



01/68

4
209



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ingeniería

**OPTIMIZACION EN REDES DE FLUJO
CON COSTOS CONCAVOS**

JOAQUIN HUMBERTO LOPEZ BORBON TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(Investigación de Operaciones)

CIUDAD UNIVERSITARIA
marzo de 1992.



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

OPTIMIZACION EN REDES DE FLUJOS CON COSTOS CONCAVOS

	PAGINA
INTRODUCCION.-----	1
I CONCEPTOS Y RESULTADOS BASICOS.-----	5
I.1 CONCEPTOS BASICOS EN REDES.-----	6
I.2 TRANSFORMACIONES DE UNA RED.-----	10
I.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE FLUJO Y MODELO ALGEBRAICO.-----	12
I.4 PUNTOS EXTREMOS Y OPTIMALIDAD DE FUNCIONES CONCAVAS.-----	14
I.5 DUALIDAD Y CONDICIONES DE KUHN-TUCKER EN REDES.-----	18
I.6 SOLUCION BASICA Y ARBOL DE EXPANSION EN REDES SIN GANANCIA.-----	20
I.7 MATRICES UNIMODULARES Y SOLUCION ENTERA EN REDES SIN GANANCIA.-----	24
I.8 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL.-----	27
II PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.-----	30
II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.-----	31
II.2 DUALIDAD Y OPTIMALIDAD.-----	32
II.3 FUNDAMENTOS TEORICOS.-----	34
II.4 ALGORITMO TRAYECTORIA AUMENTANTE.-----	39
II.5 CONVERGENCIA.-----	40
III PROBLEMA DE REDES SIN GANANCIA CON COSTOS LINEALES.-----	42
III.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.-----	44
III.2 DUALIDAD Y OPTIMALIDAD.-----	44
III.3 FUNDAMENTOS TEORICOS.-----	45
III.4 ALGORITMO DE LAS DESVIACIONES (OUT-OF-KILTER).-----	56
III.5 CONVERGENCIA.-----	57
IV PROBLEMA DE REDES SIN GANANCIA CON COSTOS CONCAVOS.-----	58
IV.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.-----	59
IV.2 APROXIMACION LINEAL POR PEDAZOS.-----	59
IV.3 ENUMERACION IMPLICITA.-----	61

IV.4 RELAJACION Y TECNICA DE ACOTAMIENTO.	63
IV.5 SOLUCION FACTIBLE Y MEJOR SOLUCION.	64
IV.6 RAMIFICACION Y BUSQUEDA.	64
IV.7 CONDICION DE INSONDEABILIDAD.	64
IV.8 ALGORITMO DE SOLUCION.	65
IV.9 CONVERGENCIA.	66
V. APLICACIONES.	67
V.1 PROBLEMA DE LOCALIZACION-DISTRIBUCION.	68
V.2 APLICACION A NIVELACION DE TERRENOS.	74
V.3 PLAN DE CONTRATACION DE PERSONAL.	76
V.4 MODELO DE COMPRA PRODUCCION Y DISTRIBUCION.	78
V.5 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO UN PRODUCTO.	82
V.6 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO CON VARIAS ALTERNATIVAS DE PRODUCCION.	85
V.7 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO CON MULTI-INSTALACION EN SERIE.	88
V.8 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO MULTIPRODUCTO.	91
V.9 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO MULTIPRODUCTO, MULTI-INSTALACION EN PARALELO CON PROCESO EN LOTE.	93
VI CONCLUSIONES Y EXTENSIONES.	107
BIBLIOGRAFIA.	109
APENDICE:	
A) ESTRUCTURA DE DATOS.	112
B) DIAGRAMA DE BLOQUES Y DESCRIPCION DE SUBROUTINAS.	114
C) ALIMENTACION Y SALIDA DE DATOS.	116

INTRODUCCION

Las necesidades de consumo de nuestra sociedad, requieren de actividades comerciales, donde la función de costo presenta economía de escala, es decir, la función crece con la cantidad de artículos comprados, disminuyendo el costo unitario por artículo, esto es, se dan precios de descuento, en la compra de grandes cantidades. Un gran número de problemas, en distintos campos, por ejemplo: inventarios, planeación de la producción, localización de servicios, transporte, asignación, sistemas de comunicación, entre otros, presentan estructura de economía de escala. Estos problemas, pueden ser modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos, cuya formulación es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \min & h(f) \\ \text{(P)} & \text{s.a. } Af=b \\ & \underline{C} \leq f \leq \bar{C} \end{array}$$

donde $h(f)$ es cóncava aditiva.

Algunas características del problema (P), son las siguientes:

- a) Es un problema de optimización.
- b) El teorema de Weierstrass establece: "Si h es continua y el conjunto factible es no vacío y compacto, entonces, (P) tiene solución".
- c) Es frecuente que en economía de escala, h sea lineal por pedazos, por consiguiente, no es de clase C^1 . Incluso si h incluye costo fijo, ni siquiera es continua.
- d) La matriz A es muy rara, esto puede provocar ineficiencia en los métodos para problemas de gran tamaño, aun cuando se empleen técnicas de matrices raras.
- e) Existe un resultado que dice: "Todo mínimo local de una función convexa, es un mínimo global", lo anterior, no sucede cuando la función es cóncava. Un método de solución consiste en: encontrar todos los mínimos locales, para luego, obtener el mínimo global, sin embargo, resulta computacionalmente improcedente cuando h tiene muchos mínimos locales.

f) Los métodos tradicionales de optimización no lineal para funciones suaves, no son aplicables, pues, requieren que h sea de clase C^2 , y h frecuentemente es lineal por pedazos y no continua.

g) El problema (P) para redes sin ganancia con costos cóncavos, es combinatorio, clasificado como NP-completo. La clasificación NP-completo se refiere a la complejidad computacional, la cual, se cuantifica de la siguiente manera: al codificar los datos de entrada del problema, se forma una cadena de caracteres binarios de longitud n , entonces, el tiempo (ó el número de pasos elementales) que requiere un algoritmo para su ejecución, es una función $f(n)$. Se dice que el algoritmo es de orden $g(n)$, si $f(n)$ está acotado por un múltiplo de $g(n)$, así, se tienen algoritmos de orden polinomial y algoritmos de orden exponencial. En la clase NP-completa están los problemas para los que no se conocen y quizás, no existan algoritmos polinomiales para resolverlos, problemas pequeños de esta clase pueden ser resueltos por algoritmos exponenciales, que resultan imprácticos para problemas grandes, ya que, el tiempo de solución crece de manera alarmante, en este caso, sólo se aspira a encontrar una buena solución, aunque no sea la óptima.

En este trabajo, se desarrolla un método que resuelve (P) para redes sin ganancia, con h cóncava lineal por pedazos, ó bien, encuentra una aproximación lineal por pedazos de (P) cuando h es cóncava no lineal por pedazos y la red asociada sin ganancia. El método, mediante enumeración implícita reduce el problema, a uno de programación 0-1 mixto, el cual, es relajado a un problema de redes sin ganancia con costos lineales. Iterativamente se resuelve el problema de redes sin ganancia con costos lineales, mediante el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter), el cual, es altamente eficiente por ser polinomial, resultado del aprovechamiento de la estructura algebraica de la red, con una base teórica sumamente elegante asociada a la teoría de gráficas. El método tiene un costo computacional de $O(2^{mc})$, donde, mc es el número de arcos, con costo fijo distinto de cero, los cuales, resultan del proceso de linealización. Trabaja eficientemente si $mc \leq 50$, con dificultades si $mc > 50$, y no se garantiza que la solución sea encontrada si $mc > 100$.

Las técnicas de optimización de redes ofrecen las siguientes ventajas:

a) Se requiere menos habilidad para construir modelos de redes, que modelos de programación lineal u otros métodos de optimización.

b) La naturaleza gráfica de un modelo de redes permite su fácil asimilación por el usuario.

c) Su simple estructura de datos facilita su implantación.

d) La estructura de la red facilita la validación y búsqueda de errores.

e) La memoria requerida es mucho menor que la usada en programación lineal. Por ejemplo para h lineal, se han resuelto problemas con 63 millones de variables.

f) La velocidad de solución es entre 60 y 80 veces mayor que el mejor de los códigos de programación lineal, comparándolos en la solución del mismo problema con estructura de red.

El presente trabajo tiene como propósito, el análisis de los fundamentos teóricos y descripción de un método de solución, del problema de redes sin ganancia, con costos cóncavos. Con énfasis especial, en la implementación de dicho método en PC, para su utilización en la solución de problemas de aplicación a casos prácticos.

El contenido de este trabajo está constituido por lo siguiente: En el capítulo 1 se presentan los conceptos y resultados básicos de redes, condiciones de optimalidad, teoría de matrices unimodulares que garantizan que el óptimo es entero. Asimismo se discute brevemente el concepto de complejidad computacional de un algoritmo.

En el capítulo 2 se presenta el problema de flujo máximo, que consiste en "encontrar el flujo de valor máximo, que en una red con restricciones de capacidad en sus arcos, puede circular desde un nodo fuente a un nodo sumidero". Se desarrolla el algoritmo de solución denominado "trayectoria aumentante", el cual, será utilizado como subrutina en el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter).

En el capítulo 3 se desarrolla el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter), especializado para resolver el problema de redes sin ganancia con costos lineales. Dicho algoritmo, es utilizado

iterativamente en el método de solución, del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos.

En el capítulo 4, se analiza el método de solución del problema de redes sin ganancia, con costos cóncavos lineales por pedazos, cuya implantación es el propósito general de esta tesis. El método de solución es mediante enumeración implícita, que consiste básicamente en tres técnicas: de acotamiento, de ramificación y de búsqueda. Al relajar resulta un problema de redes sin ganancia con costo lineales, resuelto por el algoritmo de las desviaciones.

En el capítulo 5, con el objeto de justificar la utilidad del método, se plantean los siguientes problemas de aplicación:

- a) Localización de pozos para satisfacer la demanda de varios sectores agrícolas.
- b) Nivelación de terrenos.
- c) Plan de contratación de personal que balancea costos de contratación y despido, considerando costos de empleo ocioso, cuando la producción no es uniforme.
- d) Política de compra, producción y distribución de una compañía harinera con 2 molinos, alternativa de compra de trigo en 3 almacenes y distribuye en 5 centros de consumo.
- e) Planeación de la producción en tiempo normal, tiempo extra y por subcontratación.
- f) Plan de producción de un producto que consiste en 3 etapas en serie, en un horizonte de 4 periodos.
- g) Plan de producción para una planta ensambladora de 3 tipos de automoviles, con 6 procesos de producción en paralelo y en lote.

Estos problemas son modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos, y resueltos por el método de solución, el cual fué programado en FORTRAN e implementado para PC. Se anexa una tabla que especifica la instancia y tiempo de ejecución de cada problema.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones y extensiones de este trabajo.

Finalmente en los apéndices, se precisan los aspectos computacionales de la implementación; estructura de datos, diagrama de bloques, descripción de subrutinas, entrada y salida de datos.

CAPITULO I

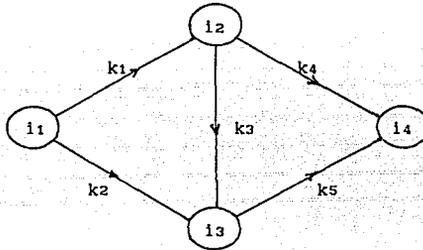
CONCEPTOS Y RESULTADOS BASICOS

En el este capitulo se dan los conceptos y parámetros básicos de una red, las transformaciones equivalentes que son necesarias para adaptar el problema a un modelo algebraico. Se define el principio de conservación de flujo, en el cual, se basa la relación existente entre el problema de programación de redes de flujo y programación lineal, se establece el problema dual para llegar a las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker especializadas para redes. Se demuestra también que el óptimo de una función cóncava es un punto extremo y mediante la teoría de matrices unimodulares se garantiza que este óptimo es entero para redes sin ganancia y con parámetros enteros, además se obtiene el importantísimo resultado de que toda solución básica factible en redes sin ganancia, tiene asociado un árbol de expansión, este resultado hace posible deducir algoritmos eficientes en redes. Asimismo se discute brevemente el concepto de complejidad computacional de un algoritmo.

1.1 CONCEPTOS BASICOS EN REDES

RED.- Una red denotada $G(N,M)$ es una terna que consiste en N conjunto no vacío y finito de n nodos, M conjunto de m arcos y una función $g:M \rightarrow N \times N$ que asocia a cada $k \in M$ un $(i,j) \in N \times N$ tal que $i \neq j$. La asociación se denota $k_{\rightarrow}(i,j)$, i es el nodo inicial, j el nodo terminal del arco k . Los arcos unen nodos en una cierta dirección, no se permiten (rizos) arcos que unen un nodo consigo mismo, tampoco arcos (paralelos) que unen el mismo par de nodos.

Figura [1]



TRAYECTORIA.- Una trayectoria P en una red G es una sucesión finita de arcos, tales que, cualquier par consecutivo tiene un nodo en común, la trayectoria tiene una dirección la cual no necesariamente coincide con la dirección de los arcos.

Ejemplo: La trayectoria $i_1, k_2, i_3, k_3, i_2, k_4, i_4$ en la figura [1] denotada $P: i_1 \rightarrow i_4$, cuando no hay ambigüedad en los arcos puede denotarse $P: i_1 \rightarrow i_3 \leftarrow i_2 \rightarrow i_4$.

CIRCUITO.- Un circuito, es una trayectoria tal que su nodo inicial y su nodo terminal coinciden, $P: i \rightarrow i$. Por ejemplo, en la figura [1] $P: i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \leftarrow i_1$ es un circuito.

TRAYECTORIA ELEMENTAL.- Es una trayectoria que si utiliza un arco o un nodo lo hace una sola vez. Dada una trayectoria P se denota $P^+(P^-)$ al conjunto de arcos que son recorridos en su sentido (en sentido contrario), entonces si P es elemental se define su vector de incidencia como:

$$[1] \quad e_p(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in P^+ \\ -1 & \text{si } k \in P^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por ejemplo en la red de la figura [1] $P: i_1 \rightarrow i_3 \leftarrow i_2 \rightarrow i_4$ es elemental, con $e_p = (0, 1, -1, 1, 0)$.

RED CONECTADA. - Una red G se dice conectada si para cualquier par de nodos diferentes $i \neq i'$ existe una trayectoria $P: i \rightarrow i'$, si además P es positiva ($P \in P^+$) entonces se dice que G es fuertemente conectada.

CORTE DE UNA RED. - Sea $S \subset N$ con $S' = N - S$ se llama conjunto de corte a:

$$[2] \quad Q = \{S, S'\} = \{k \in A \mid k_{\rightarrow}(i, j) \text{ ó } k_{\rightarrow}(j, i) \text{ con } i \in S, j \in S'\}$$

tiene la propiedad de que cualquier trayectoria $P: i \rightarrow j$ con $i \in S, j \in S'$ contiene un arco del corte, de tal manera que si los arcos del corte son removidos de la red, la trayectoria $P: i \rightarrow j$ con $i \in S$ y $j \in S'$ no existe. Se define el vector de incidencia del corte como:

$$[3] \quad e_q(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_{\rightarrow}(i, j), i \in S, j \in S' \\ -1 & \text{si } k_{\rightarrow}(j, i), i \in S, j \in S' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por ejemplo: Si en la figura [1] se consideran $S = \{i_1, i_3\}$, $S' = \{i_2, i_4\}$ se tiene que $Q = \{k_1, k_3, k_5\}$ con $e_q = (1, 0, -1, 0, 1)$.

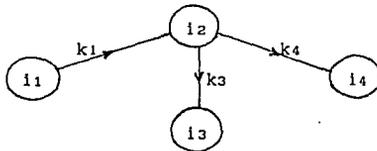
ARBOL. - Una red es llamada árbol, si es conectada, no contiene circuitos y tiene al menos un arco.

BOSQUE. - Una red sin circuitos con al menos un arco es llamada bosque.

SUB-RED. - Una red G_1 es una sub-red de G , si ambos, el conjunto de nodos y el conjunto de arcos, son subconjuntos del conjunto de nodos y el conjunto de arcos de G , respectivamente.

ARBOL DE EXPANSION. - Un árbol que es una sub-red de G y además contiene a todos los nodos de G , se le llama árbol de expansión de G .

Figura [2]



TEOREMA [1].- En un árbol para cada par de nodos distintos $i \neq i'$ existe una trayectoria elemental única $P: i \rightarrow i'$.

Demostración.- Sea T un árbol $i, i' \in T$ tal que $i \neq i'$, si se supone que existen dos trayectorias elementales distintas $P_1: i \rightarrow i'$ y $P_2: i \rightarrow i'$ entonces, considerar $P_3: i' \rightarrow i$ la trayectoria elemental en sentido contrario de P_1 (es decir $e_{P_3} = -e_{P_1}$). Por lo tanto, en la unión de P_2 con P_3 se forma un circuito el cual contiene un circuito elemental, lo cual contradice al hecho de que T es un árbol, por lo tanto el supuesto es falso, quedando demostrado el teorema.

TEOREMA [2].- Si el árbol T tiene n nodos el número de arcos es $n-1$.

Demostración.- Se escoge un nodo $s \in T$ y se obtiene las trayectorias elementales $P: s \rightarrow i$ para todo $i \in T$ tal que $i \neq s$, a cada nodo $i \neq s$ se le asocia su arco predecesor en la trayectoria, esta asociación cubre todos los nodos excepto el nodo s , de aquí que el número de arcos es $n-1$.

CAPACIDADES.- En muchas situaciones físicas, se consideran límites inferiores C_k y superiores C_k de capacidad para cada arco $k \in R^m$, se denotan, $C_k, C_k \in R^m$ vectores capacidad inferior y capacidad superior respectivamente.

FLUJO EN ARCOS.- El flujo en una red es una función $f: A \rightarrow R^m$, que para los fines de esta tesis se considera el vector de flujo $f \in R^m$ donde f_k representa la cantidad de flujo en el arco k . Para el caso de una red sin ganancia f_k permanece constante a través del arco k .

FLUJO EXTERNO EN NODOS.- Los flujos externos son los que entran o salen de los nodos. Existe dos tipos de flujo externo: El flujo externo fijo y el flujo externo de holgura. El flujo externo fijo en el nodo i , denotado por b_i , entra a la red si $b_i > 0$, y sale de la red si $b_i < 0$. El valor del flujo externo de holgura en el nodo i , es denotado por f_{s_i} , la dirección de este flujo y el límite superior de su valor es especificado por el parámetro b_{s_i} , llamada capacidad del flujo externo de holgura. Si b_{s_i} es positivo f_{s_i} entra a la red, si b_{s_i} es negativo, sale de la red, en ambos casos es acotado por $0 \leq f_{s_i} \leq |b_{s_i}|$.

COSTO EN LOS ARCOS.- Un costo es asociado con el flujo de cada arco, mediante la función de costo $h_k(f_k)$ exclusiva del arco k e independiente del flujo de los otros arcos. El costo de la red es la suma de los costos de los arcos, expresado de la siguiente manera:

$$[4] \quad h(f) = \sum_{k=1}^m h_k(f_k)$$

Los problemas de costo mínimo tienen a $h(f)$ como función objetivo. Se identifican tres clases de funciones $h_k(f_k)$: lineales, convexas y cóncavas, en este trabajo se desarrollan el caso lineal y el cóncavo.

COSTO DEL FLUJO EXTERNO.- El flujo externo de holgura tiene también asociado un costo unitario h_{si} . El flujo externo de holgura puede ser eliminado mediante una transformación de la red, por lo cual siempre consideraremos [4] como la función objetivo de la red.

CAPACIDAD DE CORTE.- Sea el corte $Q = [S, S']$ se denota $Q^+ = \{k \in A \mid k_-(i, j) \mid i \in S, j \in S'\}$ y $Q^- = \{k \in A \mid k_-(j, i) \mid i \in S, j \in S'\}$ entonces $Q = Q^+ \cup Q^-$. Se define la capacidad del corte Q como:

$$[5] \quad C(Q) = \sum_{k \in Q^+} C_k - \sum_{k \in Q^-} C_k$$

Por ejemplo: Si en la figura [1] $S = \{1, 13\} \Rightarrow S' = \{12, 14\} \Rightarrow Q = \{k_1, k_3, k_5\}$ con $Q^+ = \{k_1, k_5\}$, $Q^- = \{k_3\}$.

$$C(Q) = C_1 + C_5 - C_3$$

Se puede decir que la capacidad de un corte Q "es lo más que puede pasar menos lo mínimo que se puede regresar a través del corte."

MATRIZ DE INCIDENCIA.- La estructura de la red sin ganancia puede ser descrita mediante una matriz nodos-arcos $A_{n \times m}$ llamada matriz de incidencia definida como

$$[6] \quad [A]_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es el nodo inicial del arco } k \\ -1 & \text{si } i \text{ es el nodo terminal del arco } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por ejemplo la matriz de incidencia para la red de la figura [1]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que si $k_{(1,j)}$ entonces la columna correspondiente al arco k es $e_i - e_j$, donde e_i, e_j son los vectores unitarios con componente 1 en la i -ésima y j -ésima posición respectivamente.

$$[7] \quad a^k = e_i - e_j, \quad \forall k_{(1,j)}$$

Para una red con ganancia, la matriz de incidencia queda definida:

$$[8] \quad A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si es el nodo inicial del arco } k \\ -a_k & \text{si es el nodo terminal del arco } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde a_k es el factor ganancia para todo arco $k \in M$.

Observe que los $1(-a_k)$ en el renglon i determinan $M_{0i}(M_{T1})$ el conjunto de arcos que salen (entran) del nodo i . Por ejemplo del renglon 2 tenemos: $M_{02}=\{k_3, k_4\}$, $M_{T2}=\{k_1\}$ lo cual puede corroborarse en la figura [1].

1.2 TRANSFORMACIONES DE UNA RED.

RED CON NODO DE HOLGURA.- Cuando la red considera flujo externo de holgura con capacidad $bs_1 \neq 0$ y costo unitario hs_1 en algun nodo i , estos pueden ser eliminados añadiendo a la red un nodo de holgura y arcos del nodo de holgura (del nodo i) al nodo i (al nodo de holgura) si $bs_1 > 0$ ($bs_1 < 0$), estos arcos tienen capacidad inferior cero y capacidad superior $|bs_1|$ con costo hs_1 . Por ejemplo, denotando [flujo externo $f_{ij}=b_1$, capacidad superior del flujo externo de holgura= bs_1 , costo del flujo externo= hs_1], (capacidad inferior= \underline{C}_k , capacidad superior= \overline{C}_k , costo del flujo= hk).

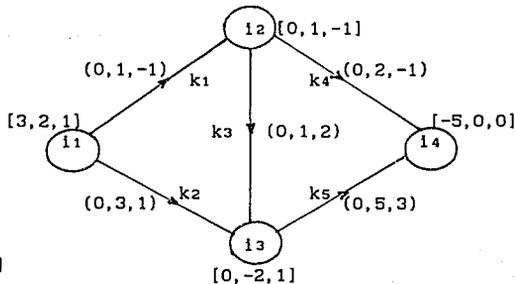


Figura [3]

se transforma en

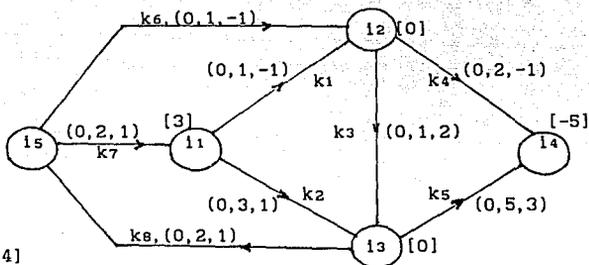


Figura [4]

donde [flujo externo fijo= b_i], (capacidad inferior= \underline{C}_k , capacidad superior= \overline{C}_k , costo= h_k). Este modelo es utilizado en el problema de flujo máximo.

RED CON CONSERVACION DE FLUJO EN TODOS LOS NODOS Y $b_i=0$ $i=1, \dots, n$.- Se crean el nodo fuente $n+1$ y el nodo sumidero $n+2$, el arco de retorno del sumidero a la fuente con capacidad inferior cero, capacidad superior suficientemente grande y costo igual a cero. Además todo flujo externo positivo (fijo ó de holgura) en el nodo i , genera un arco del nodo fuente al nodo i , de igual forma todo flujo externo negativo (fijo ó de holgura) en el nodo i , genera un arco del nodo i al nodo sumidero. Los arcos generados por un flujo externo fijo tienen capacidad inferior y capacidad superior igual al flujo fijo y costo cero, mientras que los arcos generados por el flujo externo de holgura tienen capacidad inferior cero, capacidad superior el máximo flujo de holgura y costo igual al costo del flujo de holgura. Por ejemplo la red de la figura [3] se transforma en:

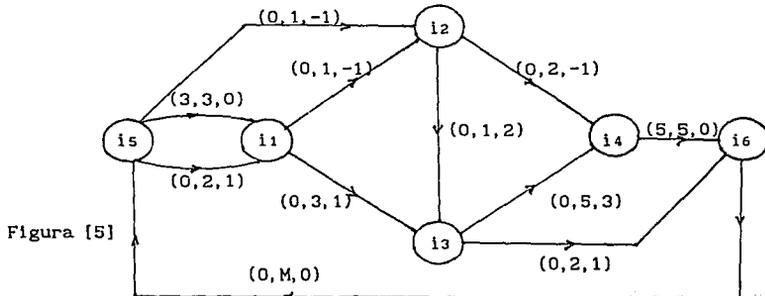


Figura [5]

Este modelo es utilizado en el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter).

RED CON CAPACIDAD INFERIOR CERO.- Una red que tiene arcos con capacidad inferior distinta de cero, se puede transformar a una red equivalente con capacidad inferior cero en sus arcos, haciendo lo siguiente para cada arco k_{ij} con capacidad inferior distinta de cero:

- a) hacer $\underline{C}_k=0$.
- b) reemplazar C_k por $C_k=C_k-\underline{C}_k$
- c) reemplazar f_k por $f_k=f_k-\underline{C}_k$
- d) reemplazar b_i por $b_i=b_i-\underline{C}_k$
- e) reemplazar b_j por $b_j=b_j+\underline{C}_k$

Por ejemplo denotando [flujo externo fijo= b_i], (flujo= f_k , capacidad inferior= \underline{C}_k , capacidad superior= C_k)

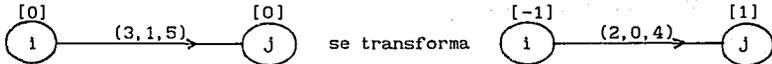


Figura [6]

Figura [7]

Esta transformación es muy recomendable ya que permite un considerable ahorro de memoria, es utilizada por el problema de flujo máximo y el problema con costos cóncavos.

1.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE FLUJO Y MODELO ALGEBRAICO

El principio de conservación de flujo en un nodo establece que "el flujo total que sale del nodo menos el flujo total que entra al nodo es igual al flujo externo fijo en el nodo". Además "la suma de los flujos externos fijos de todos los nodos es cero". En redes sin ganancia se tiene:

$$[9] \quad \sum_{k \in M_o i} f_k - \sum_{k \in M_i i} f_k = b_i, \quad \forall i \in N$$

En redes con ganancia se tiene:

$$\sum_{k \in M_o i} f_k - \sum_{k \in M_i i} a_k f_k = b_i, \quad \forall i \in N, a_k \in \mathbb{R} \text{ (factor ganancia)}$$

Donde, en ambos casos:

$$[10] \quad \sum_{i=1}^n b_i = 0$$

Entonces la conservación de flujo en una red puede ser expresada con un sistema de ecuaciones lineales

$$[11] \quad A f = b$$

donde A de tamaño $n \times m$ es la matriz de incidencia de la red, $f \in \mathbb{R}^m$ es el vector de flujo, y $b \in \mathbb{R}^n$ es el vector de flujo externo fijo (vector de requerimientos).

En redes sin ganancia el sistema $Af=b$ es linealmente dependiente, ya que si sumamos todas las ecuaciones obtenemos $0f=0$ debido a que las columnas de A tienen por entradas distintas de cero 1 y -1, y además se cumple [10]. Una manera de evitar esta dependencia es transformar la red a una con nodo de holgura, donde el nodo de holgura no esta sujeto al principio de conservación de flujo.

Por ejemplo dada la red de la figura [3] esta se transforma a la red de la figura [4] con matriz de incidencia en la cual no se considera el nodo de holgura (renglón is).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera el sistema de conservación de flujo en una red $Af=b$ es un sistema linealmente independiente, con $\text{rango}(A)=n$, pero observe que el número de arcos ha sido incrementado. Los arcos agregados se les llama arcos de holgura. Explicitamente para la red de la figura [4] el sistema es:

$$\begin{array}{rcl} f_1 + f_2 + & & -f_7 = 3 \\ -f_1 & + f_3 + f_4 + & - f_6 = 0 \\ & - f_2 - f_3 & + f_5 + f_8 = 0 \\ & & - f_4 - f_5 = -5 \end{array}$$

De lo anterior tenemos que el problema de flujo a costo mínimo de un solo producto y sin ganancia puede ser expresado como un problema de programación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 [12] \quad & \text{Min} \sum_{k=1}^m h_k(f_k) \\
 & \text{s.a.} \sum_{k \in H_0} f_k - \sum_{k \in H_1} f_k = b_i \quad i=1,2,\dots,n \\
 & \quad \quad \quad \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k \quad k=1,2,\dots,m
 \end{aligned}$$

Donde n es el nodo de holgura, y se han considerado los arcos de holgura. En notación matricial queda:

$$\begin{aligned}
 [13] \quad & \text{Min} \quad h(f) \\
 & \text{s.a.} \quad Af=b \\
 & \quad \quad \quad \underline{C} \leq f \leq C
 \end{aligned}$$

En este trabajo se analizan casos particulares de este problema:

1.4 PUNTOS EXTREMOS Y OPTIMALIDAD DE FUNCIONES CONCAVAS

CONJUNTO CONVEXO.- Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados $x, y \in S$ se tiene que;

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

COMBINACION CONVEXA.- Sean $X_i \in \mathbb{R}^n \quad i=1,2,\dots,p$ un conjunto finito de puntos y $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad i=1,2,\dots,p$ tal que $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ y $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ entonces

$$X = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i$$

se le llama combinación convexa de los puntos $\{X_i\}$.

PUNTOS EXTREMOS.- Un punto X en un conjunto convexo S es llamado punto extremo de S , si no existen $X_1, X_2 \in S; X_1 \neq X_2$ tales que

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \quad \text{para algún } \lambda \in (0,1)$$

es decir, X no puede ser expresado como una combinación convexa estricta.

POLIEDRO.- El conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos X_1, X_2, \dots, X_n se le llama poliedro, y a los puntos que lo generan se le llaman vértices del poliedro los cuales además son puntos extremos del poliedro.

TEOREMA [3].- El poliedro S es un conjunto convexo.

Demostración.- Sean X_1, X_2, \dots, X_n los vértices del poliedro S entonces:

$$S = \left\{ X \mid X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\text{sean } z, y \in S \Rightarrow z = \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

$$y = \sum_{j=1}^n \beta_j X_j, \beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$$

sea $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda z + (1-\lambda)y &= \lambda \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j X_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n [\lambda \alpha_j + (1-\lambda)\beta_j] X_j \end{aligned}$$

donde $\lambda \alpha_j + (1-\lambda)\beta_j \geq 0$ ya que $\lambda \in [0, 1], \alpha_j, \beta_j \geq 0$ y

$$\sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j + (1-\lambda)\beta_j) = \lambda \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right) = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

$\therefore S$ es un conjunto convexo.

Un ejemplo de poliedro es $F = \{f \mid Af = b, C \leq f \leq C\}$ cuando las componentes de C y C son finitas, entonces cualquier $f \in F$ puede ser expresado como:

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

donde los X_1, X_2, \dots, X_n son los vértices de F , que son puntos extremos.

FUNCION CONCAVA.- Sea $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el convexo F . Entonces se dice que h es cóncava si para toda $x, y \in F$ se tiene que:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Observe que una función lineal es cóncava ya que siempre cumple con igualdad.

TEOREMA [4].- El mínimo de la función cóncava $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ en el poliedro S , es un punto extremo de S .

Demostración.- Sea $X \in S$ con puntos extremos X_1, X_2, \dots, X_n tal que

$$h(X_1) = \min \{h(X_i) | i=1, 2, \dots, n\}$$

por la definición de S se tiene

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\Rightarrow h(X) = h\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) \quad \text{aplicando reiteradamente la definición de función cóncava}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i h(X_i)$$

$$\geq h(X_1) \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{por la definición de } h(X_i).$$

$$= h(X_1)$$

$$\Rightarrow h(X_1) \leq h(X) \quad \forall X \in S \quad \text{con } X_1 \text{ un punto extremo.}$$

COROLARIO [5].- El problema

$$\text{Min } h(f)$$

$$\text{s.a. } Af=b$$

$$\underline{C} \leq f \leq \underline{C}$$

con h cóncava o lineal, en red con o sin ganancia, tiene por solución un punto extremo de $\{f | Af=b, \underline{C} \leq f \leq \underline{C}\}$.

SOLUCION BASICA.- Una solución f del sistema $\{Af=b, \underline{C} \leq f \leq \underline{C}\}$, con $A_{n \times m}$ de rango completo} es básica si $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ puede partitionarse en dos conjuntos $f^B=(f_{B1}, f_{B2}, \dots, f_{Bn})$ y $f^N=(f_{N1}, f_{N2}, \dots, f_{N(m-n)})$ y además:

i) las columnas de A asociadas a las variables f_{Bj} son linealmente independientes \therefore estas columnas forman la matriz B llamada matriz básica.

ii) las variables no básicas f_{Nj} toman el valor de su cota inferior o el valor de su cota superior, es decir $f_{Nj}=\underline{C}_{Nj}$ ó $f_{Nj}=\underline{C}_{Nj}$, $\forall j=1, 2, \dots, m-n$.

Entonces arreglando las columnas de A esta se puede escribir como $A=[B, N]$ y $f = \begin{bmatrix} f^B \\ f^N \end{bmatrix}$ entonces el sistema queda

$$[B, N] \begin{bmatrix} f^B \\ f^N \end{bmatrix} = b$$

$$Bf^B + Nf^N = b$$

$$f_B = B^{-1}b - B^{-1}N f_N$$

$$f_N = \underline{C}_N \text{ ó } C_N \quad \forall f_N \in F_N$$

y si además $\underline{C}_B \leq f_B \leq C_B$ (donde \underline{C}_B y C_B son los límites de las capacidades asociadas a las variables básicas) se dice que f es solución básica factible.

TEOREMA [6].- Un punto del poliedro acotado $F = \{f \mid Af = b, 0 \leq f \leq C\}$ es una solución básica, si y solo si es un punto extremo.

Demostración(⇐).- Consideremos que $A_{n \times m}$ es de rango completo $\text{rango}(A) = n$, y sea $X \in F$ un punto extremo de F , arreglando las columnas de A de tal manera que las correspondientes variables X_1, X_2, \dots, X_p tengan valores entre sus cotas y el resto $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_m$ tengan de valor alguna de sus cotas, se demostrará que las columnas a_1, a_2, \dots, a_p son linealmente independientes.

Supongamos que a_1, a_2, \dots, a_p son linealmente dependientes tales que

$$\sum_{j=1}^p \gamma_j a_j = 0$$

y sean X' y X'' definidos de la siguiente manera:

$$X'_j = \begin{cases} X_j + \lambda \gamma_j & j=1, 2, \dots, p \\ X_j & \text{para } j=p+1, p+2, \dots, m \end{cases}$$

$$X''_j = \begin{cases} X_j - \lambda \gamma_j & j=1, 2, \dots, p \\ X_j & \text{para } j=p+1, p+2, \dots, m \end{cases}$$

como $X_j > 0 \quad \forall j=1, 2, \dots, p$ se escoge $\lambda > 0$ tal que $0 < X'_j, X''_j < C_j \quad \forall j=1, 2, \dots, p$ y como los γ_j no todos son ceros resulta que $X' \neq X''$ y además

$$\begin{aligned} AX' &= \sum_{j=1}^p a_j X'_j + \sum_{j=p+1}^m a_j X_j = \sum_{j=1}^p a_j (X_j + \lambda \gamma_j) + \sum_{j=p+1}^m a_j X_j \\ \Rightarrow AX' &= \sum_{j=1}^p a_j X_j + \lambda \sum_{j=1}^p \gamma_j a_j + \sum_{j=p+1}^m a_j X_j = AX = b \end{aligned}$$

Análogamente $AX'' = b \Rightarrow X', X'' \in F$ los cuales $X' \neq X''$. Pero además X es combinación convexa de X' y X'' ya que $X = 1/2 X' + 1/2 X''$ lo cual contradice el hecho de que X es un punto extremo y se tiene que si $X \in F$ es punto extremo, entonces las variables $0 < X_1 < C_1$ tienen asociadas

columnas linealmente independientes en A, y como el rango(A)=n entonces existen n-p columnas de A asociadas a variables con valor en alguna de sus cotas, que junto con las p columnas son linealmente independientes. De esta manera se ha completado las variables básicas x_B , y la matriz básica B, el resto son las variables no básicas las cuales tienen valor en alguna de sus cotas. ∴ todo punto extremo de F es solución básica factible de F.

Demostración(⇒).-Sea $X \in F$ básica con B la base correspondiente, entonces

$$X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \text{ tal que } X_{N1} = 0 \text{ ó } C_{N1} \quad \forall i=n+1, \dots, m$$

supongamos que existe $X', X'' \in F$ tales que

$$X = \lambda X' + (1-\lambda)X'' \text{ con } \lambda \in (0,1)$$

sea $X' = \begin{bmatrix} X'_B \\ X'_N \end{bmatrix}$, $X'' = \begin{bmatrix} X''_B \\ X''_N \end{bmatrix}$ con $0 \leq X'_{N1} \leq C_{N1}$ y $0 \leq X''_{N1} \leq C_{N1}$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X'_B \\ X'_N \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} X''_B \\ X''_N \end{bmatrix}$$

-Si $X_{N1} = 0$ como $X'_{N1}, X''_{N1} \geq 0$ y $\lambda \in (0,1) \Rightarrow X_{N1} = X'_{N1} = 0$

-Si $X_{N1} = C_{N1}$ como $0 \leq X'_{N1} \leq C_{N1}$, $0 \leq X''_{N1} \leq C_{N1}$ y $\lambda \in (0,1) \Rightarrow X'_{N1} = X''_{N1} = C_{N1}$ cumple en $C_{N1} = \lambda C_{N1} + (1-\lambda)C_{N1}$ por lo tanto

$$X_N = X'_N = X''_N = 0 \text{ ó } C_N$$

y $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$, $X'_B = B^{-1}b - B^{-1}NX'_N \Rightarrow X_B = X'_B = X''_B \Rightarrow X = X' = X''$. Por lo tanto X es un punto extremo de F, lo cual demuestra el teorema.

COROLARIO [7].- Un punto de $F = \{f | Af=b, f \geq 0\}$ es solución básica si y solo si es punto extremo de F.

Demostración.- Del teorema [6] considerando $X_N=0$ es decir las variables no básicas son estrictamente cero.

1.5 DUALIDAD Y CONDICIONES DE KUHN-TUCKER EN REDES

Debido a que el problema [13] con costos cóncavos sera resuelto mediante soluciones iterativas del problema con costos lineales, entonces se determinará el problema dual y las condiciones de optimalidad del programa lineal.

El problema primal es:

$$\begin{aligned} & \text{Min } hf \\ [14] \quad & \text{s. a } Af=b \\ & \underline{C} \leq f \leq \underline{C} \end{aligned}$$

se supone $\underline{C} \geq 0$ para propósitos algebraicos. Es equivalente a:

$$\begin{aligned} [15] \quad & - \text{Max } -hf \\ & \text{s. a. } Af=b \quad \longrightarrow \pi \\ & \quad \quad \quad f \leq \underline{C} \quad \longrightarrow \delta \\ & \quad \quad \quad -f \leq -\underline{C} \quad \longrightarrow \omega \end{aligned}$$

entonces el problema dual asociado es:

$$\begin{aligned} [16] \quad & - \text{Min } \pi b + \delta \underline{C} - \omega \underline{C} \\ & \text{s. a. } \pi A + \delta I - \omega I \geq -h \\ & \quad \quad \quad \pi \text{ no restringida} \\ & \quad \quad \quad \delta, \omega \geq 0 \end{aligned}$$

Las tres condiciones necesarias y suficientes de Kuhn-Tucker para que una solución del problema [14] sea óptima quedan enunciados en el siguiente teorema.

TEOREMA [8].- Dada una solución f al problema primal y una solución π, δ, ω al problema dual estas son óptimas de sus respectivos problemas si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i) f es factible al problema primal, es decir, cumple que

$$[17] \quad Af=b \text{ y } \underline{C} \leq f \leq \underline{C}.$$

ii) π, δ, ω son factibles del problema dual, es decir,

$$[18] \quad \pi A + \delta I - \omega I \geq -h, \quad \delta, \omega \geq 0$$

iii) las condiciones de holgura complementaria

$$a) f \cdot (\pi A + \delta I - \omega I + h) \geq 0$$

$$[19] \quad b) (C-f)\delta = 0$$

$$c) (f-\underline{C})\omega = 0$$

TEOREMA [9].- Si π, δ, ω son una solución óptima del problema dual, haciendo $d = \pi A + h$ (es decir, $dk = \pi_i - a_k \pi_j + h_k$, a_k factor de ganancia) entonces $\delta_k = \max\{0, -dk\}$ y $\omega_k = \max\{0, dk\}$.

Demostración.- De [16] tenemos que $\delta_k \geq 0$, supongamos que $\delta_k > 0$, \Rightarrow de [19.b] $f_k = C_k \neq 0 \Rightarrow$ de [19.c] y suponiendo que $\underline{C}_k \neq C_k \Rightarrow \omega_k = 0$ además de [19.a] tenemos $\pi_i - a_k \pi_j + \delta_k + h_k = 0 \Rightarrow \delta_k = -\pi_i + a_k \pi_j - h_k \forall k$ tal que $\delta_k > 0 \Rightarrow \delta_k = \max\{0, -dk\}$.

En forma análoga de [16] tenemos que $\omega_k \geq 0$. Supongamos que $\omega_k > 0 \Rightarrow$ de [19.c] $f_k = \underline{C}_k \neq 0$ ya que de lo contrario ω no hubiera sido considerada como variable dual y suponiendo $\underline{C}_k = C_k \Rightarrow$ de [19.b] $\delta_k = 0$, además de [19.a] tenemos $\pi_i - a_{ik}\pi_j - \omega_k + h_k = 0 \Rightarrow \omega_k = \pi_i - a_{ik}\pi_j + h_k \forall k$ tal que $\omega_k > 0 \Rightarrow \omega_k = d_k \forall k$ tal que $\omega_k > 0 \Rightarrow \omega_k = \max[0, d_k]$. Con lo cual se concluye la demostración.

Considerando los resultados de los teorema [8] y [9] obtenemos las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker especializadas para redes con costos lineales.

COROLARIO [10].- Dada una solución f al problema primal, y una solución π, δ, ω al problema dual, estas son óptimas de sus respectivos problemas si y solo si se satisfacen las 3 condiciones siguientes:

- i) sea f primal factible.
- ii) sea π, δ, ω dual factible, lo cual es equivalente a que $\delta_k = \max[0, -d_k]$ y $\omega_k = \max[0, d_k]$.
- iii) se satisfagan las condiciones de holgura complementaria:
 - a) $d_k = 0$ para $\underline{C}_k \leq f_k \leq C_k$.

[20] b) $f_k = \underline{C}_k$ para $d_k > 0$.

c) $f_k = C_k$ para $d_k < 0$.

donde $d_k = \pi_i - a_{ik}\pi_j + h_k$ para $k \sim (i, j)$, a_k factor de ganancia.

Demostración.- i) idéntica teorema [8]

ii) por el teorema [9]

iii) a) si $d_k = 0$ por teorema [9] $\delta_k = \omega_k = 0 \Rightarrow \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k$.

ii) b) si $f_k = \underline{C}_k$ por [19.b] $\Rightarrow \delta_k = 0$ por ii) $\Rightarrow d_k > 0$.

iii) c) si $f_k = C_k$ por [19.c] $\Rightarrow \omega_k = 0$ por ii) $\Rightarrow d_k < 0$.

1.6 SOLUCION BASICA Y ARBOL DE EXPANSION EN REDES SIN GANANCIA

Dada una red con matriz de incidencia $A_{n \times m}$, anteriormente se hizo notar que el sistema $Af = b$ es linealmente dependiente, entonces el rango(A) $\leq n-1$, con el fin de caracterizar las soluciones básicas se recurre a los siguientes resultados.

TEOREMA [11].- La matriz de incidencia A_T de tamaño $n \times (n-1)$ asociada con nodos y arcos de cualquier árbol de expansión, tiene rango(A_T) = $n-1$.

Demostración.- Como T es un árbol tiene al menos un arco, entonces $n \geq 2$ por lo cual T tiene al menos un nodo terminal, es decir un nodo j que tiene unicamente un nodo adyacente con el. En tal caso el j-esimo renglón de A_T tiene un solo elemento distinto de cero, por tanto permutando renglones y columnas de A_T de tal manera que el elemento distinto de cero del renglón j quede en el primer renglón y primera columna de A_T . Entonces la A_T resultante es:

$$A_T = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ P & A_T' \end{bmatrix}$$

Eliminando el primer renglón y primera columna de A_T y considerando la submatriz A_T' de tamaño $(n-1) \times (n-2)$ que equivale a eliminar el nodo j y su arco adyacente en el árbol T quedando el subárbol T' con n-1 nodos y n-2 arcos.

Debido a que siempre queda un subárbol este procedimiento puede ser repetido n-1 veces después de que las n-1 columnas de A_T (arcos en T) se han agotado, eliminando el último renglón de la matriz final del proceso, se obtiene una submatriz de A_T de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior cuyos elementos en su diagonal principal son distintos de cero, por lo tanto no singular lo cual significa que $\text{rango}(A_T) = n-1$.

COROLARIO [12].- La matriz de incidencia $A_{n \times m}$ de una red conectada G con n nodos y m arcos tiene $\text{rango}(A) = n-1$.

Demostración.- Como G es una red conectada entonces existe un árbol de expansión T de G cuya matriz de incidencia por el teorema [11] tiene rango n-1 la cual es una submatriz de A y como $\text{rango}(A) \leq n-1$ entonces $\text{rango}(A) = n-1$.

ARCO RAIZ.- Si a la red se le añade un arco que inicie en cualquier punto en el espacio distinto de cualquier nodo (no considerado en las restricciones) y termine en cualquier nodo r, al nodo r y al arco añadido se le denomina nodo raíz y arco raíz respectivamente. La matriz de incidencia de la nueva red es $A' = [-e_r, A]$, con e_r vector unitario con 1 en la r-esima entrada.

Ejemplo.- La red de la figura [1] queda:

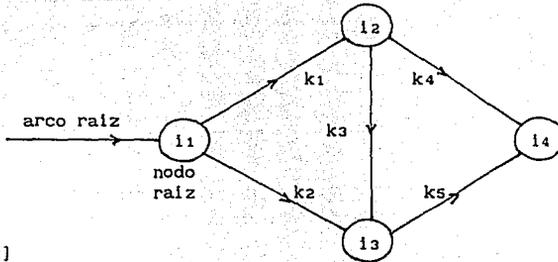


Figura [8]

Su matriz de incidencia es;

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ARBOL ENRAIZADO.- Es un árbol que se le ha añadido un nodo y un arco raíz.

COROLARIO [13].- El rango(A')= n .

Demostración.- Consideremos la red G' asociada a A' , la cual tiene un nodo y un arco raíz, aplicando el teorema [11] a A' matriz de incidencia $n \times n$ del árbol de expansión T' que incluye el nodo y arco raíz, tenemos que rango(A')= n y como A' es una submatriz de $A' \Rightarrow$ rango(A')= n .

COROLARIO [14].- La submatriz A' asociada con cualquier árbol de expansión T' de una red sin ganancia G' es una matriz básica de A' .

Demostración.- Inmediato del corolario [13] .

Observe que cualquier submatriz básica de A' contiene la columna $-er$ asociada al arco raíz, es decir $B=[-er, \underline{B}]_{n \times n}$ donde \underline{B} es la submatriz de A' formada por $n-1$ columnas linealmente independientes.

LEMA[15].- Dada una colección $S \neq \emptyset$ de columnas de la matriz básica \underline{B} entonces existe al menos $|S|+1$ renglones de \underline{B} ($|$ cardinalidad de S) los cuales tienen elementos distintos de cero en estas columnas.

Demostración.- Sea $S \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$ colección de columnas de \underline{B} y sea $R(S) = \{i | i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que existe } a_{ij} \neq 0, j \in S\}$ el conjunto de

renglones que tienen al menos un elemento distinto de cero en la colección de columnas S . Supongamos que $|R(S)| \leq |S|$, debido a que si sumamos estos $|R(S)|$ renglones obtenemos cero, entonces el rango de la matriz formada por la colección de columnas S es menor que $|R(S)|$ lo cual implica que la colección de columnas S es linealmente dependiente lo cual contradice al hecho de que \underline{B} es una base.

TEOREMA [16].- Una base $B=[-e_r, \underline{B}]$ de A' de una red sin ganancia tiene asociado un árbol de expansión de la red.

Demostración.- Supongase que la sub-red asociada con \underline{B} contiene ciclos. Denotemos por S las columnas de \underline{B} que se asocian con los arcos del ciclo entonces $R(S)$ correspondiente al conjunto de nodos que son adyacentes a estos arcos en el ciclo. En un ciclo el número de nodos es igual al número de arcos entonces $|R(S)| = |S|$ lo cual es una contradicción al lema [15]. \therefore la sub-red asociada a \underline{B} no contiene ciclos y tiene n nodos con $n-1$ arcos, entonces es un árbol de expansión de G .

COROLARIO [17].- En una red sin ganancia, un flujo básico tiene asociado un árbol de expansión tal que el flujo en todo arco no en el árbol es igual a alguna de sus capacidades. En el caso degenerado, tiene asociado un bosque.

COROLARIO [18].- En una red sin ganancia un flujo básico esta caracterizado por no tener circuitos de arcos cuyos flujos estan estrictamente entre sus capacidades $0 < f_k < C_k$.

Por ejemplo siendo $(f_k, \underline{C}_k, C_k)$

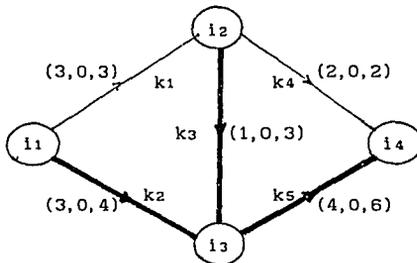


Figura [9]

es flujo básico de valor 6 con variables básicas f_2, f_3, f_5 y no básicas f_1, f_4 .

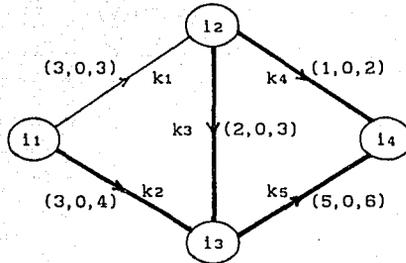


Figura [10]

es un flujo no básico.

1.7 MATRICES UNIMODULARES Y SOLUCION ENTERA EN REDES SIN GANANCIA

En problemas prácticos es común que los parámetros de los vectores b , \underline{c} y C del problema [13] sean enteros y se requieran también solución f entera. En esta sección se demuestra que el problema [13] con parámetros enteros tiene solución entera en redes sin ganancia con costos lineales ó cóncavos.

MATRIZ UNIMODULAR.— La matriz de restricciones A se dice unimodular si toda matriz básica B de A tiene determinante ± 1 , $\det(B)=\pm 1$.

MATRIZ TOTALMENTE UNIMODULAR.— La matriz A es totalmente unimodular si toda submatriz cuadrada B de A tiene determinante $0, \pm 1$, es decir, $\det(B)=0, \pm 1$.

TEOREMA [19].— Si $A=[a_{ij}]$ es totalmente unimodular entonces $a_{ij}=0, \pm 1 \forall i, j$.

Demostración.— Como A es totalmente unimodular, entonces el determinante de toda submatriz cuadrada de tamaño 1, que es el valor del elemento es $0, \pm 1$.

TEOREMA [20].— Sea A totalmente unimodular, si se agrega $\pm e_r$ como renglón o como columna en cualquier posición, entonces la nueva matriz $A'=[\pm e_r, A]$ ó $A'=\begin{bmatrix} A \\ \pm e_r \end{bmatrix}$ sigue siendo totalmente unimodular.

Demostración.— Sea B una submatriz cuadrada de A' entonces suceden dos casos:

1) B no contiene elementos de e_r entonces $\det(B)=0, \pm 1$ ya que B es

submatriz de A totalmente unimodular.

- ii) B contiene elementos de e_r . Si los elementos de e_r contenidos en B son puros ceros estos forman una columna de B de puros ceros, entonces $\det(B)=0$. Si el ± 1 de e_r esta contenido en B, se desarrolla el determinante de B por el quedando una submatriz cuadrada B' de A entonces $\det(B)=\pm(\det(B'))=0, \pm 1$.

Por tanto, en todos los casos $\det(B)=0, \pm 1$ lo que demuestra que A' es totalmente unimodular.

COROLARIO [21].- Sea A totalmente unimodular entonces las matrices $[A, I], \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ son totalmente unimodular.

Demostración.- Aplicando el teorema [20] cada vez que se agrega ei hasta completar I.

TEOREMA [22].- Una matriz A con $a_{ij}=0, \pm 1$ es totalmente unimodular si, no más de dos entradas por columna son diferentes de cero y si los renglones de A pueden particionarse en dos conjuntos I_1, I_2 posiblemente alguno vacío, tales que:

- i) Si una columna tiene entradas diferente de cero del mismo signo, los renglones estan en diferente conjunto.
ii) Si una columna tiene dos entradas diferentes de cero de diferente signo, los renglones correspondientes estan en el mismo conjunto.

Demostración.- Por inducción sobre el tamaño de la submatriz B de A.

-Tamaño $k=1$, toda submatriz cuadrada B de tamaño 1 es $[0]$ ó $[\pm 1]$ entonces $\det(B)=0, \pm 1$.

-Suponiendo que toda submatriz cuadrada B' de tamaño $k-1$ tiene $\det(B')=0, \pm 1$, sea B submatriz cuadrada de tamaño k entonces se tienen los siguientes casos:

- a) Si tiene columna o renglón de puros ceros, entonces $\det(B)=0$.
b) Si tiene alguna columna con un solo elemento diferente de cero, desarrollando el determinante por ese elemento queda una submatriz cuadrada B' de tamaño $k-1$ que por hipótesis de inducción $\det(B')=0, \pm 1$, entonces $\det(B)=\pm \det(B')=0, \pm 1$.
c) Si tiene todas sus columnas con dos elementos diferentes de cero, y como por hipótesis del teorema existen conjuntos I_1, I_2 que por

sus características se tiene

$$\sum_{i \in I_1} b_{ij} = \sum_{i \in I_2} b_{ij} \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I_1} b_{ij} - \sum_{i \in I_2} b_{ij} = 0 \quad \forall j$$

lo cual significa que el total de renglones es linealmente dependiente, $\Rightarrow \det(B)=0$.

De todo lo anterior se deduce que A es totalmente unimodular.

COROLARIO [23].- La matriz de incidencia A asociada a una red sin ganancia es totalmente unimodular.

Demostración.- Con I_1 =conjunto de todos los renglones, $I_2=\emptyset$, A cumple con todas las condiciones del teorema [22] \therefore A es totalmente unimodular.

TEOREMA [24].- Sea A una matriz totalmente unimodular entonces los vértices de $F=\{f \mid Af=b, 0 \leq f \leq C\}$ son enteros cuando b y C tienen componentes enteras.

Demostración.- Particionando $A=[B, N]$ con B matriz básica, siendo $f = \begin{bmatrix} f_B \\ f_N \end{bmatrix}$ solución básica tenemos

$$f_B = B^{-1}b - B^{-1}Nf_N$$

$f_{N1} = 0$ ó C_{N1} para toda variable no básica f_{N1}
donde C_{N1} es su correspondiente
cota superior.

- f_N sus variables son enteras ya que $C_{N1}, 0 \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} conjunto de los enteros).

- N es una submatriz entera de A, ya que A por ser totalmente unimodular es entera.

- b por hipótesis tiene todas sus componentes enteras.

- B por ser submatriz A es entera y $\det(B) = \pm 1$. Entonces existe B^{-1} tal que

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B)}{\text{Det}(B)} = \frac{\text{Matriz entera}}{\pm 1} = \text{Matriz entera.}$$

de lo anterior se tiene que las variables de f_B son enteras.

\therefore Toda solución básica es entera, y como las componentes de C son enteras entonces F es un poliedro, por el teorema [6] se concluye que los vértices de F son enteros.

COROLARIO [25].- El problema [13]

Min $h(f)$

s.a. $Af=b$

$0 \leq f \leq C$

con b, C vectores enteros, h cóncava o lineal para redes sin ganancia tiene solución óptima entera.

Demostración.- Del corolario [5], el problema tiene por solución óptima, un punto extremo de la región de factibilidad, y del teorema [24] se sabe que esta es entera.

1.8 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

El problema de redes sin ganancia con costos cóncavos, es un problema considerado difícil en términos computacionales. Este concepto y otros que serán utilizados posteriormente son analizados brevemente en esta sección.

PROBLEMA.- Un problema es una pregunta general. Usualmente posee varios parámetros, cuyos valores al ser especificados, constituyen una INSTANCIA del problema. Un problema se define dando:

- i) Una descripción general de sus parámetros.
- ii) Estableciendo las propiedades que se requieren en la solución.

ALGORITMO.- Un algoritmo es en general un procedimiento paso a paso, para resolver un problema. Se dice que un algoritmo resuelve un problema si para toda instancia produce solución.

EFICIENCIA.- La eficiencia de un algoritmo puede ser medida en términos del espacio de memoria utilizada durante su ejecución, ó bien en términos del tiempo de ejecución. Aquí se analizará la eficiencia en términos del tiempo de ejecución el cual es directamente proporcional al número de operaciones básicas elementales que el ordenador debe realizar, por esta razón suele llamarse tiempo de ejecución no al tiempo físico, sino al número de operaciones realizadas.

TIEMPO DE EJECUCION.- El tiempo de ejecución es una función $f(n)$ donde n es el número de datos de entrada que describen la instancia del problema.

Debido a que un algoritmo puede presentar serias dificultades cuando el tamaño de la entrada (la instancia del problema) aumenta considerablemente y debido a que en ocasiones el cálculo exacto del número de operaciones elementales es complicado basta con conocer el comportamiento asintótico de $f(n)$ cuando n es suficientemente grande.

ORDEN DE UNA FUNCION.- Una función $f(n)$ se dice de orden $g(n)$ denotada $O(g(n))$ si existe una constante c tal que $|f(n)| \leq c|g(n)| \forall n \geq 1$.

ORDEN DE UN ALGORITMO.- Se dice que un algoritmo es de orden polinomial si es $O(P(n))$ donde $P(n)$ es un polinomio en n , si no es de orden polinomial se dirá que es de orden exponencial.

A manera de ilustración, un algoritmo $O(n^5)$ necesita 0.1 segundos para $n=10$ y 13 minutos para $n=60$, mientras que un algoritmo $O(2^n)$ necesita 0.001 segundos para $n=10$ y 36 600 años para $n=60$.

De acuerdo a lo anterior los problemas pueden clasificarse de la siguiente manera:

PROBLEMAS IRRESOLUBLES.- Un problema se dice irresoluble si no existe ni existirá un algoritmo que lo resuelva.

PROBLEMAS POLINOMIALES.- Un problema pertenece a la clase P si existe un algoritmo polinomial, conocido o no, que lo resuelva.

PROBLEMAS INTRATABLES.- Un problema es intratable si no existe ni existirá un algoritmo polinomial que lo resuelva, es el complemento de la clase P .

PROBLEMAS NO DETERMINISTA POLINOMIAL (NP).- Son problemas de decisión (su solución es si ó no) que pueden ser resueltos en tiempo polinomial por algoritmos no deterministas, los cuales constan de dos estados separados: el estado de predecir y el estado de concordar. Estos algoritmos tienen la capacidad de adivinar la ruta correcta en un árbol de decisión. Por definición $P \subset NP$.

RELACION DE REDUCCION.- Se dice que un problema L_1 se reduce al problema L_2 , denotado $L_1 \leq L_2$, si existe una transformación que toma un tiempo polinomial en convertir L_1 en L_2 . La relación reducción es:

i) Reflexiva $L_1 \leq L_1$

ii) Transitiva. Si $L_1 \leq L_2$ y $L_2 \leq L_3 \Rightarrow L_1 \leq L_3$.

iii) No necesariamente simétrica. Si $L_1 \leq L_2$ no siempre $L_2 \leq L_1$

Si la reducción resulta simétrica entonces es una clase de equivalencia y se dice que L_1 y L_2 son polinomialmente equivalentes.

Los problemas polinomiales son polinomialmente equivalentes y constituyen la clase P que son los problemas "fáciles" en la clase NP. La clase NP-completo en NP esta constituida por los problemas "dificiles" que son polinomialmente equivalentes pero no se han encontrado algoritmos polinomiales que los resuelvan, a esta clase pertenece el problema de redes con costos cóncavos tema de esta tesis.

Una pregunta aún abierta es si $P=NP$, si un solo problema en la clase NP-completo puede ser resuelto en tiempo polinomial, entonces, $P=NP$ y si cualquier problema en la clase NP-completo es intratable entonces $P \neq NP$. Además se ha demostrado que suponiendo $P \neq NP$ existen problemas en NP que no estan ni en P ni en NP-completo.

En conclusión, los problemas pequeños de la clase NP-completo pueden ser resueltos con algoritmos exponenciales, pero estos resultan imprácticos para instancias grandes ya que el tiempo de solución crece de manera alarmante, en estos casos hay que conformarse con dar una buena solución aunque no sea la óptima, tal es el caso del problema central de este trabajo de tesis.

CAPITULO II

PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO

En este capítulo se presenta el problema de flujo máximo, que consiste en "encontrar el flujo de valor máximo, que puede circular en una red con restricciones de capacidad en sus arcos, desde un nodo fuente a un nodo sumidero". Tiene numerosas aplicaciones especialmente en transporte, asignación, redes de comunicación, etc. Ford y Fulkerson (1956) fueron los primeros en estudiar este problema desde el punto de vista computacional, establecieron el teorema fundamental de "flujo máximo -corte mínimo" y desarrollaron el algoritmo de solución "trayectoria aumentante". Este algoritmo será utilizado como subrutina en el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter).

II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $G(N,M)$ una red con N =conjunto de n nodos, M =conjunto de m arcos, $C \in \mathbb{R}^m$ tal que C_k es el límite superior de capacidad del arco k , M_{0i} (M_{ti}) conjunto de arcos que se originan (terminan) en el nodo i . El nodo fuente s con flujo externo cero, flujo externo de holgura denotado por la variable v , capacidad del flujo externo de holgura infinita y costo del flujo externo de holgura 1. El nodo sumidero t con flujo externo fijo cero, flujo externo de holgura $(-v)$, capacidad del flujo externo de holgura $-\infty$, costo del flujo externo de holgura 1. El resto de los nodos con ambos flujos externos cero.

Utilizando la transformación a una red con nodo de holgura, donde s es el nodo de holgura, que para evitar la redundancia no se incluye en las restricciones, entonces el problema de flujo máximo se expresa:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max. } v \\
 [21] \quad & \text{s.a. } \sum_{k \in M_{0i}} f_k - \sum_{k \in M_{ti}} f_k = 0 \quad \forall i \neq \{s, t\} \\
 & \sum_{k \in M_{0s}} f_k - \sum_{k \in M_{ts}} f_k + v = 0 \\
 & 0 \leq f_k \leq C_k \quad \forall k \in M
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, considerando $[b_i, b_{s_i}, h_{s_i}]$ y (C_k, C_k) en las figura siguiente:

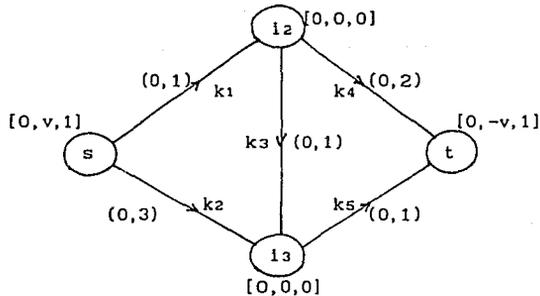


Figura [11]

Se transforma en:

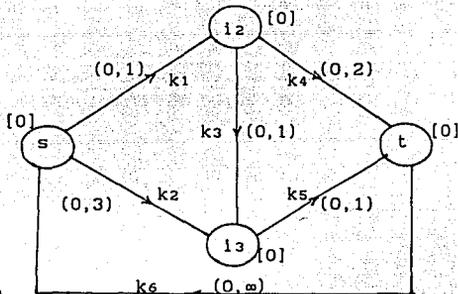


Figura [12]

donde $[b_i]$, (C_k, C_k)

En términos de programación queda:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max } v & & & \\
 [22] \quad \text{s. a.} & -f_1 + f_3 + f_4 & = 0 & \longrightarrow \pi_2 \\
 & -f_2 - f_3 + f_5 & = 0 & \longrightarrow \pi_3 \\
 & -f_4 - f_5 + v & = 0 & \longrightarrow \pi_4 \\
 & 0 \leq f_1 \leq 1 & & \longrightarrow \delta_1 \\
 & 0 \leq f_2 \leq 3 & & \longrightarrow \delta_2 \\
 & 0 \leq f_3 \leq 1 & & \longrightarrow \delta_3 \\
 & 0 \leq f_4 \leq 2 & & \longrightarrow \delta_4 \\
 & 0 \leq f_5 \leq 1 & & \longrightarrow \delta_5
 \end{array}$$

II.2 DUALIDAD Y OPTIMALIDAD

Si π_i es la variable dual asociada a las restricciones de conservación de flujo, en el nodo $i \neq s$ ($\pi_s=0$ ya que el nodo de holgura s no es considerado en las restricciones del primal) y δ_k la correspondiente restricción de la capacidad superior de los arcos, entonces el problema dual asociado al problema de flujo máximo queda:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \sum_{k=1}^m C_k \delta_k \\
 [23] \quad \text{s. a.} & \pi_i - \pi_j + \delta_k \geq 0 \quad \forall k_{\underline{}}(i, j) \in M \\
 & \pi_t \geq 1 \\
 & \pi_i \text{ no restringida.} \\
 & \delta_k \geq 0, \quad \forall k \in M.
 \end{array}$$

Por ejemplo el dual de [22] es:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min} & 0\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + \delta_1 + 3\delta_2 + \delta_3 + 2\delta_4 + \delta_5 & & \\
 [24] \text{ s. a.} & -\pi_2 & + \delta_1 & \geq 0 \\
 & -\pi_3 & & + \delta_2 & \geq 0 \\
 & \pi_2 - \pi_3 & & + \delta_3 & \geq 0 \\
 & \pi_2 & - \pi_4 & & + \delta_4 & \geq 0 \\
 & & \pi_3 - \pi_4 & & & + \delta_5 \geq 0 \\
 & & & \pi_4 & & \geq 1 \\
 & & & & \pi_1 & \text{no restringida } i=2,3,4 \\
 & & & & \delta_k & \geq 0 \quad k=1,2,3,4,5.
 \end{array}$$

La interpretación del problema dual es la siguiente: consideremos un corte cualquiera $Q = \{S, S'\}$ y defináse

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in S \\ 1 & \text{si } i \in S' \end{cases}$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k_{\sim}(i, j) \in Q^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta selección particular de π, δ es solución factible del problema dual, cuya función objetivo es igual a la capacidad del corte Q . Por lo tanto "el óptimo del problema dual es el corte de capacidad mínima".

Por el teorema de dualidad débil se tiene:

Lema.- El valor de cualquier flujo factible es menor o igual que la capacidad de cualquier corte que separe la fuente y el sumidero.

Por el teorema fundamental de dualidad y suponiendo ambos problemas factibles, se tiene el teorema de flujo máximo corte mínimo.

Teorema.- El valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Estos resultados se demuestran constructivamente en la siguiente sección para obtener el algoritmo de solución.

COROLARIO [26].- Dada una solución factible f al problema [21] y π, δ factibles al problema [23], estas son óptimas a sus respectivos problemas si $\forall k_{\sim}(i, j) \in M$ se satisface:

- a) $\pi_i - \pi_j = 0$ para $0 \leq f_k \leq C_k$.
- [25] b) $f_k = 0$ para $\pi_i - \pi_j > 0$.
- c) $f_k = C_k$ para $\pi_i - \pi_j < 0$.

Demostración.- Considerando que $dk = \pi_i - \alpha_k \pi_j + b_k$ en el problema de flujo máximo se reduce a $dk = \pi_i - \pi_j$, sustituyendo en [20] del corolario [10] se llega a este resultado.

II.3 FUNDAMENTOS TEORICOS

En esta sección se dan los resultados necesarios para demostrar en forma constructiva, el teorema de flujo máximo-corte mínimo, del cual, se deducirá el algoritmo de solución.

TRAYECTORIA AUMENTANTE.- En la red del problema de flujo máximo con nodo fuente s y sumidero t , a la trayectoria elemental $P: s \rightarrow t$ se le llama aumentante si

i) $f_k < C_k \forall k \in P^+$ (k arco no saturado).

ii) $f_k > 0 \forall k \in P^-$ (al arco k se le puede regresar flujo).

LEMA [27].- Dada una red G para el problema [21] con flujo factible f de valor v , si existe $P: s \rightarrow t$ trayectoria aumentante entonces existe el flujo factible f' con valor $v + \epsilon$ donde

$$f'_r = \begin{cases} f_r + \epsilon & \text{si } r \in P^+ \\ f_r - \epsilon & \text{si } r \in P^- \\ f_r & \text{si } r \notin P \end{cases}$$

$$f' = f + \epsilon e_P$$

donde

$$[26] \quad \epsilon = \min\{l, m\}$$

tal que

$$l = \min\{C_r - f_r \mid r \in P^+\}$$

$$m = \min\{f_r \mid r \in P^-\}.$$

Demostración.- Primero se demuestra que f' es factible respecto a las capacidades:

i) si $r \notin P \Rightarrow f'_r = f_r$ con f factible.

ii) si $r \in P^+ \Rightarrow$ por la definición de ϵ tenemos;

$$\epsilon \leq C_r - f_r \quad \forall r \in P^+$$

$$\Rightarrow f_r + \epsilon \leq C_r \quad \text{como } \epsilon \geq 0 \text{ y } f_r \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_r + \epsilon \leq C_r$$

$$0 \leq f_r \leq C_r$$

iii) si $r \in P^- \Rightarrow$ por la definición de ϵ se tiene;

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq f_r \quad \forall r \in P^- \\ \Rightarrow 0 &\leq f_r - \epsilon \quad \text{como } \epsilon \geq 0 \text{ y } f_r \leq C_r \\ \Rightarrow 0 &\leq f_r - \epsilon \leq f_r \leq C_r \\ \Rightarrow 0 &\leq f_r \leq C_r \end{aligned}$$

\Rightarrow de i), ii) y iii) se tiene que $0 \leq f_r \leq C_r \quad \forall r \in M$.

Ahora se demuestra la factibilidad respecto a los nodos:

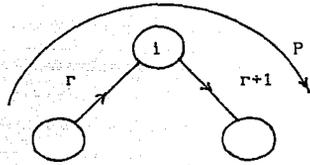
i) Si el nodo i no está en P entonces $f_k = f_k \quad \forall k \in M_{0i} \cup M_{1i} \Rightarrow$

$$\sum_{k \in M_{0i}} f_k - \sum_{k \in M_{1i}} f_k = \sum_{k \in M_{0i}} f_k - \sum_{k \in M_{1i}} f_k = 0$$

ii) El nodo $i \neq s, t$ pertenece a P y considerando los arcos consecutivos $r, r+1$ en P que tienen a i como nodo común;

a) si $r, r+1 \in P^+$

Figura [13]



$$\Rightarrow f_r = f_{r+1} + \epsilon \quad \text{y} \quad f_{r+1} = f_{r+1} + \epsilon$$

$$\Rightarrow f_k = f_k \quad \forall k \in M_{0i} \cup M_{1i} \quad \text{y} \quad k \notin P$$

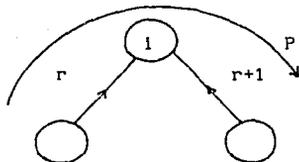
$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{0i}} f_k - \sum_{k \in M_{1i}} f_k = f_{r+1} + \epsilon - f_r - \epsilon + \sum_{\substack{k \in M_{0i} \\ k \neq r+1}} f_k - \sum_{\substack{k \in M_{1i} \\ k \neq r}} f_k$$

$$= \sum_{k \in M_{0i}} f_k - \sum_{k \in M_{1i}} f_k$$

$$= 0 \quad \text{ya que } f \text{ es factible}$$

b) si $r \in P^+$ y $r+1 \in P^-$

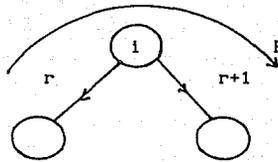
Figura [14]



$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_r &= f_{r+\epsilon} \text{ y } f_{r+1} = f_{r+1} - \epsilon \\
\Rightarrow f_k &= f_k \quad \forall k \in P \\
\Rightarrow \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k &= \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k - (f_r + \epsilon) - (f_{r+1} - \epsilon) \\
&= \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) $r \in P^-, r+1 \in P^+$

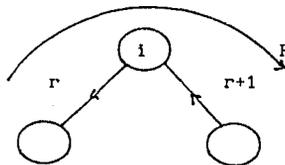
Figura [15]



$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_r &= f_r - \epsilon, \quad f_{r+1} = f_{r+1} + \epsilon \\
f_k &= f_k \quad \forall k \in P \\
\Rightarrow \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k &= f_r - \epsilon + f_{r+1} + \epsilon + \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k \\
&= \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) si $r, r+1 \in P^-$

Figura [16]



$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_r &= f_r - \epsilon \text{ y } f_{r+1} = f_{r+1} - \epsilon \\
\Rightarrow f_k &= f_k \quad \forall k \in P \\
\Rightarrow \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k &= f_r - \epsilon + \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k - (f_{r+1} - \epsilon) \\
&= \sum_{k \in M_0} f_k - \sum_{k \in M_1} f_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in M_{oi}} f_k - \sum_{k \in M_{Ti}} f_k$$

$$= 0 \text{ ya que } f \text{ es factible}$$

Por lo tanto de lo anterior se tiene

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{oi}} f'_k - \sum_{k \in M_{Ti}} f'_k = 0 \quad \forall i=s, t$$

$\Rightarrow f'$ es factible.

Ahora se obtiene el valor del flujo f' considerando el hecho de que el sumidero t , es el nodo terminal de la trayectoria aumentante $P: s \rightarrow t$ entonces

a) si $r_-(i, t) \in P^+ \Rightarrow f'_r = f_r + \epsilon$, $f'_k = f_k \quad k \notin P$

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{ot}} f'_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f'_k = \sum_{k \in M_{ot}} f_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f_k - (f_r + \epsilon)$$

$$= \sum_{k \in M_{ot}} f_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f_k - \epsilon \quad \text{de la restricci3n del nodo } t \text{ del problema [21]}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{ot}} f'_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f'_k + (v + \epsilon) = 0$$

b) si $r_-(t, i) \in P^- \Rightarrow f'_r = f_r - \epsilon$, $f'_k = f_k \quad \forall k \notin P$

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{ot}} f'_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f'_k = \sum_{k \in M_{ot}} f_k + f_r - \epsilon - \sum_{k \in M_{Tt}} f_k$$

$$= \sum_{k \in M_{ot}} f_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f_k - \epsilon$$

$$= -v - \epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{ot}} f'_k - \sum_{k \in M_{Tt}} f'_k + (v + \epsilon) = 0$$

$\therefore f'$ es factible de valor $v+\epsilon$, con $\epsilon > 0$ el m3ximo aumento del valor del flujo a trav3s de la trayectoria P .

TRAYECTORIA AUMENTANTE ILIMITADA.- Si el m3ximo aumento del valor del flujo $\epsilon > 0$ en una trayectoria aumentante es infinito entonces se dice de capacidad ilimitada y el problema es no acotado.

LEMA [28].- El valor v de cualquier flujo factible f es menor igual que la capacidad de cualquier corte Q que separa s y t .

Demostración.- Sea $Q=[S, S']$ tal que $s \in S$ y $t \in S'$ sumando las ecuaciones de conservación de flujo sobre todos los nodos en S' , los flujos en los arcos con nodo inicial y final en S' se cancelan quedando:

$$[27] \quad v = \sum_{k \in Q^+} f_k - \sum_{k \in Q^-} f_k$$

pero como $C_k \geq f_k \leq C_k \quad \forall k \in M$

$$\Rightarrow v \leq \sum_{k \in Q^+} C_k - \sum_{k \in Q^-} C_k$$

$$v \leq C(Q).$$

La interpretación de este resultado es obvia debido a que "por un corte no puede pasar más flujo del que su capacidad permita", lo que no es tan inmediato es que la igualdad se alcance, lo cual significa que se está en el óptimo. Este resultado es conocido como el teorema de flujo máximo -corte mínimo el cual fue demostrado constructivamente por Ford y Fulkerson en 1956.

TEOREMA. [29] (FLUJO MAXIMO-CORTE MINIMO).- En una red conectada con flujo factible "el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo".

Demostración.- Sea f el flujo de valor máximo v , se define $S = \{i | \exists P: s \rightarrow i, P \text{ es trayectoria aumentante}\}$ $t \notin P$ ya que de lo contrario existe una trayectoria aumentante de s a t lo cual contradice a que f es de valor máximo. $\Rightarrow t \in S' = N - S \Rightarrow Q = [S, S']$ es un corte, por el lema [28] se tiene que

$$v \leq C(Q) \quad \text{de [27] y como } C_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in Q^+} f_k - \sum_{k \in Q^-} f_k \leq \sum_{k \in Q^+} C_k$$

pero por la definición de Q se tiene que

$$f_k = C_k \quad \forall k \in Q^+ \quad \text{y} \quad f_k = 0 \quad \forall k \in Q^-$$

$$\Rightarrow v = C(Q)$$

y por el lema [28] Q es el corte de capacidad mínima.

II.4 ALGORITMO TRAYECTORIA AUMENTANTE

FUNCION ADMISIBLE.- Para obtener la trayectoria aumentante se define la función de admisibilidad $AD: M \rightarrow \{0,1\}$, M conjunto de arcos. Si $AD(k)=1$ el arco k se admite como posible en la trayectoria aumentante y si $AD(k)=0$ no se admite.

FUNCION ADMISIBLE PARA EL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.- De acuerdo a la definición de trayectoria aumentante para el problema de flujo máximo tenemos que su función de admisibilidad es:

$$(28) \quad AD(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \text{ y } f_k < C_k \text{ ó bien si } k < 0 \text{ y } f(-k) > 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \text{ y } f_k = C_k \text{ ó bien si } k < 0 \text{ y } f(-k) = 0 \end{cases}$$

con el arco k en su sentido si $k > 0$, y en sentido contrario si $k < 0$.

FUNCION DE ENRUTAMIENTO.- Dado un conjunto S se define la función de enrutamiento $\phi: S/\{s\} \rightarrow M$ (donde $S/\{s\} = S - \{s\}$), la cual, asocia a un nodo aún no alcanzado desde el nodo fuente por el proceso de enrutamiento, el arco admisible que permitirá alcanzarlo.

ALGORITMO DE ENRUTAMIENTO

PROPOSITO.- Dada una red conectada y una función de admisibilidad, encuentra una trayectoria aumentante de un nodo s a un nodo t o bien encuentra un corte que separa s y t .

PASO 1.- Inicialmente $S = \{s\}$, entonces, la ruta \emptyset es vacía.

PASO 2.- Si $t \in S$ terminar, se ha obtenido la trayectoria aumentante $P: s \rightarrow t$.

PASO 3.- En caso contrario determinar si existe un arco admisible en el corte $Q = [S, N/S]$:

- Si no existe, el algoritmo termina obteniendo el corte $Q = [S, N/S]$ por lo cual no existe trayectoria aumentante.

- Si existe tal arco k que alcanza al nodo i , se define $\phi(k) = k$ y S como $S \cup \{i\}$ y se repite el paso 2.

ALGORITMO TRAYECTORIA AUMENTANTE

PROPOSITO.- Dado una red conectada y un flujo inicial factible, resuelve el problema de flujo máximo en la red, sin importar mantener soluciones básicas en cada iteración.

PASO 1.- Mediante el algoritmo de enrutamiento, encontrar la trayectoria aumentante: Si no existe, terminar, el flujo actual es el de valor óptimo y el corte obtenido el de capacidad mínima. Si existe continuar al paso 2.

PASO 2.- Determinar mediante [26] el valor máximo de flujo ϵ que se puede aumentar a través de la trayectoria aumentante.

PASO 3.- Aumentar el flujo en la cantidad ϵ obtenida en el paso 2 y repetir paso 1.

II.5 CONVERGENCIA

Se analiza la convergencia del algoritmo trayectoria aumentante, después de definir los siguientes conceptos:

NUMEROS COMMENSURABLES.- Una colección de números se dicen commensurables entre si, si cada uno de ellos puede expresarse como múltiplo de $\delta > 0$ común a todos. Por ejemplo cualquier subconjunto de racionales es commensurable pero no lo es cualquier subconjunto de irracionales.

REGLA DE DISCRIMINACION DE ARCOS.- En la búsqueda de trayectoria aumentante se debe preferir los arcos admisibles con flujo estrictamente entre sus cotas $0 < f_k < C_k$, antes que los arcos con flujo en alguna de sus cotas $f_k = 0$ ó $f_k = C_k$.

Si la colección formada por las componentes del vector de capacidad C y las componentes del flujo inicial f son commensurables, entonces en cada iteración del algoritmo el flujo se incrementa $\epsilon > 0$ cantidad commensurable con las componentes de C y f , y no existiendo la trayectoria aumentante ilimitada entonces el algoritmo terminará en un número finito de iteraciones.

Aun sin la condición de conmensurabilidad, si en cada iteración se utiliza la regla de discriminación de arcos el algoritmo terminará en un número finito de iteraciones, esto se debe a lo siguiente:

- En cada iteración al aumentar el flujo un valor $\epsilon > 0$ al menos un arco en la trayectoria toma el valor de alguna de sus cotas en la siguiente iteración.
- Después de un número finito de iteraciones los arcos con flujo estrictamente entre sus cotas se terminaran, llegando a un corte de separación Q con arcos posiblemente admisibles tales que $f_k = C_k$ ó $f_k = 0$, que por [27] se tiene:

$$v = \sum_{k \in Q^+} f_k - \sum_{k \in Q^-} f_k \quad \text{es cierta suma de números } C_k.$$

- Hay solo un número finito de estas sumas de forma especial, ya que sólo hay un número finito de arcos, entonces hay sólo un número finito de valores diferentes que puede asumir el flujo en tal estado crítico. Ninguna puede repetirse, ya que el flujo es incrementado en cada iteración, consecuentemente las iteraciones terminaran tarde o temprano.

El costo computacional del algoritmo de enrutamiento es $O(n^2)$ y el número de veces que este algoritmo es llamado es $O(n^3)$ entonces el costo computacional del algoritmo no básico es $O(n^5)$.

CAPITULO III

PROBLEMA DE REDES SIN GANANCIA CON COSTOS LINEALES

En este capítulo se presenta el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter), especializado para resolver el problema de redes sin ganancia con costos lineales, el cual fué desarrollado por Fulkerson en 1961. Este algoritmo es similar al algoritmo primal-dual en el sentido de que se itera entre problemas primales y duales hasta alcanzar optimalidad. Sin embargo, difiere del algoritmo primal-dual (interpretado estrictamente) en que el algoritmo de las desviaciones puede empezar con una solución que no es ni primal ni dual factible y no siempre mantiene la holgura complementaria. Por lo tanto, se puede ver cómo una generalización del algoritmo primal-dual para problemas de flujo en redes.

El algoritmo de las desviaciones, es utilizado en forma iterativa para resolver el problema de redes sin ganancia con costos cóncavos, debido a que posee las siguientes características:

- a) No requiere mucha memoria para representar la estructura de la red, porque los parámetros de los arcos son almacenados en forma arbitraria.
- b) No utiliza parámetros para representar el flujo externo, tal información es descrita por parámetros en los arcos mediante la transformación a una red con conservación de flujo en todos los nodos y $b=0$.
- c) Se tiene la flexibilidad de comenzar con una solución que no es necesariamente primal factible, sólo requiere satisfacer la conservación de flujo en cada nodo.
- d) Muy útil para análisis de sensibilidad, se presta al estudio de los efectos de añadir ó quitar arcos y cambio de parámetros. Una vez que una solución de una red particular ha sido encontrada, puede ser utilizada como solución inicial para la red modificada, si un arco está desviado (out-of-kilter) entonces el algoritmo corrige y encuentra la solución óptima más rápidamente

(en la mayoría de los casos) que cuando se usan los parámetros de la red original.

Algunas desventajas:

- a) Al hacer la transformación a una red con conservación de flujo en todos los nodos y $b=0$, pueden resultar muchos arcos lo cual requiere mucha memoria.
- b) Las soluciones no son necesariamente básicas, lo cual puede hacer lenta la convergencia al óptimo. No es computacionalmente eficiente para problemas grandes.

El algoritmo de las desviaciones mediante ligeras modificaciones puede resolver problemas de asignación, transporte, flujo máximo, trayectoria mínima, transbordo, inventarios, distribución, etc.

III.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dada una red conectada y sin ganancia, la cual después de transformarla a una red $G(N,M)$ con conservación de flujo en todos los nodos y $b=0$ [sección I.2], tiene N =conjunto de n nodos, M =conjunto de m arcos, \underline{C} y $C \in \mathbb{R}^m$ tal que \underline{C}_k y C_k son los límites inferior y superior de capacidad respectivamente del arco k y h_k el costo por llevar una unidad de flujo a través del arco k . El problema de redes sin ganancia con costos lineales queda expresado:

$$\begin{aligned}
 & \text{Mín} \quad \sum_{k=1}^m h_k f_k \\
 [29] \quad & \text{s.a.} \quad \sum_{k \in M^+ i} f_k - \sum_{k \in M^- i} f_k = 0, \quad \forall i=1,2,\dots,n \\
 & \quad \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k, \quad \forall k = 1,2,\dots,m
 \end{aligned}$$

con el fin de obtener el dual se transforma a:

$$\begin{aligned}
 & - \text{Max.} \quad \sum_{k=1}^m (-h_k f_k) \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{k \in M^+ i} f_k - \sum_{k \in M^- i} f_k = 0, \quad \forall i=1,2,\dots,n \quad \longrightarrow \Pi_i \\
 & \quad f_k \leq C_k, \quad \forall k = 1,2,\dots,m \quad \longrightarrow \delta_k \\
 & \quad -f_k \leq -\underline{C}_k, \quad \forall k = 1,2,\dots,m \quad \longrightarrow \omega_k
 \end{aligned}$$

Observe que son casos particulares de [14] y [15] con $b=0$. Además una de las de las restricciones de conservación de flujo es redundante y para propósitos teóricos se supone que $0 \leq \underline{C}_k \leq C_k$.

III.2 DUALIDAD Y OPTIMALIDAD

Si Π_i es la variable dual asociada a la restricción de conservación de flujo en el nodo i , δ_k y ω_k las variables duales asociadas a las restricciones de los límites superior e inferior de capacidad, respectivamente del arco k . Entonces el problema dual de [29] es:

$$\text{Min } \sum_{k=1}^m \delta_k C_k - \sum_{k=1}^m \omega_k \underline{C}_k$$

$$[30] \quad \text{s.a. } \Pi_i - \Pi_j + \delta_k - \omega_k \geq -h_k, \quad \forall k, (i,j) \in M$$

$$\Pi_i \text{ no restringida } \quad \forall i \in N$$

$$\delta_k \geq 0, \quad \omega_k \geq 0, \quad \forall k \in M$$

observe que es un caso particular de [16] con $b=0$, por lo tanto, un corolario del teorema [8] es el siguiente:

COROLARIO [30].- Dada una solución f al problema primal [29] y una solución parcial Π al problema dual [30] y haciendo $d_k = \Pi_i - \Pi_j + h_k$ $\forall k, (i,j) \in M$ entonces estas soluciones son óptimas de sus respectivos problemas si se satisfacen las siguientes condiciones:

1.- Factibilidad Primal.

a) Conservación de flujos en cada nodo ($Af=0$).

$$[31] \quad \text{b) } f_k \geq \underline{C}_k \quad \forall k \in M.$$

$$\text{c) } f_k \leq C_k \quad \forall k \in M.$$

2.- Factibilidad dual restringida

$$[32] \quad \text{a) } \delta_k = \max [0, -d_k]$$

$$\text{b) } \omega_k = \max [0, d_k]$$

3.- Holgura complementaria.

$$\text{a) } d_k = 0 \quad \text{para } \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k$$

$$[33] \quad \text{b) } f_k = \underline{C}_k \quad \text{para } d_k > 0$$

$$\text{c) } f_k = C_k \quad \text{para } d_k < 0$$

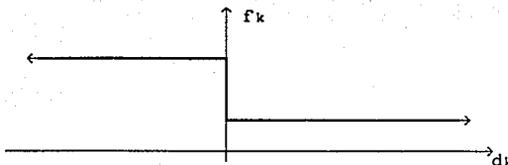
Demostración.- Como el problema [29] y [30] son casos particulares de [14] y [16] entonces por el corolario [10] se deduce este corolario.

III.3 FUNDAMENTOS TEORICOS

El algoritmo de las desviaciones requiere un flujo inicial f , que satisface la conservación de flujo [31.a] pero no necesariamente satisface las capacidades [31.b] y [31.c] y una Π inicial entera cualquiera. Del corolario [30] se tiene que la optimalidad es alcanzada si f satisface [31] y Π satisface [33] considerando que δ y ω son dadas por [32].

CURVA DE OPTIMALIDAD.- Las condiciones de optimalidad son representadas graficamente en la siguiente curva llamada de optimalidad.

Figura [17]



Un arco si pertenece a la curva de optimalidad se dice que está en estado óptimo (in-kilter) y si no está se dice que tiene desviación (out-of-kilter). Si todos los arcos están en estado óptimo entonces se está en el óptimo del problema [29] y problema [30].

El algoritmo de las desviaciones en su fase llamada primal, trabaja con flujos f que siempre cumplen con la conservación de flujo en todos los nodos [31.a] y en su segunda fase llamada dual trabaja con valores de Π . En ambas fases trata de llevar a un arco con desviación a estado óptimo.

FASE PRIMAL

En esta fase se trata de disminuir la desviación de algún arco k desviado (Out-of-kilter), manteniendo fijas las variables duales Π y cambiando el flujo f en la red, de tal manera que no aumente la desviación de los otros arcos y además se mantenga la conservación de flujo en cada nodo.

TEOREMA [31].- Sea $P: i \rightarrow j$ una trayectoria elemental en una red conectada con matriz de incidencia A , entonces $A_{eP} = e_i - e_j$ donde e_P es el vector de incidencia de P , e_i y e_j vectores unitarios canónicos.

Demostración.- Sea $P = \{i, k_1, i+1, k_1+1, \dots, l, k_l, l+1, \dots, j-1, k_j-1, j\}$

$$\Rightarrow A_{eP} = \sum_{l=1}^P e_P(l) a^l \quad \text{donde } a^l \text{ es la columna de } A \text{ correspondiente al arco } l.$$

= suma de columnas cuyos arcos están en P con signo positivo si es recorrido en su sentido y con signo negativo si es recorrido en sentido contrario.

= $e_i - e_{i+1} + e_{i+2} - e_{i+3} + \dots + e_{j-1} - e_j$
 ya que de [7] $a^i = e_i - e_j \quad \forall i \in \{1, j\}$. Si por ejemplo el arco $k_i \in P$ es recorrido en sentido contrario, esto significa que $k_{i+1} = (i+1, i) \Rightarrow a^i = e_{i+1} - e_i$ pero en la suma telescópica aparecerá como $-a^i = e_i - e_{i+1}$.

= $e_i - e_j$ ya que la anterior es una suma telescópica.

COROLARIO [32].- Sea a $P: i \rightarrow j$ un circuito elemental en una red conectada, con matriz de incidencia A entonces $Ae_p = 0$ con e_p vector de incidencia de P.

Demostración.- Inmediata de teorema [31] ya que $Ae_p = e_i - e_i = 0$.

COROLARIO [33].- Dado un flujo f que satisface la conservación de flujo en cada nodo, entonces el flujo $f + \alpha e_p$ con $\alpha > 0$ y P circuito elemental también satisface la conservación de flujo en cada nodo.

Demostración.- Como f satisface la conservación de flujo

$$\begin{aligned} \Rightarrow & Af = 0 \\ \Rightarrow & A(f + \alpha e_p) = Af + \alpha Ae_p \\ \Rightarrow & = 0 + \alpha(0) \\ \Rightarrow & = 0 \end{aligned}$$

Del corolario anterior, se tiene que los flujos se deben modificar en los arcos de un circuito elemental que contenga al arco k con desviación, para así mantener la conservación de flujo en todos los nodos.

Si f y Π están definidos, entonces d_k puede ser calculado para cada arco k. Cada arco k está en uno y solo uno de los estados identificados en la siguiente tabla (se omite el subíndice k).

Figura [18]

ESTADO	d	f	óptimo	porque
α	$d > 0$	$f = C$	si	satisface [33.b]
β	$d = 0$	$\underline{C} \leq f \leq C$	si	satisface [33.a]
ρ	$d < 0$	$f = C$	si	satisface [33.c]
α_1	$d > 0$	$f < \underline{C}$	no	viola [31.b], [33.b]
β_1	$d = 0$	$f < \underline{C}$	no	viola [31.b]
ρ_1	$d < 0$	$f < C$	no	viola [33.c]
α_2	$d > 0$	$f > \underline{C}$	no	viola [33.b]
β_2	$d = 0$	$f > C$	no	viola [31.c]
ρ_2	$d < 0$	$f > C$	no	viola [31.c], [33.c]

los arcos en estado óptimo están en α , β , ρ , los que tienen desviación (Out-of-kilter) están en α_1 , β_1 , ρ_1 , α_2 , β_2 , ρ_2 .

En la siguiente tabla se indica el estado de la región y la desviación que un arco puede tener, dependiendo de su posición en la tabla.

	d < 0	d = 0	d > 0
f < C	ρ_2 f-C	β_2 f-C	α_2
f = C	ρ 0	β	α_2 f-C
$\underline{C} < f < C$	ρ_1	β 0	α_2
f = \underline{C}	ρ_1 C-f	β	α 0
f < \underline{C}	ρ_1	β_1 \underline{C} -f	α_1 \underline{C} -f

Figura [19]

Observe que en estado β_2 la desviación es f-C, aún sin embargo se puede seguir disminuyendo hasta f- \underline{C} y el arco seguirá en estado óptimo β , esto es necesario hacerlo para ayudar a los otros arcos a alcanzar su estado óptimo, lo mismo sucede con el β_1 . Asimismo, en el estado β con $\underline{C} < f < C$ el flujo se puede aumentar C-f ó disminuir f- \underline{C} y seguirá en estado óptimo. En la siguiente tabla se indica el cambio máximo de flujo permitido en un arco k (también se ha omitido el subíndice k).

Figura [20]

	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$f < C$	$\downarrow f - C$	$\downarrow f - \underline{C}$	
$f = C$	0	$\downarrow f - \underline{C}$ 0 \uparrow	$\downarrow f - \underline{C}$
$\underline{C} < f < C$		$\downarrow f - \underline{C}$ $C - f \uparrow$	
$f = \underline{C}$	$\uparrow C - f$	$\downarrow 0$ $C - f \uparrow$	0
$f < \underline{C}$		$C - f \uparrow$	$\uparrow \underline{C} - f$

FUNCION ADMISIBLE PARA EL ALGORITMO DE LAS DESVIACIONES (OUT-OF-KILTER).- De la figura [20] se deduce que:

- Un arco k es admisible si el flujo puede aumentar en el arco. Es decir

$$[34.a] \quad AD(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (f_k < \underline{C}_k) \text{ ó } (d_k \leq 0 \text{ y } f_k < C_k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Un arco k en sentido contrario ($-k$) es admisible, si el flujo puede ser disminuido en el arco k . Es decir

$$[34.b] \quad AD(-k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (f_k > C_k) \text{ ó } (d_k \geq 0 \text{ y } f_k > \underline{C}_k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

FUNCION DE CAMBIO DE FLUJO.- También de la figura [20] se tiene

$$[35] \quad FC(K) = \begin{cases} l_k & \text{si el arco } k \text{ es admisible} \\ & \text{(} k \text{ puede aumentar flujo)} \\ s_k & \text{si el arco } -k \text{ es admisible} \\ & \text{(} k \text{ puede disminuir flujo)} \\ 0 & \text{si } k \text{ es no admisible} \end{cases}$$

donde

$$[35.a] \quad l_k = \begin{cases} C_k - f_k & \text{si } d_k \leq 0 \text{ y } f_k < C_k \\ \underline{C}_k - f_k & \text{si } d_k > 0 \text{ y } f_k < \underline{C}_k \end{cases}$$

$$[35.b] \quad s_k = \begin{cases} f_k - \underline{C}_k & \text{si } d_k \geq 0 \text{ y } f_k > \underline{C}_k \\ f_k - C_k & \text{si } d_k < 0 \text{ y } f_k > C_k \end{cases}$$

TEOREMA [34].- Dada una red para el problema [29] con un flujo que satisface la conservación de flujo en todos los nodos [31.a] y un arco k_{ij} con desviación $\Delta k > 0$ en exceso (en déficit), si existe la trayectoria $P_1: i \rightarrow j$ ($P_1: j \rightarrow i$) formada por arcos admisibles [34] distintos del arco k_{ij} , entonces existe el flujo f'

$$[36] \quad f_r' = \begin{cases} f_r + \epsilon & \text{si } r \in P^+ \\ f_r - \epsilon & \text{si } r \in P^- \\ f_r + \epsilon & \text{si } r = k \text{ y } \Delta_k \text{ es en déficit} \\ f_r - \epsilon & \text{si } r = k \text{ y } \Delta_k \text{ es en exceso.} \\ f_r & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde P es el circuito elemental $P_1 \cup \{k\}$

$$[37] \quad \begin{aligned} \epsilon &= \min \{\Delta_k, l, s\} \\ l &= \min \{l_k | k \in P_1^+\} \\ s &= \min \{s_k | k \in P_1^-\} \end{aligned}$$

tal que:

- f' cumple con la conservación de flujo en cada nodo.
- los arcos que están en estado óptimo (in-kilter) siguen estando después del cambio de flujo a f' .
- la desviación de un arco no aumenta con el cambio de flujo a f' .
- si la función de cambio de flujo es finita, la desviación de algún arco disminuye.

Demostración.- a) La unión del arco k a la trayectoria P_1 forma el circuito $P \Rightarrow f' = f + \epsilon e_P$ y por el corolario [33] f' también satisface la conservación de flujo en cada nodo.

b) Los arcos en los estados α y ρ no son admisibles \Rightarrow no pertenecen al circuito P y por lo tanto no cambian su flujo y siguen en estado óptimo.

- los arcos en estado β con $\underline{C}_k < f < C_k$ son admisibles por lo que pueden estar en P pero por [37] se tiene que $\epsilon \leq l_k, s_k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \epsilon &\leq C_k - f_k \text{ y } \epsilon \leq f_k - \underline{C}_k \\ \Rightarrow \quad f_k + \epsilon &\leq C_k \text{ y } f_k - \epsilon \geq \underline{C}_k \\ \Rightarrow \quad \underline{C}_k &\leq f_k + \epsilon \leq C_k \\ \Rightarrow \quad \underline{C}_k &\leq f_k \leq C_k \end{aligned}$$

∴ los arcos en β siguen estando en β después del cambio del flujo.

c) Si un arco k es admisible entonces $k \in P^+ \Rightarrow$ de [36] $f_k = f_k + \epsilon$ tal que $0 < \epsilon \leq l_k$.

- si $d_k \leq 0$ y $f_k < C_k$ se tiene de [35.a] que $l_k = C_k - f_k \Rightarrow \epsilon \leq C_k - f_k \Rightarrow f_k = f_k + \epsilon \leq C_k$ el flujo aumenta a lo más hasta C_k :

- para $d_k < 0$ (en ρ_1) la desviación disminuye a cero ó a

$$C_k - f_k = C_k - f_k - \epsilon.$$

- para $d_k=0$ (en β_1 ó en β con $\underline{C}_k \leq f_k < C_k$) la desviación disminuye a cero ó bien a $\underline{C}_k - f_k = \underline{C}_k - f_k - \epsilon.$
- si $d_k > 0$ y $f_k < \underline{C}_k$ se tiene de [35.a] que $l_k = \underline{C}_k - f_k \Rightarrow \epsilon \leq \underline{C}_k - f_k \Rightarrow f_k = f_k + \epsilon \leq \underline{C}_k$ el flujo a lo más aumenta hasta \underline{C}_k . La desviación $\underline{C}_k - f_k$ disminuye a cero ó a $\underline{C}_k - f_k = \underline{C}_k - f_k - \epsilon.$

En forma análoga, si el arco $-k$ es admisible $\Rightarrow k \in P^- \Rightarrow$ de [36] $f_k = f_k - \epsilon$ tal que $0 < \epsilon \leq s_k$.

- si $d_k \geq 0$ y $f_k > \underline{C}_k$ de [35.b] $s_k = f_k - \underline{C}_k \Rightarrow \epsilon \leq f_k - \underline{C}_k \Rightarrow f_k = f_k - \epsilon \geq \underline{C}_k$ el flujo disminuye a lo más hasta \underline{C}_k .
- para $d_k > 0$ (en α_2) la desviación $f_k - \underline{C}_k$ disminuye a cero ó a $f_k - \underline{C}_k = f_k - \underline{C}_k - \epsilon$
- para $d_k = 0$ (en β_2 ó β con $\underline{C}_k < f_k \leq C_k$) la desviación disminuye a cero ó bien $f_k - C_k = f_k - C_k - \epsilon$
- si $d_k < 0$ y $f_k > C_k$ de [35.b] $s_k = f_k - C_k \Rightarrow \epsilon \leq f_k - C_k \Rightarrow f_k = f_k - \epsilon \geq C_k$ el flujo disminuye a lo más hasta C_k . La desviación $f_k - C_k$ disminuye a cero ó bien a $f_k - C_k = f_k - \epsilon - C_k.$

d) como la función de cambio de flujo es finita entonces existe $\epsilon > 0 \Rightarrow$

- si Δ_k es en exceso \Rightarrow

$$\Delta_k = \begin{cases} f_k - C_k & \text{si } d_k \leq 0 \\ f_k - \underline{C}_k & \text{si } d_k > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow k \in P^-$ y de [36] $f_k = f_k - \epsilon \therefore$ la desviación disminuye a $\Delta_k - \epsilon.$

- si Δ_k es déficit \Rightarrow

$$\Delta_k = \begin{cases} C_k - f_k & \text{si } d_k \leq 0 \\ \underline{C}_k - f_k & \text{si } d_k > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow k \in P^+$ y de [36] $f_k = f_k + \epsilon \therefore$ la desviación disminuye a $\Delta_k - \epsilon.$

ALGORITMO DE LA FASE PRIMAL

PASO 1.- Se inicia con un arco $k_{ij}(i, j)$ cuya desviación es $\Delta_k > 0.$

PASO 2.- Se resuelve el problema de flujo máximo, con cota superior del valor del flujo Δ_k , función admisible [34] con k no admisible, cambio máximo del valor del flujo ϵ [37], si Δ_k es en

déficit el nodo fuente es j y el sumidero es i , pero si Δ_k es en exceso el nodo fuente es i y el sumidero es j .

FASE DUAL

Cuando en la fase primal se ha obtenido un flujo que no fué suficiente para llevar al arco k al estado óptimo, se procede a cambiar las variables duales Π manteniendo los flujos f fijos de tal manera que el arco k pueda ser llevado a estado óptimo ó bien al menos uno de los otros arcos se lleva al estado óptimo ó se convierta en admisible, sin que aumenten las desviaciones de los arcos que no están en estado óptimo.

De la fase primal se obtiene un conjunto de corte $Q=[S,N/S]$, los cuales son no admisibles.

	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$f < C$	ρ_2	β_2	α_2
$f = C$	ρ	β	α_2
$\underline{C} < f < C$	ρ_1	β	α_2
$f = \underline{C}$	ρ_1	β	α
$f < \underline{C}$	ρ_1	β_1	α_1

Figura [21]

[38.a] $\Rightarrow Q^+ = \{k | (f_k \geq C_k) \text{ ó } (d_k > 0 \text{ y } f_k \geq \underline{C}_k)\}$

	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$f < C$	ρ_2	β_2	α_2
$f = C$	ρ	β	α_2
$\underline{C} < f < C$	ρ_1	β	α_2
$f = \underline{C}$	ρ_1	β	α
$f < \underline{C}$	ρ_1	β_1	α_1

Figura [22]

[38.b] $\Rightarrow Q^- = \{k | (f_k \leq \underline{C}_k) \text{ ó } (d_k < 0 \text{ y } f_k \leq C_k)\}$

TEOREMA [35].- Dada una red conectada G con conservación de flujo en todos los nodos y $Q=[S,N/S]$ un corte cualquiera entonces

$$\sum_{k \in Q^+} f_k - \sum_{k \in Q^-} f_k = 0$$

Demostración.- Como satisface la conservación de flujo en todos los nodos.

$$\Rightarrow \sum_{k \in M_{T1}} f_k - \sum_{k \in M_{O1}} f_k = 0, \forall i \in N$$

para facilitar la notación considérese $k_{\sim}(i,j)$ y $f_k = f_{i,j}$

$$\sum_{j=1}^m f_{i,j} - \sum_{j=1}^m f_{j,i} = 0, \forall i \in N$$

$$\sum_{j \in S} f_{i,j} + \sum_{j \in N/S} f_{i,j} - \sum_{j \in S} f_{j,i} - \sum_{j \in N/S} f_{j,i} = 0, \forall i \in N$$

sumando para toda $i \in S$

$$\sum_{j \in S} f_{i,j} + \sum_{j \in N/S} f_{i,j} - \sum_{j \in S} f_{j,i} - \sum_{j \in N/S} f_{j,i} = 0, \forall i \in N$$

$$i \in S \quad i \in S \quad i \in S \quad i \in S$$

cambiando etiquetas de los subindices $i \longleftrightarrow j$ de los dos últimos términos

$$\sum_{j \in S} f_{j,i} + \sum_{j \in N/S} f_{j,i} - \sum_{j \in S} f_{i,j} - \sum_{j \in S} f_{i,j} = 0, \forall i \in N$$

$$i \in S \quad i \in S \quad i \in S \quad i \in N/S$$

cancelando los términos semejantes

$$\sum_{j \in N/S} f_{j,i} - \sum_{j \in S} f_{i,j} = 0$$

$$i \in N/S \quad i \in N/S$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in Q^+} f_k - \sum_{k \in Q^-} f_k = 0$$

TEOREMA [36].- Sea $Q=[S,N/S]$ el conjunto de corte resultado de la fase primal, al cual se le ha añadido el arco con desviación, es decir, el arco cuyos nodos fueron fuente y sumidero de la fase primal. Sea

[39] $T_1 = \{k | k \in Q^+ \text{ con } dk > 0 \text{ y } f_k \leq C_k\}$
 $T_2 = \{k | k \in Q^- \text{ con } dk < 0 \text{ y } f_k \geq \underline{C}_k\}$

figura [23] y [24]. Si $T_1 = T_2 = \emptyset$ entonces el problema [29] es infactible.

Figura [23]

	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$f < C$	ρ_2	β_2	α_2
$f = C$	ρ	β	α_2
$\underline{C} < f < C$	ρ_1	β	α_2 T_1
$f = \underline{C}$	ρ_1	β	α
$f < \underline{C}$	ρ_1	β_1	α_1

Figura [24]

	$d < 0$	$d = 0$	$d > 0$
$f < C$	ρ_2	β_2	α_2
$f = C$	ρ	β	α_2
$\underline{C} < f < C$	ρ_1 T_2	β	α_2
$f = \underline{C}$	ρ_1	β	α
$f < \underline{C}$	ρ_1	β_1	α_1

Demostración.- Como $T_1 = \emptyset \Rightarrow \forall k \in Q^+$ se tiene $f_k \geq C_k$, análogamente como $T_2 = \emptyset \Rightarrow \forall k \in Q^-$ se tiene $f_k \leq \underline{C}_k$. En especial el arco k con desviación, por no estar en T_1 ni en T_2 , cumple que $f_k < \underline{C}_k$ ó $f_k > C_k$ (desigualdad estricta) entonces

$$\sum_{j \in Q^+} f_j - \sum_{j \in Q^-} f_j > \sum_{j \in Q^+} C_j - \sum_{j \in Q^-} \underline{C}_j = 0$$

por ser f un flujo que satisface la conservación de flujo en todos los nodos por el teorema [35] se tiene

$$\sum_{j \in Q^+} C_j - \sum_{j \in Q^-} \underline{C}_j < 0$$

Ahora supongamos que existe un flujo en f' factible al problema [29]. Es decir f' cumple la conservación de flujo en todos los nodos y

$$\underline{C}_k \leq f_k \leq \bar{C}_k \quad \forall k \in M.$$

$$\sum_{j \in Q^+} f_j - \sum_{j \in Q^-} f_j \leq \sum_{j \in Q^+} \bar{C}_j - \sum_{j \in Q^-} \underline{C}_j < 0$$

ya que f' cumple con la conservación de flujo en todos los nodos por el teorema [35] se tiene

$$0 = \sum_{j \in Q^+} f_j - \sum_{j \in Q^-} f_j < 0$$

lo cual es una contradicción al hecho de que existe un flujo factible.

\therefore El teorema queda demostrado.

TEOREMA [37].- Sea $Q = \{S, N/S\}$ el conjunto de corte resultado de la fase primal, al cual se le ha añadido el arco l con desviación, generador del nodo fuente y nodo sumidero. Si $T_1 \cup T_2 \neq \emptyset$ y la variable dual π_i finita $\forall i \in N$ es cambiada de la siguiente manera

$$[40] \quad \pi_i = \begin{cases} \pi_i, & \forall i \in S \\ \pi_i + \theta, & \forall i \in N/S \end{cases}$$

donde

$$[41] \quad \begin{aligned} \theta &= \min. \{\theta_1, \theta_2\} \\ \theta_1 &= \min. \{d_k | k \in T_1\} \\ \theta_2 &= \min. \{d_k | k \in T_2\} \end{aligned}$$

entonces:

- a) las desviaciones no aumentan
- b) al menos un arco es llevado a estado óptimo pero no admisible ó es hecho admisible.

Demostración a).- Para los arcos en Q^+ considerando π_i se tiene $d_k = \pi_i - \pi_j + h_k = \pi_i - \pi_j + d_k - \theta = d_k - \theta$ como $\theta > 0 \Rightarrow d_k$ disminuye.

- Como el flujo permanece fijo \Rightarrow para los arcos en los estados $\rho, \beta, \rho_2, \beta_2$ su desviación no cambia.
- Como $0 < \theta \leq d_k, \forall k \in T_1 \Rightarrow d_k \geq 0$ para todos los arcos k que están en los estados $\alpha, \alpha_2 \therefore$ estos arcos cambiarán a lo más a β ó a β_2 con lo cual disminuyen sus desviaciones $f_k - \underline{C}_k$ a cero ó a $C_k - f_k$

Análogamente, para los arcos en Q^- se tiene $d_k = d_k + \theta$ aumenta.

- Los arcos en $\beta, \beta_1, \alpha, \alpha_1$ no cambian su desviación.
- Como $0 < \theta \leq -d_k, \forall k \in S_2 \Rightarrow$ para los arcos que estaban en ρ y ρ_1 tienen $d_k \leq 0 \therefore$ estos a lo más cambiarán a β ó a β_1 por lo cual su

desviación $C_k - f_k$ disminuye a cero ó a $f_k - C_k$.

Demostración b).- Como $\Pi_i < \infty \forall i \in N$ y $T_1 \cup T_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \theta$ finito y el arco k al que corresponde, pertenece a $T_1 \cup T_2$ \therefore no es admisible ni está en estado óptimo pero $d_k \neq 0$ cambiará a $d_k = 0$, esto lo hará admisible ó bien sera llevado a estado óptimo si está en α_2 con $f_k = C_k$ ó en ρ_1 con $f_k = C_k$. Por lo tanto existe al menos un arco que se hace admisible ó bien sólo es llevado a estado óptimo.

ALGORITMO FASE DUAL

PASO 1.- Determinar los conjuntos T_1 y T_2 [39]. Si $T_1 \cup T_2 = \emptyset$ terminar el problema primal [29] es infactible, en otro caso continuar.

PASO 2.- Determinar θ [41] el máximo cambio permitido de la variable dual $\Pi_i \forall i \in N/S$.

PASO 3.- Hacer el cambio de acuerdo a [40].

III.4 ALGORITMO DE LAS DESVIACIONES (OUT-OF-KILTER).

PROPOSITO.- Resuelve el problema de redes sin ganancia con costos lineales, cuya capacidad inferior, capacidad superior y costo unitario de flujo son enteros para cada arco k .

PASO 1.- Comenzar con un flujo entero que satisfaga la conservación de flujo en cada nodo [31.a], valor de las variables duales Π_i enteras puede ser cualquiera. Puede ser $f=0$ y $\Pi=0$.

PASO 2.- Determinar un arco l con desviación Δ_l . Si no existe terminar f es el óptimo.

PASO 3.- Ejecutar el algoritmo fase primal con arco l . Si el valor de flujo máximo es Δ_l entonces el arco l se ha llevado a estado óptimo, en este caso repetir paso 2, en caso contrario continuar.

PASO 4.- Ejecutar el algoritmo fase dual con el corte que resultó del paso 3. Si el arco l sigue teniendo desviación ir al paso 3, de otra manera ir al paso 2.

III.5 CONVERGENCIA

Suponiendo h, \underline{C} y C de componentes enteras, así como también el flujo inicial f y la variable dual Π .

- En la fase primal cada vez que se cambia el flujo [36] la desviación de ningún arco aumenta y disminuye la desviación del arco l generador del nodo fuente y sumidero teorema [34] en $\epsilon > 0$ [37] el cual es un entero ya que C, \underline{C} y f tienen componentes enteras. Puede construirse sólo un número finito de circuitos P que contienen arcos con desviación, antes de obtener una solución óptima.

- En la fase dual, después del cambio de cada variable dual [40] el estado de los arcos con ambos extremos en S no cambia, si el arco l no fue llevado al estado óptimo cada nodo en S seguirá en S después del cambio. Existen dos posibilidades teorema [37]:

- Un nuevo arco se hace admisible \Rightarrow un nodo se añade a S , cada vez que esto suceda S crece en al menos un nodo y esto puede suceder un número finito de veces antes de que se forme el circuito P que contiene el arco l .
- Un arco k es llevado a estado óptimo pero no admisible $\Rightarrow S$ no crece, permanece igual, al pasar a la siguiente fase dual, se toma el mismo arco l con el mismo corte $Q = [S, N/S]$. Después del cambio en la variable dual, al menos el arco del que se obtuvo h ha sido eliminado de $T_1 \cup T_2$. Ahora bien $T_1 \cup T_2$ puede decrecer a lo más un número finito de veces antes de que $T_1 \cup T_2 = \emptyset$, en cuyo caso el algoritmo termina por infactibilidad teorema [36].

CAPITULO IV

PROBLEMA DE REDES SIN GANANCIA CON COSTOS CONCAVOS

En este capítulo se analiza el método que resuelve el problema de redes sin ganancia con costos cóncavos lineales por pedazos o bien resuelve una aproximación lineal por pedazos del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos. El método mediante enumeración implícita reduce el problema, a uno de programación 0-1 mixto el cual es relajado a un problema de redes con costos lineales, cuya solución es obtenida por el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter). El método tiene un costo computacional de $O(2^{mc})$ donde mc es el número de arcos con costo fijo distinto de cero, los cuales resultan del proceso de linealización por pedazos, trabaja eficientemente si $mc \leq 50$, con dificultades si $mc > 50$, y no se garantiza que la solución sea encontrada si $mc > 100$.

IV.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $G(N,M)$ una red, N =conjunto de n nodos, M =conjunto de m arcos con parámetros de $b \in \mathbb{R}^n$ tal que b_i es el flujo externo fijo en el nodo i , $\underline{C}_k, C_k \in \mathbb{R}^m$ tal que \underline{C}_k, C_k capacidad inferior y superior del arco k , $h_k(f_k)$ función de costo cóncavo del arco k . El problema de redes sin ganancia con costos cóncavos, queda formulado

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{k=1}^m h_k(f_k) \\ \text{s.a. } & \sum_{k \in M \cap I} f_k - \sum_{k \in M \cap J} f_k = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

IV.2 APROXIMACION LINEAL POR PEDAZOS

Con el fin de ahorrar capacidad de memoria, la red es transformada, a una red con limite inferior de capacidad igual a cero [sección I.2].

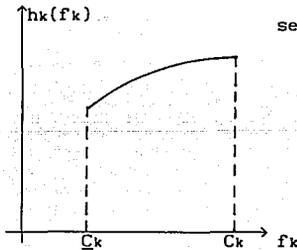


Figura [25]

se transforma
a

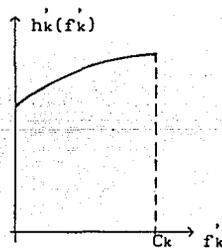


Figura [26]

donde $h'_k(f'_k) = h_k(f_k) \quad \forall \quad \underline{C}_k \leq f_k \leq C_k$

Para ilustrar el proceso de linealización por pedazos considere las siguientes figuras:

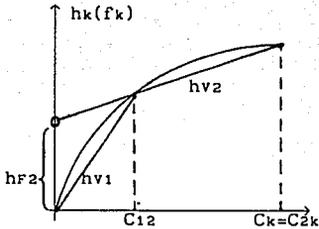


Figura [27]

El arco k se transforma en:

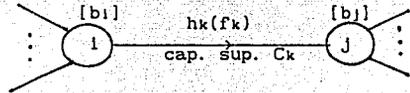


Figura [28]

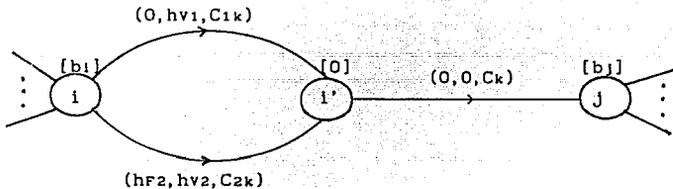


Figura [29]

donde se usó la notación (costo fijo, costo lineal, límite de capacidad superior) y [flujo externo fijo]

OBSERVACIONES

i).- Cada arco de la red original se transforma en $p+1$ arcos (p número de partes lineales) de los cuales al menos $p-1$ tienen costo fijo hf_1 distinto de cero.

ii).- El arco $(0,0,C_k)$ solamente regula la factibilidad del flujo $0 \leq f_k \leq C_k$ y su costo cero no influye en la función objetivo.

iii).- Se logran mejores aproximaciones de $h_k(f_k)$ para valores grandes de p , pero se tiene la desventaja de que crece el costo computacional.

iv).- La nueva red tiene arcos con capacidad inferior cero.

v).- La nueva red tiene costos lineales y sus arcos se clasifican en los que tienen costo fijo igual a cero y los que tienen costo fijo distinto de cero.

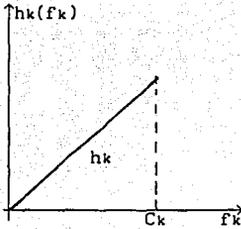


Figura [30]

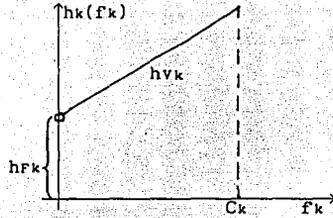


Figura [31]

[43] $h_k(f_k) = h_k f_k$; $\forall k$ con costo fijo cero

[44] $h_k(f_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_k = 0 \\ h_f k + h_v k f_k & \text{si } 0 < f_k \leq C_k \end{cases} \quad \forall k \text{ con costo fijo distinto de cero}$

IV.3 ENUMERACION IMPLICITA

El método de enumeración implícita fué desarrollado principalmente para resolver problemas de tipo binario. Básicamente consiste en particionar un problema $P(s)$, en subproblemas $P(s_1), \dots, P(s_q)$, los cuales son almacenados en una lista de candidatos. Mediante alguna técnica de ramificación se selecciona un subconjunto de problemas candidatos y con alguna técnica de acotamiento se decide si el óptimo de $P(s)$ se busca en el subconjunto seleccionado (de nuevo se particiona el subconjunto), ó bien el óptimo no está en dicho subconjunto de problemas (se declara insondeable), cancelando todos los elementos de este subconjunto de la lista de candidatos. El proceso termina cuando se ha analizado toda la lista.

Se usará una nueva notación para la red linealizada por pedazos con limite de capacidad inferior cero, ya que a ésta se le aplicará el método.

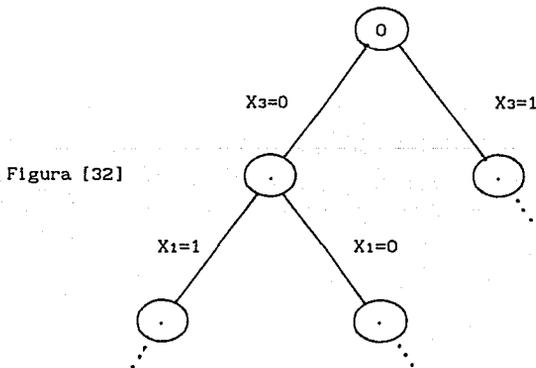
Sea $G(N, M)$ una red con $N =$ conjunto de n nodos, $M =$ conjunto de m arcos, K_c subconjunto de M , K_c conjunto de m_c arcos con costo fijo distinto de cero los cuales para fines prácticos son reetiquetados $1, 2, \dots, m_c$; donde $K_c(i)$ devuelve la etiqueta original, es decir $K_c = \{K_c(1), K_c(2), \dots, K_c(m_c)\}$.

Se asocian la variable entera (0-1) X_i , al i -ésimo arco con costo fijo, entonces el problema que aproxima [42] puede ser planteado como un problema de programación entero-mixta.

$$\begin{aligned}
 [45] \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^{mc} hf(i) X_i + \sum_{k=1}^m h_k f_k \\
 & \text{s.a.} \quad Af=b \\
 & \quad \quad 0 \leq f_k \leq C_k, \quad \forall k \in M \\
 & \quad \quad f_k \leq X_i C_k, \quad \forall i=1,2,\dots,mc \text{ y } k=k_c(i) \\
 & \quad \quad X_i=0,1, \quad \forall i=1,2,\dots,mc
 \end{aligned}$$

Donde $h_k=h_v(i)$, $\forall k=k_c(i)$ arco con costo fijo. La restricción $f_k \leq X_i C_k$ para $k=k_c(i)$ arcos con costo fijo, fuerza a f_k a ser cero cuando $X_i=0$, y restablece su capacidad C_k original si $X_i=1$.

El árbol binario del proceso de enumeración tiene niveles $i=1,2,\dots,mc$ y cada vértice representa el conjunto de realizaciones del vector $X=(X_1, X_2, \dots, X_{mc})$, (una realización del vector tiene todas sus componentes fijas en algún número). Donde $W^+ = \{i | X_i=1\}$, $W^- = \{i | X_i=0\}$, $W^0 = \{i | X_i=0,1\}$, se dice que el arco i y la variable X_i son libres si $i \in W^0$. Observe que el nodo raíz es el de todas las posibles realizaciones del vector X . En la siguiente figura se muestra la estructura de un árbol binario.



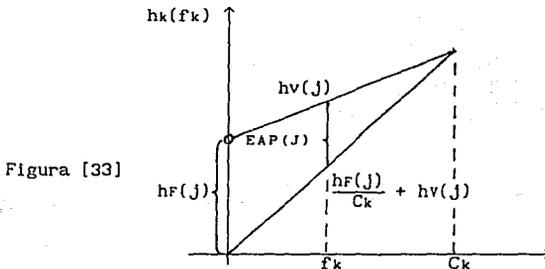
En cada estado intermedio del proceso de enumeración (un vértice del árbol) hay que resolver:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & \sum_{i \in W^+} h_i f_i + \sum_{i \in W^0} h_i f_i x_i + \sum_{k=1}^m h_k f_k \\
 [46] \text{ s.a. } & Af = b & (a) \\
 & 0 \leq f_k \leq C_k \quad \forall k \in M & (b) \\
 & f_k \leq x_i C_k \quad \forall i \in W^0 \text{ y } k = k_c(i) & (c) \\
 & f_k = 0 \quad \forall i \in W^- \text{ y } k = k_c(i) & (d) \\
 & x_i = 0, 1 \quad \forall i \in W^0 & (e)
 \end{aligned}$$

Donde $h_k = h_v(i) \quad \forall k = k_c(i)$.

IV.4 RELAJACION Y TECNICA DE ACOTAMIENTO

Una cota inferior para el problema entero (0-1) [46] es obtenida resolviéndolo pero con la condición (e) relajada a $0 \leq x_j \leq 1$ para $j \in W^0$. Además se puede observar que para el conjunto de arcos libres W^0 se tiene gráficamente:



$$h_f(j) + h_v(j) f_k \geq [h_f(j)/C_k + h_v(j)] f_k \quad 0 \leq f_k \leq C_k; \quad \forall j \in W^0$$

Por lo que se puede cambiar la condición (c) por $0 \leq f_k \leq C_k$ con el correspondiente cambio en los costos de la función objetivo. La restricción (d) es equivalente a dar un costo muy grande $h_k = R$ con $0 \leq f_k \leq C_k$ y esto forzará a que $f_k = 0$ para $i \in W^-$, $k = k_c(i)$. Por lo tanto la cota inferior para el problema [46] se obtiene de:

$$[47] \quad \begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i \in W^+} hf(i) + \sum_{k=1}^m hkfk \\ & \text{s.a. } Af=b \end{aligned}$$

$$0 \leq f_k \leq C_k \quad \forall k \in M$$

donde

$$[48] \quad h_k = \begin{cases} R \text{ muy grande } \forall i \in W^- \text{ y } k = k_c(i) \\ hv(i) \forall i \in W^+ \text{ y } k = k_c(i) \\ hf(i)/C_k + hv(i) \forall i \in W^0 \text{ y } k = k_c(i). \end{cases}$$

El problema relajado [47] es un problema de redes sin ganancia con costos lineales, el cual, será resuelto por el algoritmo de las desviaciones (out-of-kilter)

IV.5 SOLUCION FACTIBLE Y MEJOR SOLUCION

El candidato a mejor solución Z_B , se obtiene al redondear a una solución factible, la solución Z de [47] de la siguiente manera.

$$X_i = 1 \text{ si } f_k > 0, \quad X_i = 0 \text{ si } f_k = 0 \text{ esto } \forall i \in W^0 \text{ y } k = k_c(i).$$

$$\text{Donde} \quad Z_R = \sum_{i=1}^m hf(i)X_i + \sum_{k=1}^m hkfk \quad [49]$$

La cual es usada para competir con la mejor solución, es decir Z_B recibe (almacena) Z_R si $Z_R < Z_B$. El Método comienza con Z_B muy grande.

IV.6 RAMIFICACION Y BUSQUEDA

Para determinar que variable libre X_i ($i \in W^0$) se ramifica y en que valor $\{0,1\}$ se fija, se determina del conjunto de arcos libres W^0 , el arco j que tiene el máximo error de aproximación EAP (ver figura [33])

$$[50] \quad \text{EAP}(j) = \max \{ hf(i) + hv(i)f_k - hkfk \mid k = k_c(i), i \in W^0 \}$$

Si $X_j < 0.5$ se ramifica primero con $X_j = 0$, de otra manera se ramifica primero con $X_j = 1$.

IV.7 CONDICION DE INSONDIABILIDAD

Un nodo en el árbol de enumeración es declarado insondeable cuando $Z_B < Z$, es decir, la mejor solución es menor que la cota

inferior, ó la solución del problema relajado [47] es factible $Z=Z_R$ por lo tanto óptima de [45], sin necesidad de subdividirlo.

Se puede considerar un cierto porcentaje de desviación PER, ($0 \leq \text{PER} \leq 100$) del óptimo y en este caso un nodo es declarado insondeable si $Z > Z_B - \text{PER} |Z_B| / 100$.

IV.8 ALGORITMO DE SOLUCION

PROPOSITO.- Resolver el problema de redes sin ganancia con costos lineales considerando costos fijos.

PASO 1 (INICIALIZACION).- Variable de nivel $L=0$, mejor solución $Z_B =$ número muy grande, todas las variables son libres $W^0 = \{x_i, |i=1, \dots, mc\}$.

PASO 2 (RELAJACION Y ACOTAMIENTO).- Resolver el problema relajado [47] mediante el algoritmo de las desviaciones (OUT-OF-KILTER). Si $Z=-\infty$ terminar, el problema es no acotado, esto no sucede ya que las redes asociados a los problemas [45] y [47] carecen de circuitos con costo negativo y capacidad infinita, es decir, carecen de circuitos no balanceados. Si $Z \geq Z_B$ ir al paso 6 de otra manera ir al paso 3.

PASO 3 (SOLUCION FACTIBLE).- Obtener Z_R (mediante [49]), si $Z_R \geq Z_B$ ir al paso 5 de otra manera ir al paso 4.

PASO 4 (SALVAR MEJOR SOLUCION).- $X_B=X_R$, $Z_B=Z_R$. Si $Z_R=Z$ entonces X resuelve [47] ir al paso 6, de otra manera ir al paso 5.

PASO 5 (RAMIFICACION Y BUSQUEDA).- Si $W^0 \neq \emptyset$ se determina $X_j \in W^0$ cuyo arco tiene el máximo error de aproximación [50] y se selecciona el valor de X_j , actualizar W^0, W^+, W^- , $L=L+1$ ir al paso 2. Si $W^0 = \emptyset$ ir al paso 6.

PASO 6 (INSONDEABLE).- a) Si X_j falta fijarse en el otro valor, hacerlo y actualizar W^0, W^+, W^- , regresar al paso 2. b) Si X_j ya fue fijada en sus dos valores, retroceder y actualizar; $L=L-1$, $X_j =$ el padre de X_j . Si $L \neq 0$ repetir el paso 6a). Si $L=0$ terminar, el óptimo es X_B cuyo valor objetivo es Z_B .

IV.9 CONVERGENCIA

I).- Del paso 5 se tiene que el mayor nivel del árbol es m_c , esto sucede cuando $W^0 = \emptyset$. Es decir $L \leq m_c$.

II).- En cada nivel se resuelve un problema con L variables fijas. El número de maneras de escoger L variables para ser fijadas es $\binom{m_c}{1}$, cada una de las cuales pueden ser valuadas en 0 ó 1, entonces

Número de subproblemas

[47] que pueden ser plan

teados en el nivel 1. $= \binom{m_c}{1} 2^1$

Total de subproblemas

[47] que el método pue

de plantear. $= \sum_{l=1}^{m_c} \binom{m_c}{l} 2^l$

III).- El paso 5 siempre crea problemas distintos debido a que en niveles distintos se tienen distinto número de variables fijas, y en el mismo nivel los problemas tienen al menos la variable ancestro común más inmediata fija en distinto valor.

IV).- En cada iteración del algoritmo, se tiene que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{conjunto de proble-} \\ \text{mas insondeables} \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{l} \text{conjunto de proble-} \\ \text{mas por considerar} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{problema} \\ \text{original} \end{array} \right]$$

Como existe un número finito de subproblemas el método converge. Debido a que el problema que resuelve este método tiene capacidad inferior y superior finitas ($0 \leq f_k \leq C_k$) entonces el problema tiene solución finita o es infactible, ya que la red carece de circuitos con costo negativo y capacidad indefinida (circuitos no balanceados).

Se obtiene solución óptima finita, igual a la última mejor solución Z_b , cuando al generar el árbol de enumeración se regresa a su raíz (nivel del árbol cero). La infactibilidad es detectada por el algoritmo de las desviaciones al resolver el problema relajado [47].

CAPITULO V

APLICACIONES

La necesidad de una teoría, es justificada en la medida de su utilidad para resolver problemas prácticos o para apoyar a otras teorías. En este capítulo se presenta una gran variedad de problemas de aplicación que son modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos. Estos problemas, son resueltos por el método de solución analizado en el capítulo anterior, el cual, fué programado en FORTRAN e implementado en PC. Se anexa una tabla donde se especifica para cada problema resuelto: La instancia del programa no lineal, la instancia de la red asociada al problema y el tiempo de ejecución del método en una PC AUSTIN 386-SX.

V.1 PROBLEMA DE LOCALIZACION-DISTRIBUCION

INTRODUCCION

El problema consiste en seleccionar de un conjunto de sitios dados, en dónde localizar plantas, y determinar sus niveles de producción y distribución para satisfacer la demanda conocida en los centros de consumo, todo lo anterior a costo mínimo. Se supone que los costos de producción y operación de cada planta son funciones cóncavas del total de producción de cada planta, y el costo de distribución entre cada planta y punto de demanda es una función cóncava de la cantidad enviada. Puede o no considerarse capacidad de producción en cada planta y capacidad de transporte.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una compañía desea vender un producto en N centros de consumo; se ha determinado una demanda periódica D_j en cada centro de consumo $j=1,2,\dots,N$. Para satisfacer la demanda, la compañía ha seleccionado M sitios como los mejores candidatos para construir las plantas, pero el número de plantas no ha sido determinado todavía. Es decir, si una planta es construida, esta producirá para satisfacer todas las demandas, lo mismo si son construidas dos ó más (menos de M). La compañía decidirá en donde construir las (problema de localización) y el territorio de servicio de cada planta (problema de distribución).

Se ha considerado un horizonte de planeación de T periodos, el cual, no incluye el tiempo de construcción de cada planta. La compañía desea determinar; cuántas plantas va a construir, en cuál de los M sitios se construirá una planta, con qué nivel de producción operará cada planta en cada periodo y cuánto producto enviará periódicamente cada planta a cada centro de consumo, de tal manera que se minimice el costo en cada periodo, sobre el horizonte de planeación.

Sea X_{ij} la cantidad de producto enviada durante un periodo de la planta i (localizada en el sitio i) al centro de consumo j y sea $Y_i = \sum_{j=1}^N X_{ij}$ la producción durante un periodo en la planta i . Se define $C_i(Y_i)$ como la función de costo de producción durante un periodo de la planta i , esta función, incluye el costo fijo de construcción de la

planta. La función $T_{ij}(X_{ij})$ es el costo de transporte durante un periodo por el envío de X_{ij} unidades de la planta i al centro de consumo j . Además sean K_i y K_{ij} la máxima capacidad de producción de la planta i y la capacidad máxima de transporte de la planta i al centro de consumo j , respectivamente.

El problema en terminos matemáticos queda:

$$\begin{aligned}
 \text{[S1]} \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^M C_i(Y_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N T_{ij}(X_{ij}) \\
 \text{(a)} \quad & \text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^N X_{ij} = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \\
 \text{(b)} \quad & \sum_{i=1}^M X_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \\
 \text{(c)} \quad & \sum_{i=1}^M Y_i = \sum_{j=1}^N D_j \\
 \text{(d)} \quad & 0 \leq Y_i \leq K_i \quad i = 1, 2, \dots, M \\
 \text{(e)} \quad & 0 \leq X_{ij} \leq K_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Las funciones de costo $C_i(\cdot)$ y $T_{ij}(\cdot)$ son cóncavas y conocidas, (1.a) es equivalente a decir "toda la producción de la planta i es distribuida", (1.b) establece que "el total de productos enviados a cada centro de consumo satisface su demanda", (1.c) "total de producción es igual a total de demanda", (1.d) y (1.e) significan que "la capacidad de producción y transporte estan acotadas".

EJEMPLO (LOCALIZACION DE POZOS).- El sistema de riego actual (por gravedad con suministro de presa) no satisface las demandas de agua de una importante zona agricola de 10 sectores $\{S_1, S_2, \dots, S_{10}\}$. Un minucioso estudio, pronostica un déficit promedio anual en cada sector, en los siguientes 10 años (tabla 1), pero se han encontrado en la zona 5 mantos acuíferos $\{M_1, M_2, \dots, M_5\}$ de importante magnitud, los cuales son considerados candidatos para colocar pozos que descarguen al sistema existente. Para lo anterior se ha determinado el costo fijo de construcción del pozo, costo de extracción por unidad de volumen y capacidad anual de cada uno de los mantos (tabla 2), además el costo de envío de agua de cada uno de los mantos a cada uno de los sectores

planta. La función $T_{ij}(X_{ij})$ es el costo de transporte durante un periodo por el envío de X_{ij} unidades de la planta i al centro de consumo j . Además sean K_i y K_{ij} la máxima capacidad de producción de la planta i y la capacidad máxima de transporte de la planta i al centro de consumo j , respectivamente.

El problema en terminos matemáticos queda:

$$\begin{aligned}
 \text{[51]} \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^M C_i(Y_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N T_{ij}(X_{ij}) \\
 \text{(a)} \quad & \text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^N X_{ij} = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \\
 \text{(b)} \quad & \sum_{i=1}^M X_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \\
 \text{(c)} \quad & \sum_{i=1}^M Y_i = \sum_{j=1}^N D_j \\
 \text{(d)} \quad & 0 \leq Y_i \leq K_i \quad i = 1, 2, \dots, M \\
 \text{(e)} \quad & 0 \leq X_{ij} \leq K_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

Las funciones de costo $C_i(\cdot)$ y $T_{ij}(\cdot)$ son cóncavas y conocidas, (1.a) es equivalente a decir "toda la producción de la planta i es distribuida", (1.b) establece que "el total de productos enviados a cada centro de consumo satisface su demanda", (1.c) "total de producción es igual a total de demanda", (1.d) y (1.e) significan que "la capacidad de producción y transporte estan acotadas".

EJEMPLO (LOCALIZACION DE POZOS).- El sistema de riego actual (por gravedad con suministro de presa) no satisface las demandas de agua de una importante zona agrícola de 10 sectores $\{S_1, S_2, \dots, S_{10}\}$. Un minucioso estudio, pronostica un déficit promedio anual en cada sector, en los siguientes 10 años (tabla 1), pero se han encontrado en la zona 5 mantos acuíferos $\{M_1, M_2, \dots, M_5\}$ de importante magnitud, los cuales son considerados candidatos para colocar pozos que descarguen al sistema existente. Para lo anterior se ha determinado el costo fijo de construcción del pozo, costo de extracción por unidad de volumen y capacidad anual de cada uno de los mantos (tabla 2), además el costo de envío de agua de cada uno de los mantos a cada uno de los sectores

(tabla 3). La distribución topográfica de los sectores, la red de canales y la localización de los mantos se muestra en la figura [34], se considera que los canales son de capacidad suficiente.

Se desea determinar: Cuántos pozos se van a construir, en qué manto acuífero se va a construir pozo, el nivel de extracción anual de cada pozo construido, cuál es el plan de distribución de agua de cada pozo a los sectores, de tal manera que se minimice el costo anual durante el horizonte de 10 años.

OBSERVACION. Debido a que el flujo tiene pérdidas por filtración y evaporación, este problema es de redes con ganancia con costos cóncavos. Sin embargo podemos considerar que las pérdidas son incluidas en el déficit promedio y los costos de envío son precisamente los costos de producción de las pérdidas.

TABLA 1

SECTOR AGRICOLA.	DEFICIT PROMEDIO ANUAL EN UNIDADES DE VOL.
S1	20
S2	10
S3	18
S4	8
S5	6
S6	10
S7	12
S8	14
S9	12
S10	15

TABLA 2

MANTO ACUIF.	COSTO FIJO DE CONST.	COSTO PRODUCIR UNIDAD DE VOL.	CAPACIDAD ANUAL EN UNID. DE VOL.
M1	300	18	50
M2	400	24	20
M3	350	12	50
M4	250	18	30
M5	300	12	50

TABLA 3 (COSTOS DE DISTRIBUCION)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
M1	1	2	2	2	3	3	4	5	5	5
M2	1	2	2	3	3	3	4	5	5	5
M3	∞	∞	∞	1	2	2	2	3	3	3
M4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	2	2	2
M5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	2	2	2

los costos se dan en unidades monetarias (u.m.) y costo ∞ significa que el manto acuífero no puede suministrar al sector (esto, puede suceder, si el sector tiene un nivel más alto que el manto).

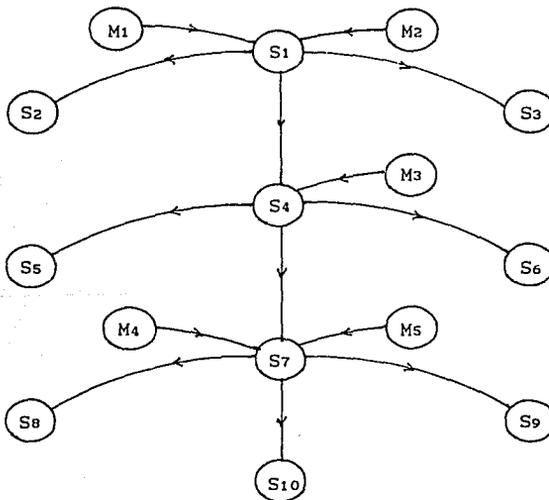
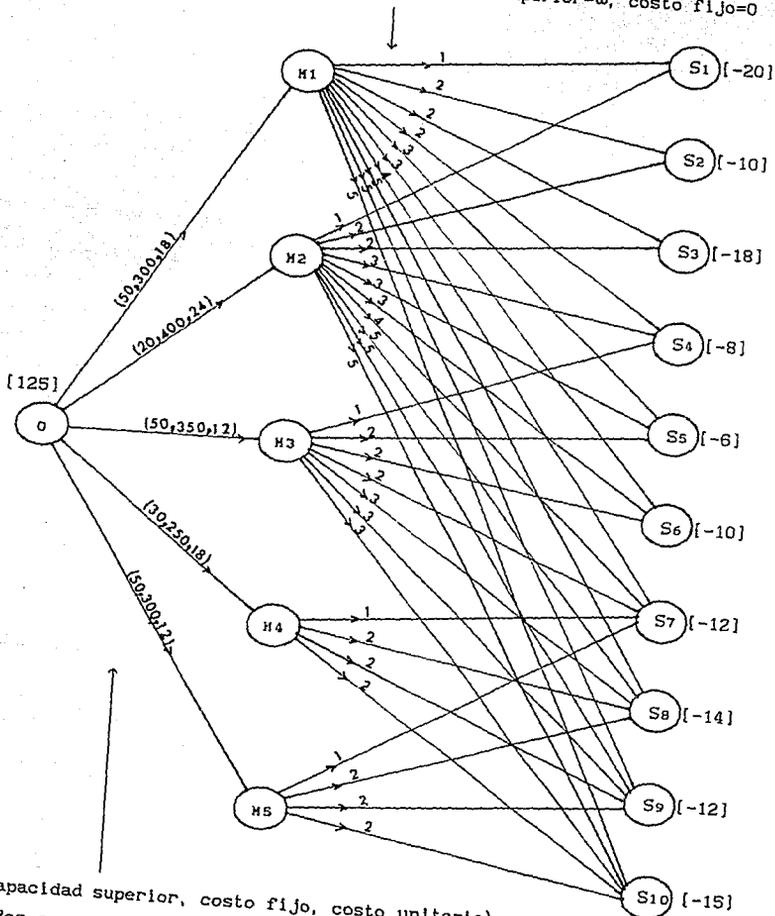


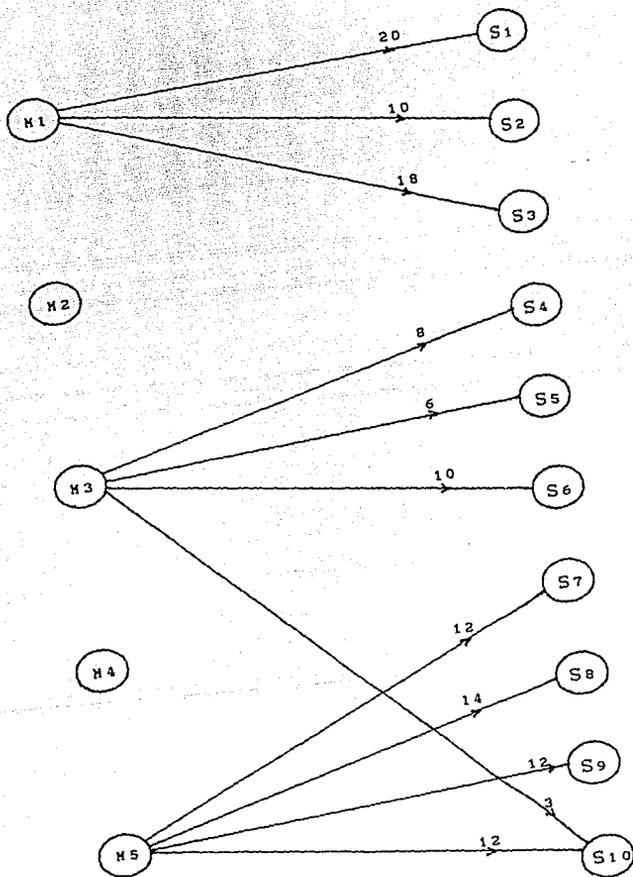
Figura [34]

RED ASOCIADA

solo se indica el costo unitario
 capacidad inferior=0, capacidad superior= ∞ , costo fijo=0



LOCALIZACION Y DISTRIBUCION OPTIMA



COSTO TOTAL = 2951, TIEMPO DE EJECUCION = 2.41 SEGUNDO

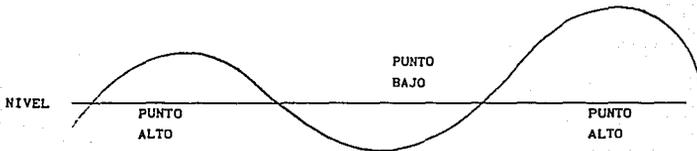
V.2 APLICACION A NIVELACION DE TERRENOS

INTRODUCCION

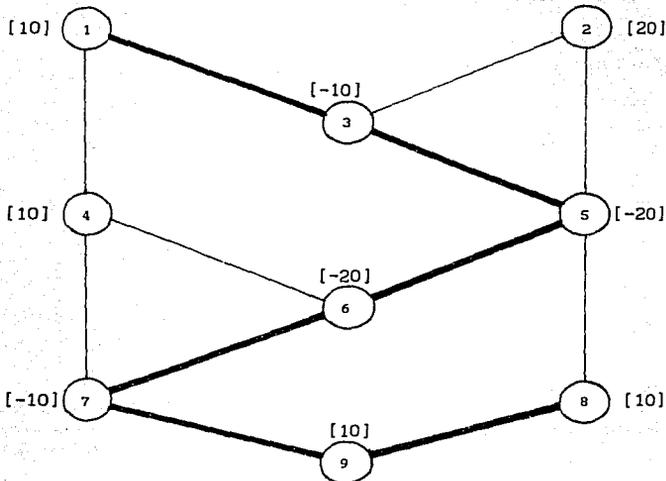
Un problema que se les presenta a los ingenieros topógrafos, es la nivelación de terrenos agrícolas, de lo cual depende el buen funcionamiento del sistema de riego que se utilice y por lo tanto depende la producción. El problema consiste en encontrar un plan óptimo de distribución de tierra, de los puntos altos a los puntos bajos del terreno, con el fin de nivelarlo con una inclinación adecuada al sistema de riego que se utilice.

TRANSFORMACION A UN PROBLEMA DE REDES

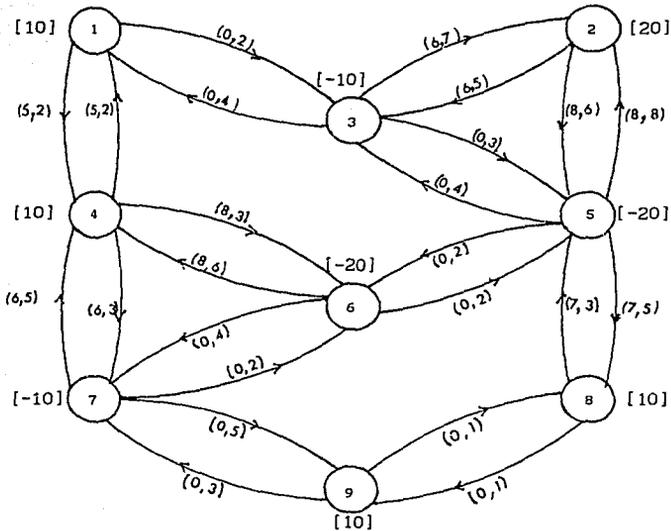
Con la información del ingeniero se construye una red, con vértices que representan la localización de puntos donde hay oferta (altos) ó demanda (bajos) de tierra, y arcos bidireccionados que representan las rutas para la redistribución. La oferta y la demanda estan en unidades de carga, y su suma es cero. Los arcos tienen asociado un costo por unidad de carga que puede ser distinto de un sentido a otro, además puede tener un costo fijo de construcción. Este problema es resuelto como un problema de redes sin ganancia con costos cóncavos.



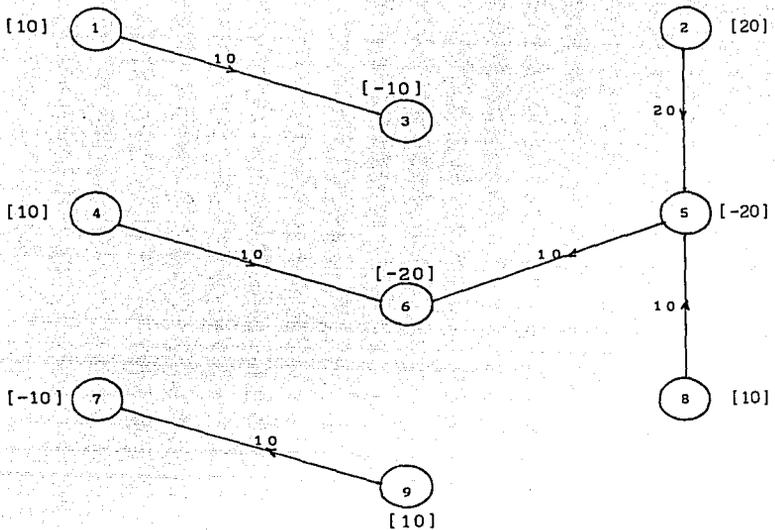
EJEMPLO.- Para representar la nivelación de un terreno, se utiliza la siguiente red no dirigida, en la cual se han dibujado con línea más fuerte los caminos que ya existen y con línea débil los caminos que se pueden construir. Se suponen los caminos de capacidad ilimitada, además se denota [oferta o demanda] de cada vértice. Encontrar el plan de nivelación óptimo.



la red es transformada y se denota (costo fijo, costo unitario por carga), [oferta o demanda].



PLAN DE NIVELACION OPTIMO



COSTO TOTAL = 273. TIEMPO DE EJECUCION = 1.86 SEGUNDOS

V.3 PLAN DE CONTRATACION DE PERSONAL

El siguiente modelo puede ser utilizado para determinar la política de contratación de personal que balancee costos de contratación y despido, considerando costos de empleo ocioso, cuando la demanda no es uniforme.

Se definen los siguientes parámetros, variables y funciones:

D_j = Personal mínimo requerido en cada periodo j , (conocido para cada j).

X_{ij} = No. de gente contratada al inicio del periodo i y despedida al final del periodo $j-1$.

$C_{ij}(\cdot)$ = Función de costo de contratación asociado con X_{ij} (conocida).

S_j = Exceso de personal en cada periodo j .

El problema de contratación de personal para N periodos, consiste en encontrar, los enteros no negativos X_{ij} , S_j tales que:

$$[52] \quad \text{Min} \quad \sum_{r=1}^N \sum_{t=r+1}^{N+1} C_{rt}(X_{rt})$$

$$(a) \quad \text{s.a} \quad \sum_{r=1}^j \sum_{t=j+1}^{N+1} X_{rt} - S_j = D_j \quad j = 1, 2, \dots, N$$

(b) $X_{jt}, S_j \geq 0$ enteros; $j = 1, 2, \dots, N$; $t = 1, 2, \dots, N+1$
 se puede interpretar (a) "en cada periodo la cantidad de personal disponible es igual al personal mínimo requerido más el exceso de personal".

Para ilustrar el procedimiento de transformación a un problema de flujo en redes, se considera $N = 3$.

$$(c) \quad j=1 \quad X_{12} + X_{13} + X_{14} + \dots \quad -S_1 \quad = D_1$$

$$(d) \quad j=2 \quad X_{13} + X_{14} + X_{23} + X_{24} + \dots \quad -S_2 \quad = D_2$$

$$(e) \quad j=3 \quad X_{14} + \dots + X_{24} + \dots + X_{34} + \dots \quad -S_3 \quad = D_3$$

sustrayendo (d) de (e), (c) de (d) y obteniendo el negativo de (e) tenemos:

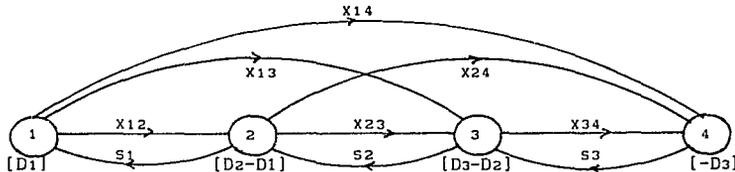
$$(c) \quad X_{12} + X_{13} + X_{14} + \dots \quad -S_1 \quad = D_1$$

$$(d)-(c) \quad -X_{12} \quad + X_{23} + X_{24} + \dots \quad +S_1 - S_2 \quad = D_2 - D_1$$

$$(e)-(d) \quad -X_{13} \quad - X_{23} \quad + X_{34} + \dots \quad +S_2 - S_3 \quad = D_3 - D_2$$

$$-(e) \quad -X_{14} - \dots - X_{24} - \dots - X_{34} + \dots \quad +S_3 \quad = -D_3$$

examinando el sistema, se observa que cada variable aparece dos veces en las ecuaciones, una con coeficiente +1 y la otra con coeficiente -1. Por lo tanto la matriz de este sistema es la matriz nodos-arcos cuya red asociada es:

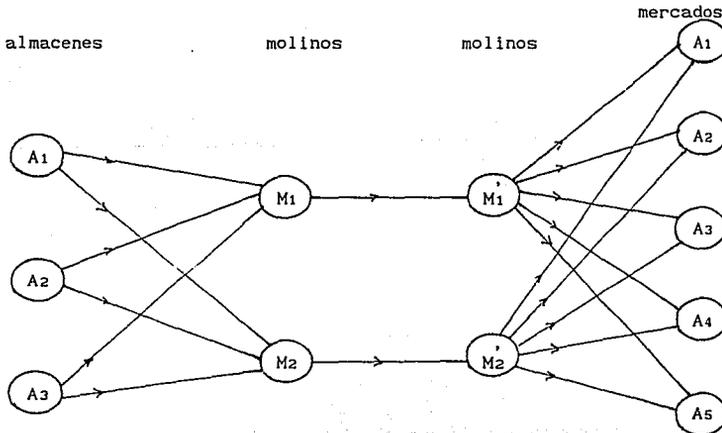


se puede considerar capacidad superior y capacidad inferior en el número de gente contratada y en el exceso de personal, sin que la estructura básica de la red se altere.

V.4 MODELO DE COMPRA PRODUCCION Y DISTRIBUCION

El problema consiste en determinar la producción de M plantas establecidas, las cuales operan dentro de sus capacidades de producción, además determinar la política de compra de materia prima en N fuentes, y la política de distribución del producto, para satisfacer la demanda ya determinada de S centros de consumo, todo lo anterior a costo mínimo. Se suponen conocidos los costos de compra, producción y distribución, estas funciones de costo por manejar economía de escala son cóncavas.

EJEMPLO (COMPAÑIA HARINERA).- Determinar la política óptima de producción, compra y distribución, para una compañía harinera que tiene 2 molinos $\{M_1, M_2\}$, pueden comprar trigo en 3 almacenes $\{A_1, A_2, A_3\}$. Se sabe que se necesita 1.5 toneladas de trigo para producir 1 tonelada de harina, el subproducto que se obtiene es salvado el cual es vendido inmediatamente en cada molino, por lo cual no interesa ni en el proceso de producción ni en el de distribución. La harina es distribuida en 5 centros de consumo $\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$. La compra, producción y distribución de la compañía harinera es representada en la siguiente red.



Datos de la compañía harinera en base a la red:

NODO	DEMANDA EN TON DE HARINA
D1	20
D2	40
D3	50
D4	20
D5	10

NODO	CAPACIDAD MAXIMA DE SUMINISTRO EN TON DE TRIGO
A1	45
A2	75
A3	105

ARCO	COSTO POR TONELADAS EN UNIDADES MONETARIAS (U.M.)	CAPACIDAD MAX. EN TONELADAS
de A1 a M1	80	∞
de A1 a M2	90	∞
de A2 a M1	75 de 0 a 45 ton 73 lo que exede de 45	∞
de A2 a M2	90 de 0 a 45 ton 80 lo que exede de 45	∞
de A3 a M1	90 de 0 a 75 ton 80 lo que exede de 75	∞
de A3 a M2	73 de 0 a 75 70 lo que exede de 75	∞
de M1 a M1	20 de 0 a 20 18 lo que exede de 20 menor que 30 15 lo que exede de 50	80
de M2 a M2	20 de 0 a 30 18 lo que exede de 30 menor que 30 15 lo que exede de 60	70
de M1 a D1	3	∞
de M1 a D2	1	∞
de M1 a D3	5	∞
de M1 a D4	7	∞

ARCO	COSTO POR TONELADA EN UNIDADES MONETARIAS (U.H.)	CAPACIDAD MAXIMA EN TONELADAS
de M1 a D5	7	∞
de M2 a D1	5	∞
de M2 a D2	6	∞
de M2 a D3	0	∞
de M2 a D4	5	∞
de M2 a D5	5	∞

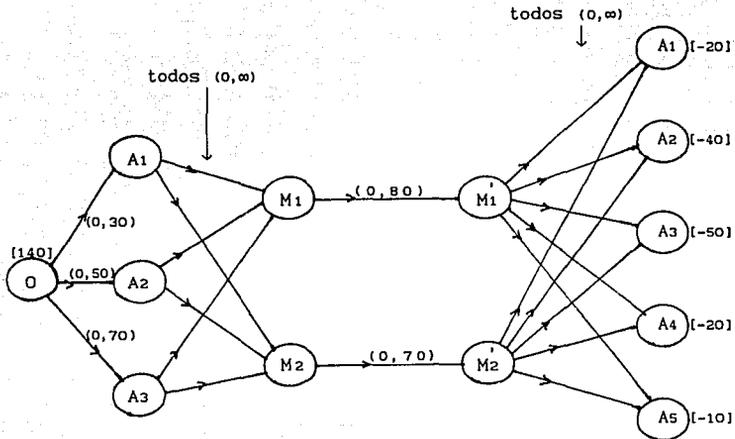
Para manejar las mismas unidades de producto, se cambian las 1.5 toneladas de trigo por una tonelada de harina quedando los cambios siguientes:

NODO	CAPACIDAD MAXIMA DE SUMINISTRO EN TON DE TRIGO
A1	30
A2	50
A3	70

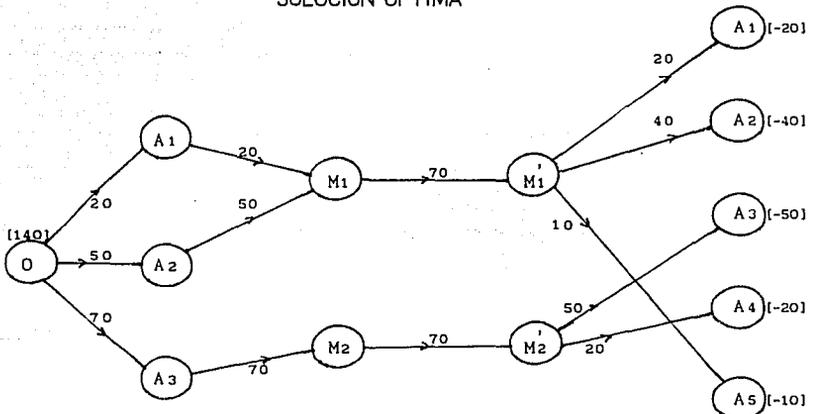
ARCO	COSTO POR TONELADAS EN UNIDADES MONETARIAS (U.H.)	CAPACIDAD MAX. EN TONELADAS
de A2 a M1	75 de 0 a 30 ton 73 lo que exede de 30	∞
de A2 a M2	90 de 0 a 30 ton 80 lo que exede de 30	∞
de A3 a M1	90 de 0 a 50 ton 80 lo que exede de 50	∞
de A3 a M2	73 de 0 a 50 70 lo que exede de 50	∞

el resto de los datos queda igual.

La red asociada al problema en la cual se consideró la notación [oferta ó demanda] (capacidad inferior, capacidad superior) es la siguiente:



SOLUCION OPTIMA



COSTO TOTAL = 13 060, TIEMPO DE EJECUCION = 2.60 SEGUNDOS.

V.5 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO UN SOLO PRODUCTO

Se presenta un problema de producción-inventario, de un solo producto, permitiendo satisfacer demandas atrasadas, sobre un horizonte de planeación finito. Las demandas son conocidas, producción

determinística, funciones de costo de producción, inventarios y por satisfacer demandas atrasadas son conocidas y cóncavas si aprovechan la economía de escala. El problema consiste en determinar un plan de producción que haga frente a la demanda, a costo mínimo.

Para la formulación matemática del problema se requiere definir lo siguiente:

N = No. de periodos que considera el horizonte de planeación.

i = Identificador del periodo, $i = 1, 2, \dots, N$.

X_i = No. de unidades producidas durante el periodo i .

$C_i(.)$ = Función de costo de producción en el periodo i .

I_i = Nivel de inventario al final del periodo i .

$\phi_i(.)$ = Función costo de inventario en el periodo i .

B_i = Nivel de déficit al final del periodo i .

$b_i(.)$ = Función de costo por déficit en el periodo i .

D_i = Demanda del producto en el periodo i .

CP_i = Capacidad máxima de producción durante el periodo i .

CI_i = Capacidad máxima de inventario durante el periodo i .

CB_i = Capacidad máxima de déficit durante el periodo i .

El problema queda formulado:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^N (C_i(X_i) + \phi_i(I_i) + b_i(B_i))$$

$$[53] \text{ s. a. } I_i + X_i + B_{i+1} = D_i + I_{i+1} + B_i \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (a)$$

$$I_1 = I_{N+1} = B_1 = B_{N+1} = 0 \quad (b)$$

$$0 \leq X_i \leq CP_i \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (c)$$

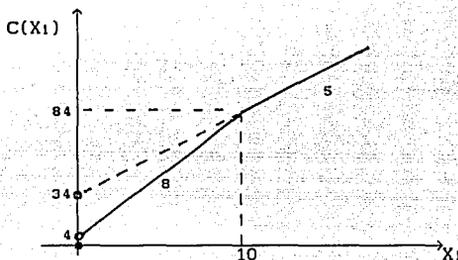
$$0 \leq I_i \leq CI_i \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (d)$$

$$0 \leq B_i \leq CB_i \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (e)$$

Las demandas D_i y funciones C_i , ϕ_i , b_i se suponen conocidas, 1.a es equivalente a decir "lo que se tiene en inventario más lo que se produce más lo que llega del siguiente periodo por pedidos retrasados es igual a la demanda más lo que queda de inventario para el periodo siguiente más lo que sale para el periodo anterior para surtir pedido retrasado" 1.b establece que tanto inventario y déficit al inicio y final son cero, 1.c, 1.d y 1.e la producción e inventario están acotadas superiormente y además producción, inventario y déficit son no negativos.

EJEMPLO.- Encontrar el plan de producción óptimo para 4 periodos cuyas demandas son 3, 8, 5 y 6 respectivamente, la capacidad máxima de producción es de 15 y la capacidad máxima de inventario es 12. Los costos de producción, inventario y déficit son

$$C(X_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1=0 \\ 4+8X_1 & \text{si } 0 < X_1 \leq 10 \\ 34+5X_1 & \text{si } X_1 > 10 \end{cases}, \quad \varphi(I_1) = I_1, \quad b(B_1) = 2B_1$$



$$\min \sum_{i=1}^4 (C(X_i) + I_i + 2B_i)$$

$$\text{s.a. } X_1 + B_2 = 3 + I_2$$

$$X_2 + I_2 + B_3 = 8 + I_3 + B_2$$

$$X_3 + I_3 + B_4 = 5 + I_4 + B_3$$

$$X_4 + I_4 = 6 + B_4$$

$$I_1 = I_5 = B_1 = B_5 = 0$$

$$0 \leq X_i \leq 15, 0 \leq I_i \leq 12, B_i \geq 0, \quad \forall i=1,2,\dots,4$$

arreglando términos y agregando la restricción redundante suma de las primeras 4 restricciones queda:

$$\min \sum_{i=1}^4 (C(X_i) + I_i + 2B_i)$$

$$\text{s.a. } -X_1 + I_2 - B_2 = -3$$

$$-X_2 - I_2 + I_3 + B_2 - B_3 = -8$$

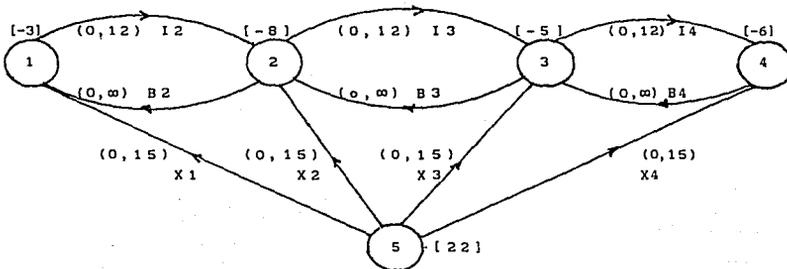
$$-X_3 - I_3 + I_4 + B_3 - B_4 = -5$$

$$-X_4 - I_4 + B_4 = -6$$

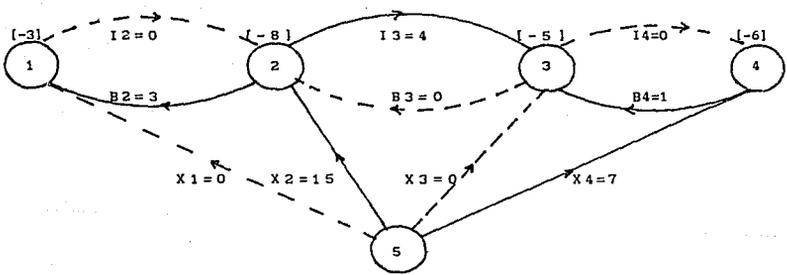
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 22$$

$$0 \leq X_i \leq 15, 0 \leq I_i \leq 12, 0 \leq B_i \leq \infty, \quad \forall i=1,2,\dots,4$$

examinando el sistema, se observa que cada variable aparece dos veces en las ecuaciones, una con coeficiente +1 y la otra con coeficiente -1. Por lo tanto la matriz de este sistema es la matriz nodos-arcos cuya red asociada es la siguiente, en la cual se considera la notación [oferta ó demanda], (capacidad inferior, capacidad superior).



PLAN DE PRODUCCION OPTIMA



PRODUCCION	$X_1=0, X_2=15, X_3=0, X_4=7$
INVENTARIO	$I_1=0, I_2=0, I_3=4, I_4=0$
DEFICIT	$B_1=0, B_2=3, B_3=0, B_4=1$

COSTO OPTIMO=181

V.6 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO CON VARIAS ALTERNATIVAS DE PRODUCCION

INTRODUCCION

Este modelo es una extensión del modelo anterior, ya que se consideran diversos proveedores o formas de producción en cada periodo, por ejemplo, producción en tiempo normal, producción en tiempo extra, producción por subcontratación, entre otros.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Suponga que en cada periodo existen M formas distintas de satisfacer la demanda, además de las suposiciones del modelo anterior. La formulación del problema es:

$$[54] \min \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^M C_{ti}(X_{ti}) + \varphi_i(I_i) + b_i(B_i) \right)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^M X_{ti} + I_i + B_{i+1} = D_i + I_{i+1} + B_i \quad \forall i=1,2,\dots,N \quad (a)$$

$$I_1 = I_{N+1} = B_1 = B_{N+1} = 0 \quad (b)$$

$$0 \leq X_{ti} \leq CP_{ti} \quad \forall i=1,2,\dots,N \text{ y } \forall t=1,2,\dots,M \quad (c)$$

$$0 \leq I_i \leq CI_i \quad \forall i=1,2,\dots,N \quad (d)$$

$$0 \leq B_i \leq CB_i \quad \forall i=1,2,\dots,N \quad (e)$$

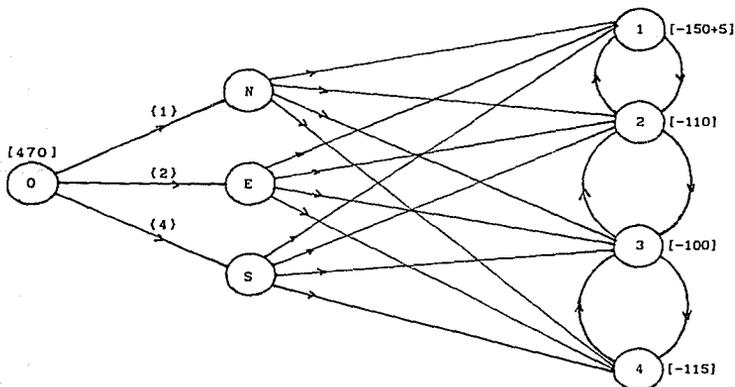
donde X_{it} es el nivel de producción del artículo en el periodo i usando la alternativa de producción t y CP_{ti} es la correspondiente cota superior de producción, $C_{ti}(\cdot)$ es la función costo de producción de la alternativa t en el periodo i .

EJEMPLO (PRODUCCION EN TIEMPO NORMAL, TIEMPO EXTRA Y POR SUBCONTRATACION).- Una fábrica produce un artículo, considerando tiempo normal, tiempo extra y subcontratación. Encontrar el plan de producción óptimo que satisfaga las demandas de cuatro periodos, considerando un inventario inicial de 5 artículos, costo fijo para producir en tiempo normal 1 u.m. (unidad monetaria), costo fijo por producir en tiempo extra 2 u.m., costo fijo para producir por subcontratación 4 u.m., costo por artículo en inventario 1 u.m., capacidad de inventario 40, costo por artículo en déficit 2 u.m., capacidad de déficit 10, además los costos, capacidades y demandas de

la siguiente tabla.

ALTERNATIVA DE PRODUCCION	PERIODOS			
	1	2	3	4
COSTO UNITARIO DE PRODUCCION				
NORMAL=N	15	16	18	20
EXTRA=E	17	19	21	24
SUCONT.=S	20	21	22	23
CAPACIDAD DE PRODUCCION				
NORMAL	100	100	60	100
EXTRA	20	20	10	10
SUBCONT.	40	40	40	40
DEMANDA	150	110	100	115

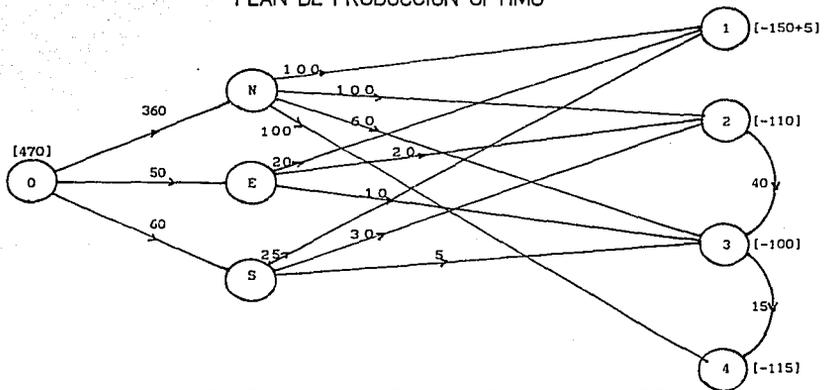
Considerando la notación [oferta o demanda] y {costo fijo}, la red asociada al problema es:



capacida inferior, capacidad superior y costo de cada arco son dadas en la siguiente tabla.

ARCOS	(CAP. INF, CAP. SUP, COSTO)
(0, N), (0, E), (0, S)	(0, ∞, 0)
(2, 1), (3, 2), (4, 3)	(0, 10, 2)
(1, 2), (2, 3), (3, 4)	(0, 40, 1)
(N, 1)	(0, 100, 15)
(N, 2)	(0, 100, 16)
(N, 3)	(0, 60, 18)
(N, 4)	(0, 100, 20)
(E, 1)	(0, 20, 17)
(E, 2)	(0, 20, 19)
(E, 3)	(0, 10, 21)
(E, 4)	(0, 10, 24)
(S, 1)	(0, 40, 20)
(S, 2)	(0, 40, 21)
(S, 3)	(0, 40, 22)
(S, 4)	(0, 40, 23)

PLAN DE PRODUCCION OPTIMO



PRODUCCION EN TIEMPO NORMAL = 360
 PRODUCCION EN TIEMPO EXTRA = 50
 PRODUCCION POR SUBCONTRATACION = 60
 COSTO TOTAL = 8 412
 TIEMPO DE EJECUCION = 1.74 SEGUNDOS

V.7 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO CON MULTI-INSTALACION EN SERIE PARA LA PRODUCCION DE UN PRODUCTO

Se considera el problema de planear la producción de cada una de las M instalaciones sobre un horizonte de planeación de T periodos, donde las instalaciones están dispuestas en serie y numeradas de tal manera que la salida de la instalación j es la entrada de la instalación $j+1$, se dice que el producto está en la etapa j cuando sale de la instalación j . Un inventario es considerado entre etapas y el j -ésimo inventario entra a producción en la instalación $j+1$. El inventario M (que sigue a la etapa M) es sujeto a demandas conocidas, permitiéndose satisfacer demandas atrasadas (solo en la etapa M). Se supone que la instalación j en el periodo t puede ser usada por la instalación $j+1$ en el mismo periodo. Para la formulación del problema se considera lo siguiente:

N = No. de instalaciones.

T = No. de periodos que considera el horizonte de planeación.

X_{jt} = producción en la instalación j durante el periodo t .

$C_{jt}(\cdot)$ = Función costo de producción en periodo t , en etapa j .

I_{jt} = Nivel de inventario en la etapa j al final del periodo t .

$\phi_{jt}(\cdot)$ = Función costo de inventario en etapa j al final del periodo t .

B_{jt} = Nivel de déficit en la etapa M al final del periodo t .

$b_{jt}(\cdot)$ = Función de costo por déficit en el periodo t en etapa M .

D_t = Demanda del producto en el periodo t .

CP_{jt} = Capacidad máxima de producción en el periodo t en etapa j .

CI_{jt} = Capacidad máxima de inventario en el periodo t en etapa j

CB_{jt} = Capacidad máxima de déficit en el periodo t en etapa M

El problema consiste en determinar las variables X_{jt} , I_{jt} y B_{jt} que minimicen la suma de los costos de producción, inventario y reorden, sobre el horizonte de planeación.

$$[55] \text{ Min } \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^M C_{jt}(X_{jt}) + \sum_{j=1}^M h_{jt}(I_{jt}) + b_{Mt}(B_{Mt}) \right)$$

$$\text{s.a. } I_{jt} = I_{j,t-1} + X_{jt} - X_{j+1,t} \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad (a)$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

$$I_{Mt} = I_{M,t-1} - B_{M,t-1} + B_{Mt} + X_{Mt} - D_t \quad \forall t=1, 2, \dots, T \quad (b)$$

$$I_{j0} = I_{jT} = B_{M0} = B_{MT} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, M \quad (c)$$

$$0 \leq X_{jt} \leq CP_{jt} \quad \forall j=1, 2, \dots, M; \quad \forall t=1, 2, \dots, T \quad (d)$$

$$0 \leq I_{jt} \leq CI_{jt} \quad \forall j=1, 2, \dots, M; \quad \forall t=1, 2, \dots, T \quad (e)$$

$$0 \leq B_{Mt} \leq CB_{Mt} \quad \forall t=1, 2, \dots, T \quad (f)$$

EJEMPLO.- Se considera un horizonte de planeación de 4 periodos para un sistema de producción que consiste de 3 etapas en serie. Los costos de producción e inventario tienen la siguiente forma.

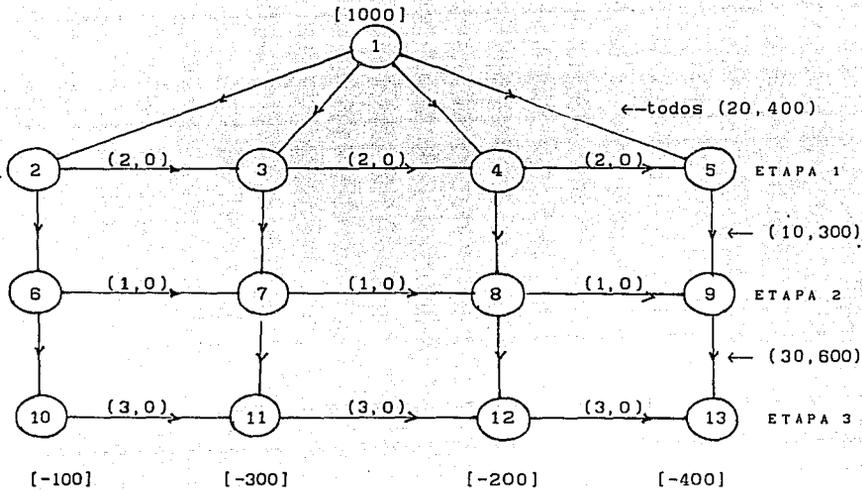
$$C_{jt}(X_{jt}) = \begin{cases} A_j + C_j X_{jt} & \text{si } X_{jt} > 0 \\ 0 & \text{si } X_{jt} = 0 \end{cases}$$

$$H_{jt}(I_{jt}) = h_j I_{jt}.$$

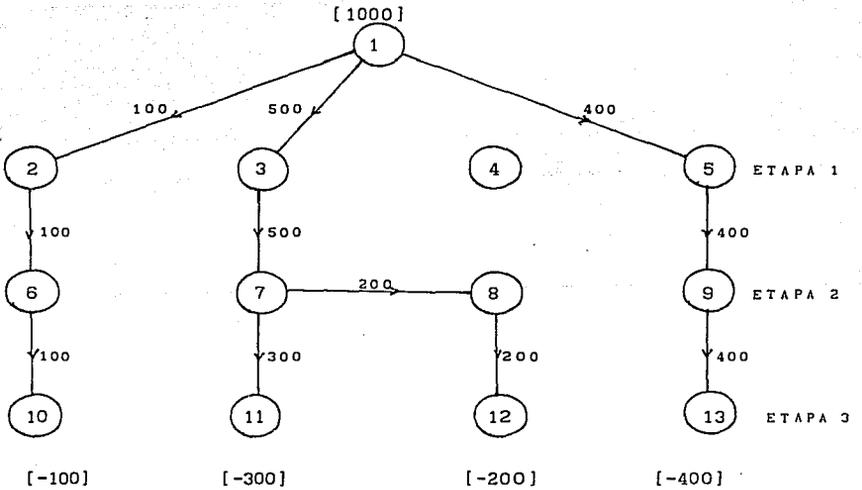
suponiendo $A_1=400$, $A_2=300$, $A_3=600$, $C_1=20$, $C_2=10$, $C_3=30$, $h_1=2$, $h_2=1$ y $h_3=3$, demandas $D_1=100$, $D_2=300$, $D_3=200$ y $D_4=400$, no se permite satisfacer demandas atrasadas, la capacidad máxima de producción en cualquier periodo y cualquier instalación es 600, y la capacidad máxima de inventario en cualquier periodo y cualquier estado es 300.

RED ASOCIADA

Se utiliza la notación [oferta ó demanda] (costo unitario, costo fijo), la capacidad inferior de todos los arcos es 0, capacidad superior de todos los arcos de producción (hacia abajo) es 600, la capacidad máxima de inventario (hacia la izquierda) es 300.



PLAN OPTIMO DE PRODUCCION



COSTO TOTAL = 64 700, TIEMPO DE EJECUCION = 5.82 SEGUNDOS

V.8 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO MULTIPRODUCTO

INTRODUCCION

Se considera un problema de planeación de la producción, multiproducto, permitiendo satisfacer las demanda no cubierta en periodos atrasados, sobre un horizonte de planeación finito, se suponen conocidas las demandas de productos en cada periodo, las funciones de costo de producción, inventario y déficit de cada producto en cada periodo. El problema consiste en determinar un plan de producción óptimo que satisfaga la demanda de cada producto en cada periodo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean N los diferentes productos, H el número de periodos de producción, además:

X_{ij} = No. de productos i en el periodo j .

$C_{ij}(\cdot)$ = Función costo de producir el producto i en el periodo j

I_{ij} = Nivel de inventario del producto i al final del periodo j .

$\phi_{ij}(\cdot)$ = Función costo por inventario del producto i al final del periodo j .

B_{ij} = Déficit acumulado del producto i al final del periodo j

$b_{ij}(\cdot)$ = Función costo por déficit del producto i al final del periodo j .

D_{ij} = Demanda del producto i en el periodo j .

CP_{ij} = Capacidad máxima de producción del producto i en periodo j

CI_{ij} = Capacidad máxima de inventario del producto i en periodo j

CB_{ij} = Capacidad máxima de déficit del producto i en el periodo j

Se suponen conocidas las demandas y las funciones de costo de cada producto en cada periodo. La formulación del problema es:

$$[56] \text{ Min } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^H \{C_{ij}(X_{ij}) + \phi_{ij}(I_{ij}) + b_{ij}(B_{ij})\}$$

$$(a) \text{ s.a. } X_{ij} + I_{i,j-1} - I_{ij} + B_{ij} - B_{i,j-1} = D_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(b) \quad 0 \leq I_{ij} \leq CI_{ij}; \quad 0 \leq B_{ij} \leq CB_{ij}; \quad 0 \leq X_{ij} \leq CP_{ij} \text{ y enteros} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(c) \quad I_{i0} = B_{i0} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

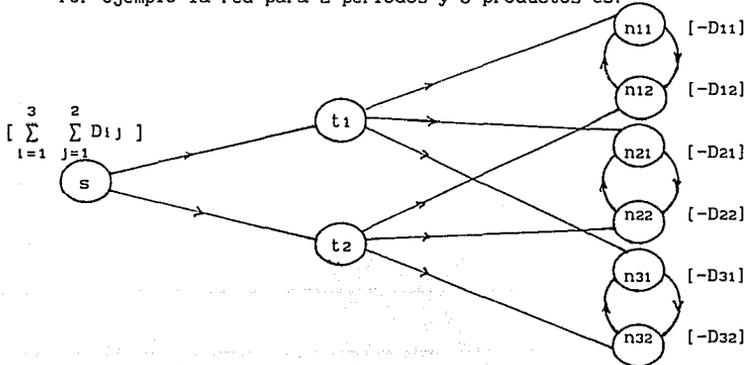
CONSTRUCCION DE LA RED

Para construir la red asociada al problema seguir los pasos:

- 1).- Se definen los nodos t_j para $j = 1, 2, \dots, H$ correspondiente a cada periodo j .
- 2).- Se define los nodos n_{ij} con demanda D_{ij} , para $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, H$ correspondiente a cada producto i en periodo j .
- 3).- Se construyen los arcos de producción (t_j, n_{ij}) del producto i en el periodo j , con capacidad inferior cero, capacidad superior CP_{ij} y costo $C_{ij}(X_{ij})$ para $i=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, H$
- 4).- Para $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, H$ se construyen los arcos de inventario $(n_{ij}, n_{i, j+1})$ del producto i en el periodo j , con capacidad inferior cero, capacidad superior CI_{ij} y costo $\emptyset_{ij}(I_{ij})$.
- 5).- Para $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, H$ se construyen los arcos de déficit $(n_{i, j+1}, n_{ij})$ del producto i en el periodo j , con capacidad inferior cero, capacidad superior CB_{ij} y costo $b_{ij}(B_{ij})$
- 6).- Se define el nodo fuente S con oferta $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^H D_{ij}$ y construir los arcos (s, t_j) $j = 1, 2, \dots, H$, con $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^H D_{ij}$ costo cero, capacidad inferior cero y capacidad superior infinita.

La variable X_{ij} es el flujo en (t_j, n_{ij}) , B_{ij} corresponde al flujo en $(n_{i, j+1}, n_{ij})$ y I_{ij} corresponde al flujo en $(n_{ij}, n_{i, j+1})$.

Por ejemplo la red para 2 periodos y 3 productos es:



V.9 MODELO DE PRODUCCION-INVENTARIO, MULTIPRODUCTO, MULTI-INSTALACION EN PARALELO CON PROCESAMIENTO EN LOTE

INTRODUCCION

Se considera un problema de planeación de la producción, multiproducto, con multiinstalación, permitiendo satisfacer la demanda no cubierta en periodos atrasados, sobre un horizonte de planeación finito que consiste en periodos de producción discretos, durante cada uno de los cuales a lo más un producto puede ser asignado a cada instalación. La demanda de productos en cada periodo se supone conocida pero no necesariamente la misma. El problema consiste en determinar cómo asignar los productos a instalaciones para hacer frente a la demanda de productos, de tal manera que se minimice la suma de costos de producción, inventarios y por cubrir demandas atrasadas, sobre el horizonte de planeación. Este problema es formulado como un programa lineal entero mixto transformado a un programa todo entero que puede ser resuelto como un problema de flujo a costo mínimo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean N los diferentes productos, que se producen en M diferentes instalaciones en paralelo, permitiéndose satisfacer demandas de periodos atrasados, siendo H los periodos de producción en un horizonte de producción finito. En un periodo solo un producto i es asignado a una instalación, produciéndose exactamente P_i unidades de ese producto. El costo de producir cada producto i , depende del producto i y del periodo k durante el cual el producto es hecho. El modelo considera las siguientes variables:

X_{ik} = No. de instalaciones usadas para producir el producto i en el periodo k .

$C_{ik}(X_{ik})$ = Función de costo (positiva) por cada instalación asignada para producir en el periodo k . Considerando costo fijo y economía de escala, la función es cóncava.

I_{ik} = No. de unidades de producto i en inventario al final del periodo k .

$\bar{\varnothing}_{ik}$ = Costo unitario (positivo) por inventario para el producto i al final del periodo k .

\bar{B}_{ik} = Total de unidades de producto i al final del periodo k , para satisfacer demandas atrasadas.

b_{ik} = Costo unitario (positivo) por satisfacer demandas atrasadas, para el producto i al final del periodo k .

\bar{d}_{ik} = Demanda del producto i en el periodo k .

La función de costo $C_{ik}(X_{ik})$, los costos unitarios $\bar{\varnothing}_{ik}$, \bar{b}_{ik} y las demandas \bar{d}_{ik} se suponen conocidas para cada periodo $k = 1, 2, \dots, H$ y cada producto $i = 1, 2, \dots, N$, así como también el inventario inicial I_{i0} y la demanda atrasada inicial B_{i0} , para cada producto $i=1, 2, \dots, N$.

El objetivo del problema es determinar el plan de producción que minimice la suma de costos de producción, inventarios y por cubrir demandas atrasadas, sobre el horizonte de planeación. La formulación matemática del problema es:

$$\begin{aligned}
 [57] \quad & \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H \{C_{ik}(X_{ik}) + \bar{\varnothing}_{ik}\bar{I}_{ik} + \bar{b}_{ik}\bar{B}_{ik}\} \\
 (a) \quad & \text{s.a } P_i X_{ik} + \bar{I}_{ik-1} - \bar{I}_{ik} + \bar{B}_{ik} - \bar{B}_{ik-1} = \bar{d}_{ik} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix} \\
 (b) \quad & \sum_{i=1}^N X_{ik} \leq M \quad k = 1, 2, \dots, H \\
 (c) \quad & \bar{I}_{ik} \geq 0, \bar{B}_{ik} \geq 0, X_{ik} \geq 0 \text{ y enteros} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix} \\
 (d) \quad & I_{i0}, B_{i0} \text{ conocidas } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

el cual es un programa entero que presenta estructura de flujo en redes sólo si $P_i = 1 \forall i = 1, 2, \dots, N$, lo cual no es el caso.

TRANSFORMACION A UN PROBLEMA DE FLUJO EN REDES

Dividiendo cada restricción (a) de [57] por P_i se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [58] \quad & \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H \{C_{ik}(X_{ik}) + \varnothing_{ik}I_{ik} + b_{ik}B_{ik}\} \\
 (a) \quad & \text{s.a } X_{ik} + I_{ik-1} - I_{ik} + B_{ik} - B_{ik-1} = d_{ik} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix} \\
 (b) \quad & \sum_{i=1}^N X_{ik} \leq M \quad k = 1, 2, \dots, H \\
 (c) \quad & I_{ik} \geq 0, B_{ik} \geq 0, X_{ik} \geq 0 \text{ y enteros} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix} \\
 (d) \quad & I_{i0}, B_{i0} \text{ conocidas. } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

donde $I_{1k} = \bar{I}_{1k}/P_1$, $B_{1k} = \bar{B}_{1k}/P_1$, $d_{1k} = \bar{d}_{1k}/P_1$, $\theta_{1k} = \bar{\theta}_{1k}P_1$, $b_{1k} = \bar{b}_{1k}P_1$. Observe que las variables y las demandas son ahora expresadas en periodos de producción de un producto en particular.

El problema [58] es de flujo en redes si se agrega la restricción redundante suma del negativo de todas las restricciones (a)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H (-X_{ik}) = - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H d_{ik}$$

sin embargo como $d_{ik} = \bar{d}_{ik}/P_1$ no son necesariamente enteros, entonces puede dar soluciones óptimas no enteras, para evitarlo se hacen las siguientes modificaciones: de [58.a] se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k X_{1j} + I_{1,j-1} - I_{1j} + B_{1j} - B_{1,j-1} = \sum_{j=1}^k d_{1j} \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^k X_{1j} - I_{1k} + B_{1k} = \sum_{j=1}^k d_{1j} - I_{10} + B_{10} \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^k X_{1j} - I_{1k} + B_{1k} = \bar{W}_{1j} \quad \text{donde } \bar{W}_{1j} = \sum_{j=1}^k d_{1j} - I_{10} + B_{10} \end{aligned}$$

reemplazando por cada restricción (a) de [58] se tiene el problema equivalente:

$$[59] \quad \text{Min} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H \{C_{ik}(X_{ik}) + \theta_{ik}I_{ik} + b_{ik}B_{ik}\}$$

$$(a) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^k X_{1j} - I_{1k} + B_{1k} = \bar{W}_{1j} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{array}$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^N X_{ik} \leq M \quad k = 1, 2, \dots, H$$

$$(c) \quad I_{ik} \geq 0, B_{ik} \geq 0, X_{ik} \geq 0 \quad \text{y enteros} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{array}$$

$$(d) \quad I_{i0}, B_{i0} \text{ conocidas. } i = 1, 2, \dots, N$$

Las variables no negativas I_{ik} , B_{ik} en el óptimo al menos una de ellas tiene que ser cero ($I_{ik}B_{ik} = 0$) ya que aparecen en la misma restricción (a) y sus cotas son estrictamente positivas. Se denota $[r]$ el mayor entero menor que r y $f(r) = r - [r]$ la parte fraccional de r $0 \leq f(r) \leq 1$. Considerando que se ha encontrado el óptimo de [59]

entonces:

i) Si $B_{ik} > 0 \Rightarrow I_{ik} = 0 \Rightarrow$ (a) queda:

$$\sum_{j=1}^k X_{ij} + B_{ik} = \bar{W}_{ij}$$

descomponiendo I_{ik} , B_{ik} y \bar{W}_{ik} en parte entera y parte fraccional

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k X_{ij} + [B_{ik}] - [\bar{W}_{ij}] = f(\bar{W}_{ik}) - f(B_{ik})$$

$\Rightarrow f(\bar{W}_{ik}) - f(B_{ik}) =$ entero, ya que es igual a la suma de enteros, y como $0 \leq f(\bar{W}_{ik}) \leq 1$ y $0 \leq f(B_{ik}) \leq 1$ se tiene que

$$f(B_{ik}) = f(\bar{W}_{ik})$$

ii) Análogamente, si $I_{ik} > 0 \Rightarrow B_{ik} = 0 \Rightarrow$ (a) queda

$$\sum_{j=1}^k X_{ij} - I_{ik} = \bar{W}_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k X_{ij} - [I_{ik}] - [\bar{W}_{ij}] = f(\bar{W}_{ik}) + f(I_{ik}) = \text{entero}$$

como $f(\bar{W}_{ik}) = 0$ solo si $\bar{W}_{ik} = 0$, $0 \leq f(\bar{W}_{ik}) \leq 1$ y $0 \leq f(I_{ik}) \leq 1$ se tiene que

$$f(I_{ik}) + f(\bar{W}_{ik}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(I_{ik}) = \begin{cases} 1 - f(\bar{W}_{ik}) & \text{si } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente se define

$$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } I_{ik} > 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

\Rightarrow los resultados de las consideraciones anteriores quedan:

$$f(B_{ik}) = f(W_{ik})(1 - I_{ik}) \text{ y } f(I_{ik}) = (1 - f(W_{ik}))I_{ik}$$

sustituyéolas al descomponer I_{ik} , B_{ik} y \bar{W}_{ik} en parte entera y parte fraccional en [59]. Además haciendo $I_{ik} = [I_{ik}]$, $B_{ik} = [B_{ik}]$, $a_{ik} = f(\bar{W}_{ik})$ y $W_{ik} = [\bar{W}_{ik}]$, el problema equivalente a [59] es:

$$[60] \text{ Min } \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H (C_{ik}X_{ik}) + \theta_{ik}I_{ik} + ((1-a_{ik})\theta_{ik} - a_{ik}b_{ik})I_{ik} + b_{ik}(B_{ik} + a_{ik})$$

$$(a) \text{ s. a. } \sum_{j=1}^k X_{ij} - I_{ik} - I'_{ik} + B_{ik} = W_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(b) \sum_{i=1}^N X_{ik} \leq M \quad k = 1, 2, \dots, H$$

$$(c) \quad I_{ik} \geq 0, B_{ik} \geq 0, X_{ik} \geq 0 \text{ y enteros} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(d) \quad I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^k X_{ik} - \bar{W}_{ik} > 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(e) \quad I_{i0}, I'_{i0} \text{ y } B_{i0} \text{ conocidas. } i = 1, 2, \dots, N$$

Llamamos [61] al problema [60] al cual se le ha reemplazado por

$$(*) \quad I_{ik} \leq e_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \begin{matrix} I_{ik} = 0 \text{ ó } 1 \\ i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

se demostrará a continuación que la solución óptima no es afectada, es decir [61] es equivalente a [60] ([61] ya es un problema de flujo en redes):

- Si $\bar{W}_{ik} = \text{entero}$ en ambos casos (d) y (*) $I_{ik} = 0$.
- Consideremos X^* solución óptima de [61] con $\bar{W}_{ik} \neq \text{entero}$:
- a) Sea cualquier i, k tal que

$$\sum_{j=1}^k X^*_{ij} - \bar{W}_{ik} \leq 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero}$$

como X^*_{ij} son enteros (óptimo del problema de flujo), entonces

$$\sum_{j=1}^k X^*_{ij} - \bar{W}_{ik} - f(\bar{W}_{ik}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k X^*_{ij} - \bar{W}_{ik} \leq f(\bar{W}_{ik}) < 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k X^*_{ij} - \bar{W}_{ik} \leq 0$$

Si $I_{ik} = 1$ de [60.a] se tiene que $B_{ik} \geq 1$. Decreciendo I_{ik} a cero y B_{ik} por 1 nos lleva a una nueva solución factible con el siguiente cambio en la función objetivo:

$$-(1-a_{ik})\theta_{ik} + a_{ik}b_{ik} - b_{ik} = -(1-a_{ik})(\theta_{ik} + b_{ik}) < 0$$

ya que $(1-a_{ik}), \varnothing_{ik}, b_{ik} > 0$. De lo anterior se concluye que cuando

$$\sum_{j=1}^k X_{ij}^* - \bar{W}_{ik} \leq 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero}$$

en la solución óptima de [61] le corresponde $I''_{ik} = 0$.

b) Análogamente, consideremos cualquier i, k tal que

$$\sum_{j=1}^k X_{ij}^* - \bar{W}_{ik} > 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero}$$

como $\bar{W}_{ik} \geq W_{ik} \Rightarrow \sum_{j=1}^k X_{ij}^* - W_{ik} > 0$

Si $I''_{ik} = 0$ de [60.a] se tiene que $I'_{ik} > 0$. Incrementando I''_{ik} a 1 y decreciendo I'_{ik} por 1 nos lleva a una nueva solución factible con el siguiente cambio en la función objetivo:

$$-\varnothing_{ik} + (1-a_{ik})\varnothing_{ik} - a_{ik}b_{ik} = -a_{ik}(\varnothing_{ik} + b_{ik}) < 0$$

ya que $(1-a_{ik}), \varnothing_{ik}, b_{ik} > 0$. De lo anterior se concluye que cuando

$$\sum_{j=1}^k X_{ij}^* - \bar{W}_{ik} > 0 \text{ y } \bar{W}_{ik} \neq \text{entero}$$

en la solución óptima de [61] le corresponde $I''_{ik} = 1$.

En conclusión en problema de redes equivalente a [57] es:

$$[61] \text{ Min } \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^H (C_{ik}(X_{ik}) + \varnothing_{ik} I'_{ik} + ((1-a_{ik})\varnothing_{ik} - a_{ik}b_{ik}) I''_{ik} + b_{ik}(B_{ik} + a_{ik}))$$

$$(a) \text{ s.a. } \sum_{j=1}^k X_{ij} - I'_{ik} - I''_{ik} + B_{ik} = W_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(b) \sum_{i=1}^N X_{ik} \leq M \quad k = 1, 2, \dots, H$$

$$(c) \quad \begin{matrix} I'_{ik} \geq 0, B_{ik} \geq 0, X_{ik} \geq 0 \text{ y enteros} \\ i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(d) \quad I''_{ik} \leq e_{ik}, \quad e_{ik} = \begin{cases} 1 & \bar{W}_{ik} \neq \text{entero} \\ 0 & \text{en otro cas} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

$$(e) \quad I'_{i0}, I''_{i0} \text{ y } B_{i0} \text{ conocidas. } i = 1, 2, \dots, N$$

CONSTRUCCION DE LA RED

La red asociada al problema [61] se construye de la siguiente manera:

- 1).- Se definen los nodos t_k para $k = 1, 2, \dots, H$ correspondiente a cada periodo k .
- 2).- Se define los nodos n_{ik} para $i = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, H+1$ correspondiente a cada producto i en el periodo k .
- 3).- Se construyen los arcos (t_k, n_{ik}) para $i=1, 2, \dots, N$; $k=1, 2, \dots, H$ con capacidad inferior cero, capacidad superior infinito y costo C_{ik} .
- 4).- Para $i = 1, 2, \dots, H$ y $k = 1, 2, \dots, H$ construir los arcos paralelos $(n_{ik}, n_{i, k+1})^1$ y $(n_{ik}, n_{i, k+1})^2$ con costos θ_{ik} y $(1-a_{ik})\theta_{ik}-a_{ik}b_{ik}$ respectivamente; con capacidad inferior cero, capacidad superior infinita y e_{ik} respectivamente.
- 5).- Para $i = 1, 2, \dots, N$ y $k = 1, 2, \dots, H$, se construyen los arcos $(n_{i, k+1}, n_{ik})^1$ con costo b_{ik} , capacidad inferior cero y capacidad superior infinito.
- 6).- Para $i = 1, 2, \dots, N$ y $k = 1, 2, \dots, H$; si $W_{ik} > 0$ se construye un arco $(n_{ik}, n_{i, k+1})^3$ con capacidad inferior = W_{ik} = capacidad superior y costo cero. $W_{ik} < 0$ construir un arco $(n_{i, k+1}, n_{ik})^2$ con capacidad inferior = W_{ik} = capacidad superior y costo cero.
- 7).- Se define el nodo fuente S y se construyen los arcos (s, t_k) $k=1, 2, \dots, H$, con costo cero, capacidad inferior cero y capacidad superior M .
- 8).- Se define el nodo sumidero T y se construyen los arcos $(n_{i, H+1}, T)$ $i=1, 2, \dots, N$ con costo cero, capacidad inferior= W_{ik} si \bar{W}_{ik} =entero ó capacidad inferior $W_{ik} + 1$ si $\bar{W}_{ik} \neq$ entero y capacidad superior infinito.

Con respecto a [61] la variable X_{ik} es el flujo en (t_k, n_{ik}) , B_{ik} corresponde al flujo en $(n_{i, k+1}, n_{ik})^1$, I_{ik} corresponde al flujo en $(n_{ik}, n_{i, k+1})^1$ y I'_{ik} corresponde al flujo en $(n_{ik}, n_{i, k+1})^2$.

EXTENSIONES

Se pueden considerar las siguientes extensiones, sin destruir la estructura básica de la red:

- a) Límites de capacidad superior y capacidad inferior en la cantidad de productos permitidos en inventario o en demanda atrasada.
- b) El número de instalaciones disponibles puede variar de periodo a periodo (esto puede ser ocasionado por el programa de mantenimiento al que están sujetas).
- c) La dependencia de los costos de producción de las instalaciones usadas. Esto puede ser útil por ejemplo si algunas instalaciones requieren más mantenimiento que otras, debido a su tiempo de uso.

EJEMPLO. PLANTA ENSAMBLADORA DE 3 TIPOS DE AUTOS, CON 6 PROCESOS DE PRODUCCION EN PARALELO

Una planta ensambladora de automoviles produce tres tipos de autos {1,2,3} en seis procesos en paralelo, igualmente ajustables a producir cualquier tipo de auto, y en un periodo solo un tipo es asignado a un proceso, produciéndose un número fijo de unidades (tabla 1). Se desea encontrar un plan de producción que satisfaga las demandas de los próximos 4 meses, a costo mínimo (tabla 2), iniciando sin inventario y sin demanda atrasada.

TABLA 1

TIPO i	UNIDADES DE PRODUCCION (P_i) EN UN PERIODO
1	15
2	20
3	10

TABLA 2

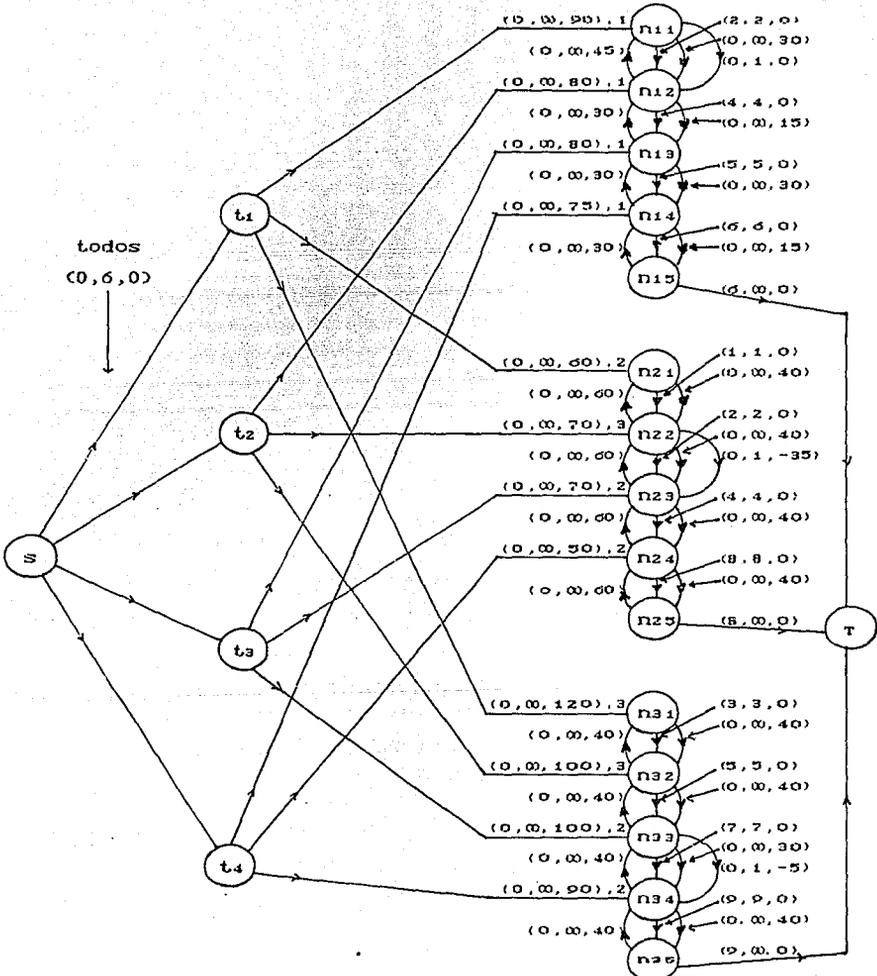
TIPO i	M E S K			
	1	2	3	4
COSTO FIJO POR AJUSTE DE PROCESO = CF_{ik}				
1	1	1	1	1
2	2	3	2	2
3	3	3	2	2
COSTO POR CADA PROCESO ASIGNADO = C_{ik}				
1	90	80	80	75
2	60	70	70	50
3	120	100	100	90
COSTO UNITARIO POR INVENTARIO = $\bar{\theta}_{ik}$				
1	2	1	2	1
2	2	2	2	2
3	3	4	3	3
COSTO UNITARIO POR DEMANDA ATRASADA = \bar{b}_{ik}				
1	3	2	2	2
2	3	3	3	3
3	4	4	4	4
DEMANDA = \bar{d}_{ik}				
1	36	24	15	15
2	20	35	25	80
3	30	20	25	15

SOLUCION.- Transformaciones necesarias $\theta_{ik} = P_i \bar{\theta}_{ik}$, $b_{ik} = P_i \bar{b}_{ik}$,
 $\bar{W}_{ik} = \sum_{j=1}^k \bar{a}_{ij}$, $W_{ik} = [W_{ik}]$ y $a_{ik} = \bar{W}_{ik} - [W_{ik}] \forall i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$
 $j=1$

TABLA 3

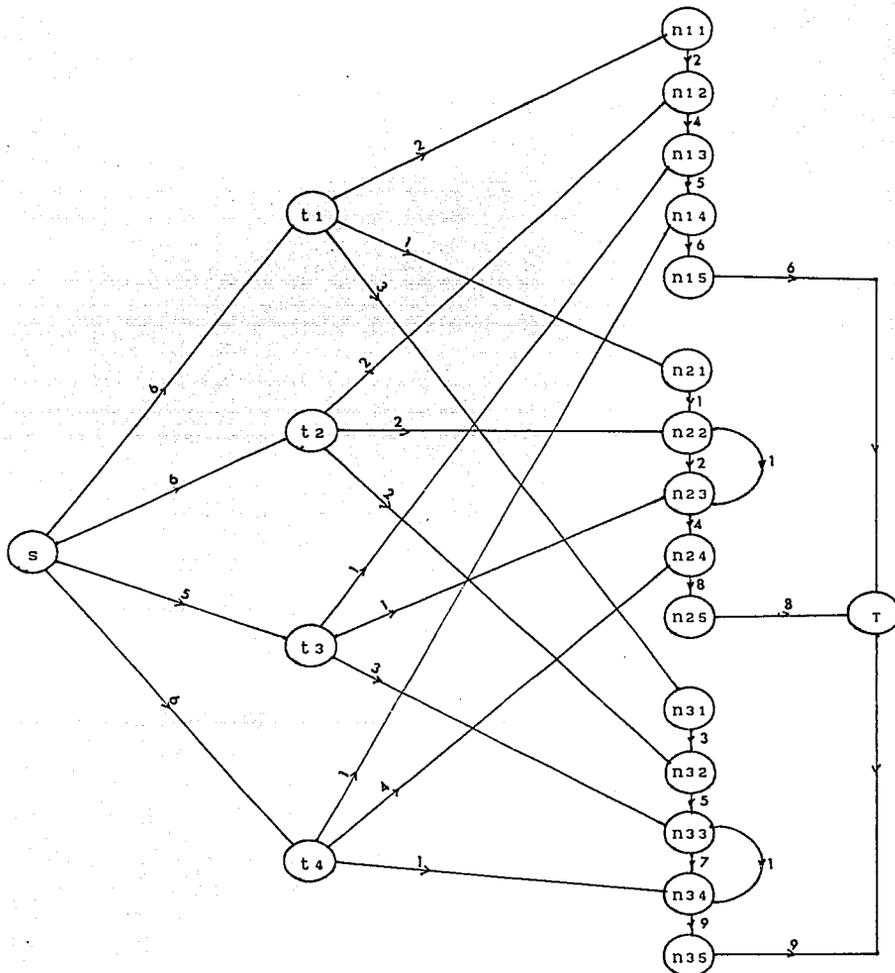
TIPO 1	K E S K			
	1	2	3	4
$\theta_{ik} = P_i \bar{\theta}_{ik}$				
1	30	15	30	15
2	40	40	40	40
3	30	40	30	30
$b_{ik} = P_i \bar{b}_{ik}$				
1	45	30	30	30
2	60	60	60	60
3	40	40	40	40
\bar{W}_{ik}				
1	2.4	4	5	6
2	1	2.75	4	8
3	3	5	7.5	9
W_{ik}				
1	2	4	5	6
2	1	2	4	8
3	3	5	7	9
$S_{ik} = (1 - a_{ik})\theta_{ik} - a_{ik}b_{ik}$				
1	0	15	30	15
2	40	-35	40	40
3	30	40	-5	30

RED ASOCIADA



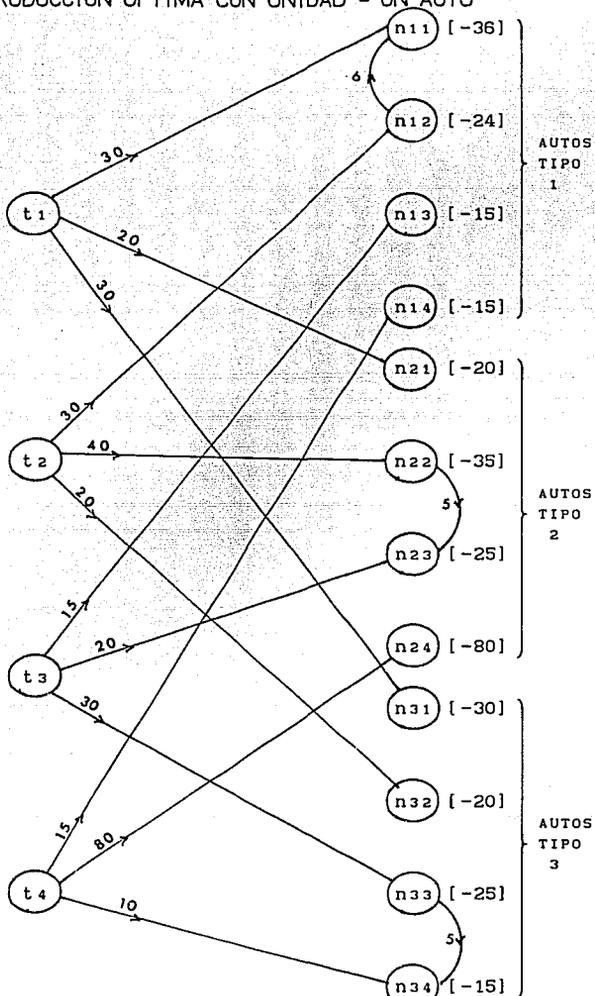
(capacidad inferior, capacidad superior, costo unitario), costo fijo.

PRODUCCION OPTIMA EN UNIDADES DE PERIODOS DE PRODUCCION



COSTO TOTAL = 1 981, TIEMPO DE EJECUCION = 4.46 SEGUNDOS

PRODUCCION OPTIMA CON UNIDAD = UN AUTO



Las unidades son autos, observe que se obtiene el mismo costo:
 (costo por producir) + (costo por déficit) + (costo por reorden) =
 1938 + 25 + 18 = 1981.

Debido a que el problema de redes sin ganancia con costos cócavos, es un problema difícil en términos computacionales, es importante conocer para cada problema de ejemplo, tratado en este capítulo: la instancia del programa que lo formula, la instancia de la red asociada y el tiempo de ejecución del método de solución. Lo anterior se resume en la siguiente tabla.

PROBLEMA DE EJEMPLO	INSTANCIA DEL PROBLEMA		TIEMPO DE EJECUCION
	PROGRAMA	RED ASOCIADA	
LOCALIZACION DE POZOS	55 variables enteras no negativas 26 restricciones 5 costos fijos en la función objetivo	16 nodos 40 arcos 5 arcos con costo fijo	2.40 segundos
NIVELACION DE UN TERRENO	24 variables enteras no negativas 9 restricciones 12 costos fijos en la función objetivo	9 nodos 24 arcos 12 arcos con costo fijo	1.86 segundos
COMPANÍA HARINERA	39 variables enteras no negativas 50 restricciones 8 costos fijos en la función objetivo	23 nodos 39 arcos 8 arcos con costo fijo	2.60 segundos
PRODUCCION EN TIEMPO NORMAL Y POR SUBCONTRACION	18 variables enteras no negativas 23 restricciones 3 costos fijos en la función objetivo	8 nodos 21 arcos 3 arcos con costo fijo	1.74 segundos
PRODUCCION EN SERIE DE UN PRODUCTO	21 variables enteras no negativas 38 restricciones 12 costos fijos en la función objetivo	13 nodos 21 arcos 12 arcos con costo fijo	5.82 segundos
PLANTA ENSAMBLADORA DE AUTOS.	54 variables enteras no negativas 24 restricciones 12 costos fijos en la función objetivo	36 nodos 73 arcos 12 arcos con costo fijo	4.46 segundos

el método fué programado en language FORTRAN y los problemas corridos en una PC AUSTIN 386-SX.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

En este trabajo se han analizado los fundamentos teóricos, descripción e implementación de un método de solución del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos. Como consecuencia de este análisis, también se consideró la estructura teórica y descripción de los problemas flujo máximo y redes sin ganancia con costos lineales. El método fue programado en FORTRAN e implementado en PC.

La gran importancia del método radica en que existe una considerable variedad de problemas que presentan estructura de economía de escala, los cuales pueden ser modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos. Para los problemas de inventarios, con demanda determinística, horizonte finito y costos cóncavos, el método puede considerar capacidades tanto de producción, inventario como de reorden, tal consideración causa dificultades al ser resuelto por técnicas de programación dinámica.

Cuando el método, tiene dificultades para obtener la solución óptima de un problema con instancia grande, se puede encontrar primero una solución con un porcentaje elevado de error, luego utilizar dicha solución como inicial, reducir el error y obtener una mejor solución. Repitiendo lo anterior, se puede obtener una muy buena solución y quizás hasta la solución óptima.

Las posibles líneas de extensión, son las siguientes:

Cuando existen arcos paralelos que resultan del proceso de linealización, el método utiliza los arcos paralelos libres más costosos, por ser los más baratos en el problema relajado, produciendo muy malas cotas en cada iteración, posiblemente en estos casos, se puede mejorar dicha cota.

El problema de localización de pozos pone de manifiesto la necesidad de extender este trabajo al estudio del problema de redes con ganancia con costos cóncavos. El problema de la compañía harinera incluyendo la distribución del salvado, puede resolverse, considerando

una restricción adicional, de ahí, se deriva la importancia de extender este trabajo a problemas de redes con restricciones adicionales. Otra posible línea de extensión es a redes multiproducto.

En últimas fechas, las técnicas: recocido simulado y búsqueda tabú, han dado muy buenos resultados en algunos problemas de la clase NP-completa. Son técnicas recientes, que aún no se ha investigado, las formas más efectivas de implementación y el rango de problemas para los cuales son mejor adaptadas. Quizás alguna de estas técnicas pueda adaptarse, para resolver el problema de redes con costos cóncavos y con ello, lograr resolver instancias más grandes de este problema.

BIBLIOGRAFIA

- Ahuja Ravindra k., Magnanti Thomas L., and Orlin James B.
"Some Recent Advances in Network Flows"
Siam Review Vol. 33, No. 2, pg. 175-219, Jun. 1991
- Bazaraa M. , Jarvis J.
Programación lineal y flujo en redes
Limusa, 1986.
- Bennington G. E.
"Applying Network Analysis"
Industrial Engineering 6, pg. 17-25, Enero de 1974
- Dembo R.S., Mulvey J.M., Zenios S.A.
"Large-Scale Nonlinear Network Models and their Application"
Operational Research, Vol.37, No.3, pg 353-372, Mayo-Junio 1989.
- Dorsey Robert C., Hodgson Thom J. and Ratliff H. Donald
"A Production-Scheduling Problem with Batch Processing"
Operations Research 22, pg. 1271-1279, 1974.
- Farley Arthur M.
"Levelling Terrain Trees: A Transshipment problem"
Information Processing Letters,
Vol. 10, No.4,5, pg. 189-192, Jul. 1980
- Fletcher R.
Practical methods of optimization
John Wiley and Sons (1987)
- Ford L.D. and Fulkerson D.R.
"Maximal Flow Through a Network"
Canad. J. Math. # 8, pg. 399-404, 1956.
- Ford L.D. and Fulkerson D.R.
"A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows
and an Application to the Hitchcock Problem"
Canad. J. Math. # 9, pg. 210-218, 1957.
- Garey Michael and Johnson David
Computers and Intractability
A guide to the Theory of NP-Completeness
W. Freeman, San Francisco, 1979.

- Gallo G. and Sodini C.
"Concave Cost Minimization on Networks"
European Journal of Operational Research, No.3, pg. 239-249, 1979
- Gallo G., Sandi C. and Sodini C.
"An Algorithm for the Min Concave Cost Flow Problem"
European Journal of Operational Research, No.4, pg. 248-255, 1980
- Glover F.
"Tabu Search, Part I"
ORSA Journal on Computing 1:3, pg. 190-206, 1989.
- Gutiérrez Andrade Miguel Angel
"La técnica de recocido simulado y sus aplicaciones"
Tesis doctoral, DEPEFI-UNAM 1991.
- Hall K., Kearney T., Mellalieu P.
"Recent Advances in Network Optimization Methods and applications".
Pergamon Press, pg. 45-62, 1981.
- Jensen P.A., Barnes J.W.
Network Flow Programming
John Wiley and Sons, 1980.
- Johnson D.S., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.
The Complexity of the Network Desing Problem
Network, Vol.8, pg.279-285, 1978.
- Karp R.M.
"The Computational Complexity of Network Problems"
The Mathematics of Networks (Lecture Notes Prepared for the American Mathematical Society Short Course).
Edited by Stefan A. Burr, pg. 45-62, 1981.
- Kennington J.L. and Helgason R.V.
Algorithms for Network Programming
John Wiley and Sons, 1980.
- Minoux
"Network Synthesis and Optimum Network Desing Problems: Models, Solution Methods and applications".
Network, Vol.19, pg. 313-360, 1989

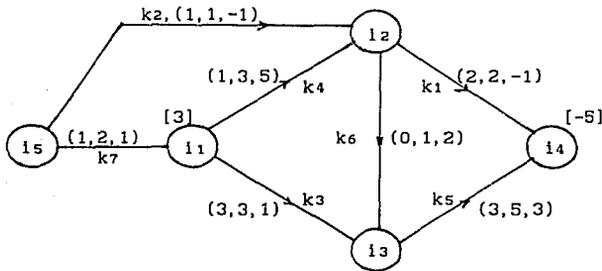
- Montgomery Douglas C.
Operations Research in Production Planning Scheduling,
and Inventory Control.
John-Wiley Sons, 1974.
- Nemhauser G.L. and Wolsey L.A.
Integer and Combinatorial Optimization
John Wiley and Sons, 1988.
- Parker R.G. and Radin R.L.
Discrete Optimization
Academic Press, Inc., 1988
- Rockafellar R.T.
Network Flows and Monotropic Optimization
John Wiley and Sons, 1984.
- Salah E. Elmaghraby
"Some Network Models in Management Science"
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems
Edit by M. Beckmann, pg. 80-94, 1970.
- Salkin H.M.
Integer Programming
Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- Soland Richard M.
"Optimal facility location with concave cost"
Operations Research 22, pg. 373-382, 1974.
- Swanson H., and R.E.D. Woolsey
"Using the Out-of-Kilter Algorithm"
Industrial Engineering 6, pg. 36-44, feb. 1974.
- Yao Frances.
"Maximum Flows in Networks"
The Mathematics of Networks (Lecture Notes Prepared for the
American Mathematical Society Short Course).
Edited by Stefan A. Burr, pg. 31-44, 1981.
- Zangwill Williard I
"Minimum concave cost flows in certain network"
Management Science, Vol. 14, No. 7, pg. 429-450, Marzo 1968.

APENDICE A) ESTRUCTURA DE DATOS

En este apéndice se describe la estructura de datos utilizada en los programas para representar una red. Esta representación, es de particular importancia ya que influye en el costo computacional del algoritmo.

En los programas implementados se utiliza la representación de arcos orientados, que consiste en una lista de nodos orígenes $O=[O_k]$ y una lista de nodos terminales $T=[T_k]$ de tal manera que el arco $k(O(k),T(k))$, los parámetros de los arcos son similarmente representados en las siguientes listas $f=[f_k]$, $C=[C_k]$, $C=[C_k]$ y $h=[h_k]$. El costo del espacio de memoria de esta representación es $(p+2)m$ palabras, donde p es el número de parámetros en los arcos (no están incluidos los parámetros de los nodos) y m el número de arcos.

Por ejemplo si (f_k, C_k, h_k) y $[b_i]$



es representada por las listas

arco k	1	2	3	4	5	6	7
O_k	2	5	1	1	3	2	5
T_k	4	2	3	2	4	3	1
f_k	2	1	3	1	3	0	1
C_k	2	1	3	3	5	1	2
h_k	-1	-1	1	5	3	2	1

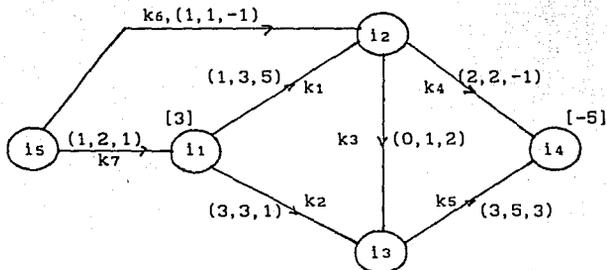
Para identificar M_{0i} =conjunto de arcos con origen i , primero se modifican los índices de los arcos de acuerdo al nodo origen en orden

creciente. Es decir

$$\text{si } 0(k_1) < 0(k_2) \Rightarrow k_1 < k_2$$

$$\text{si } 0(k_1) = 0(k_2) \Rightarrow \text{el orden de } k_1 \text{ y } k_2 \text{ es arbitrario.}$$

por ejemplo al reenumerar la anterior red se tiene.



luego se define la lista de punteros origen $Po = \{Po(i)\}$ que contiene el índice más chico de los arcos que se originan en i , pero si ningún arco se origina en $i \Rightarrow Po(i) = Po(i+1)$. Es decir

$$Po(1) = 1$$

$$Po(i) = k, \text{ tal que } 0(k) \geq 1, 0(k-1) < i; \forall 1 < i \leq n$$

$$Po(n+1) = m+1$$

donde n = número de nodos, m = número de arcos. El conjunto de arcos que se originan en i queda definido por:

$$Mo_i = \{k \mid Po(i) \leq k < Po(i+1)\}$$

$$\Rightarrow Mo_i = \emptyset \text{ si } Po(i) = Po(i+1).$$

La lista de punteros origen de la red anterior queda;

Nodo	1	2	3	4	5	6
Po	1	3	5	6	6	8

Analogamente para identificar Mt_i = conjunto de arcos con nodo terminal i , primero se crea una lista $Lt = \{Lt(i)\}$ de arcos ordenados de acuerdo al nodo terminal en orden creciente. Esto es, si k_w es el índice o orden del arco k_w en Lt se tiene que;

$$\text{si } T(k_w) < T(k_y) \Rightarrow k_w < k_y$$

$$\text{si } T(k_w) = T(k_y) \Rightarrow \text{el orden de } k_w \text{ y } k_y \text{ es arbitrario.}$$

luego se define la lista de punteros origen $Pr = \{Pr(i)\}$ donde el puntero $Pr(i)$ es el primer arco de la lista Lr que termina en i .

$$Pr(1) = 1$$

$$Pr(i) = k' \text{ tal que } T(Lr(k')) \geq i, T(Lr(k'-1)) < i; \forall i \leq n$$

$$Pr(n+1) = m+1$$

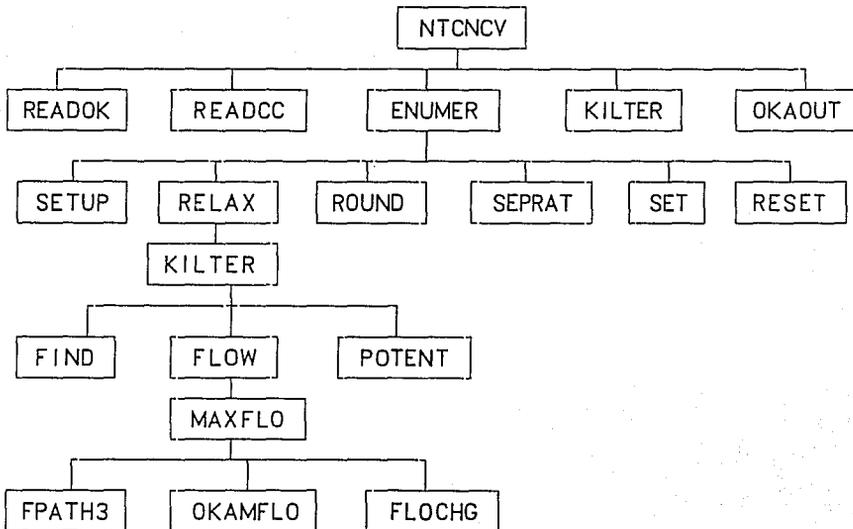
donde n = número de nodos, m = número de arcos. El conjunto de arcos que terminan en i queda definido por:

$$M_{Ti} = \{Lr(k') \mid Pr(1) \leq k' < Pr(i+1)\}$$

La lista de punteros terminal y la lista terminal auxiliar quedan:

k'	1	2	3	4	5	6	7
Lr	7	1	6	2	3	4	5
Nodo	1	2	3	4	5	6	-
Pr	1	2	4	6	8	8	-

APENDICE B) DIAGRAMA DE BLOQUES Y DESCRIPCION DE SUBROUTINAS



DESCRIPCION DE LAS SUBROUTINAS

ADOKA.- Función que determina el conjunto de arcos admisibles para formar trayectoria.

CONCAV.DAT Y CONCAV.SAL.- Archivos de datos de entrada y de salida respectivamente.

ENUMER.- Controla las operaciones en el proceso de enumeración implícita.

FIND.- Encuentra un arco K_0 con desviación (out-of-kilter), designa su nodo origen I_0 y su nodo terminal J_0 . La dirección del cambio de flujo es indicada por CH (+1 para incrementar, -1 para disminuir). La cantidad de cambio de flujo para llevar a K_0 a estado óptimo (in-kilter) es DF.

FLOCHG.- Cambia el flujo en la trayectoria (LISA). Para cada arco en la trayectoria: Si $k > 0$, incrementar por MF el flujo en el arco k. Si $k < 0$ disminuir por MF el flujo en el arco k.

FLOW.- Cambia los flujos en la red, de tal manera que el flujo en el arco K_0 pueda ser incrementado ó disminuido manteniendo la conservación de flujo en cada nodo.

FPTH3.- Encuentra una trayectoria usando el procedimiento de enrutamiento, los nodos alcanzados se indican en la lista S.

KILTER.- Dado un flujo que satisface la conservación de flujo y valores arbitrarios de la variables duales PI (II). Este procedimiento modifica flujos y variables duales para obtener una solución óptima. Si el problema es infactible la subrutina lo indica haciendo INFEAS=1.

MAXFLO.- Encuentra el flujo máximo en una red dado un flujo inicial factible, una cota superior VR para el valor del flujo, un nodo fuente SN y un nodo sumidero TN.

OKAMFLO.- Determina el cambio máximo de flujo en la trayectoria (LISA).

NTCNCV (PROGRAMA PRINCIPAL).- Resuelve el problema de redes sin ganancia con costos cóncavos lineales por pedazos.

OKAOUT.- Proporciona las características de la red transformada.

POTENT.- Calcula el mínimo valor de incremento de las variables duales $PI(1) \forall ieN/S$ el cual permite llevar a K_0 a estado óptimo (in-kilter) ó causa que algún otro arco se haga admisible.

READCC.- Lee los parámetros siguientes: EPS número muy pequeño usado como criterio para redondear a cero, BIG número muy grande valor inicial de la mejor solución , PER porcentaje de desviación aceptable del valor objetivo óptimo. Para cada arco con costo fijo se lee, KC índice del arco en la red original, HF costo fijo del arco KC y HV costo unitario del arco KC.

READOK.- Para los nodos lee el flujo externo fijo y el flujo externo de holgura, lee los parámetros de los arcos y crea una representación para la red.

RELAX.- Resuelve el problema relajado, calcula el vector X y el valor objetivo Z.

RESET.- Hace libres todas las variables en el nivel L y niveles superiores.

ROUND.- Redondea a enteros las variables fraccionales que aparecen en X obteniendo XR y calcula el valor objetivo ZR asociado.

SEPRAT.- Dada una solución relajada X, este procedimiento encuentra la variable libre j que da la mayor diferencia entre el costo cóncavo y el costo linealizado. Esta es llamada variable de separación, además se determina la dirección de separación.

SET.- Fija la variable j para el valor XJ en el nivel j.

SETUP.- Obtiene la aproximación lineal para el problema relajado y el conjunto de todas las variables libres.

APENDICE C) ALIMENTACION Y SALIDA DE DATOS

Los datos del programa NTCNCV son alimentados en el archivo CONCAV.DAT el cual cuenta con los siguientes registros:

1) Registro para el número de nodos.

Campo	Formato	Comentario
1-5	I5	número de nodos (N)

ii) Registros de los parámetros de los nodos

Campo	Formato	Comentario
1-5	I5	número del nodo (I)
6-15	F10.0	flujo externo fijo (BF)
16-25	F10.0	cota flujo externo de holgura (BS)
26-35	F10.0	costo flujo externo de holgura (CS)

terminan los parámetros de los nodos con un dato en blanco o un cero en el campo 1-5.

iii) Registros de los arcos

Campo	Formato	Comentario
1-5	I5	nodo inicial (I)
6-10	I5	nodo final (J)
11-20	F10.0	capacidad inferior (LOWER)
21-30	F10.0	capacidad superior (UPPER)
31-40	F10.0	costo unitario del flujo (COST)

terminan los parámetros de los arcos con un dato en blanco o un cero en el campo 1-5.

iv) Registro de parámetros

Campo	Formato	Comentario
1-10	F10.3	número muy chico usado como criterio para redondear a cero (EPS)
11-20	I10	número muy grande valor inicial de la mejor solución (BIG)
21-30	I10	porcentaje de desviación aceptable del objetivo óptimo (PER)

v) Registros de los arcos con costo fijo

Campo	Formato	Comentario
1-10	F10.0	índice del arco en la red original KC
11-20	F10.0	costo fijo del arco KC (HF)
21-30	F10.0	costo unitario del arco KC (HV)

El archivo de salida se llama CONCAV.SAL y consta de lo siguiente:

i) La representación de la red transformada.- La red original es transformada a otra red con conservación de flujo en todos los nodos y $b=0$, en este archivo se especifica:

- número de nodos
- número de arcos
- parámetros de los arcos
 - el índice del arco ARCO K
 - nodo origen $O(k)$
 - nodo terminal $T(k)$
 - capacidad superior $C(k)$
 - costo unitario de flujo $H(k)$

ii) Se da el flujo inicial factible en la siguiente forma:

- el índice del arco ARCO K
- nodo origen $O(k)$
- nodo terminal $T(k)$
- flujo (FLUJO).

iii) Se describe el proceso de enumeración, dando en cada estado el valor de Z, ZB, ZR, XB, L, punteros y otras variables que permiten describir el árbol de enumeración y además se indica cual fué la decisión, ramificar ó retroceder

iv) La solución óptima.- Se da la solución óptima en terminos de la red transformada:

para cada arco de la red se especifica:

- el índice del arco ARCO K
- nodo origen $O(k)$
- nodo terminal $T(k)$
- flujo óptimo (FLUJO)

finalmente se da el COSTO TOTAL.