UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupos A-nilpotentes

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

BENJAMIN DE JESUS JIMENEZ OCAMPO

MEXICO, D.F. 1992.

Indice

Introducción:

El objetivo de esta tesis es el introducir otra generalización de los grupos nilpotentes, los grupos A-nilpotentes. Este trabajo está relacionado con el desarrollado por Pilar Martín S., sobre las "Generalizaciones para automorfismos de los grupos nilpotentes."

En el capítulo 0, se presentan los conceptos básicos, definiciones y teoremas principales. Sus demostraciones se pueden hallar en casi todos los libros de teoría de grupos, a nivel de licenciatura de matemáticas.

En el primer capítulo abordamos resultados importantes de p-grupos, subgrupos cíclicos, subgrupos característicos, p-subgrupos de Sylow, que posteriormente se utilizarán.

En el segundo capítulo, se tienen caracterizaciones de los grupos nilpotentes y diversas generalizaciones.

El tercer capítulo tiene como propósito el tratar las relaciones de la generalización de grupo nilpotente y los grupos A-nilpotentes, los grupos A-Sylow, A-Frattini y A-maximales. Así como en términos de estos conceptos se estabilicen a si mismos. Todos los subgrupos aquí considerados serán de orden finito.

Conceptos Básicos

1. Definición: El orden de un grupo G, es el número de sus elementos. Denotado por $|G|$.

2. Definición: Un grupo finito es llamado p-grupo, si su orden es una potencia de p, con p un primo.

3. Definición: Un subgrupo N de G es un subgrupo normal, si para toda $g \in G$ y toda $n \in N$, $g^{-1}ng \in N$. Denotado por $N \triangleleft G$.

4. Definición: Sea $H \subset G$ subgrupo de G. Un subgrupo K de G se llama conjugado de H, si existe $x \in G$ tal que $K = x^{-1}Hx$. Denotado por $K = H^x$.

5. Definición: Si G es un grupo, se define el centro de G como $Z(G) = \{ z \in G \mid zx = xz, \text{ para toda } x \in G \}$.

6. Definición: El normalizador $N_G(H)$ de H de un grupo G es el subgrupo $\{ x \in G \mid H^x = H \}$.

7. Definición: Si $X \subset G$, se denotará al subgrupo de G generado por X como $\langle X \rangle$.

8. Definición: Un endomorfismo de un grupo G es un homomorfismo de G en sí mismo.

9. Definición: Un automorfismo de un grupo G es un isomorfismo $\phi: G \to G$

10. Definición: Sea G un grupo entonces $Aut(G) = \{\phi: G \to G \mid \phi \text{ es automorfismo}\}$.

11. Definición: Si H es un subgrupo de G y ϕ es un endomorfismo entonces h^{ϕ} representa al elemento $\phi(h)$.

12. Definición: Sea $x \in G$ y sea $\phi_x : G \to G$ el automorfismo dado por $\phi_x(g) = x^{-1}gx$ para todo $g \in G$, es llamado automorfismo interior.
Todos los demás (si existe alguno) se llaman automorfismos externos.

13. Definición: Un subgrupo H de G de orden p^m, donde $p^m \mid |G|$ y $p^{m+1} \nmid |G|$ se llama p-subgrupo de Sylow de G.

14. Teorema (Sylow): Sea G un grupo finito y p un primo, y supóngase que $p^m \mid |G|$ y $p^{m+1} \nmid |G|$, entonces

i) G posee un subgrupo de orden p^m y todo p-subgrupo de G está contenido en un subgrupo de orden p^m.

ii) Todos los subgrupos de orden p^m son conjugados.

iii) El número de subgrupos distintos de G de orden p^m es congruente con 1 (mod. p).

15. Teorema (Lagrange): Sea H un subgrupo de G, entonces $|H|$ es un divisor de $|G|$.

16. Notación: $|G:H|$ es el número de distintas clases laterales derechas (izquierdas) de H en G. A este número se le llama el índice de H en G.

$$|G:H| = |G|/|H|$$

17. Teorema: Si X, Y son subconjuntos de G entonces

$$|XY| = |YX| = |X||Y|/|X \cap Y|$$

18. Teorema: Si H, K son subgrupos de G, entonces HK es subgrupo de G si y sólo si KH es subgrupo de G.

19. Definición: Un grupo G es cíclico, si todo elemento es una potencia de algún elemento dado $x \in G$.

20. Definición: El orden de un elemento x de un grupo G es el orden del subgrupo cíclico de G generado por x.

21. Teorema: Un grupo de orden primo es cíclico.

22. Definición: Sea M un subgrupo de G, M se llama maximal. Si para todo W subgrupo G tal que $M \subset W \subset G$ se tiene que $M = W$ ó $W = G$.

23. Teorema: Si H, K son subgrupos de G cuyos ordenes son primos relativos, entonces $H \cap K = \{1\}$.

Una vez enunciados los conceptos básicos, daremos paso a ciertas definiciones y propiedades elementales de los conmutadores.

Propiedades elementales de los conmutadores

24. Definición: El elemento $x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$ es llamado el conmutador de los elementos $x, y \in G$.

25. Definición: El subgrupo generado por todos los conmutadores de G es llamado el subgrupo conmutador de G. Denotado por $[G, G]$ ó G'.

26. Teorema: Sean $x, y, z \in G$ y H, K, L subgrupos de G, entonces

i) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$

ii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

iii) $[H, K] \triangleleft \langle H, K \rangle$

iv) $[H, K] = [K, H]$

v) H normaliza a K si y sólo si $[H, K] \leq K$.

vi) $K \triangleleft G$ y G/K es abeliano si y sólo si $[G, G] \leq K$.

vii) Si $K \leq H$ cada uno es normal en G entonces $H/K \leq Z(G/K)$ si y sólo si $[H, G] \leq K$.

viii) Si ϕ es un endomorfismo de G entonces $[H, K]^\phi = [H^\phi, K^\phi]$. En particular $[H, K] \triangleleft G$, si H y K son normales en G.

ix) Si H, K, L son normales en G entonces $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

Demostración:

i) $[xy,z]=(xy)^{-1}z^{-1}xyz=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz=y^{-1}x^{-1}z^{-1}x1yz=y^{-1}x^{-1}z^{-1}x(zyy^{-1}z^{-1})yz$

$$=y^{-1}(x^{-1}z^{-1}xz)y(y^{-1}z^{-1}yz)=y^{-1}[x,z]y[y,z]=[x,z]^{y}[y,z].$$

ii) Por i) $[x,yz]=[yz,x]^{-1}=([y,x]^{z}[z,x])^{-1}=[z,x]^{-1}([y,x]^{z})^{-1}$

$$=[x,z](z^{-1}[y,x]z)^{-1}=[x,z](z^{-1}[x,y]z)=[x,z][x,y]^{z}.$$

iii) Probaremos que para cada $x\in[H,K]$, x^{h} y x^{k} están en $[H,K]$, para cada $h\in H$ y cada $k\in K$. Como x es un producto de conmutadores, será suficiente probar que $[y,z]^{h}$ y $[y,z]^{k}$, para $y\in H$, $z\in K$, están en $[H,K]$.

Por i) $[y,z]^{h}=[yh,z][h,z]^{-1}\in[H,K]$ y por ii) $[y,z]^{k}=[y,k]^{-1}[y,zk]\in[H,K]$.

$$\therefore\ [H,K]\lhd\langle H,K\rangle.$$

iv) Como $[h,k]=h^{-1}k^{-1}hk=(k^{-1}h^{-1}kh)^{-1}=[k,h]^{-1}$ y $[K,H]$ es subgrupo, se sigue de esto que $[h,k]\in[K,H]$ para toda $h\in H$ y toda $k\in K$, de donde $[H,K]\subseteq[K,H]$ y por simetría $[K,H]\subseteq[H,K]$.

$$\therefore\ [K,H]=[H,K].$$

v) H normaliza K si y sólo si $h^{-1}k^{-1}h\in K$ para toda $h\in H$ y toda $k\in K$ si y sólo si $h^{-1}k^{-1}hk=[h,k]\in K$ para toda $h\in H$ y toda $k\in K$.

vi) Sean $x, y \in G$, como G/K es abeliano, se tiene que $K(x^{-1}y^{-1}xy) = Kx^{-1}Ky^{-1}KxKy$

$$= (Kx)^{-1}(Ky)^{-1}KxKy$$
$$= (Kx)^{-1}Kx(Ky)^{-1}Ky$$
$$= K \cdot K = K \quad ,$$

de donde $x^{-1}y^{-1}xy \in K$ $\quad \therefore [G,G] \leq K$.

Ahora supongamos que $[G,G] \leq K$.

Sea $k \in K$ y considerese el producto $(g^{-1}kg)k^{-1}$ que es un conmutador, entonces

$g^{-1}kgk^{-1} \in [G,G]$ y por tanto $g^{-1}kgk^{-1} \in K$.

Si $g^{-1}kgk^{-1} \in K$ entonces $g^{-1}kgk^{-1} \cdot k = k^{g} \in K$

$$\therefore K \triangleleft G.$$

Por hipótesis $[G,G] \leq K$, implica que $x^{-1}y^{-1}xy \in K$ y por lo tanto $KxKy = Kxy(y^{-1}x^{-1}yx) = K(xyy^{-1}x^{-1})yx$

$$= Kyx = KyKx$$

$$\therefore G/K \text{ es abeliano}.$$

vii) Sean $K, H \lhd G$ y $K \subseteq H$ entonces $H/K \leq Z(G/K)$

i.e. $\{Kh\}_{h\in H} \subseteq Z(G/K)$

Supongamos que $H/K \leq Z(G/K)$ entonces $\forall h \in H$ y $x \in G$ se tiene que $KhKx = KxKh \Rightarrow KhKxKh^{-1}Kx^{-1} = K$
$\Rightarrow Khxh^{-1}x^{-1} = K \Rightarrow [h,x] \in K \Rightarrow [H, G] \subseteq K$.

Recíprocamente, supongamos que $[H, G] \leq K$.
Sea $h \in H$ y $x \in G$ entonces $[h,x] \in K \Rightarrow Khxh^{-1}x^{-1} = K$
$\Rightarrow KhKx = KxKh \Rightarrow Kh \in Z(G/K)$ $\therefore H/K \leq Z(G/K)$.

viii) Sean $h \in H$, $k \in K$ y ϕ un endomorfismo de G entonces

$$[h,k]^{\phi} = (h^{-1}k^{-1}hk)^{\phi} = \phi(h^{-1})\phi(k^{-1})\phi(h)\phi(k)$$
$$= \phi(h)^{-1}\phi(k)^{-1}\phi(h)\phi(k) = [h^{\phi}, k^{\phi}]$$

Ahora si $H, K \lhd G$ y tomando para ϕ los automorfismos interiores inducidos por los elementos $x \in G$ implican que $[H,K] \lhd G$.

ix) por i) $[hk, l] = [h,l]^k[k,l] = k^{-1}h^{-1}l^{-1}hlkk^{-1}l^{-1}kl$

$$= k^{-1}h^{-1}kk^{-1}l^{-1}kk^{-1}hkk^{-1}lkk^{-1}l^{-1}kl$$
$$= h'^{-1}l'^{-1}h'l'k^{-1}l^{-1}kl = [h', l'][k,l]$$

$\therefore$ $[HK, L] = [H,L][K,L]$

Usando las propiedades elementales de los conmutadores, definimos una sucesión de subgrupos de G, a la cual llamamos serie central descendente y está dada por la regla

$$L_1(G) = G$$
$$L_2(G) = [G, G]$$
$$\vdots$$
$$L_i(G) = [L_{i-1}(G), G] \quad \text{para } i \geq 2.$$

27. Definición: Un subgrupo H de G se dice que es un *subgrupo característico* de G, si $T(H) \subset H$ para todo $T \in Aut(G)$. Denotado por H char G.

28. Teorema: *i)* $L_i(G)$ char G para toda i.

ii) $L_{i+1}(G) \subset L_i(G)$ y $L_i(G)/L_{i+1}(G)$ está contenido en el centro de $G/L_{i+1}(G)$.

Demostración: *i)* Procedemos por inducción.

Sea $\phi \in Aut(G)$ entonces $G^{\phi} = G$ y

$L_{i+1}(G)^{\phi} = [L_i(G)^{\phi}, G]$ por 26. viii),

Supongamos que $L_i(G)^{\phi} = L_i(G)$ por hipótesis de inducción

entonces $L_{i+1}(G)^{\phi} = [L_i(G)^{\phi}, G] = [L_i(G), G] = L_{i+1}(G)$

$\therefore L_i(G)$ char $G \quad \forall i = 1, 2, \ldots$

ii) Por inducción sobre i, para $i=1$ $L_2(G) = G' \subset G$,

y por 26. vi) se tiene que $G' \triangleleft G$ y G/G' es abeliano.

Supongamos por hipótesis de inducción que

$L_i(G) \subset L_{i-1}(G)$ y que $L_{i-1}(G)/L_i(G) \subseteq Z(G/L_i(G))$.

Sea $L_{i+1}(G) = [L_i(G), G] \subseteq [L_{i-1}(G), G] = L_i(G)$

y como $L_i(G)$ char G entonces $L_{i+1}(G) \triangleleft G$.

$$\therefore L_{i+1}(G) \subseteq L_i(G).$$

Ahora falta por demostrar $L_i(G)/L_{i+1}(G) \subseteq Z(G/L_{i+1}(G))$

Sea $\rho: G \to G/L_{i+1}(G)$ el mapeo natural de G sobre $G/L_{i+1}(G)$ definido por $g^\rho = gL_{i+1}(G) = \bar{g}$, $g \in G$

$\operatorname{Ker} \rho = L_{i+1}(G)$,

los elementos $\bar{\ell}$ de $L_i(G)/L_{i+1}(G)$ son de la forma $\bar{\ell} = \ell L_{i+1}(G)$, $\ell \in L_i(G)$.

Sean $\ell \in L_i(G)$ y $g \in G$ entonces

$[\ell, g]L_{i+1}(G) = [\bar{\ell}, \bar{g}] = [\ell^\rho, g^\rho] = [\ell, g]^\rho$ y por definición de $L_{i+1}(G)$; como $L_{i+1}(G)$ char G, entonces

$[\ell, g]L_{i+1}(G) = L_{i+1}(G)$ de donde $\ell g L_{i+1}(G) = g\ell L_{i+1}(G)$,

i.e. $\ell L_{i+1}(G) g L_{i+1}(G) = g L_{i+1}(G) \ell L_{i+1}(G)$ lo que implica que

$$\therefore L_i(G)/L_{i+1}(G) \subseteq Z(G/L_{i+1}(G)).$$

CAPITULO I.

En este capítulo veremos algunas propiedades de los p-grupos, subgrupos cíclicos, producto directo y p-subgrupos de Sylow.

29. Teorema: Sea G un grupo y H un subgrupo de G, contenido en el centro de G.

Si G/H es cíclico entonces G es abeliano.

Demostración: Si $H \subseteq Z(G)$ entonces H es normal en G.

Como G/H es cíclico, cada elemento es una potencia de algún elemento de G/H, i. e. $\exists$ Hx una clase lateral tal que $\forall\, Hy \in G/H$ se tiene que $Hy = (Hx)^n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$.

Pero $(Hx)^n = \underbrace{(Hx)\cdots(Hx)}_{n \text{ veces}}$ y por lo tanto $G = \bigcup\limits^{n} Hx^n$

Sean $z, w \in G$ entonces existen $h, k \in H$ y $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $z = hx^r$, $w = kx^s$ por lo que

$$
\begin{aligned}
zw &= (hx^r)(kx^s) = h(x^r k)x^s = h(kx^r)x^s = (hk)(x^{r+s}) \\
&= (hk)(x^{r+s}) = (kh)(x^{s+r}) = (kh)(x^s x^r) = k(hx^s)x^r \\
&= k(hx^s)x^r = k(x^s h)x^r = (kx^s)(hx^r) = wz
\end{aligned}
$$

lo que implica que $zw = wz$ $\quad\therefore G$ es abeliano.

30. Teorema: Un p-grupo tiene las siguientes propiedades

i) $Z(G) \neq \{1\}$.

ii) Si $H \subsetneq G$ entonces $N_G(H) \supset H$.

iii) Si H es un subgrupo maximal de G entonces $|G:H| = p$.

iv) Un grupo G de orden p^2 es abeliano.

Demostración: i) Utilizando la ecuación de clase $|G| = |Z(G)| + \sum |G : C(x_i)|$, donde $|G : C_G(x_i)|$ es el número de elementos de las distintas clases conjugadas de G, X_i un elemento arbitrario fuera de $Z(G)$, con clase de conjugación C_i, es decir, $Z(G) \cap C_i = \emptyset$.

Como $|G| = p^n$ y $p \mid |G : C_G(x_i)|$ entonces $p \mid \sum |G : C_G(x_i)$ lo que implica que $p \mid |Z(G)|$, dado que $|Z(G)| \geq 1$ se tiene $Z(G) \neq \{1\}$

ii) Sea $|G| = p^n$. Por inducción sobre n.

observación: Si G es abeliano, no hay nada que probar, pues $N(H) = G$, $\forall H \subsetneq G$.

a) Si $n = 1$ entonces $|G| = p$ por lo que G es cíclico y $\therefore G$ es abeliano.

b) Supongamos que $n > 1$ y sea $\{1\} \neq H \subsetneq G$, $H \nleq G$

1er caso Si $Z(G) \not\subset H$ entonces $|Z(G) \cdot H| = \dfrac{|Z(G)| \cdot |H|}{|Z(G) \cap H|} > |H|$

de donde $H \subseteq Z(G) \cdot H \subset N_G(H)$ ya que $Z(G) \subset N_G(H)$

$$\therefore \quad H \subsetneq N_G(H).$$

2º Caso Si $Z(G) \subset H$

tal que
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] & G/Z(G) \\ H \arrow[u] \arrow[r, "\pi|_H"] & H/Z(G) \arrow[u] \end{tikzcd}$$
$$h \longmapsto hZ(G)$$

$|G/Z(G)| < |G|$ puesto que $Z(G) \neq \{1\}$

Observación : $H/Z(G) \subsetneq G/Z(G)$

Por hipótesis de inducción $H/Z(G) \subsetneq N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$

entonces existe $\bar{x} \in N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$ tal que $\bar{x} \notin H/Z(G)$.

Si $\bar{x} \in N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$ entonces $[xZ(G)]^{-1} H/Z(G) [xZ(G)] = H/Z(G)$

i.e. $x^{-1}Z(G)\, H/Z(G)\, xZ(G) = H/Z(G)$

$\forall h \in H$ $x^{-1}Z(G)hZ(G)xZ(G) = x^{-1}hxZ(G) \in H/Z(G)$ entonces

$x^{-1}hxZ(G) = h'Z(G)$ para alguna $h' \in H$, por lo que

$h'^{-1}x^{-1}hxZ(G) = Z(G)$, donde obtenemos $h'^{-1}x^{-1}hx \in Z(G) \subset H$,

lo que implica que $x^{-1}hx \in h'H = H$ $\forall h \in H$ por consiguiente

$x^{-1}hx \in H$, como $\bar{x} \notin H/Z(G)$, $x \notin H$.

Así que $x \in N_G(H) \setminus H$. $\therefore$ $H \subsetneq N_G(H)$.

iii) Supongamos $|G| = p^n$ y H maximal.

Como $H \subsetneq N_G(H)$ entonces $N_G(H) = G$ i.e. $H \triangleleft G$.

Consideremos $G \longrightarrow G/H$

$x \longmapsto \bar{x}$ y por el teorema de correspondencia G/H tiene exactamente dos subgrupos por que si existe K/H tal que

$\{1\} \neq K/H \subsetneq G/H$ entonces $H \subsetneq K \subsetneq G$ ¡

ya que H es maximal. Entonces $|G/H| = p \therefore |G:H| = p$.

iv) Sea G un grupo tal que $|G| = p^2$, por i) $Z(G) \neq \{1\}$.

Observación: Si $G = Z(G)$ entonces G es abeliano.

Supongamos que $Z(G) \neq G$ entonces $|Z(G)| = p$.

Esto implica que $|G/Z(G)| = p$ y por 21. y 29.

G es abeliano.

31. Teorema: Sean $G_1, \ldots, G_n$ subgrupos normales de G, que satisfacen las condiciones siguientes:

a) $G = G_1 G_2 \cdots G_n$.

b) $G_i \cap G_1 G_2 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n = \{1\}$, $1 \leq i \leq n$.

entonces i) La aplicación $\phi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de G en $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ es un isomorfismo.

ii) Toda $x \in G$ tiene una representación única de la forma $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ con $x_i \in G_i$, $1 \leq i \leq n$.

Demostración: Sean $x_i \in G_i$, $y_j \in G_j$ $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq n$, como $G_i \triangleleft G$ $\forall i = \{1,\ldots,n\}$ nos lleva a que $x_i^{-1} y_i^{-1} x_i \in G_j$, $y_j^{-1} x_i y_j \in G_i$
$1 \leq i,j \leq n$ $\quad$ $1 \leq i,j \leq n$

entonces $[x_i, y_j] \in G_i \cap G_j$, pero $G_i \cap G_j = \{1\}$ $\quad i \neq j$

por lo que $[x_i, y_j] = 1$, $\quad \therefore x_i y_j = y_j x_i$

Ahora veamos la aplicación $\phi : G_1 G_2 \ldots G_n \longrightarrow G_1 \times G_2 \cdots \times G_n$

tal que $\phi(g) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$

Sean $g, h \in G$ con $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ y $h = h_1 h_2 \ldots h_n$ entonces

$$\phi(gh) = \phi(g_1 g_2 \ldots g_n h_1 h_2 \ldots h_n) = \phi(g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_n h_n), \quad g_i h_j = h_j g_i$$
$$= (g_1 h_1, g_2 h_2, \ldots, g_n h_n) = (g_1, g_2, \ldots g_n)(h_1, h_2, \ldots, h_n) \quad 1 \leq i,j \leq n$$
$$= \phi(g)\phi(h) \qquad \therefore \phi \text{ es homomorfismo.}$$

Sea $K = \{x \in G \mid \phi(x) = \bar{1}\}$ y $X = x_1 x_2 \ldots x_n$ entonces

$\phi(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{1}$ entonces $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$

si y sólo si $X = 1$ lo que implica que $K = \{1\}$ $\therefore \phi$ es inyectiva.

Sea $g' = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G_1 \times G_2 \cdots \times G_n$, tomamos $g = g_1 g_2 \cdots g_n \in G$

entonces $\phi(g) = (g_1, g_2, \ldots, g_n) = g'$ $\therefore \phi$ es supraoyectiva

$\therefore \phi$ es un isomorfismo.

ii) Sea $g_1 g_2 \ldots g_n = g \in G$ con $g_i \in G_i$, $1 \leq i \leq n$, supongamos

$g = g_1' g_2' \cdots g_n'$ otra representación con $g_i' \in G_i$ $1 \leq i \leq n$, donde $g_1 \neq g_1'$

y puesto que cada $G_i \triangleleft G$, $1 \leq i \leq n$, obtenemos

$$g_1^{-1} g_1' = (g_2 \ldots g_n)(g_2' \ldots g_n')^{-1} = (g_2 \ldots g_n)(g_2'' \ldots g_n'')$$
$$= (g_2 \ldots g_n)(g_2'' \ldots g_n'') = (g_2 g_2'' \ldots g_n g_n'') = (g_2 g_2'') \ldots (g_n g_n''), \text{ esto es}$$

una contracción por b), por tanto la representación es única.

32. Notación: Π es un conjunto de números primos. Π' el conjunto de todos los números primos que no están en Π.

$\Pi(G)$ el conjunto de números que dividen el orden de un grupo G.

33. Definicion: Sea $x \in G$, x es un Π-elemento Si $|x|$ es divisible por números primos en Π.

34. *Teorema*: i) Si G es cíclico con $|G|=n$ y $m|n$, entonces G posee un único subgrupo de orden m y éste es cíclico. En particular, todo subgrupo de G es característico.

ii) Un grupo abeliano es cíclico si y sólo si todos sus subgrupos de Sylow son cíclicos.

iii) Si $x \in G$ y $\Pi(\langle x \rangle)=\{p_1,\dots,p_r\}$, entonces x puede representarse en forma única como $x=x_1x_2\cdots x_r$, donde x_i es un p_i-elemento y x_i conmuta con x_j $1\leq i,j \leq r$.

Demostración: Si G es cíclico entonces $\langle x \rangle = G$ y $|x|=n$ Supongamos que $m|n$ entonces consideremos los m elementos $\{x^{in/m}\} = \langle x^{n/m}\rangle$, $1 \leq i \leq m$. Si $x^{jn/m} = x^{kn/m}$, $1\leq j,k \leq m$. entonces $x^{n(j-k)/m}=1$ lo que implica que $n|n(j-k)/m$, es decir, $n/m\,(j-k)=nt$ de donde $j-k=mt$, pero implica que $t=0$ ya que $1\leq j,k\leq m$, entonces $j-k=0$, así que $j=k$. por tanto $|\langle x^{n/m}\rangle|=m$, por lo que hay un subgrupo cíclico G de orden m.

Ahora sea $K \leq G$ tal que $|K| = m$ y $K = \{x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_m}\}$ $1 \leq r_i \leq n$

Supongamos que $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_m$. Por demostrar que $\langle x^{r_1} \rangle = K$ i.e. $x^{r_j} = (x^{r_1})^z$, $1 \leq z \leq m$

por el algoritmo de la división $r_j = r_1 p + b$, $0 \leq b < r_1$ entonces $x^{r_j} = x^{r_1 p + b} = (x^{r_1})^p x^b$ lo que implica que

$$x^{r_j - r_1 p} = x^b$$

, como $x^{r_j - r_1 p} \in K$, se tiene que $x^b \in K$, pero r_1 es el mínimo valor tal que $x^{r_1} \in K$.

así que $b = 0$, $\therefore$ $x^{r_j} = (x^{r_1})^p$, además $p = j$

en particular $r_m = (r_1) m = n$, de donde $r_1 = n/m$

$\therefore$ Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

Por último, sea $\phi \in Aut(G)$ y sea $x \in G$ tal que $\langle x \rangle = G$, si $\phi(x) = x^r$ entonces $\phi(x^s) = (\phi(x))^s = x^{rs}$.

$\therefore$ Todo subgrupo de G es característico.

ii) En particular, los subgrupos de Sylow de G son todos cíclicos.

Inversamente, si G es un grupo abeliano con subgrupos de Sylow cíclicos $P_i = \langle x_i \rangle$, $1 \leq i \leq r$, es inmediato que el elemento $x = x_1 x_2 \cdots x_r$ tiene orden $n = \prod^{r} |P_i|$, pero $|G| = n$ por el teorema 31, por lo que x genera a G $\therefore$ G es cíclico.

iii) Sea $G_0 = \langle x \rangle$ que es cíclico por el inciso anterior, si existen p_i-elementos x_i' en G_0 tal que $x' = x_1' x_2' \ldots x_r'$ genera a G_0 entonces $x = x'^t$ para alguna t y así $x = x_1 x_2 \ldots x_r$ donde $x_i = x_i'^t$ es un p_i-elemento, $1 \leq i \leq r$.

Como cada $x_i \in G_0$, entonces estos elementos conmutan por parejas.

Suponemos que $x = u_1 u_2 \ldots u_r$, con u_i un pi-elemento y u_i conmuta con u_j, $1 \leq i, j \leq r$.

Escribimos $|x| = p_i^{e_i} q_i$ para enteros apropiados e_i, q_i con $(p_i, q_i) = 1$ entonces $|x_i| = |u_i| = p_i^{e_i}$ y x_j, u_j tienen divisor de q_i para $i \neq j$.

Por tanto $x^{q_i} = (x_1 x_2 \ldots x_r)^{q_i} = x_1^{q_i} x_2^{q_i} \cdots x_r^{q_i} = x_i^{q_i}$.

De modo análogo $x^{q_i} = u_i^{q_i}$ por lo que $x_i^{q_i} = u_i^{q_i}$.

Escogiendo K tal que $q_i K \equiv 1 \pmod{p^{e_i}}$, se sigue $x_i = x_i^{q_i K} = u_i^{q_i K} = u_i$ $\therefore$ x_i está determinada únicamente.

35. Teorema: Si todo subgrupo de Sylow de G es normal entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Demostración: Sea $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, por hipótesis un p-grupo de Sylow P_i de G es normal en G, $1 \leq i \leq r$. Entonces P_i es el único pi-subgrupo de Sylow de G, por el teorema de Sylow, contiene cada pi-elemento de G. Pero si $x \in G$ $\pi(\langle x \rangle) \subseteq \pi(G)$ y $x = x_1 x_2 \ldots x_r$, donde x_i es un pi-elemento, $1 \leq i \leq r$. por 34. iii).

Por lo tanto $x_i \in P_i$ y $x \in P_1 P_2 \ldots P_r$ es una representación única,

$$\therefore \quad G = P_1 P_2 \ldots P_r.$$

Además, cualquier producto de los P_i-grupos es un subgrupo y la iterada aplicación del teorema 18. implica que $Q_i = P_1 P_2 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_r$ es un p_i'-grupo, $1 \leq i \leq r$. Entonces $Q_i \cap P_i = \{1\}$, $1 \leq i \leq r$ y por el teorema 31. se sigue que G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

36. Teorema: (Argumento de Frattini).

Si $H \triangleleft G$ y P es un p-subgrupo de Sylow de H, entonces $G = N_G(P) H$.

Demostración:

Para $x \in G$, tenemos $P^x \subseteq H^x = x^{-1} H x = H$ ya que por hipótesis $H \triangleleft G$,

Como $|P^x| = |P|$, entonces P^x también es un p-subgrupo de Sylow de H y así es conjugado a P por un elemento y de H por el teorema de Sylow.

Entonces $P^x = P^y$ y por tanto $P^{xy^{-1}} = P$, de donde $xy^{-1} \in N_G(P)$, como $x = (xy^{-1}) y$ y x es arbitrario implica por tanto $G = N_G(P) H$.

Propiedades de algunos subgrupos característicos

37. Definición: La serie central está definida por la regla

$$Z_0(G)=1$$

$$Z_1(G)=Z(G)$$

$$\vdots$$

$Z_i(G)$ es la imagen inversa en G de $Z(G/Z_{i-1}(G))$ $i>1$.

Observaciones: Supongamos que $Z_i(G) \triangleleft G$ entonces existe

$$J_i : G \longrightarrow G/Z_i(G) \quad \text{tal que}$$

$$g \longmapsto g\,Z_i(G)$$

pero $Z_{i+1}(G) = J_i^{-1}(Z(G/Z_i(G)))$

$$\therefore \; Z_{i+1}/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$$

Como $Z(G/Z_i(G))$ es el centro de $G/Z_i(G)$ entonces

$Z(G/Z_i(G)) \triangleleft G/Z_i(G)$, por el teorema de correspondencia,

$Z_{i+1}(G) \triangleleft G$ y por construcción se tiene la

serie central ascendente $\{1\}=Z_0(G) \subset Z_1(G) \subset \cdots \subset Z_n(G) \subset Z_{n+1}(G) \subset \cdots$

38. Teorema: El centro de un grupo es un subgrupo característico.

Demostración: Para un automorfismo ϕ, $G^{\phi}=G$

y para $z \in Z(G)$, $xz=zx$ $\forall x \in G$ entonces

$x^{\phi}z^{\phi}=(xz)^{\phi}=(zx)^{\phi}=z^{\phi}x^{\phi}$ $\forall x \in G$, por lo que

$z^{\phi} \in Z(G)$ para $z \in Z(G)$ $\therefore$ $Z^{\phi}(G) \subseteq Z(G)$.

39. Teorema: i) Si H char K y K char G, entonces H char G.

ii) Si H char K y $K \lhd G$, entonces $H \lhd G$.

iii) Si $H \lhd G$, entonces $\phi(H) \lhd G$, $\phi \in Aut(G)$.

iv) Si $H \subseteq K$ subgrupos de G tales que H char G y K/H char G/H entonces K char G.

Demostración: i) Sean $\phi \in Aut(G)$ y $\phi_K : K \to K$ tal que $\phi_K(K) = K$ entonces $\phi_K(H) = H$ y $\phi_K(h) = h' = \phi(h)$, como tiene la misma regla de correspondencia $H^{\phi} = H$

$\therefore$ H char G.

ii) Sea $g \in G$, como $K \lhd G$ definimos $\phi_g(k) = k^g$, $k \in K$ entonces $\phi_g \in Aut(K)$, de donde $H^{\phi_g} = H$, lo que implica que $\forall g \in G$ $h^{\phi_g} = h^g \in H$ $\therefore$ $H \lhd G$.

iii) Si $g \in G$ entonces $g^{-1}Hg = H$, sea $\phi \in Aut(G)$ y $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que $\phi(g') = g$, así que $H^{g'} = H$, aplicando ϕ, $\phi(H^{g'}) = \phi(H)$, pero

$\phi(H^{g'}) = \phi(g')^{-1} H^{\phi} \phi(g') = g^{-1} H^{\phi} g = H^{\phi}$ $\therefore$ $H^{\phi} \lhd G$.

iv) Sea $\phi \in Aut(G)$ entonces $H^{\phi} = H$.

sea $\bar{\phi} : G/H \longrightarrow G/H$ tal que $\bar{\phi}(gH) = \phi(g)H$.

$(K/H)^{\bar{\phi}} = K/H$ implica que $\bar{\phi}(kH) \in K/H$

pero $\bar{\phi}(kH) = \phi(k)H$ entonces $\phi(k) \in K$

$\therefore K$ char G.

40. Teorema: Cada $Z_i(G)$ es un subgrupo característico de G.

Demostración: Por inducción sobre n,

sea $\phi \in Aut(G)$ entonces $Z_0^{\phi}(G) \subseteq Z_0(G)$,

$Z_1^{\phi}(G) \subseteq Z_1(G)$ por 38., $Z_n^{\phi}(G) \subseteq Z_n(G)$

por hipótesis de inducción, ahora tomando

$H = Z_n(G)$ y $K = Z_{n+1}(G)$ en 39. iv) y por 38.

nuevamente, se concluye $Z_{n+1}(G)$ char G.

Caracterizaciones de grupos nilpotentes

41. Definición: Un grupo G es nilpotente si la serie central descendente

$$G = L_1(G) \supseteq L_2(G) \supseteq \ldots \supseteq \ldots$$ es tal que $L_m(G) = \{1\}$ para alguna m.

Si $n+1$ es el mínimo valor de m que cumple con la última condición, entonces n es llamada la clase de G. Denotada por $cl(G)$.

42. Teorema: i) G es nilpotente si y sólo si $Z_m(G) = G$ p.a. m.

ii) Si G tiene clase n, entonces n es el menor entero tal que $Z_n(G) = G$.

Demostración: Sea G nilpotente de $cl(G)=n$. Sean $L_i(G)=L_i$ y $Z_i(G)=Z_i$. Demostraremos que $L_{n+1-r} \subseteq Z_r$ $\forall r$. Tenemos que $1 = L_{n+1} = Z_0$. Suponemos por inducción que $L_{n+1-i} \subseteq Z_i$. Por el teorema 28. $L_{n-i}/L_{n+1-i} \subseteq Z(G/L_{n+1-i})$. Por la presente suposición G/Z_i es imagen homomórfica de G/L_{n+1-i}, de donde $L_{n-i}Z_i/Z_i \subseteq Z(G/Z_i)$. Por lo tanto

$$L_{n-i}Z_i \subseteq Z_{i+1},$$ por definición de Z_{i+1}.

De donde tenemos que $L_{n-i} \subseteq Z_{i+1}$, probando la afirmación, por lo que se sigue que $G = L_1 \subseteq Z_n$ para $i = n-1$, y en consecuencia $Z_n(G) = G$.

Inversamente, Suponemos que $Z_m(G) = G$ para algún m.
Inferimos que $L_{r+1} \subseteq Z_{m-r}$. Tenemos que $L_1 = G = Z_m$;
Supongamos que $L_i \subseteq Z_{m+1-i}$. Como $L_{i+1} = [L_i, G]$,
tenemos que $L_{i+1} \subseteq [Z_{m+1-i}, G]$. Ahora por 26. vii),
$[Z_{m+1-i}, G] \subseteq Z_{m-i}$ ya que $Z_{m+1-i}/Z_{m-i} \subseteq Z(G/Z_{m-i})$.
Pero entonces $L_{i+1} \subseteq Z_{m-i}$, probando la afirmación.
En particular, tenemos que $L_{m+1} \subseteq Z_0 = 1$ y por tanto $m \geq n$. Así, n es el menor entero tal que $Z_n(G) = G$.

43. Teorema: Sean G_1 y G_2 dos grupos y $N_1 \triangleleft G_1$, $N_2 \triangleleft G_2$ entonces $(G_1 \times G_2 / N_1 \times N_2) \simeq (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

Demostración: Consideremos la aplicación $\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$
dada por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1N_1, x_2N_2)$. Es claro que ϕ es homomorfismo.
$\phi(a_1, b_1) = \bar{1} \Leftrightarrow (a_1N_1, b_1N_2) = \bar{1} \Leftrightarrow a_1 \in N_1, b_1 \in N_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1) \in N_1 \times N_2$.
$\therefore$ $\operatorname{Ker} \phi = N_1 \times N_2$.
Sean $a_1 \in G_1$, $b_1 \in G_2$ y $(a_1N_1, b_1N_2) \in (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$
entonces $(a_1N_1, b_1N_2) = \phi(a_1, b_1)$, por tanto ϕ es suprayectiva y por el primer teorema de isomorfismo

$$(G_1 \times G_2 / N_1 \times N_2) \simeq (G_1/N_1) \times (G_2/N_2).$$

44. Teorema : Si H_1, H_2 son dos grupos entonces

$$Z(H_1 \times H_2) = Z(H_1) \times Z(H_2)$$

Demostración: $(l_1, l_2) \in Z(H_1) \times Z(H_2)$ si y sólo si

$$l_1 h_1 = h_1 l_1 \ \forall h_1 \in H_1 \ \text{y} \ l_2 h_2 = h_2 l_2 \ \forall h_2 \in H_2$$

si y sólo si $(l_1 h_1, l_2 h_2) = (h_1 l_1, h_2 l_2) \ \forall h_1 \in H_1 \text{ y } \forall h_2 \in H_2$

si y sólo si $(l_1, l_2)(h_1, h_2) = (h_1, h_2)(l_1, l_2) \ \forall (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$

si y sólo si $(l_1, l_2) \in Z(H_1 \times H_2)$. $\therefore Z(H_1 \times H_2) = Z(H_1) \times Z(H_2)$.

45. Teorema: $Z_n(H_1 \times H_2) = Z_n(H_1) \times Z_n(H_2) \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Demostración: i) Si $n=1$ es inmediato por el teorema 44.

ii) Supongamos por hipótesis de inducción que

$Z_i(H_1 \times H_2) = Z_i(H_1) \times Z_i(H_2)$. Por demostrar que

$Z_{i+1}(H_1 \times H_2) = Z_{i+1}(H_1) \times Z_{i+1}(H_2)$.

Por definición $Z_{i+1}(H_1 \times H_2) = j_{i+1}^{-1}\left(Z\left(\frac{H_1 \times H_2}{Z_i(H_1 \times H_2)}\right)\right)$ por lo que

$Z_{i+1}(H_1 \times H_2) = j_{i+1}^{-1}\left(Z\left(\frac{H_1 \times H_2}{Z_i(H_1) \times Z_i(H_2)}\right)\right)$ por hipótesis de inducción

$$= j_{i+1}^{-1}\left(Z\left(H_1/Z_i(H_1) \times H_2/Z_i(H_2)\right)\right) \text{ por el teorema 43.}$$

$$= j_{i+1}^{-1}\left(Z\left(H_1/Z_i(H_1)\right) \times Z\left(H_2/Z_i(H_2)\right)\right) \text{ por el teorema 44.}$$

$$= j_{i+1}'^{-1}\left(Z\left(H_1/Z_i(H_1)\right)\right) \times j_{i+1}''^{-1}\left(Z\left(H_2/Z_i(H_2)\right)\right)$$

$$= Z_{i+1}(H_1) \times Z_{i+1}(H_2)$$

$$\therefore Z_n(H_1 \times H_2) = Z_n(H_1) \times Z_n(H_2).$$

46. Teorema: i) Subgrupos e imagenes homomórficas de grupos nilpotentes son nilpotentes.

ii) El producto directo de grupos nilpotentes es nilpotente.

iii) Todo p-grupo es nilpotente.

Demostración: Sea G un grupo nilpotente,

i) Si $H \triangleleft G$, se sigue que $Z_0 = \{1\}$ se mapea trivialmente en $\{1\}$ sup. por H.I que $Z_i(G)$ se mapea en $Z_i(G/H)$, por demostrar $Z_{i+1}(G) \longrightarrow Z_{i+1}(G/H)$

Sean $Z_{i+1}(G) = j_i^{-1}(Z(G/Z_i(G)))$,

$Z_{i+1}(G/H) = J_i^{-1}(Z(\frac{G/H}{Z_i(G/H)}))$ y el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "j_i"'] & G/H \arrow[r, "J_i"] & \frac{G/H}{Z_i(G/H)} \\ & Z(G/Z_i(G)) \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

entonces $\overline{\phi} \circ j_i = J_i \circ \phi$

sea $g \in Z_{i+1}(G) \Rightarrow j_i(g) \in Z(G/Z_i(G))$

$\Rightarrow \overline{\phi} \circ j_i(g) \in Z(\frac{G/H}{Z_i(G/H)}) \Rightarrow J_i \circ \phi(g) \in Z(\frac{G/H}{Z_i(G/H)})$

$\Rightarrow \phi(g) \in J_i^{-1}(Z(\frac{G/H}{Z_i(G/H)})) = Z_{i+1}(G/H)$,

de donde $Z_n(G/H) = G/H$ p.a. $n \in \mathbb{Z}$

y $\therefore$ G/H es nilpotente.

b) Verifiquemos que si $H \{ G$ entonces $L_i(H) \subset L_i(G)$.

Observemos que si $i=1$ es obvio. Supongamos por H.I. que $L_i(H)$ $L_i(G)$. Consideremos $L_{i+1}(H) = [L_i(H), G]$ entonces $L_{i+1}(H) = [L_i(H), G] \subset [L_i(G), G] = L_{i+1}(G)$.

$\therefore L_{i+1}(H) \subset L_{i+1}(G)$. Como G es nilpotente, existe n tal que $L_{n+1}(G) = 1$, lo que implica que $L_{n+1}(H) = 1$

$\therefore$ H es nilpotente.

(ii) Sea $\{H_i\}_1^n$, una familia de grupos nilpotentes,

a) Si $n=1$ es obvio, b) Si $n=2$, sean H_1 y H_2 tal que $Z_{m_1}(H_1) = H_1$, $Z_{m_2}(H_2) = H_2$, $cl(H_1) = m_1$ y $cl(H_2) = m_2$, $Z_{n_1}(H_1 \times H_2) = Z_{n_1}(H_1) \times Z_{n_1}(H_2) = H_1 \times H_2$, por Teorema 45., donde $n_1 = \text{máx}\{m_1, m_2\}$, lo que implica que $Z_{n_1}(H_1 \times H_2) = H_1 \times H_2$ p.a. n_1,

$\therefore$ $H_1 \times H_2$ es nilpotente

c) Sea $n > 2$, Supongamos que H_n y $\prod_1^{n-1} H_i$ son nilpotentes donde $Z_{m_i}(H_i) = H_i$ $\forall\, 1 \le i \le n$. Sea $m = \text{máx}\{m_i\}_1^n$ entonces por b) e hipótesis de inducción

$$Z_m\left(\prod_1^{n-1} H_i \times H_n\right) = Z_m\left(\prod_1^{n-1} H_i\right) \times Z_m(H_n) = \prod_1^{n-1} H_i \times H_n = \prod_1^{n} H_n$$

$\therefore$ $\prod_1^n H_i$ es nilpotente.

(iii) Si $G = \{1\}$ no hay nada que probar. Si $G \neq \{1\}$ entonces.

$Z_1(G) \neq \{1\}$ por 30.. Si $G/Z_1(G) \neq \{1\}$

$Z_2/Z_1 = Z(G/Z_1)$ y $Z_1 \subsetneq Z_2$

continuando el proceso construimos una serie central, si $Z_i \neq G$ entonces G/Z_i es un p-grupo no trivial, por tanto $Z_{i+1} \supsetneq Z_i$, por consiguiente $Z_r = G$ para algún r.

$\therefore$ G es nilpotente.

47. Teorema: Si G es nilpotente y $H \subset G$, entonces $N_G(H) \supsetneq H$.

Demostración: Sea i el mayor entero tal que $Z_i = Z_i(G) \subseteq H$. Entonces $Z_i \trianglelefteq G$ y, como G es nilpotente, tenemos que $Z_i \subsetneq Z_{i+1}$. Pero $[Z_{i+1}, G] \subseteq Z_i$ por el teorema 26. vii), lo que implica que $[Z_{i+1}, H] \subseteq H$. Y por el teorema 26. vi) $Z_{i+1} \subseteq N_G(H)$. Sin embargo $Z_{i+1} \nsubseteq H$ por nuestra elección maximal de i, por lo que concluimos $N_G(H) \supsetneq H$.

48. Teorema: Un grupo G es nilpotente si y sólo si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Demostración: Si G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow, entonces G es nilpotente por 46. ii) y iii).

Inversamente, si G es nilpotente, probaremos que sus subgrupos de Sylow son normales en G.

En verdad, si P es un p-subgrupo de Sylow de G, y $H = N_G(P) \subset G$, entonces $N = N_G(H) \supset H$ por el teorema 47. Pero P es un p-subgrupo de H y $H \triangleleft N$, así que $N = HN_N(P) = H \cdot H = H$ por el teorema 36., lo cual es una contradicción, $\therefore P \triangleleft G$. Ahora G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow por el teorema 35.

49. Teorema: Todo subgrupo maximal de un grupo nilpotente es normal.

Demostración: Sea M un subgrupo maximal del grupo nilpotente G. Como $N_G(M) \supsetneqq M$ entonces $N_G(M) = G$. $\therefore M \triangleleft G$.

50. Definición: Una serie $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = \{1\}$ se llama normal de G, si cada G_i es un subgrupo normal de G_{i-1}, $1 \le i \le n$.
Los grupos factores G_{i-1}/G_i son llamados factores en la serie normal.

51. Definición: Un grupo es simple, si $G \neq \{1\}$ y no contiene algún subgrupo normal propio.

52. Definición: Una serie normal $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = \{1\}$ se llama de composición, si cada G_i es un subgrupo maximal en G_{i-1}.
Los factores G_{i-1}/G_i son llamados sus factores de composición G_{i-1}/G_i.

53. Definición: Se llama grupo de Frattini de un grupo G, a la intersección de todos sus subgrupos maximales de G. Denotado por $\Phi(G)$.

54. Teorema: El subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ de un grupo nilpotente contiene al subgrupo conmutador.

Demostración: Todo subgrupo maximal M de un grupo nilpotente es un subgrupo normal, lo que implica que el factor G/M tiene orden primo, entonces G/M es abeliano, y por el teorema 26. vi) implica que $[G,G] \leq M \quad \forall M$ maximal, por lo tanto $[G,G] \leq \Phi(G)$.

55. Teorema: Si $\Phi(G) \supset [G,G]$ entonces todo subgrupo maximal de G es normal.

Demostración: $\Phi(G) \supset [G,G]$ y M es un subgrupo maximal de G, entonces $M \supset [G,G]$ que implica que $M \triangleleft G$.

56. Definición: Sea A un subgrupo de $Aut(G)$ y sea $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = \{1\}$ una serie normal de G.
A estabiliza la serie, si cada G_i es A-invariante y A actua trivialmente sobre cada factor G_{i-1}/G_i, $1 \leq i \leq n$.

Observación: A estabiliza la serie normal de G.

Esto es que A actua trivialmente sobre cada factor G_{i-1}/G_i, $1 \leq i \leq n$.

Sea $\phi \in A$, $A \subset Aut(G)$ tal que $\phi(G_i) = G_i$, es decir, cada G_i es A-invariante, entonces existe $\phi_i : G_{i-1}/G_i \longrightarrow G_{i-1}/G_i$ tal que

$$\phi_i(gG_i) = \phi(g)\, G_i \;, \quad g \in G_{i-1}$$

ϕ_i está bien definida, pues si hay dos clases que coinciden entonces estas también coinciden en la imagen, es decir, $gG_i = g'G_i$ entonces $g'^{-1}g\, G_i = G_i$, lo que implica que $g'^{-1}g \in G_i$ aplicando ϕ,

$$\phi(g'^{-1}g) = \phi(g')^{-1}\phi(g) \in G_i \qquad \therefore \phi(g')G_i = \phi(g)\, G_i \,.$$

57. Definición: $[H,A]$ es el subgrupo de H generado por todos los $h^{-1}h^{\phi}$ con $h \in H$ y $\phi \in A$, donde A es un subgrupo de $Aut(G)$.

58. Lema: Un subgrupo A de $Aut(G)$ estabiliza la serie normal

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = \{1\} \text{ si y sólo si}$$

A normaliza cada G_i y $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Demostración: Sea $\overline{G_i} = G_i/G_{i+1}$ y sea $\overline{x}$ la imagen en $\overline{G_i}$ del elemento x de G_i, entonces A estabiliza la serie si A normaliza cada G_i y

$$\phi(\overline{x}) = \overline{x} \qquad \forall\, \overline{x} \in \overline{G_i},\ \phi \in A \ ,\ 0 \leq i \leq n-1.$$

si y sólo si $[x, \phi] \in G_{i+1}$

$0 \leq i \leq n-1$, si y sólo si $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}$.

59. Definición: Un grupo G se llama soluble, si G tiene una serie normal $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = \{1\}$, en donde cada factor G_i/G_{i+1} es de orden primo.

60. Definición: Un grupo G se llama supersoluble, si G tiene una serie normal $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = \{1\}$, en donde cada factor G_i/G_{i-1} es cíclico y cada $G_i \triangleleft G$, $0 \leq i \leq r$

61. Definición: (Subgrupo de Fitting) $F(G)$ es el subgrupo de G, generado por todos los subgrupos normales nilpotentes.

62. Teorema: Sea G un grupo y P un p-subgrupo de Sylow de G entonces Si H es un subgrupo de G tal que $\mathcal{N}_G(P) \subset H$, H es su propio normalizador.

Demostración:

P un p-subgrupo de Sylow de H y $H \triangleleft \mathcal{N}_G(H)$ entonces

$$\mathcal{N}_G(H) = \mathcal{N}_{\mathcal{N}_G(H)}(P) \cdot H \subset \mathcal{N}_G(P) \cdot H = H, \quad \therefore \mathcal{N}(H) = H.$$

63. Teorema: Si $N \neq 1$, $N \triangleleft G$, G un grupo nilpotente entonces $N \cap Z(G) \neq 1$.

Demostración:

Sean $N^{(0)} = N,\ N^{(1)} = [N, G], \dots, N^{(i)} = [N^{(i-1)}, G], \dots$

de aquí tenemos $N^{(i)} \leq N$ y $N^{(i)} \leq L_i(G)$,

como G es nilpotente $L_m(G) = 1$ p.a. m.,

por tanto, existe n tal que $N^{(n)} \neq 1$, $N^{(n+1)} = 1$

de donde $[N^{(n)}, G] = 1$, así concluimos que

$N^{(n)} \leq N \cap Z(G) \quad \therefore N \cap Z(G) \neq 1$

64. Teorema: Sea G un grupo tal que todo maximal es normal entonces G es nilpotente.

Demostración:

Sea P un p-subgrupo de Sylow de G, Sea $N = \mathcal{N}_G(P)$, si $N \neq G$ entonces $\exists M$ subgrupo maximal tal que $N \subset M$, aplicando el teorema 62. $\mathcal{N}_G(M) = M$ ¡ya que $\mathcal{N}_G(M) = G$, por ser $M \triangleleft G$, así que $\mathcal{N}_G(P) = G$, que implica que $P \triangleleft G$,

$\therefore$ G es nilpotente.

65. Teorema: Si H y K son subgrupos normales nilpotentes de G entonces HK es normal nilpotente en G.

Demostración: Por inducción sobre $|G|$.

i) Si $|G|=1$ es obvio.

ii) Si $|G|>1$, supongamos cierto para $n<|G|$ entonces por hipótesis de inducción HK es nilpotente.

Supongamos $HK=G$.

K nilpotente $\Rightarrow Z(K)\neq 1$ P.D. $Z(K)\triangleleft G$

Sean $g\in G$, $h\in Z(K)$ y $k\in K$ entonces

$g^{-1}hgk = g^{-1}h(gkg^{-1})g = g^{-1}gkg^{-1}hg = kg^{-1}hg$ implica que

$g^{-1}hg\in Z(K)$, $\therefore Z(K)\triangleleft G$.

Sea $N=[H,Z(K)]\triangleleft G$ ya que

Si $g\in G$, $h\in H$, $k\in Z(K)$ entonces $g^{-1}h^{-1}k^{-1}hkg=[h,k]^{g}=[h^{g},k^{g}]$

i) Si $N=1$ entonces $Z(K)$ centraliza H

entonces $Z(K)\subset Z(HK)=Z(G) \Rightarrow Z(G)\neq 1$.

ii) Si $N\neq 1$ entonces $N\subset H$ porque $[h,k]=h^{-1}(k^{-1}hk)\in H$

Sea $L=N\cap Z(H)$ entonces $N\triangleleft H$ y como

H es nilpotente entonces $N\cap Z(H)\neq 1 \Rightarrow L\neq 1$

como $L=N\cap Z(H) \Rightarrow \underset{N\subset Z(K)}{L\subset N}$ y $L\subset Z(H)$

$\Rightarrow L\subset Z(HK)=Z(G)\Rightarrow Z(G)\neq 1$. $Z(G)$ es nilpotente, porque es abeliano, $G/Z(G)$ es nilpotente por hipótesis de inducción. $\therefore G$ es nilpotente.

66. Corolario: El subgrupo de G generado por todos sus subgrupos normales nilpotentes es un subgrupo normal nilpotente.

67. Definicion: Un grupo H es supernilpotente si y sólo si cada uno de sus subgrupos maximales es un subgrupo característico.

68. Teorema: Sea H para el cual la acción de $Aut(H)$ sobre sobre $H/\phi(H)$ es trivial, entonces H es supernilpotente. (H no necesariamente nilpotente).

Demostración: Sea $M \lessdot H$, M maximal y $\nabla \in Aut(H)$.

Para $x \in M$, $x\phi(H) = x^{\nabla}\phi(H)$, por lo que $x^{-1}x^{\nabla} \in \phi(H) \subseteq M$ entonces $x^{\nabla} \in M$.

$\therefore$ M char H $\forall$ M-maximal.

Grupos A-nilpotentes

69. Definición: Un grupo G es A-nilpotente.
Si todo maximal de G es A-invariante.

Si $A=Int(G)$ obtenemos la primera caracterización de los grupos nilpotentes. Se observa que si A es el grupo de automorfismos inducidos por el grupo de Fitting $F(G)$ entonces A estabiliza una serie de G y $F(G)$ es el mayor subgrupo normal de G con esta propiedad.

Para $A=Int(G)$ obtenemos los nilpotentes y para $A=Aut(G)$ los supernilpotentes.

Denotamos $\Delta(G)$ por la intersección de todos los subgrupos maximales no normales de G.

70. Definición: Un grupo G es A-Sylow de G.
Si por cada primo p divisor de $|G|$ existe un p-subgrupo de Sylow de G que es A-invariante.

71. Teorema: Si A es el grupo de automorfismos interiores inducidos por el subgrupo $\Delta(\varphi)$ entonces φ es A-nilpotente y $\Delta(\varphi)$ es el mayor subgrupo de φ con esta propiedad.

Demostración: Sea M un subgrupo maximal de φ y $h \in \Delta(\varphi)$ entonces $\phi_h \in A$

1° Si $M \triangleleft \varphi$ entonces $\phi_h(M) = M$.

2° Si $M \ntriangleleft \varphi$ entonces $h \in \Delta(\varphi) \subset M$, entonces $\phi_h(M) = M$.

$\therefore M$ es A-invariante , $\therefore \varphi$ es A-nilpotente.

Por otra parte, si φ es A-nilpotente para A grupo de automorfismos inducidos por un subgrupo H de φ entonces $\forall\, h \in H$ y M subgrupo maximal se tiene que

$\phi_h(M) = h^{-1}Mh = M \Rightarrow h \in N_\varphi(M)$ como M es maximal

$N_\varphi(M) = \begin{cases} M \\ \varphi \end{cases}$ Si $N_\varphi(M) = \varphi$ entonces $M \triangleleft \varphi$.

Si $N_\varphi(M) = M$ entonces $h \in M$ y $M \ntriangleleft \varphi$ por lo que h pertenece a todos los subgrupos maximales de φ que no son normales en φ i.e. $h \in \Delta(\varphi)$ $\therefore \Delta(\varphi) \subset H$.

72. Teorema: Si $Int(G) \leq A$ entonces G es A-Sylow Si y sólo si G es nilpotente.

Demostración: Sea G A-Sylow y para $p_i \in \Pi(G)$ existe P_i un p_i-subgrupo de Sylow de G, pues es A-invariante y como $Int(G) \leq A$ entonces $\forall g \in G$ $P_i^g = P_i$ de donde se tiene $P_i \triangleleft G$.

Y por los teoremas 35. y 46. implican que

$\therefore$ G es nilpotente.

Supongamos ahora que G es nilpotente, por el teorema 46. G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow, luego cada cada subgrupo de Sylow es normal en G, por lo que para primo $p \in \Pi(G)$, existe sólo un p-subgrupo P de Sylow de G.

Sea $\phi \in A$, como $\phi \in Aut(G)$ entonces P^{ϕ} es un p-subgrupo de Sylow de G y en consecuencia $P^{\phi} = P$.

$\therefore$ G es A-Sylow.

73. Teorema: Si G es nilpotente entonces la serie

$$G = Z_m(G) \supset Z_{m-1}(G) \geq \dots \geq Z_1(G) = Z(G) \supset Z_0(G) = \{1\}$$

es estabilizada por $A = Int(G)$.

Demostración: Sean $\phi_h \in A$ y $\phi_i : G \to G/Z_i(G)$ tal que $\bar{x} \in Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ con $x \in Z_{i+1}(G)$ entonces

$\phi_i(x^{-1}x^{\phi_h}) = \phi_i(x)^{-1}\phi_i(h)^{-1}\phi_i(x)\phi_i(h) = \bar{I} = Z_i(G)$ y en consecuencia $x^{-1}x^{\phi_h} \in Z_i(G)$. $\therefore$ $x \in \overline{\phi_h(x)}$.

74. Definición: Sean H, K grupos y $\Psi: K \to Aut(\varphi)$ entonces el producto semidirecto de H por K es el conjunto de parejas $(h,k) \in H \times K$ bajo la operación binaria $(h,k)(h_1,k_1) = (h\Psi(h_1), kk_1)$. Al producto semi-directo de H por K, se denota $H \times_\Psi K$.

75. Teorema: Sean H, K grupos y Ψ *un homomorfismo de* K *en* $Aut(H)$ Entonces existe un grupo φ de la forma HK con $H \triangleleft \varphi$ y $H \cap K = \{1\}$ tal que para $h \in H$, $k \in K$, *tenemos* $k^{-1}hk = \Psi_K(h)$.

Demostración: Sean $(h_1, x), (h_2, y), (h_3, z) \in H \times_\Psi K$.

i) $(h_1,x)(h_2,y)(h_3,z) = (h_1 \Psi_x(h_2), xy)(h_3, z) = (h_1 \Psi_x(h_2)\Psi_{xy}(h_3), xyz)$

$$= (h_1 \Psi_x(h_2)\Psi_x(\Psi_y(h_3)), xyz) = (h_1 \Psi_x(h_2 \Psi_y(h_3)), xyz)$$

$$= (h_1, x)(h_2 \Psi_y(h_3), yz) = (h_1, x)(h_2, y)(h_3, z).$$

por tanto el producto es asociativo.

ii) Como H y K son grupos, existe $(1,1) \in \varphi$

Sea $(h, k) \in \varphi$ entonces $(h,x)(1,1) = (h\Psi_x(1), x) = (h, x)$

y $(1,1)(h,x) = (1\Psi_1(h), x) = (h, x)$.

lo que implica que $(1,1)$ es el elemento identidad.

iii) Existe $(a,b) \in \mathcal{G}$, $\forall (h,x) \in \mathcal{G}$ tal que $(a,b)(h,x) = (h,x)(a,b) = \bar{1}$

por definición $(h,x)(a,b) = (h\psi_x(a), xb)$. Si (a,b) es inverso entonces $(h\psi_x(a), xb) = (1,1)$ por lo que $h\psi_x(a) = 1$ y $xb = 1$ lo que implica que $\psi_x(a) = h^{-1}$ y $b = x^{-1}$. De donde

$$(h,x)(\psi_{x^{-1}}(h^{-1}), x^{-1}) = (h\psi_x(\psi_{x^{-1}}(h^{-1})), 1) = (h\psi_{xx^{-1}}(h^{-1}), 1)$$
$$= (h\psi_1(h^{-1}), 1) = (hh^{-1}, 1) = (1,1).$$

$$(\psi_{x^{-1}}(h^{-1}), x^{-1})(h,x) = (\psi_{x^{-1}}(h^{-1})\psi_{x^{-1}}(h), 1) = (\psi_{x^{-1}}(h^{-1}h), 1) = (1,1).$$

$\therefore$ en $\mathcal{G}$ hay inversos $\quad\quad \therefore$ $\mathcal{G}$ es grupo.

76. Definición: Sea π un conjunto de primos y H un subgrupo de $\mathcal{G}$. Decimos que es un S_π- subgrupo de $\mathcal{G}$; si es un π-grupo y $|\mathcal{G}:H|$ no es divisible por primos de π. También llamado subgrupo de Hall. Cuando $\pi = \{p\}$, H es simplemente un p-subgrupo de Sylow de $\mathcal{G}$.

El siguiente teorema lo presentaremos sin demostración

77. Teorema: (Schur-Zassenhaus)

Sea H un π-subgrupo normal de $\mathcal{G}$ entonces

i) $\mathcal{G}$ posee un $S_{\pi'}$- subgrupo de K el cual es un complemento de H en $\mathcal{G}$.

ii) Si H ó $\mathcal{G}/H$ son solubles entonces dos $S_{\pi'}$-subgrupos de $\mathcal{G}$ son conjugados.

Observaciones:

i) Si $\Psi_x = 1_{\mathrm{Aut}(H)}$ $\forall x \in K$ entonces $H \times_\Psi K = H \times K$;
ya que si $(h_1, x)(h_2, y) = (h_1 h_2, xy)$ con $\Psi_x(h) = h$,
implica que $H \times_\psi K = H \times K$ $\forall h_1, h_2 \in H$ y $\forall x, y \in K$.

ii) Si H es un S_π-subgrupo de G y H posee un complemento K en G, entonces $|K| = |G:H|$ y $|G:K| = |H|$ lo que implica que K es un $S_{\pi'}$-subgrupo de G.

78. Teorema: Sea A un π'-grupo de automorfismos de un π-grupo G, y supóngase que G ó A es soluble. Entonces por cada primo $p \in \pi(G)$, A deja invariante algún p-subgrupo de Sylow de G.

Demostración: Sea G^* el producto semi-directo de G por A, tal que G es un S_π-subgrupo normal de G^*, A es un $S_{\pi'}$-subgrupo de G^*, y como A es isomorfo a G^*/G; G ó G^*/G es soluble. De aquí que por el teorema 77. (Schur-Zassenhaus) ii), algún otro π'-subgrupo de G^* es conjugado con A. Como $G^* = GA$, esta conjugación puede asumirse que está en G. Ahora sea P un p-subgrupo de Sylow de G y sea $N = N_{G^*}(P)$, así que $G^* = GN$ por el teorema 36, y por un teorema de isomorfismos $N/G \cap N \simeq G^*/G$ y por tanto a A. Como $G \cap N$ es un S_π-subgrupo normal de N, por el teorema 77. i) implica que N posee un $S_{\pi'}$-subgrupo B. Pero entonces B es un $S_{\pi'}$-subgrupo de G^* y así $B^x = A$ para algún $x \in G$.
Sin embargo, B deja invariante P, ya que $B \subset N = N_G(P)$, y en consecuencia A deja el p-subgrupo de Sylow P^x invariante.

79. Corolario: Si $\mathcal{G}$ ó A son solubles y $(|\mathcal{G}|, |A|)=1$ entonces $\mathcal{G}$ es A-Sylow.

80. Lema: Sea ϕ un automorfismo libre de puntos fijos de $\mathcal{G}$, de orden n. Entonces todo elemento de $\mathcal{G}$, puede ser expresado en la forma $x^{-1}\phi(x)$ y $\phi(x)x^{-1}$ para una x apropiada en $\mathcal{G}$.

Demostración: Si $x^{-1}\phi(x)=y^{-1}\phi(y)$ con $x, y \in \mathcal{G}$, entonces $xy^{-1}=\phi(xy^{-1})$, por consiguiente $xy^{-1}=1$, de donde $x=y$. Entonces hay tantos elementos distintos en $\mathcal{G}$, de la forma $x^{-1}\phi(x)$, como hay de elementos x en $\mathcal{G}$, y por tanto todo elemento de $\mathcal{G}$, puede ser expresado en esta forma. De modo análogo, todo elemento puede ser expresado en la forma $\phi(x)x^{-1}$.

81. Teorema: Si ϕ es un automorfismo libre de puntos fijos de G, entonces ϕ deja invariante un p-subgrupo de Sylow de G, para cada primo $p \in \Pi(G)$.

Demostración: Sea Q un p-subgrupo de Sylow de G, entonces $\phi(Q)$ es también un p-subgrupo de Sylow de G y así $\phi(Q) = y^{-1}Qy$ para algún $y \in G$. Pero entonces $\phi(Q^z) = \phi(z)^{-1}Q^y\phi(z)$ para toda $z \in G$, por el lema 80. podemos elegir z tal que $\phi(z)z^{-1} = y^{-1}$, en tal caso $y\phi(z) = z$, por esta elección, tenemos $\phi(Q^z) = Q^z$ y así ϕ deja invariante el Q^z p-subgrupo de Sylow de G.

82. Corolario: Si A es un subgrupo de $Aut(G)$ libre de puntos fijos, entonces G es A-Sylow.

83. Definición: Un grupo que no tiene subgrupos característicos propios no triviales es llamado grupo característicamente simple.

84. Definición: Sea G un grupo, $U \leq G$ y $A \leq Aut(G)$

Establecemos $[U, A] = \langle [u, \alpha] = u^{-1}u^{\alpha} \mid u \in U, \alpha \in A \rangle$

y recurrentemente $[U, A, \ldots, A] = [\, [U, A, A, \ldots, A], A]$

Escribiremos $[U,\alpha]$ en vez de $[U,\{\alpha\}]$.

Si $U=U^{\alpha}\lhd G$ $\forall \alpha\in A$ y $B=\langle A\rangle$ entonces
$[U,A]=[U,B]=[U,B]^{\beta}\trianglelefteq U$ $\forall \beta\in B$
ya que evidententemente $[U,A]\leq[U,B]$.
la inclusión inversa se concluye de la identidad
$[u,\alpha\beta]=[u,\beta][u,\alpha][[u,\alpha],\beta]$ para $u\in U$ y $\alpha,\beta\in A$.
Desde luego $U=U^{\beta}$ y por lo tanto $[U,B]^{\beta}=[U,B]$ $\forall\beta\in B$
Debido a que $[u,\beta]^{v}=[uv,\beta][v,\beta]^{-1}$ $v\in U$
Finalmente $[U,B]\trianglelefteq U$

El siguiente resultado lo enunciaremos sin la correspondiente demostración, y se cita en [2] p.121.

85. Lema: Sea G un grupo, $A\leq Aut(G)$ y $H\lhd G$ con $[G,\underbrace{A,\ldots,A}_{s}]\leq H$ para algún $s\in\mathbb{N}$, suficientemente grande y $H=H^{\alpha}$ $\forall\alpha\in A$ entonces $H[G,A]\lhd G$.

86. Definición: Si $A\xrightarrow{\psi}G$ es un homomorfismo y $H\lhd G$ que es invariante por el subgrupo $\psi(A)$ de $Aut(G)$ entonces H es A-subgrupo.

87. Definición: Llamaremos A-Frattini de G, al conjunto de todos los A-no-generadores de G, Denotado por Φ_A.

Entendiendo por A-no-generador, todo elemento $x \in G$ que verifique para cualquier subconjunto S de G

$$\langle S, x\rangle^A = \langle S\rangle^A = G$$ en donde

$\langle S, x\rangle^A$ es el menor A-subgrupo de G, que contiene a S y x.

$\Phi_A(G)$ es un A-subgrupo de G invariante para todo automorfismo, además;

$\Phi_A(G) = \cap M_i$, M_i es A-subgrupo maximal de G.

Observaciones:

i) Si $A = 1$ entonces $\Phi_1(G) = \Phi(G)$

ii) Si $A = G$ y G actúa por conjugación sobre sí mismo, entonces $\Phi_G(G) = \Phi_{Int(G)}(G)$ es la intersección de todos los subgrupos normales maximales de G.

iii) Si $A = Aut(G)$, $\Phi_{Aut(G)}(G)$ es la intersección de todos los subgrupos característicos maximales de G.

88. Teorema: Sea A un subgrupo de $Aut(\varphi)$ entonces

$$\Phi_A(\varphi) \text{ es } N_{Aut(\varphi)}(A)\text{-invariante}$$

Demostración: Como $\Phi_A(\varphi) = \cap M_i$, M_i es A-subgrupo maximal de φ, la afirmación quedará demostrada, si probamos que cualquier $\alpha \in N_{Aut(\varphi)}(A)$ nos transforma un A-maximal en otro A-maximal. Sean $a \in A$, $\alpha^{-1} a \alpha \in A$ y supongamos que $\alpha(M)$ no es A-maximal entonces existe M' A-maximal tal que $\alpha(M) \subset M'$ y $\alpha^{-1} a \alpha(M) = M$, por lo que $a[\alpha(M)] = \alpha(M)$ es A-subgrupo entonces $\alpha(M) \subset M' \subset \varphi$ que implica que $M \subset \alpha^{-1}(M') \subset \varphi$ ¡!, ya que $\alpha^{-1}(M')$ es A-subgrupo y M es A-subgrupo maximal.

89. Corolario: Si $Int(\varphi) \subseteq N_{Aut(\varphi)}(A)$ entonces $\Phi_A(\varphi) \trianglelefteq \varphi$.

90. Corolario: Si $A \trianglelefteq Aut(\varphi)$ entonces $\Phi_A(\varphi)$ es característico en φ. en particular $\Phi(\varphi)$, $\Phi_{\varphi}(\varphi)$ y $\Phi_{Aut(\varphi)}(\varphi)$ son característicos.

91. Teorema: Si A estabiliza una serie de G entonces

$$[G,A] \leq \Phi_A(G).$$

Demostración: Sea M un A-subgrupo maximal de G; de modo que A estabiliza una serie de G, entonces $[G, A, \ldots, A] = 1 \leq M$. por el lema 85.

$M \leq M[G,A] \subset G$, i.e $M = M[G,A]$ y $[G,A] \leq M$

$$\therefore \quad [G,A] \leq \Phi_A(G).$$

92. Corolario: Si G es un grupo característicamente simple y $A \trianglelefteq Aut(G)$ entonces A estabiliza una serie de G si y sólo si $A = 1$

93. Corolario: Si A estabiliza una serie de G, entonces los A-subgrupos maximales de G son maximales.

Demostración: Sea M un A- subgrupo maximal de G y M' un maximal tal que $M \leq M'$, de modo que $[M', A] \leq [G,A] \leq M \leq M'$, entonces M' es un A- subgrupo y $M = M'$.

94. Teorema: Si $[G, A] \leq \Phi(G)$ entonces G es A-nilpotente.

Demostración: Si $[G,A] \leq \Phi(G)$ y M es un subgrupo maximal de G, de modo que $[M,A] \leq [G,A] \leq \Phi(G) \leq M$, de donde, se verifica que M es A-invariante, es decir, que G es A-nilpotente.

95. Teorema: Si G es A-nilpotente y A estabiliza una serie de G entonces $[G,A] \leq \Phi(G)$

Demostración: Si G es A-nilpotente, entonces $\Phi_A(G) = \Phi(G)$ y por el teorema 90. $[G,A] \leq \Phi(G)$.

96. Teorema: Si A y G son abelianos y $[G,A] \leq \Phi_A(G)$ entonces A estabiliza una serie de G y el producto semi-directo de G por A, G^*, es A-nilpotente.

Demostración: $G \triangleleft G^*$, de donde $\Phi_{G^*}(G) \leq \Phi(G^*)$.

De otra manera, $\Phi_{G^*}(G) = \cap \{M \mid M$ es G^*-invariante maximal de $G\}$

$= \cap \{M \mid M$ es GA-invariante maximal de $G\}$

$= \Phi_A(G)$

Por tanto $\Phi_A(G) \leq \Phi(G^*)$ y, como A es abeliano, tenemos $[G^*,A] = [G,A] \leq \Phi_A(G) \leq \Phi(G^*)$. En consecuencia G^* es A-nilpotente y A estabiliza una serie de G^*, por lo cual, también estabiliza una serie de G.

Bibliografía

[1] Adney, J.E. and Deskinds, W.E.
"On Automorphisms and Subgroups of Finite groups II".
Arch. der Math., Vol. XVIII (1967).

[2] Blessenohl, D. und Laue, H.
"Voirzeichen von Automorphism endlichen Gruppen und Beispiele normaler FittingKlassen."
Math. Z., 148, 119-126 (1976).

[3] Gorestein, D.
"Finite Groups", Harper-Row, N.Y. USA (1968).

[4] Hall, M.
"Teoría de los grupos". Ed. F. Trillas, S.A., México (1969).

[5] Herstein, I.
"Topics in Algebra", New York, John Wiley and Sons.

[6] Huppert, B.
"Endliche Gruppen I", Springer-Verlag (1967).

[7] Hill, W.M.
"Frattini Subgroups and Supernilpotent groups"
Israel, J. of Math., Vol. 26, No. 1 (1977).

[8] Martín Salvador, P.
"Generalitzacions per automorfos dels grups nilpotents"
Pub. Mat. U.A.B. Vol. 27, No. 2, Junio (1983).

[9] — "Sobre los subgrupos Frattini relativos a automorfos y las relaciones entre ellos"
VIII Jorn. Math. Luso-Esp., Vol. I., 143-151, Coimbra (1981).

[10] Schmid, P.
"Nilpotente Gruppen und Stabilitatsgruppen"
Mat. Ann. 202, 57-59, (1973).

[11] Tsuzuku, T.
"Finite groups and Finite geometries".
Cambridge Tracts in Mathematics, 78).
Cambridge University Press, (1982).