 t'_2 \ldots t_n t'_n$$

$$= (1 - c_0^2)(1 - c_1^2)(1 - c_2^2) \ \ldots \ (1 - c_n^2),$$

como estaba antes. Esta nueva definición de υ y ϕ proporciona nuevas ecuaciones las cuales pueden resolverse para la varianza υ y los coeficientes $a_0 = 1$, a_1, a_2, a_3, ..., a_n del polinomio $A_n(z)$.

APÉNDICE C

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

(Beiser, 1973)

Supongamos un sistema de referencia S y que las coordenadas de un evento que ocurre en el tiempo t son x, y, z. Un observador situado en un sistema de referencia S' que se mueve con respecto a S a la velocidad constante v encontrará que el mismo evento ocurre en el tiempo t' y sus coordenadas son x', y', z'. (se considera que v está en la dirección +x).

Si se desconoce la teoría de la relatividad, la respuesta a la pregunta ¿cómo son las mediciones x, y, z, t con respecto a x', y', z', t'? parece evidente. Si el tiempo en ambos sistemas se mide desde el instante en que coinciden los orígenes de S y S', las mediciones en la dirección de x efectuadas en S excederán a las efectuadas en S' en la cantidad vt, que representa la distancia que ha recorrido S' en la dirección x. Es decir,

$$x' = x - vt \tag{C.1}$$

y no existe movimiento relativo en las direcciones y y z. Por tanto,

$$y' = y \tag{C.2}$$

$$z' = z. \tag{C.3}$$

Como nuestra experiencia cotidiana no nos indica lo contrario, consideremos además que

$$t' = t. \tag{C.4}$$

A este conjunto de ecuaciones se les conoce como la transformación de Galileo.

Para convertir los componentes de velocidad medidos en el sistema S a sus equivalentes en el sistema S', de acuerdo con la transformación de Galileo, basta con derivar x', y' y z' con respecto al tiempo

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x - v \qquad (C.5)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y \qquad (C.6)$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z. \qquad (C.7)$$

Aunque la transformación de Galileo y la transformación de velocidad que se deduce de esta concuerdan con nuestra intuición, violan, sin embargo, los dos postulados de la relatividad especial. El primer postulado exige ecuaciones idénticas de la física en los dos sistemas de referencia S y S', pero las ecuaciones fundamentales de electricidad y magnetismo adoptan formas muy diferentes cuando se aplica la transformación de Galileo para convertir las cantidades medidas en un sistema a sus equivalentes en otro. El segundo postulado exige el mismo valor para la velocidad de la luz c tanto si está determinado en S como en S'. Sin embargo, si la velocidad de la luz medida en la dirección x del sistema S es c, en el sistema S' resultará

$$c' = c - v \qquad (C.8)$$

de acuerdo con la ecuación (C.5). Resulta claro que, para satisfacer los postulados de la relatividad especial, es necesaria una transformación diferente. Podríamos esperar que tanto la dilatación del tiempo como la contracción de la longitud se deduzcan en forma natural de esta nueva transformación.

Una suposición razonable respecto de la relación correcta entre x y x' es

$$x' = k(x - vy), \tag{C.9}$$

donde k es un factor de proporcionalidad que no depende de x ni de t, pero que puede ser función de v. La elección de la ecuación C.9 se debe a varias consideraciones:

1. Es lineal en x y x', de forma que un único evento en el sistema S corresponde a un único evento en el sistema S', como se requiere.
2. Es sencilla y siempre se debe examinar primero una solución sencilla a un problema.
3. Puede reducirse a la ecuación (C.1), que sabemos es correcta en la mecánica clásica.

Como las ecuaciones físicas deben tener la misma forma tanto en S como en S', basta con cambiar el signo de v (para tener en cuenta la diferencia de sentido del movimiento relativo y se obtiene la ecuación correspondiente para x en función de x' y t'

$$x = k(x' + vt). \tag{C.10}$$

El factor k debe ser el mismo en ambos sistemas de referencia ya que no existe más diferencia entre S y S' que el signo de v.

Como en el caso de la transformación de Galileo, nada indica que pueda haber diferencias entre las coordenadas correspondientes a y, y' y z, z', que son normales a la dirección de v. Por tanto, también en este caso tomamos

$$y' = y \tag{C.11}$$
$$z' = z. \tag{C.12}$$

Sin embargo, las coordenadas de tiempo t y t' no son iguales. Podemos comprobar esto sustituyendo el valor de x', dado en la ecuación (C.9) en la ecuación (C.10). Obtenemos

$$x = k^2(x - vt) + kvt', \tag{C.13}$$

donde vemos que

$$t' = kt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)x \tag{C.14}$$

y las ecuaciones (C.9), (C.11), (C.12) y (C.14) constituyen una transformación de coordenadas que satisface el primer postulado de la relatividad especial.

El segundo postulado nos permite calcular k. En el instante t = 0, los origenes de los sistemas de referencia S y S' están en el mismo lugar, de acuerdo con nuestras condiciones iniciales y, por lo tanto, también t' = 0. Suponiendo que se enciende una luz en el origen común de S y S' cuando t = t' = 0, y que los observadores de cada sistema proceden a medir la velocidad de expansión de la luz desde ella. Ambos observadores deben encontrar la misma velocidad c, lo que quiere decir que en el sistema s

$$x = ct \tag{C.15}$$

mientras que en el sistema S'

$$x' = ct'. \tag{C.16}$$

sustituyendo x' y t' en la ecuación (C.16) con ayuda de las ecuaciones (C.9) y (C.14)

$$k(x-vt) = ckt + \left(\frac{1-k^2}{kv}\right) cx$$

y despejando x

$$x = \frac{ckt + vkt}{k - \left[\frac{1-k^2}{k\,v}\right]c}$$

$$x = ct\left[\frac{k + \frac{v}{c}k}{k - \left[\frac{1-k^2}{kv}\right]}\right]$$

$$x = ct\left[\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \left[\frac{1}{k^2} - 1\right]\frac{c}{v}}\right]$$

esta expresión de x será la misma que la correspondiente a la ecuación (C.14), es decir, x = ct, siempre que la cantidad entre parentesis sea igual a 1. Por tanto,

$$\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \left[\frac{1}{k^2} - 1\right]\frac{c}{v}} = 1$$

y

$$k = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad \text{(C.17)}$$

introduciendo el valor de k, indicado en las ecuaciones (C.9) y (C.14), tenemos, para la transformación completa de las mediciones de un evento ocurrido en S en las mediciones correspondientes realizadas en S', las ecuaciones

$$x = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^2} \tag{C.18}$$

$$y = y' \tag{C.19}$$

$$z = z' \tag{C.20}$$

$$k = \frac{x - \frac{vx}{c^2}}{(1 - v\ /c^2)^2} . \tag{C.21}$$

Estas ecuaciones comprenden la transformación de Lorentz. Las obtuvo por primera vez el físico holandés H.A. Lorentz, quien demostró que las fórmulas fundamentales del electromagnetismo son las mismas en todos los sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme solamente cuando se utilizan estas ecuaciones de transformación.

APÉNDICE D: PROGRAMAS DE CÓMPUTO DE LOS ALGORITMOS

```
$DEBUG
$NOFLOATCALLS
$LARGE
$STORAGE:2
C ***********************************************************
C *                                                         *
C * PROGRAMA PARA LA INVERSION DE SISMOGRAMAS               *
C *                                                         *
C * BASADOS EN EL ALGORITMO DE FERBER (1985)                *
C *                                                         *
C * MEDIANTE EL PROCESO DE DECONVOLUCION DINAMICA           *
C *                                                         *
C * ESTE PROGRAMA INCLUYE ESTABILIZACION                    *
C *                                                         *
C ***********************************************************
C
C ***********************************************************
C *                                                         *
C * LOS DATOS DE ENTRADA SON                                *
C *                                                         *
C * NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS                             *
C *                                                         *
C * NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA                            *
C * EL ARCHIVO NO DEBE DE EXISTIR                           *
C *                                                         *
C * NUMERO DE MUESTRAS                                      *
C *                                                         *
C * EL VALOR DE LA VARIANZA                                 *
C *                                                         *
C * EL VALOR DE LA CONSTANTE                                *
C * (SI SE QUIERE SIN ESTABILIZAR C=0.0)                    *
C *                                                         *
C ***********************************************************
C
C ***********************************************************
C *                                                         *
C * EL FORMATO DE LOS ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA ES       *
C * EN UNA COLUMNA DE ABSCISAS Y EN FORMATO LIBRE           *
C *                                                         *
C * EL FORMATO DE ENTRADA DE LOS DATOS EN FORMA DE          *
C * REALES Y ES FORMATO LIBRE, EXCEPTO EL NUMERO DE         *
C * MUESTRAS QUE ES UN NUMERO NATURAL.                      *
C *                                                         *
C * TODOS LOS DATOS ESTAN EN FORMATO ASCII                  *
C *                                                         *
C ***********************************************************
C
C ***********************************************************
C *                                                         *
C * EL PROGRAMA PRINCIPAL LEE LOS DATOS                     *
C *                                                         *
C * TANTO LOS DE PANTALLA COMO DE LOS ARCHIVO               *
C *                                                         *
```

```
C ************************************************
C
      DIMENSION E(1027),AN(1027),R(1027),V(1027)
      CHARACTER*20 ENTRADA,SALIDA
      WRITE (*,*) 'ARCHIVO DE ENTRADA'
      READ (*,'(A)') ENTRADA
      OPEN (1,FILE=ENTRADA,STATUS='OLD')
      WRITE (*,*) 'ARCHIVO DE SALIDA DE LOS COEFICIENTES'
      READ (*,'(A)') SALIDA
      OPEN (2,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')
      WRITE (*,*) 'NÚMERO DE MUESTRAS DEL SISMOGRAMA'
      READ (*,*) N
      WRITE(*,*) 'VARIANZA'
      READ(*,*) G2
      WRITE(*,*) 'CONSTANTE'
      READ (*,*) C1
      DO 10 I=1,N
   10 READ (1,*) AN(I)
      CALL FERBER(AN,N,R,V,E,G2,C1)
      DO 30 I=1,N
   30 WRITE(2,*) R(I)
      CLOSE(1)
      CLOSE(2)
      STOP
      END
C ************************************************
C * LA SUBRUTINA FERBER REALIZA EL TRABAJO DE     *
C * DECONVOLUCION ESTABILIZADA                    *
C * BASADA EN EL ALGORITMO DESCRITO EN EL CAPITULO 2 *
C ************************************************
      SUBROUTINE FERBER(X,N,R,V,E,G,C1)
      DIMENSION X(N+2),R(N+2),V(N+2),E(N+2)
      DIMENSION PR(1027),QR(1027)
      DIMENSION P(1027),Q(1027)
      M=1027
      DO 5 I=1,N+2
      V(I)=0.
      E(I)=0.
    5 R(I)=0.
      DO 6 I=1,M
      P(I)=0.
      Q(I)=0.
      PR(I)=0.
    6 QR(I)=0.
      G2=G**2
C ECUACION 2.3A
      R(2)=X(2)
      R2=R(2)**2
      V(2)=1.-R2+G2
C ECUACION 2.3B
      IF(ABS(R(2)).LT.(C1*G)) THEN
      R(2)=0.
      V(2)=1.
      ENDIF
C ECUACION 2.3C
      P(1)=1.0
```

```
      Q(2)=-R(1)
      PR(2)=1.0
      QR(1)=-R(1)
      DO 35 K=2,N
      SUM=0.0
      SUM1=0.0
C ECUACION 2.3D
      DO 20 J=1,K-1
   20 SUM=SUM+(P(J)*X(K+2-J))
      R(K+1)=(1./V(K))*(SUM)
      CONS=C2/V(K)
C ECUACION 2.3E
      DO 30 J=1,K
   30 SUM1=SUM1+(P(J)**2)
      E(K+1)=CONS*SUM1
C ECUACION 2.3F
      V(K+1)=(1.-(R(K+1)**2)+E(K+1))*V(K)
C ECUACION 2.3G
      IF(ABS(R(K+1)).LT.(C1*(E(K+1)**0.5))) THEN
      R(K+1)=0.0
      V(K+1)=V(K)*(1.+E(K+1))
      ENDIF
C ECUACION 2.3H
      DO 7 J=2,K+1
      P(J)=P(J)-R(K+1)*QR(J-1)
      Q(J)=Q(J)-R(K+1)*PR(J-1)
    7 CONTINUE
      DO 45 L=1,K+1
      QR(L)=Q(K-L+2)
   45 PR(L)=P(K-L+2)
   35 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
$DEBUG
$NOFLOATCALLS
$LARGE
$STORAGE:2
C ***************************************************************
C * PROGRAMA PARA FILTRO DE WIENER DE SALIDA NO IMPULSIVA       *
C *                                                             *
C * PROGRAMA PARA LA INVERSION DE SISMOGRAMAS                   *
C *                                                             *
C * BASADOS EN EL ALGORITMO DE ROBINSON (1967)                  *
C *                                                             *
C * MEDIANTE EL PROCESOS DEL FILTRO INVERSO                     *
C *                                                             *
C * ESTE PROGRAMA ES CON LA ESTABILIZACION                      *
C *                                                             *
C ***************************************************************
C
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * LOS DATOS DE ENTRADA SON                                    *
C *                                                             *
C * NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS                                 *
C *                                                             *
C * LONGITUD DE ESTE ARCHIVO (NÚMERO DE MUESTRAS)               *
C *                                                             *
C * NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA DEL FILTRO                     *
C * EL ARCHIVO NO DEBE DE EXISTIR                               *
C *                                                             *
C * NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA DE LOS COEFICIENTES            *
C * EL ARCHIVO NO DEBE DE EXISTIR                               *
C *                                                             *
C * LA LONGITUD DEL FILTRO (MENOR O IGUAL AL NUMERO DE MUESTRAS) *
C *                                                             *
C * EL VALOR DE LA VARIANZA                                     *
C *                                                             *
C * EL VALOR DE LA CONSTANTE                                    *
C * SI SE QUIERE SIN ESTABILIZAR C=0.0                          *
C *                                                             *
C ***************************************************************
C
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * EL FORMATO DE LOS ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA ES           *
C * EN UNA COLUMNA DE ABSCISAS Y EN FORMATO LIBRE               *
C *                                                             *
C * EL FORMATO DE ENTRADA DE LOS DATOS EN FORMA DE              *
C * REALES Y ES FORMATO LIBRE, EXCEPTO EL NUMERO DE             *
C * MUESTRAS QUE ES UN NUMERO NATURAL.                          *
C *                                                             *
C * TODOS LOS DATOS ESTAN EN FORMATO ASCII                      *
C *                                                             *
C ***************************************************************
C
      DIMENSION F(4200),R(4200),C(4200)
      DIMENSION C2(4200)
      CHARACTER*20 ARCH2,ARCH4,RUIDO
```

```
      WRITE (*,*) 'ARCHIVO DEL SISMOGRAMA'
      READ (*,'(A)') RUIDO
      OPEN (2,FILE=RUIDO,STATUS='OLD')
      WRITE (*,*) 'LONGITUD DEL ARCHIVO'
      READ(*,*)LR
      DO 2 I=1,LR
    2 READ(2,*) C2(I)
      WRITE (*,*) 'ARCHIVO DE SALIDA DEL FILTRO'
      READ(*,'(A)') ARCH2
      OPEN (3,FILE=ARCH2,STATUS='NEW')
      WRITE (*,*) 'ARCHIVO DE SALIDA DE LOS COEFICIENTES'
      READ(*,'(A)') ARCH4
      OPEN (1,FILE=ARCH4,STATUS='NEW')
      WRITE (*,*) 'LONGITUD DEL FILTRO'
      READ(*,*) LF
      WRITE(*,*) 'VARIANZA'
      READ(*,*) G2
      WRITE(*,*) 'CONSTANTE'
      READ(*,*) C1
      CALL WIENER(LR,C2,LF,F,LR,C,R,G2,C1)
  200 DO 124 I=1,LR
      WRITE(1,*) C(I)
  124 CONTINUE
      DO 123 I=1,LF
      WRITE(3,*) F(I)
  123 CONTINUE
      CLOSE(3)
      CLOSE(4)
      CLOSE(1)
      STOP
      END
      SUBROUTINE WIENER(LY,Y,LF,F,LC,C,R,G,C1)
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * SUBRUTINA CALCULA FILTRO DE WIENER DE MINIMOS CUADRADOS     *
C *                                                             *
C ***************************************************************
      DIMENSION Y(LY),F(LF),C(LC),R(2*LF)
      CALL CORREL(LY,Y,LY,Y,LF,R)
      R(1)=1.-R(1)
      DO 2 I=2,LF
    2 R(I)=-R(I)
      CALL RLEVIN(LF,R,F,R(LF+1),G,C1)
      CALL CONVOL(LF,F,LY,Y,LC,C)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CORREL(LX,X,LY,Y,LG,G)
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * SUBRUTINA CALCULA CORRELACION DE DOS SECUENCIAS EN TIEMPO   *
C *                                                             *
C ***************************************************************
      DIMENSIONX(LX),Y(LY),G(LG)
      DO 1 J=1,LG
    1 CALL PROPTO(MINO(LY,LX-J+1),X(J),Y,G(J))
      RETURN
```

```
      END
      SUBROUTINE PROPTO(L,X,Y,P)
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * SUBRUTINA CALCULA PRODUCTO DE DOS SECUENCIAS EN TIEMPO      *
C * DE IGUAL LONGITUD.                                          *
C *                                                             *
C ***************************************************************
      DIMENSION X(L),Y(L)
      P=0.0
      DO 1 I=1,L
    1 P=P+X(I)*Y(I)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RLEVIN(LF,R,F,A,G,C1)
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * SUBRUTINA SOLUCION ECS. NORMALES MEDIANTE RECURSION LEVINSON *
C * BASADA EN EL ALGORITMO DESCRITO EN EL CAPITULO 2            *
C *                                                             *
C ***************************************************************
      DIMENSION R(LF),F(LF),A(LF),V(1024),DELTA(1024)
      DIMENSION GAM(1024),B(1024)
      DO 16 I=1,LF
   16 A(I)=0.0
      DO 1 I=1,1024
      DELTA(I)=0.0
      GAM(I)=0.0
      B(I)=0.0
    1 V(I)=0.0
      G2=G**2
C ECUACION 2.8A
      V(1)=R(1)+G2
      A(1)=1.
      S=G2
      D=S
      DELTA(1)=R(2)
C ECUACION 2.8B
      IF ((ABS(DELTA(1))).LT.(C1*D)) DELTA(1)=0.0
      DO 10 K=1,LF-2
      SUM=0.0
      SUM1=0.0
C ECUACION 2.8C
      GAM(K+1)=0.
      V(K+1)=V(K)
      A(K+1)=0.0
      IF (DELTA(K).EQ.0.0) GO TO 15
C ECUACION 2.8D
      GAM(K+1)=(DELTA(K))/(V(K))
C ECUACION 2.8E
      V(K+1)=V(K)-(((DELTA(K)**2)-D)/V(K))
      DO 17 I=1,K+2
   17 B(I)=A(I)
      DO 20 J=2,K
   20 A(J)=A(J)-(GAM(K+1)*B(K+2-J))
C ECUACION 2.8F
```

```
      A(K+1)=-GAM(K+1)
   15 DO 30 J=1,K+1
   30 SUM=SUM+A(J)*R(K+3-J)
C ECUACION 2.8G
      DELTA(K+1)=SUM
      DO 18 J=1,K+1
   18 SUM1=SUM1+(A(J)**2)
C ECUACION 2.8H
      D=S*SUM1
C ECUACION 2.8I
      IF(ABS(DELTA(K+1)).LT.(C1*D)) DELTA(K+1)=0.0
   10 CONTINUE
      DO 40 ILF=1,LF
   40 F(ILF)=A(ILF)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CONVOL(LX,X,LY,Y,LZ,Z)
C ***************************************************************
C *                                                             *
C * SUBRUTINA CALCULA CONVOLUCION DOS SECUENCIA EN TIEMPO       *
C *                                                             *
C ***************************************************************
      DIMENSION X(LX),Y(LY),Z(4200)
      LZ=LX+LY-1
      DO 1 I=1,LZ
    1 Z(I)=0.0
      DO 2 J=1,LX
      DO 2 K=1,LY
    2 Z(J+K-1)=Z(J+K-1)+X(J)*Y(K)
      RETURN
      END
```

Deseo agradecer en una forma muy especial a Sergio Chávez Pérez, por dirigir este trabajo, por sus comentarios, duros pro siempre muy asertados, por tododo el apoyo que me brindo para realizar este trabajo.

A todos los sinodales: Ramón Zuñiga, Jaime Ramos, Marco Vazquez, Juan M. Brandy, por la revisión de la tesis, las corresccciones, cometarios y cambios sugeridos para enriquecerla.

A toda mi familia que siempre me ha apoyado a seguir adelante, sin importar lo dificil que paresca.

A todas la personas que de alguna manera me han ayudado para conseguir este trabajo.

m
s a