00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS 3

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO 2ej.

RETRACTOS Y EXTENSORES ABSOLUTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

México, D. F. 1992

Contenido

Introducción

Este trabajo trata sobre retractos absolutos (de vecindad) y extensores absolutos (de vecindad), conceptos estrechamente relacionados entre sí y con problemas relativos a extensión de funciones continuas.

La posibilidad de extender una función continua es uno de los temas que más han ocupado a los topólogos, encontrándose trabajos en este campo que datan de principios de siglo. Además este tema ha mantenido su importancia a través del tiempo y en él quedan aún gran cantidad de problemas abiertos.

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

(1) Describir una nueva familia de extensores, los llamados espacios "erizo", para varias clases de espacios. Esta nueva familia de extensores presenta la propiedad de ser universales para espacios metrizables. Además da lugar a una caracterización de espacios normales por colecciones y normales.

(2) Demostrar la relación AR(C)$\Leftrightarrow$ AE(C), cuando C es la clase de espacios ultranormales, ultraparacompactos y p-espacios paracompactos.

De estos dos resultados se obtienen importantes corolarios, tales como caracterizaciones de espacios métricos, extensores para espacios ultranormales, ultraparacompactos, una demostración indirecta de que los espacios erizo son completamente metrizables y una caracterización de espacios normales en términos de extensión de funciones.

Demostraciones y/o resultados originales del autor son los siguientes: teoremas 1.2.2, 1.2.4. Sección 2.5 en su totalidad, en el lema 3.1.2 y en el teorema 3.1.3 los dos últimos incisos, teorema 3.2.1, corolario 3.2.2, teorema 3.2.3, corolarios 3.2.4 y 3.2.6. Secciones 3.3. y 3.4

A través de la tesis utilizo profusamente el método de encajar espacios en los llamados espacios universales, lo que simplifica mucho algunas demostraciones.

En el capítulo 0, se establecen algunos resultados y definiciones de la topología general que serán de utilidad en el resto del trabajo. Este capítulo incluye también teoremas de extensión y teoremas de encaje para algunas clases de espacios. Con estos teoremas de extensión se presentan los ejemplos hasta ahora conocidos de extensores.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos de AR y ANR, así como algunos resultados importantes en esta área, tales como la caracterización de algunos AR métricos como espacios completamente metrizables.

A continuación se definen en el capítulo 2 los conceptos de AE y ANE y se establecen propiedades de extensión para algunas clases de espacios. Se presenta además la demostración de que los espacios erizo son extensores para algunas clases de espacios, y se obtienen algunas consecuencias importantes.

Basado en los resultados de los tres primeros capítulos, en el capítulo 3 enuncio las relaciones existentes entre A(N)R y A(N)E y se obtienen las equivalencias mencionadas en el punto (2) de esta introducción.

Siempre que se mencione la palabra espacio, se supondrá que se trata de un espacio topológico. No se presupone ningún axioma de separación para los espacios a menos que se mencione explícitamente. Usaré la palabra función sin que exista necesariamente continuidad. El símbolo ∎ denota el fin de una demostración. En los capítulos relativos a extensores y retractos, uso la abreviación A(N)R para significar que se trata de un AR, respectivamente, de un ANR. Lo mismo se aplica para A(N)E.

Notación

$\mathbb{R}$	Los números reales.
$\mathbb{N}$	Los números naturales.
$\mathbb{Q}$	Los números racionales.
I	El intervalo $[0,1]$.
A^-	La cerradura de A en el espacio global.
A^{-B}	La cerradura de A en B.
$IntA$	El interior de A en el espacio global.
$Int_B A$	El interior de A respecto a B.
$\aleph_0$	La cardinalidad de los naturales.
$B'_d(x,\epsilon)$	El conjunto $\{y \in X \mid d(x,y) \leq \epsilon\}$.
$B_d(x,\epsilon)$	El conjunto $\{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$.
$\lvert X \rvert$	La cardinalidad del conjunto X.
$X \approx Y$	X es homeomorfo a Y.
$\lVert y \rVert$	La norma de y.
$\ell^2(\mathcal{A})$	El espacio de Hilbert basado en un conjunto $\mathcal{A}$.
fg	La composición de las funciones f y g.
$\prod_{s\in S} Y_s$	El producto topológico de los espacios Y_s.
$f\|_A$	La restricción de f al conjunto A.
I^τ	El cubo de Tychonoff.
$I^{\aleph_0}$	El cubo de Hilbert.

Capítulo 0

Preliminares

Este capítulo consiste esencialmente de definiciones y teoremas (proposiciones) que serán necesarios en los capítulos posteriores de este trabajo. Muchos son resultados bien conocidos de la Topología General. No incluyo todas las demostraciones, pero cuando éstas no son presentadas se señala la referencia para tal fin.

0.1 Generalidades sobre espacios Topológicos

En esta sección definiré algunos tipos especiales de espacios topológicos y algunas propiedades asociadas a ellos. Sigo las definiciones dadas por [Rinow]:

Definición 0.1.1 *Un espacio topológico X es llamado T_3 si para todo cerrado F en X y todo punto $x \in X$ con $x \notin F$ existen abiertos U, V en X tales que*

$$x \in U, \quad F \subset V \quad U \cap V = \emptyset$$

Si X es T_3 y T_0, entonces X es llamado regular.

Teorema 0.1.2 *Sea X un espacio regular.*
(1) Si G es abierto en X y $x \in G$, entonces existe un conjunto abierto U en X tal que $x \in U \subset U^- \subset G$.
(2) X es un espacio Hausdorff.

Demostración: Véase [Rinow] pag. 129. ■

Definición 0.1.3 *Un espacio X es llamado $T_{3_{1/2}}$ si para todo cerrado F en X y todo $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que*

$$f(x) = 0, \quad f(z) = 1 \quad \forall z \in F$$

Un espacio X es llamado completamente regular o Tychonoff *si X es $T_{3_{1/2}}$ y T_0.*

Teorema 0.1.4 *Todo espacio $T_{3_{1/2}}$ es un espacio T_3.*

Demostración: Véase [Rinow] pag. 173. ■

Definición 0.1.5 *Un espacio topológico X es llamdo un espacio T_4 si para todo par de cerrados disjuntos A, B en X existen abiertos U, V tales que*

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

Un espacio X es llamado normal *si X es T_4 y T_1.*

Teorema 0.1.6 *Sea X un espacio normal. Entonces:*
(1) X es regular.
(2) Para cada F cerrado en X y G abierto en X tal que $F \subset G$, existe un abierto U en X tal que $F \subset U \subset U^- \subset G$.
(3) X es Tychonoff.

Demostración: Véase [Rinow] pags. 132, 173. ∎

Definición 0.1.7 *(1) Un espacio normal X es llamado* perfectamente normal, *si todo cerrado en X es G_δ.*

(2) Un espacio T_1 X es llamado completamente normal *si para cada par de conjuntos A, B que satisfacen $A \cap B^- = \emptyset = A^- \cap B$, existen abiertos ajenos U, V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Definición 0.1.8 *Supóngase que $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios topológicos disjuntos por parejas. Considérese el conjunto $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ y la familia τ de todos los conjuntos $U \subset X$ tales que $U \cap X_s$ es abierto en X_s para toda $s \in S$. Entonces (X, τ) es un espacio topólogico y es llamado la suma de los espacios $\{X_s\}_{s\in S}$, denotado por $\bigoplus_{s\in S} X_s$. En el caso de dos sumandos se denotará por $X + Y$.*

Lema 0.1.9 *(1) Si un espacio topológico se puede representar como la unión de una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos disjuntos por parejas, entonces $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$.*
(2) Una función f de la suma $\bigoplus_{s\in S} X_s$ a un espacio topológico es continuo si y sólo si la composición fi_s, donde i_s es la identidad en X_s, es continua para toda $s \in S$.

Demostración: [Engelking] pags.103-104. ∎

Definición 0.1.10 *Para cada espacio X, el* peso $w(X)$ *de X se define como*

$$\min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B} \text{ es una base de } X\}.$$

0.2 Espacios de Adjunción

Definición 0.2.1 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. f es llamada un encaje si ésta es la composición de un homeomorfismo y un encaje, es decir si existe un subespacio L de Y y un homeomorfismo $f' : X \to L$ tal que $f = i_L f'$, donde i_L es la inclusión de L en Y; claramente $L = f(X)$. Si para un espacio X existe un encaje homeomórfico $f : X \to Y$ en un espacio Y, X es llamado encajable en Y o se dice que X está encajado en Y. En resumen $X \approx f(X) = L \subset Y$.*

Definición 0.2.2 *Sea Y un conjunto arbitrario, (X, τ) un espacio topológico y $p : X \to Y$ una función suprayectiva. La topología determinada en Y por $\tau(p) = \{U \subset Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$ es llamada la topología identificación.*

Definición 0.2.3 *Sean X, Y dos espacios topológicos. Una función continua p de X sobre Y es llamada una identificación si la topología en Y es exactamente $\tau(p)$, esto es, los conjuntos U abiertos en Y son aquellos y sólo aquellos para los cuales $p^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Teorema 0.2.4 *Sean X,Y espacios topológicos, $p : X \to Y$ una función continua y sobre. p es una identificación si y sólo si para cada espacio topológico Z y cada función $g : Y \to Z$ la continuidad de gp implica la de g.*

Demostración: Véase [Dugundji (1)] pag. 123. ■

Definición 0.2.5 *Sean X,Y dos espacios topológicos disjuntos, $A \subset X$ un subconjunto cerrado, y $f : A \to Y$ una función continua. f genera en $X+Y$ una relación de equivalencia dada por $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. El espacio topológico cociente así obtenido es llamado la adjunción de X a Y por f y se denota $X \cup_f Y$. f es llamado la función de adjunción.*

Teorema 0.2.6 *Sea $p : X+Y \to X \cup_f Y$ la función cociente. Entonces Y está encajado como un subconjunto cerrado en $X \cup_f Y$ homeomorfo a Y y $p|_Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Véase [Dugundji (1)] pag. 128. ■

Lema 0.2.7 *Obsérvese que, por la definición de la topología en $Z = X \cup_f Y$, $p(A)$ es abierto (cerrado) en Z si y sólo si $p^{-1}p(A)$ es abierto (cerrado) en $X+Y$.*

Demostración: Véase [Rinow] pag. 112. ■

0.3 Espacios lineales

En esta sección se tratarán algunas generalidades sobre espacios topológicos lineales o espacios vectoriales topológicos. Estos espacios son muy importantes en la teoría de extensión de funciones.

Definición 0.3.1 *Un* espacio topológico lineal *es un espacio vectorial L sobre el campo $\mathbb{R}$ de los números reales junto con una topología Hausdorff tal que la suma $x+y$ y la multiplicación escalar αx son continuas como funciones: $L \times L \to L$ y : $\mathbb{R} \times L \to L$, en donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual.*

Ejemplo 0.3.2

Todo espacio vectorial normado es un espacio lineal topológico con la métrica inducida por la norma.

Definición 0.3.3 *Sea L un espacio topológico lineal arbitrario. Un conjunto K en L es llamado* convexo *si y sólo si para todo número finito de puntos en K, digamos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se cumple que*

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in K$$

para toda combinación de números reales no negativos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ que satisfagan

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$$

Definición 0.3.4 *Para cualquier conjunto S en L un espacio lineal topológico, la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S (que fácilmente se puede probar es también convexa) es llamada* la envolvente convexa de S en L *y denotada $Conv(S)$. Es decir, $Conv(S)$ es el convexo más pequeño que contiene a S.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase $Conv_n(S)$ por

$$x \in Conv_n(S) \leftrightarrow \exists\ s_1, \ldots, s_n \in S\ \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I \text{ tales que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Finalmente

$$Conv_\infty(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Conv_n(S).$$

Obsérvese que $Conv_\infty(S)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de S.

Lema 0.3.5 *Si A es un subconjunto de un espacio lineal topológico, entonces $Conv(A) = Conv_\infty(A)$.*

Demostración: Véase [Van Mill] pag. 8. ∎

Definición 0.3.6 *Un espacio topológico lineal L es llamado* localmente convexo *si y sólo si para todo punto $x \in L$, toda vecindad de x contiene una vecindad convexa de x.*

Definición 0.3.7 *Un espacio lineal normado completo es llamado un* espacio de Banach.

Ejemplo 0.3.8 El espacio $C(X)$ de todas las funciones continuas de un espacio compacto X a los reales con la topología inducida por la norma del supremo es un espacio de Banach.

0.4 Algunos resultados en extensión de funciones

A continuación se establecen algunas definiciones y teoremas importantes para la teoría de extensión de funciones.

Definición 0.4.1 *Una función continua $f : X \to Y$ es llamada una extensión de la función $g : A \to Y$, si $A \subset X$ y g coincide con la restricción de f a X.*

En primer lugar se tiene el conocido teorema de H. Tietze

Teorema 0.4.2 *Sea X un espacio T_4, F un subconjunto cerrado no vacío de X y f una función continua acotada de F en $\mathbb{R}$. Entonces existe una función continua g de X en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in F$ y además se cumple*

$$\inf_{y \in F} f(y) \leq g(x) \leq \sup_{y \in F} f(y) \quad \forall x \in X.$$

Demostración: Véase [Rinow] pags. 171-173. ∎

No es esencial pedir que la función sea acotada. Se puede considerar que la función no es acotada y omitir la condición en las cotas. Inmediatamente se obtienen dos consecuencias de este teorema: cualquier función continua $f : F \to \mathbb{R}^n$ y cualquier función $f : F \to Q^\gamma$ continua, donde γ es un cardinal y $Q = [-1, 1]$ se pueden extender continuamente a X: simplemente se descompone f en sus coordenadas y se observa que la extensión de cada función coordenada conduce a la extensión de la función original.

El segundo teorema es la extensión dada por Dugundji al teorema de Tietze:

Teorema 0.4.3 *Sea X un espacio métrico arbitrario, A un subconjunto cerrado de X, L un espacio lineal localmente convexo y $f : A \to L$ una función continua. Entonces existe una extensión $F : X \to L$ de f; además $F(X) \subset Conv(f(A))$.*

Demostración: Véase [Dugundji (2)] pags. 357-358; en ese mismo artículo se presenta otra prueba (pags. 358-359). ■

Posteriormente se presentarán otros teoremas de extensión, los cuales requieren otras definiciones.

0.5 Propiedades de Cubierta

Definición 0.5.1 *Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es* localmente finita *si para todo punto $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que el conjunto $\{s \in S \mid U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. Si todo punto de X posee una vecindad que intersecta a lo más un conjunto de la familia dada, entonces se dice que la familia es* discreta.

Claramente cualquier familia discreta es localmente finita pero el recíproco no se cumple en general.

Lema 0.5.2 *En toda familia localmente finita $\{A_s\}_{s\in S}$ se presenta la igualdad*

$$(\bigcup_{s\in S} A_s)^- = \bigcup_{s\in S} A_s^-$$

Demostración: Véase [Rinow] pag. 279. ■

La propiedad de ser discreta se preserva con cerraduras:

Lema 0.5.3 *Si $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia localmente finita (respect. discreta), entonces $\{A_s^-\}_{s\in S}$ es también una familia localmente finita (respect. discreta).*

Demostración: Véase [Dugundji (1)] pag. 82. ■

Definición 0.5.4 *Una familia $\mathcal{U}$ es llamada $\sigma-$localmente finita (respect. σ- discreta) si $\mathcal{U}$ es la unión contable de familias cada una de las cuales es localmente finita (respect. discreta).*

Definición 0.5.5 *Sea X un espacio, $\{A_s\}_{s\in S}$ una cubierta de X y $\{f_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones, donde $f_s : A_s \to Y$. Se dice que las funciones f_s son compatibles si para todo par s_1, s_2 de elementos de S, se tiene que*

$$f_{s_1}|_{A_{s_1}\cap A_{s_2}} = f_{s_2}|_{A_{s_1}\cap A_{s_2}}.$$

Mediante la fórmula:

$$f(x) = f_s(x) \qquad para\ x \in A_s$$

se define una función $f : X \to Y$, que es llamada la combinación de las funciones $\{f_s\}_{s\in S}$ y se denota por el símbolo $\diamond_{s\in S} f_s$.

Lema 0.5.6 *(1) Si $\mathcal{F}= \{F_s\}_{s\in S}$ es una cubierta localmente finita de cerrados de un espacio X y $\{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s : F_s \to Y$ es una familia de funciones continuas compatibles, entonces la combinación $f = \diamond_{s\in S} f_s$ es una función continua de X en Y.*
(2) Si la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s : X \to Y_s$, separa puntos, entonces la diagonal $f = \diamond_{s\in S} f_s : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ es inyectiva. Si además la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, entonces f es un encaje homeomorfo. En particular, si existe una $s \in S$ tal que f_s es un encaje homeomorfo, entonces f es un encaje homeomorfo.

Demostración: Véase [Engelking] pags. 100, 114. ∎

Definición 0.5.7 *Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in T}$ y $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in J}$ son dos familias de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ o ($\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{V}$), en símbolos $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, si $T \neq \emptyset$, si $\bigcup_{\alpha\in T} U_\alpha = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$ y si cada elemento de $\mathcal{U}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{V}$.*

Definición 0.5.8 *Sean $\mathcal{U}= \{U_\alpha\}_{\alpha\in T}$ y $\mathcal{V}= \{V_\beta\}_{\beta\in J}$ dos cubiertas de un conjunto X. Si $A \subset X$ y $p \in X$, entonces se tienen las siguientes definiciones:*

$$\begin{aligned} St(p,\mathcal{U}) &= \cup\{U_\alpha | p \in U_\alpha\} \\ St(A,\mathcal{U}) &= \cup\{U_\alpha | A\cap U_\alpha \neq \emptyset\} \\ \mathcal{U}^* &= \{St(U_\alpha,\mathcal{U}) | U_\alpha \in \mathcal{U}\} \\ \mathcal{U}^\triangle &= \{St(x,\mathcal{U}) | x \in X\} \end{aligned}$$

Se dice que $\mathcal{U}$ es un estrella refinamiento de $\mathcal{V}$ ($\mathcal{U} <^* \mathcal{V}$) si $\mathcal{U}^* < \mathcal{V}$ y que $\mathcal{U}$ es un $\triangle$-refinamiento de $\mathcal{V}$ ($\mathcal{U} <^\triangle \mathcal{V}$) si $\mathcal{U}^\triangle < \mathcal{V}$.

0.6 Teoremas de encaje

Esta es una de las secciones más importantes de este capítulo, pues como se mencionó, una de las técnicas de demostración de los resultados principales del presente trabajo, se basa en el uso de los siguientes teoremas de encaje.

Teorema 0.6.1 *Para cada espacio metrizable X, existe un espacio lineal normado Z y un homeomorfismo h de X sobre un subespacio $h(X)$ de Z el cual es cerrado en su envolvente convexa $Conv(h(X))$. Además, si X es separable, $Conv(h(X))$ también lo es. Más generalmente: si $w(X) \leq \gamma$, entonces $w(Conv(h(X))) \leq \gamma$.*

Demostración: Podemos suponer que la métrica ρ en X es acotada, pues si no fuera así, se toma la siguiente métrica equivalente

$$\rho'(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

Por lo tanto podemos considerar que X tiene diámetro ≤ 1.

Considérese el conjunto Z de todas las funciones continuas y acotadas definidas de X a $\mathbb{R}$. Se toma la métrica de la convergencia uniforme en Z:

$$\rho(f_1,f_2) = \sup_{x\in X} |f_1(x) - f_2(x)| \quad \text{para} f_1, f_2 \in Z$$

y

$$|f| = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad \text{para } f \in Z$$

Claramente Z, con las operaciones algebraicas clásicas, es un espacio lineal normado.

Para definir el homeomorfismo $h : X \to h(X) \subset Z$ se define una función $f_x \in Z$, asociada con el punto $x \in X$, por la fórmula $f_x(y) = \rho(x, y)$, y sea $h(x) = f_x \ \forall x \in X$. Se probará que h es una isometría (y, por lo tanto, un homeomorfismo):

$$\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) \geq |\rho(x_1, x_2) - \rho(x_2, x_2)| = \rho(x_1, x_2)$$

y para cualquier $y \in X$ se tiene

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |\rho(x_1, y) - \rho(x_2, y)| \leq \rho(x_1, x_2)$$

así que $\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) \leq \rho(x_1, x_2)$. Estas desigualdades demuestran que $\rho(f_{x_1}, f_{x_2}) = \rho(x_1, x_2)$, es decir, h es una isometría.

Queda por demostrar que $h(X)$ es cerrado en su envolvente convexa $Conv(h(X))$. Sea $f \in Conv(h(X))$ y supóngase que

$$f = \lim_{n \to \infty} f_{x_n}$$

donde $f_{x_n} \in h(X)$. Como f está en la envolvente convexa de $h(X)$, f es una combinación lineal convexa de elementos de $h(X)$, es decir existen puntos $a_0, \ldots, a_k \in X$ y números reales positivos $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{a_i}, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que las a_i son distintas y que alguna λ_i, digamos λ_0, satisface la condición $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$. Entonces

$$\rho(f, f_{x_n}) \geq |f(x_n) - f_{x_n}(x_n)| = |f(x_n)| \geq \lambda_0 f_{a_0}(x_n) \geq \frac{1}{k+1} \rho(a_0, x_n).$$

Como $\lim_{n \to \infty} f_{x_n} = f$, se sigue que $\lim_{n \to \infty} x_n = a_0$. Por lo tanto $f = f_{a_0} \in h(X)$.

Para probar la segunda afirmación del teorema, supóngase que X es separable. Como X es homeomorfo a $h(X)$, este último también es separable. Sea C un subespacio denso y numerable de $h(X)$. Los subconjuntos finitos de C forman una familia numerable Γ. Sea $\gamma = \{c_1, \ldots, c_n\}$ un subconjunto finito arbitrario de C. La envolvente convexa $Conv(\gamma)$ de γ es $Conv(\gamma) = Conv_n(\gamma)$ por el lema 0.3.5 y por lo tanto, se concluye que es separable si se considera el conjunto $E = \{r_1 c_1 + \ldots + r_n c_n | r_i \in \mathbb{Q}\}$, que es denso en $Conv(\gamma)$. Como $Q = Conv(C)$ es la unión numerable

$$Q = Conv(C) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Conv(\gamma)$$

de una familia de conjuntos separables, Q misma es separable. Sea D un denso numerable en Q. Se afirma que D es denso en $H = Conv(h(X))$. Sea $z \in H$ y $\delta > 0$. Existen puntos $f_1, \ldots, f_n \in h(X)$ tales que

$$z = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i$$

donde $t_i \in I$ y

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$$

Como C es denso en $h(X)$, existen $c_1, \ldots, c_n \in C$ tales que

$$\rho(f_i, c_i) < \frac{1}{2}\delta$$

para toda $i = 1, \ldots, n$. Si p representa al punto

$$p = \sum_{i=1}^{n} t_i c_i$$

de Q, entonces

$$\begin{aligned} \rho(z,p) &\leq \sum_{i=1}^{n} t_i \rho(f_i, c_i) \\ &< \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\frac{\delta}{2} \\ &= \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Como $p \in Q$ y D es denso en Q, existe un punto $a \in D$ tal que

$$\rho(p,a) < \frac{\delta}{2}.$$

Entonces

$$\rho(z,a) \leq \rho(z,p) + \rho(p,a) < \delta,$$

lo que prueba que D es denso en H. Para la tercera afirmación obsérvese que si $w(X) \leq \gamma$, entonces existe un conjunto D' denso en X (por ser X un espacio métrico) tal que $|D'| \leq \gamma$. La demostración se sigue como en la segunda parte. ∎

Existe otro teorema de encaje para espacios métricos. Para enunciarlo se requiere la definición de el *espacio erizo*:

Ejemplo 0.6.2

Sea S un conjunto de cardinalidad $\tau \geq \aleph_0$ y sea $I_s = I \times \{s\}$ $\forall s \in S$. Se define la siguiente relación de equivalencia en $\bigcup_{s\in S} I_s$: $[x, s_1] \sim [y, s_2]$ si y sólo si $x = 0 = y$ o $x = y$ y $s_1 = s_2$. Se verifica que la formula

$$\rho([(x,s_1)],[(y,s_2)]) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } s_1 = s_2, \\ x+y & \text{si } s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

define una métrica en el conjunto de clases de $\bigcup_{s\in S} I_s$. Para un cardinal fijo τ, el espacio metrizable así obtenido no depende (salvo homeomorfismos) de la elección del conjunto S;

este espacio es llamado el espacio erizo de τ espinas y se denota por $J(\tau)$. Se puede ver que para toda $s \in S$ la función j_s del intervalo I a $J(\tau)$ definida mediante la formula $j_s(x) = [(x,s)]$ es un encaje isométrico. La familia de todas las bolas con radio racional y centro en los puntos $[(r,s)]$, donde r es un número racional, es una base para $J(\tau)$: así que $w(J(\tau)) \leq \tau$; pero como el subespacio de $J(\tau)$ consistente de los puntos de la forma $[(1,s)]$ es un espacio discreto de cardinalidad τ, se sigue que $w(J(\tau)) = \tau$.

Teorema 0.6.3 *El espacio $[J(\gamma)]^{\aleph_0}$ de $\aleph_0$ copias del erizo $J(\gamma)$ es universal para todos los espacios metrizables de peso $\gamma \geq \aleph_0$.*

Demostración: Claramente $[J(\gamma)]^{\aleph_0}$ es un espacio metrizable de peso γ y por lo tanto tiene una base σ-discreta. Sea X un espacio metrizable de peso $\gamma \geq \aleph_0$. Existe una base $B = \{U_s\}_{s\in S}$ para X tal que $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, donde $B_i = \{U_s\}_{s\in S_i}$ es una familia discreta ([Rinow] pag. 292). Se puede suponer que $|S| = \gamma$ ([Engelking] pag. 34). Sin pérdida de generalidad se puede suponer también que S coincide con el conjunto usado para la construcción del espacio erizo $J(\gamma)$. Para un par fijo i,k de números naturales y cualquier $s \in S_i \subset S$ denótese por V_s la unión de todos los miembros de B_k cuyas cerraduras están contenidas en U_s. Por lo tanto $V_s^- \subset U_s$, según el lema 0.5.2, así que existe una función $f_s : X \to I$ tal que $f_s(X \setminus U_s) = \{0\}$ y $f_s(V_s) = \{1\}$ (lema de Urysohn). Por el lema 0.5.3 $\{U_s^-\}_{s\in S_i}$ es discreta; por lo tanto, miembros distintos de esta familia son disjuntos y el conjunto $A_i = \bigcup_{s\in S_i} U_s^-$ es cerrado. Para toda $s_0 \in S_i$ el conjunto $A_i \setminus U_{s_0}^- = \cup\{U_s^- | s \in S_i \setminus \{s_0\}\}$ también es cerrado, así que $A_i = \bigoplus_{s\in S_i} U_s^-$ por el lema 0.1.9. De acuerdo al mismo lema, si $g_{i,k}(x) = j_s f_s(x)$ para $x \in U_s^-, s \in S_i$ y j_s como antes, se define una función continua $g_{i,k} : A_i \to J(\gamma)$. El conjunto $B_i = X \setminus \bigcup_{s\in S_i} U_s$ es cerrado y satisface $A_i \cup B_i = X$; la función $f_{i,k} : B_i \to J(\gamma)$ definida por $f_{i,k}(x) = j_s(0)$ para toda $x \in B_i$ es compatible con $g_{i,k}$, así que la combinación $h_{i,k} = g_{i,k} \diamond f_{i,k} : X \to J(\gamma)$ es continua (lema 0.5.6). Si i,k recorren los naturales se obtiene una familia $\{h_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ de funciones continuas de X a $J(\gamma)$; se puede verificar que esta familia separa puntos de cerrados. Entonces, por el teorema diagonal (lema 0.5.6(2)), X se puede encajar en $[J(\gamma)]^{\aleph_0}$. ∎

Definición 0.6.4 *Un espacio G_δ absoluto es un espacio métrico que siempre que esté encajado en un espacio métrico es un G_δ.*

Lema 0.6.5 *(1) Todo conjunto encajado en un espacio métrico, homeomorfo a un espacio métrico completo, es un G_δ.*

(2) Los espacios métricos completos separables coinciden con los subconjuntos G_δ del cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$.

(3) Cada subconjunto G_δ de un espacio métrico X es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$.

(4) Ser completamente metrizable es hereditario respecto a subconjuntos G_δ.

Demostración: Véase [Kuratowski(1)] pag. 430 y 229 y [Engelking] pag. 342. ∎

Del teorema anterior se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 0.6.6 *Todo espacio completamente metrizable de peso $\leq \tau$ se puede encajar* *como subespacio cerrado de* $J(\tau)^{\aleph_0}$.

Demostración: Por el teorema, X se puede encajar en el espacio métrico $J(\tau)^{\aleph_0}$. Como el espacio es completo entonces es un G_δ absoluto, por lo que X es un G_δ en $J(\tau)^{\aleph_0}$. Por el lema 0.6.5 todo subconjunto G_δ de un espacio métrico es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $X \times I\!R^{\aleph_0}$. Entonces basta probar que $I\!R$ es encajable como subespacio cerrado en $J(\aleph_0)^2$, porque entonces X sería un subespacio cerrado de $J(\tau)^{\aleph_0} \times J(\aleph_0)^{\aleph_0}$ y, por lo tanto, sería un subespacio cerrado de $J(\tau)^{\aleph_0}$. Cualquier número real s se puede representar en la forma $s = k + t$ donde k es un número par (respect. impar) y $|t| \leq 1$. Se definen las funciones continuos $f, g : I\!R \to J(\aleph_0)$ mediante las formulas: $f(2n + t) = [1 - |t|, n]$ y $g(2n + 1 + t) = [1 - |t|, n]$, donde n es un entero arbitrario y $|t| \leq 1$. Se puede verificar que la función diagonal $f \diamond g$ separa puntos y puntos de cerrados, por ejemplo en el caso de los enteros: si z es un entero par ($z = 2n$), $f(z) = [1, n]$, y $g(z) = [0, n]$, mientras que $f(0) = [1, 0]$. Si z es impar ($z = 2n + 1$), $f(z) = [0, n], g(z) = [1, n]$.

Por el teorema diagonal (lema 0.5.6(2)) $f \diamond g$ es un encaje de X en $J(\aleph_0)^2$. Y como se puede observar, la imagen de la función diagonal es de hecho todo el erizo $J(\aleph_0)^2$. ∎

Teorema 0.6.7 *Un espacio X es Tychonoff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de un cubo de Tychonoff I^γ, donde $\gamma = w(X)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base de X con $|\mathcal{B}| = \gamma$. Considérese la familia $\mathcal{P}$ de todas las parejas (U_1, U_2) de miembros de $\mathcal{B}$ tales que existe una función continua $f : X \to I$ que satisface

$$f(U_1) \subset [0, \frac{1}{2}) \quad \text{y} \quad f(X \setminus U_2) \subset \{1\}. \tag{0.1}$$

Obsérvese que para todo punto $x \in X$ y toda vecindad $U_2 \in \mathcal{B}$ de x existe $U_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_1$ y la pareja (U_1, U_2) pertenece a $\mathcal{P}$, pues X es Tychonoff y existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \in X \setminus U_2$; el conjunto $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ es una vecindad de x, así que existe $U_1 \in \mathcal{B}$ que satisface

$$x \in U_1 \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset U_2$$

y la pareja (U_1, U_2) pertenece a $\mathcal{P}$. Asígnese a cada pareja (U_1, U_2) una función $f : X \to I$ que satisfaga (0.1) y denótese por $\mathcal{F}$ la familia de las funciones así obtenidas; como $|\mathcal{P}| = \gamma$, se tiene que $|\mathcal{F}| \leq \gamma$. Por el teorema diagonal (lema 0.5.6(2)) y puesto que X es T_0, basta probar que la familia separa puntos de cerrados. Sea $x \in X$ y F un cerrado en X que no contiene a x. Existe $U_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_2 \subset X \setminus F$, y por la observación anterior existe también $U_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_1$ y $(U_1, U_2) \in \mathcal{P}$. Sea f la función que satisface (0.1) asociada a (U_1, U_2). Entonces

$$f(x) < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \overline{f(F)} \subset \overline{f(X \setminus U_2)} \subset \overline{\{1\}}.$$

así que $f(x) \notin \overline{f(F)}$ lo que demuestra que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados.

La otra afirmación es evidente, pues I^γ es un espacio Tychonoff. ∎

Corolario 0.6.8 *El cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$ es universal para todos los espacios compactos metrizables y para todos los espacios metrizables separables. Por lo tanto $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ también lo es.*

Demostración: Un espacio compacto es metrizable si y sólo si es segundo numerable. La segunda afirmación se desprende del teorema anterior. ∎

Corolario 0.6.9 *Un espacio X es compacto Hausdorff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un cubo de Tychonoff I^{γ}.*

Demostración: Si X es compacto Hausdorff, entonces X es normal y, por lo tanto, Tychonoff. Del teorema se sigue que existe un encaje f de X en I^{γ}. Pero $f(X)$ es compacto en el cubo de Tychonoff, por lo que es cerrado. La otra implicación es evidente. ∎

Corolario 0.6.10 *Todo espacio metrizable completo y separable se puede encajar como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.*

Demostración: Por el teorema, todo espacio metrizable separable se puede encajar como subespacio en $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Si X es además completamente metrizable, es un G_δ absoluto (lema 0.6.5) y, por lo tanto, es un G_δ en $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Por el lema 0.6.5 se sigue que X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{\aleph_0} \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$, y este último espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. ∎

0.7 Espacios topológicos y propiedades de cubierta

Definición 0.7.1 *Sea X un espacio topológico y γ un cardinal infinito.*

El espacio T_1 X es llamado normal por γ-colecciones *si para toda familia discreta $(F_\alpha)_{\alpha\in T}$ de subconjuntos cerrados de X de cardinalidad a lo más γ existe una familia discreta $(G_\alpha)_{\alpha\in T}$ de abiertos en X, tales que $F_\alpha \subset G_\alpha \forall\alpha \in T$. El espacio T_1 X es llamado* normal por colecciones *si para toda familia discreta $\mathcal{F}= (F_\alpha)_{\alpha\in T}$ de subconjuntos cerrados de X existe una familia discreta $\mathcal{G}= (G_\alpha)_{\alpha\in T}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $F_\alpha \subset G_\alpha \forall\alpha \in T$. X es llamado hereditariamente normal por colecciones, si todo subespacio de X es normal por colecciones.*

La definición dada para espacios normales por colecciones es equivalente a la siguiente:Un espacio T_1 es normal por γ- colecciones si y sólo si para toda familia discreta $\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de X de cardinalidad $\leq \gamma$ existe una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_s \subset U_s$ $\forall s \in S$ y $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ si $s \neq s'$. Aquí es suficiente observar que un espacio que satisface esta condición es normal por colecciones: Claramente el espacio es normal, así que para una familia discreta $\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de X los cerrados disjuntos $A = \bigcup\limits_{s\in S} F_s$ y $B = X \setminus \bigcup\limits_{s\in S} U_s$ están contenidos en abiertos ajenos U y V. Se puede verificar fácilmente que la familia $\{V_s\}_{s\in S}$, donde $V_s = U_s \cap U$, es discreta.

Lema 0.7.2 *Sea X un espacio normal por coleciones y $\mathcal{F}= \{U_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de cerrados en X. Entonces existen subconjuntos U_s abiertos en X tales que $F_s \subset U_s$ para cada s y $\{U_s^-\}$ es una familia discreta.*

Demostración: De la definición de normalidad por colecciones se obtiene una familia $\{V_s\}$ de abiertos en X tal que $F_s \subset V_s$ $\forall s \in S$ y la familia $\{V_s\}_{s\in S}$ es discreta. Al ser el espacio normal (porque es normal por colecciones), para cada F_s existe un abierto U_s en X tal que $F_s \subset U_s \subset U_s^- \subset V_s$. Entonces la familia $\{U_s^-\}$ cumple las propiedades requeridas. ∎

Definición 0.7.3 *Sea X un espacio topológico y γ un cardinal infinito. Una* compactificación *de X es un par (c, cX) donde cX es un espacio compacto y c es un homeomorfismo $c : X \to c(X)$ y se tiene $c(X)^- = cX$.*

El espacio X es de dimensión cero *si existe una base para su topología consistente de subconjuntos de X abiertos y cerrados a la vez.*

El espacio X es Paracompacto *si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Un espacio topológico es ultranormal *si es T_1 y cualesquiera dos subconjuntos cerrados disjuntos del espacio están contenidos en dos conjuntos disjuntos abiertos-cerrados. Los espacios ultranormales son precisamente aquellos espacios tales que $IndX = 0$ ([Nagata(2)] pag. 9).*

Un espacio topológico es ultraparacompacto *si es Hausdorff y si toda cubierta abierta del espacio tiene un refinamiento localmente finito formado por conjuntos abiertos-cerrados.*

Un espacio X es llamado totalmente normal *si es T_1 y para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$.*

Una función continua $f : X \to Y$ es llamada una función perfecta *si es sobre, cerrada y cada $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto en X.*

Teorema 0.7.4

(1) Todo espacio paracompacto Hausdorff es normal.

(2) Todo espacio seudometrizable es paracompacto.

(3) Un espacio es ultraparacompacto si y sólo si es ultranormal y paracompacto.

Demostración: Para (1) véase [Rinow] pag. 280. Para (2) véase [García-M., Tamariz] pags. 243- 244.

(3): Si X es ultraparacompacto, claramente es paracompacto, por lo que basta probar que X es ultranormal. Primero se probará que todo punto de X tiene una base de vecindades que consiste de conjuntos abiertos-cerrados (es decir ind $X = 0$ [Nagata(2)] pag.9). Sea $x \in X$ y sea V_x una vecindad abierta de x. Para cada $y \neq x$ sea V_y una vecindad abierta de y que no contiene a x. Sea $\mathcal{A}$ un refinamiento abierto-cerrado localmente finito de $\{V_z | z \in X\}$. Si $C \in \mathcal{A}$ es tal que $x \in C$, entonces $C \subset V_x$.

Sean A y B cerrados disjuntos en X. Para cada $x \in A$ sea V_x una vecindad abierta-cerrada de x tal que $V_x \cap B = \emptyset$. Sea $\{C_i | i \in T\}$ un refinamiento abierto-cerrado, localmente finito de $\{X \setminus A\} \cup \{V_x | x \in A\}$. El conjunto

$$C = \cup\{C_i | i \in T \text{ y } C_i \cap A \neq \emptyset\},$$

es un conjunto abierto-cerrado que contiene a A. Se observa que $C \cap B = \emptyset$, lo cual prueba que A es ultranormal.

$\Leftarrow$) Sea $\{O_i\}_{i \in T}$ una cubierta abierta de X. Sea $\{O'_j\}_{j \in H}$ un refinamiento abierto, localmente finito. Como X es normal, existe un refinamiento abierto $\{O''_j\}_{j \in H}$ tal que $\overline{O''_j} \subset O'_j$ para toda $j \in H$. Como X es ultranormal, existe un conjunto abierto-cerrado C_j, para cada $j \in H$, tal que

$$\overline{O''_j} \subset C_j \subset O'_j.$$

Entonces $\{C_j\}_{j\in H}$ es un refinamiento abierto-cerrado, localmente finito de la cubierta original. ■

Teorema 0.7.5 *(1) Un espacio X es paracompacto Hausdorff si y sólo si es totalmente normal.*
(2) Todo espacio compacto Hausdorff es totalmente normal.
Demostración: Para (1) véase [Rinow] pag. 325. Para (2) véase [Nagata] pag. 99. ■

Teorema 0.7.6 *Un espacio X es normal si y sólo si es normal por $\aleph_0$-colecciones.*
Demostración: Supóngase que X es normal y que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección discreta numerable de subconjuntos cerrados de X. Entonces $A_1 = \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n$ es un conjunto cerrado (por lema 0.5.2) y F_1 es disjunto de A_1. Existe un abierto G_1 en X tal que

$$F_1 \subset G_1, \quad G_1^- \cap A_1 = \emptyset.$$

La familia $(G_1^-, F_2, F_3, \ldots)$ es una familia discreta numerable de subconjuntos de X. Por lo tanto $G_1^- \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} F_n = A_2$ es un cerrado y existe un abierto G_2 de X tal que $F_2 \subset G_2$ y $G_2^- \cap A_2 = \emptyset$. Entonces $(G_1^-, G_2^-, F_3, F_4, \ldots)$ es una familia discreta numerable de cerrados. Usando inducción finita se obtiene una familia de abiertos disjuntos por parejas $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $F_n \subset G_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De aqui que X es normal por $\aleph_0$-colecciones. La otra parte de la demostración es obvia. ■

Teorema 0.7.7 *Si el espacio X es totalmente normal entonces es normal por colecciones.*
Demostración: Sea $\mathcal{F} = (F_s)_{s\in S}$ una familia discreta de cerrados en X. Para cada punto $x \in X$ existe una vecindad V_x que intersecta a lo más a un F_s. $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta de X. Por lo tanto, existe una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in T}$ que es un refinamiento estrella de $\mathcal{V}$. Considérese la familia $\mathcal{W} = \{St(F_s, \mathcal{U}) | F_s \in \mathcal{F}\}$. Entonces $F_s \subset St(F_s, \mathcal{U})$ y este último es abierto. Se afirma que la familia $\mathcal{W}$ es disjunta por parejas. Para ver esto, obsérvese que todo miembro de $\mathcal{U}$ intersecta a lo más a un miembro de $\mathcal{W}$, pues para todo $\alpha \in T$ existe $x \in X$ tal que $St(U_\alpha, \mathcal{U}) \subset V_x$, así que si $U_\alpha \cap St(F_s, \mathcal{U}) \neq \emptyset$, entonces $V_x \cap F_s \neq \emptyset$. ■

Teorema 0.7.8 *Todo espacio Paracompacto Hausdorff es normal por colecciones.*
Demostración: Se obtiene del teorema anterior y del teorema 0.7.5(1). ■

Teorema 0.7.9
(1) Todo espacio totalmente normal es normal.
(2) Todo espacio métrico es totalmente normal.
Demostración: (1): Se sigue del teorema 0.7.7.
(2): Se obtiene de 0.7.4(2) y de 0.7.5 ■

Para la definición de espacios Čech-completos, se requieren ciertos prerrequisitos.

Teorema 0.7.10 *Para todo espacio de Tychonoff X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Para toda compactificación Hausdorff cX del espacio X se cumple que $cX \setminus c(X)$ es un conjunto F_σ en cX.
(2) El conjunto $\beta X \setminus \beta(X)$ es un conjunto F_σ en βX.
(3) Existe una compactificación Hausdorff cX de X tal que $cX \setminus c(X)$ es un conjunto F_σ en cX.

Demostración: Véase [Engelking] pags. 251-252. ∎

Definición 0.7.11 *Un espacio topológico es llamado* Čech-completo *si X es Tychonoff y satisface la condición (1) del teorema 0.7.10 (y por lo tanto también las condiciones (2) y (3)).*

Nótese que todo espacio compacto Hausdorff X ($cX = c(X)$) es Čech-completo. También lo son los espacios localmente compactos Hausdorff, pues un espacio localmente compacto no compacto tiene una compactificación unipuntual. El espacio de los números irracionales con la topologia usual de los reales es un ejemplo de un espacio Čech-completo que no es localmente compacto.

Existe una interesante caracterización en espacios métricos:

Teorema 0.7.12 *Un espacio topológico es completamente metrizable si y sólo si es un espacio Čech-completo metrizable.*

Demostración: Véase [Engelking] pag. 343. ∎

0.8 Otros teoremas de extensión

Existe otra generalización del teorema de Tietze. Para ello recuerdo la definición de un espacio de Hilbert

Definición 0.8.1 *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de cardinalidad arbitraria m.* El espacio de Hilbert *$\ell^2(\mathcal{A})$ está definido de la manera siguiente:*

Sus elementos son $x = \{x_\alpha\} \in \mathbb{R}^m$ tales que $x_\alpha = 0$ con excepción de una cantidad numerable de $\alpha \in \mathcal{A}$, y $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha^2$ converge.

La topología del espacio está inducida por la métrica

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} (x_\alpha - y_\alpha)^2}.$$

$\ell^2(\aleph_0)$ es un espacio lineal con norma $\|x\| = d(x,0)$.

Se conocen los siguientes hechos:

Lema 0.8.2 *(1) $\ell^2(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si $m \leq \aleph_0$.*
(2) $\ell^2(\mathcal{A})$ es separable si y sólo si $m \leq \aleph_0$.

Demostración: (1) Véase [Anderson]. (2) Véase [Dugundji (1)] pag. 192. ∎

Teorema 0.8.3 *Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal por colecciones X y sea f una función continua de A en un espacio de Hilbert $H = \ell^2(\mathcal{A})$ con $|\mathcal{A}| > \aleph_0$. Entonces f se puede extender a una función continua F de X en H.*

Demostración: Véase[Dowker] pags. 310-311. ∎

Esta demostración se puede aplicar a un espacio de Banach en lugar de un espacio de Hilbert.

Teorema 0.8.4 *Sea A un subconjunto cerrado de un espacio totalmente normal X. Sea f una función continua de A a un subconjunto K metrizable.convexo de un espacio topológico lineal L. Entonces f se puede extender continuamente a X y todos los valores de la extensión permanecen en K.*

Demostración: Véase [Arens] pags. 18-19. ∎

En particular, con las hipótesis del Teorema si K es un espacio de Banach, se asegura que toda función continua de un cerrado en un espacio totalmente normal y Hausdorff a un espacio de Banach se puede extender continuamente. Lo mismo ocurre para un espacio de Hilbert.

Teorema 0.8.5 *Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X. Sea K un subconjunto compacto convexo de un espacio lineal normado L. Sea $f : A \to K$ continua. Entonces f se puede extender continuamente a X.*

Demostración: Véase [Arens] pags. 19-20. ∎

Para espacios ultranormales y ultraparacompactos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 0.8.6 *(1) Sea A un subconjunto cerrado de un espacio ultraparacompacto X y Y un espacio métrico completo. Entonces toda función continua (respect. y acotada)$f : A \to Y$ tiene una extensión continua (respect. y acotada) $F : X \to Y$.*

(2) Sea A un subconjunto cerrado de un espacio ultranormal X y Y un espacio métrico completo separable. Entonces toda función continua (Respect. y acotada) $f : A \to Y$ tiene una extensión continua (respect. y acotada) $F : A \to Y$.

Demostración: Véase [Ellis] pags. 116-117. ∎

0.9 p-Espacios

En esta sección se definirá un nuevo tipo de espacios que generalizan el concepto de espacio métrico.

Definición 0.9.1 *Un espacio Tychonoff X es llamado un p-espacio si existe una sucesión $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ de familias de abiertos de βX tal que:*
(1) Cada $\mathcal{U}_i$ cubre a X,
(2) para cada $x \in X$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_i) \subset X$.

El siguiente teorema está demostrado en [Nagata]:

Teorema 0.9.2 *Todo espacio metrizable y todo espacio Čech-completo son p-espacios.*

Existe otra importante caracterización para p-espacios:

Teorema 0.9.3 *Un espacio topológico X es un p-espacio paracompacto si y sólo si:*
(1) X es un subespacio cerrado del producto cartesiano $M \times C$ de un espacio metrizable M y

un espacio compacto y Hausdorff C.
(2) X es la imagen inversa de un espacio metrizable bajo una función perfecta.
Demostración: Véase [Morita]. ∎

Teorema 0.9.5 *Un espacio de Tychonoff X es paracompacto y Čech-completo si y sólo si existe una función perfecta f de X sobre un espacio métrico completo Y.*
Demostración: Véase [Nagata] pags. 390-394. ∎

Capítulo 1

Retractos absolutos y Retractos absolutos de vecindad

1.1 Definiciones y primeros resultados

Las dos clases de espacios topológicos llamadas retractos absolutos (en lo sucesivo AR) y retractos absolutos de vecindad (en lo sucesivo ANR) fueron definidas originalmente por K. Borsuk ([Borsuk (1)] y [Borsuk (2)]) para espacios métricos y métricos compactos. Posteriormente se generalizaron estos conceptos a clases más generales de espacios.

Un *retracto absoluto (AR)* es un espacio topológico X, tal que siempre que esté encajado como un subconjunto cerrado de un espacio Z, X es un retracto de Z. Sin embargo, para que esta definición tenga sentido, se debe especificar cuáles espacios Z están permitidos.

Un subconjunto cerrado X de un espacio Z es llamado un *retracto de vecindad*, si existe un conjunto abierto O en Z tal que $X \subset O$ y existe una retracción $r : O \to X$. La función r es llamada una *retracción de vecindad.*

Ejemplo 1.1.1
Considérese el intervalo unitario $I = [0,1]$ y el cubo de Tychonoff para un cardinal infinito $\aleph > \aleph_0$. $T = I^M$ con $|M| = \aleph$. Por definición, $\aleph$ es no numerable y los puntos de T son las funciones $f : M \to I$. Sea θ la función constante $\theta(M) = 0$; θ puede ser llamada el origen de T. Para cada $\lambda \in M$, el subespacio cerrado

$$I_\lambda = \{f \in T | f(M \setminus \lambda) = 0\}$$

de T es homeomorfo a I.

Lema 1.1.2 *Para toda sucesión de vecindades $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del origen θ, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ contiene todas las I_λ excepto para a lo más una cantidad numerable de indices λ. Por lo tanto, al ser M no numerable, existe una $\lambda \in M$ tal que $I_\lambda \subset U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Por definición de la topología producto, cada vecindad del origen θ en T contiene todas los I_λ excepto para a lo más una cantidad finita de indices $\lambda \in M$. Esto implica el lema. ■

Considérese el producto topológico:

$$X = I \times T$$

X es también un cubo de Tychonoff con $x_0 = (0, \theta)$ como origen. Sea

$$W = X \setminus \{x_0\}$$

y considérese los conjuntos disjuntos

$$E = (I \setminus \{0\}) \times \{\theta\}, \quad F = \{0\} \times (T \setminus \{\theta\})$$

del espacio W. Estos son cerrados en W pues:

$$F = W \cap H \quad E = W \cap K$$

con

$$H = I \times \{\theta\} \quad K = \{0\} \times T$$

donde H, K son cerrados en X. De donde se obtiene el siguiente lema:

Lema 1.1.3 *Los cerrados disjunto E y F en W no tienen vecindades disjuntas en W.*

Demostración: Se probará que la cerradura U^- de toda vecindad de E en W intersecta a F. Para cada entero $n > 0$, sea $t_n = \frac{1}{n}$. Ya que U es una vecindad del punto (t_n, θ), U contiene un conjunto de la forma $\{t_n\} \times U_n$ donde U_n es una vecindad de θ en T. Por el lema 1.1.2 existe una $\lambda \in M$ tal que $I_\lambda \subset U_n$ para toda n. Entonces $\{t_n\} \times I_\lambda \subset U$ para toda n y de aquí que $\{0\} \times (I_\lambda \setminus \{\theta\}) \subset U^-$ por lo que, U^- intersecta a F. ∎

Corolario 1.1.4 *(1) El espacio de Tychonoff W no es normal.*
(2) El cubo de Tychonoff X no es completamente normal.

Demostración: (1) es consecuencia del lema 1.1.3. (2) Se obtiene porque todo subespacio de un espacio completamente normal es normal ([Rinow] pags. 133-134) lo que contradice (1). ∎

Ahora considérese el conjunto cerrado (unión de dos cerrados):

$$A = (I \times \{\theta\}) \cup (\{0\} \times T)$$

en el cubo de Tychonoff $X = I \times T$. Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1.5 *El subespacio cerrado A de X no es un retracto de vecindad de X.*

Demostración: Supóngase que existe una retracción $r : U \to A$ de un subespacio abierto de X en A. Los conjuntos E, F son abiertos en A pues:

$$E = A \cap V_1 \quad F = A \cap V_2$$

con

$$V_1 = I \times T \setminus (\{0\} \times T) \quad V_2 = I \times T \setminus (I \times \{\theta\})$$

siendo ambos abiertos en X. Además

$$A \setminus \{(0, \theta)\} = E \cup F$$

Entonces las imágenes inversas $r^{-1}(E)$ y $r^{-1}(F)$ son vecindades disjuntas de E y F, respectivamente, en W lo que contradice al lema 1.1.3. ∎

Como se aprecia en este ejemplo, se deben tener ciertas restricciones para que un espacio sea un retracto absoluto o un retracto absoluto de vecindad.

Un *retracto absoluto de vecindad (ANR)* es un espacio X tal que siempre que X esté encajado como subconjunto cerrado en un espacio Z, X es un retracto de vecindad de Z. Otra vez es necesario conocer cuáles espacios Z están permitidos. Por ejemplo, sea X un espacio discreto consistente de dos puntos. Este es un retracto de vecindad de cualquier espacio Hausdorff Z en el cual esté encajado. En efecto, sea $X = \{x_1, x_2\}$. Si X está encajado en Z, al ser X Hausdorff existen vecindades ajenas U, V de x_1, x_2 respectivamente en Z. Sea $f : U \cup V \rightarrow X$ definido como $f(x) = x_1 \quad \forall x \in U$ y $f(x) = x_2 \quad \forall x \in V$. f es continua y $f(x_i) = x_i$ si $x_i = 1, 2$. Entonces f es una retracción de una vecindad de X. Sin embargo X no es necesariamente un retracto de vecindad en un espacio T_1. Para dar sentido a las definiciones de AR y ANR se establece lo siguiente:

Definición 1.1.6 *Una clase de espacios topológicos C es llamada una clase débilmente hereditaria, si:*
(1) Si $X \in C$ y $A \subset X$ es cerrado en X, entonces $A \in C$.
(2) Si $X \in C$, entonces C contiene a todo espacio homeomorfo a X.

En lo sucesivo siempre supondré que las clases asociadas a AR y ANR son débilmente hereditarias.

Definición 1.1.7 *Sea C una clase de espacios topológicos.*

(1) Un espacio X es llamado un AR relativo a C (AR(C)) *si:*
(a) $X \in C$
(b) Siempre que X esté encajado como subconjunto cerrado en un espacio $Z \in C$, entonces X es un retracto de Z.

(2) Un espacio X es llamado un ANR relativo a C (ANR(C)) *si:*
(a) $X \in C$
(b) Siempre que X esté encajado como subconjunto cerrado en un espacio $Z \in C$, X es un retracto de alguna vecindad de X en Z.

La demostración del siguiente resultado se presenta en el capítulo 3 (teorema 3.1.3) en donde se desarrolla la prueba de un caso más genral.

Teorema 1.1.8 *Sea Y un A(N)R(normal) y $f : A \rightarrow Y$ una función continua de un subespacio cerrado A de un espacio normal X a Y. Entonces existe una extensión continua $F : X \rightarrow Y$ de f (respect. $F : U \rightarrow Y$ a U vecindad de A en X).*

1.2 Propiedades de los A(N)R

Una relación inmedinta de las definiciones es

Teorema 1.2.1 *(1) Cualquier AR(C) es un ANR(C).*
(2) Si $C \subset C_1$ cualquier AR(C_1) perteneciente a C es un AR(C) y cualquier ANR(C_1) perteneciente a C es un ANR(C).

En lo sucesivo AR(Q_1, Q_2) significa que el espacio es un AR para espacios que pertenecen a $Q_1 \cap Q_2$. Lo mismo ocurre en el caso ANR(Q_1, Q_2).

La demostración del siguiente resultado se presenta en la sección 5 del capítulo 2, donde se demuestrán algunos resultados que simplifican mucho esta prueba.

Teorema 1.2.2 *Todo A(N)R(separable metrizable) X que sea un G_δ absoluto es un A(N)R(normal).*

Teorema 1.2.3 *Un espacio métrico Y es un $A(N)R$(normal) si y sólo si es $A(N)R$(métrico) separable y G_δ absoluto.*

Demostración: Se presenta la prueba para ANR; la otra es similar.

Si Y es separable y ANR(métrico), entonces Y es un ANR(métrico, separable). Si además es un G_δ absoluto, entonces, por el teorema 1.2.2, es un ANR(normal).

Sea Y un espacio métrico y ANR(normal). Supóngase que Y no es separable. Entonces no puede ser Lindelöf. Además, según el teorema 4.41 pag. 235 de [García-M., Tamariz], para toda cubierta abierta de Y existe un refinamiento abierto σ-discreto. Considérese una cubierta abierta de Y que no tiene una subcubierta numerable y de ella obténgase un refinamiento abierto σ- discreto $\mathcal{U}= \{U_\alpha\}_{\alpha\in T}$. Alguna de las familias que conforman este refinamiento debe ser no numerable, de otra manera sería una unión numerable de familias numerables, lo que contradice la elección de la cubierta original. Obsérvese que la familia no numerable elegida es discreta. De cada uno de sus miembros se toma un elemento x y la colección de todos estos se denota por B. Claramente B es un subespacio discreto y es cerrado.

R. Bing [Bing] pag.184, ejemplo G, mostró que existe un espacio normal X con un subconjunto cerrado A de cardinalidad arbitraria no numerable tal que el subespacio A tiene la topología discreta pero no existe ninguna familia de vecindades de sus puntos en la que no se intersecten sus miembros entre sí. Elíjase para A el número cardinal de B y sea f una función inyectiva de A sobre B. Entonces $f : A \to Y$ es continua y como Y es un ANR(normal), f se puede extender a una función continua $F : U \to Y$, donde U es una vecindad de A (teorema 1.1.8). La imagen inversa de los puntos de B forman una colección de vecindades en X de puntos de A que no se intersectan, lo cual es imposible. Por lo tanto, Y es separable. Como Y es métrico y ANR(normal), es un ANR(métrico).

Falta probar que Y es un G_δ absoluto. Como Y es métrico separable se puede encajar en el cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$. Se construye un nuevo espacio Z, cuyos puntos están en correspondencia 1-1 con los puntos de $I^{\aleph_0}$. Sea $h(z) \in I^{\aleph_0}$ el punto correspondiente a $z \in Z$ en la correspondencia 1-1, h. Sea $Y' = h^{-1}(Y)$. Se define una topología en Z de la siguiente forma: los abiertos en Z son los conjuntos de la forma $h^{-1}(O) \cup A$, donde O es un abierto en $I^{\aleph_0}$y A es un subconjunto cualquiera de $Z \setminus Y'$. Que ésta es una topología, es fácil de verificar:

$$Z = h^{-1}(Y) \cup (Z \setminus Y'), \quad \emptyset = h^{-1}(\emptyset) \cup \emptyset.$$

Para la intersección, sean U_1, U_2 abiertos en Z. Entonces $U_1 = h^{-1}(V_1) \cup A_1$ y $U_2 = h^{-1}(V_2) \cup A_2$:

$$U_1 \cap U_2 = h^{-1}(V_1 \cap V_2) \cup (A_1' \cap A_2'),$$

con $A_1', A_2' \subset Z \setminus Y'$. Para la unión, se sigue fácilmente de la definición de la topología en Z. Nótese que todo $\{z\} \in Z \setminus Y'$ es abierto.

Se probará que Z es normal:

Supóngase que F_1, F_2 son dos cerrados disjuntos en Z. Se define la distancia entre dos puntos de Z como la distancia entre sus correspondientes puntos en $I^{\aleph_0}$. Sean H_1, H_2 abiertos ajenos en $I^{\aleph_0}$que contienen a $Y \cap h(F_1)$ y $Y \cap h(F_2)$, respectivamente. Si

$$G_1 = h^{-1}(H_1) \cup (F_1 \setminus Y')$$

y

$$G_2 = h^{-1}(H_2) \cup (F_2 \setminus Y'),$$

entonces $G_1 \cup (F_2 \setminus Y')$ y $G_2 \cup (F_1 \setminus Y')$ son abiertos ajenos en Z que contienen a F_1, F_2, respectivamente. Esto demuestra que Z es normal.

La función inyectiva, $h : Z \to I^{\aleph_0}$ es continua pero no es necesariamente un homeomorfismo. Sin embargo $h|_{Y'}$ es un homeomorfismo y esto es inmediato de la definición de la topología en Z. Entonces Y' es un ANR(normal). Como U es abierto en Z, U se puede escribir como $U = h^{-1}(O) \cup A$ con O abierto en $I^{\aleph_0}$y A un subconjunto de $Z \setminus Y'$. Entonces Y' es disjunto de A y

$$Y' \subset h^{-1}(O).$$

Se puede suponer que $h(U)$ es abierto en Y; de lo contrario se reemplaza U por $h^{-1}(O)$. Considérese la restricción de h: $h : Y' \to h(Y') = Y$. Y' es cerrado en Z y, por tanto, es normal. Como Y es un ANR(normal) y la restricción considerada de h es un homeomorfismo, existe una retracción $r : U \to Y'$ de una vecindad U de Y' en Z. Defínase la función $g : U \to I\!R$, como:

$$g(x) = d(h(x), hr(x)).$$

Entonces $Y' = g^{-1}(0)$: si $x \in Y'$, $g(x) = d(h(x), h(x) = 0$. Si $x \in g^{-1}(0)$, entonces $g(x) = 0$, es decir $h(x) = h(r(x))$ y $r(x) = x$ pues h es 1-1 y, por lo tanto, $x \in Y'$. Entonces Y' es un G_δ y se sigue que Y también lo es. Con esto se demuestra que Y es un G_δ absoluto (lema 0.6.5(2)). ■

Para el siguiente teorema, la demostración de que Y es un ANR(normal por colecciones), se pospone hasta el capítulo 2, sección 5, donde se contará con más herramientas para obtener una prueba sencilla.

Teorema 1.2.4 *Un espacio métrico Y es un A(N)R(normal por colecciones) si y sólo si es un A(N)R(metrizable) y un G_δ absoluto.*

Demostración: Se prueba el teorema para ANR, la otra prueba es similar.

Sea Y un ANR(normal por colecciones). Como los espacios métricos son paracompactos Hausdorff, son normales por colecciones de acuerdo al teorema 0.7.8, entonces Y es un ANR(metrizable).

Falta probar que Y es un G_δ absoluto. Para este fin se utilizará un método muy similar al de la demostración anterior sustituyendo el cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$por un espacio métrico M arbitrario. Se construyen de la misma manera los espacios Z y Y' junto con la función h.

Ahora se probará que Z es normal por colecciones. Sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de cerrados en Z. Sea $B_s = h(F_s \cap Y')$. Entonces $\{B_s\}_{s\in S}$ es una familia discreta de cerrados en Y. Sea G_r el conjunto de puntos de M que están más cerca de B_r que de $\bigcup\limits_{s\neq r} B_s$; entonces $B_r \subset G_r$ y G_r es abierto: Sea $x \in G_r$; si d es la métrica en M, $d(x, \bigcup\limits_{s\neq r} B_s) = \varepsilon$ con $d(x, B_r) = \delta < \varepsilon$. Sea $\eta = \varepsilon - \delta$ y considérese la bola $B(x, \frac{\eta}{2})$. Se afirma que $x \in B(x, \frac{\eta}{2}) \subset G_r$. Para ver esto, tómese un punto $y \in B(x, \frac{\eta}{2})$, entonces

$$d(y, B_r) \leq d(y,x) + d(x, B_r) < \varepsilon - \frac{\eta}{2}$$

y

$$\begin{aligned} d(y, \bigcup_{s\neq r} B_s) &\geq d(\bigcup_{s\neq r} B_s, x) - d(x,y) \\ &\geq \epsilon - \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

Además, por construcción, $G_r \cap G_s = \emptyset$. Entonces los conjuntos $h^{-1}(G_s)$ son mutuamente disjuntos. Como $\{F_s\}_{s\in S}$ es discreta, de acuerdo al lema 0.5.2, $\bigcup_{s\neq r} F_s$ es cerrada en Z. Entonces los conjuntos

$$U_s = F_s \cup (h^{-1}(G_s) \setminus \bigcup_{s\neq r} F_s)$$

son conjuntos abiertos mutuamente disjuntos y $F_s \subset U_s$. Entonces Z es normal por colecciones.

Considérese la restricción de $h : Y' \to h(Y') = Y$. Y' es cerrado en Z y, por tanto, normal por colecciones. Como Y es un ANR(normal por colecciones) y la restricción considerada de h es un homeomorfismo, existe una retracción $r : U \to Y'$ de una vecindad U de Y' en Z. Considérese la función $g : U \to \mathbb{R}$ definida como:

$$g(x) = d(h(x), hr(x)).$$

Entonces $Y' = g^{-1}(0)$: si $x \in Y'$, $g(x) = d(h(x), h(x)) = 0$. Si $x \in g^{-1}(0)$, entonces $g(x) = 0$, es decir $h(x) = hr(x)$ o $r(x) = x$ pues h es 1-1 y, por lo tanto, $x \in Y'$. Entonces Y' es un G_δ y se sigue que Y también lo es. Con esto se demuestra que Y es un G_δ absoluto.

Falta demostrar que Y es un ANR(normal por colecciones). ■

Corolario 1.2.5 *(1) Todo espacio de Banach es un A(N)R(normal por colecciones). En particular todo espacio de Hilbert es un A(N)R(normal por colecciones).*

Teorema 1.2.6 *Todo A(N)R(totalmente normal) métrico es un G_δ absoluto.*

Demostración: Se prueba para ANR, la otra demostración es similar.

Sea Y un ANR(totalmente normal) métrico, y sea Y un subespacio de un espacio métrico M. Otra vez, se construye un nuevo espacio Z, cuyos puntos están en correspondencia 1-1 con los puntos de M. Se construye la topología en Z como en el teorema 1.2.3.

Se probará que Z es totalmente normal. Sea $\mathcal{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de Z. Cada U_λ es de la forma:

$$U_\lambda = h^{-1}(O_\lambda) \cup A_\lambda,$$

donde O_λ es un abierto en M y $A_\lambda \subset Z \setminus Y'$. El conjunto

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

es abierto en M y $Y \subset U$. U es un espacio métrico y por lo tanto, totalmente normal. Existe un estrella refinamiento $\{V_\mu\}_{\mu\in J}$ de $\mathcal{A}$. Entonces, $\{h^{-1}(V_\mu)\}$ es una familia abierta en Z que cubre a $h^{-1}(U) \supset Y'$. Se completa esta familia a una cubierta $\mathcal{W}$ de Z añadiendole el conjunto de puntos (abiertos) $Z \setminus h^{-1}(U)$. Entonces $\mathcal{W}$ es un estrella refinamiento de $\mathcal{A}$ y Z es totalmente normal.

Como Y' es homeomorfo a Y, es también un ANR(totalmente normal). Además, como Y' es cerrado en Z y Z es totalmente normal, Y' es un retracto de vecindad de Z. La demostración de que Y es un G_δ en M se sigue como en el teorema 1.2.3, sustituyendo $I^{\aleph_0}$por M. ∎

El teorema siguiente establece una relación entre p espacios paracompactos y retractos absolutos para espacios metrizables.

Teorema 1.2.7 *Si X es un p-espacio y AR(paracompacto), entonces X es Čech- completo.*

Demostración: Supóngase que X satisface las hipótesis y sea Y el conjunto βX con la topología obtenida de la topología de βX haciendo todos los puntos de $\beta X \setminus \beta(X)$ abiertos. Identifíquese X con $\beta(X)$. Entonces el espacio Y es paracompacto: sea $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de Y y $V_s = U_s \cap X$. Por la paracompacidad de X la cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ de X tiene un refinamiento abierto σ−discreto $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in I\!N} \mathcal{G}_n$ tal que la familia $\mathcal{G}_n = \{G_{ns}\}_{ns\in S}$ es discreta en X y $G_{ns} \subset V_s$ para cada $n \in I\!N$ y cada $s \in S$. Tómense subconjuntos abiertos H_{ns} de βX tales que $H_{ns} \cap X = G_{ns}$ y $H_{ns} \subset U_s$.

Por la densidad de X en βX se sigue que la familia $\mathcal{H}_n = \{H_{ns}\}_{s\in S}$ consiste de conjuntos disjuntos. Se mostrará que $\mathcal{H}_n$ es discreta en Y. Si $y \in Y \setminus X$ entonces $\{y\}$ es una vecindad de y que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{H}_n$. Si $y \in X$, sea V una vecindad de y en X que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{G}_n$. Si H es abierto en βX y $H \cap X = V$, entonces, por la densidad de X en βX, el conjunto H intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{H}_n$. La familia $\bigcup_{n\in I\!N} \mathcal{H}_n \cup \{\{y\} | y \in Y \setminus \bigcup_{n\in I\!N} \bigcup_{s\in S} \mathcal{H}_n\}$ es un refinamiento abierto y σ−discreto de $\mathcal{U}$. Esto muestra que Y es paracompacto.

Por hipótesis, existe una retracción $r : Y \to X$ y familias $\mathcal{G}_n$, $n \in I\!N$, de subconjuntos abiertos de βX tales que $X \subset \cup_{G\in\mathcal{G}_n} G$ para $n \in I\!N$ y $\bigcap_{n\in I\!N} St(x, \mathcal{G}_n) \subset X$ para toda $x \in X$.

Si $G \in \bigcup_{n\in I\!N} \mathcal{G}_n$, se define $\tilde{G} = \mathrm{Int}_{\beta X}(r^{-1}(G \cap X)) \cap G$. Los conjuntos $\tilde{G}$ son abiertos en βX y $\tilde{G} \cap X = G \cap X$. Por lo tanto, los conjuntos $G_n = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_n} \tilde{G}$ son abiertos en βX y contienen a X.

Basta, entonces, probar que $X = \bigcap_{n\in I\!N} G_n$. Supóngase por el contrario, que $y \in \bigcap_{n\in I\!N} G_n \setminus X$. Existe una n tal que $y \notin St(r(y), \mathcal{G}_n)$ y $G \in \mathcal{G}_n$ tal que $y \in \tilde{G} \subset r^{-1}(G \cap X) \cap G$. Por lo que, $r(y) \in G$ y $y \in St(r(y), \mathcal{G}_n)$ lo cual es una contradicción. ∎

Capítulo 2

Extensores Absolutos y Extensores de Vecindad Absolutos

En este capítulo se tratará sistemáticamente el problema de extensión de funciones definidas en un subespacio cerrado de un espacio X. Siempre que hable de una clase de espacios topólogicos supondré que es una clase débilmente hereditaria.

2.1 Definiciones y propiedades de los extensores

Empezaré definiendo los conceptos antes mencionados.

Definición 2.1.1 *Se dice que un subespacio cerrado A de un espacio X tiene la* propiedad de extensión *con respecto a un espacio Y si y sólo si toda función continua $f : A \to Y$ se puede extender a una función continua $F : X \to Y$. Se dice que el subespacio cerrado A tiene la* propiedad de extensión en una vecindad *en X respecto a Y, si y sólo si toda función continua $f : A \to Y$ se puede extender a una vecindad U de A en X. La vecindad U puede depender de f.*

Sea $\mathcal{C}$ una clase arbitraria de espacios. Un espacio Y es un extensor absoluto *para la clase $\mathcal{C}$ (un $AE(\mathcal{C})$) si cualquier subespacio cerrado A de cualquier espacio $X \in \mathcal{C}$ tiene la propiedad de extensión respecto a Y.*

Un espacio Y es un extensor absoluto de vecindad *para la clase $\mathcal{C}$ (un $ANE(\mathcal{C})$), si todo subespacio cerrado A de cualquier espacio $X \in \mathcal{C}$ tiene la propiedad de extensión en una vecindad respecto a Y.*

Para ambos conceptos AE y ANE la notación $AE(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ y $ANE(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ significa que el espacio es un AE (respect. ANE) para la clase de espacios que pertenecen a $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$.

2.1.2 De la definición se sigue inmediatamente que todo espacio AE($\mathcal{C}$) es un ANE($\mathcal{C}$), y que si $\mathcal{D}$ es una clase de espacios contenida en $\mathcal{C}$, entonces todo A(N)E($\mathcal{C}$) es un A(N)E($\mathcal{D}$).

Evidentemente si Y consiste de un sólo punto, entonces Y es un AE($\mathcal{C}$) para toda clase $\mathcal{C}$.

Un hecho importante para espacios normales es:

Teorema 2.1.3 *Si la clase $\mathcal{C}$ contiene un espacio X que no es normal, entonces todo $ANE(\mathcal{C})$ Hausdorff consiste de un sólo punto. A la inversa, si X consiste de un sólo punto, X es un $AE(\mathcal{C})$ para una clase $\mathcal{C}$ que contiene un espacio que no es normal.*

Demostración: Supóngase que Y es un ANE($\mathcal{C}$) Hausdorff y contiene más de un punto. Sean p y q dos puntos distintos en Y. Entonces ellos están contenidos en vecindades disjuntas U y V respectivamente. Como X no es normal, existen dos cerrados disjuntos B y C en X

que no tienen vecindades disjuntas. Considérese el subespacio cerrado $A = B \cup C$ de X y la función continua $f : A \to Y$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} p, & \text{para } x \in B \\ q, & \text{para } x \in C \end{cases}$$

Como Y es un ANE($\mathcal{C}$), f tiene una extensión $g : W \to Y$ donde W es una vecindad de A en X. Entonces $g^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son vecindades disjuntas de B y C respectivamente, lo que es una contradicción.

Si X consiste de un sólo punto, entonces X es un A(N)E($\mathcal{C}$) para cualquier clase $\mathcal{C}$. ∎

El siguiente teorema será de utilidad posteriormente:

Teorema 2.1.4 *Si Y es un ANE(perfectamente normal, Hausdorff), entonces toda familia de abiertos no vacíos en Y, disjuntos por parejas, es a lo más numerable.*

Demostración: Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una familia no numerable de abiertos no vacíos en Y. Existe un espacio ([Bing] pag. 185, ejemplo H) X Hausdorff y perfectamente normal con una familia no numerable de puntos $\{x_s\}_{s\in S}$ localmente finita que no posee vecindades disjuntas.

Sea A el subespacio de X que consiste de los puntos x_s. Entonces A es cerrado. Defínase una función $f : A \to Y$ seleccionando para cada x_s algún punto $f(x_s) \in U_s$. La continuidad de f se sigue de que $\{x_s\}_{s\in S}$ es localmente finita y del teorema 0.5.6. Entonces la familia

$$\{g^{-1}(U_s) | s \in S\}$$

es una colección disjunta de vecindades de los x_s, lo que es una contradicción. ∎

El primer ejemplo de un AE(normal) está dado por el teorema de Tietze, teorema 0.4.2, es decir I es un AE(normal) (de hecho, según la observación posterior al teorema, $\mathbb{R}$ es un AE(normal)).

2.2 Operaciones con AE($\mathcal{C}$) y ANE($\mathcal{C}$)

Antes de considerar otros extensores, presento algunas propiedades de los AE($\mathcal{C}$).

Teorema 2.2.1 *Sea $\{Y_\mu | \mu \in T\}$ una familia arbitraria de espacios. Supóngase que cada Y_μ es un ANE($\mathcal{C}$) y que todos los Y_μ con excepción de un número finito $\mu_1, \ldots, \mu_n$ son AE($\mathcal{C}$). Entonces el producto topológico $Y = \prod_{\mu\in T} Y_\mu$ es un ANE($\mathcal{C}$).*

Demostración: Sea $X \in \mathcal{C}$, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Considérese $f_\mu = p_\mu f : A \to Y_\mu$. Entonces existen $g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_n}$ que extienden $f_{\mu_1}, \ldots, f_{\mu_n}$ a vecindades $U_1, \ldots, U_n$, respectivamente, de A en X, y funciones continuas g_μ para $\mu \in M \setminus \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ que extienden las f_μ a todo X. Entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es una vecindad de A en X. Defínase $g : U \to Y$ por $g_\mu(x) = p_\mu g(x)$ para toda $x \in U$, donde se consideran las restricciones de g_μ a U para $\mu \neq \mu_1, \ldots, \mu_n$. ∎

Corolario 2.2.2 *El producto topológico de una familia finita de ANE($\mathcal{C}$) es un ANE($\mathcal{C}$).*

En forma analoga a la demostración del teorema 2.2.1 se prueba el siguiente resultado

Teorema 2.2.3 *Sea $\{Y_\mu | \mu \in T\}$ una familia arbitraria de AE(C). Entonces, el producto topológico $Y = \prod_{\mu \in T} Y_\mu$ es un AE(C).*

Corolario 2.2.4 *Los siguientes espacios son AE(normal):*
(1) $I^n, (n \in \mathbb{N})$.
(2) $I^{\aleph_0}$.
(3) $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.
(4) $\mathbb{R}^n$.
(5) I^γ *para* $\gamma > \aleph_0$ *(el cubo de Tychonoff).*

Como la propiedad AE(C) se preserva obviamente por homeomorfismos se tiene el siguiente corolario

Corolario 2.2.5 *La bola cerrada $B_n'(0,1)$ es un AE(normal).*

Corolario 2.2.6 *El producto topológico de una familia de AE(C) es un AE(C).*

2.3 Ejemplos de AE(C) y ANE(C)

Como ya se mencionó, del teorema de Tietze se concluye que I y $\mathbb{R}$ son AE(normal).

Teorema 2.3.1 *Todo conjunto convexo en un espacio lineal topológico localmente convexo es un AE(metrizable)*

Demostración: Esto se desprende del teorema de Dugundji (teorema 0.4.3) ∎

Corolario 2.3.2 *Todo espacio de Banach es un AE(metrizable).*

Teorema 2.3.3 *(1) Si Y es un espacio métrico completo, entonces Y es un AE(ultraparacompacto).*
(2) Si Y es un espacio completamente metrizable separable, entonces Y es un AE(ultranormal).

Demostración: El resultado se sigue del teorema 0.8.6. ∎

Corolario 2.3.4 *Si Y es un espacio completamente metrizable, entonces Y es un AE(ultranormal, paracompacto).*

Demostración: Aplíquese el teorema anterior y el teorema 0.7.4(3). ∎

Para espacios totalmente normales se tiene:

Teorema 2.3.5 *Todo conjunto convexo completo en un espacio lineal topológico convexo es un AE(totalmente normal).*

Demostración: Es una consecuencia directa del teorema 0.8.4. ∎

Corolario 2.3.6 *(1) Todo espacio de Banach es un AE(totalmente normal), en particular todo espacio de Hilbert es un AE(totalmente normal).*
(2) Todo espacio de Banach, Hilbert o todo subconjunto convexo completo de un espacio lineal topológico convexo son AE(Paracompacto, Hausdorff).

Demostración: Para (1) véase el teorema 0.8.3 y los comentarios posteriores al mismo, considerando que un espacio totalmente normal es normal por colecciones. Para (2) aplíquese el teorema 2.3.5 y el teorema 0.7.5(1). ■

Teorema 2.3.7 *Todo espacio de Hilbert es un AE(normal por colecciones).*
Demostración: Este resultado se obtiene del teorema 0.8.3. ■

2.4 AE metrizables

En esta sección se presenta un importante teorema para AE(metrizable):

Teorema 2.4.1 *Sea Y un espacio metrizable que es un A(N)E(metrizable). Entonces:*
(1) Y es un A(N)E(totalmente normal, perfectamente normal).
(2) Y es un A(N)E(totalmente normal) si y sólo si Y es completamente metrizable.
(3) Y es un A(N)E(perfectamente normal) si y sólo si Y es separable.
(4) Y es A(N)E(normal) si y sólo si Y es separable y completamente metrizable.

Demostración: (1) Sea $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio cerrado de un espacio totalmente normal y perfectamente normal. Y se puede encajar en el espacio de Banach $L = C^*(Y)$, por medio de una isometría $\chi : Y \to L$ de acuerdo al teorema 0.6.1. Ya que X es totalmente normal se sigue del teorema 0.8.4 que la función

$$g = \chi f : A \to L$$

tiene una extensión continua $G : X \to L$. Identifíquese en $L \times I$ el subespacio cerrado $L \times \{0\}$ con L. Entonces Y es cerrado en el espacio metrizable $M = (L \times I) \setminus (L \setminus Y)$. Por ser A cerrado en un espacio perfectamente normal es un G_δ en X y $A = \phi^{-1}(0)$ por ser X normal. Defínase una función $H : X \to M$ mediante la formula $H(x) = (G(x), \phi(x))$ para toda $x \in X$.

Si Y es un ANE(metrizable), entonces la función identidad en Y tiene una extensión $r : V \to Y$ a una vecindad V de Y en M. Sea $U = H^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad abierta de A en X. La función $F : U \to Y$ definido por

$$F(x) = r[H(x)]$$

para toda $x \in U$ es una extensión de f. Esto prueba que Y es un ANE(perfectamente normal, totalmente normal). Si Y es un AE(metrizable) se tiene $V = M$ y $U = X$. Esto prueba que Y es un AE(perfectamente normal, totalmente normal).

(2) Sea $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de un espacio totalmente normal X.

Al ser Y topológicamente completo, tiene una métrica acotada. Y se puede encajar en el espacio de Banach $L = C^*(Y)$ por medio de la isometría $\chi : Y \to L$. La función compuesta

$$g = \chi f : A \to L$$

tiene una extensión continua $G : X \to L$ según el teorema 0.8.4.

Por ser χ una isometría, es un homeomorfismo, y como Y es completo, es cerrado en L. Si Y es un ANE(metrizable), la función identidad en Y tiene una extensión $r : V \to Y$ a una vecindad V de Y en L. Sea $U = G^{-1}(V)$. U es una vecindad de A en X. La función $F : U \to Y$ definida como

$$F(x) = r[G(x)]$$

para toda $x \in U$ es una extensión de f. Esto prueba que Y es un ANE(totalmente normal). Si Y es un AE(metrizable), $V = L$ y $U = X$. Esto prueba que Y es un AE(totalmente normal).

Supóngase que Y es un A(N)E(totalmente normal), entonces es un ANR(totalmente normal) y por el teorema 1.2.6, Y es topológicamente completo.

(3) La prueba se conduce casi igual que en (1) pero se encaja Y en $I^{\aleph_0}$según el corolario 0.6.8. Si $i : Y \to I^{\aleph_0}$ es la inclusión , entonces la función

$$g = if : A \to I^{\aleph_0}$$

tiene una extensión continua a una vecindad de A o a todo X, pues $I^{\aleph_0}$es un AE(normal).

Supóngase que Y es un A(N)E(perfectamente normal). Por el teorema 2.1.4 toda colección de abiertos no vacios en Y mutuamente disjuntos es a lo más numerable. Pero esta condición en espacios métricos es equivalente a separabilidad.

(4) La prueba se conduce como en (2) pero se encaja Y en $I^{\aleph_0} \subset \mathbb{R}^{\aleph_0}$ como sigue: Al ser Y topologicamente completo, es un G_δ en $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Entonces Y es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{\aleph_0} \times \mathbb{R}^{\aleph_0}$ y este último es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

Si Y es un A(N)E(normal) entonces es un A(N)E(totalmente normal) y A(N)E(perfectamente normal), el resultado se sigue entonces de (2) y (3).■

Teorema 2.4.2 *Si Y es un A(N)R(Tychonoff) compacto, entonces Y es un A(N)E(ultranormal).*

Demostración: Se prueba para AR la otra demostración es similar. Sea $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de un espacio ultranormal X. Y se puede encajar como subespacio de un cubo de Tychonoff I^r. entonces existe una retracción $r : I^r \to Y$. X es en particular normal por lo que existe una extensión $F : X \to I^r$. Considérese la función $H = rF : X \to Y$. H es la extensión requerida de f. ■

Corolario 2.4.3 *Si Y es un A(N)R(Tychonoff) compacto, entonces Y es un A(N)E(ultraparacompacto).*

Demostración: Se sigue de los teoremas 2.4.2 y 0.7.4(3). ■

Estos resultados se pueden extender usando el hecho de que un AR(Tychonoff) métrico es compacto ([Hanner(1)] pag. 337).

2.5 Extensores para espacios normales por α-colecciones

En esta sección se encontrará una nueva familia de extensores.

Apovecho para presentar algunas propiedades de los espacios normales por colecciones.

Teorema 2.5.1 *Para todo espacio T_1 las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) El espacio X es hereditariamente normal por colecciones.

(2) Todo subespacio abierto de X es normal por colecciones.

(3) Para toda familia $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X discreta en la unión $F = \bigcup_{s\in S} F_s$ y que consiste de cerrados en F, existe una familia $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ de abiertos en X disjuntos por parejas, tales que $F_s \subset U_s$ para toda $s \in S$.

Demostración: La implicación 1) $\Rightarrow$ 2) es evidente.

2) $\Rightarrow$ 3): Primero obsérvese que como la familia $\mathcal{F}$ es discreta en F, cada F_s es abierto en F pues su complemento, que es la unión de los restantes $F_{s'}$, es cerrado en F. Entonces $F_s = W_s \cap F$ $\forall s \in S$, donde W_s es abierto en X. Considérese el conjunto abierto $W = \bigcup_{s\in S} W_s$. Por hipótesis W es normal por colecciones. Se afirma que la familia $\mathcal{H} = \{F_s^-\}_{s\in S}$ es discreta en W (las cerraduras son respecto a W): Sea $x \in W$. Existe s tal que $x \in W_s$. W_s es una vecindad de x que sólo intersecta a un miembro de la familia $\mathcal{F}$ (de hecho a F_s): Supóngase que $x \in W_s \cap F_{s'}^-$, entonces W_s es una vecindad de x y se tendría que $W_s \cap F_{s'} \neq \emptyset$ pero eso implicaría que existe $y \in F_{s'}$ y $y \in W_s$. Pero $y \in F_s$, una contradicción. Por lo tanto, existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ en W tal que $F_s \subset U_s$ para toda $s \in S$. Pero cada U_s es abierto también en X. Entonces $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ es la familia buscada.

3) $\Rightarrow$ 1): Sea H un subespacio de X y $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de cerrados en H. Entonces $F = \bigcup_{s\in S} F_s \subset H$. Claramente $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ es discreta en F y cada $F_s = F_s \cap F$ es cerrado en F. Por hipótesis existe una familia $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ de abiertos disjuntos por parejas en X tales que $F_s \subset U_s$ $\forall s \in S$. Considérese la familia $\{U_s \cap H\}_{s\in S}$ de abiertos disjuntos por parejas en H. Se sigue que $F_s \subset H \cap U_s$ $\forall s \in S$. Por lo tanto, H es normal por colecciones. ∎

Teorema 2.5.2 *Sea X normal por α-colecciones y $F \subset X$ un conjunto F_σ, entonces F es normal por α-colecciones.*

Demostración: Sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con F_n cerrado en X para toda $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in J}$ una familia discreta de cerrados en F, con $|J| \leq \alpha$. Considérese la familia $\{B_i \cap F_n | i \in J\}$ de cerrados en F_n, de hecho también son cerrados en X pues $B_i = H_i \cap F$ con H_i cerrado en X, por lo que $B_i \cap F_n = H_i \cap F \cap F_n = H_i \cap F_n$. Además se afirma que

$$B_i \cap F_n \cap [\bigcup_{j\neq i} B_j]^- = \emptyset \quad \text{para cada } i \in J \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Esto se demuestra fácilmente: obsérvese que $F_n = F_n \cap F$ pues $F_n \subset F$, entonces

$$B_i \cap F_n \cap [\bigcup_{i\neq j} B_j]^- = B_i \cap F_n \cap [\bigcup_{i\neq j} B_j]^- \cap F$$

Pero recuérdese que si $C \subset D \subset E$, entonces $C^{-D} = C^{-E} \cap D$. Por lo que,

$$B_i \cap F_n \cap [\bigcup_{i\neq j} B_j]^- \cap F = B_i \cap F_n \cap \bigcup_{i\neq j} (B_j)^{-F} = B_i \cap F_n \cap \bigcup_{i\neq j} B_j = \emptyset$$

porque los B_j son cerrados en F y forman una familia discreta en F.

Ya que X es normal por α-colecciones, existen abiertos $U_{i,n}$ en X tales que $B_i \cap F_n \subset U_{i,n}$. Los conjuntos $\{U_{i,n}\}_{i\in J}$ forman una familia discreta en X. Además por normalidad de X, existen abiertos $V_{i,n}$ tales que $B_i \cap F_n \subset V_{i,n} \subset V_{i,n}^- \subset X \setminus [\bigcup_{i\neq j} B_j]^-$. Considérese la familia $\{W_{i,n}\}$ tal que $W_{i,n} = U_{i,n} \cap V_{i,n}$ $\forall i \in J, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$B_i \cap F_n \subset W_{i,n} \subset W_{i,n}^- \subset X \setminus [\bigcup_{i\neq j} B_j]^-$$

y

$$\{W_{i,n} | i \in J\}$$

es discreta en X.

Defínase $W'_{i,n} = W_{i,n} \setminus \{W_{j,m}^- | j \in J, j \neq i, m \leq n\}$ y $W'_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} W'_{i,n}$.

Afirmaciones: (1) $B_i \subset W'_i$, pues si $x \in B_i$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i \cap F_n \subset W_{i,n}$. Supóngase que $x \in W_{j,m}^-, j \neq i$. A causa de que $i \neq j$, $x \in W_{j,m}^- \subset X \setminus [\bigcup_{l\neq j} B_l]^-$ y B_i está en este último conjunto (i es una de las l). Una contradicción.

(2) W'_i es abierto: porque $W_{i,n}$ es abierto para toda pareja (i,n) y nótese que para cada m fija la familia $\{W_{j,m}\}$ es discreta por lo tanto la unión de las cerraduras es cerrada para m fija. Como se está considerando las $m \leq n$ se tiene una unión finita de cerrados en $\cup\{W_{j,m}^- | j \in J, j \neq i, m \leq n\}$ por lo que $W'_{i,n}$ es abierto.

(3) $W'_i \cap W'_j = \emptyset$. pues si $x \in W'_i$ existe n tal que $x \in W'_{i,n}$ y $x \in W_{i,n}$. Supóngase que $x \in W'_j, j \neq i$. Entonces existe m tal que $x \in W_{j,m}$. Sin pérdida de generalidad sea $m < n$. Entonces al estar $x \in W'_{i,n}$, x no puede estar en $W_{k,l}^-$ para $k \neq i, l \leq n$, por construcción de $W'_{i,n}$, pero $W_{j,m}$ es una de las $W_{k,l}^-$, una contradicción.

De estas tres afirmaciones se concluye que F es normal por α- colecciones. ∎

Teorema 2.5.3 *Sea X un espacio normal por colecciones, A un subconjunto cerrado de X y α un cardinal infinito, entonces toda función continua $f : A \to J(\alpha)$ se puede extender continuamente a todo X.*

Demostración: Considérese la función $g : J(\alpha) \to I$ definida mediante la formula

$$g([t,\beta]) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 < t \leq 1, \beta < \alpha \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

g es continua: Recuérdese como está definida la métrica en $J(\alpha)$ (para $\beta_1, \beta_2 < \alpha$)

$$\rho([x,\beta_1],[y,\beta_2]) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } \beta_1 = \beta_2, \\ x+y, & \text{si } \beta_1 \neq \beta_2. \end{cases}$$

Entonces sea $[t,\beta]$ un punto en $J(\alpha)$ y $V = B_d(t,\epsilon)$ una vecindad de $g([t,\beta])$ en I. Sea $\delta = \epsilon$, entonces $U = B_\rho([t,\beta],\delta)$ es una vecindad de $[t,\beta]$ en el erizo tal que $g(U) \subset V$.

La composición gf es una función de A a I. Como X es en particular normal, por el teorema de Tietze existe una extensión continua $G : X \to I$ de gf.

El intervalo $(0,1]$, que es un abierto en el $[0,1]$, es un conjunto cocero. Como I es normal, $(0,1]$ es un conjunto F_σ. Al ser G continua, $L = G^{-1}((0,1])$ es un conjunto F_σ en $J(\alpha)$. Del teorema 2.5.2, L es normal por α- colecciones.

Considérense los conjuntos $F_\beta = f^{-1}(\{(t,\beta)|0 < t \leq 1\})$. Estos forman una familia de cerrados en $G^{-1}((0,1])$): pues $\overline{F_\beta}^L = \overline{F_\beta}^X \cap L$ y sea $x \in \overline{F_\beta}^L \setminus F_\beta$, entonces $f(x) = (0,\beta)$ pues de otra forma se tendría $f(x) = (t,\gamma)$ $t \neq 0, \beta \neq \gamma$ y x no estaría en $\overline{F_\beta}$. De donde $f(x) = (0,\beta)$, pero $g(f(x)) = 0$, y $x \notin G^{-1}((0,1]) = L$, una contradicción.

Las $\{F_\beta\}_{\beta<\alpha}$ forman una familia discreta en L: sea $x \in L$, y $f(x) = [t,\gamma], t \neq 0$. Considérese la bola $B_\rho([t,\gamma],\varepsilon)$ con $\varepsilon = t/2$. Entonces $f^{-1}(B_\rho([t,\gamma],\varepsilon)$ es una vecindad de x en L, y no intersecta a F_β si $\beta \neq \gamma$, ya que si la intersectara, se tendría $z \in B_\rho([t,\gamma],\varepsilon) \cap F_\beta$, y $f(z) = [t',\beta]$ con $t' \neq 0$, pero entonces $\rho([t,\gamma],[t',\beta]) = t + t' > t > \varepsilon$, una contradicción.

En vista de lo anterior existe una familia de abiertos $\{U_\beta\}_{\beta\in J}$ con $|J| = \alpha$ mutuamente ajenos, tal que $F_\beta \subset U_\beta \subset G^{-1}((0,1])$ para toda β $(\beta < \alpha)$. Esta familia existe pues L es normal por α-colecciones y la familia al ser discreta en L, que es abierto, es abierta y mutuamente ajena en X.

Defínase la función $h : A \cup (X \setminus \{U_\beta\}_{\beta\in J}) \to I$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x)) & \text{para } x \in A \\ 0 & \text{para } x \in X \setminus \{U_\beta\}_{\beta\in J} \end{cases}$$

Esta es una función continua: basta observar que la función constante $h(x) = 0$ y la función gf son continuas. Falta demostrar que coinciden en la intersección de sus dominios: sea $x \in A$ y $x \in X \setminus \{U_\beta\}_{\beta\in J}$. Por estar en este último conjunto, $f(x) = [0,\gamma]$. Entonces $gf(x) = 0$ y por definición $h(x) = 0 = gf(x)$, Por lo tanto, h es continua por el lema 0.5.6 aplicado a la cubierta $A \cup \{U_\beta\}_{\beta\in J}$.

Por ser X normal, existe una extensión continua $H : X \to I$. Ahora se puede definir la extensión de f:

Sea $F : X \to J(\alpha)$ la función definida por la formula:

$$F(x) = \begin{cases} (H(x),\beta), & \text{para } x \in U_\beta \\ (0,\beta), & \text{para } x \in X \setminus \{U_\beta\}_{\beta\in J}. \end{cases}$$

Afirmaciones: (1) F está bien definida, pues $F(x) \in J(\alpha)$, no se intersectan ambos dominios y el punto $(0,\beta)$ está identificado con todos los puntos de la forma $(0,\gamma)$.

(2) F extiende a f, ya que si $x \in A$, se tienen tres casos:

(a) $x \notin X \setminus \{U_\beta\}_{\beta\in J}$, entonces $f(x) \notin F_\beta, \forall\beta$ y $f(x) = (0,\gamma) = (0,\beta)$, por otra parte $F(x) = (0,\beta)$.

(b) $x \in U_\beta$ para alguna β y $x \in U_\beta \setminus F_\beta$, se obtiene $f(x) = (0,\beta)$ y $gf(x) = 0$. Por otra parte $F(x) = (H(x),\beta) = (gf(x),\beta) = (0,\beta)$.

(c)$x \in U_\beta$ para alguna β y $x \in F_\beta$. Entonces $f(x) = (t,\beta)$ y $gf(x) = t$. Por otra parte $F(x) = (H(x),\beta) = (gf(x),\beta) = (t,\beta)$.

(3) F es continua:

(a) Sea $x \in X$ y $x \in U_\beta$ para alguna β y $\varepsilon > 0$. Entonces $F(x) = (H(x),\beta)$. $W = B_\rho([H(x),\beta])$ es una vecindad de $F(x)$ en $J(\alpha)$. Como H es continua, existe una vecindad V de x en X tal que $|H(x) - H(x')| < \varepsilon$ para toda $x' \in V$. Sea $U = V \cap U_\beta$. U es una vecindad de x en X y se cumple que $F(U) \subset W$.

(b)Sea $x \in X \setminus \{U_\beta\}_{\beta \in J}$. Por lo tanto $F(x) = [0,\gamma]$. Sea

$$U = B_\rho([0,\gamma],\varepsilon)$$

una vecindad arbitraria de $F(x)$. Por demostrar que existe una vecindad V de x en X tal que $F(V) \subset U$, es decir, para toda $x' \in V$ se cumple que $\rho(F(x), F(x')) < \varepsilon$. Por la forma en la que está definida ρ y por el hecho de que todos los puntos de la forma $[0,\gamma]$ están identificados, basta probar que para toda $x' \in V$ se tiene $|t'-0| = |t'| < \varepsilon$ donde $F(x') = [t',\lambda]$. Considérese la función H, es continua y si $x \in X \setminus \{U_\beta\}_{\beta \in J}$ entonces $H(x) = h(x) = 0$. Como h es continua, existe una vecindad W de x en X tal que $|h(x)| = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in W$. Claramente si $x \in W$, $F(x) = [0,\gamma]$ pues $W \subset X \setminus \{U_\beta\}_{\beta \in J}$. ∎

Corolario 2.5.4 *El espacio erizo $J(\tau)$ es un AE(normal por colecciones).*

El teorema también tiene un inverso:

Teorema 2.5.5 *Sea X un espacio T_1, A un subconjunto cerrado de X. Si para cada número cardinal $\tau \geq \aleph_0$ y toda función continua $f : A \to J(\tau)$ existe una extensión continua $F : X \to J(\tau)$, entonces X es normal por colecciones.*

Demostración: Sea $\{F_s\}_{s \in S}$ una familia arbitraria discreta de cerrados en X, sea $\alpha = |S|$. Entonces $A = \bigcup_s^S F$ es un cerrado en X por el corolario 0.5.2. Para cada F_s, defínase una función continua $f_s : F_s \to J(\alpha)$ de la siguiente manera: Fíjese $t \in (0,1]$ y defínase:

$$f_s(x) = [t,s].$$

Esta función es continua pues f_s es una función constante.

Por la proposición 0.5.6, la combinación $f = \diamond_{s \in S} f_s$ es una función continua $f : A \to J(\alpha)$. Por hipótesis, tiene una extensión continua $F : X \to J(\alpha)$. Considérense los conjuntos $U_s = \{(t,s) | 0 < t \leq 1\}$. Estos conjuntos son abiertos en $J(\alpha)$ (cada uno es una "espina" del erizo). Además $F_s \subset F^{-1}(U_s)$ pues si $x \in F_s$, $F(x) = [t,s] \in U_s$. Se afirma que la familia de abiertos $\{F^{-1}(U_s)_s\}_{s \in S}$ es disjunta en X. Supóngase que existe $x \in X$ tal que $x \in F^{-1}(U_s) \cap F^{-1}(U_{s'})$. Entonces $F(x) = [t,s] = [t,s']$. Lo que claramente no es posible, ya que el origen no está en algún U_s. Entonces la familia de abiertos disjuntos por parejas $\{F^{-1}(U_s)_s\}_{s \in S}$ cumple con los requisitos y el espacio X es normal por colecciones. ∎

Corolario 2.5.6 *Los espacios erizo $J(\tau)$ son AE(C) para toda τ, si C es la clase de los espacios:*

(1) Totalmente normales.

(2) Paracompactos Hausdorff.

(3) Normales (si y sólo si $\tau = \aleph_0$).

(4) Compactos Hausdorff.

(5) Metrizables.

Demostración: (1) Véase teorema 0.7.7.

(2) Véase teorema 0.7.5(1).

(3) Véase teorema 0.7.6.

(4) Véase teorema 0.7.5(3).

(5) Se sigue de (2).∎

Demostración del teorema 1.2.2 Se probará que X es un ANR(normal). Como X es separable y completo (lema 0.6.5), se puede encajar como subespacio cerrado de $J(\aleph_0)^{\aleph_0}$ (teorema 0.6.6). Supóngase que X es un subespacio cerrado de un espacio normal Z. Por demostrar que existe una retracción $r : V \to X$ de una vecindad V de X en Z a X. Considérese la identidad vista de la siguiente manera:

$$Z \supset X \xrightarrow{i} X \subset J(\aleph_0)^{\aleph_0}.$$

Ya que X es un ANR(separable metrizable), existe una retracción $r' : U \to X$ de una vecindad U de X en $J(\aleph_0)^{\aleph_0}$. Por otra parte, según el corolario 2.5.6(3), existe una extensión continua

$$i_1 : Z \to J(\aleph_0)^{\aleph_0}$$

de i a todo Z. Sea $V = i_1^{-1}(U)$. V es una vecindad de X en Z. Defínase una nueva función $r : V \to X$, mediante la formula $r = r'i_1$ para toda $z \in V$. Entonces r es la retracción buscada y X es un ANR(normal). ∎

Continuación de la demostración del teorema 1.2.4:

Supóngase que Y es un ANR(metrizable) y G_δ absoluto. Se probará que Y es un ANR(normal por colecciones). Como Y es completo (lema 0.6.5), se puede encajar como subespacio cerrado en $J(\tau)^{\aleph_0}$ para alguna τ (teorema 0.6.6). Sea X un espacio normal por colecciones y supóngase que Y es un subespacio cerrado de X. Considérese la identidad i, de la siguiente forma:

$$X \supset Y \xrightarrow{i} Y \subset J(\aleph_0)^{\aleph_0}.$$

De acuerdo al corolario 2.5.4, existe una extensión continua

$$i_1 : X \to J(\tau)^{\aleph_0},$$

de i. Por otro lado, Y es un ANR(metrizable), por lo que, existe una retracción $r' : U \to Y$ de una vecindad U de Y en $J(\tau)^{\aleph_0}$ a Y. Sea $V = i_1^{-1}(U)$. V es una vecindad de Y en X. Defínase una nueva función $r : V \to Y$ de la siguiente manera: $r = r'i_1$ para toda $z \in V$, entonces r es una retracción de V en Y, de donde se obtiene que Y es un ANR(normal por colecciones). ∎

(5) Se sigue de (2).■

Demostración del teorema 1.2.2 Se probará que X es un ANR(normal). Como X es separable y completo (lema 0.6.5), se puede encajar como subespacio cerrado de $J(\aleph_0)^{\aleph_0}$ (teorema 0.6.6). Supóngase que X es un subespacio cerrado de un espacio normal Z. Por demostrar que existe una retracción $r : V \to X$ de una vecindad V de X en Z a X. Considérese la identidad vista de la siguiente manera:

$$Z \supset X \xrightarrow{i} X \subset J(\aleph_0)^{\aleph_0}.$$

Ya que X es un ANR(separable metrizable), existe una retracción $r' : U \to X$ de una vecindad U de X en $J(\aleph_0)^{\aleph_0}$. Por otra parte, según el corolario 2.5.6(3), existe una extensión continua

$$i_1 : Z \to J(\aleph_0)^{\aleph_0}$$

de i a todo Z. Sea $V = i_1^{-1}(U)$. V es una vecindad de X en Z. Defínase una nueva función $r : V \to X$, mediante la formula $r = r'i_1$ para toda $z \in V$. Entonces r es la retracción buscada y X es un ANR(normal). ■

Continuación de la demostración del teorema 1.2.4:

Supóngase que Y es un ANR(metrizable) y G_δ absoluto. Se probará que Y es un ANR(normal por colecciones). Como Y es completo (lema 0.6.5), se puede encajar como subespacio cerrado en $J(\tau)^{\aleph_0}$ para alguna τ (teorema 0.6.6). Sea X un espacio normal por colecciones y supóngase que Y es un subespacio cerrado de X. Considérese la identidad i, de la siguiente forma:

$$X \supset Y \xrightarrow{i} Y \subset J(\aleph_0)^{\aleph_0}.$$

De acuerdo al corolario 2.5.4, existe una extensión continua

$$i_1 : X \to J(\tau)^{\aleph_0},$$

de i. Por otro lado, Y es un ANR(metrizable), por lo que, existe una retracción $r' : U \to Y$ de una vecindad U de Y en $J(\tau)^{\aleph_0}$ a Y. Sea $V = i_1^{-1}(U)$. V es una vecindad de Y en X. Defínase una nueva función $r : V \to Y$ de la siguiente manera: $r = r'i_1$ para toda $z \in V$, entonces r es una retracción de V en Y, de donde se obtiene que Y es un ANR(normal por colecciones). ■

Capítulo 3

Relaciones entre espacios A(N)E y espacios A(N)R

3.1 La relación A(N)R(C)$\Leftrightarrow$ A(N)E(C)

Una vez que se han establecido las definiciones y resultados más importantes para extensores y retractos, procederé a establecer las interacciones que existen entre estos espacios. Uno de los objetivos finales será establecer que un espacio X es un A(N)R(C) si y sólo si es un A(N)E(C) para ciertas clases C.

Para empezar, se observa que una de las implicaciones es inmediata:

Teorema 3.1.1 *Si C es una clase de espacios topológicos y $X \in C$ es un A(N)E(C), entonces X es un A(N)R(C).*

Demostración: Se lleva a cabo la prueba para la afirmación AE, la otra es similar:

Supóngase que $X \in C$ es un AE(C). Sea $Y \in C$ y X encajado en Y como subconjunto cerrado. Sea $i : X \to X$ la identidad en X. Como X es un AE(C) y $X \in C$, la identidad tiene una extensión continua $r : Y \to X$, que claramente es una retracción. ∎

En lo sucesivo se tratará de determinar las clases para las que es cierta también la implicación inversa, es decir dada una función continua $f : A \to X$ de un subespacio cerrado A de un espacio $Y \in C$ a un AR(C), ¿ Para que clases C existe una extensión continua F de f a todo Y?

Antes de probar el teorema correspondiente se requiere un lema auxiliar, muchos de los resultados ya han sido probados. Sin embargo, los incluyo para mostrar el cuadro actual de esta parte de la teoría de los AE. Supóngase que $A \subset X$ es un subconjunto cerrado y que $f : A \to Y$ es una función continua, entonces:

Lema 3.1.2 *Sea $Z = X \cup_f Y$ el espacio de adjunción de X y Y a través de f (sección 0.1.2). Si X y Y son espacios de la clase C, entonces Z también pertenece a C, donde C es:*
(1) T_1.
(2) Compacto.
(3) Lindelöf.
(4) Normal.
(5) Totalmente normal.
(6) Perfectamente normal.
(7) Completamente normal.
(8) Normal por colecciones.
(9) Contablemente paracompacto normal.

(10) Compacto Hausdorff.
(11) Paracompacto.
(12) Ultranormal.
(13) Ultraparacompacto.

Demostración: Como los casos (1)-(11) ya han sido probados ([Hanner(1)], [Hanner(2)], [Michael]), los resultados nuevos[1] son (12) y (13). Se probará primero (12) y se observará que la prueba aplica también para el caso (4).

(12): Sean F_1, F_2 dos cerrados en $X+Y$ tales que $F_i = p^{-1}p(F_i)(i=1,2)$ (p es el mapeo cociente). Basta probar que existen abiertos-cerrados ajenos U_1, U_2 en $Z = X+Y$ tales que $F_i \subset U_i$ y $U_i = p^{-1}p(U_i)(i=1,2)$. Sean W_1, W_2 abiertos-cerrados ajenos en Y tales que $F_i \cap Y \subset W_i(i=1,2)$. Obsérvese que $F_i \cap X \subset (X \setminus A) \cup f^{-1}(W_i)$. Como X es ultranormal, existen abiertos-cerrados ajenos V_1, V_2 en X tales que $F_i \cap X \subset V_i(i=1,2)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \cup V_i = A \cup f^{-1}(W_i)(i=1,2)$. Defínase $T_i = V_i \cup W_i$ y $U_i = Z \setminus p^{-1}p(Z \setminus T_i)(i=1,2)$. Claramente $F_i \subset U_i$, $U_i = p^{-1}p(U_i)$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Falta entonces probar que los conjuntos U_i son abiertos- cerrados. Basta probar que

$$p^{-1}p(Z \setminus T_i) = Z \setminus T_i$$

pues T_i es abierto-cerrado. También nótese que:

$$p^{-1}p(Z \setminus T_i) = \{z \in Z | p(z) \in p(Z \setminus T_i)\}.$$

Claramente, si $z \in Z \setminus T_i$ entonces $p(z) \in p(Z \setminus T_i)$ y $z \in p^{-1}p(Z \setminus T_i)$.

Ahora supóngase que $p(z) \in p(Z \setminus T_i)$ pero que $z \notin Z \setminus T_i$. Existe $z' \in Z \setminus T_i$ tal que $p(z) = p(z')$, $z' \notin T_i$ y $z \in T_i$. Por construcción del espacio, $z \neq z'$, $p(z) = p(z')$ significa que
(a) $z, z' \in f(A)$
(b) $z, z' \in A$
(c) $z' \in f(A), z \in A$
(d) $z' \in A, z \in f(A)$.

Se probará que cualquiera de los cuatro casos conduce a una contradicción.

Si $z, z' \in f(A)$ quiere decir que $z = f(a), z' = f(a'), a, a' \in A$. Pero entonces $p(z) = p(z')$ significa que $f(a) = f(a')$, es decir $z = z'$.

(b): Si $z, z' \in A$, entonces $z = a, z' = a'$. $a \in V_i, f(a) \in W_i$. Como $z' \notin T_i$, se sigue que $a' \notin V_i$ pero $f(a) = f(a')$ porque $p(z) = p(z')$, de donde se deduce que $f(a') \in W_i$, es decir $a' \in f^{-1}(W_i)$ y como $a' \in A$, se concluye que $a \in V_i$, una contradicción.

(c): $z \in A$ y $z' \in f(A)$, entonces $z = a \in A$, $z' = f(a'), a' \in A$. Además $f(a) = f(a')$ porque $p(z) = p(z')$. Entonces,

$$a \in V_i \Rightarrow a \in f^{-1}(W_i) \Rightarrow f(a) \in W_i \Rightarrow f(a') \in W_i$$

lo que es una contradicción, pues $z' \notin T_i$.

(d) Si $z' \in A, z \in f(A)$, $z' = a', z = f(a)$. Además $f(a) = f(a')$. Entonces

$$a \in T_i \Rightarrow f(a) \in W_i \Rightarrow f(a') \in W_i \Rightarrow a' \in f^{-1}(W_i)$$

y como, $a' \in A$ se deduce que $a' \in V_i$, otra vez una contradicción a que $z' \notin T_i$.

[1] Nuevos, porque hasta ahora no los he encontrado en la literatura que he revisado.

En vista de lo anterior, los conjuntos U_i son abiertos-cerrados y $X \cup_f Y$ es ultranormal. Se observa que la demostración se puede aplicar al caso (4).

(13): Del teorema 0.7.4(3) se deduce que si X, Y son ultraparacompactos, entonces X, Y son ultranormales y paracompactos. De (11) y (12) se sigue que $X \cup_f Y$ es ultranormal y paracompacto. Otra vez se usa el teorema 0.7.4(3) para deducir que $X \cup_f Y$ es ultraparacompacto. ■

Teorema 3.1.3 *Sea C cualquiera de las siguientes clases de espacios:*
(1) normales.
(2) normales por colecciones.
(3) totalmente normales.
(4) perfectamente normales.
(5) completamente normales.
(6) normales Lindelöf.
(7) numerablemente paracompactos normales.
(8) compactos hausdorff.
(9) paracompactos.
(10) Ultranormales.
(11) Ultraparacompactos.
Entonces:
(a) Todo $ANR(C)$ es un $ANE(C)$.
(b) Todo $AR(C)$ es un $AE(C)$.

Demostración: Se realizan las pruebas para ANR(C). La otra es completamente similar: Para todos los casos sea Y un ANR(C) arbitrario y considérese una función continua $f : A \to Y$ definida en un subespacio cerrado A de un espacio $X \in C$. Basta probar que f se puede extender a una vecindad U de A en X. Considérese el espacio de adjunción $Z = X \cup_f Y$. Por el lema anterior $Z \in C$. La función canónica $p : W = X + Y \to Z$ tiene dos restricciones:

$$k = p|_Y, \quad j = p|_X$$

Entonces $k : Y \to Z_0$ es un homeomorfismo de Y sobre un subespacio cerrado Z_0 de Z (teorema 0.2.5). Como Y es un ANR(C), existe una vecindad V de Z_0 en Z y una retracción $r : V \to Z_0$. La imagen inversa $U = j^{-1}(V)$ de la función $j : X \to Z$ es una vecindad de A en X, porque $p^{-1}(V)$ es abierto en $X + Y$ y por definición $X \cap p^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero $p^{-1}(V) \cap X = j^{-1}(V)$. Si $a \in A$, entonces $a = f(a)$ en Z y $f(a) \in Y \subset V$ por lo que $j(a) \in V$ y $a \in j^{-1}(V)$.

Defínase una función $g : U \to Y$ mediante la formula:

$$g(x) = (k^{-1}r)[j(x)]$$

para toda $x \in X$. Entonces g es una extensión de f a U, pues $g(a) = k^{-1}(r(j(a)))$ pero $j(a) = f(a)$ en Z y $f(a) \in Z_0$ por lo que $r(f(a)) = f(a)$. Entonces $k^{-1}r((f(a))) = k^{-1}(f(a)) = f(a)$, por definición de k. Esto demuestra el teorema para las clases consideradas. ■

Teorema 3.1.4 *Supóngase que C es una de las siguientes clases:*
(1) metrizables.
(2) métricos separables.

Demostración: Se conducen la pruebas para ANR(C). La otra es completamente similar: Para todos los casos sea Y un ANR(C) arbitrario y considérese una función continua $f : A \to Y$ definida en un subespacio cerrado A de un espacio $X \in C$. Basta probar que f se puede extender a una vecindad U de A en X.

Del teorema 0.6.1, existe una isometría $l : Y \to L$ donde L es el espacio de Banach $C^*(Y)$. $l(Y) = Z_0$ es cerrada en la envolvente convexa Z de $l(Y)$. Z es metrizable por ser un subconjunto del espacio métrico L. Si C es la clase (2), entonces Y es separable y por lo tanto, otra vez por el teorema 0.6.1, Z también lo es. Por lo tanto $Z \in C$. Al ser Y un ANR(C) existe una vecindad V de Z_0 en Z y una retracción $r : V \to Z_0$. Por otra parte, del teorema de Dugundji 0.4.3 se sigue que la función

$$\phi = lf : A \to L$$

tiene una extensión continua $\psi : X \to L$ tal que $\psi(X) \subset Conv(\phi(A))$. Pero $\phi(A) \subset l(Y)$. Entonces $\psi(X) \subset Z$. Defínase $U = \psi^{-1}(V)$ yla función $g : U \to Y$ por

$$g(x) = l^{-1}(r[\psi(x)])$$

para toda $x \in U$. Entonces g es una extensión de f a U, pues si $a \in A$,

$$\begin{aligned} g(a) &= l^{-1}r\psi(a) \\ &= l^{-1}r\phi(a) \quad \text{ya que } a \in A \\ &= l^{-1}rlf(a) \\ &= l^{-1}lf(a) \quad \text{pues } f(a) \in Y, lf(a) \in Z_0 \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Con esto se demuestra el teorema. ∎

Teorema 3.1.5 *Todo A(N)R(compacto, metrizable) es un A(N)E(compacto, metrizable)*

Demostración: Sea Y compacto metrizable, y $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de un espacio compacto metrizable X. Por demostrar que f se puede extender a continuamente a todo X (respect. a una vecindad U de A en X). Se conduce la prueba para ANR la otra es similar.

Como Y es compacto metrizable, existe un homeomorfismo $h : X \to Z_0$ de Y sobre un subespacio cerrado del cubo de Hilbert $Z = I^{\aleph_0}$ (teorema 0.6.8). Ya que $I^{\aleph_0}$ es compacto y metrizable y Y es un ANR(C), existe una vecindad V de Z_0 en Z y una retracción $r : V \to Z_0$. Por otra parte, a causa de que Z es un AE(normal), la función compuesta

$$\phi = hf : A \to Z$$

tiene una extensión $\psi : X \to Z$. La imagen inversa $U = \psi^{-1}(V)$ es una vecindad de A en X. Defínase la función $g : U \to Y$ por la formula

$$g(x) = (h^{-1}[r(\psi(x))]) \quad \forall x \in X.$$

Entonces g es una extensión de f a U, pues si $a \in A$,

$$\begin{aligned} g(a) &= h^{-1}r\psi(a) \\ &= h^{-1}r\phi(a) \\ &= h^{-1}rhf(a) \\ &= h^{-1}hf(a) \\ &= f(a). \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.1.6 *(1) Un A(N)R(compacto, metrizable) es un A(N)E(normal).*
(2) Si X es un A(N)R(metrizable) entonces es un A(N)E(paracompacto, p-espacio).

Demostración: Se probará para AR, el caso ANR es similar.

(1) Como Y es un espacio compacto metrizable, se puede tratar como un subespacio cerrado del cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$. Como este último también es compacto metrizable, existe una retracción $r : I^{\aleph_0} \to Y$. Por otro lado considérese una función continua $f : A \to Y$ de un subespacio cerrado A de un espacio normal X a Y. El cubo de Hilbert es un AE(normal), entonces existe una extensión $f' : X \to Y$ de f. De aquí se deduce que la extensión buscada de f es $F = rf'$.

(2) Supóngase que Y es un AR(metrizable). Sea $f : A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de un p-espacio paracompacto X a Y, y sea $\psi : X \to M$ una función perfecta de X a un espacio metrizable M. Por el teorema 0.6.3, existe una τ tal que $Y \subset J(\tau)^{\aleph_0}$. Como Y es p-espacio paracompacto, es normal por colecciones por los teoremas 0.7.5(1) y 0.7.7. Entonces, según el teorema 2.5.6, existe una extensión continua $\phi : X \to J(\tau)^{\aleph_0}$ de f. Como ψ es perfecto, la función diagonal $g = \phi \circ \psi : X \to J(\tau)^{\aleph_0} \times M$ definido por $g(x) = (\phi(x), \psi(x))$ es perfecta ([Engelking] teorema 3.7.9). Por lo tanto, el subconjunto $K = g(A)$ de $J(\tau)^{\aleph_0} \times M$ es cerrado. Sea π la proyección de $J(\tau)^{\aleph_0} \times M$ en $J(\tau)^{\aleph_0}$. Al ser Y un AE(metrizable) (teorema 3.1.3(9)), la función $\pi|_K : K \to Y$, tiene una extensión continua $h : J(\tau)^{\aleph_0} \times M \to Y$. La composición $F = hg : X \to Y$ es la extensión requerida de f, porque $F(a) = hg(a) = h[(\phi(a), \psi(a))] = h[(f(a), \psi(a))] = f(a)$. $\blacksquare$

Teorema 3.1.7 *Todo A(N)R(p-espacio paracompacto) es un A(N)E(p-espacio paracompacto).*

Demostración: Si Y es un AR(paracompacto, p-espacio), entonces es un retracto de un producto $M \times C$, donde M es un AR(metrizable) y C un AR(compacto, Hausdorff) ([Przymusiński(1)] pag.63). Sea $r : M \times C \to Y$ la retracción. Sea $f : A \to Y$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de un p-espacio paracompacto X a Y. Por el lema previo $M \times C$ es un AE(paracompacto, p-espacio), por lo que existe una extensión continua $g : X \to M \times C$. La composición $F = rg : X \to Y$ es la extensión requerida de f. Lo cual completa la prueba. $\blacksquare$

3.2 El caso metrizable

Teorema 3.2.1 *Si Y es un $A(N)R$(separable metrizable), entonces Y es un $A(N)E$(ultra-normal).*

Demostración: Se probará para ANR. Sea $f : A \to Y$ una función continua de un subespacio cerrado A de un espacio ultranormal$X$ a Y. La composición

$$\phi = if : A \to I^{\aleph_0}$$

de la función f y la inclusión $i : Y \to I^{\aleph_0}$ (recuérdese que Y se puede encajar en $I^{\aleph_0}$(teorema 0.6.8) tiene una extensión $\psi : V \to I^{\aleph_0}$ porque el cubo es un ANE(ultranormal). Sea $U = \psi^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Defínase una función $g : U \to Y$ por

$$g(x) = r[\psi(x)] \quad \forall x \in U.$$

Entonces g es una extensión de f a U, lo que prueba que Y es un ANE(ultranormal). ∎

Corolario 3.2.2 *Si Y es un $A(N)R$(metrizable, compacto), entonces Y es un $A(N)E$(ultra-paracompacto).*

Demostración: Se sigue de que todo espacio ultraparacompacto es ultranormal (teorema 0.7.4(3)) ∎

Corolario 3.2.3 *Si Y es un $A(N)R$(metrizable compacto), entonces Y es un $A(N)E$(ultra-normal).*

Demostración: Como Y es metrizable compacto, es en particular separable metrizable, por lo que el resultado se sigue del teorema 3.2.1. ∎

Corolario 3.2.4 *Si Y es un $A(N)R$(metrizable, separable), entonces Y es un $A(N)E$(ultra-paracompacto).*

Teorema 3.2.5 *Sea Y un $A(N)R$(metrizable). Entonces:*
(1) Y es un $A(N)R$(perfectamente normal, totalmente normal).
(2) Y es un $A(N)R$(totalmente normal) si y sólo si Y es completamente metrizable.
(3) Y es un $A(N)R$(perfectamente normal) si y sólo si Y es separable.
(4) Y es un AR(normal) si y sólo si Y es separable y completamente metrizable.

Demostración: Se prueban las afirmaciones para los casos ANR; para AR la prueba es similar.

(1) Sea Y un ANR(metrizable). Por el teorema 3.1.3, Y es un ANE(metrizable). Del teorema 2.4.1 se sabe que Y es un ANE(totalmente normal, perfectamente normal). Entonces Y es un ANR(perfectamente normal, totalmente normal).

(2) La demostración de que Y es un ANR(totalmente normal) se conduce como en (1), si Y es completamente metrizable. Si Y es un ANR(totalmente normal), entonces es un G_δ absoluto por el teorema 1.2.6, es decir, es completamente metrizable (lema 0.6.5).

(3) Si Y es separable, entonces es un ANE(perfectamente normal) según el teorema 2.4.1. Por lo tanto es un ANR(perfectamente normal). Si Y es un ANR(perfectamente normal), se sigue de los teoremas 3.1.3 y 2.4.1 que Y es separable.

(4) Se prueba igual que (3). ∎

Corolario 3.2.6 *(1) Si Y es ultranormal, A(N)R(metrizable), separable y completamente metrizable, entonces es un A(N)R(ultranormal).*
(2) Si Y es ultranormal, A(N)R(metrizable) y completamente metrizable, entonces es un A(N)R(ultraparacompacto).

Demostración: (1) Se sigue del teorema 3.2.5(4), pues al ser Y un A(N)R(normal) es un A(N)R(ultranormal) (Y mismo es ultranormal).
(2) Se obtiene de (1), porque todo espacio ultranormal paracompacto es ultraparacompacto y Y al ser metrizable es paracompacto. ∎

3.3 Espacios erizo

Respecto a los espacios erizo, del corolario 2.5.6 se obtienen los siguientes resultados

Teorema 3.3.1 *(1) Para todo cardinal γ, $J(\gamma)$ es un AR(metrizable).*
(2) $J(\aleph_0)$ es un AR(perfectamente normal).
(3) Para todo cardinal γ, $J(\gamma)$ es un AR(totalmente normal).

Demostración: $J(\gamma)$ es un AE(metrizable), entonces por el teorema 3.1.1 es un AR(metrizable). Esto demuestra (1).
(2) Se sigue de (1), de que $w(J(\aleph_0)) = \aleph_0$ y de los teoremas 2.4.1(3) y 3.1.1.
(3) Se obtiene del resultado del corolario 2.5.6 y del teorema 3.1.1. ∎

De este teorema se obtiene un interesante resultado

Teorema 3.3.2 *(1) Para todo cardinal γ, $J(\gamma)$ es completamente metrizable.*
(2) $J(\aleph_0)$ es un AR(normal).
(3) Para todo cardinal γ, $J(\gamma)$ es Cech-completo.

Demostración: (1) Del resultado (4) del teorema 3.3.1 se sabe que $J(\gamma)$ es un AR(totalmente normal), entonces por el teorema 3.2.5(2), $J(\gamma)$ es completamente metrizable.
(2) Se obtiene de (1) y del teorema 3.2.5(4).
(3) Se sigue de (1) y del teorema 0.7.12. ∎

Otro resultado importante:

Teorema 3.3.3 *Para toda γ, $J(\gamma)$ es un G_δ absoluto.*

Demostración: Se sigue de los teoremas 3.3.1(4), 0.7.7 y 1.2.4. ∎

Corolario 3.3.4 *(1) $J(\tau)$ es un AE(ultraparacompacto) para toda τ.*
(2) $J(\aleph_0)$ es un AE(ultranormal).

Demostración: (1) Se sigue de los teoremas 3.3.2(1), 3.2.5(2), 3.1.3 y 0.7.4(3).
(2) Se sigue de los teoremas 3.3.2(1) y (2), 3.1.3 y de que todo espacio ultranormal es normal.
∎

3.4 Resultados adicionales en la teoría de AR y ANR

Teorema 3.4.1 *$J(\tau)$ es un $A(N)E$(paracompacto, p-espacio).*

Demostración: $J(\tau)$ es un A(N)R(metrizable) (corolario 2.5.6), entonces es un A(N)R(paracompacto, p-espacio)por el teorema 3.1.4(2). ∎

Teorema 3.4.2 *Todo espacio metrizable completo se puede encajar como subespacio cerrado de un AR(normal por colecciones) completamente metrizable.*

Demostración: Si Y es metrizable completo, se puede encaja como subespacio cerrado de $J(\tau)^{\aleph_0}$ para alguna τ y $J(\tau)^{\aleph_0}$ es un AE(normal por colecciones) por el corolario 2.5.7, de donde se sigue que es un AR(normal por colecciones). Por el teorema 3.2.5(2), es completamente metrizable. ∎

Teorema 3.4.3 *Un espacio Y es homeomorfo a un retracto de $J(\alpha)^{\aleph_0}$ si y sólo si Y es completamente metrizable, $w(Y) \leq \alpha$ y Y es un AE(normal por τ-colecciones).*

Demostración: Supóngase que Y es homeomorfo a un retracto H de $J(\alpha)^{\aleph_0}$. H es completamente metrizable al ser un cerrado en un espacio completamente metrizable. Entonces Y es completamente metrizable y claramente $w(Y) \leq \tau$. Falta probar que es un AE(normal por colecciones). Para ello, sea $f : A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de un espacio normal por colecciones X a Y. Existen una retracción $r : J(\tau)^{\aleph_0} \to H$ y un homeomorfismo $h : Y \to H$. Por lo tanto existe una extensión continua $F : X \to J(\tau)^{\aleph_0}$ de la composición $hf : A \to H \subset J(\tau)^{\aleph_0}$. De aquí se obtiene la extensión requerida de f: $h^{-1}rF : X \to Y$.

$\Leftarrow$): Como Y es un AE(normal por colecciones) y es metrizable, es un AR(normal por colecciones) (teorema 3.1.1) y G_δ (teorema 1.2.4), es decir completamente metrizable. ∎

Finalmente una caracterización para espacios normales:

Teorema 3.4.4 *Un espacio T_1 X es normal si y sólo si para cada cerrado A de X y toda función $f : A \to Z$, existe una extensión $F : X \to Z$, donde Z es un $A(N)R$(metrizable) separable y G_δ absoluto.*

Demostración: Se prueba para AR.

Si X es normal, $f : A \to Z$ y Z un AR(metrizable) separable y G_δ absoluto, entonces Z es un AR(normal) por el teorema 1.2.3 y por consiguiente es un AE(normal) (teorema 3.1.3), de donde se deduce la existencia de una extensión $F : X \to Z$ de f.

Sea X un espacio y K, H cerrados disjuntos en X. Sea $Z = J(\aleph_0)$. Entonces, Z es separable, AR(metrizable) y G_δ absoluto (Teorema 3.3.3). Defínase $A = K \cup H$ y una función $f : A \to Z$ mediante la fórmula ($\alpha \neq \beta$)

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, \alpha) & \text{si } x \in K \\ (\frac{1}{2}, \beta) & \text{si } x \in H \end{cases}$$

Claramente f es continua. Entonces, por hipótesis, existe una extensión continua $F : X \to Z$. Considérese los abiertos $V = F^{-1}(B([\frac{1}{2}, \alpha], \frac{1}{2^2}))$ y $W = F^{-1}(B([\frac{1}{2}, \beta], \frac{1}{2^2}))$.

Afirmaciones: (1) $K \subset V$, $H \subset W$, porque si $x \in K$, $F(x) = f(x) = [\frac{1}{2}, \alpha]$, es decir $x \in K$.De la misma manera se prueba $H \subset W$.

(2) $V \cap W = \emptyset$: si $x \in V \cap W$, entonces $F(x) \in B([\frac{1}{2}, \beta], \frac{1}{2^s})$ y $F(x) \in B([\frac{1}{2}, \alpha], \frac{1}{2^s})$ lo que es una contradicción. De donde se deduce que X es normal. ∎

Se obtiene un teorema analogo para espacios normales por colecciones:

Teorema 3.4.5 *Un espacio T_1 X es normal por colecciones si y sólo si para cada cerrado A en X, para cada función $f : A \to Z$ existe una extensión continua $F : X \to Z$, donde Z es un A(N)R(metrizable) completamente metrizable.*

Demostración: Se prueba para AR.

Si X es normal por colecciones, $f : A \to Z$, A cerrado en X y Z un AR(metrizable) completamente metrizable, se sigue del teorema 1.2.4, que Z es un AR(normal por colecciones) y del teorema 3.1.3, que Z es un AE(normal por colecciones), entonces existe una extensión $F : X \to Z$.

Sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de cerrados en X, se requiere encontrar una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de abiertos en X tales que $F_s \subset U_s$ $\forall s \in S$. Considérese como Z el espacio erizo $J(\tau)$. Z es completamente metrizable y es un AR(metrizable). El resto de la prueba se sigue como en la demostración del teorema 2.5.5. ∎

Bibliografía

[Alò, Shapiro] R. A. Alò, H. L. Shapiro
Normal Topological Spaces
Cambridge Univ. Press, 1974.

[Anderson] R. D. Anderson
Hilbert Space is homeomorphic to the countable infinite product of lines
Bull. Am. Math. Soc. 72 (1966) 515-519.

[Arens] R. Arens
Extension of functions on fully normal spaces
Pacific J. Math. 2(1952) 11-22.

[Bing] R. H. Bing
Metrization of Topological Spaces
Canadian J. Math. 3 (1951) 175-186.

[Bogatĭ] S. Bogatĭ
On metrics retracts
Soviet Math. Dokl. 13(1972) 674-677.

[Borsuk (1)] K. Borsuk
Sur les retractes
Fund. Math. 17 (1931), 152-170.

[Borsuk (2)] K. Borsuk
Theory of retracts
PWN, Warzawa, 1967.

[Borsuk (3)] K. Borsuk
Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen
Fund. Math. 19(1932) 220-242.

[Cantor] G. Cantor
Über unendliche, lineare Punktmanigfaltigkeiten
Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872-1884.
Teubner Archiv zur Mathematik, Leipzig, 1984

[Dowker] C. H. Dowker
On a Theorem of Hanner
Ark Mat. 2 (1952) 307-313.

[Dugundji (1)] J. Dugundji
Topology
Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[Dugundji (2)] J. Dugundji
An extension of Tietze theorem
Pacific J. Math. 1(1951) 353-367.

[Ellis] R. L. Ellis
Extending continuous functions on zero dimensional spaces
Math. Ann. 186 (1970) 114-122.

[Engelking] R. Engelking
General Topology
PWN, Warzawa, 1977.

[García-M., Tamariz] A. García Máynez C., A. Tamariz M.
Topología General
Porrua, México, 1988.

[Hanner(1)] O.Hanner
Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces
Ark. Mat. 2, 16 (1953) 315-360.

[Hanner(2)] O. Hanner
Solids spaces and absolute retracts
Ark. Mat. 1(1951) 375-382.

[Hu] S. T. Hu
Theory of retracts
Wayne State Univ., 1965.

[Kamke] E. Kamke
Mengenlehre
W.Gruyter, Berlin 1955, dritte Auflage.

[Kuratowski(1)] K. Kuratowski
Topology, Vol. 1
Academic press, 1966.

[Michael] E. Michael
Some extensions theorems for continuous functions
Pacific J. Math. 3(1953) 789-906.

[Van Mill] J. Van Mill
Infinite dimensional Topology, prerequisites and introduction
North-Holland, 1989.

[Morita] K. Morita
A Survey of theory of M-spaces
Gen. Top. App. 1(1971) 49-55.

[Morita, Nagata] K. Morita, J. Nagata
Topics in General Topology
North-Holland 1989.

[Nagata] J. I. Nagata
Modern General Topology
North-Holland, 1985, Amsterdam.

[Nagata(2)] J. I. Nagata
Modern Dimension Theory
N. York, 1965.

[Pasynkov] B. Pasynkov
On the extension of continuous mappings
Sov. Math. Dokl. 15(1974) 1531-1535.

[Przymusiński(1)] T. Przymusiński
Collectionwise normality and absolute retracts
Fund. Math. 98(1978) 61-73.

[Przymusiński(2)] T. Przymusiński
Collectionwise normality and extensions of continuous functions
Fund. Math. 98 (1978) 75-81.

[Rinow] W. Rinow
Lehrbuch der Topologie
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[Tychonoff] A. Tychonoff
Über einen Metrizationsatz von P. Urysohn
Math. Ann. 95 (1926) 136-142.