

01172

2
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

ALGUNOS MODELOS NUMERICOS DE FLUJO
BIDIMENSIONAL NO PERMANENTE

TESIS DE GRADO
MAESTRIA EN APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
JAVIER OSNAYA ROMERO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MÉXICO D.F
DICIEMBRE 1991

1791



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES	3
2.1 Flujo en una dimensión	3
2.1.1 Ecuación de continuidad en una dimensión	3
2.1.2 Ecuación dinámica	5
2.2 Flujo en dos dimensiones	9
2.2.1 Ecuación de continuidad	9
2.2.2 Ecuación dinámica	11
3. MODELO MATEMÁTICO	17
3.1 Esquema numérico explícito con términos convectivos (versión conservativa)	18
3.1.1 Ecuación dinámica dirección x	19
3.1.2 Ecuación dinámica dirección y	19
3.1.3 Ecuación de continuidad	21
3.1.4 Condiciones de frontera	21
3.2 Esquema numérico explícito sin términos convectivos (versión conservativa)	23
3.2.1 Ecuaciones en diferencias finitas	24
3.3 Esquema numérico explícito de segundo	26
3.3.1 Condiciones de frontera	29
3.3.2 Procedimiento de cálculo	32
3.4 Esquema numérico implícito	33
3.4.1 Ecuación dinámica (dirección x)	33
3.4.2 Ecuación dinámica (dirección y)	37
3.4.3 Condiciones de frondea	39
4. APLICACIÓN DE LOS ESQUEMAS PROPUESTOS	41
5. CONCLUSIONES	50

RESUMEN

En este trabajo se plantean varias maneras de resolver las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre en dos dimensiones espaciales horizontales (x , y).

Se presenta un breve deducción de las ecuaciones que describen este flujo, tanto en una como en dos dimensiones; posteriormente se describen cuatro esquemas numéricos basados en diferencias finitas. El primero es explícito y toma en cuenta los términos convectivos, el segundo también explícito pero no considera la convección, un tercero implícito y por último, un esquema de segundo orden explícito.

Al final se incluyen varios ejemplos de flujo en dos dimensiones resueltos por los métodos propuestos y se hace un análisis de cada uno de ellos y se muestran algunas de sus ventajas y desventajas.

Finalmente se anotan algunas conclusiones y recomendaciones sobre cada uno de los esquemas discutidos en la tesis.

1. INTRODUCCIÓN

En numerosos problemas de ingeniería civil relacionados con hidráulica se requiere del análisis del flujo no permanente a superficie libre en una dimensión. La mayoría de ellos se hacen a partir de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales que representan el flujo. Cuando el escurrimiento se lleva a cabo en cauces en los cuales la sección transversal es amplia y con cambios en la distancia, se presentan velocidades en tres dimensiones, con lo que la solución de las ecuaciones diferenciales es más difícil, por lo que para algunos casos en los que la variación de la velocidad en la vertical es pequeña, conviene despreciarla y utilizar ecuaciones en que las literales se plantean en dos dimensiones espaciales horizontales (x-y).

En este trabajo se presentan cuatro esquemas numéricos para conocer el flujo que tiene lugar en un plano horizontal como pueden ser lagunas someras, marinas, esteros, etc.

En el segundo capítulo se presenta una breve deducción de las ecuaciones diferenciales para flujo no permanente a superficie libre para una y dos dimensiones

En el tercer capítulo se describen cuatro esquemas numéricos para resolver las ecuaciones dinámica y de continuidad para flujo no permanente a superficie libre.

El primer esquema es explícito y maneja las ecuaciones dinámica y de continuidad en su versión conservativa considerando los términos convectivos. El segundo esquema es similar al primero con la diferencia de que no toma en cuenta los términos convectivos, el tercero esta basado en el planteamiento Lax-Wendroff que es de segundo orden y el último esquema resuelve las ecuaciones en forma simultánea.

En el capítulo cuatro se presentan algunos ejemplos en los que se aplican los esquemas descritos en el 3.

Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones y recomendaciones.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

2.1 Flujo en una dimensión

2.1.1 Ecuación de continuidad en una dimensión

La ecuación de continuidad establece que el cambio de masa en el tiempo dentro de un volumen de control es igual al flujo de masa que entra menos el que sale más el cambio en el almacenamiento en dicho volumen.

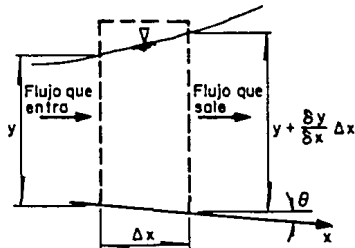


Fig 2.1 Volumen de control para la ecuación de continuidad en una dimensión

Con referencia a la fig 2.1 se tiene que el flujo de masa que entra al volumen de control es

$$\frac{\gamma}{g} Av$$

y el flujo de masa que sale del volumen de control se expresa como

$$\frac{\gamma}{g} \left[A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \left[v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right]$$

por lo que el cambio neto del flujo de masa es

$$\frac{\gamma}{g} Av - \frac{\gamma}{g} \left[A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right] \left[v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right]$$

que también se puede expresar como

$$\frac{\gamma}{g} Av - \frac{\gamma}{g} \left[Av + \frac{v\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{A\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right]$$

despreciando los términos de segundo orden se tiene el cambio neto del flujo de masa

$$- \frac{\gamma}{g} \left[\frac{v\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{A\partial v}{\partial x} \Delta x \right]$$

Considerando que el incremento de masa por unidad de tiempo en el volumen de control es

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x$$

De modo que la ecuación de continuidad se expresa como

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x = - \frac{\gamma}{g} \left[\frac{v\partial A}{\partial x} \Delta x + \frac{A\partial v}{\partial x} \Delta x \right] \quad (2.1)$$

multiplicando la expresión anterior por $g/\gamma\Delta x$ e igualando a cero se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v\partial A}{\partial x} + \frac{A\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Por otra parte si se considera un canal, en el cual no cambia la pendiente ni la forma de la sección transversal (canal prismático) y además el área de la sección transversal (A) es función del tirante, las derivadas de A pueden escribirse de la manera siguiente

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = B \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = B \frac{\partial y}{\partial t}$$

sustituyendo las ec 2.3 en la 2.2 se tiene

$$B \frac{\partial y}{\partial t} + vB \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

si se divide entre B se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A\partial v}{\partial x} + \frac{B\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Por otro parte considerando que $Q = vA$, resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{v\partial A}{\partial x} + \frac{A\partial v}{\partial x} \quad (2.6)$$

tomando en cuenta la ec 2.3 en la 2.6 se encuentra

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = B \frac{v\partial y}{\partial x} + \frac{A\partial v}{\partial x} \quad (2.7)$$

Despejando $B \frac{\partial y}{\partial t}$ de la ec 2.4 e igualando con la 2.7 se tiene

$$B \frac{\partial y}{\partial t} = -vB \frac{\partial y}{\partial x} - A \frac{\partial v}{\partial x}$$

por lo que la ec 2.7 se escribe como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

Esta última ecuación se le conoce como de continuidad.

2.1.2 Ecuación dinámica

La conservación de la cantidad de movimiento establece que la cantidad de movimiento que entra a un volumen de control menos la que sale, más la suma de las fuerzas externas que actúan en el mismo es igual al cambio en la cantidad de movimiento dentro del volumen.

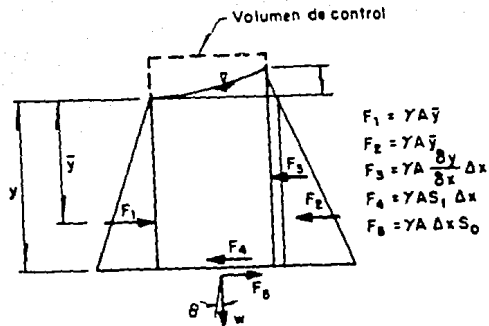


Fig 2.2 Volumen de control para la ecuación de cantidad de movimiento en una dimensión

Para determinar la ecuación dinámica se deben considerar las fuerzas que actúan en un volumen de control, en la fig 2.2, están representadas estas, que son representadas como

$$F_1 = F_2 = \gamma A \bar{y} \quad (2.9)$$

$$F_3 = \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x \quad (2.10)$$

$$F_4 = \gamma A \Delta x S_f \quad (2.11)$$

F_1 y F_2 son las fuerzas de presión que actúan sobre las caras del volumen de control, F_3 es el incremento de la fuerza de presión debida al cambio del tirante, F_4 es la fuerza debida a la fricción, F_5 es el componente del peso del volumen de control en la dirección del eje x y S_f es la pendiente de la línea de energía.

La pendiente S_f puede ser estimada usando la fórmula de Chezy o Manning, aplicable a flujo uniforme, además si la pendiente del canal (θ), (fig 2.1), es muy pequeña entonces $\sin \theta = \theta = \tan \theta = S_0$, S_0 se designa como la pendiente de fondo, por lo que se puede expresar a F_5 como

$$F_5 = \gamma A \Delta x S_0 \quad (2.12)$$

Ahora la acción de la resultante de las fuerzas que actúan en el volumen de control se consideran en la dirección positiva del eje x, que coincide con la dirección del flujo

$$\Sigma F = F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + F_5 \quad (2.13)$$

sustituyendo las ecs 2.9 a 2.12 en la 2.13 se tiene

$$F = \gamma A \bar{y} - \gamma A \bar{y} - \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x - \gamma A S_f \Delta x + \gamma A \Delta x S_0$$

$$F = - \frac{\gamma A \partial y}{\partial x} + \gamma A \Delta x S_0 - \gamma A S_f \Delta x \quad (2.14)$$

si se considera que la cantidad de movimiento que entra al volumen de control es

$$M_E = \frac{\gamma}{g} A v^2 \quad (2.15)$$

y la que sale

$$M_s = \frac{\gamma}{g} \left[A v^2 + \frac{\partial}{\partial x} (A v^2) \Delta x \right] \quad (2.16)$$

Por lo tanto el cambio total del flujo de cantidad de movimiento dentro del volumen de control sería

$$M_E - M_s = M_N$$

$$M_N = \frac{\gamma}{g} A v^2 - \frac{\gamma}{g} A v^2 - \frac{\partial}{\partial x} (A v^2) \Delta x$$

$$M_N = - \frac{\partial}{\partial x} (A v^2) \Delta x \quad (2.17)$$

El cambio de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo esta dado como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma}{g} A v \Delta x \right] \quad (2.18)$$

La conservación de cantidad de movimiento puede ser expresada como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma}{g} A v \Delta x \right] = - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial x} (A v^2) \Delta x - \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \gamma A S_0 \Delta x - \gamma A S_f \Delta x \quad (2.19)$$

Multiplicando la ec 2.19 por g/γΔx se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma}{g} Av \Delta x \right) \frac{g}{\gamma \Delta x} = - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (Av^2) - \frac{\gamma}{g} \frac{g}{\Delta x} A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{\gamma}{g} \frac{g}{\Delta x} A S_o \Delta x -$$

$$- \frac{\gamma g}{\gamma \Delta x} AS_f \Delta x$$

reduciendo términos queda

$$\frac{\partial}{\partial t} (Av) + \frac{\partial}{\partial x} Av^2 + g \frac{A \partial y}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (2.20)$$

Desarrollando las derivadas que aparecen en esta ecuación se expresa como

$$\frac{A \partial v}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial t} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2Av \frac{\partial v}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (2.21)$$

Dividiendo entre A

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v^2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g (S_o - S_f) \quad (2.22)$$

agrupando términos la ec 2.22 se puede reducir a

$$g \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} \right) = g A (S_o - S_f) \quad (2.23)$$

Si se considera la ec 2.2 en la 2.23, entonces el término entre paréntesis es cero, por lo que la ec 2.23 queda como

$$g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = g (S_o - S_f) \quad (2.24)$$

Si se desea, la ec 2.24 puede ser expresada en términos de Q = vA por lo que a partir de la ec 2.20 se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + 2vA \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (2.25)$$

agrupando términos se tiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(1 + \frac{v^2 B}{gA} \right) gA \frac{\partial y}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (2.27)$$

Las ecs 2.8 y 2.27 son conocidas como ecuaciones de Saint-Venant para flujo no permanente en una dimensión.

2.2 Flujo en dos dimensiones

2.2.1 Ecuación de continuidad

De igual manera, que para el caso de una dimensión el flujo de masa que entra en la dirección x, a un volumen de control, ver fig 2.3, esta dado por

$$\Delta x \left(h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (2.28)$$

y el de salida será

$$\Delta y \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (2.29)$$

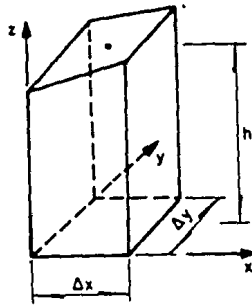


Fig 2.3 Volumen de control para la ecuación de continuidad en dos dimensiones

Para la dirección y sucede algo similar por lo que el flujo de entrada es

$$\Delta x \left(h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (2.30)$$

y el que sale se obtiene con la expresión siguiente

$$\Delta x \left(h + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (2.31)$$

Por otra parte el cambio total de almacenamiento en el tiempo en un volumen de control se expresa como

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.32)$$

Si se considera que el cambio total del almacenamiento en el tiempo es igual al flujo que entra al volumen de control tanto en la dirección x como en la y menos el flujo que sale también en ambas direcciones lo anterior se puede expresar con base en las ecs 2.29 a 2.32 de la manera siguiente.

$$\begin{aligned} & \Delta y \left(h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \Delta y \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) + \\ & \Delta x \left(h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) - \Delta x \left(h + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) = \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Después de multiplicar términos y despreciar los de segundo orden la ec 2.33 se puede expresar como

$$\begin{aligned} & - \Delta y h \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta x}{2} - \Delta y u \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \Delta y h \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \Delta y u \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - \Delta x h \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - \Delta x v \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\ & - \Delta x h \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - \Delta x v \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} = \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Multiplicando por $\frac{1}{\Delta x \Delta y}$ y agrupando nuevamente términos se tiene

$$- h \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.35)$$

o bien

$$- \frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.36)$$

Cualquiera de las dos expresiones anteriores es conocida como la ecuación de continuidad para flujo en dos dimensiones

2.2.2 Ecuación dinámica

En la determinación la ecuación dinámica se deben considerar las fuerzas que actúan en el volumen de control, ver fig 2.4, en las direcciones (x y y). Las fuerzas a considerar son la presión, el peso y la fricción, así como el flujo de cantidad de movimiento.

La distribución de la presión se considera hidrostática de tal forma que las fuerza debida a la presión se pueden expresar como

Para la dirección x, la fuerza de entrada es

$$\frac{\gamma}{2} \left[h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \quad (2.37)$$

y la que actúa a la salida como

$$\frac{\gamma}{2} \left[h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \quad (2.38)$$

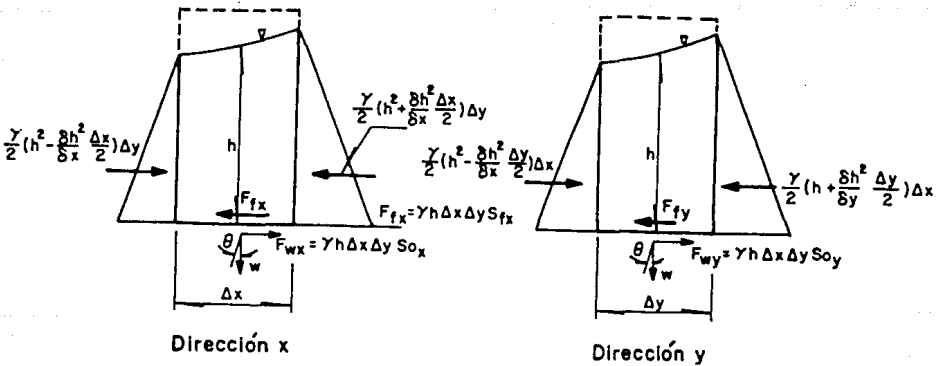


Fig 2.4 Volumen de control para la ecuación de cantidad de movimiento en dos dimensiones

El cambio de presión en la dirección x será

$$P_{Nx} = \frac{\gamma}{2} \left[\left(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y - \left(h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \right] \quad (2.39)$$

$$P_{NX} = - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (2.40)$$

Para la dirección y

$$P_{NY} = \frac{\gamma}{2} \left[\left[h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x - \left[h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \right] \quad (2.41)$$

$$P_{NY} = - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (2.42)$$

La fuerza debida al peso se expresa para la dirección x como

$$F_{WX} = \gamma h \Delta x \Delta y \text{ sen } \theta \quad (2.43)$$

si la pendiente del canal (θ), es pequeña tal que $\text{sen } \theta = \tan \theta \cong S_o$, S_o es la pendiente del fondo del canal, la ec 2.43 se puede expresar como

$$F_{WX} = \gamma h \Delta x \Delta y S_{ox} \quad (2.44)$$

de manera similar para la dirección y se cumple que

$$F_{WY} = \gamma h \Delta x \Delta y S_{oy} \quad (2.45)$$

Para considerar la fuerza de fricción se procede de manera similar a la del peso por lo que para la dirección x se dispone de

$$F_{fx} = \gamma h \Delta x \Delta y S_{fx} \quad (2.46)$$

y en la dirección y se tiene

$$F_{fy} = \gamma h \Delta x \Delta y S_{fy} \quad (2.47)$$

Para la consideración de la cantidad de movimiento en ambas direcciones (x, y) se hace de manera similar a flujo unidimensional con la variante de que ahora se considera también a la cantidad de movimiento que actúa en la dirección y cuando se analiza la dirección x y a la correspondiente en x cuando se analiza la dirección y. Por lo que se puede expresar como

Para la dirección x

Cantidad de movimiento que entra

$$M_{EX} = \frac{\gamma}{g} \left[u(uh) + \frac{\partial}{\partial x} [u(uh)] \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y + \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) \Delta x - \frac{\partial}{g} \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \quad (2.48)$$

la que sale es igual a

$$M_{SX} = \frac{\gamma}{g} \left[u(uh) + \frac{\partial}{\partial x} [u(uh)] \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y + \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) + \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta x \quad (2.49)$$

por lo que la cantidad de movimiento neta será

$$M_{NX} = M_{EX} - M_{SX} \quad (2.50)$$

Sustituyendo las ecs 2.48 y 2.49 en la 2.50 se tiene

$$M_{NX} = \frac{\gamma}{g} u(uh) \Delta y - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta x}{2} \Delta y + \frac{\gamma}{g} v(uh) \Delta x - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta y}{2} \Delta x \quad (2.51)$$

$$M_{NX} = - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} [u(uh)] \Delta x \Delta y - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \Delta y \quad (2.52)$$

Para la dirección y

La cantidad de movimiento que entra es

$$M_{EY} = \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) - \frac{\partial}{\partial x} [v(uh)] \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y + \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) - \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \quad (2.53)$$

La cantidad de movimiento que sale

$$M_{SY} = \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) + \frac{\partial}{\partial x} [v(uh)] \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y + \frac{\gamma}{g} \left[v(uh) + \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \frac{\Delta y}{2} \right] \Delta y \quad (2.54)$$

Por lo que el cambio en la cantidad de movimiento es

$$M_{NY} = M_{EY} - M_{SY} \quad (2.55)$$

Sustituyendo las ecs 2.53 y 2.54 en la 2.55 y de manera similar a la dirección x, se tiene

$$M_{NY} = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial x} v(uh) \Delta x \Delta y - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} v(vh) \Delta y \Delta x \quad (2.56)$$

Por otra parte el cambio de momento respecto al tiempo esta dado como

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial t} (uh) \Delta x \Delta y + \frac{\gamma}{g} (vh) \Delta x \Delta y \quad (2.57)$$

La conservación de cantidad de movimiento es igual al cambio total de cantidad de movimiento más la suma de fuerzas externas que actúan en el volumen de control, de tal manera que para cada dirección se tiene

dirección x

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial t} (uh) \Delta x \Delta y = & -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial x} [u(uh)] \Delta x \Delta y - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial}{\partial y} [v(uh)] \Delta y \Delta x - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \Delta x \Delta y + \\ & + \gamma h \Delta x \Delta y S_{ox} - \gamma h \Delta x \Delta y S_{fx} \end{aligned} \quad (2.58)$$

dividiendo la ec 2.58 por $\Delta x \Delta y$ y $\frac{1}{g}$

$$\frac{\partial}{\partial t} uh = -\frac{\partial}{\partial x} u(uh) - \frac{\partial}{\partial y} (vuh) - \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + gh S_{ox} - gh S_{fx}$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial t} uh + \frac{\partial}{\partial x} u(uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vuh) + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = gh (S_{ox} - S_{fx}) \quad (2.59)$$

Procediendo de manera análoga para la dirección y, se obtiene la expresión siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t} vh + \frac{\partial}{\partial x} v(uh) + \frac{\partial}{\partial y} v(vh) + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} = gh (S_{oy} - S_{fy}) \quad (2.60)$$

La ec 2.36 es la conocida como ecuación de conservación de la masa o continuidad, y las ecs 2.59 y 2.60 son llamadas ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento. Las tres ecuaciones aparecen escritas en la llamada versión conservativa. Estas ecuaciones describen el flujo no permanente a superficie libre en dos dimensiones.

En las ecs 2.59 y 2.60 también se pueden considerar los efectos de viento, así como el de la fuerza de Coriolis.

Para el efecto de viento se considera que este actua en la dirección del flujo y sobre la superficie del agua por lo que se produce un esfuerzo que generalmente de expresa como

$$\tau_s = \rho_a f_s^2 |v_s^2| v_s \quad (2.61)$$

donde ρ_a es la densidad del aire, v_s la velocidad del viento a 10 m medidos sobre el nivel medio del agua y f_s^2 es el coeficiente de fricción correspondiente a v_s , con respecto a este último termino se han realizado varias investigaciones cuyos resultados son presentados en la fig 2.5, todos ellos son para una velocidad estimada a 10 m sobre el nivel del agua, con un valor estándar de ρ_a para una temperatura de 15°C de $0.125 \text{ kg s}^2/\text{m}^4$.

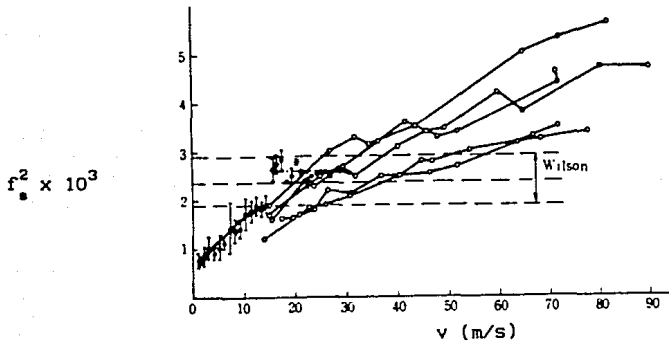


Fig 2.5 Correlación entre f_s^2 y la velocidad del viento v a 10 m sobre el nivel del agua

Para considerar la fuerza por viento en la ecs 2.59 y 2.60 se expresa el vector velocidad en términos de sus componentes por lo cual

en la dirección x

$$\tau_{sx} = \rho_a f_{sx}^2 |u_s^2| u_s \quad (2.62)$$

para la dirección y

$$\tau_{sy} = \rho_a f_{sy}^2 |v_s^2| v_s \quad (2.63)$$

El efecto de la fuerza de Coriolis se expresa como

$$F_c = v f_c \quad (2.64)$$

siendo

$$f_c = 2\omega \sin \varphi \quad (2.65)$$

donde v es la velocidad del flujo, ω es la velocidad angular de la tierra y φ es la latitud del sitio en estudio, de manera similar que para el viento se considera un termino para cada dirección de la manera siguiente

dirección x

$$-f_c v \quad (2.66)$$

dirección y

$$f_c u \quad (2.67)$$

Considerando las fuerzas anteriores las ecs 2.59 y 2.60 se escriben como

dirección x

$$\frac{\partial}{\partial t} uh + \frac{\partial}{\partial x} u(uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vuh) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h^2}{\partial x} + \tau_{sx} - f_c v = gh (S_{ox} - S_{fx}) \quad (2.68)$$

dirección y

$$\frac{\partial}{\partial t} vh + \frac{\partial}{\partial x} v(uh) + \frac{\partial}{\partial y} v(vh) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial h^2}{\partial y} + \tau_{sy} + f_c u = gh (S_{oy} - S_{fy}) \quad (2.69)$$

3. MODELO MATEMATICO

En el cap 2 se ha hecho ver que el flujo a superficie libre en una dimensión es representado matemáticamente por las ecuaciones de Saint-Venant (ecs 2.5 y 2.24); las cuales puede ser resueltas en forma aproximada a través de métodos numéricos, entre los que se encuentran el de las características, los procedimientos en diferencias finitas, o los de elemento finito.

Si el flujo se lleva a cabo en cauces no rectos, o con cambios en la sección transversal, ó bién en una laguna, se debe considerar un flujo en tres dimensiones espaciales. Sin embargo, como se incrementa la dificultad de cálculo y a que es posible considerar en el sentido vertical que no se presenta un cambio importante en la aceleración y que existe una distribución de presiones hidrostática, con lo que es posible utilizar un promedio de los componentes de la velocidad en la vertical, esto simplifica el análisis hidrodinámico y se puede considerar como un flujo en dos dimensiones espaciales horizontales (x, y).

Mediante la simulación matemática del flujo en dos dimensiones se obtienen velocidades y tirantes, con lo que se pueden determinar las corrientes dentro de una laguna y así conocer de su comportamiento hidrodinámico que es muy útil para distintas aplicaciones de ingeniería.

Lo anterior, por ejemplo, puede ser utilizado en el análisis del flujo en lagunas ya que ayuda a conocer las velocidades y tirantes antes y después de la construcción de alguna obra, patrones de flujo para distintas condiciones de operación y determinar como se afecta la hidráulica de la laguna si se cambian sus ingresos, egresos, etc.

Las ecuaciones que representan el flujo en dos dimensiones se pueden resolver por diferentes métodos, cuando son de diferencias finitas estos pueden ser explícitos o implícitos. Además, las ecuaciones del modelo pueden estar en su forma conservativa o no, a continuación se describen algunos modelos en los que utiliza la versión conservativa.

3.1 Esquema numérico explícito con términos convectivos (versión conservativa)

Las expresiones para flujo en dos dimensiones horizontales (x, y), ver ecs 2.36, 2.59 y 2.60, se pueden expresar como

$$\frac{\partial uh}{\partial t} = - \frac{\partial u^2 h}{\partial x} - \frac{\partial uvh}{\partial y} - \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial vh}{\partial t} = - \frac{\partial uvh}{\partial x} - \frac{\partial v^2 h}{\partial y} - \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} + gh(S_{oy} - S_{fy}) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y} \quad (3.3)$$

donde se considera

$$S_{ox} = - \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$S_{oy} = - \frac{\partial z}{\partial y} \quad (3.5)$$

además

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3.6)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3.7)$$

En las ecs 3.1 a 3.3 las variables son uh, vh y h, las cuales se necesitan conocer en diferentes posiciones de la zona en estudio. Para obtenerlas se propone resolver las ecuaciones anteriores mediante un procedimiento en diferencias finitas de la manera siguiente

3.1.1 Ecuación dinámica en la dirección x

Considerando la fig 3.1, la ec 3.1 en diferencias finitas se puede escribir como

$$\frac{(uh)_{i-1/2,j}^{p+1} - (uh)_{i-1/2,j}^p}{\Delta t} = - \frac{(u^2h)_{i+1/2,j}^p - (u^2h)_{i-3/2,j}^p}{2\Delta x} - \frac{(\bar{v}uh)_{i-1/2,j+1}^p - (\bar{v}uh)_{i-1/2,j-1}^p}{2\Delta y} - \frac{g}{2} \frac{(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i-1,j}^p)^2}{\Delta x} + g(h_x^p)_{i-1/2,j} (S_{xx} - S_{fx})_{i-1/2,j}^p \quad (3.8)$$

despejando $uh_{i-1/2,j}^{p+1}$ de la ec 3.8 se tiene

$$uh_{i-1/2,j}^{p+1} = uh_{i-1/2,j}^p - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(u^2h)_{i+1/2,j}^p - (u^2h)_{i-3/2,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[(\bar{v}uh)_{i-1/2,j+1}^p - (\bar{v}uh)_{i-1/2,j-1}^p \right] - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \left[(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i-1,j}^p)^2 \right] + g(h_x^p)_{i-1/2,j} (S_{ox} - S_{fx})_{i-1/2,j}^p \quad (3.9)$$

En las ecuaciones anteriores S_{ox} y S_{fx} se calculan de acuerdo con las ecs 3.4 y 3.6, respectivamente; h_x y \bar{v} son valores que se estiman en los puntos de cálculo, debido a que no son conocidos en ellos, de la manera siguiente

$$(h_x^p)_{i-1/2,j} = \frac{1}{2} (h_{i,j}^p + h_{i-1,j}^p) \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_{i/2,j}^p = \frac{1}{4} (v_{i,j-1/2}^p + v_{i,j+1/2}^p + v_{i-1,j+1/2}^p + v_{i-1,j-1/2}^p) \quad (3.11)$$

3.1.2 Ecuación dinámica en la dirección y

De manera análoga para la dirección y se plantea

$$\frac{(vh)_{i,j-1/2}^{p+1} - (vh)_{i,j-1/2}^p}{\Delta t} = - \frac{(\bar{u}vh)_{i+1,j-1/2}^p - (\bar{u}vh)_{i-1,j-1/2}^p}{2\Delta x} - \frac{(v^2h)_{i,j+1/2}^p - (v^2h)_{i,j-3/2}^p}{2\Delta y} - \frac{g}{2} \frac{(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i,j-1}^p)^2}{\Delta y}$$

$$+ g(h_y^P)_{1,j-1/2} (S_{oy} - S_{fy})_{1,j-1/2}^P \quad (3.12)$$

despejando a $vh_{1,j-1/2}^{P+1}$ de la ec 3.12 se tiene

$$\begin{aligned} vh_{1,j-1/2}^{P+1} &= vh_{1,j-1/2}^P - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[(v^2 h)_{1,j+1/2}^P - (v^2 h)_{1,j-3/2}^P \right] \\ &- \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(\bar{u}vh)_{1+1,j-1/2}^P - (\bar{u}vh)_{1-1,j-1/2}^P \right] - \frac{g\Delta t}{2\Delta y} \left[(h_{1,j}^P)^2 - (h_{1,j-1}^P)^2 \right] \\ &+ g(h_y^P)_{1,j-1/2} (S_{oy} - S_{fy})_{1,j-1/2}^P \end{aligned} \quad (3.13)$$

en la expresión anterior S_{oy} y S_{fy} se calculan con las ec 3.5 y 3.7, respectivamente, y h_y y \bar{u} son estimadas de manera similar a las del inciso anterior

$$(h_y^P)_{1,j-1/2} = \frac{1}{2} (h_{1,j}^P + h_{1,j-1}^P) \quad (3.14)$$

$$\bar{u}_{1,j-1/2}^P = \frac{1}{4} (u_{1+1/2,j}^P + u_{1+1/2,j-1}^P + u_{1-1/2,j-1}^P + u_{1-1/2,j}^P) \quad (3.15)$$

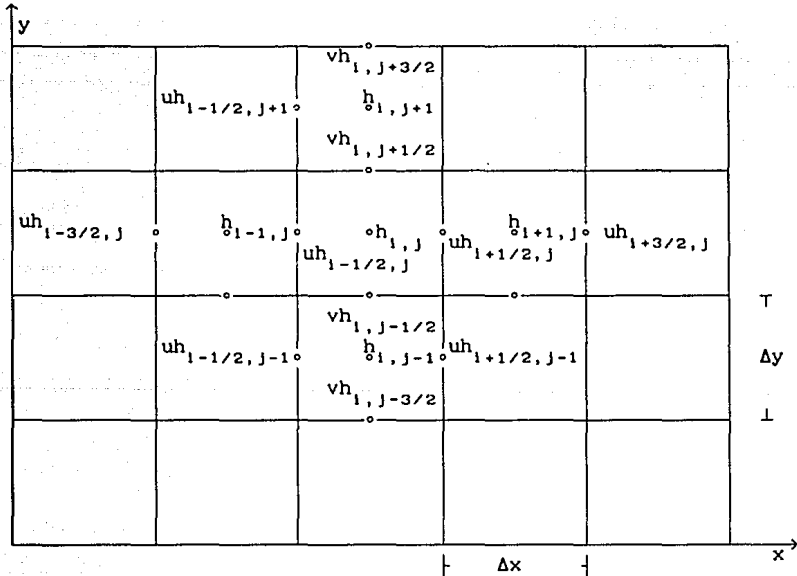


Fig 3.1 Posiciones de las variables en la malla

3.1.3 Ecuación de continuidad

La ec 3.3 se puede escribir en diferencias finitas de la manera siguiente

$$\frac{h_{i,j}^{p+1} - h_{i,j}^p}{\Delta t} = - \left[\frac{(uh)_{i+1/2,j}^p - (uh)_{i-1/2,j}^p}{\Delta x} \right] - \left[\frac{(vh)_{i,j+1/2}^p - (vh)_{i,j-1/2}^p}{\Delta y} \right] \quad (3.16)$$

Con las ecuaciones 3.9, 3.13 y 3.16 es posible conocer los valores de las variables uh , vh y h en el intervalo de tiempo siguiente ($p+1$); además, si se necesitaran conocer las velocidades u o v , tan solo será necesario dividirla entre su correspondiente tirante (h).

3.1.4 Condiciones de frontera

En este tipo de esquemas como ya se habrá observado las variables no se localizan en los mismos puntos, esto tiene la ventaja de que cuando se trata de un frontera, solo será necesario proporcionar el tirante final (h_f) y si además se considera que el flujo en la salida es perpendicular a la frontera uno de los componentes de velocidad es nulo.

En los puntos frontera donde existe un ingreso de flujo, solo será necesario proporcionar el gasto de ingreso uh ó vh en el sitio adecuado, así como considerar que el flujo es perpendicular a la frontera ya que el dato en este sitio unicamente es utilizado para realizar el cálculo de la variable uh ó vh en el siguiente intervalo. Cuando se trate de una salida debe conocerse el tirante en (h_f), en este caso el cálculo de la variable en la frontera es un poco más complicado así, por ejemplo, si se considera una salida, en el punto $i, j+1/2$ de la fig 3.2 .

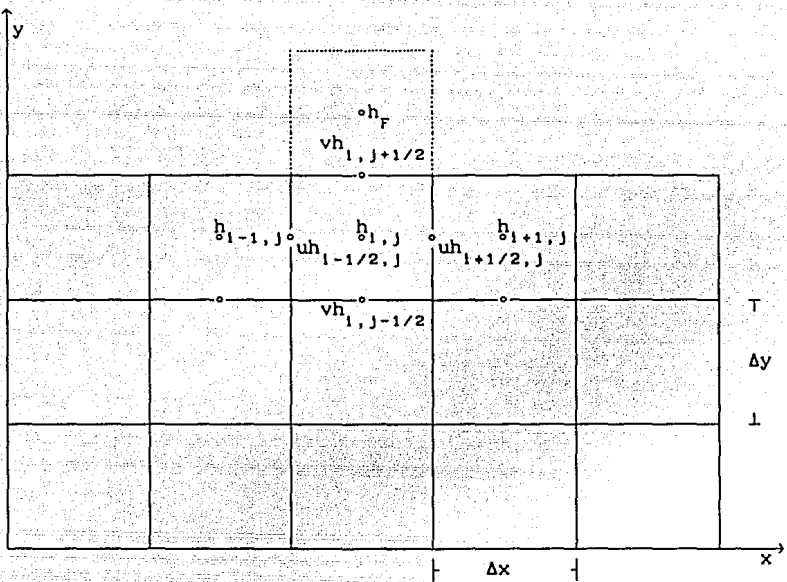


Fig 3.2 Puntos en la frontera

Para poder estimar el gasto en la salida (vh) , con la ec 3.13, es necesario considerar un volumen de control como el que se muestra con línea punteada, ver fig 3.2, además en este punto se conoce el tirante (h_f) , y al considerar que el flujo es perpendicular a la frontera la velocidad horizontal $u = 0$, esto simplifica el cálculo, si se toma una diferencia descentrada en vez de una central. La ecuación para el cálculo de esa frontera queda de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{(vh)_{i,j+1/2}^{p+1} - (vh)_{i,j+1/2}^p}{\Delta t} &= - \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2}^p - (uv)_{i-1/2,j}^p}{2\Delta x} - \\
 &\frac{(v^2h)_{i,j+1/2}^p - (v^2h)_{i,j-1/2}^p}{\Delta y} - \frac{g}{2} \frac{(h_{i,j+1}^p)^2 - (h_{i,j}^p)^2}{\Delta y} \\
 &+ g(h_y^p)_{i,j} (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

si $u = 0$ y despejando $vh_{i,j+1/2}^{p+1}$ de la ec 3.17 se tiene

$$vh_{i,j+1/2}^{p+1} = vh_{i,j+1/2}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(v^2h)_{i,j+1/2}^p - (v^2h)_{i,j-1/2}^p \right] -$$

$$- \frac{g\Delta t}{2\Delta y} \left[(h_{1,j+1}^p)^2 - (h_{1,j}^p)^2 \right] + g(h_y^p)_{1,j+1/2} (S_{oy} - S_{fy})_{1,j+1/2}^p \quad (3.18)$$

donde h_y , S_y y S_{fy} se obtienen de la misma forma que para la ec 3.13 y $h_{1,j+1} = h_f$, ver fig 3.2.

En el caso de que la salida se localice en un punto donde la variable a obtener sea uh se seguirá un procedimiento similar al descrito anteriormente.

Los subíndices i, j representan la posición de las variables en la malla los subíndices medios indican la posición al centro del intervalo, el subíndice x ó y es la posición de la variable en el sentido x ó y .

3.2 Esquema numérico explícito sin términos convectivos (versión conservativa)

Cuando los cambios de velocidad son relativamente pequeños, flujo casi uniforme, conviene tomar ventaja de ello y simplificar las ecuaciones de flujo en dos dimensiones, ecs 2.36, 2.59 y 2.60. Así, al no considerar los términos convectivos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2 h}{\partial x} &= 0 ; & \frac{\partial uvh}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v^2 h}{\partial y} &= 0 ; & \frac{\partial uvh}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

las ecs 3.1 a 3.3 se escriben de la manera siguiente

$$\frac{\partial uh}{\partial t} = -\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial vh}{\partial t} = -\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} + gh(S_{oy} - S_{fy}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial uh}{\partial x} - \frac{\partial vh}{\partial y} \quad (3.21)$$

La manera de resolver las ecuaciones anteriores será utilizando un esquema similar al presentado en el inciso 3.1

3.2.1 Ecuaciones en diferencias finitas

• Ecuación dinámica dirección x

Para una malla igual a la de la fig 3.1, la ec 3.19 se puede escribir en diferencias finitas como

$$\frac{(uh)_{i-1/2,j}^{p+1} - (uh)_{i-1/2,j}^p}{\Delta t} = -\frac{g}{2} \frac{(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i-1,j}^p)^2}{\Delta x} + g(h_x^p)_{i-1/2,j} (S_{ox} - S_{fx})_{i-1/2,j}^p \quad (3.22)$$

despejando $uh_{i-1/2,j}^{p+1}$ se llega a

$$(uh)_{i-1/2,j}^{p+1} = (uh)_{i-1/2,j}^p - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \left[(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i-1,j}^p)^2 \right] + g(h_x^p)_{i-1/2,j} (S_{ox} - S_{fx})_{i-1/2,j}^p \quad (3.23)$$

• Ecuación dinámica dirección y

$$\frac{(vh)_{i,j-1/2}^{p+1} - (vh)_{i,j-1/2}^p}{\Delta t} = -\frac{g}{2} \frac{(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i,j-1}^p)^2}{\Delta y} + g(h_x^p)_{i,j-1/2} (S_{oy} - S_{fy})_{i,j-1/2}^p \quad (3.24)$$

despejando $vh_{i,j-1/2}^{p+1}$ se obtiene

$$(vh)_{i,j-1/2}^{p+1} = (vh)_{i,j-1/2}^p - \frac{g\Delta t}{\Delta y} \left[(h_{i,j}^p)^2 - (h_{i,j-1}^p)^2 \right] + g(h_x^p)_{i,j-1/2} (S_{oy} - S_{fy})_{i,j-1/2}^p \quad (3.25)$$

Las variables h_x , h_y , S_{ox} , S_{oy} , S_{fx} y S_{fy} se calculan con las ecs 3.10, 3.14, 3.4, 3.5, 3.6, y 3.7 respectivamente.

• Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad para este esquema se escribe en diferencias finitas de la manera siguientes

$$\frac{h_{i,j}^{p+1} - h_{i,j}^p}{\Delta t} = - \left[\frac{(uh)_{i+1/2,j}^p - (uh)_{i-1/2,j}^p}{\Delta x} \right] - \left[\frac{(vh)_{i,j+1/2}^p - (vh)_{i,j-1/2}^p}{\Delta y} \right] \quad (3.26)$$

como podrá observarse esta ecuación es idéntica a la del esquema que considera términos convectivos.

Como podrá observarse el no considerar los términos convectivos, simplifica el modelo de aproximación.

El cálculo en las fronteras será similar al explícito en el inciso 3.1, es decir en una entrada solo se proporciona gasto de entrada uh o vh y en el caso de una salida el tirante (h_p) con lo que la ecuación para un punto de salida $i, j+1/2$, fig 3.2 se escribe como

$$\frac{(vh)_{i,j+1/2}^{p+1} - (vh)_{i,j+1/2}^p}{\Delta t} = - \frac{g}{2} \frac{(h_{i,j+1}^p)^2 - (h_{i,j}^p)^2}{\Delta y} + g(h_y^p)_{i,j} (S_{oy} - S_{ry})_{i,j}^p \quad (3.27)$$

si $u = 0$ y despejando $vh_{i,j+1/2}^{p+1}$ de la ec 3.27 se tiene

$$vh_{i,j+1/2}^{p+1} = vh_{i,j+1/2}^p - \frac{g\Delta t}{2\Delta y} \left[(h_{i,j+1}^p)^2 - (h_{i,j}^p)^2 \right] + g(h_y^p)_{i,j+1/2} (S_{oy} - S_{ry})_{i,j+1/2}^p \quad (3.28)$$

3.3 Esquema numérico explícito de segundo orden

En las ecs 2.36, 2.59 y 2.60 que representan al flujo en dos dimensiones espaciales (x-y) las variables que interesan determinar en las diversas posiciones x,y en el tiempo son h, uh y vh. El método explícito que aquí se propone se apoya en el planteamiento de Richtmeyer (Ames, 1977) para un esquema explícito de Lax-Wendroff con la diferencia que no es necesaria la matriz de jacobianos de este último (Smith, 1978).

El esquema de Lax-Wendroff que es de segundo orden de exactitud, fué aplicado originalmente a las ecuaciones dinámicas de una gas, para una dimensión.

En este trabajo se considera la idea de Richtmeyer y se plantea la forma de utilizarlo para un flujo bidimensional a superficie libre, por lo que las ecuaciones fundamentales 2.36, 2.59 y 2.60 se pueden combinar en una sola de la manera siguiente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} - T(W) = 0 \quad (3.29)$$

donde W, F, G y T son vectores columna con tres componentes tales que

$$W = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad F(W) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{g}{2} h^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad (3.30a)$$

$$G(W) = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{g}{2} h^2 \end{bmatrix}, \quad T(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_x - S_{fx}) \\ gh(S_y - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.30b)$$

Este esquema se aplica en dos etapas, en la primera etapa $t=(p + 1/2)\Delta t$, se proponen, con base en los volúmenes de control mostrados en la fig 3.4, las expresiones siguientes

$$\begin{aligned}
W_{i-1/2,j}^{p+1/2} &= \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^p + W_{i-1,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[F_{i,j}^p - F_{i-1,j}^p \right] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[G_{i-1/2,j+1/2}^p - G_{i-1/2,j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{i-1/2,j}^p
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
W_{i+1/2,j}^{p+1/2} &= \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^p + W_{i+1,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[F_{i+1,j}^p - F_{i,j}^p \right] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[G_{i+1/2,j+1/2}^p - G_{i+1/2,j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{i+1/2,j}^p
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
W_{i,j-1/2}^{p+1/2} &= \frac{1}{2} \left[W_{i,j-1}^p + W_{i,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[F_{i,j}^p - F_{i,j-1}^p \right] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[G_{i+1/2,j-1/2}^p - G_{i-1/2,j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{i,j-1/2}^p
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
W_{i,j+1/2}^{p+1/2} &= \frac{1}{2} \left[W_{i,j+1}^p + W_{i,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[F_{i,j+1}^p + F_{i,j}^p \right] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[G_{i+1/2,j+1/2}^p - G_{i-1/2,j+1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{i,j+1/2}^p
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

Con las ecs 3.31-3.34 se obtienen las variables $h^{p+1/2}$, $(uh)^{p+1/2}$ y $(vh)^{p+1/2}$, en las posiciones $i-1/2, j$; $i+1/2, j$; $i, j-1/2$; $i, j+1/2$. De estas se determinan $u^{p+1/2}$ y $v^{p+1/2}$.

Obtenidas las variables anteriores es posible calcular

$$F_{i+1/2,j}^{p+1/2}, \quad F_{i-1/2,j}^{p+1/2}, \quad G_{i,j+1/2}^{p+1/2}, \quad G_{i,j-1/2}^{p+1/2} \text{ y } T_{i,j}^{p+1/2}.$$

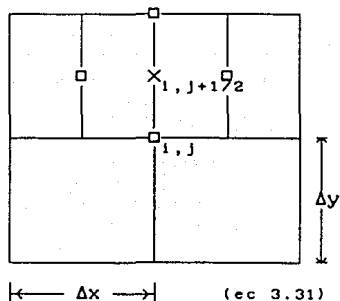
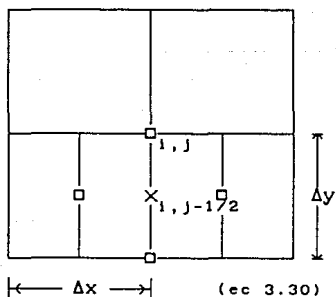
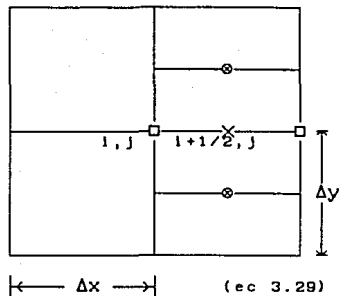
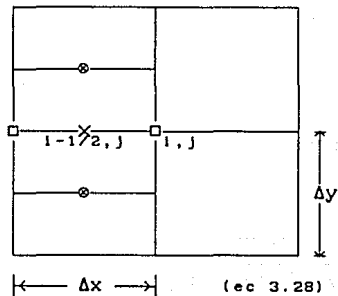
Para la segunda etapa ($t=(p+1)\Delta t$), se utiliza la expresi3n siguiente

$$W_{i,j}^{p+1} = W_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+1/2,j}^{p+1/2} - F_{i-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{i,j+1/2}^{p+1/2} - G_{i,j-1/2}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{i,j}^{p+1/2}
\tag{3.35}$$

A partir de la ecuaci3n anterior se encuentran $h_{i,j}^{p+1}$, $(uh)_{i,j}^{p+1}$ y $(vh)_{i,j}^{p+1}$; de ellos se calculan $u_{i,j}^{p+1}$ y $v_{i,j}^{p+1}$.

En la fig 3.4 se presentan los volúmenes de control correspondientes a las ecs 3.31 a 3.32

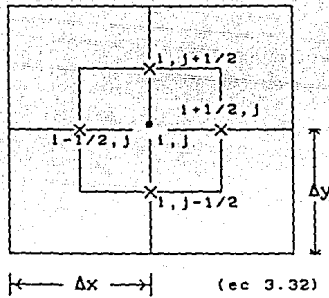
Los valores obtenidos en $t = (p + 1/2)\Delta t$ son una aproximación preliminar, para posteriormente obtener los correspondientes $t = (p + 1)\Delta t$ que son los que se deberán considerar.



- posición del vector F en el primer paso
- ⊙ posición del vector G en el primer paso
- × posición del vector W en el primer paso

Primer paso

Fig 3.4 Volúmenes de control



- × valores obtenidos en el primer paso
- posición del vector W en el segundo paso

Segundo paso

Fig 3.4 Volúmenes de control (continuación)

Para que el esquema de Lax-Wendroff con $\Delta x = \Delta y$ y $T(W) = 0$ sea estable numéricamente se debe cumplir que

$$\left[\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{gh} \right] < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.36)$$

La ec 3.33 se conoce como condición de Courant

3.3.1 Condiciones de Frontera

Para realizar el cálculo de variables en las fronteras será necesario realizar las aproximaciones de derivadas en forma descentrada. Esto se debe a que en la frontera no es posible valorar una diferencia central.

Las condiciones de frontera intervienen en el cálculo en el segundo paso, ya que como se habrá observado en este esquema todas las variables se encuentran en un mismo punto de la malla. Para el primer paso se estiman los valores al centro de cada intervalo, Δx ó Δy , en el segundo paso el valor en la frontera se toma en cuenta en el cálculo de las variables en ese mismo punto, en el instante $t = (p+1)\Delta t$

A continuación se presentan las ecuaciones que se utilizan para cada frontera en cada etapa.

- Primer paso

• Frontera inferior

$$W_{1-1/2, j}^{p+1/2} = \frac{1}{2} \left[W_{1, j}^p + W_{1-1, j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[F_{1, j}^p + F_{1-1, j}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1-1/2, j+1/2}^p - G_{1-1/2, j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{1-1/2, j}^p \quad (3.37)$$

• Frontera superior ($j = ny$)

donde ny es el número total de renglones j

$$W_{1-1/2, j}^{p+1/2} = \frac{1}{2} \left[W_{1, j}^p + W_{1-1, j}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[F_{1, j}^p + F_{1-1, j}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1-1/2, j+1/2}^p - G_{1-1/2, j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{1-1/2, j}^p \quad (3.38)$$

• Frontera izquierda ($i = 1$)

$$W_{1, j-1/2}^{p+1/2} = \frac{1}{2} \left[W_{1, j}^p + W_{1, j-1}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2, j}^p + F_{1, j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[G_{1, j}^p - G_{1, j-1}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{1, j-1/2}^p \quad (3.39)$$

• Frontera derecha ($i = nx$)

donde nx es el número total de renglones i

$$W_{1, j-1/2}^{p+1/2} = \frac{1}{2} \left[W_{1, j}^p + W_{1, j-1}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1, j-1/2}^p + F_{1-1/2, j-1/2}^p \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[G_{1, j}^p - G_{1, j-1}^p \right] - \frac{\Delta t}{2} T_{1, j-1/2}^p \quad (3.40)$$

- Segundo paso

Como podrá observarse, las ecuaciones de frontera del primer paso no requieren de valores en las esquinas de la malla en cuestión. En el segundo paso son considerados los puntos de las esquinas mediante diferencias descentradas como se presenta a continuación

- Esquina inferior izquierda ($i = 1, j = 1$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2,j}^{p+1/2} - F_{1,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j+1/2}^{p+1/2} - G_{1,j}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.41)$$

- Frontera izquierda ($i = 1$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2,j}^{p+1/2} - F_{1,j}^{p+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j+1/2}^{p+1/2} - G_{1,j-1/2}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.42)$$

- Esquina superior derecha ($i = 1, j = ny$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2,j}^{p+1/2} - F_{1,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j-1/2}^{p+1/2} - G_{1,j}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.43)$$

- Esquina inferior derecha ($i = nx, j = 1$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1,j}^{p+1/2} - F_{1-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j-1/2}^{p+1/2} - G_{1,j}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.44)$$

- Frontera derecha ($i = nx$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1,j}^{p+1/2} - F_{1-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j+1/2}^{p+1/2} - G_{1,j-1/2}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.45)$$

- Esquina superior derecha ($i = nx, j = ny$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1,j}^{p+1/2} - F_{1-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j}^{p+1/2} - G_{1,j-1/2}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.46)$$

- Frontera inferior ($j = 1$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2,j}^{p+1/2} - F_{1-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j+1/2}^{p+1/2} - G_{1,j}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.47)$$

- Frontera superior ($j = ny$)

$$W_{1,j}^{p+1} = W_{1,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{1+1/2,j}^{p+1/2} - F_{1-1/2,j}^{p+1/2} \right] - \frac{2\Delta t}{\Delta y} \left[G_{1,j}^{p+1/2} - G_{1,j-1/2}^{p+1/2} \right] - \Delta t T_{1,j}^{p+1/2} \quad (3.48)$$

3.3.2 Procedimiento de cálculo

Para poder aplicar el modelo numérico es necesario considerar una malla en el área de interés con intervalos horizontales Δx y verticales Δy , ver fig 3.5, que pueden ser iguales. En cada punto de la malla se conoce el coeficiente de rugosidad n y la elevación del fondo z ; en este caso se considera un fondo horizontal, además se considera $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$ y $t = p\Delta t$, el tirante $h(x,y,t) = h_{i,j}^p$, las velocidades $u(x,y,t) = u_{i,j}^p$ y $v(x,y,t) = v_{i,j}^p$. Estas tres últimas variables se deben estimar en cada punto de la malla

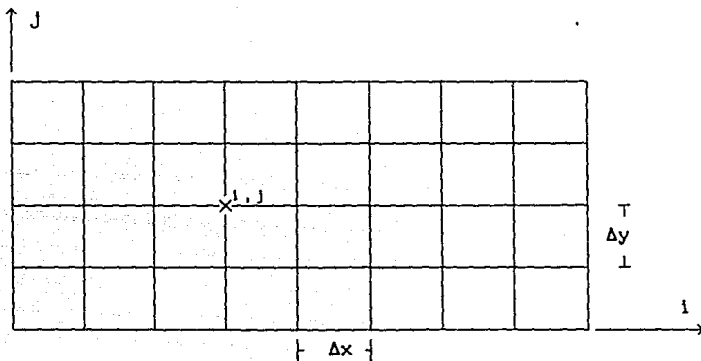


Fig 3.5 Malla que se considera en el área de interés

El esquema se aplica de la manera siguiente

1. Se consideran las condiciones iniciales de las variables hidráulicas en toda la malla que cubre la laguna.
2. Se hace $p = 0$
3. Para los puntos donde entra el agua se estima el gasto de entrada para el tiempo $t=p\Delta t$ y se obtienen u^p h^p v^p
4. Se calculan $h_{i,j}^{p+1/2}$, $u_{i,j}^{p+1/2}$ y $v_{i,j}^{p+1/2}$ con las ecs 3.31 a 3.34
5. Con los valores del paso 4 y la ec 3.10 se obtienen los valores de $h_{i,j}^{p+1}$, $u_{i,j}^{p+1}$ y $v_{i,j}^{p+1}$.
6. Si se desea obtener el valor de las variables en el siguiente intervalo de tiempo se hace $p = p + 1$ y se repite el proceso desde el paso 3; de otra manera se terminan los cálculos.

Los valores del paso 5 son obtenidos en los cruces de la malla, en el primer paso es necesario conocer estos valores al centro de cada celda, por lo que para obtenerlos se toma un promedio de lo que se localizan en las esquinas de cada una de las celdas de interés, cuando se trata de una frontera solo se considera a los elementos que se encuentran arriba y abajo ó a la derecha e izquierda, según sea el caso.

3.4 Esquema numérico implícito

En los incisos 3.1 y 3.2 se describen dos modelos matemáticos, explícitos; para resolver las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento; sin embargo, también es posible conocer el valor de las variables mediante el uso de un esquema implícito como el que se describe en este inciso.

Los esquemas implícitos pueden ser aparentemente mas complicados que los explícitos; sin embargo, aceptan incrementos del tiempo mayores a los que se pueden utilizar en los explícitos, ya que en estos el incremento esta limitado por la condición de Courant (ec 3.36), que en caso de no cumplirse indicará que el esquema será inestable.

El procedimiento implícito consiste en obtener simultáneamente las variables de interés, mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones que se forma al aplicar simultaneamente las ecuaciones de continuidad (ec 2.36), y la dinámica (ecs 2.59 y 2.60).

3.4.1 Ecuación dinámica (dirección x)

La ecuación dinámica (ec 2.59) puede ser expresada en diferencias finitas, considerando la fig 3.1. Se puede observar que las variables no se localizan en el mismo punto, por lo que para las casos que sea necesario conocer alguna variable en un sitio en el que no se calcule, esta se obtendrá como un promedio de las que se localicen en su entorno. De acuerdo con estas consideraciones, la ec 2.59 se expresa en diferencias finitas de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{u_{1-1/2,j}^{p+1} - u_{1-1/2,j}^{p+1}}{\Delta t} &= -u_{1-1/2,j}^{p+1} \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - v_{1-1/2,j}^p \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - \\
-g(1-\theta) \frac{\partial h_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - g\theta \frac{\partial h_{1-1/2,j}^{p+1}}{\partial x} - g \frac{\partial z_{1-1/2,j}^{p+1}}{\partial x} & \\
-gn^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^p| u_{1-1/2,j}^{p+1}}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} & \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Multiplicando la ec 3.49 por Δt y factorizando a $u_{1-1/2,j}^{p+1}$ se tiene

$$\begin{aligned}
u_{1-1/2,j}^{p+1} \left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} + \Delta t gn^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^p|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right] &= -\Delta t g(1-\theta) \frac{\partial h_{1-1/2,j}^p}{\partial x} \\
-\Delta t g \frac{\partial z_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - \Delta t v_{1-1/2,j}^p \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial y} + u_{1-1/2,j}^p - \Delta t g\theta \frac{\partial h_{1-1/2,j}^{p+1}}{\partial x} & \quad (3.50)
\end{aligned}$$

despejando a $u_{1-1/2,j}^{p+1}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
u_{1-1/2,j}^{p+1} &= \frac{-\Delta t g(1-\theta) \frac{\partial h_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - \Delta t g \frac{\partial z_{1-1/2,j}^p}{\partial x} - \Delta t v_{1-1/2,j}^p \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial y}}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} + \Delta t gn^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^p|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]} \\
&+ \frac{u_{1-1/2,j}^p}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} + \Delta t gn^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^p|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]} - \\
&- \frac{\Delta t g\theta}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^p}{\partial x} + \Delta t gn^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^p|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]} \frac{\partial h_{1-1/2,j}^{p+1}}{\partial x} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Si se hace

$$R_{x_{1-1/2,j}} = \frac{-\Delta t g(1-\theta) \frac{\partial h_{1-1/2,j}^P}{\partial x} - \Delta t g \frac{\partial z_{1-1/2,j}^P}{\partial x} - \Delta t v_{1-1/2,j}^P \frac{\partial u_{1-1/2,j}^P}{\partial y}}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^P}{\partial x} + \Delta t g n^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^P|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]}$$

$$R_{x_{1-1/2,j}} = R_{x_{1-1/2,j}} + \frac{u_{1-1/2,j}^P}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^P}{\partial x} + \Delta t g n^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^P|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]} \quad (3.52)$$

$$P_{x_{1-1/2,j}} = \frac{\Delta t g \theta}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial u_{1-1/2,j}^P}{\partial x} + \Delta t g n^2 \frac{|u_{1-1/2,j}^P|}{h_{1-1/2,j}^{4/3}} \right]} \quad (3.53)$$

Sustituyendo las ecs 3.52 y 3.50 en la 3.41 se tiene

$$u_{1-1/2,j}^{P+1} = R_{x_{1-1/2,j}} - P_{x_{1-1/2,j}} \frac{\partial h_{1-1/2,j}^{P+1}}{\partial x} \quad (3.54)$$

Haciendo un desarrollo análogo para la dirección y, se obtiene la ecuación siguiente

$$v_{1,j-1/2}^{P+1} = \frac{-\Delta t g(1-\theta) \frac{\partial h_{1,j-1/2}^P}{\partial y} - \Delta t g \frac{\partial z_{1,j-1/2}^P}{\partial y} - \Delta t u_{1,j-1/2}^P \frac{\partial v_{1,j-1/2}^P}{\partial x}}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{1,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{1,j-1/2}^P|}{h_{1,j-1/2}^{4/3}} \right]} + \frac{v_{1,j-1/2}^P}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{1,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{1,j-1/2}^P|}{h_{1,j-1/2}^{4/3}} \right]} - \frac{\Delta t g \theta}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{1,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{1,j-1/2}^P|}{h_{1,j-1/2}^{4/3}} \right]} \frac{\partial h_{1-1/2,j}^{P+1}}{\partial x} \quad (3.55)$$

Si se considera

$$Ry_{i,j-1/2} = \frac{-\Delta t g(1-\theta) \frac{\partial h_{i,j-1/2}^P}{\partial y} - \Delta t g \frac{\partial z_{i,j-1/2}^P}{\partial y} - \Delta t u_{i,j-1/2}^P \frac{\partial v_{i,j-1/2}^P}{\partial x}}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{i,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{i,j-1/2}^P|}{h_{i,j-1/2}^{4/3}} \right]}$$

$$Ry_{i,j-1/2} = Ry_{i,j-1/2} + \frac{v_{i,j-1/2}^P}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{i,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{i,j-1/2}^P|}{h_{i,j-1/2}^{4/3}} \right]} \quad (3.56)$$

$$Py_{i,j-1/2} = \frac{\Delta t g \theta}{\left[1 + \Delta t \frac{\partial v_{i,j-1/2}^P}{\partial y} + \Delta t g n^2 \frac{|v_{i,j-1/2}^P|}{h_{i,j-1/2}^{4/3}} \right]} \quad (3.57)$$

Sustituyendo las ecs 3.56 y 3.57 en la 3.55 se tiene

$$v_{i,j-1/2}^{p+1} = Ry_{i,j-1/2} - Py_{i,j-1/2} \frac{\partial h_{i,j-1/2}^{p+1}}{\partial x} \quad (3.58)$$

En las ecuaciones anteriores las derivadas parciales se expresan mediante diferencias finitas como a continuación se muestran

$$\frac{\partial h_{i-1/2,j}}{\partial x} = \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial z_{i-1/2,j}}{\partial x} = \frac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.60)$$

$$v_{i-1/2,j} \frac{\partial u_{i-1/2,j}}{\partial y} = v_{i-1/2,j} \left\{ \frac{u_{i-1/2,j+1} - u_{i-1/2,j-1}}{2\Delta y} \right\} \quad (3.61)$$

$$v_{i-1/2,j} = \frac{1}{4} (v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2} + v_{i-1,j-1/2} + v_{i-1,j+1/2})$$

$$\frac{\partial u_{i-1/2,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-3/2,j}}{2\Delta x} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial h_{1,j-1/2}}{\partial y} = \frac{h_{1,j} - h_{1,j-1}}{\Delta y} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial z_{1,j-1/2}}{\partial y} = \frac{z_{1,j} - z_{1,j-1}}{\Delta y} \quad (3.64)$$

$$u_{1,j+1/2} \frac{\partial v_{1,j+1/2}}{\partial x} = u_{1,j+1/2} \left[\frac{v_{1+1/2,j-1/2} - v_{1-1,j+1/2}}{2\Delta x} \right] \quad (3.65)$$

$$u_{1,j-1/2} = \frac{1}{4} (u_{1+1/2,j} + u_{1+1/2,j-1} + u_{1-1/2,j-1} + u_{1-1/2,j})$$

$$\frac{\partial v_{1,j-1/2}}{\partial y} = \frac{v_{1,j+1/2} - v_{1,j-3/2}}{2\Delta y} \quad (3.66)$$

En el planteamiento se considera que

$$S_{fx} = gn^2 \frac{|u|u}{h^{4/3}} \quad \text{y} \quad S_{ox} = 0$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

Para este trabajo se considera un fondo Horizontal por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

puede ser omitido

3.4.2 Ecuación de continuidad (dirección x)

La ec 2.60 se puede expresar mediante diferencias finitas y de acuerdo con la fig 3.1, de la manera siguiente

$$\frac{h_{1,j}^{p+1} - h_{1,j}^p}{\Delta t} = \frac{hx_{1+1/2,j}^p u_{1+1/2,j}^{p+1} - hx_{1-1/2,j}^p u_{1-1/2,j}^{p+1}}{\Delta x} + \frac{hy_{1,j+1/2}^p v_{1,j+1/2}^{p+1} - hy_{1,j-1/2}^p v_{1,j-1/2}^{p+1}}{\Delta y} \quad (3.67)$$

multiplicando la ec 3.67 por Δt y despejando $h_{1,j}^{p+1}$ se obtiene

$$h_{i,j}^{p+1} = h_{i,j}^p + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{i+1/2,j}^p u_{i+1/2,j}^{p+1} - h_{i-1/2,j}^p u_{i-1/2,j}^{p+1} \right] +$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} \left[h_{i,j+1/2}^p v_{i,j+1/2}^{p+1} - h_{i,j-1/2}^p v_{i,j-1/2}^{p+1} \right] \quad (3.68)$$

Si se consideran solo

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p u_{i-1/2,j}^{p+1}$$

y se sustituye la ec 3.54 en la expresión anterior, se llega a

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p u_{i-1/2,j}^{p+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p R_{x_{i-1/2,j}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p P_{x_{i-1/2,j}} \frac{\partial h_{i-1/2,j}^{p+1}}{\partial x} \quad (3.69)$$

sustituyendo la ec 3.59 en la 3.69, se tiene

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p u_{i-1/2,j}^{p+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p R_{x_{i-1/2,j}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p P_{x_{i-1/2,j}} \frac{1}{\Delta x} (h_{i,j}^{p+1} - h_{i-1,j}^{p+1}) \quad (3.70)$$

Considerando

$$q_{x_{i-1/2,j}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p u_{i-1/2,j}^{p+1} \quad (3.71)$$

$$\delta_{i-1/2,j} = \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i-1/2,j}^p R_{x_{i-1/2,j}} \quad (3.72)$$

$$\alpha_{i-1/2,j} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_{i-1/2,j}^p P_{x_{i-1/2,j}} \quad (3.73)$$

Tomando en cuenta las ecs 3.71 a 3.73, la ec 3.70 se puede escribir como

$$q_{x_{i-1/2,j}} = \delta_{i-1/2,j} - \alpha_{i-1/2,j} (h_{i,j}^{p+1} - h_{i-1,j}^{p+1}) \quad (3.74)$$

Por otra parte para la dirección y se toma en cuenta lo siguiente

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} h_{i,j-1/2}^p v_{i,j-1/2}^{p+1}$$

y se sustituye la ec 3.58 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{y,1,j-1/2}^p v_{1,j-1/2}^{p+1} &= \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{y,1,j-1/2}^p R_{y,1,j-1/2} - \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{y,1,j-1/2}^p P_{y,1,j-1/2} \frac{1}{\Delta y} (h_{1,j}^{p+1} - h_{1,j-1}^{p+1}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

considerando

$$q_{y,1,j-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{y,1,j-1/2}^p v_{1,j-1/2}^{p+1} \quad (3.76)$$

$$\gamma_{1,j-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{y,1,j-1/2}^p R_{y,1,j-1/2} \quad (3.77)$$

$$\beta_{1,j-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y^2} h_{y,1,j-1/2}^p P_{y,1,j-1/2} \quad (3.78)$$

sustituyendo las ecs 3.76 a 3.78 en la 3.75 se tiene

$$q_{y,1,j-1/2} = \gamma_{1,j-1/2} - \beta_{1,j-1/2} (h_{1,j}^{p+1} - h_{1,j-1}^{p+1}) \quad (3.79)$$

Al utilizar las ecs 3.74 y 3.79, la ecuación de continuidad (ec 3.79) se puede escribir como

$$h_{1,j}^{p+1} = h_{1,j}^p + q_{x,1-1/2,j} - q_{x,1+1/2,j} + q_{y,1,j-1/2} - q_{y,1,j+1/2} \quad (3.80)$$

La ec 3.79 se emplea en cada volumen de control, el cual tiene como centro los subíndices i, j , definidos por una malla rectangular que se traza en el área de interés. Al aplicar la ec 3.79 en toda la malla se formará un sistema de ecuaciones, cuya solución corresponde a los tirantes $h_{1,j}^{p+1}$, los cuales al sustituirse en las ecs 3.54 y 3.58, proporcionan el valor de $u_{1-1/2,j}^{p+1}$ y $v_{1,j-1/2}^{p+1}$

3.4.3 Condiciones de frontera

El esquema se aplica de igual manera en el interior de la malla y en las fronteras. Como en la ec 3.80, la diferencia central requiere de valores que se localizarían fuera de la malla, se sugiere aproximar la derivada mediante una diferencia izquierda o derecha según sea el caso. Otra forma de obtenerla se basa en lo siguiente

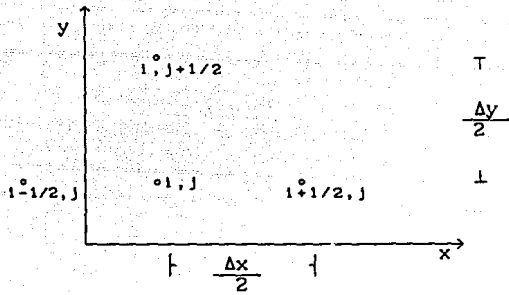


Fig 3.6 Puntos imagenes para las fronteras

Tomando en cuenta la fig 3.6 y que en el punto $1, j$ se desea valuar la derivada de v , se tiene de la diferencia central que

$$v_{1,j} = \frac{v_{1+1/2,j} - v_{1-1/2,j}}{2\Delta x} \quad (3.81)$$

si se obtiene mediante una diferencia izquierda se escribe

$$v_{1,j} = \frac{v_{1+1/2,j} - v_{1,j}}{\Delta x} \quad (3.82)$$

igualando las ecs 3.81 y 3.82 se tiene

$$\frac{u_{1+1/2,j} - u_{1-1/2,j}}{2\Delta x} = \frac{u_{1+1/2,j} - u_{1,j}}{\Delta x} \quad (3.83)$$

despejando $u_{1-1/2,j}$

$$u_{1-1/2,j} = 2u_{1,j} + u_{1+1/2,j} \quad (3.84)$$

Con la ec 3.84 es posible estimar el valor fuera de la malla y de esta manera poder valuar la derivada con una diferencia central.

4. APLICACIÓN DE LOS ESQUEMAS PROPUESTOS

En este capítulo se presenta una aplicación de los esquemas para la simulación de flujo en dos dimensiones espaciales (x, y), descritos en el cap 3, con estos ejemplos se pretende establecer una comparación entre los diferentes métodos presentados y determinar sus ventajas y desventajas.

4.1 Ejemplo 1. Esquema numérico explícito con términos convectivos (versión conservativa)

Determinar los gastos y dirección del flujo dentro de la laguna que se muestra en la fig 4.1. Esta presenta una forma rectangular, la cual cuenta con una alimentación de $1 \text{ m}^3/\text{s}$, en una entrada de 500 m de ancho a su vez en uno de sus extremos tiene una salida en la que el tirante es constante e igual a 0.5 m, con un gasto de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ en un ancho de 500 m, el fondo de la laguna es horizontal, las dimensiones de la misma, así como la ubicación de la entrada y salida se presentan en la fig 4.1.

Para poder estimar las características del flujo dentro de la laguna se aplicara el modelo descrito en el inciso 3.1 para lo que es necesario definir una malla, dadas las dimensiones del área de interés, se propone usar una malla de $\Delta x = 500 \text{ m}$, $\Delta y = 500 \text{ m}$, y $\Delta t = 50 \text{ s}$,

considerando un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.02.

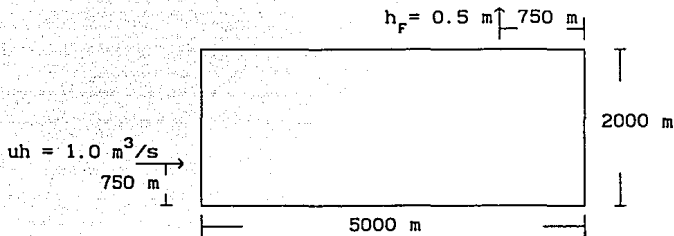


Fig 4.1 Esquema de la laguna

Con el esquema propuesto en el inciso 3.1 se elaboró un programa de cómputo que se utilizó para determinar los gastos y direcciones del flujo dentro de la laguna, después de que se estabilizaron los valores, (1500 iteraciones), es decir que los valores entre dos iteraciones consecutivas practicamente no cambiaron, se obtuvieron los resultados siguientes.

TABLA 4.1 Gastos y tirantes en los distintos puntos de la malla

Gastos en la dirección y (UH)

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10	I=11
J=1	0.000	0.161	0.226	0.244	0.247	0.245	0.239	0.223	0.185	0.106	0.000
J=2	1.000	0.580	0.369	0.286	0.259	0.250	0.244	0.236	0.193	0.091	0.000
J=3	0.000	0.115	0.196	0.233	0.246	0.250	0.253	0.260	0.260	0.026	0.000
J=4	0.000	0.143	0.210	0.238	0.248	0.253	0.263	0.280	0.360	-0.224	0.000
J=5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Gastos en la dirección y (VH)

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
J=2	-0.161	-0.064	-0.018	-0.003	0.002	0.006	0.016	0.038	0.079	0.106
J=3	0.258	0.147	0.065	0.024	0.010	0.012	0.024	0.080	0.182	0.197
J=4	0.143	0.067	0.028	0.011	0.005	0.010	0.017	0.080	0.415	0.224
J=5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.999	0.000

Tirantes (H)

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	1.118	1.110	1.099	1.090	1.080	1.071	1.062	1.054	1.048	1.047
J=2	1.122	1.109	1.099	1.090	1.080	1.070	1.061	1.052	1.045	1.044
J=3	1.110	1.106	1.098	1.089	1.080	1.070	1.059	1.047	1.030	1.037
J=4	1.109	1.105	1.098	1.089	1.079	1.069	1.057	1.041	0.999	1.035
J=5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000

entrada

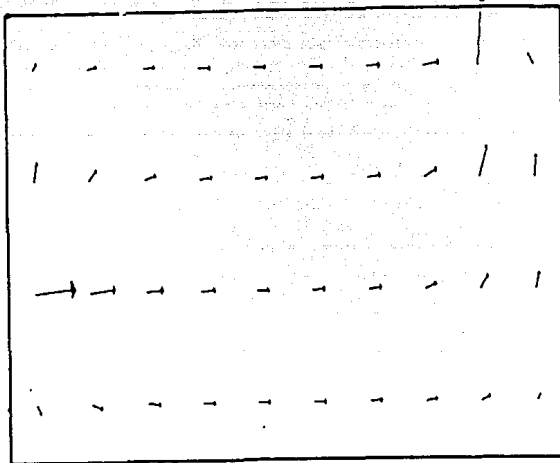


Fig 4.2 Esquema representativo de las direcciones del flujo dentro de la laguna

4.2 Ejemplo 2 Esquema numérico explícito sin términos convectivos (versión conservativa)

Para la misma laguna del ejemplo 1 es posible conocer la dirección del flujo dentro de la misma aplicando el esquema descrito en el inciso 3.2. Para la aplicación de este esquema se elaboró un programa de cómputo el cual se aplico para poder determinar las características del flujo, se considero $\Delta x = \Delta y = 500$, $\Delta t = 50$ s y un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.02, después de que se estabilizarón los valores, (1668 iteraciones), es decir que los valores entre dos iteraciones consecutivas practicamente no cambiaron, se obtuvieron los resultados siguientes.

TABLA 4.2 Gastos y tirantes en los distintos puntos de la malla

		Gastos en la dirección x (UH)										
		I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10	I=11
J=1		0.000	0.248	0.269	0.259	0.252	0.248	0.241	0.225	0.190	0.111	0.000
J=2		1.000	0.421	0.283	0.257	0.251	0.249	0.244	0.232	0.195	0.083	0.000
J=3		0.000	0.174	0.231	0.245	0.249	0.251	0.252	0.252	0.233	0.029	0.000
J=5		0.000	0.157	0.218	0.239	0.247	0.253	0.262	0.291	0.382	0.223	0.000
J=6		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLA 4.2 Gastos y tirantes en los distintos puntos de la malla
(continuación)

Gastos en la dirección y (VH)										
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
J=2	-0.248	-0.020	0.010	0.007	0.005	0.007	0.015	0.035	0.079	0.111
J=3	0.331	0.117	0.036	0.012	0.007	0.011	0.028	0.072	0.191	0.194
J=4	0.157	0.060	0.021	0.008	0.005	0.010	0.028	0.091	0.395	0.223
J=5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

Tirantes (H)										
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	1.108	1.099	1.088	1.078	1.068	1.058	1.048	1.039	1.033	1.030
J=2	1.125	1.100	1.088	1.078	1.068	1.057	1.047	1.038	1.030	1.028
J=3	1.101	1.095	1.086	1.077	1.067	1.057	1.046	1.035	1.022	1.021
J=4	1.097	1.093	1.086	1.077	1.067	1.057	1.045	1.030	0.990	1.011
J=5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.000

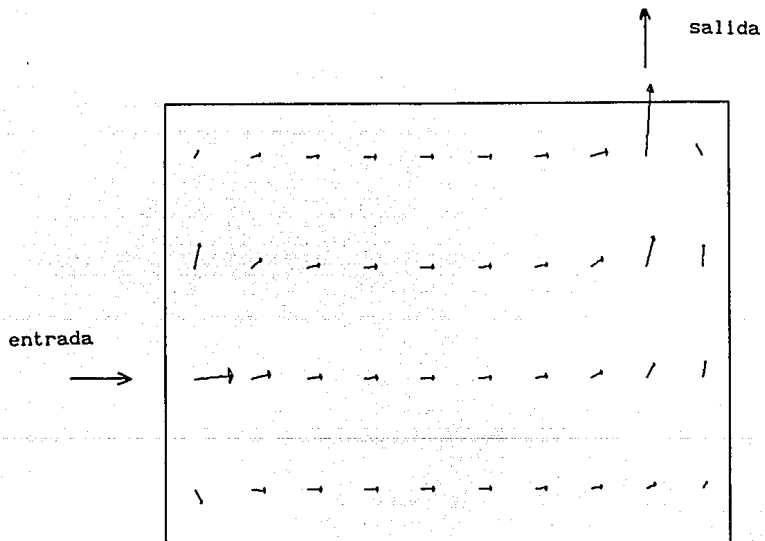


Fig 4.3 Esquema representativo de las direcciones del flujo dentro de la laguna

4.3 Ejemplo 3 Esquema implícito

Se desean conocer las características del flujo del ejemplo 4.1 pero aplicando el esquema implícito descrito en el inciso 3.4, para poder realizar el cálculo se considero una malla con $\Delta x = \Delta y = 500$ y $\Delta t = 500$ s, el método fue aplicado por medio de un programa de cómputo, que después de estabilizarse las variables en el tiempo 7500 s, (15 iteraciones), se obtubieron los resultados siguientes

TABLA 4.3 Características del flujo dentro del recinto

Gastos en la dirección x (UH)										
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	0.118	0.255	0.266	0.252	0.246	0.243	0.232	0.196	0.127	0.043
J=2	0.759	0.368	0.265	0.248	0.247	0.246	0.238	0.206	0.126	0.037
J=3	0.089	0.203	0.238	0.249	0.252	0.252	0.255	0.239	0.161	0.051
J=4	0.065	0.173	0.231	0.251	0.255	0.259	0.275	0.361	0.081	-0.133

Gastos en la dirección y (VH)										
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	-0.118	-0.019	0.009	0.005	0.001	0.003	0.008	0.028	0.041	0.043
J=2	0.037	0.048	0.034	0.012	0.001	0.007	0.023	0.081	0.137	0.123
J=3	0.219	0.108	0.042	0.010	-0.001	0.009	0.026	0.126	0.251	0.211
J=4	0.065	0.042	0.017	0.004	-0.001	0.005	0.011	0.072	0.609	0.130

Tirantes (H)										
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	1.056	1.043	1.030	1.019	1.007	0.995	0.983	0.973	0.968	0.967
J=2	1.058	1.043	1.030	1.018	1.007	0.994	0.982	0.971	0.965	0.965
J=3	1.047	1.040	1.030	1.019	1.007	0.994	0.981	0.966	0.954	0.957
J=4	1.044	1.040	1.031	1.020	1.007	0.994	0.979	0.957	0.916	0.943

En este ejemplo el gasto que se presenta se encuentra localizado al centro de la malla y se obtuvo como un promedio de los gastos que se localizan en la parte media del intervalo Δx ó Δy según sea para estimar en la dirección x ó y.

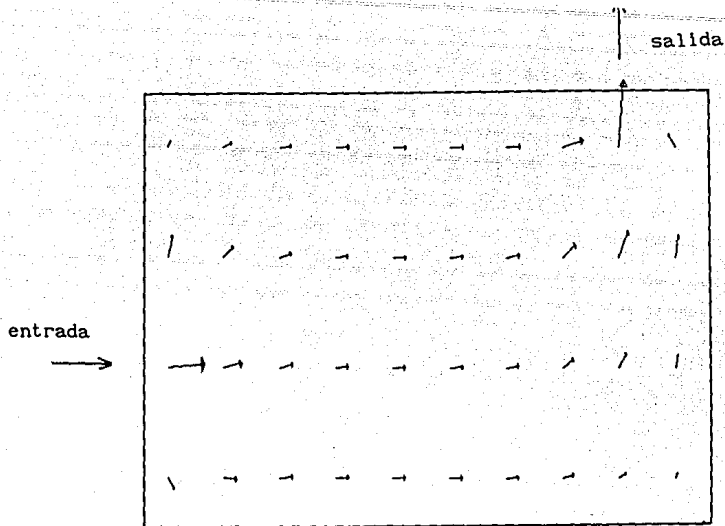


Fig 4.4 Esquema de las direcciones del flujo.

4.4 Ejemplo 4 Esquema numérico de segundo orden

Para conocer las características del flujo en la laguna del ejemplo 4.1 se propone utilizar el esquema descrito en el inciso 3.3, para lo cual se elaboró un programa de cómputo en el cual se propone emplear un $\Delta x = \Delta y = 250$ m y un $\Delta t = 20$ s, después de 500 iteraciones prácticamente no variaron los valores. En la tabla 4.4 se consignan los resultados encontrados

TABLA 4.4 Características del flujo

	Gastos en la dirección x (UH)									
	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	0.000	0.136	0.212	0.263	0.263	0.259	0.241	0.230	0.219	0.212
J=2	0.000	0.195	0.146	0.182	0.163	0.161	0.149	0.145	0.141	0.141
J=3	0.500	0.430	0.296	0.238	0.188	0.171	0.157	0.155	0.153	0.154
J=4	0.500	0.400	0.276	0.218	0.170	0.160	0.152	0.155	0.155	0.156
J=5	0.000	0.127	0.089	0.113	0.110	0.129	0.137	0.148	0.151	0.155
J=6	0.000	0.041	0.080	0.121	0.133	0.151	0.154	0.158	0.156	0.156
J=7	0.000	0.054	0.054	0.120	0.130	0.151	0.153	0.160	0.161	0.166
J=8	0.000	0.061	0.072	0.120	0.131	0.146	0.146	0.149	0.146	0.146
J=9	0.000	0.044	0.067	0.121	0.132	0.152	0.154	0.162	0.164	0.170

TABLA 4.4 Características del flujo (continuación)

Gastos en la dirección x (UH)

	I=11	I=12	I=13	I=14	I=15	I=16	I=17	I=18	I=19	I=20	I=21
J=1	0.206	0.203	0.193	0.188	0.176	0.157	0.144	0.116	0.094	0.052	0.000
J=2	0.140	0.141	0.135	0.134	0.125	0.111	0.104	0.081	0.067	0.037	0.000
J=3	0.152	0.152	0.144	0.141	0.129	0.112	0.103	0.074	0.056	0.028	0.000
J=4	0.155	0.155	0.148	0.146	0.134	0.121	0.110	0.073	0.050	0.024	0.000
J=5	0.156	0.156	0.153	0.157	0.145	0.129	0.110	0.061	0.040	0.018	0.000
J=6	0.153	0.152	0.153	0.162	0.143	0.118	0.092	0.044	0.030	0.008	0.000
J=7	0.169	0.174	0.185	0.193	0.172	0.175	0.145	0.053	0.014	0.012	0.000
J=8	0.143	0.144	0.143	0.144	0.151	0.235	0.201	-0.119	-0.147	-0.046	0.000
J=9	0.175	0.186	0.198	0.211	0.311	0.438	0.024	0.000	-0.372	-0.196	0.000

Gastos en la dirección y (VH)

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
J=2	-0.125	-0.109	-0.066	-0.024	0.001	0.012	0.014	0.012	0.009	0.007
J=3	0.000	-0.090	-0.007	-0.002	0.018	0.020	0.017	0.011	0.006	0.004
J=4	0.000	0.110	0.117	0.090	0.067	0.046	0.029	0.018	0.011	0.010
J=5	0.196	0.144	0.164	0.108	0.070	0.039	0.019	0.008	0.004	0.003
J=6	0.201	0.066	0.121	0.083	0.050	0.026	0.012	0.007	0.006	0.008
J=7	0.130	0.061	0.073	0.057	0.033	0.017	0.008	0.004	0.003	0.003
J=8	0.095	0.027	0.045	0.029	0.018	0.010	0.006	0.004	0.004	0.005
J=9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Gastos en la dirección y (VH)

	I=11	I=12	I=13	I=14	I=15	I=16	I=17	I=18	I=19	I=20	I=21
J=1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
J=2	0.005	0.006	0.009	0.008	0.017	0.016	0.020	0.026	0.031	0.049	0.050
J=3	0.003	0.006	0.011	0.011	0.028	0.024	0.033	0.042	0.046	0.074	0.075
J=4	0.009	0.015	0.023	0.023	0.049	0.041	0.059	0.075	0.075	0.108	0.105
J=5	0.004	0.013	0.021	0.022	0.056	0.046	0.081	0.103	0.094	0.128	0.119
J=6	0.011	0.021	0.026	0.033	0.085	0.077	0.131	0.149	0.117	0.155	0.140
J=7	0.004	0.008	0.008	0.024	0.099	0.090	0.148	0.158	0.121	0.160	0.125
J=8	0.008	0.012	0.014	0.054	0.117	0.107	0.267	0.297	0.162	0.190	0.174
J=9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.000	0.000

Tirantes (H)

	I=1	I=2	I=3	I=4	I=5	I=6	I=7	I=8	I=9	I=10
J=1	1.010	1.001	1.003	0.994	0.993	0.987	0.986	0.982	0.980	0.977
J=2	1.030	0.989	1.004	0.991	0.992	0.986	0.985	0.981	0.979	0.976
J=3	1.025	0.997	1.001	0.991	0.991	0.986	0.985	0.981	0.979	0.976
J=4	1.017	0.994	0.999	0.990	0.991	0.986	0.985	0.982	0.980	0.977
J=5	1.013	0.983	0.995	0.987	0.989	0.985	0.984	0.981	0.978	0.976
J=6	0.998	0.992	0.997	0.990	0.992	0.987	0.986	0.983	0.980	0.978
J=7	1.000	0.986	0.996	0.987	0.989	0.985	0.983	0.980	0.978	0.975
J=8	1.001	0.989	0.997	0.990	0.991	0.987	0.986	0.983	0.981	0.978
J=9	0.995	0.986	0.995	0.987	0.989	0.984	0.983	0.980	0.977	0.974

TABLA 4.4 Características del flujo (continuación)

	Tirantes (H)										
	I=11	I=12	I=13	I=14	I=15	I=16	I=17	I=18	I=19	I=20	I=21
J=1	0.974	0.972	0.969	0.968	0.965	0.965	0.963	0.962	0.963	0.961	0.963
J=2	0.974	0.972	0.969	0.967	0.964	0.964	0.962	0.960	0.961	0.959	0.961
J=3	0.974	0.972	0.969	0.968	0.964	0.964	0.962	0.961	0.962	0.960	0.962
J=4	0.974	0.972	0.969	0.967	0.964	0.963	0.961	0.960	0.961	0.959	0.961
J=5	0.973	0.970	0.967	0.966	0.961	0.961	0.958	0.957	0.959	0.956	0.959
J=6	0.975	0.972	0.969	0.967	0.962	0.962	0.958	0.957	0.959	0.956	0.959
J=7	0.972	0.969	0.965	0.961	0.957	0.957	0.947	0.946	0.954	0.950	0.954
J=8	0.976	0.973	0.970	0.968	0.962	0.961	0.944	0.946	0.962	0.959	0.964
J=9	0.971	0.967	0.963	0.956	0.951	0.924	0.906	0.906	0.922	0.943	0.942

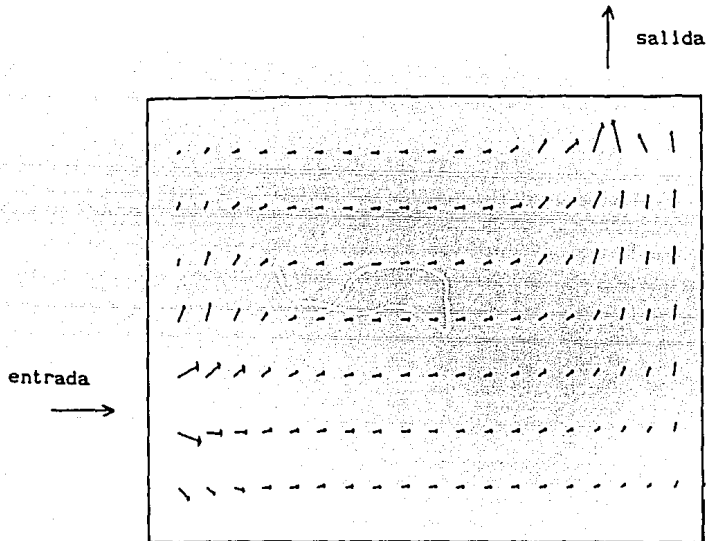


Fig 4.5 Esquema de las velocidades dentro de la laguna

4.5 Comentarios

Al comparar los resultados del ejemplo 4.1 con los de 4.2, se puede observar en las tablas 4.1 y 4.2, que los resultados son prácticamente idénticos, por lo que se puede decir que los términos convectivos no influyen en el cálculo; sin embargo, se observó que cuando el

volumen almacenado es pequeño y los gastos de entrada y salida grandes, el considerar la convección provoca una inestabilidad del esquema, lo que no ocurre cuando el volumen almacenado es grande y los gastos de entrada y salida son pequeños. Por otra parte, cuando no se toma en cuenta la convección debe existir el término de fricción de lo contrario se producen oscilaciones que no se desean. El tiempo de cálculo empleado en ambos ejemplo es del mismo orden, con la ventaja del que no toma en cuenta a los términos convectivos, presenta es menos complicado de usar.

El ejemplo 4.3 presenta en los gastos un similitud buena con respecto a los dos primeros ejemplos, los tirantes son parecidos a los obtenidos con el método de segundo orden sin embargo, el tiempo de cálculo que emplea este esquema es mucho menor, debido a que el intervalo de tiempo es mucho mayor, (10 veces más, $\Delta t = 500$ s) aunque presenta el inconveniente de tener que resolver un sistema de ecuaciones así como un posible problema en la memoria de la computadora cuando se trate de mallas muy grandes.

En el ejemplo 4.4 como podra observarse la malla utilizada tiene un $\Delta x = \Delta y = 250$ m , que es la mitad del utilizado en los otros ejemplos, por tal motivo y para poder representar el mismo problema, se deben considerar dos puntos de entrada de flujo, en la malla, con el proposito de tomar en cuenta que el gasto total de entrada sea en una distancia de 500 m. El cálculo de las características del flujo se realizó en 500 iteraciones; sin embargo el tiempo de cómputo fue mayor al de los esquemas utilizados en los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3.

El considerar un Δx menor al empleado en los esquemas anteriores se debió principalmente, a que al utilizar un intervalo de 500 m las direcciones de las velocidades no presentaban la orientación de los esquemas anteriores, causa por la que se disminuyó el intervalo de longitud en ambas direcciones, después de correr el programa con el nuevo intervalo, se observó que el patrón de flujo era igual al obtenido con los métodos anteriores.

5. CONCLUSIONES

Después de probar varios esquemas numéricos con y sin términos convectivos se llegó a demostrar la influencia de ellos en la inercia del flujo. Estos elementos pueden ser determinantes en la estabilidad del esquema, ya que cuando se consideran y el cuerpo de agua es pequeño provocan alteraciones; sin embargo, si la laguna es grande y además el gasto de entrada salida es pequeño no es importante su presencia. Por otra parte cuando se desprecian los términos convectivos debe existir la fricción, de otra manera, las ecuaciones corresponderían a un caso ideal con ascensos y descensos permanentes del nivel.

Los resultados obtenidos con la aplicación de un modelo implícito son adecuados pero este tipo de esquemas tienen el inconveniente de tener que resolver un sistema de ecuaciones que cuando tienen más de 15 incógnitas representa un importante tiempo de computadora, aunque con este tipo de esquemas no presentan grandes problemas de inestabilidad como los explícitos además de que es posible utilizar un incremento de tiempo mayor.

Los esquemas analizados presentan resultados adecuados como podrá observarse, en las figs 4.2 a 4.5 , los patrones de flujo son similares, además los valores de los gastos del mismo orden.

En general los esquemas presentados proporcionan valores adecuados, la diferencia que existe entre ellos es el tiempo de cálculo empleado, los métodos explícitos ocupan un menor tiempo de cálculo por lo que podrían ser utilizados para obtener resultados preliminares, así como tener una idea clara del patron de flujo ó bién en cuerpos de agua en los que la diferencia de velocidades sea pequeña y puedan ser despreciados los términos convectivos.

El esquema implícito proporciona valores similares a los esquemas explícitos con la ventaja que la definición de las condiciones de frontera es muy sencilla, basta con considerar el gasto de entrada y el de salida sin embargo, tiene la desventaja de tener que resolver un sistema de ecuaciones, que es el que influye en el tiempo de cálculo.

El esquema explícito de segundo orden presenta valores muy parecidos a los métodos de primer orden, pero tiene el inconveniente de tener que usar intervalos de longitud y tiempo menores por lo que se incrementa el tiempo de cálculo.

En tiempo de cálculo el que ocupa menos es esquema implícito sin términos convectivos, en segundo lugar el que considera los elementos convectivos, en tercero el método implícito y por último el esquema de segundo orden.

BIBLIOGRAFIA

1. Benqué, J-P ,Hauguel, A. "Engineering applicatios of computational hydraulis", Vol II, Ptman, 1982.
2. Berezowsky, M, "Modelo matemático para la simulación de flujo en llanuras de inundación", XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Sao Paulo, Brasil, 1986
3. Chaudry, H, "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
4. Chow, V T, " Open Channel Hydraulics", Mc Graw Hill, Book Company, New York, 1959.
- 5 Dokers, J.J ,"Todal computations", North-Holland, 1964
6. Fennema, R., and Chaudhry, H, "Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows", Journal of Hydraulic Research, vol 27, No. 3, 1989.
7. Fuentes, O. A, Osnaya, J, " Procedimiento para simular el flujo no permanente bidimensional de una onda de ruptura", 11o Congreso Nacional de Hidráulica, tomo III, Zacatecas, México, 1990.
- 8 Horikawa, K., Wiley, J, "Coastal engineering", University of Tokio, New York, 1978.
9. Mohmood, K and Yejevich, V, "Unsteady flow in open channels", vol I, Water Resources Publications, Fort Collis, Colorado, USA, 1975.
10. Hornbeck, R, "Numerical Methods", Quantum Publishers Inc, New York, 1975.
11. Smith, D, " Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite fiference Methods", Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, second edition, Great Britain, 1978.