

870120  
Lej 1  
1  
Lej

**Universidad Autónoma de Guadalajara**

Incorporada a la Universidad Nacional Autónoma de México  
Escuela de Matemáticas

**TRANSFORMADAS DE FOURIER  
APLICADAS A RADIOASTRONOMIA**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**M A T E M A T I C O**

**P r e s e n t a :**

**Rosa Izela Díaz Covarrubias**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Página
CAPITULO I <u>INTRODUCCION.</u>	1
CAPITULO II <u>ANTECEDENTES HISTORICOS.</u>	4
A) Biografía.	4
B) La Ecuación de Difusión.	7
C) Distribución inicial de la temperatura de un anillo.	11
D) Variación en el tiempo de la distribución espacial de la temperatura.	17
CAPITULO III <u>LA TRANSFORMADA DE FOURIER.</u>	22
A) La transformada continua de Fourier.	22
B) La transformada discreta de Fourier.	28
C) La transformada rápida de Fourier.	36
CAPITULO IV <u>ESPECTROSCOPIA CON AUTOCORRELADORES DIGITALES.</u>	41
A) Espectroscopía con autocorreladores digitales.	41
B) Generación de ruido.	49
C) Epectrómetros de autocorrelación.	55
D) Programa para obtener el espectro de potencia.	62
<u>APENDICES.</u>	65
A    •El fenómeno de Gibbs.	65
B    •El símbolo de muestreo o replicación $III(x)$ .	71
•El Espectro de potencia.	73
C    •Teorema de corrimiento.	76
•Teorema del estiramiento.	76

•Teorema de la convolución.	78
•La función filtro o interpolación, sinc(x).	79
•Función Gaussiana.	81
•Teorema del Límite Central.	81
D •Programa para obtención del espectro.	83
<u>CONCLUSIONES.</u>	89
<u>REFERENCIAS.</u>	91

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Casi todo lo que conocemos acerca del universo, sobre las estrellas y el espacio entre ellas, sobre los sistemas de estrellas, su distribución, cinemática y dinámica, ha sido obtenido mediante información que llega al observador en forma de radiación electromagnética. Durante mucho tiempo el hombre se limitó a lo que podía ver, ésto es, a la luz visible; sin embargo existe radiación que llega a la tierra y que no puede ser detectada por el ojo humano. En 1931 Jansky detectó con una antena radiación que solo podía explicarse como proveniente de una fuente extraterrestre. Pero no fué hasta después de la Segunda Guerra Mundial que se le dió importancia a este "ruido" de radio que era captado por radares sensitivos y eficientes usados durante la guerra. De esta forma la Radiofísica progresó, encontrando objetos nuevos y extraños. La nueva disciplina astronómica llamada Radioastronomía fué cambiando los conceptos anteriores, requiriendo de mecanismos para su explicación que difiere considerablemente de la astrofísica "óptica".

Sin embargo toda la información extraña que graba un radiotelescopio requiere de una interpretación que reintegre este campo especializado a la corriente principal de la astrofísica. Un radiotelescopio recibe información en forma de voltajes que pueden ser representados por sumas de ondas y el resultado que se obtiene

se puede representar por una onda periódica. Para ello usamos las series de Fourier ya que éstas son absolutamente indispensables para describir fenómenos periódicos con gran aproximación.

El poder aplicar las series de Fourier para representar ondas periódicas hace que éstas sean una herramienta muy poderosa en la astrofísica, ya que las explicaciones de los fenómenos astronómicos muchas veces se basan en análisis espectrales (Robinson 1982). Los espectros necesarios para realizar dicho análisis están íntimamente relacionados con la transformada de Fourier por lo que ésta cobra gran importancia.

En esta tesis se desarrolla la teoría de Fourier y se relaciona con fenómenos puramente físicos; también se hace uso de otras herramientas como son las computadoras y los métodos estadísticos. Conjuntando todo esto se explican algunos de los métodos utilizados en radioastronomía.

En el Capítulo II se da una introducción biográfica de Fourier y como es que desarrollo su teoría alrededor de problemas de la conducción de calor. Se explica la ecuación de difusión y como es que las series de Fourier describen este fenómeno en el transcurso del tiempo.

En el Capítulo III se introduce el concepto de transformada continua de Fourier y la transformada discreta de Fourier, que es la teoría aplicable a experimentos físicos. Al final de este capítulo se explica el método de la transformada rápida de Fourier que permite calcular computacionalmente la transformada discreta de Fourier con una disminución considerable en el tiempo de cálculo.

En el Capítulo IV se explica la interpretación de las señales recibidas por un radiotelescopio y como la transformada de Fourier se relaciona con el espectro de una señal de radio. Además se consideran los métodos óptimos para obtener dicho espectro y finalmente se obtiene la simulación de una señal recibida por un radiotelescopio utilizando para ello un programa computacional. Este programa obtiene el espectro de la señal aplicando el teorema de Van Vleck de truncamiento.

Por último quisiera recalcar que el objetivo de realizar esta tesis, aparte de mi interés por la astronomía, es el de dar a conocer al matemático la aplicación que tienen las matemática dentro de otros campos y así romper un poco con el abstraccionismo que se crea en el pensamiento matemático.

## ANTECEDENTES HISTORICOS

## A) Biografía.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier nació en Auxerre, Francia, el 21 de Marzo de 1768 en el seno de una familia pobre. Introdujo la idea de que una función arbitraria, aún una definida por expresiones analíticas diferentes en intervalos adyacentes de su rango (tal como una función escalón), puede ser sin embargo representada por una sola expresión analítica, en términos de una suma infinita de senos y cosenos. Esta idea no fué bien recibida en su tiempo, sin embargo ha demostrado ser básica para muchos desarrollos de las matemáticas, las ciencias y la ingeniería. Fourier se concentró en esta idea debido a la conexión que tenía con el problema del flujo de calor en cuerpos sólidos.

Fourier estaba obsesionado con el calor, algunos de sus contemporáneos atribuían ésto a los tres años que pasó en Egipto, a donde fué, en 1798, en una expedición Napoleónica de 165 sabios para estudiar aquel país.

Anteriormente a la expedición, Fourier era un simple profesor de matemáticas, pero durante ésta asumió obligaciones administrativas como Secretario del Instituto de Egipto, un cuerpo científico que se reunía en el palacio de los Beys. Al mismo tiempo Fourier trabajó en la Teoría de las Ecuaciones, pero su



habilidad en la administración, lo llevó a ocupar puestos políticos y diplomáticos que desempeñó con éxito. Debe recalcar que Fourier llevó a cabo estudios en geografía, arqueología, medicina, agricultura e historia natural entre otras ciencias.

Un poco antes de la capitulación militar en 1801, el científico francés se hizo a la mar donde fué rápidamente capturado con todos sus registros por Sidney Smith, comandante de la flota británica. Sin embargo, de acuerdo con el espíritu caballeresco de aquella época, Smith dejó en tierra a Fourier, reteniendo los documentos y colecciones para mantenerlos a salvo. Finalmente Smith llevó el material a París en persona excepto por la piedra Rosetta, llave de la escritura jeroglífica egipcia que permanece hasta nuestros días en el Museo Británico, simbolizando tanto el lanzamiento de Napoleón de la Egiptología como su fracaso militar.

El físico inglés Thomas Young (1773 - 1829) padre de la linealidad, es bien conocido por establecer la naturaleza transversal de la luz explicando la polarización, y también, por introducir el interferómetro de doble rendija el cual muestra el análisis de Fourier de un objeto óptico. Menos conocido es el hecho de que Young compartió junto con Fourier un interés en la Egiptología, y que estudió la piedra Rosetta.

En 1802, Fourier fué nombrado por Napoleón Prefecto de Isere, después de un breve retorno como profesor de análisis en la Escuela Politécnica de París. Sus obligaciones en Grenoble incluyeron cobro de impuestos, reclutamiento militar y jurisprudencia.

Para 1807, a pesar de sus obligaciones oficiales, Fourier ya había redactado su Teoría de la Conducción del calor, la cual consiste esencialmente en el análisis de la distribución de la temperatura en cuerpos sólidos a partir de sus componentes espacialmente senoidales. Sin embargo, ésto no se publicó inmediatamente ya que Lagrange y Laplace, entre otros matemáticos de la época, tenían varias dudas sobre el tema. Pese a las críticas expresadas, el Instituto de Francia escogió "*La Propagación del Calor en Cuerpos Sólidos*" como tema para el premio de matemáticas en 1811; el cual le fué concedido a Fourier pero con una nota mencionando falta de generalidad y rigor. El hecho de que esta publicación fuera retrasada hasta 1815 se debió a la profunda inquietud que sentían los grandes matemáticos de su tiempo acerca del análisis de Fourier.

Es verdad que una distribución unidimensional de calor en una barra recta infinita requeriría de una integral de Fourier para ser expresada correctamente. Fourier evitó esta complicación considerando que el calor fluye en un anillo, ésto es, una barra que ha sido torcida en un círculo. De esta forma la distribución de la temperatura es forzada a ser periódica. Esto no representa una pérdida de generalidad ya que la circunferencia del anillo puede suponerse más larga que la mayor distancia que puede ser de interés físico en una barra conduciendo calor. Esta idea de Fourier es un método familiar de aproximar la integral de Fourier como un límite, comenzando por la representación en series de Fourier.

Cuando Napoleón abdicó en 1814, Fourier se encontró en una

posición delicada, ya que la ruta de Napoleón hacia Elba pasaría por Grenoble y ésto arriesgaría la posición de Fourier con el nuevo Rey Luis XVIII, puesto que darle la bienvenida a su antiguo jefe no podría ser visto con buenos ojos por el Rey. Fourier propició un cambio en el trayecto, y Napoleón no pasó por Grenoble. Al año siguiente, Napoleón reapareció en Francia, en esta ocasión marchando al norte y al pasar por Grenoble despidió a Fourier. De cualquier forma, Fourier fué nombrado tres días después Prefecto de la Rhone en Lyons, sobreviviendo a dos cambios de régimen. Pero ésto solo duró cien días, ya que el rey regresó para tomar el control y Napoleón salió entonces definitivamente de Francia. Los días de Fourier en el gobierno provincial terminaron y se dirigió a Paris para entrar en la vida de la ciencia y la administración científica, siendo electo para la Academia de Ciencias en 1817 y como Secretario Permanente de la misma en 1823, y para 1826 en la Academia Francesa. Fourier nunca de casó y murió el 16 de Mayo de 1830 (Bracewell 1986).

#### B) La Ecuación de Difusión.

El trabajo de Fourier siempre estuvo basado en la conducción del calor como fué expuesto en su trabajo " *Théorie Analytique de la Chaleur* ", publicado en 1822. El problema de la conducción del calor en una barra, nos lleva fácilmente a la derivación de la Ecuación de Difusión. Sin pérdida de generalidad haremos el desarrollo de esta ecuación en una dimensión.

Sea  $T(x, t)$  la temperatura en función de la posición  $x$  y del

tiempo  $t$ , y  $K$  la difusividad de la sustancia. Entonces

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

nos dice que la cantidad de calor ganado o perdido por unidad de longitud por unidad de tiempo, es equivalente a la diferencia entre el flujo que entra y el que sale del elemento de volumen considerado. Esto es, la ecuación (2.1) gobierna el flujo de calor en un medio supuesto unidimensional. Ahora derivaremos esta ecuación .

Escojamos una varilla de metal de área transversal unitaria, y tomemos cualquier sección plana de dicha varilla a la que llamaremos AB (vease Fig. 2.1). Dejemos que esta sección tenga, en cualquier tiempo, la misma temperatura (sección isotérmica), y sea la temperatura del lado izquierdo del plano AB, más alta que la del lado derecho. En consecuencia el calor fluirá desde el lado más caliente hacia el lado más frío en la dirección de la flecha, a través del plano AB.

Fourier supuso que:

- i) La dirección del flujo es perpendicular a la sección AB.
- ii) La velocidad del flujo de calor a través de cualquier sección dada, es proporcional a la diferencia de la temperatura en los dos lados del plano.

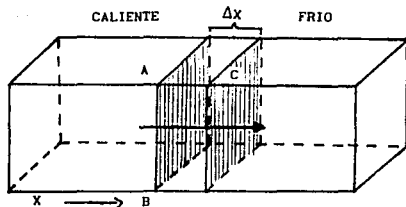


Fig. 2-1 Flujo de calor en una varilla de área transversal unitaria.

Tomemos la velocidad del flujo como constante, y sea  $T$  la temperatura en el plano  $AB$ . El gradiente de la temperatura en cualquier punto del plano  $AB$  es  $\partial T / \partial x$ . La cantidad de calor que fluye por segundo de la parte caliente a la fría a través de  $AB$  es  $I = -r \, dT/dx$ , donde  $r$  es la constante de conductividad térmica (calor que fluye por segundo, a través del área unitaria cuando el gradiente de temperatura es unitario), y el signo menos se introduce para que el sentido positivo del flujo de calor coincida con el sentido positivo de  $x$ . Consideremos ahora el valor de  $-r \, dT/dx$  en el plano  $CD$ , distante un incremento  $\Delta x$  de  $AB$ . La temperatura en el punto  $x + \Delta x$  será

$$\left( T + \frac{dT}{dx} \Delta x \right),$$

donde  $dT/dx$  es el gradiente de la temperatura a lo largo de la varilla. De aquí que la cantidad de calor que fluye a través de la pequeña sección  $CD$  es

$$I' = -r \frac{d}{dx} \left( T - \frac{dT}{dx} \Delta x \right).$$

Entonces

$$I - I' = r \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x \quad (2.2)$$

denotará la diferencia entre la cantidad de calor que fluye por la barra, entrando por una cara y saliendo por la otra. Esta expresión, entonces, representa la cantidad de calor que será ganada (o perdida) por el volumen ABCD cada segundo. Si  $\kappa$  denota la capacidad térmica de un volumen unitario, entonces la capacidad térmica de la porción ABCD es  $\kappa \Delta x$ . En consecuencia el cambio de la temperatura con el tiempo para el volumen ABCD es

$$\kappa \left( dT / dt \right) \Delta x ,$$

entonces igualando la anterior expresión con la obtenida en (2.2):

$$r \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x = \kappa \frac{dT}{dt} \Delta x .$$

Sea  $r/\kappa = K$ , por lo tanto la ecuación se transforma en

$$\frac{dT}{dt} = K \frac{d^2 T}{dx^2} , \quad (2.1)$$

donde  $K$  es la difusividad de la sustancia. La ecuación anterior

representa la *Ley de Difusión Lineal de Fourier*, que cubre todos los posibles casos de difusión para el caso unidimensional (P.ej. Mellor 1955).

### C) Distribución inicial de la temperatura en un anillo.

Como ya vimos en la sección A), Fourier introdujo su idea debido a la relación que tenía ésta con el problema del flujo de calor en cuerpos sólidos, empezando por buscar una única función analítica que se ajustara al siguiente problema:

Supongamos que tenemos un anillo de perímetro  $L$  y que la mitad de dicho anillo está a temperatura  $T_1$  y la otra mitad a temperatura  $T_0$  (ver Fig. 2.2), tal que  $T_0 < T_1$ .

Si representamos ésto geoméricamente (ver Fig. 2.3), claramente el problema es equivalente a tener una función periódica simétrica con respecto al origen, y la llamaremos Función Periódica Escalonada (FPE).

Fourier propuso que esta función periódica escalonada puede ser representada por una única función analítica en términos de senos y cosenos, que tendría la forma:

$$T(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(k_0 x) + a_2 \cos(2k_0 x) + \dots \\ + b_1 \sin(k_0 x) + b_2 \sin(2k_0 x) + \dots, \quad (2.3)$$

donde  $k_0 = 2\pi/L$  es el número de onda de la FPE.

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se pueden determinar mediante las siguientes ecuaciones:

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^C T(x) \cos(nk_0 x) dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^C T(x) \sin(nk_0 x) dx, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $C = L/2$ .

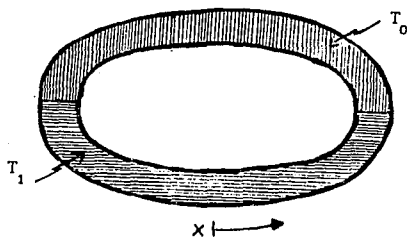


Fig. 2.2 Anillo de diámetro  $L$ . La mitad superior del anillo está a temperatura  $T_0$  y la mitad inferior a temperatura  $T_1$ , donde  $T_0 < T_1$ . La flecha indica la dirección del flujo de calor.

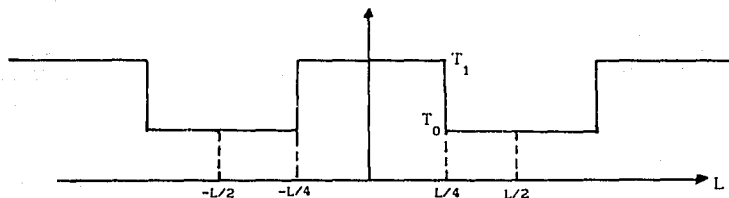


Fig. 2.3 Función Periódica Escalonada (FPE).

Dado que en nuestro ejemplo,  $T(x)$  es una función simétrica



con respecto al origen (i.e. función par), los términos senoidales se hacen cero.

Tenemos además que

$$\begin{aligned} C a_n &= \int_{-c}^0 T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \int_0^c T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \\ &= 2 \int_0^c T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx , \end{aligned}$$

por lo que

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{-c}^c T(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{C} \right) dx , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots (5)$$

determinando el primer coeficiente, es decir, para  $n = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{C} \int_{-c}^c T(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2C} \left[ \int_{-c}^{-c/2} T(x) dx + \int_{-c/2}^{c/2} T(x) dx + \int_{c/2}^c T(x) dx \right] \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2} ; \end{aligned}$$

y resolviendo a  $a_n$  para n en general,

$$a_n = \frac{1}{C} \left[ \int_{-C/2}^{-C/2} T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \int_{-C/2}^{C/2} T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \int_{C/2}^C T(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \right], \quad (2.6)$$

y substituyendo  $C = L/2$  obtenemos

$$a_n = \frac{2T_0}{L} \left[ \frac{-L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} n\pi \right] + \frac{2T_1}{L} \left[ \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{2T_0}{L} \left[ \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} n\pi - \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right],$$

por lo tanto, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , los coeficientes estarán dados por

$$a_1 = \frac{2}{\pi} (T_1 - T_0)$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{3\pi} (T_0 - T_1)$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = \frac{2}{5\pi} (T_1 - T_0)$$

$$a_6 = 0$$

$$a_7 = \frac{2}{7\pi} (T_0 - T_1)$$

$$a_8 = 0$$

y así sucesivamente. La Serie de Fourier de cosenos (2.3) es entonces :

$$\begin{aligned} T(x) = & \frac{T_0 + T_1}{2} + \frac{2}{\pi} (T_1 - T_0) \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{2}{3\pi} (T_0 - T_1) \cos \frac{6\pi x}{L} + \\ & + \frac{2}{5\pi} (T_1 - T_0) \cos \frac{10\pi x}{L} + \frac{2}{7\pi} (T_0 - T_1) \cos \frac{14\pi x}{L} \\ & + \frac{2}{9\pi} (T_1 - T_0) \cos \frac{18\pi x}{L} + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

la cual describe a la FPE (P.ej. Williams 1985).

En las gráficas de la Figura 2.4 vemos como esta serie de Fourier se aproxima a la FPE conforme tomamos más términos de ésta. Note las oscilaciones que están presentes alrededor de las discontinuidades, estas oscilaciones son conocidas como el fenómeno de Gibbs (ver Apéndice A).

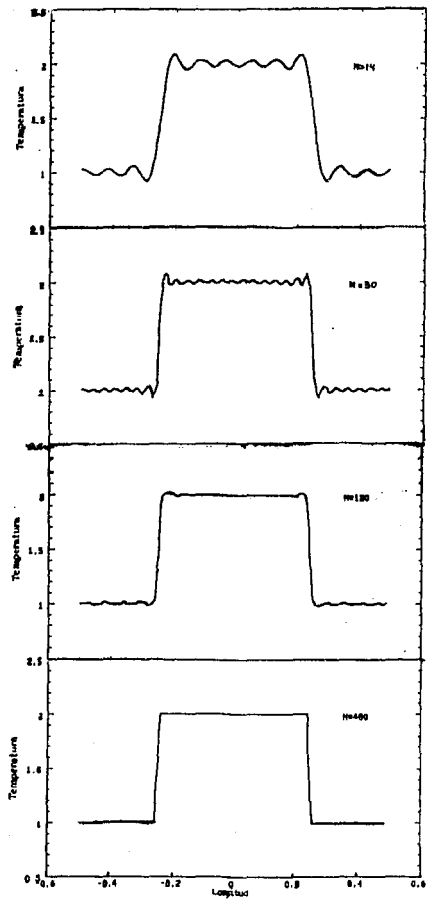


Fig. 2.4 Aproximación de la FPC mediante una serie de Fourier. En cada panel se gráfica la aproximación con diferente número de términos, que se indican con  $N$  en la esquina superior derecha. En este ejemplo se utilizó  $T_0 = 1$  y  $T_1 = 2$ . La unidad de longitud está dada en unidades de  $L$ .

D) Variación en el tiempo de la distribución espacial de la temperatura.

Después de que Fourier encontró, para este caso particular, la serie que describe a la FPE, se concentró en encontrar una nueva función que explicara el comportamiento en el tiempo de la temperatura del anillo definido anteriormente.

Fourier propuso que dicha función debería tener la siguiente forma :

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \frac{T_1+T_0}{2} + \frac{2}{\pi} (T_1-T_0) \cos(k_0 x) \exp(-Ak_0^2 t) \\ & + \frac{2}{3\pi} (T_0-T_1) \cos(3k_0 x) \exp(-Ak_0^2 9t) \\ & + \frac{2}{5\pi} (T_1-T_0) \cos(5k_0 x) \exp(-Ak_0^2 25t) + \dots \quad (2.8) \end{aligned}$$

donde  $k_0 = \frac{2\pi}{L}$ , A es una constante y t es el tiempo.

Para comprobar que esta serie de Fourier describe la difusión de la temperatura con el paso del tiempo demostraremos que esta serie es una solución de la Ecuación de Difusión (2.1) dada por

$$\frac{\delta T(x, t)}{\delta t} = K \frac{\delta^2 T(x, t)}{\delta x^2}$$

Demostración:

Sea

$$T = \exp(\alpha x + \beta t) \quad (2.9)$$

una solución particular de la ecuación lineal no homogénea (2.1) cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. Substituyendo en (2.1) queda que

$$\beta = A\alpha^2, \quad (2.10)$$

entonces si (2.10) es verdadera, (2.9) es una solución de (2.1) cualquiera que sea el valor de  $\alpha$ , por lo tanto ésto es verdadero cuando  $\alpha = ik_0$ . Substituyendo en (2.9) queda que

$$T_n = \exp(ik_0 x + \beta t) = \exp(ik_0 x + A\alpha^2 t) = \exp(ik_0 x - An^2 k_0^2 t),$$

en consecuencia,

$$T_n = \exp(-An^2 k_0^2 t) \exp(ik_0 x); \quad T_n = \exp(-An^2 k_0^2 t) \exp(-ik_0 x)$$

son soluciones también de (2.1); entonces por el Principio de Superposición la suma y la diferencia

$$T_n = \frac{1}{2} \exp(-An^2 k_0^2 t) (\exp(ik_0 x) \pm \exp(-ik_0 x)) \quad (2.11)$$

son también soluciones de (2.1), entonces

$$T_n = g_n \exp(-An^2 k_0^2 t) \cos(nk_0 x) \quad (2.12 \text{ a})$$

$$T_n = h_n \exp(-An^2 k_0^2 t) \sen(nk_0 x) \quad (2.12 \text{ b})$$

donde  $g_n$  y  $h_n$  son constantes. Podemos verificar que las funciones dadas en (2.12 a) y (2.12 b) satisfacen la ecuación de difusión (2.1) por lo tanto la serie para  $T(x,t)$  es también una solución de (2.1).  $\square$

Con esto podemos concluir que la Serie de Fourier describe una curva particular de la familia de curvas de la ecuación diferencial (2.1).

Para visualizar el comportamiento de la temperatura grafiquemos la serie de Fourier en distintos instantes de tiempo. Definiendo  $k_0 t = \tau$  en  $T(x,t)$  nos queda

$$\begin{aligned}
 T(x,t) = & \frac{T_1+T_0}{2} + \frac{2}{\pi} (T_1-T_0) \cos(k_0 x) \exp(-\tau) \\
 & + \frac{2}{3\pi} (T_0-T_1) \cos(3k_0 x) \exp(-9\tau) \\
 & + \frac{2}{5\pi} (T_1-T_0) \cos(5k_0 x) \exp(-25\tau) + \dots, \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

lo que facilitará la elaboración de la gráfica de la función. Escojamos para esto  $\tau = 0.0, 0.03, 0.3$  y  $3.0$ . Veamos su comportamiento en la Figura 2.5.

Note que cuando  $\tau = 0$ , la serie de Difusión de la Temperatura se convierte en la serie de Fourier que describe la temperatura del anillo al inicio del problema. Cuando el tiempo se hace muy grande, el anillo tiende a hacerse isotérmico, con la temperatura tendiendo a  $(T_1 + T_0)/2$ .

En resumen, la idea de Fourier consiste en representar la distribución original de temperatura como una serie de cosenos y senos y luego atenuar más rápidamente en el tiempo a los términos de alta frecuencia (P.ej Fourier 1955).



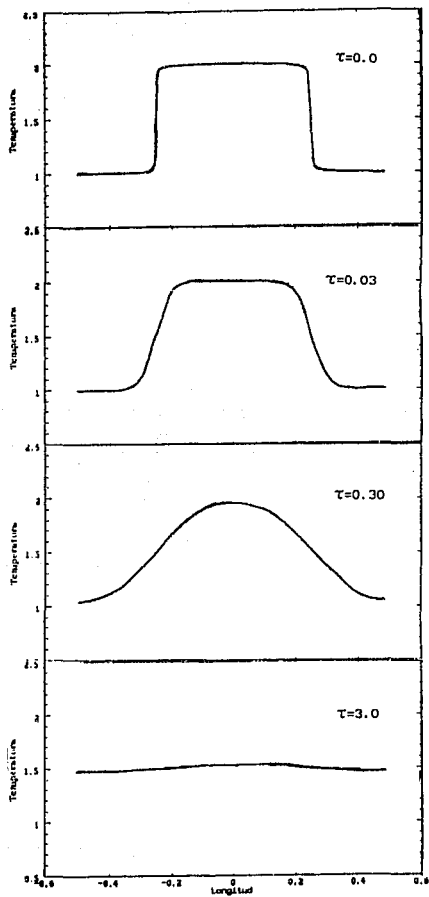


Fig. 2.5 Temperatura del anillo para diferentes tiempos que se indican por  $\tau$ . La serie de Fourier utilizada incluyó hasta el término  $N = 100$ . En este ejemplo se utilizó  $T_0 = 1$  y  $T_1 = 2$ . La longitud está dada en unidades de  $L$ .

## CAPITULO III

### LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Cuando uno desea calcular la transformada de Fourier de una función dada, ésta puede estar definida en términos de una variable independiente continua o bien en términos de valores discretos. Veamos más detalladamente en que consisten la transformada continua y la transformada discreta de Fourier.

#### A) La transformada continua de Fourier.

En el capítulo anterior presentamos el desarrollo y una aplicación de la serie de Fourier. A continuación partiremos de esta serie para derivar la transformada continua de Fourier.

Consideremos una función periódica  $f(x)$ , entonces su serie de Fourier en términos de senos y cosenos está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \right) \quad (3.1)$$

para  $\omega_0 = 2\pi/T$ , donde  $T$  es el período de la función.

En muchas aplicaciones de las series de Fourier es conveniente reescribir estas series en términos exponenciales complejos. Expresando las funciones seno y coseno en forma exponencial tenemos que

$$\cos(n\omega_0 x) = \frac{1}{2} \left[ \exp(in\omega_0 x) + \exp(-in\omega_0 x) \right], \quad (3.2)$$

y

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 x) = \frac{1}{2i} \left[ \exp(in\omega_0 x) - \exp(-in\omega_0 x) \right], \quad (3.3)$$

sustituyendo (3.2) y (3.3) en la expresión para la serie de Fourier (3.1), y tomando en cuenta que  $1/i = -i$ , se obtiene el siguiente resultado

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \exp(in\omega_0 x) + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \exp(-in\omega_0 x) \right]. \quad (3.4)$$

Definiendo

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad (3.5)$$

entonces

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(in\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \exp(-in\omega_0 x). \quad (3.6)$$

Y tomando  $n = -n$ , entonces la ecuación (3.6) se puede reescribir

como

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + \sum_{n=-\infty}^1 C_n \exp(in\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(in\omega_0 x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega_0 x) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) se denomina la forma compleja de la serie de Fourier de  $f(x)$ .

Los coeficientes  $C_n$  pueden evaluarse en términos de  $a_n$  y  $b_n$  los cuales ya conocemos, por lo tanto

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx, \quad (3.8)$$

para el coeficiente  $n$ -ésimo obtenemos,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} ( a_n - i b_n ) \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx - i \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \left[ \cos(n\omega_0 x) - i \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \right] dx \right\} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp(-in\omega_0 x) dx, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

y de manera análoga,

$$C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp(in\omega_0 x) dx. \quad (3.10)$$

A continuación veremos como podemos obtener, a partir de la serie de Fourier de una función, su transformada de Fourier correspondiente.

Sustituyendo el coeficiente  $C_n$  de (3.9) en la ecuación (3.7), se obtiene

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) \exp(-in\omega_0 y) dy \right] \exp(in\omega_0 x). \quad (3.11)$$

En la ecuación anterior introducimos la variable  $y$  en la integral para evitar confusión con  $x$ .

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) \exp(-in\omega_0 y) dy \right] \omega_0 \exp(in\omega_0 x). \quad (3.12)$$

Sea  $\omega_0 = \Delta\omega$ , y además se tiene que cuando  $T \rightarrow \infty$  existe una  $n$ , tal que  $n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega$ . De este modo (3.12) se convierte en:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) \exp(-in\Delta\omega y) dy \right] \exp(in\Delta\omega x) \Delta\omega. \quad (3.13)$$

En el límite,  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , y la sumatoria se convierte en la integral sobre  $\omega$ , es decir, la función  $f(x)$  se convierte en:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\omega y) dy \right] \exp(i\omega x) d\omega. \quad (3.14)$$

En la Figura 3.1 se muestra gráficamente como al hacer crecer  $T$ , la densidad de valores obtenidos a partir de la serie de Fourier aumenta, y finalmente cuando  $T \rightarrow \infty$ , la serie se hace una función continua (ver parte c) de la Figura 3.1).

Si se define

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx, \quad (3.15)$$

entonces (3.14) se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega. \quad (3.16)$$

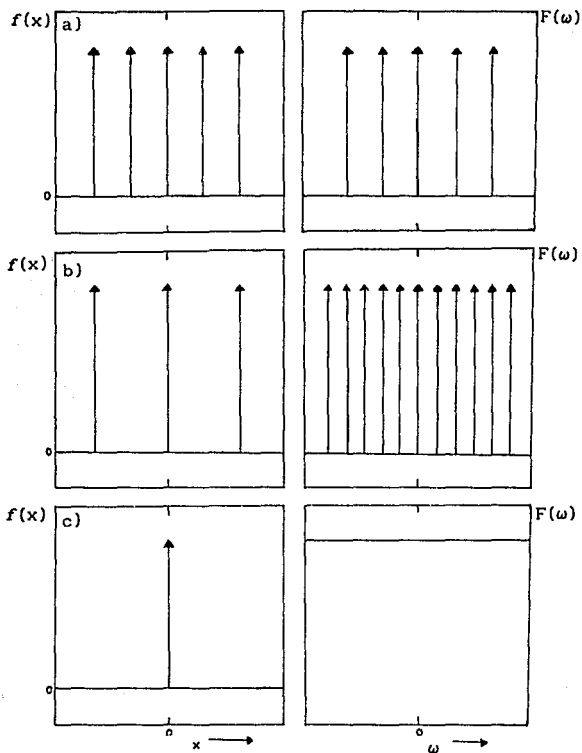


Fig. 3.1 a) Gráfica de una función  $f(x)$  que está dada por valores periódicos (izquierda) y su transformada de Fourier (derecha). b) Al aumentar el período o el intervalo de separación de la función en la gráfica de la derecha, el número de puntos de la transformada aumenta y su intervalo de separación va disminuyendo. c) Cuando el período de la función es infinito su transformada se hace continua.

La función definida en (3.15) se conoce como la *integral de Fourier* o *transformada de Fourier* de  $f(x)$ , y  $f(x)$  se denomina la *transformada inversa de Fourier* de  $F(\omega)$ . Las ecuaciones (3.15) y (3.16) se llaman a menudo *el par de transformadas de Fourier* (P.ej. Hsu 1973).

Se debe hacer notar que las condiciones para que exista la transformada de Fourier  $F(\omega)$  de  $f(x)$  están dadas por

1.- La  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  debe existir, y

2.- Que las discontinuidades de la función sean finitas.

B) La transformada discreta de Fourier.

En el inciso anterior obtuvimos la transformada de Fourier para valores continuos de la variable independiente. Pero también existen casos en que los valores de la función están dados solamente por valores discretos de la variable independiente, como en las medidas físicas hechas en intervalos de tiempo regulares durante un experimento. Cualquiera que sea la forma de una función ya sea en términos de una variable continua o discreta, si se evalúa la transformada por cálculos numéricos, los valores de la transformada estarán disponibles solo en intervalos discretos. Ocasionalmente pensamos en esto como si existiera una función de variable continua y estuviéramos aproximándola por valores discretos. Sin embargo, desde un punto de vista operacional, es irrelevante hablar de la existencia de otros valores que no sean



los calculados; por lo tanto es deseable tener una teoría matemática de las cantidades ahora utilizadas.

Consideremos ahora una señal dada por una función continua del tiempo  $t$ , algunos valores de ésta aparecen tabulados en la Tabla 3.1. Reprodúzcamos esta función por algunos valores discretos en términos de la variable  $\tau$  como se muestra en la Tabla 3.2.

TABLA 3.1

$t$ (milliseg)	$v(t)$
- 250	0
- 150	0.588
- 50	0.951
50	0.951
150	0.588
250	0

TABLA 3.2

$\tau$	$f(\tau)$
0	0
1	0.588
2	0.951
3	0.951
4	0.588
5	0

La representación gráfica de la función en términos de la variable continua  $t$  y de la variable discreta  $\tau$  se muestran en la Figura 3.2. De hecho la situación en que un conjunto finito de valores es dado y un conjunto finito de valores es calculado, cae dentro de la teoría continua. Sin embargo es provechoso empezar de nuevo antes que generar la teoría de la transformada discreta de Fourier dentro de un esquema continuo.

Los valores discretos de la transformada de una función discreta serán considerados como una serie de funciones delta igualmente espaciadas de intensidades dadas por los coeficientes. Por definición (Bracewell 1986) la "serie de Fourier" de este conjunto de valores tendrá coeficientes del tipo

$$f(\tau) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cos(2\pi u \tau / N) \quad (3.17)$$

y similarmente para la función seno. La cantidad  $u/N$  es análoga a la frecuencia medida en ciclos por intervalo muestreado. La correspondencia de las variables utilizadas en el caso continuo y el caso discreto se resume en la Tabla 3.3:

TABLA 3.3

Relacion de las variables utilizadas en el caso continuo y el caso discreto.

	tiempo	frecuencia
caso continuo	$x = t$	$\omega$
caso discreto	$\tau$	$u/N$

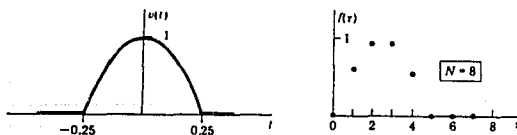


Fig. 3.2 Una función de variable continua  $t$  y una forma de representarla por ocho valores discretos.

Aprovechando las características de la notación compleja, definamos la Transformada Discreta de Fourier  $F(u)$  de  $f(\tau)$  con  $\tau = 0, 1, 2, \dots, N-1$  por

$$F(u) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \exp[-i2\pi(u/N)\tau] , \quad \tau=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

a su vez  $f(\tau)$  será la antittransformada de  $F(u)$

$$f(\tau) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[i2\pi(u/N)\tau] . \quad u=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Bracewell (1986) adopta la siguiente notación para el par de transformadas de Fourier

$$F(u) = N^{-1} \sum_{\tau=-(1/2)N}^{(1/2)N-1} f(\tau) \exp[-i2\pi(u/N)\tau] \quad (3.20)$$

$$f(\tau) = \sum_{u=-(1/2)N}^{(1/2)N-1} F(u) \exp[i2\pi(u/N)\tau] , \quad (3.21)$$

donde  $u/N$  está definido sobre el rango  $-(1/2) \leq u/N \leq (1/2)$ .

La teoría de la TDF es precisa y por sí misma consistente. Describe exactamente las operaciones desarrolladas

con los datos muestreados de una función cuando va a calcularse su transformada discreta de Fourier, por lo que si en lugar de tener una función periódica continua tenemos una serie de puntos donde la función ha sido evaluada, ésto es, partimos de valores discretos de la función (ver Fig. 3.2), obtenemos entonces una transformada que aproximará a la transformada de Fourier, y es aquí donde empleamos la TDF. Sin embargo podemos preguntarnos, ¿ qué tan correctos pueden ser estos valores discretos ? Podemos mostrar mediante ejemplos sencillos que dichos valores no son necesariamente correctos.

Considere una función  $f(x)$  de banda limitada, o sea que su transformada de Fourier  $F(s)$  es cero para  $s \geq s_c$  como se muestra en la Fig.3.3 (a). Si multiplicamos  $f(x)$  por el símbolo shah  $\text{III}(x/\tau)$  (ver Apéndice B) obtenemos un muestreo discreto de  $f(x)$  con intervalos de separación de longitud  $\tau$ . En el espacio de la transformada de Fourier, ésto equivale a la convolución con la transformada del símbolo shah, ésto es

$$\overline{f(x) \text{III}(x/\tau)} = \tau \text{III}(\tau s) * F(s),$$

(ver Apéndice C), donde la línea sobre la función significa que es la transformada de dicha función. La convolución representa la réplica ilimitada de  $F(s)$  con un período de  $\tau^{-1}$  (Fig.3.3 (b) y (c)). Podemos entonces reconstruir  $f(x)$  si se puede recuperar  $F(s)$ . En la Figura 3.3 (d) se muestra el caso del muestreo con período crítico, en el cual las réplicas de  $F(s)$  quedan lo más juntas posibles sin traslaparse.

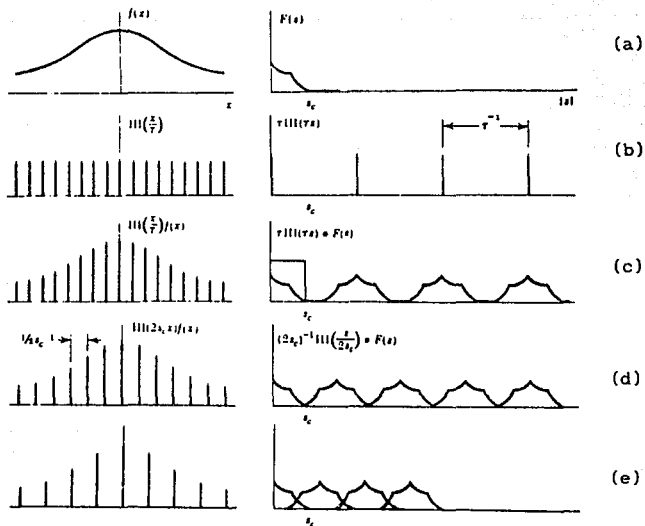


Fig. 3.3 Demostración del Teorema de Muestreo.

Si el muestreo se hace con un período  $\tau > 1/2 s_c^{-1}$ , las réplicas de  $F(s)$  comienzan a trasladarse, lo anterior se puede ver claramente en la gráfica (e) de la Figura 3.3. Este traslape se conoce como "aliasing" y causa que altas frecuencias de la función aparezcan por reflexión como bajas frecuencias (ver Fig. 3.4). Si la función no es de banda limitada encontramos que siempre habrá traslape, sin importar que tan fino sea el muestreo (siempre y cuando sea un muestreo discreto). En este caso la recuperación exacta de  $f(x)$  es casi imposible. Note que para un muestreo crítico con  $\tau = 1/2 s_c^{-1}$ , las réplicas de  $F(s)$  solamente se tocarán (Fig. 3.3 (d)). Esta es la manera óptima de muestrear una

función de banda limitada (Bracewell 1986).

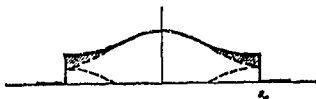


Fig. 3.4 Las frecuencias altas de una función aparecen por reflexión como frecuencias bajas como lo indican las partes sombreadas.

La manera de recuperar la función  $f(x)$  a partir de  $F(s)$  es como sigue. En la Figura 3.3 (c) aparece la función  $f(x)$  multiplicada por la función shah,  $\text{III}(x)$ ; que como ya vimos en el dominio de la transformada equivale a la convolución con  $\text{III}(s)$ . En este caso evitamos el traslape aplicando el criterio de Nyquist (1928).

En el dominio de la transformada filtramos la función  $F(s)$  multiplicándola por la función rectángulo  $\text{II}(s)$  como se muestra en la Figura 3.5 (a), con esta operación recuperamos  $F(s)$ , lo que en dominio de la función  $f(x)$  equivale a convolucionar con la función  $\text{sinc}(x)$  en el muestreo discreto y así obtenemos  $f(x)$  (ver Fig. 3.3 (b)).

Otra fuente de error radica en que el muestreo es además de discreto, truncado, o sea que tratamos con un conjunto de datos finitos. Supongamos una función  $f(x)$  de banda limitada, la cual muestreemos correctamente, o sea con  $\tau < 1/2 s_c^{-1}$  que nos evita

problemas de traslape. Ahora truncamos el muestreo (como es el caso en la realidad porque se observa por un tiempo finito), que equivale a multiplicar  $f(x)$  por una función rectángulo  $\Pi(x)$ . En la transformada  $F(s)$  esta operación es equivalente a convolucionar con la transformada de  $\Pi(x)$ , la cual es una función sinc(s) (ver Apéndice C). Esta convolución "ensuaviza" a  $F(s)$ . Además, debido a que la función sinc(s) se extiende de  $-\infty$  a  $+\infty$ , hay "fugas" de cualquiera de las réplicas de  $F(s)$  hacia las demás. Podemos reducir este efecto usando una función de truncamiento para  $f(x)$  que no sea tan brusca como la función rectángulo, concretamente una función cuya transformada no tenga oscilaciones fuertes lejos del centro. Por ejemplo se podría "truncar" la cadena de datos multiplicando por una Gaussiana, cuya transformada es otra Gaussiana (ver Apéndice C)

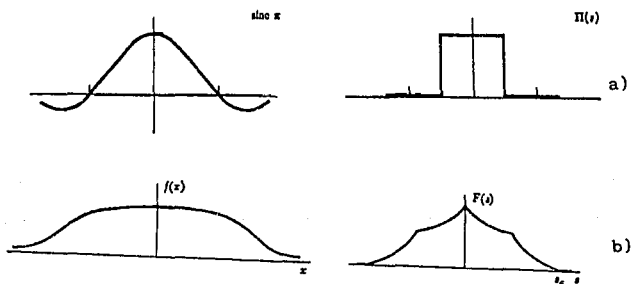


Fig. 3.5 a) La función filtro o función interpolación  $\text{sinc}(x)$  y su transformada la función rectángulo  $\Pi(x)$ , b) una función  $f(x)$  y su espectro filtrado por la función  $\Pi(x)$ .

Una aproximación, en el límite, del error cometido al

aproximar la transformada de Fourier por medio de la TDF está dado por el módulo de la transformada de Fourier, ésto es

$$|F(s)| = \left| \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2i\pi xs) dx \right| \leq \int_0^{\infty} |f(x)|.$$

Dado que una condición necesaria para la existencia de la transformada de Fourier es la existencia de la integral infinita absoluta de  $f(x)$ , entonces la integral en el lado derecho de la desigualdad anterior existe y se puede tomar como el límite del error cometido. Note que este límite es muy grande, sin embargo no derivaremos una forma explícita del error ya que ésto nos llevaría demasiado tiempo debido a lo complicado de su deducción.

C) La transformada rápida de Fourier.

Para 1965 el método de calcular la transformada discreta de Fourier para el análisis de diversos problemas era ampliamente conocido, pero el hecho de que el cálculo de ésta era muy largo y por lo tanto tardado, impidió su progreso en diversos campos. Como consecuencia se buscó un método que disminuyera el tiempo de cálculo, con lo que se llegó a la Transformada Rápida de Fourier (TRF).

Hay varias presentaciones para explicar la TRF. En esta tesis sólo analizaremos una de ellas tomadas del Bracewell (1986). Por definición podemos escribir la relación con la Transformada Discreta de Fourier (TDF), por medio de un producto matricial,



$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde  $W = \exp(-i2\pi/N)$ . Note que  $W$  es la raíz  $N$ -ésima de la unidad ya que  $W^N = \exp(-i2\pi) = 1$ .

Ahora consideremos una sucesión de  $N$  elementos que puede ser dividida en dos sucesiones cada una con  $N/2$  elementos, en la primera dejemos los elementos en posición par y en la segunda los elementos posicionados nones. Por ejemplo  $\{ 8 7 6 5 4 3 2 1 \}$  se dividirá en  $\{ 8 6 4 2 \}$  y  $\{ 7 5 3 1 \}$ . Cada una de estas posee una TDF. Sin embargo si queremos obtener una TDF de la sucesión original entonces realicemos la siguiente suma

$$\{ 8 7 6 5 4 3 2 1 \} = \{ 8 0 6 0 4 0 2 0 \} + \{ 0 7 0 5 0 3 0 1 \}.$$

La TDF de cada una de estas sucesiones puede obtenerse utilizando los teoremas de estiramiento y corrimiento (ver Apéndice C). Del teorema de estiramiento sabemos que si

$$\{ 8 6 4 2 \} \Rightarrow \{ A B C D \}$$

entonces

$$\{ 8 0 6 0 4 0 2 0 \} \rightarrow \frac{1}{2} \{ A B C D A B C D \}. \quad (3.23)$$

La flecha de la ecuación anterior indica que la transformada de la sucesión de la izquierda es de la forma que se muestra al lado derecho de la flecha.

De la misma forma, si

$$\{ 7 5 3 1 \} \rightarrow \{ P Q R S \}$$

entonces

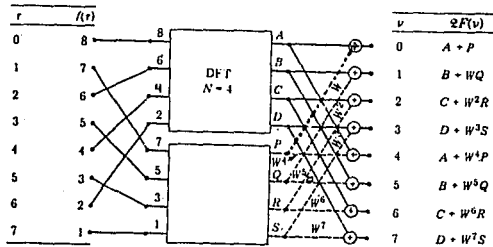
$$\{ 7 0 5 0 3 0 1 0 \} \rightarrow \frac{1}{2} \{ P Q R S P Q R S \}. \quad (3.24)$$

Ahora aplicando el teorema de corrimiento obtendremos que

$$\{ 0 7 0 5 0 3 0 1 \} \rightarrow \frac{1}{2} \{ P W Q W^2 R W^3 S W^4 P W^5 Q W^6 R W^7 S \}. \quad (3.25)$$

donde la multiplicación por  $W$  significa rotación por una  $N$ -ésima de revolución en el plano complejo; así que el efecto del corrimiento es aplicar una fase de retraso que se incrementa progresivamente a lo largo de la sucesión de elementos. Sumando las ecuaciones (3.23) y (3.24) obtendremos la TDF de la sucesión inicial. Hemos visto que la transformación con  $N = 8$  ha sido dividida en dos transformaciones con  $N = 4$ , lo que potencialmente representa el 50% de tiempo ganado, dado que el número de multiplicaciones en la TDF, desarrollada en la matriz (3.22) son  $N^2$ . En realidad la ganancia no es tan grande porque hay que añadir

operaciones adicionales. Veamos ahora una representación gráfica de las subdivisiones de la sucesión original:



Comenzando con la sucesión original en el lado izquierdo, la reordenaremos en dos sucesiones cortas  $\{ 8 6 4 2 \}$  y  $\{ 7 5 3 1 \}$  que son las entradas de dos transformadas con  $N = 4$  y cuyas salidas son  $\{ A B C D \}$  y  $\{ P Q R S \}$  respectivamente. Las líneas continuas indican que A,B,C y D son transferidas a los nodos de salida para obtener  $\{ A B C D A B C D \}$ . Las líneas discontinuas han sido etiquetadas con los factores que nos envían la salida, P, WQ,  $W^2R$ , etc. (ecuación 3.25) a los nodos de salida donde se realiza una suma que nos llevará a la sucesión original. La Figura 3.6 nos muestra una reducción mayor, donde cada transformada de cuatro elementos es nuevamente transformada en transformadas de dos elementos. En la Fig. 3.7 se muestra la reducción completa con multiplicaciones y adiciones. Se puede demostrar que la transformada rápida de Fourier es del orden de  $N/\log_2 N$  veces más rápida que la normal. Para valores de N muy grandes, ésto representa un ahorro considerable de tiempo.

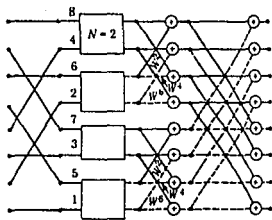


Fig. 3.6 Reducción a cuatro transformadas discretas de Fourier de dos elementos.

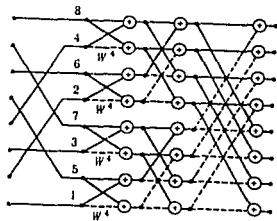


Fig. 3.7 Reducción de transformadas discretas de Fourier de ocho elementos a 3x16 multiplicaciones y 2x18 adiciones. La línea continua muestra multiplicación por la unidad y la línea discontinua representa multiplicación por el factor muestreado.

Si el número de elementos no puede ser dividido repetidamente entre 2 (i.e.,  $N$  no es potencia de 2), se debe de tener un algoritmo similar que simplifique en tiempo, ésto es, si por ejemplo  $N$  es potencia de 3 entonces la reducción final debe incorporar transformadas de tres elementos; sin embargo tales algoritmos no son tan rápidos.

## ESPECTROSCOPIA CON AUTOCORRELADORES DIGITALES

Con el propósito de analizar las señales recibidas por un radio telescopio durante un periodo de observación, fue necesaria la creación de una teoría de autocorreladores digitales. En la mayoría de los casos es tanta la cantidad de datos que se reciben que es necesario buscar una manera de economizar los cálculos computacionales, así como sus requerimientos de memoria.

## A) Espectroscopia con autocorreladores digitales.

Supongamos que tenemos una onda electromagnética monocromática y polarizada linealmente (onda a una sola frecuencia y oscilando en un plano), como la que se muestra en la Figura 4.1. El campo eléctrico producido por esta onda tiene la forma :

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t), \quad (4.1)$$

donde  $E_0$  es la amplitud de la onda,  $\omega_0$  es la frecuencia de la radiación y  $t$  es el tiempo.

Las señales provenientes de una fuente cósmica se pueden considerar como un proceso continuo donde el resultado final nos lleva a la obtención de un espectro. El espectro no es más que una representación de la potencia de la señal como función de la frecuencia.

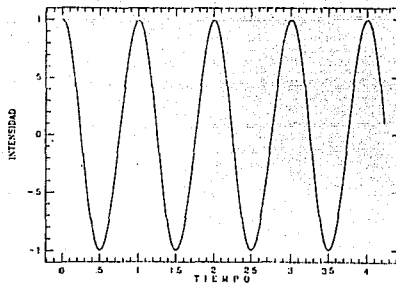


Figura 4.1 Intensidad de una onda electromagnética monocromática y polarizada linealmente como función del tiempo.

En forma compleja, el campo eléctrico se representa como

$$E(t) = E_0 \exp(-i\omega_0 t). \quad (4.2)$$

El flujo de energía debido a esta onda electromagnética que pasa a través de un diferencial de área por unidad de tiempo y de frecuencia estaría dado por ( Rybicki y Lightman 1979 )

$$P(\omega) = \frac{dW}{dA d\omega dt} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \hat{E}_T(\omega) \right|^2 \quad (4.3)$$

donde  $dW$  es el diferencial de energía,  $dA$  es el diferencial de área,  $d\omega$  el diferencial de frecuencia,  $dt$  es el diferencial de tiempo y  $c$  es la velocidad de la luz. Además

$$\hat{E}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (4.4)$$

por lo tanto

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\omega - \omega_0) t) dt \right|^2 .$$

Pero como por definición la función delta está dada por,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\omega - \omega_0) t) dt = \delta(\omega - \omega_0) ,$$

entonces obtenemos que la densidad de flujo de energía queda como

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \frac{E_0}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) \right|^2 . \quad (4.5)$$

Esta es una función que vale cero para toda  $\omega$  excepto cuando  $\omega = \omega_0$ . El cuadrado de la amplitud de un espectro de frecuencia  $|E(\omega)|^2$  es conocido como el espectro de potencia (ver Apéndice B). Es posible evaluar cuanto vale  $P_{\omega}$  cuando  $\omega = \omega_0$ . Por lo tanto desarrollando la expresión (4.5),

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \frac{E_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i(\omega - \omega_0) t) dt \right|^2$$

llegamos a

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \frac{E_0}{2\pi} \frac{2 \operatorname{sen}[(\omega - \omega_0) T]}{(\omega - \omega_0)} \right|^2 ,$$

y como  $\omega \rightarrow \omega_0$  expandemos el seno y obtenemos que

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \frac{E_0}{2\pi} 2 T \right|^2 ,$$

entonces

$$P_{\omega} = c \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_0^2}{\pi^2} T. \quad (4.6)$$

Por unidad de tiempo

$$P_{\omega} = \frac{cE_0^2}{\pi^2}. \quad (4.7)$$

Ahora bien, en la práctica observamos la señal proveniente de una fuente cósmica por un tiempo finito y además vamos a suponer que el muestreo de esta señal es discreto. Por el teorema de muestreo de Nyquist (1928), sabemos que la frecuencia de muestreo debe de ser mayor a  $2\omega_0$ .

En el caso de una señal monocromática, el tener observaciones por un tiempo finito hace que el espectro de potencia sea una función  $\text{sinc}(x)$  al cuadrado como se muestra en la Figura 4.2. Adicionalmente, y como discutimos en el capítulo anterior, el muestreo discreto producirá réplicas y ésto dará lugar a "fugas" entre las réplicas y el espectro se alejará algo del de una función  $\text{sinc}(x)$  al cuadrado.

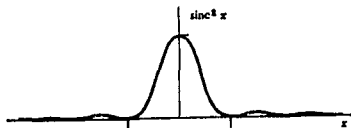


Figura 4.2 Gráfica de la función  $\text{Sinc}^2(x)$ .



Por ejemplo, en la Fig. 4.3 mostramos los resultados de una simulación con una señal monocromática con frecuencia  $\omega_0 = 1$  Hz, muestreada con  $\omega_M = 3$  Hz. En la Figura 4.3 tenemos a la izquierda los puntos muestreados (128) y a la derecha su transformada discreta elevada al cuadrado, esto es, su espectro de potencia.

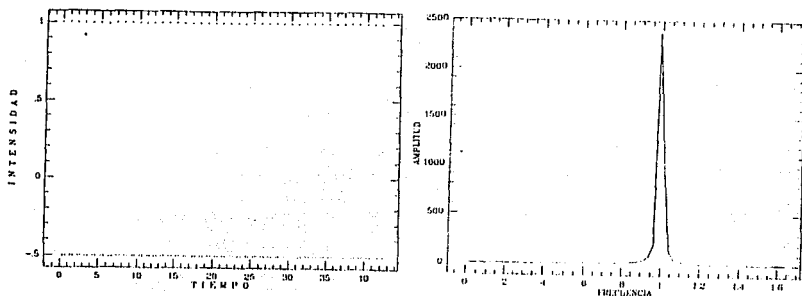


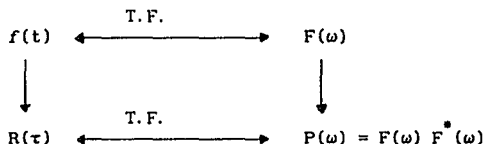
Figura 4.3 el muestreo de una señal monocromática con  $\omega_0 = 1$  Hz, muestreada a  $\omega_M = 3$  Hz, y el espectro de potencia de la señal. El número de puntos del muestreo es 128.

Sin embargo, este método discreto no es nada práctico porque podríamos estar muestreando una señal a 100 MHz durante 10 minutos produciendo  $6.0 \times 10^{10}$  puntos, y no es práctico obtener la transformada discreta de Fourier de un vector tan largo. Entonces, en lugar de registrar los puntos individualmente, la información que se guarde tiene que ser la mínima posible capaz de reproducir la señal original. Para esto se construye la llamada Función de Autocorrelación.

El espectro de potencia de una señal está dado por la transformada de Fourier de la Función de Autocorrelación de la señal. Esta propiedad es conocida como la relación de Wiener -

Khinchin (P.ej. Max 1972), la cual es aplicable a señales que son de naturaleza estocástica.

En el siguiente diagrama vemos dos caminos equivalentes para obtener el espectro de potencia.



donde  $f(t)$  es la función original que representa la onda muestreada,  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$ ,  $R(\tau)$  es la Función de Autocorrelación y  $P(\omega)$  es el espectro de potencia. Las flechas indican las direcciones permitidas para pasar de una función a otra. Lo anterior puede demostrarse mediante el Teorema de Autocorrelación, sin embargo antes de hacerlo definiremos el concepto de Función de Correlación (Hsu 1973).

La Función de Correlación asocia la información entre pares de puntos de dos funciones. Para dos funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  la Función de Correlación se define como

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \quad (4.8)$$

donde  $\tau$  es el desplazamiento (que podrá ser en el tiempo, en el espacio, etc.) de una función con respecto a la otra. En forma análoga, se define

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(t - \tau) dt . \quad (4.9)$$

La Función de Correlación  $R_{12}(\tau)$  ó  $R_{21}(\tau)$  nos da una medida de la similitud o interdependencia (correlación) entre las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  en función del parámetro  $\tau$ . Si  $R_{12}(\tau) = 0$  para cualquier  $\tau$  se dice entonces que las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  no están correlacionadas.

Si  $f_1(t) = f_2(t)$  entonces la Función de Correlación queda dada por

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt , \quad (4.10)$$

conocida como la "Función de Autocorrelación" de  $f_1(t)$ .

Se puede demostrar que

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt \quad (4.11)$$

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt \quad (4.12)$$

Note que el resultado es independiente de si se desplaza la función  $f_1(t)$  una cantidad  $\tau$  en dirección negativa; o si se desplaza a la función  $f_2(t)$  en la misma cantidad pero en dirección positiva.

Además

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau) ,$$

y de la eq. (4.13) vemos que la Función de Autocorrelación es una función par de  $\tau$ .

Es importante notar que la autocorrelación implica pérdida de información en la fase de la función  $f(t)$  ya que no es un proceso reversible, ésto es, no es posible recuperar a partir de la Función de Autocorrelación la función original  $f(t)$ .

Por ejemplo, consideremos una función coseno( $t$ ). Cuando esta función es desplazada con respecto de sí misma por una cantidad  $\tau$ , multiplicada con la función original, y después se integra, el resultado claramente será el mismo que para una función sinusoidal del mismo período y amplitud. Más aún, el resultado será el mismo para cualquier función armónica de  $t$ , con el mismo período y amplitud, y un origen arbitrario de  $t$ . Entonces al calcular la Función de Autocorrelación se perderá la información de la fase de la función armónica de la cual fué obtenida.

Para determinar la validez de los dos caminos que nos llevan a la obtención del espectro de potencia de una función demostraremos el siguiente teorema:

-Teorema de Autocorrelación. [Wiener - Khinchin (Bracewell 1986)]

Si  $f(t)$  tiene la transformada de Fourier  $F(\omega)$ , entonces la Función de Autocorrelación  $R(\tau)$  tiene la transformada de Fourier  $|F(\omega)|^2$ .

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \exp(i2\pi t\omega) \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \exp(i2\pi t\omega) \, d\omega$$

$$= f(t) * f^*(-t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t - \tau) \, d\tau \quad (4.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(u) f(u + \tau) \, du \quad (4.15)$$

$$= R(\tau)$$

En general los resultados de este teorema se aplican en cualquier señal recibida por un radiotelescopio, debido a que de esta forma es posible registrar la información. En la sección D) de este capítulo veremos un programa computacional que sigue el camino de la autocorrelación para obtener el espectro de potencia.

#### B) Generación del ruido.

En las observaciones físicas ocurre un fenómeno aleatorio que se presenta como fluctuaciones no deseadas que ocasionalmente esconden la información requerida; a este fenómeno se le conoce como ruido.

En la Fig.4.4 se muestra una grabación obtenida por una fuente extragaláctica de radio, Cygnus A, después de haber pasado por el haz de un radiotelescopio. Claramente la emisión de la

fuente consiste de al menos dos componentes, pero existe una tercera fuente menos intensa en comparación con las otras dos que no puede ser identificada al estudiar la grabación debido a la presencia de oscilaciones no deseadas debidas al ruido.

Las fuentes del ruido en general se atribuyen a la radiación en microondas emitidas térmicamente por la tierra y por la atmósfera, y que entran por el receptor; también el receptor genera radiación. Además la emisión de fondo contribuye con una pequeña cantidad. Toda la radiación no deseada se suma y el total no es constante. En el caso mostrado en la Figura 4.4 las fluctuaciones son más pequeñas que la señal observada.

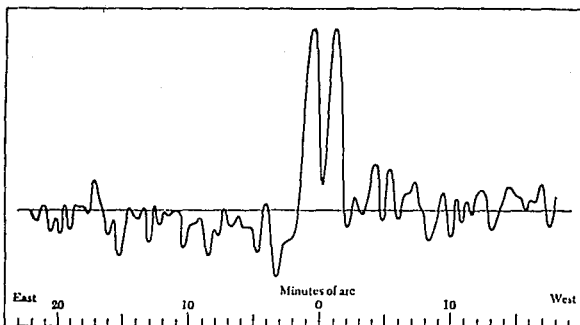


Figura 4.4 Grabación de la potencia recibida de una fuente extragaláctica Cygnus A después de haber pasado a través del haz de un radiotelescopio.

Para modelar las características del ruido, el cual en la práctica sigue una distribución de probabilidad normal, se construye una onda de ruido por un procedimiento puramente numérico. Uno de los métodos utilizados para este propósito es tomando los primeros  $N = 32$  dígitos sucesivos en la representación

decimal del número  $\pi$ , y utilizarlos para lograr nuestro propósito.

Daremos una breve explicación de como se manejan los dígitos de  $\pi$  para crear la onda de ruido distribuida normalmente. En el histograma (b) de la Figura 4.5. se ve el número de ocurrencias para cada dígito de  $\pi$  que a simple vista parecería no tener una probabilidad uniforme como se muestra en el histograma (a), sin embargo ésta no es una forma de probar que la sucesión finita en (b) sea incompatible con una probabilidad uniforme.

Si suponemos que los dígitos están uniformemente distribuidos obtendremos que la media  $m$  de los dígitos de  $\pi$ , tiende al límite  $\mu = 4.5$  cuando el número de dígitos ( $N$ ) crece indefinidamente, esto es

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} m = 4.5 \quad (4.16)$$

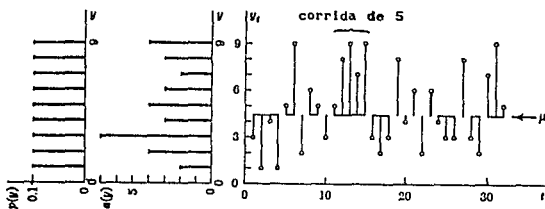


Figura 4.5. Una sucesión finita de dígitos a partir de la representación decimal de  $\pi$ ; en el histograma a) su probabilidad uniforme, en b) la ocurrencia y en c) la conexión entre un dígito y otro de la sucesión infinita.

En base a lo anterior se puede determinar una probabilidad de ocurrencia para cada dígito de la sucesión (con  $N = 32$ ), y se toma en el límite como 0.1, llamando a este valor la probabilidad  $p(Y)$  de que  $Y$  ocurra. En el histograma (a) de la Fig. 4.5. se puede ver

que  $p(Y)$  posee la propiedad

$$\sum_{Y=0}^9 p(Y) = 1, \quad (4.17)$$

requerida para una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Otra propiedad que debe cumplir  $p(Y)$  es  $0 < p(Y) \leq 1$  para toda  $Y$ , y  $p(Y) \neq 0$ .

De lo anterior podemos concluir que  $\mu$  es el valor esperado, o la media en el límite de una sucesión indefinidamente larga; y que la varianza de la sucesión es el segundo momento de  $p(Y)$  con respecto a  $\mu$ , ésto es

$$\mu = \sum_{Y=0}^9 Y p(Y) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{Y=0}^9 (Y - \mu)^2 p(Y). \quad (4.18)$$

Una sucesión de dígitos se puede interpretar como una forma de onda, ya sea por interpolación de valores intermedios o imaginando una sucesión de impulsos regulares con intensidades dadas por los dígitos aleatorios. En el primer caso tendremos un espectro cortado a una frecuencia fija, y en el segundo el espectro llegará a frecuencias indefinidamente altas.

Cualquiera de estos espectros puede pasarse a través de un filtro para ver que efectos tiene sobre la salida. Pensamos en un filtro como en un aparato que transmite en forma diferente, diferentes frecuencias, y así uno de los efectos será un cambio en el espectro de la onda de entrada.

Para nuestra sucesión de dígitos  $\{Y\}$  formaremos una nueva



sucesión que representa la suma de los valores sucesivos de  $\{Y\}$ , digamos  $\{\eta t\}$ , y se tomará como el paso a través de un filtro de la forma de onda determinada por  $\{Y\}$ . Definiremos  $\{\eta t\}$  como

$$\eta t = y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+9} \quad (4.19)$$

Los resultados de esta operación se grafican en la Fig. 4.6. En el histograma de la izquierda vemos el total de  $\eta t$ 's para cada rango. Como es de esperarse, el máximo ocurre para  $\eta = 45$ . Estos valores se acercarán a un límite cuando la longitud de la sucesión se incremente. Llamamos a este límite para cada  $Y$  la probabilidad  $P_{10}(Y)$ .

Mediante un diagrama de correlación se puede demostrar la independencia de los dígitos sucesivos de  $\pi$ , dicho diagrama nos da un coeficiente de correlación de 0.03. Haciendo múltiples pruebas de independencia entre los dígitos de  $\pi$  se concluye que dichos dígitos sucesivos son independientes.

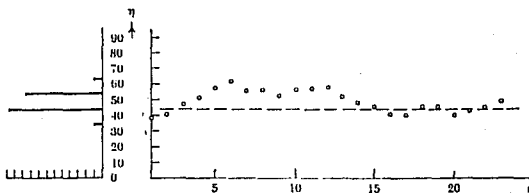


Figura 4.6 Una sucesión de dígitos en los cuales la corrección se introduce entre valores sucesivos (10 puntos) con las correspondientes modificaciones espectrales.

Se puede probar que la suma de dos cantidades independientes que tienen una distribución de probabilidad dada, se distribuye de acuerdo a la convolución de las distribuciones dadas, ésto es,

$P(x) = P_1(x) * P_2(x)]$ . Entonces se pueden obtener los valores numéricos de  $\{p_{10}(Y)\}$  a partir de convoluciones sucesivas, y por el Teorema del Límite Central (ver Apéndice C) se demuestra que estos valores son dados por una distribución normal con media y varianza 10 veces la media 4.5 y la varianza 8.25. Entonces la probabilidad de ocurrencia de un valor Y en la sucesión infinita  $\{\eta_t\}$  está dada aproximadamente por

$$p_{10}(Y) \approx \frac{\exp[-(Y-45)^2/(2 \times 82.5)^2]}{(2\pi \times 82.5)^{1/2}}, \quad (4.20)$$

y por el Teorema del Límite Central una sucesión descrita por una distribución de probabilidad, sujeta a una suma de términos sucesivos e independientes, tiende a una distribución de probabilidad normal. Por lo tanto cuando una onda es pasada a través de un filtro, como el supuesto anteriormente, la salida es una suma de los valores sucesivos de entrada, debidamente pesados, y entonces se puede esperar que la distribución de probabilidad normal sea una propiedad de la amplitud de señales aleatorias emergiendo de los filtros.

De esta forma podemos generar un ruido aleatorio con una distribución de probabilidad normal, el cual está presente en las observaciones por radiotelescopio. En la Figura 4.7 tenemos a la derecha el muestreo de una señal monocromática linealmente polarizada, y a la izquierda el espectro de potencia de dicha señal más una onda de ruido normalizado. Note la diferencia que se presenta en el espectro de potencia de la misma señal pero sin

ruido graficado en la Figura 4.3.

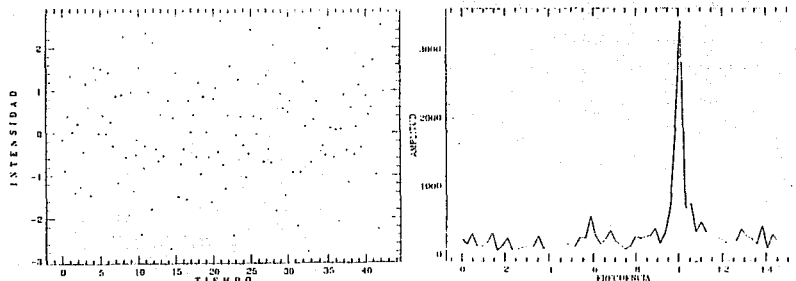


Figura 4.7 a) Muestreo de una señal monocarónica con  $\omega = 1$  Hz. muestreado a  $\omega = 3$  Hz y con ruido añadido. b) el espectro de potencia de la señal. El número de puntos del muestreo es 128.

### C) Espectrómetros de autocorrelación.

Hace algunas décadas era necesario realizar el trabajo espectral en radioastronomía con la ayuda de receptores examinadores de frecuencias o con receptores multicanales. El desarrollo de la electrónica digital hizo posible explotar la precisión y estabilidad de las técnicas digitales para el análisis del espectro.

La aproximación con autocorreladores digitales hace uso de la relación que existe entre la función de autocorrelación y el espectro de potencia, y éste es más fácil de implementar cuando se emplea la cuantización de un bit de la señal de entrada. Aún con las limitaciones impuestas por la velocidad de la lógica digital, la aproximación por lógica digital es actualmente preferible a la aproximación por filtros múltiples, especialmente para

espectrometría de alta resolución, y la habilidad para variar la resolución espectral simplemente cambiando la frecuencia de un reloj que hace al correlador digital equivalente a un gran número de bancos de filtros. Además el espectrómetro de autocorrelación ha demostrado tener una estabilidad superior para integraciones largas (p.ej Cooler 1976).

Para señales de ruido que siguen una distribución de probabilidad normal (Gaussianas), que es el caso que normalmente ocurre en las señales, se conoce a partir del trabajo realizado por Van Vleck (1966), que la cuantización puede llevarse al extremo de solo grabar el signo de los puntos del muestreo. El precio que hay que pagar por no mantener la información de la amplitud es una pérdida de sensibilidad por un factor de aproximadamente  $2/\pi$  relativo al correlador continuo o al correlador de varios bits. Sin embargo es posible recuperar, de una forma muy sencilla, nuestra función original despues de haber utilizado el método de Van Vleck. A continuación se dará la justificación de tal aseveración.

Supongamos que  $v(t)$  es un proceso Gaussiano aleatorio. Su función de autocorrelación será

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t) v(t - \tau) dt . \quad (4.21)$$

En un correlador de un bit los muestreos están representados por valores normalizados  $\pm 1$ . Por lo que si la función  $v(t)$  es truncada de modo que definimos este truncamiento por

$$\begin{aligned}
 v_c(t) &= 1 && ; \text{ cuando } v(t) \geq 0 , \\
 v_c(t) &= -1 && ; \text{ cuando } v(t) < 0 .
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Entonces la función de autocorrelación de la función truncada será

$$\rho_c(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T v_c(t) v_c(t - \tau) dt .
 \tag{4.23}$$

por definición

$$\begin{aligned}
 R(0) &= \sigma^2 , \\
 \rho(0) &= 1 .
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Si definimos la función de autocorrelación normalizada por la ecuación siguiente

$$\rho(\tau) = R(\tau)/\sigma^2 ,
 \tag{4.25}$$

y además hacemos

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v(t_1) , \\
 v_2 &= v(t_2) , && ; t_2 = t_1 - \tau \\
 v_{c1} &= \text{signo}(v_1) , \\
 v_{c2} &= \text{signo}(v_2) ,
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

la probabilidad conjunta de que ocurran  $v_1$  y  $v_2$  estará dada por (Mendenhall 1986):

$$P(v_1, v_2) = \frac{1}{2\sigma^2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ - \frac{v_1^2 + v_2^2 - 2\rho v_1 v_2}{2\sigma^2 (1 - \rho^2)} \right\} .
 \tag{4.27}$$

Nótese que, por ejemplo, en el caso que la correlación sea cero, o sea  $\rho = 0$ , la ecuación anterior se reduce al producto de la probabilidad de dos procesos Gaussianos independientes, cada uno de los cuales tendría la forma:

$$p(v) = \left[ \frac{1}{2\pi} \right]^{1/2} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{ -\frac{v^2}{2\sigma^2} \right\} . \quad (4.28)$$

De las ecuación (4.29) se puede derivar que

$$\begin{aligned} \langle v_1 \rangle &= \langle v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_1^2 \rangle &= \langle v_2^2 \rangle = \sigma^2 \\ \langle v_1 v_2 \rangle &= \sigma^2 \rho \\ \langle v_2 / v_1 \rangle &= \rho \sigma_1 . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Entonces puesto que

$$\rho_c = \langle \text{signo}(v_1) \text{ signo}(v_2) \rangle \quad (4.30)$$

$$\rho_c = \int_{-\infty}^{\infty} \text{signo}(v_1) \text{ signo}(v_2) p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 , \quad (4.31)$$

y

$$\begin{aligned} \text{signo}(v_1) &= 1 && ; \text{ para } v_1 \geq 0 , \\ \text{signo}(v_1) &= -1 && ; \text{ para } v_1 < 0 , \\ \text{signo}(v_2) &= 1 && ; \text{ para } v_2 \geq 0 , \\ \text{signo}(v_2) &= -1 && ; \text{ para } v_2 < 0 . \end{aligned}$$

entonces

$$\rho_c = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 \quad (4.32)$$

$$- \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 .$$

Por lo tanto de (4.32) vemos que

$$\rho_c = p_{++} + p_{--} - p_{+-} - p_{-+} , \quad (4.33)$$

además

$$p_{++} = p_{--} \quad \text{y} \quad p_{+-} = p_{-+} \quad (4.34)$$

y

$$p_{++} + p_{--} + p_{+-} + p_{-+} = 1 ,$$

por lo tanto

$$2p_{+-} = 1 - 2p_{++} . \quad (4.35)$$

Sustituyendo la eq. (4.35) en la eq (4.33) obtenemos que

$$\rho_c = 4p_{++} - 1 \quad (4.36)$$

donde

$$p_{++} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(v_1, v_2) dv_1 dv_2 . \quad (4.37)$$

Reemplazando  $v_2$  por

$$Z = \frac{v_2 - \rho v_1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

$$dZ = \frac{dv_2}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

entonces la ecuación (4.37) queda como

$$P_{++} = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty dv_1 \int_{\kappa}^\infty \exp\left\{-\frac{v_1^2 + Z^2}{2\sigma^2}\right\} dZ, \quad (4.38)$$

donde  $\kappa = -\frac{\rho v_1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$ . Cambiando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} P_{++} &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_{-\beta}^{\pi/2} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\beta}^{\pi/2} \exp(-u) du d\theta, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $\beta = \text{sen}^{-1}\rho$  y  $u = r^2 / 2\sigma^2$ . Resolviendo la ecuación (4.39) obtenemos

$$P_{++} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{sen}^{-1}\rho, \quad (4.40)$$

entonces

$$\rho_c = \frac{2}{\pi} \text{sen}^{-1}\rho. \quad (4.41)$$

Por lo tanto cuando se genera la función de correlación de un bit la correlación continua puede recuperarse usando la relación de Van Vleck:



$$R(\tau) = \sigma^2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \rho_c(\tau) \right] \quad (4.42)$$

Cuando se emplea una cuantización con dos o más bits, la sensibilidad se aproxima rápidamente a la de un correlador continuo. Dos bits dan 88% y tres bits dan 95% de la sensibilidad del correlador continuo. Se ha demostrado que la sensibilidad de un correlador de un bit puede ser mejorado significativamente mostrando con una frecuencia mayor que la frecuencia de Nyquist. Por ejemplo, muestreando a cuatro veces la frecuencia de corte se obtiene un mejoramiento teórico del 74% de la figura ideal y un examen experimental da un factor de 78%.

En la Tabla I se reproducen valores del factor D de degradación de sensibilidad para correlaciones que tienen diferentes niveles de cuantización. La cantidad  $D^2$  es la inversa del factor de sensibilidad anteriormente usado para describir correladores de uno y dos bits. El esquema de dos, cuatro y ocho niveles en la Tabla I corresponde a correladores de uno, dos y tres bits respectivamente, y  $\sigma$  denota el voltaje rms de entrada.

TABLA 4.1

*Factores de degradación para correladores cuantizados*

Número de niveles.	Selección de valores enteros	Espacio de niveles		
		de desición	D	$D^2$
2	-1, +1	—	1.253	1.571
3	-1, 0, +1	1.224 $\sigma$	1.112	1.236
4	-3, -1, +1, +3	0.995 $\sigma$	1.065	1.135
5	-2, -1, 0, +1, +2	0.884 $\sigma$	1.043	1.087
8	-7, -5, ... , +5, +7	0.585 $\sigma$	1.019	1.039

D) Programa para obtener el espectro de potencia.

En las secciones anteriores obtuvimos el espectro de potencia de una onda monocromática, linealmente polarizada más una onda de ruido normalizado que simula la señal que se recibe normalmente por un radiotelescopio. También discutimos que se puede seguir el camino de la correlación para obtener el espectro de potencia, así como es posible truncar los datos con una pérdida mínima de sensibilidad. En esta sección se explicará un programa donde se aplican los métodos anteriores siguiendo varias rutinas para finalmente obtener el espectro de potencia de dicha onda .

Para generar un ruido como el discutido en la sección B) utilizamos el programa D7R6(IDUM), la función GASDEV(IDUM) y la función RAN1(IDUM); estos programas fueron tomados de Press et al. (1989). La función RAN1 es un generador de números aleatorios que no permite la existencia de correlaciones secuenciales posibles. Posteriormente estos valores son usados por la función GASDEV(IDUM) la cual proporciona una desviación Gaussiana con media cero y varianza unidad, estos valores son introducidos en el programa D7R6 y los resultados obtenidos se suman a la señal simulada para introducir ruido.

La señal simulada se lleva por dos caminos para obtener su espectro de potencia a través de la autocorrelación. El primero dejando la amplitud original de la función  $V(\ )$  y el segundo truncando dicha amplitud en  $\pm 1 [VT(\ )]$ ; los datos se introducen en arreglos DATA( ) y DATAT( ) respectivamente.

En este programa también se introduce la transformada rápida de Fourier mediante la rutina FOUR1, basada en una rutina

originalmente escrita por N. Brenner de los Laboratorios Lincoln. Las cantidades de entrada son el número de puntos complejos (NN), el arreglo (DATA), e ISIGN, el cual debe de ser escogido como  $\pm 1$  y que corresponde al signo de  $i$  en la ecuación exponencial que representa la transformada o antitransformada discreta de Fourier, ésto es,  $+1$  o  $-1$  respectivamente. En el caso de que se escoja  $-1$  debe de multiplicarse por un factor que normaliza,  $1/N$ , como aparece en la ecuación definida por Bracewell (1986).

En la Figura 4.7 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el programa anterior (ver Apéndice D). En la parte derecha de la figura se grafican los espectros de potencia de una onda truncada con ruido, i.e. a la función original se le sumó un ruido Gaussiano y se aplicó el método de truncamiento de Van Vleck. En el lado derecho de la figura se grafica el espectro de potencia de una onda con ruido y sin truncamiento, i.e se aplica el método de autocorrelación conservando las amplitudes originales de la señal más el ruido Gaussiano. En cada par de gráficas se obtuvo el espectro de potencia con diferentes amplitudes de ruido

De esta forma se pretende simular lo más cercanamente una señal de una fuente extragaláctica, recibida por un radiotelescopio, a partir de un análisis detallado de cada uno de los componentes de la señal.

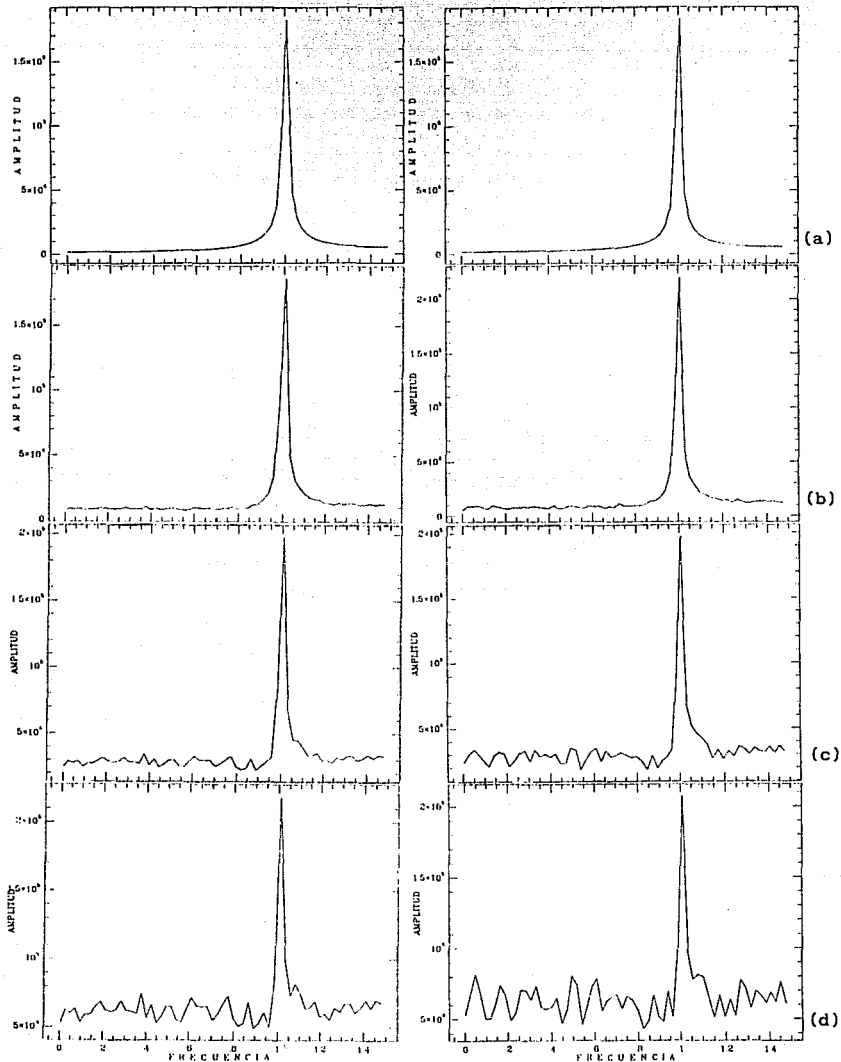


Figura 4.8 Gráficas del espectro de potencia, obtenido por el programa, en el lado izquierdo se grafica el espectro de potencia de la función coseno correlacionada y en el lado derecho el espectro de potencia de la función coseno correlacionada y truncada. La frecuencia de la onda es 1.0 y su amplitud 1.0. Con 7000 muestreos, a) sin ruido, b) amplitud del ruido 1.0, c) amplitud del ruido 2.0, d) amplitud del ruido 3.0.

EL FENOMENO DE GIBBS.

Cuando una función dada se aproxima mediante una suma parcial de términos de la serie de Fourier, existirá un error considerable en la vecindad de una discontinuidad, no importa cuantos términos se quieren utilizar. A esta diferencia se le conoce como el fenómeno de Gibbs (Solyar 1988).

Vamos a hacer un análisis del fenómeno de Gibbs ilustrándolo con un ejemplo. Este análisis está basado en Solyar (1988). Escojamos para ésto una función que represente una onda cuadrada impar definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -\pi/2 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Dado que es una función impar los términos cosenos son cero y los componentes seno se determinan por

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{n} \right) \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2n} [(-1)^n - 1], \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto, la serie de Fourier correspondiente es

$$f(x) = 2 \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}. \quad (\text{A.2})$$

Vamos a graficar ahora la suma de los primeros  $N$  armónicos, definiendo a esta suma como  $f_N(x)$ . En la Figura A.1 (a) y A.1 (b) se muestran las gráficas para  $N = 17$  y  $N = 30$  en el intervalo de 0 a  $\pi/2$ . Como se espera, aparece el fenómeno de Gibbs - la aproximación de la serie no coincide con la función original. En la Figura A.1 (c), se ve una tendencia clara de que al incrementar el número  $N$ , la medida del primer máximo permanece aproximadamente constante, pero tiene una tendencia a desplazarse hacia  $x = 0$ . Queremos determinar si esta tendencia prevalece conforme  $N \rightarrow \infty$ .

Primeramente encontraremos la posición del primer máximo. La serie finita para  $N = 2n + 1$  está dada por

$$f_N(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} \quad (\text{A.3})$$

y su derivada por

$$\frac{df_N}{dx} = 2 \sum_{k=1}^n \cos[(2k-1)x] = \frac{\sin(2nx)}{\sin x}. \quad (\text{A.4})$$

Veamos cuál es el valor de la derivada cuando  $x = 0$ . El valor límite cuando  $x \rightarrow 0$  es  $2n$ . El primer cero ocurre cuando  $x = \pi/2n$ .

La segunda derivada en este punto es negativa por lo que hemos encontrado la posición del primer máximo.

Ahora necesitamos determinar la magnitud de este máximo. Para ésto utilizaremos aproximaciones matemáticas. Primeramente integramos la eq. (A.4) y obtenemos

$$f_N(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(2nu)}{\text{sen } u} du . \quad (\text{A.5})$$

Ahora introduciremos una nueva función

$$g(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(2nu)}{u} du = \int_0^{2nx} \frac{\text{sen } v}{v} dv , \quad (\text{A.6})$$

y expresamos la diferencia  $f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \int_0^x \text{sen } 2nu \left( \frac{1}{\text{sen } u} - \frac{1}{u} \right) du \\ &= \int_0^x \text{sen}(2nu) \left( \frac{u}{\text{sen } u} - \frac{u - \text{sen } u}{u^2} \right) \\ &= \int_0^x \text{sen } 2nu \left( \frac{u}{\text{sen } u} \left( \frac{u}{3!} + \frac{u^3}{5!} + \frac{u^5}{7!} + \dots \right) \right) du. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Ahora pondremos una cota superior a esta integral tal que sea menor que cierto valor. Si  $x$  está en el rango de 0 a  $\pi/2$  entonces podemos decir que dentro de este rango

$$\operatorname{sen}(2nu) \leq 1, \quad \frac{u}{\operatorname{sen} u} \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$\frac{u}{3!} - \frac{u^3}{5!} + \frac{u^5}{7!} + \dots \leq \frac{u}{3!}$$

y aplicando estas desigualdades

$$\int_0^x \operatorname{sen}(2nu) \left( \frac{u}{\operatorname{sen} u} \left( \frac{u}{3!} - \frac{u^3}{5!} + \frac{u^5}{7!} + \dots \right) \right) du \leq \int_0^x \frac{\pi}{2} \frac{u}{6} du, \quad (\text{A.8})$$

por lo que obtenemos la relación

$$f_N(x) - g(x) \leq \frac{\pi}{24} x^2. \quad (\text{A.9})$$

Hasta aquí hemos probado que la diferencia entre  $f(x)$  y  $g(x)$  tiende a cero cuando  $x$  tiende a cero.

Ahora determinemos que es lo que sucede en  $x = \pi/2n$ , i.e. la posición del primer máximo. En este punto la diferencia entre las dos funciones es de la forma

$$f_N(x) - g(x) = f_N\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v} dv, \quad (\text{A.10})$$

donde hemos usado la eq. (A.6).

Sabemos que la integral de la eq. (A.10) nos da como resultado

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} v}{v} dv = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.11})$$

Con lo que se obtiene que



$$\int_0^{\pi} \frac{\text{sen } u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du . \quad (\text{A.12})$$

Substituyendo la eq. (A.12) en la eq. (A.10), encontramos que

$$f_N\left(\frac{\pi}{2n}\right) - g\left(\frac{\pi}{2n}\right) = f_N\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{\pi}{2} + \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du . \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, cuando  $n \rightarrow \infty$  el valor de  $x$  tiende a cero. Si  $x$  tiende a cero entonces, de acuerdo a la eq. (A.9), la diferencia entre  $f_N(x)$  y  $g(x)$  tiende a cero. Por lo tanto la eq. (A.13) es igual a cero, por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f_N\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{\pi}{2} \right] = - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du . \quad (\text{A.14})$$

Y ésta es exactamente la cantidad por la que  $f_N$  excede a  $\pi/2$ . Todo lo que se tiene que hacer es evaluar la integral del lado derecho de la eq. (A.14). Su valor está dado por

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du = - 0.2811 .$$

Entonces el primer máximo de la serie de Fourier toma el valor de  $\pi/2 + 0.2811 = 0.589\pi$  en  $x = \pi/2n$ , i.e. el máximo en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ . Este es el valor que vemos en la Fig. A.1 (c).

Note que a medida que el número de términos aumenta, la curva resultante oscila con frecuencia creciente y amplitud decreciente,

a ambos lados de las discontinuidades hay sobrepaso de curvas. Sin embargo la magnitud del pico no disminuye a medida que  $n$  aumenta, hay un límite inferior de 9% de sobrepaso aún si  $n$  tiende a infinito.

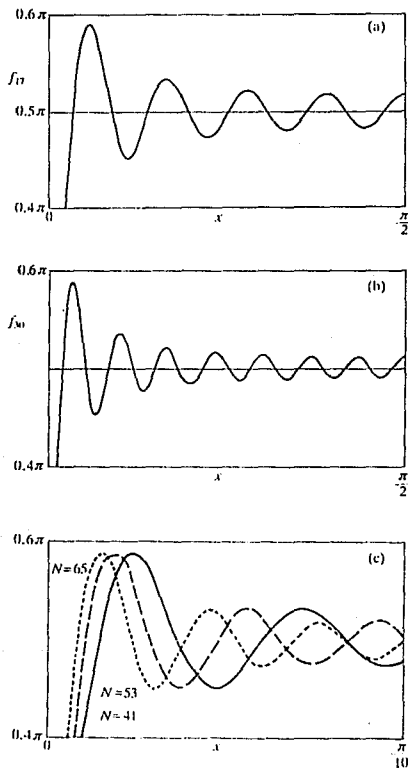


Figura A.1 La suma de los primeros  $N$  armonicos de la serie de Fourier definida por la equacion A.1: (a)  $N = 17$ ; (b)  $N = 30$ ; (c) [—]  $N = 41$ , [---]  $N = 53$ , [- · - ·]  $N = 65$ .

## APENDICE B

### EL SIMBOLO DE MUESTREO O REPLICACION III(X)

Introduzcamos el símbolo *shah* III(x) en la siguiente forma:

$$III(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

donde  $\delta(x - n)$  es el símbolo de impulso (equivalente a una delta de Dirac (ver Bracewell 1986)). O sea, el símbolo *shah* es un tren infinito de deltas de Dirac. El símbolo *shah* cumple con las siguientes propiedades:

$$III(ax) = \frac{1}{|a|} \sum \delta\left(x - \frac{n}{a}\right)$$

$$III(-x) = III(x)$$

$$III(x + n) = III(x) \quad n \text{ entero}$$

$$III(x - 1/2) = III(x + 1/2)$$

$$\int_{n - 1/2}^{n + 1/2} III(x) dx = 1$$

$$III(x) = 0 \quad x \neq n.$$

Evidentemente III(x) es periódica con período unitario.

Una propiedad del muestreo periódico se sigue como una

generalización de la integral de corrimiento, en conexión con el símbolo impulso. Entonces la multiplicación de una función  $f(x)$  por  $\text{III}(x)$  efectivamente muestrea en intervalos unitarios a la función:

$$\text{III}(x)f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(x - n).$$

La información sobre  $f(x)$  en los puntos no enteros donde  $\text{III}(x) = 0$ , no está contenida en el producto; sin embargo, los valores de  $f(x)$  en valores enteros de  $x$  son preservados (Fig. B.1.).

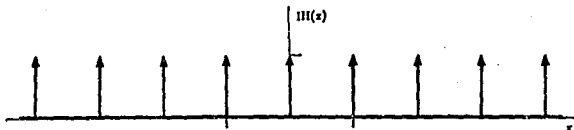


Figura B.1 El símbolo Shah  $\text{III}(x)$ .

La propiedad replicadora está definida por la convolución de  $\text{III}(x)$  con una función  $f(x)$ . Entonces

$$\text{III}(x) * f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x - n);$$

como se muestra en la Fig. B.2, la función  $f(x)$  aparece replicada a intervalos unitarios de  $x$ .

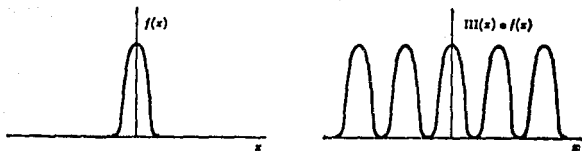


Figura 9.2 La propiedad replicadora de III(x).

## EL ESPECTRO DE POTENCIA

El contenido de potencia de una función periódica  $f(t)$  en el período  $T$  está definido como el valor cuadrático medio

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt$$

Además el teorema de Parseval establece que si  $f(t)$  es una función real y periódica, con período  $T$ , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2,$$

donde  $C_n$  son los coeficientes complejos de Fourier de la función  $f(t)$ . Por lo que se puede concluir que el valor cuadrático medio de una función periódica  $f(t)$  es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos, ésto es

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{C_n}{\sqrt{2}} \right|^2 .$$

Note que el contenido de potencia (el valor cuadrático medio) de una función periódica depende solamente de la amplitud de sus armónicos y no de sus fases.

El teorema de Parseval afirma que si la transformada de Fourier de  $f(t)$  está dada por  $F(s)$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds .$$

Por lo que la potencia o Energía  $P$  (la energía total emitida por la fuente integrada en el tiempo), estará dada por

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt .$$

Finalmente obtenemos que

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds .$$

Esta ecuación nos dice que el contenido de energía de  $f(t)$  está dado por  $1/2\pi$  multiplicado por el área bajo la curva de  $|F(s)|^2$ . Por lo que la cantidad  $|F(s)|^2$  se denomina *espectro de potencia o función de densidad de energía espectral* de  $f(t)$  (Hsu 1973). En este caso estamos suponiendo que el contenido de energía

de  $f(t)$  es finito, por lo que la potencia promedio en el intervalo  $T$  se aproxima a cero conforme  $T \rightarrow \infty$ , por lo que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt ,$$

es igual a cero cuando el contenido de energía es finito. Sin embargo en ocasiones el contenido de energía no es finito, entonces podemos decir que si el límite anterior existe, entonces

$$P(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-\lambda st) dt \right|^2$$

se denomina *espectro de potencia* o *densidad espectral de potencia* de la función  $f(t)$ .

TEOREMA DEL CORRIMIENTO

Si  $f(x)$  tiene la transformada de Fourier  $F(s)$ , entonces  $f(x - a)$  tiene la transformada de Fourier  $\exp(-2\pi ias)F(s)$  (Bracewell 1986).

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\exp(-2\pi ixs)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\exp(-2\pi i(x-a)s)\exp(-2\pi ias)d(x-a)$$

$$= \exp(-2\pi ias)F(s). \quad \square$$

EL TEOREMA DEL ESTIRAMIENTO

La operación de insertar ceros entre elementos hasta que se incremente el número total de elementos por un factor  $K$ , será denotado por el operador  $\text{Stretch}_K$ .

$$\text{Stretch}_K \{f(\tau)\} = \{g(\tau)\},$$

donde

$$g(\tau) = \begin{cases} f(\tau/K) & \tau = 0, K, 2K, \dots, (N - 1)K \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El teorema de estiramiento está dado por:

Sea  $\{g\}$  la función stretch, entonces tiene como transformada



a  $\{G\}$ , donde

$$G(u) = \begin{cases} \frac{1}{K} F(u) & u = 0, \dots, N-1 \\ \frac{1}{K} F(u-N) & u = N, \dots, 2N-1 \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{K} F(u-(K-1)N) & u = (K-1)N, \dots, KN-1. \end{cases}$$

Entonces el estiramiento por un factor  $K$  en el dominio  $\tau$  resulta de una repetición  $K$ -duplicada de  $F(u)$  en el dominio de  $u$ . Donde  $F$  es la transformada de  $f$  (Bracewell 1986).

Demostración:

$$\begin{aligned} G(u) &= N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} g(\tau) \exp[-i2\pi(u/N)\tau] \\ &= N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau/K) \exp[-i2\pi(u/N)\tau] \quad \text{para } \tau = 0, K, 2K, \dots, (N-1)K \end{aligned}$$

substituyendo  $\tau$  por  $K\tau'$  obtenemos

$$\begin{aligned} G(u) &= N^{-1} \sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau') \exp[-i2\pi(u/N)K\tau'] \quad \text{para } \tau' = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \\ &= (KN)^{-1} \sum_{\tau'=0}^{KN-1} f(\tau') \exp[-i2\pi(u/N)\tau'] \quad \tau' = 0, 1, 2, \dots, KN-1 \end{aligned}$$

$$= (KN)^{-1} \sum_{\tau'=0}^{KN-1} f(\tau') \exp[-i2\pi(u/N)\tau'] \exp[i2\pi((K-1)N/N)\tau']$$

$$= K^{-1} N^{-1} \left[ \sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau') \exp(-i2\pi(u/N)\tau') \right]$$

$$+ \sum_{\tau'=N}^{2N-1} f(\tau') \exp(-i2\pi[(u-N)/N]\tau') + \sum_{\tau'=2N}^{3N-1} f(\tau') \exp(-i2\pi[(u-2N)/N]\tau')$$

$$+ . . . + \sum_{\tau'=(K-1)N}^{KN-1} f(\tau') \exp(-i2\pi[(u-(K-1)N)/N]\tau'),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} G(u) &= K^{-1}F(u) && \text{para } u= 0, 1, \dots, N-1 \\ &= K^{-1}F(u - N) && \text{para } u= N, \dots, 2N-1 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &= K^{-1}F(u - (K - 1)N) && \text{para } u= (K-1)N, \dots, KN-1. \end{aligned}$$

□

#### TEOREMA DE LA CONVOLUCION

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen la transformada de Fourier  $F(s)$  y  $G(s)$  respectivamente, entonces  $f(x) * g(x)$  tiene la transformada de Fourier  $F(s)G(s)$  (Bracewell 1986).

Demostración:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' \right] \exp(-i2\pi xs) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x') \exp(-i2\pi xs) dx \right] dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp(-i2\pi x' s) G(s) dx' \\
&= F(s)G(s)
\end{aligned}$$

□

#### LA FUNCION FILTRO O INTERPOLACION, SINC(X)

Definamos

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

una función con las propiedades de que

$$\text{sinc } 0 = 1$$

$$\text{sinc } n = 0 \quad n \text{ entero} \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x \, dx = 1.$$

La función sinc(x) es muy interesante ya que contiene componentes de todas las frecuencias sobre cierto límite y no más allá de éste (ver Fig. C.1). Cuando la función sinc(x) se convoluciona, ésta se comporta como un filtro ideal, esto es, remueve todas las componentes de frecuencia fuera de una cota y

deja inalteradas todas las componentes que están dentro de ésta; y bajo circunstancias especiales, esta función representa una clase importante de interpolación (Bracewell 1986).

Un resultado importante es que  $\text{sinc}(x)$  y la función rectángulo  $\text{II}(s)$  son un par de transformadas de Fourier y lo probaremos enseguida:

$$\text{Sea } f(x) = \text{sinc } x .$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x \exp(-i2\pi xs) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x \cos 2\pi xs}{\pi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin(\pi x + 2\pi xs)}{2\pi x} + \frac{\sin(\pi x - 2\pi xs)}{2\pi x} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1 + 2s}{2} \text{sinc}[(1 + 2s)x] + \frac{1 - 2s}{2} \text{sinc}[(1 - 2s)x] \right\} dx \\ &= -\frac{1 + 2s}{2|1 + 2s|} + \frac{1 - 2s}{2|1 - 2s|} \\ &= \text{II}(s) \end{aligned}$$

□

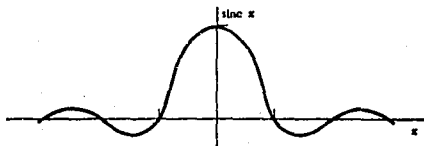


Figura C.1 La función filtro o Interpolación  $\text{sinc}(x)$ .

## FUNCION GAUSSIANA

Vamos a demostrar a continuación que la transformada de una función Gaussiana es una Gaussiana (Bracewell 1986).

Sea  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-i2\pi xs) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(x^2 + i2xs)) \, dx \\ &= \exp(-\pi s^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi(x + is)^2] \, dx \\ &= \exp(-\pi s^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi(x + is)^2] \, d(x + is) \\ &= \exp(-\pi s^2). \end{aligned}$$

□

## TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

Sean  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  variables aleatorias independientes y distribuidas idénticamente con  $E(Y_1) = \mu$  y  $V(Y_1) = \sigma^2 < \infty$ .

Definimos

$$U_n = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma} \right) \quad \text{en donde} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Entonces la función de distribución  $U_n$  converge a una función de distribución normal estándar cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La conclusión del teorema del Límite Central se puede expresar como

$$P(a \leq U_n \leq b) \int_a^b \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp(-u^2/2) du$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir los enunciados de las probabilidades con respecto a  $U_n$  se pueden aproximar por las probabilidades correspondientes para la variable aleatoria normal estándar si  $n$  es grande.

APENDICE D

PROGRAMA PARA OBTENER EL ESPECTRO DE POTENCIA

El siguiente programa se creó para obtener el espectro de potencia de una onda monocromática y linealmente polarizada como se vió en la sección D del Capítulo IV de esta tesis.

```

CHARACTER*20 FILENAME
PARAMETER(N=21, NP1=N+1, NOVER2=N/2, NPTS=10000, ISCAL=400, LLEN=50)
DIMENSION VT(15000), V(15000), DATA(256), RT(256), R(256), S(256)
DIMENSION DATAT(256)
C* ESTE PROGRAMA GENERA UN ARCHIVO DE DATOS ESPECTRO.DAT QUE CONTIENE EL
C* ESPECTRO DE POTENCIA DE UNA FUNCIÓN DISCRETA TRUNCADA Y AUTOCORRELA -
C* CIONADA.
      FILENAME='FUNSEN1.DAT'
      PI=3.1416
      OPEN(11, FILE=FILENAME, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
      PRINT*, ' '
1     WRITE(5, 2)
2     FORMAT('1', 6X, 'TRANSFORMACION DE V(I)EN SU ESPECTRO DE POTENCIA')
C*   IDENTIFICACION DE VARIABLES USADAS
C* A0=AMPLITUD DE LA PRIMERA FUNCION COSENO LA CUAL NO PUEDE SER UN VALOR
C*   NEGATIVO.
C* A1=AMPLITUD DE LA SEGUNDA FUNCION COSENO LA CUAL NO PUEDE SER UN VALOR
C*   NEGATIVO.
C* A2=AMPLITUD DEL RUIDO (A2>=0)
C* V0=FRECUENCIA DE LA PRIMERA FUNCION COSENO
C* V1=FRECUENCIA DE LA SEGUNDA FUNCION COSENO
C* DELTAT=PERIODO DE MUESTREO
C* V(I)=FUNCION O FUNCIONES COSENO A TRANSFORMAR QUE REPRESENTAN LA SENAL
C*   RECIBIDA.
C* VVMUES=FRECUENCIA DEL MUESTREO SEGUN EL CRITERIO DE NYQUIST
C* NN= NUMERO DE PUNTOS EN EL MUESTREO QUE NO PUEDE SER MENOR QUE 256
      PRINT*, ' '
      PRINT*, ' '
3     PRINT*, 'DE EL VALOR DE LA AMPLITUD DE LA PRIMERA FUNCION COSENO'
      READ*, A0
      IF (A0 .LT. 0) THEN
        PRINT*, ' '
        PRINT*, ' '
        PRINT*, ' "ERROR": LA AMPLITUD NO PUEDE SER UN VALOR NEGATIVO'
        PRINT*, ' '
        GO TO 3
      ENDIF
      IF (A0 .GE. 0) THEN
        GO TO 4
      ENDIF
4     CONTINUE
      PRINT*, 'DE EL VALOR DE LA FRECUENCIA DE LA PRIMERA FUNCION COSENO : '
      READ*, V0
5     PRINT*, 'DE EL VALOR DE LA AMPLITUD DE LA SEGUNDA FUNCION COSENO : '
      READ*, A1
      IF (A1 .LT. 0) THEN
        PRINT*, ' '
        PRINT*, ' '
        PRINT*, ' "ERROR": LA AMPLITUD NO PUEDE SER UN VALOR NEGATIVO'
        PRINT*, ' '
        GO TO 5
      ENDIF
      IF (A1 .GE. 0) THEN
        GO TO 6
      ENDIF

```

```

        ENDIF
6      CONTINUE
      PRINT*, 'DE EL VALOR DE LA FRECUENCIA DE LA SEGUNDA FUNCION COSENO : '
      READ*, V1
7      PRINT*, 'DE EL VALOR DE LA AMPLITUD RMS DEL RUIDO : '
      READ*, A2
      IF (A2 .LT. 0) THEN
        PRINT*, '
        PRINT*, '
        PRINT*, "ERROR": LA AMPLITUD NO PUEDE SER UN VALOR NEGATIVO'
        PRINT*, '
        GO TO 7
      ENDIF
      IF (A2 .GE. 0) THEN
        GO TO 8
      ENDIF
8      CONTINUE
9      PRINT*, '
      PRINT*, 'CUAL ES LA FRECUENCIA DE MUESTREO? : '
      PRINT*, '(DEBE DE SER MAYOR QUE 2*MAYOR FRECUENCIA EN LA SENAL DE'
      PRINT*, 'ACUERDO AL CRITERIO DE NYQUIST)'
      PRINT*, '
      READ*, VVMUES
      DELTAT=1.0/VVMUES
      T=0.0
      H=(2*V0)
      IF (H .GT. VVMUES) THEN
        PRINT*, '
        PRINT*, "ERROR": LA FRECUENCIA NO ES MAYOR QUE 2*MAYOR'
        PRINT*, 'FRECUENCIA REESCRIBA EL VALOR DE ACUERDO AL CRITERIO'
        PRINT*, 'DE NYQUIST '
        PRINT*, '
        GO TO 9
      ENDIF
      IF (H .LT. VVMUES) THEN
        GO TO 10
      ENDIF
10     CONTINUE
      F=(2*V1)
      IF (F .GT. VVMUES) THEN
        PRINT*, '
        PRINT*, "ERROR": LA FRECUENCIA NO ES MAYOR QUE 2*MAYOR FRECUENCIA'
        PRINT*, 'REESCRIBA EL VALOR QUE CUMPLA EL CRITERIO DE NYQUIST'
        PRINT*, '
        PRINT*, '
        GO TO 9
      ENDIF
      IF (F .LT. VVMUES) THEN
        GO TO 15
      ENDIF
15     CONTINUE
C* NN ES EL NUMERO DE PUNTOS EN EL MUESTREO CON LA RESTRICION DE QUE SEA
C* MAYOR QUE 256 PUNTOS
      PRINT*, '
      PRINT*, 'CUAL ES EL NUMERO DE PUNTOS EN EL MUESTREO'
      READ*, NN
      IF (NN .LT. 256) THEN
        PRINT*, 'EL NUMERO DE PUNTOS EN EL MUESTREO TIENE QUE SER MAYOR'
        PRINT*, 'QUE 256'
        GOTO 15
      ENDIF
      SS=128
      LL=(NN*2)-1
      IDUM=-1
C* MUESTREAR FUNCION AQUI:
C* LA FUNCION MUESTREADA REPRESENTA UNA ONDA MONOCROMATICA LINEALMENTE

```



```

C* POLARIZADA. LOS VALORES DE LA FUNCION ORIGINAL SE DETERMINAN POR V(I)
C* Y LOS DE LA TRUNCADA POR VT(I) EN ESTA ULTIMA SE GUARDA SOLO EL SIGNO
C* DEL VALOR ORIGINAL, ASI CUANDO EL VALOR ES NEGATIVO SE LE ASIGNA -1
C* Y CUANDO ES POSITIVO +1. LOS RESULTADOS SE GUARDAN EN EL ARCHIVO
C* FUNSEN1.DAT
      LLMIN=LL-256
16      DO 100 I=1,LL,2
          V(I)=A0*COS(2.0*PI*V0*T)+A1*COS(2.0*PI*V1*T)+A2*GASDEV(IDUM)
          IF (V(I) .LT. 0) THEN
              VT(I)=-1.0
          ENDIF
          IF (V(I) .GE. 0) THEN
              VT(I)=1.0
          ENDIF
          V(I+1)=0.0
          VT(I+1)=0.0
          WRITE(11,200) T,V(I),VT(I)
C*      WRITE(*,*) T,V(I),VT(I)
          T=T+DELTAT
100     CONTINUE
C*      WRITE(11,'(1X,A,I6,A)')
C*      *      ' VALORES DE LA FUNCION SENO CON Y SIN CLIPPING'
C*      WRITE(11,'(1X,T7,A,T16,A,T27,A)') 'T','FUNCION','F.CLIPPED'
200     FORMAT(2X,3F10.3)
          CLOSE(11)
          FILENAME='AUTOCORREL.DAT'
          OPEN(12,FILE=FILENAME,FORM='FORMATTED',STATUS='NEW')
C* LOS VALORES OBTENIDO EN FUNSEN.DAT SE AUTOCORRELACIONAN PARA PODER
C* TRABAJAR CON UN NUMERO MUY GRANDE DE PUNTOS, COMO GENERALMENTE SUCEDE
C* EN LA REALIDAD, SIN SOBREPASAR EL LIMITE DE MEMORIA DE NUESTRA
C* COMPUTADORA. LA AUTOCORRELACION NOS ARROJA SOLAMENTE 128 DATOS QUE SE
C* GUARDAN EN EL ARCHIVO CORREL.DAT. LA AUTOCORRELACION DE LOS VALORES
C* TRUNCADOS SE NORMALIZA PARA RECUPERAR LA AMPLITUD ORIGINAL.
      DO 240 K=1,255,2
          R(K)=0.0
          RT(K)=0.0
          DO 230 I=1,LLMIN,2
              R(K)=R(K)+(V(I)*V(I+(K-1)))
              R(K+1)=V(I+1)
              RT(K)=RT(K)+(VT(I)*VT(I+(K-1)))
              RT(K+1)=VT(I+1)
230     CONTINUE
          WRITE(12,270) K,R(K),RT(K)
240     CONTINUE
C      WRITE(12,'(1X,A,I6,A)')
C      *      ' FUNCION CORRELACIONADA CON Y SIN CLIPPING'
C      WRITE(12,'(1X,T6,A,T13,A,T27,A)') 'K','FUNCION','F.CLIPPED'
270     FORMAT(2X,I5,2X,E10.3,4X,E10.4)
          CLOSE(12)
          DO 300 K=1,255,2
              DATA(K)=R(K)
              DATA(K+1)=R(K+1)
              DATAT(K)=R(1)*SIN((PI/2.0)*(RT(K)/RT(1)))
              DATAT(K+1)=R(1)*SIN((PI/2.0)*(RT(K+1)/RT(1)))
300     CONTINUE
          ISIGN=1
C* FINALMENTE LOS VALORES AUTOCORRELACIONADOS SE TRANSFORMAN PARA OBTENER
C* EL ESPECTRO DE POTENCIA Y ESTOS VALORES SE GUARDAN EN EL ARCHIVO
C* ESPECTRO.DAT.
          CALL FOUR1(DATA,SS,ISIGN)
          CALL FOUR1(DATAT,SS,ISIGN)
          FILENAME='ESPECTRO.DAT'
          OPEN(13,FILE=FILENAME,FORM='FORMATTED',STATUS='NEW')
          DO 350 K=1,127,2
              XI=(K/2.0)+0.5
              XI=XI-1.0

```

```

        XI=XI/(SS*DELTAT)
        TEMP=(DATA(K)**2 + DATA(K+1)**2)**0.5
        TEMPT=(DATAT(K)**2 + DATAT(K+1)**2)**0.5
        WRITE(13,400) XI, TEMP, TEMPT
C      WRITE(*,*) XI,TEMP,TEMPT
350    CONTINUE
C      WRITE(13, '(1X,A,I6,A)')
C      * 'ESPECTRO DE POTENCIA CON Y SIN CLIPPING'
C      WRITE(13, '(1X,T9,A,T18,A,T31,A)') 'XI', 'ESPECTRO', 'E.CLIPPED'
400    FORMAT(2X,E10.3,2X,E10.3,' ', ' ',1X,E10.4)
        CLOSE(13)
600    PRINT*,'* LOS VALORES DE LA FUNCION SENO ORIGINALES Y TRUNCADOS'
        PRINT*,'* ESTAN EN EL ARCHIVO FUNSEN1.DAT'
        PRINT*,'* LOS RESULTADOS DE LAS AUTOCORRELACIONES ESTAN EN EL'
        PRINT*,'* ARCHIVO AUTOCORREL.DAT'
        PRINT*,'* LOS VALORES DE ESPECTRO DE POTENCIA OBTENIDOS SE '
        PRINT*,'* ENCUENTRAN EN EL ARCHIVO ESPECTRO.DAT'
        PRINT*,' '
        END
        SUBROUTINE FOUR1(DATA,SS,ISIGN)
C* ESTA SUBROUTINA OBTIENE EL ESPECTRO DE POTENCIA DE LOS VALORES DISCRETOS
C* QUE SON OBTENIDOS EN EL ARCHIVO CORREL.DAT. SI ISIGN ES 1 SE REMPLAZA
C* DATA POR SU TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER; SI ISIGN ES -1 REEMPLAZA
C* DATA POR NN VECES SU TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER. DATA ES
C* UN ARREGLO COMPLEJO DE LONGITUD NN, O EQUIVALENTEMENTE, UN ARREGLO REAL
C* DE LONGITUD 2*NN. NN DEBE DE SER UN ENTERO POTENCIA DE 2.
        REAL*8 WR,WI,WPR,WPI,WTEMP,THETA
        DIMENSION DATA(256)
        N=2*SS
        J=1
        DO 450 K=1,N,2
            IF (J.GT.K) THEN
                TEMPR=DATA(J)
                TEMPI=DATA(J+1)
                DATA(J)=DATA(K)
                DATA(J+1)=DATA(K+1)
                DATA(K)=TEMPR
                DATA(K+1)=TEMPI
            ENDIF
            M=N/2
            IF ((M.GE.2) .AND. (J.GT.M)) THEN
                J=J-M
                M=M/2
            GO TO 1
            ENDIF
            J=J+M
450    CONTINUE
        MMAX=2
        IF (N.GT.MMAX) THEN
            ISTEP=2*MMAX
            THETA=6.28318530717959D0/(1*MMAX)
            WPR=-2.D0*DSIN(0.5D0*THETA)**2
            WPI=DSIN(THETA)
            WR=1.D0
            WI=0.D0
            DO 500 M=1,MMAX,2
                DO 500 K=M,N,ISTEP
                    J=K+MMAX
                    TEMPR=SNGL(WR) *DATA(J) -SNGL(WI) *DATA(J+1)
                    TEMPI=SNGL(WR) *DATA(J+1)+SNGL(WI) *DATA(J)
                    DATA(J)=DATA(K) -TEMPR
                    DATA(J+1)=DATA(K+1) -TEMPI
                    DATA(K)=DATA(K) +TEMPR
                    DATA(K+1)=DATA(K+1) +TEMPI
500    CONTINUE
            WTEMP=WR

```

550

```

      NR=NR*WPR-WI*WPI+WR
      WI=WI*WPR+WTEMP*WPI+WI
      CONTINUE
      MMAX=ISTEP

      GO TO 2
      ENDIF
      RETURN
      END
      FUNCTION GRG(I)
      PARAMETER (N=21, NP1=N+1, NOVER2=N/2, NPTS=10000, ISCAL=400, LLEN=50)
      DIMENSION DIST (NP1)
C* ESTE PROGRAMA ES UN GENERADOR DE RUIDO ALEATORIO EL CUAL TIENE UNA
C* DISTRIBUCION GAUSSIANA (PROGRAM D7R6). LOS VALORES OBTENIDOS PARA
C* GENERAR RUIDO ESTAN EN RUIDO.DAT. ESTA RUTINA TAMBIEN NOS DA UNA
C* GRAFICA EN DONDE APARECEN LOS VALORES DEL RUIDO LOS CUALES TIENEN
C* UNA ENVOLVENTE GAUSSIANA.
      CHARACTER*20 FILENAME
      CHARACTER TEXT (50) *1
      FILENAME='RUIDO.DAT'
      OPEN (10, FILE=FILENAME, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
      IDUM=-1
C* driver for routine GASDEV (PROGRAM D7R6)
      IDUM=-13
      DO 11 J=1, NP1
        DIST (J)=0.0
      CONTINUE
      DO 12 I=1, NPTS
        J=NINT (0.25*N*GASDEV (IDUM)) +NOVER2+1
        IF ((J.GE.1) .AND. (J.LE.NP1)) DIST (J)=DIST (J)+1
      CONTINUE
      WRITE (*, '(1X, A, I6, A)')
      * 'Normally distributed deviate of ', npts, ' points'
      WRITE (*, '(1X, T6, A, T14, A, T23, A)') 'X', 'p(x)', 'graph:'
      FILENAME='RUIDITO.DAT'
      OPEN (20, FILE=FILENAME, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
      DO 15 J=1, NP1
        DIST (J)=DIST (J)/NPTS
        DO 13 K=1, 50
          TEXT (K)=' '
        CONTINUE
        KLIM=INT (ISCAL*DIST (J))
        IF (KLIM.GT.LLEN) KLIM=LLEN
        DO 14 K=1, KLIM
          TEXT (K)='*'
        CONTINUE
        X=FLOAT (J) / (0.25*N)
        WRITE (*, '(1X, F7.2, F10.4, 4X, 50A1)')
      * X, DIST (J), (TEXT (K), K=1, 50)
      C WRITE (*, *) X, DIST (J)
      WRITE (20, *) X, DIST (J)
      CONTINUE
      CLOSE (20)
      END
      FUNCTION RAN1 (IDUM)
C* EN ESTA FUNCION SE RECURRE A UNA DESVIACION ALEATORIA UNIFORME ENTRE
C* 0.0 Y 1.0. SE ESCOJE IDUM PARA CUALQUIER VALOR NEGATIVO QUE INICIALIZE
C* O REINICIALIZA LA SUCESSION
      DIMENSION R (97)
      PARAMETER (M1=259200, IA1=7141, IC1=54773, RM1=1./M1)
      PARAMETER (M2=134456, IA2=8121, IC2=28411, RM2=1./M2)
      PARAMETER (M3=243000, IA3=4561, IC3=51349)
      DATA IFF /0/
      IF (IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0) THEN
        IFF=1
        IX1=MOD (IC1-IDUM, M1)
        IX1=MOD (IA1*IX1+IC1, M1)

```

```

IX2=MOD (IX1, M2)
IX1=MOD (IA1*IX1+IC1, M1)
IX3=MOD (IX1, M3)
DO 17 J=1, 97
    IX1=MOD (IA1*IX1+IC1, M1)
    IX2=MOD (IA2*IX2+IC2, M2)
    R (J) = (FLOAT (IX1)+FLOAT (IX2)*RM2)*RM1
17 CONTINUE
IDUM=1
ENDIF
IX1=MOD (IA1*IX1+IC1, M1)
IX2=MOD (IA2*IX2+IC2, M2)
IX3=MOD (IA3*IX3+IC3, M3)
J=1+(97*IX3)/M3
IF (J.GT.97.OP.J.LT.1)PAUSE
RAN1=R (J)
R (J) = (FLOAT (IX1)+FLOAT (IX2)*RM2)*RM1
RETURN
END
FUNCTION GASDEV (IDUM)
C* OBTIENE UNA DESVIACION NORMALMENTE DISTRIBUIDA CON MEDIA CERO Y VARIANZA
C* UNITARIA, USANDO RAN1 (IDUM) COMO LA FUENTE DE LAS DESVIACIONES UNIFORMES
DATA ISET/0/
IF (ISET.EQ.0) THEN
1   V1=2.0*RAN1 (IDUM) -1
    V2=2.0*RAN1 (IDUM) -1
    R=V1**2+V2**2
    IF (R.GE.1)GO TO 1
    FAC=SQRT (-2.0*LOG (R) /R)
    GSET=V1*FAC
    GASDEV=V2*FAC
    ISET=1
ELSE
    GASDEV=GSET
    ISET=0
ENDIF
RETURN
END

```

## CONCLUSIONES

En esta tesis hicimos una derivación matemática de la ecuación de difusión y vimos como puede ser representada la distribución inicial y la evolución temporal de la temperatura de un anillo mediante series de Fourier, esto es, la aplicación de las series de Fourier para determinar una función periódica en el sentido global y no local, que está determinado por la obtención de los coeficientes de Fourier.

Se derivó la transformada continua de Fourier a partir de las series de Fourier y posteriormente se definió la transformada discreta de Fourier como una aproximación de la transformada continua de Fourier. Sin embargo se encontró que es posible cometer errores en dicha aproximación, como son el "aliasing" y las "fugas", por lo que se adoptaron ciertos criterios de corrección para hacer de este concepto discreto algo sumamente útil en la aplicación experimental. También se mostró como se puede recuperar la función original a partir de la transformada discreta de Fourier, hecho muy importante, ya que nos permite recalcar que el concepto discreto es una buena aproximación de la transformada continua de Fourier.

Se explicó el concepto físico del espectro de potencia y se determinó la relación que tiene con la transformada de Fourier, fin primordial de esta tesis, ya que determina la importancia de la aplicación de las transformadas de Fourier en la radioastronomía. Posteriormente se introdujeron dos métodos que ayudan a hacer más sencilla la obtención del espectro de potencia:

1) La autocorrelación, la cual nos permite obtener la transformada de Fourier de una señal muestreada por un tiempo largo con la mínima información posible.

2) El truncamiento de una señal, el cual reduce aún más la información ha almacenar. Aquí demostramos mediante métodos estadísticos que es posible recuperar la amplitud original de la señal, de vital importancia, aún después de haberla truncado.

También se simuló un generador de una señal de ruido mediante procesos estadísticos, el cual siempre aparece en las señales radiotelescopio debido a las limitaciones de los instrumentos utilizados.

Con lo obtenido anteriormente simulamos una señal obtenida por un radiotelescopio mediante un programa computacional en donde se involucra la transformada rápida de Fourier, la cual disminuye el tiempo en los cálculos considerablemente.

Entonces podemos finalizar diciendo que las transformadas de Fourier nos permiten obtener el espectro de potencia de una señal recibida por un radiotelescopio. Aplicando la autocorrelación, el truncamiento y la transformada rápida de Fourier aunados a programas computacionales, hacen de la teoría de transformadas de Fourier una herramienta muy importante en radioastronomía.

## REFERENCIAS

- Bracewell, R. N., 1986, "*The Fourier Transform and its Applications*", segunda edición, Mc. Graw-Hill, New York.
- Cooper, B.F.C., 1976, "*Methods of Experimental Physics*", Vol 12, Academic Press.
- Fourier, J., 1955, "*The Analytical Theory of Heat*", Dover P. Inc., New York.
- Hsu, H.P., 1973, "*Análisis de Fourier*", Fondo Educativo Interamericano, México.
- Max, J., 1972, "*Traitement du Signal*", Masson et Cie. Editeurs, Paris.
- Mellor, J.W., 1955, "*Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics*", Dover, New York.
- Mendenhal, Scafer & Wackerly, 1982, "*Estadística Matemática con Aplicaciones*", Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Nyquist, H., 1928, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 47, 617.
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1986, "*Numerical Recipes*", Cambridge University Press, Cambridge.
- Robinson E. A., Sep. 1982, IEEE. Vol. 70 No. 9, 885.
- Rohlfs, K., 1990, "*Tools of Radio Astronomy*", segunda edición, Springer-Verlag, Berlin.
- Rybicky & Limghtman, 1979, "*Radiative Processes in Astrophysics*", Jhon Wiley & Sons, New York.
- Solyman, L., 1988, "*Lectures of Fourier Series*", Oxford University Press, Oxford.
- Van Vleck and Middleton D., 1966, IEEE. Vol. 54 No. 1.
- Zill, D.G., 1982, "*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*", Grupo Editorial Iberoamérica, México.