S
2 ej.

Notas de Ecuaciones Diferenciales para las carreras de Ingeniería del Tecnológico Abierto

Tesis que para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas
Presenta:

Ernesto Arturo Bósquez
Molina

Director de Tesis: Dr. Humberto Carrillo Calvet

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

1992

I N D I C E

Capítulo V
Series de Fourier

INTRODUCCION

Mucho se ha escrito sobre Ecuaciones Diferenciales Lineales, pero poco se ha hecho por elaborar textos o notas que traten de cubrir las necesidades que requiere los diferentes centros de estudio y que esten acordes a los programas vigentes de la SEP.

Por la razón anterior he enfocado mi experiencia, tanto en el aula como académica, a tratar de realizar las presentes notas.

El propósito de este trabajo consiste en ser material de complemento bibliográfico para la materia de Matemáticas IV (impartido en el Instituto Tecnológico de Toluca, nivel licenciatura en la modalidad abierta).

El Sistema Abierto es una modalidad educativa que en forma general es para aquellas personas que requieren de un horario de estudio, que ellos eligen, sin alterar sus actividades cotidianas o trabajos.

Es importante para el estudiante activo de este curso, tener como antecedentes los cursos de Cálculo Diferencial e Integral y Algebra Lineal, pués esto le facilitará la comprensión de este trabajo.

Los seis capítulos expuestos en estas notas, cubren el programa oficial de la Institución (SEP), y son el resultado de una cuidadosa selección de información y de diversas entrevistas con profesionales expertos en el área.

Agradezco sinceramente el apoyo recibido por Dr. Humberto Carrillo Calvet, M.C. Guillermo Gómez Alcáraz, M.C. Agustín Ontiveros Pineda, Fis. Emilio J. Flores Llamas y Mat. Humberto Santillana Loyo y a los integrantes del Laboratorio de Dinámica no Lineal por sus múltiples observaciones para la realización del presente trabajo. Así mismo agradezco al Ing. Elías Bernal Alcántara, director del Instituto Tecnológico de Toluca, por brindarme el apoyo (tanto de instalaciones como de tiempo laboral) para la realización de las presentes notas.

El trabajo macanográfico fue hecho por el autor de esta tesis, usando el editor de textos chi-writer.

Agradezco sinceramente el apoyo recibido por Dr. Humberto Carrillo Calvet, M.C. Guillermo Gómez Alcáraz, M.C. Agustín Ontiveros Pineda, Fis. Emilio J. Flores Llamas y Mat. Humberto Santillana Loyo y a los integrantes del Laboratorio de Dinámica no Lineal por sus múltiples observaciones para la realización del presente trabajo. Así mismo agradezco al Ing. Elías Bernal Alcántara, director del Instituto Tecnológico de Toluca, por brindarme el apoyo (tanto de instalaciones como de tiempo laboral) para la realización de las presentes notas.

El trabajo macanográfico fue hecho por el autor de esta tesis, usando el editor de textos chi-writer.

CAPITULO I

Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden uno y dos

1. Introducción

Se llama **ecuación diferencial** aquella que relaciona a la variable independiente t, la función incógnita $x = x(t)$ y sus derivadas, x', x'' , $x^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma:

$$F(t,\ x,\ x',\ x'',\ \ldots,\ x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

por ejemplo, las ecuaciones siguientes son diferenciales.

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C^1} = E. \qquad \text{(Circuito Eléctrico)} \tag{2}$$

$$m\,\frac{d^2 x}{dt^2} = F. \qquad (2^{\underline{da}}\ \text{Ley de Newton}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad \text{(Ecuación de Laplace)} \tag{4}$$

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad \text{(Ecuación de Onda)} \tag{5}$$

Si en una ecuación diferencial la función incógnita depende de una sola variable independiente, la ecuación diferencial se llama **ordinaria**. Por ejemplo las ecuaciones diferenciales (2) y (3) son ecuaciones ordinarias. Si en una ecuación diferencial la función incógnita depende de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial se llama **parcial**. Por ejemplo las ecuaciones diferenciales (4) y (5) son ecuaciones diferenciales parciales. El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparezca en la ecuación. Por ejemplo las ecuaciones diferenciales (2), (3), (4) y (5), son de segundo orden. Una **solución** de una ecuación diferencial es una función que satisface a la ecuación diferencial. En forma más precisa: si llamamos $D^n(I)$ al conjunto de funciones $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ que tienen derivadas de orden n, entonces el conjunto S de soluciones de la ecuación diferencial

$$F(t,\ x,\ x',\ x'',\ \ldots,\ x^{(n)}) = 0$$

puede describirse de la manera siguiente:

$$S = \{ f_o \in D^{(n)}(I) \mid F(t,\ f_o(t),\ f_o'(t),\ \ldots,\ f_o^{(n)}(t)) = 0.\ \forall\ t \in I. \}.$$

A los elementos de S se les llaman soluciones de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 1. La función $f(t) = sen\ kt$, es una solución de la ecuación diferencial $x'' + k^2x = 0$, pues al sustituirla en ésta se tiene que:

$$(sen\ kt)'' + k^2(sen\ kt) = -k^2 sen\ kt + k^2 sen\ kt = 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

es decir la función $sen\ kt$ es solución de la ecuación propuesta.

Ejemplo 2. La función $f(t) = e^t \int_0^t e^{s^2} ds + ce^t$, es una solución de la ecuación $x' - x = e^{t+t^2}$, ya que:

$$f' - f = \left[e^t \int_0^t e^{s^2} ds + ce^t \right]' - \left[e^t \int_0^t e^{s^2} ds + ce^t \right] =$$

$$= e^t \int_0^t e^{s^2} ds + e^t(e^{t^2}) + ce^t - e^t \int_0^t e^{s^2} ds - ce^t = e^{t+t^2}.$$

Ejercicios

Verificar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

a) $f(t) = t(1 - t^2)^{1/2}$, para, $x\,x' = t - 2t^3$.

b) $f(t) = \dfrac{sen\ t}{t}$, para, $t\,x' + x = cos\ t$.

c) $f(t) = cos\ t$, para, $x'' + x = 0$.

d) $f(t) = t\displaystyle\int \frac{sen\ s}{s}ds$, para, $t\,x' = x + t\ sen\ t$.

e) $f(t) = ce^{-2t} + (1/3)e^{t}$, para, $x' + 2x = e^{t}$.

Una vez discutido lo que se entiende por una ecuación diferencial y por una solución, surgen las siguientes preguntas:

1.- ¿Toda ecuación diferencial tiene solución?.

2.- De tener solución ¿Cuántas tiene?.

Para responder a estas preguntas conviene analizar algunos ejemplos.

Ejemplo 3. Considérese la ecuación

$$[x'(t)]^2 + [x(t)]^2 + 1 = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden, pues es de la forma

$$F(t,\ x(t),\ x'(t)) = 0.$$

con

$$F(t,\ x(t),\ x'(t)) = [x']^2 + [x]^2 + 1.$$

sin embargo no tiene ninguna solución, ya que

$$[x']^2 + [x]^2 \geq 0$$

para todos los valores que las funciones $x(t)$ y $x'(t)$ tomen.

Ejemplo 4. El ejemplo anterior nos sugiere una ecuación que tiene sólo una solución, es decir:

$$[x'(t)]^2 + [x(t)]^2 = 0.$$

la única solución de ésta ecuación es $x(t) = 0$, para toda t real.

Ejemplo 5. Para la ecuación:

$$x'(t) = 3t^2.$$

se puede ver que la función $x(t) = t^3 + C$ es solución, para toda t real y cualquier valor de la constante C. Lo que quiere decir que la ecuación tiene un número infinito de soluciones. En los ejemplos anteriores se ha podido notar que una ecuación diferencial puede no tener solución, tener un número finito de soluciones o bién tener un número infinito de soluciones. A medida que avancemos en nuestro estudio nos iremos dando cuenta de que los primemeros dos casos no son típicos y que lo común es que asociadas a cada ecuación diferencial exista un número infinito de soluciones. Este hecho es de esperarse, pues para resolver una ecuación diferencial de un modo u otro, hay que hacer al menos una integración y en consecuencia aparece una constante de integración que al tomar diferentes valores, define una gama infinita de soluciones de la ecuación diferencial.

Por otra parte, es lógico pensar que si ante un conjunto de funciones, con la propiedad común de satisfacer la misma ecuación diferencial, si queremos determinar una en particular, tendríamos que dar un criterio de selección que consista en imponer condiciones adicionales que sean característica exclusiva de la solución deseada. Más adelante veremos que mediante la imposición de condiciones iniciales se pueden determinar de manera única soluciones particulares.

2. Ecuaciones de Primer Orden

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$f(t,\ x,\ x') = 0. \tag{6}$$

Una clase importante de ecuaciones de la forma (6) son las que tienen la *forma estandard*.

$$x' = f(t,\ x). \tag{7}$$

No existe un método general para resolver cualquier ecuación del tipo (7), sin embargo para un gran número de éstas existen métodos específicos que conducen a su solución.

2.1. La ecuación $x' = f(t)$.

Un caso simple de ecuación de la forma (7) es

$$x' = f(t) \tag{8}$$

cuya solución se reduce a encontrar una primitiva de la función f observemos que:

(1) Si la función ϕ definida en un intervalo I, es una primitiva de $f(t)$, entonces también lo es cualquier función $x(t) = \phi(t) + C$ con C una constante real.

(2) El teorema fundamental del Cálculo garantiza que si la función $f(t)$ es continua en el intervalo I entonces f tiene primitiva. De hecho, para cualquier $t_0 \in I$, la función:

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

representa una primitiva y escoger diferentes valores para t_o significa tomar diferentes primitivas.

Así quedan esclarecidas las condiciones bajo las cuales la ecuación (8) tiene soluciones: Si la función ϕ es solución, en I, entonces todas las soluciones serán de la forma: $x(t) = \phi(t) + C$. Si nos interesa la solución que cumple la condición inicial $x(t_0) = x_0$ habría que escoger $C = x_0 - \phi(t_0)$. Así se obtiene el resultado siguiente.

Teorema 1

Dada la ecuación (8), si $f(t)$ es continua en el intervalo I y $t_0 \in I$, $x_c \in \mathbb{R}$, entonces existe una y sólo una solución $x(t)$ con la propiedad de que $x(t_0) = x_0$.

2.2. Ecuaciones lineales.

Se dice que la ecuación diferencial

$$f(t, x, x') = 0$$

es lineal si puede expresarse en la forma

$$x' + a(t)x = b(t). \tag{9}$$

Para las ecuaciones de este tipo se conoce la forma general de sus soluciones, así como las condiciones bajo las cuales las condiciones iniciales determinan soluciones de forma única . Esto está expresado en el siguiente teorema.

Teorema 3

Si las funciones $a(t)$,$b(t)$ son continuas en un subconjunto I de los números reales entonces para toda pareja (t_0, x_0) con $t_0 \in$ I, y $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución, $x(t)$, definida en I, tal que $x(t_0) = x_0$. Esta solución esta dada por la fórmula siguiente:

$$x(t) = e^{-\int a(s)ds}\left[\int b(t)e^{\int a(s)ds} + C\right] \tag{10}$$

Demostración: Multiplicando la expresión (9) por $e^{\int a(s)ds}$ se tiene que

$$e^{\int a(s)ds}\left[x' + a(t)x \right] = e^{\int a(s)ds}\, b(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\int a(s)ds}\right) = e^{\int a(s)ds}\, b(t)$$

integrando la última expresión se obtiene el resultado propuesto ■

Ejercicios

Probar que la expresión (10) es solución de la ecuación (9).

Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

a) $tx' + x = 3tx$, tal que, $x(0) = 1$.

b) $(\mathit{sen}\,t)x' + (\cos t)x = 0$.

c) $x' + 2tx = t$, tal que, $x(0) = -2$.

d) $3x' + kx = t$, con k constante real.

e) $x' + (\cos t)x = \cos t$, tal que, $x(0) = 2$.

f) $tx' = 2x + t^3 \cos t$.

g) $(t^2 + 4)x' + 3tx = t$, tal que $x(0) = 1$.

h) $2x' + 3x = e^{-t}$, tal que, $x(-3) = -3$.

i) $tx' + 2x = 0$, tal que, $x(1) = -1$.

j) $-\frac{1}{4}x' + (\cos t)x = t$, tal que, $x(0) = 1$.

k) $(1 + t^2)x' = tx$.

2.3. Aplicaciones

Ejemplo 1. *Cultivo de Bacterias.*

Cierto cultivo de bacterias incrementa en razón proporcional al número presente, sea $N(t)$ el número de bacterias en el tiempo t. Si el número N incrementa de 1000 a 2000 en 1hr.¿ Cuanto incrementará en 1.5 hr.?.

Solución: El modelo Matemático correspondiente es:

$$\frac{d}{dt} N(t) = kN(t)$$

con k constante. Resolviendo esta ecuación, se tiene que:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

puesto que $N(t)=1000$, cuando $t=0$, entonces $N_0=1000$, sustituyendo $N=2000$, cuando $t=1$, en la ecuación modelo se tiene que:

$$N(t) = 1000e^{kt}$$

$$2000 = 1000e^{k}$$

$$e^{k} = 2$$

por tanto:

$$N(t) = 1000(e^{k})^{t} = 1000(2)^{t}$$

$$N(1.5) = 1000(2)^{1.5} \cong 2828$$

es decir en 1.5hr. habrá 2828 bacterias.(ver figura 1)

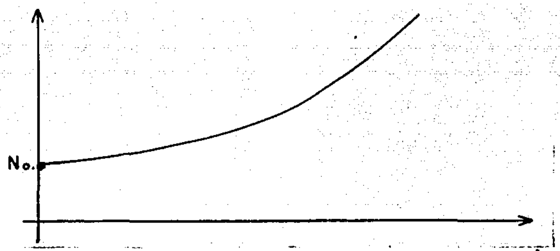

FIGURA 1

Ejemplo 2. *Desintegración Radioactiva.*
El principio fundamental de la desintegración radioactiva es: "La razón instantánea de desintegración de una sustancia radioacti va es proporcional a la cantidad de sustancia presente". Si $Q(t)$ denota la sustancia radioactiva y k la constante de proporcionalidad, entonces el modelo matemático correspondiente al principio anterior es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = kQ(t)$$

con $k > 0$, cuya solución es:

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

donde Q_0 es la cantidad de material radioactivo en el tiempo $t = 0$. Para este material radioactivo $Q(t)$, el tiempo requerido para desintegrar la mitad de la cantidad inicial Q_0, se denomina el tiempo de vida media. Por tanto se tiene que:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{kt}$$

despejando t de la última expresión se tiene que:

$$t = (-\ln 2)k^{-1} \cong -0.69314\, k^{-1}$$

Ejemplo 2.1. El Radio se desintegra en razón proporcional a la cantidad de Radio presente en cualquier tiempo. Si el tiempo de vida media del Radio es de 1600 años, ¿Que porcentaje de la cantidad inicial Q_0 permanecerá después de 1200 años?.

Solución: Como el modelo matemático correspondiente es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = kQ(t)$$

cuya solución es: $Q(t)= kQ(t)$, por tanto la constante k es:

$$k=-\ln 2/1600$$

luego, $Q(t)=Q_0 2^{-t/1600}$, de aquí:

$$Q(1200) = Q_0 2^{-0.75} \cong 0.59460\ Q_0$$

de donde el 59.5 % de Radio permanecerá después de 1200 años.

Ejemplo 3. *Disipación de Calor.*

El cambio de temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del cuerpo T y la temperatura τ del medio ambiente que lo rodea. El principio anterior se conoce como **Ley de enfriamiento de Newton**. Considerando que τ es constante y que el flujo de calor es bastante rápido, la temperatura T del cuerpo es la misma en todos los puntos del cuerpo en el tiempo t, el modelo matemático correspondiente es:

$$\frac{d}{dt}T(t) = k[T - \tau]$$

donde k es una constante negativa.

Ejemplo 3.1. Un cuerpo cuya temperatura inicial es de 200^{o}C, es sumergido en un líquido cuya temperatura constante es de $\tau = 100^{o}$C Si la temperatura del cuerpo es de 150^{o}C en un tiempo $t = 1$ min ¿Cual será la temperatura en el tiempo t = 2 min.?.

Solución: Como:

$$\frac{dT}{dt} = k\ dt$$

se tiene que $\ln(T - 100) = kt + C$, luego, $C = \ln 100$. Usando la condición $T(1) = 150$, se tiene que, $\ln 50 = k + \ln 100$, de aquí, $k = -\ln 2$, por tanto:

$$\ln [T - 100] = \ln [100(2)^{-t}]$$

de donde: $T(2) = 125^{o}$C.

Ejemplo 4. *Difusión.*

Denótese a $x(t)$ como la concentración en miligramos por centímetro cúbico de una droga o compuesto químico en un cuerpo pequeño, y denótese por x_0 la concentración en el tiempo $t = 0$. Supóngase que el cuerpo es puesto en un recipiente o tanque en el cual la concentración de la droga o compuesto químico es a, donde $a > x_0$ la concentración en el cuerpo pequeño incrementará, suponiendo que a permanece constante, la Ley de Difusión de Fick's establece que la razón del movimiento con respecto al tiempo de una solución a través de una membrana delgada es proporcional al área de la membrana y a la diferencia de concentración de la solución en los dos lados de la membrana. El modelo matemático correspondiente es

$$x'(t) = k[a - x]$$

donde k es una constante positiva, la solución de esta ecuación diferencial es:

$$x'(t) = a - [a - x_0]e^{-kt}$$

Ejemplo 4.1 La concentración de Potasio en un riñón es de 0.0025 miligramos por cm^3. El riñón es puesto en un tanque en el cual la concentración es de 0.0040 mg/cm^3, en 2hr. la concentración de Potasio en el riñón es de 0.0030 mg/cm^3. ¿ Cuál será la concentración de Potasio en el riñón 4hr. después de haber permanecido en el tanque?.

Solución: Sustituyendo $a = 0.0040$ y $x_0 = 0.0025$ en el modelo correspondiente se tiene que:

$$x(t) = 0.0040 - 0.0015\ e^{-kt}$$

considerando que $x(2) = 0.0030$, se tiene que:

$$0.0030 = 0.0040 - 0.0015\, e^{-2k}$$

$$e^{k} = [\, 2/3\,]^{1/2}$$

por tanto se obtiene que:

$$x(t) = 0.0040 - 0.0015\, [2/3]^{t/2}$$

cuando $t = 4$: $x(4) \cong 0.0033$ mg/cm^3. La curva integral correspondiente se representa en la figura 2.

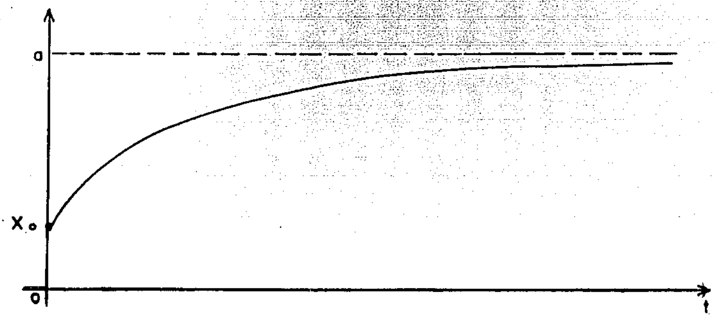

FIGURA2

Ejemplo 6. *Flujo de un líquido a través de un orificio pequeño.* El líquido contenido en un recipiente, representado en la figura 4 fluye fuera por el orificio indicado. Si no hay pérdida de energía, la velocidad de escape del líquido será la misma velocidad de un cuerpo en caída libre, es decir:

$$v = [2gh]^{1/2}.$$

donde h representa la altura del nivel del líquido al orificio en el tiempo t. A causa de la fricción y tensión de la superficie, se ha encontrado que la velocidad de escape del líquido es aproximadamente de $0.6[2gh]^{1/2}$ o bién de $4.8h^{1/2}$ft/seg, donde g se considera 32ft/seg^2. Por tanto si el orificio tiene área A, la salida del líquido del recipiente es de $4.8\ A\ h^{1/2}$ft^2/seg, entonces si V representa el volúmen del líqudo en el recipiente en el tiempo t, se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = -\ 4.8\ Ah^{1/2}$$

el signo menos significa que V decrece con el tiempo. Suponiendo que $V = f(h)$, entonces por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{df(h)}{dh}\frac{dh(t)}{dt}$$

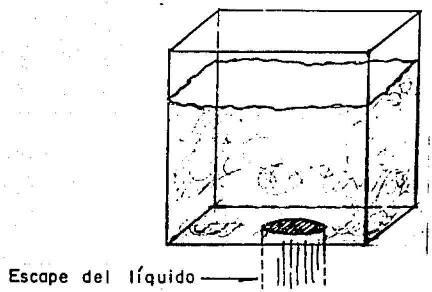

FIGURA 3

Ejemplo 6.1. Un tanque de 4ft de altura de sección transversal rectangular de 6ft por 8ft. El tanque es inicialmente llenado con agua, la cual corre fuera a través de un orificio de radio 1 pulg localizada en el fondo del tanque. Determinar: *a*) El tiempo t en que se vacía el tanque *b*) El tiempo t para que la mitad de líquido haya salido del tanque y *c*) La altura del líquido en el tanque en un tiempo de 20min.

Solución: Como $\dfrac{dV}{dt} = -4.8\dfrac{\pi}{12^2}h^{1/2}$ y como $V = 48$ entoces:

$$\frac{dV}{dt} = 48\frac{dh}{dt}$$

de aquí se tiene que:

$$48\,\frac{dh}{dt} = -48[\pi/144]h^{1/2}$$

$$h^{-1/2}dh = -(\pi/1440)dt$$

por tanto :

$$2\,[h]^{1/2} = [-\pi t/1440] + C$$

sustituyendo $t = 0$ y $h = 4$ se obtiene $C = 4$, luego:

$$t = [2880/\pi][2-h^{1/2}]$$

a) Si h = 0, se tiene que:

$$t = 5760/\pi \text{ seg} \cong 30.6\text{min.}$$

b) Si h = 2, se tiene que:

$$t = \frac{2880}{\pi}\,[2-2^{1/2}]\text{seg} \cong 9\text{min.}$$

c) Si t = 20min. = 1200seg, entonces:

$$h = [2 - (1200/2880)\pi]^2 \cong 0.48\text{ft}.$$

Ejemplo 7. *Flujo de Calor en una Dimensión.*
Considérese la transferencia de calor por conducción en un cuerpo cuyo linde se mantiene a temperatura constante. Si el calor no es generado internamente y si la transferencia de calor por radiación

es ignorada, el cuerpo eventualmente alcanza un estado estable en el cual la temperatura T será una función del espacio de coordenadas x, y, z en el cuerpo, pero independiente del tiempo t. Considérese el estado estable en el cual la temperatura T está dada por $T = \phi(x)$. En términos físicos el cambio de temperatura en la dirección YOZ son despreciables comparadas con la dirección x.

Sea A el área de la superficie S en el cuerpo, perpendicular a la dirección x y sea el grad T el gradiente de la temperatura en cualquier punto de S. Entonces la magnitud del grad T es de $\frac{dT}{dx}$. La manera en que el calor Q fluye a través de S es proporcional a A y a $\frac{dT}{dx}$, esto es:

$$Q = -kA\frac{dT}{dx}$$

donde k es la constante de proporcionalidad, llamada **conductividad térmica** del medio y donde el signo negativo significa que el flujo decalor en la dirección x, decrece la temperatura, x se mide en centímetros, A en centímetros cuadrados, T en grados Celsius (temperatura absoluta) y Q en calorías por segundo.

Ejemplo 7.1. Una barra de Hierro de longitud 100cm, el área de la sección transversal es uniforme a $4cm^2$, estando aislada lateralmente tal que el flujo de calor es solamente en la dirección x. Si en el extremo izquierdo de la barra se conserva a una temperatura de $60^\circ C$. ¿Cual es la temperatura T en términos de x?. (Para el Hierro k=0.15).

Solución: Como $Q=-0.15(4)dT/dx$, con $T(0)=0$, $x=100$ y $T=60$, se tiene que:

$$dT/dx = (-5/3)Q$$

de aquí:

$$T(x) = -\frac{5}{3}Q\,x + C$$

si $x=0$ y $T=0$, entonces $C=0$, y si $x=100$ y $T=60$, se tiene que:

$$Q = \frac{-3(60)}{5(100)} = -0.36$$

luego:

$$T(x) = -\frac{5}{3}[-0.36]x = 0.6\,x$$

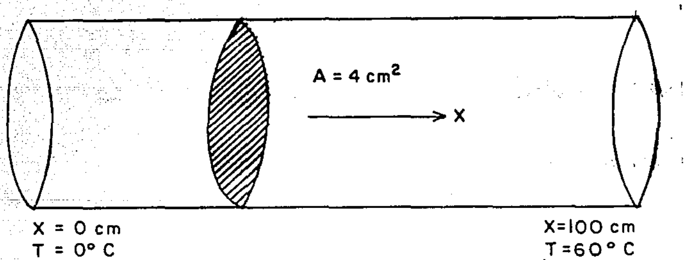

FIGURA 4

Ejemplo 8. *Mecánica.*

Un cuerpo que pesa 8 lb cae desde el reposo, considerando que la resistencia del aire es $2v$, donde v es la velocidad en ft/seg. Determinar la velocidad y distancia después de t segundos.

Solución: Por la segunda ley de Newton se tiene que:

$$m\,\frac{dv}{dt} = F_1 - F_2$$

como el peso $w = mg$, donde g es la gravedad tal que $g = 32ft/s$, entonces la masa $m = 1/4$, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$(1/4)\,\frac{dv}{dt} = 8 - 2v$$

cuya solución es:

$$v(t) = 8 - C_1 e^{-8t}$$

como el cuerpo parte del reposo se cumple que $v(0)=0$ y por tanto $C_1=8$. Si se desea la posición $x(t)$, se integra la ecuacón $v(t)=$ $8\,[1-e^{-8t}]$, es decir:

$$x(t) = 8[t + (1/8)e^{-8t}] + C_2$$

como $x(0) = 0$ implica que $C_2=-(1/2)$. (ver figura 5).

Ejercicios

Dar solución a los siguientes problemas.

1.- Cierto cultivo de bacterias incrementa en razón proporcional al número presente. Si el número se duplica en 1hr. ¿Cuanto tiempo se llevará en cuadruplar el número inicial?.

2.- Cierto cultivo de bacterias incrementará en razón proporcional al número presente, si el número se duplica en dos horas, ¿Que por centaje de el número original habrá al término de 3hr?.

3.- Cierto cultivo de bacterias incrementará en razón proporcional al número presente, si hay 10 000 bacterias en tres horas y

$5(10)^4$ bacterias en 6hr, ¿Cuantas bacterias había inicialmente?.

4.- Supóngase que el Radio se desintegra en razón proporcional a la cantidad presente. Si 100mg se reducen en 200 años, cuantos miligramos habrá después de 1000 años ?.

5.- Si el 25% de una sustancia radioactiva desaparece en 10 años, ¿Cuantos años se llevará para que desaparezca el 60% de esta sustancia?.

6.- Un cuerpo de temperatura 160°C es sumergido en un líquido con temperatura constante de 100°C, en un tiempo t=2min el cuerpo se enfría a 140°C, ¿Cuanto tiempo se llevará en enfriarse a 110°C?.

7.- Si en 10 minutos hierve el agua con una temperatura de 100°C y esta se enfria a 80°C en un cuarto en el cual la temperatura es constante de 25°C, ¿Cuantos minutos se requieren para que el agua se enfríe a 50°C?.

8.- En un circuito eléctrico hay una inductancia L = 2H una resistencia de R = 20Ω y un voltage constante E = 100V. Si la corriente $i(0) = 0$, ¿Cual será la relación entre i y t?.

9.- Si en el problema anterior, suponemos que $E=100\cos t$ dar para este caso la relación entre i y t.

10.- Un generador con fuerza electromotriz de 100V es conectado en serie con una resistencia de 20Ω, un inductor de 3H. Si $i(0) = 0$, en contrar i para $t = 0.2$seg.

11.- Si en el problema anterior $E=20$ sen $5t$, determinar i.

12.- Un inductor de 3H y de resistencia 6Ω son conectados en serie con un generador teniendo una fuerza electromotriz de: $50e^{-2t}\cos 25t$ V. Encontrar i en términos de t, si $i(0)=20$, determinar i.

13.- Un tanque lleno de agua, de altura 9ft de sección rectangular de 5ft por 8ft. el agua escapa por un orificio de radio 1 pulgada que se encuentra en el fondo del tanque.determinar: *a*) El tiempo que se requiere en vaciarse; *b*) El tiempo que se requiere para que se vacíe la mitad del tanque y *c*) La altura del agua después de 20 min.

14.- Un líquido que llena a un cilindro de base circular con radio 1ft y altura 5ft, si escapa del cilindro por un orificio de radio 1.2 pulg., que se encuentra en el fondo del cilindro. Determinar: *a*) El tiempo requerido para que se vacíe el cilindro;
b) La altura del líquido después de 1 min.

15.- Una lámina de Aluminio (k=0.49) de espesor 10 cm, una cara conserva $20^{o}C$ y la otra $80^{o}C$. Determinar la temperatura T en términos de x.

16.- Una pared de cemento (con k=0.0007) de espesor 20 cm, la superficie interna permanece a $20^{o}C$ y la otra superficie a $5^{o}C$. Determinar la temperatura T en términos de x.

17.- Una piedra que pesa 4lb cae desde el reposo, considerando la resistencia del aire (1/2)v. Determinar; *a*) La velocidad y distancia recorrida después de *t* segundos y *b*) La velocidad y distancia cia recorrida al final de 5 seg.

18.- Un proyectil que pesa (3/4)lb se lanza verticalmente hacia arriba desde un punto que se encuentra 6 pies encima de la superficie terrestre y con una velocidad inicial de 20 pies/seg, considerando la resistencia del aire igual (1/64)v. Determinar la altura máxima que llega el proyectil.

3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

La forma general de una ecuación diferencial de segundo orden es:

$$f(t,x,x',x'') = 0. \qquad (1)$$

No existe un método general para resolver estas ecuaciones, sin embargo, para un gran número de estas existen métodos específicos que conducen a su solución, por ejemplo un caso simple de resolver son las ecuaciones diferenciales liniales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Se dice que la ecuación diferencial (1) es lineal si puede expresarse en la forma:

$$x''+ a(t)x'+ b(t)x = f(t). \qquad (2)$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ son funciones reales definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

3.1 Teoría General.

Para las ecuaciones de la forma (2) se tiene el teorema de existencia y unicidad siguiente.

Teorema 3

Supóngase que las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ son continuas en el intervalo $I \subset R$ y sea $t_0 \in I$ y x_0, x_1 constantes reales arbitrarias. Entonces existe una única solución $x(t)$ de la ecuación (2), definida en I, tal que $x(t_0)=x_0$ y $x'(t_0)= x_1$.

Se dice que la ecuación diferencial (2) es homogénea si $f(0)\equiv 0$ para toda t en I, de otra forma se dice ser no homogénea.

Considérese la ecuación:

$$x'' + a(t)x'+ b(t)x = 0. \qquad (3)$$

las propiedades de las soluciones de esta ecuación son:

Propiedad 1. El conjunto de las soluciones de la ecuación (3) forma un espacio vectorial, denótese a este por V. Esta propiedad significa que si las funciones ϕ_1 y ϕ_2 pertenecen a V entonces cualquier combinación lineal de éstas también es elemento de V.
Propiedad 2. La dimensión de V es dos. Esta propiedad significa que si ϕ_1, $\phi_2 \in V$ y son linealmente independientes[1] entonces cualquier elemento ϕ de V puede expresarse en términos de ϕ_1 y ϕ_2, es decir existen escalares reales α_1 y α_2 tales que:

$$\phi(t) = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2.$$

a esta expresión se le denomina solución general de la ecuación (3).

Una función importante que se usará más adelante es el **wronskiano** de las funciones ϕ_1 y ϕ_2, que se define como:

$$W(\phi_1,\phi_2) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2. \tag{4}$$

El Wronskiano de dos soluciones tiene la siguiente propiedad

Proposición 1. Sea ϕ_1, $\phi_2 \in V$, luego $W(\phi_1, \phi_2) \neq 0 \Longleftrightarrow \phi_1$ y ϕ_2 son linealmente independientes.
Prueba. $\Leftarrow$) Es equivalente demostrar[2], si $W(\phi_1, \phi_2) = 0 \Rightarrow \phi_1$,

---

[1] Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo I son linealmente independien en I si dada la combinación lineal $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 = 0$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, para todo t

[2] Si A $\Rightarrow$ B es equivalente a noB $\Rightarrow$ noA .

ϕ_2 son linealmente dependientes[3].

Demostración: Considérese :

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 = 0.\ \forall\, t \in \mathrm{I}.$$

sea $t_0 \in \mathrm{I}$, entonces:

$$\alpha_1\phi_1(t_0) + \alpha_2\phi_2(t_0) = 0.$$

$$\alpha_1\phi_1{}'(t_0) + \alpha_2\phi_2{}'(t_0) = 0.$$

pero el determinante del sistema anterior es $W(\phi_1, \phi_2)$ y por hipótesis es cero, es decir α_1 y α_2 no son ambas cero, luego sea:

$$\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t).$$

por la primera propiedad de las soluciones de la ecuación (3) se tiene que $\phi(t) \in V$, luego se cumple que:

$$\phi(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi'(t_0) = 0.$$

pero también la función $0(t)=0$, $\forall\ t \in \mathrm{I}$, es solución de la ecua-- ción (3), tal que $0(t_0)=0$ y $0'(t_0)=0$, entonces por el **Teorema 3** se cumple que: $\phi(t) \equiv 0$, es decir:

$$\alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) \equiv 0.$$

por tanto ϕ_1, ϕ_2 son linealmente dependientes. ζ

---

3 Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 definidas en el intervalo I son linealmente dependientes en I si dada la combinación lineal $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$ 0 implica que α_1 o α_2 es diferente de cero.

$\Rightarrow$) Si $W(\phi_1, \phi_2)\neq 0$, en I entonces ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.

Demostración: (Por reducción a lo absurdo) si ϕ_1 y ϕ_2 no son linealmente independientes entonces existe una constante real λ tal que $\phi_1 = \lambda\phi_2$, para toda t en I, luego:

$$W(\phi_1, \phi_2)= \phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2 = \lambda\phi_2\phi_2' - \lambda\phi_2\phi_2' = 0. \Rightarrow \Leftarrow .$$

ya que por hipótesis $W(\phi_1, \phi_2)\neq 0$. Por tanto las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.z

Propiedad 3. Si una solución particular de la ecuación (2) es ϕ_p y ϕ es cualquier otra solución de (2) entonces la función: $\phi - \phi_p$ es solución de la ecuación (3). Esta propiedad significa que cualquier solución ϕ de la ecuación (2) puede expresarse:

$$\phi(t) = \phi_p(t) + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2.$$

donde $\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2$ es la solución de la ecuación (3). Las pruebas correspondientes a estas propiedades se dan a continuación.

Prueba de 1. Sean ϕ_1 y ϕ_2 soluciones de la ecuación (3) y sean α_1 y α_2 números reales, sustituyendo en el primer miembro de la ecuación (3), la expresión $\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2$, se tiene que:

$$[\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2]'' + a(t)[\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2]' + b(t)[\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2] =$$

$$= \alpha_1\phi_1''+\alpha_2\phi_2''+\alpha_1 a(t)\phi_1'+\alpha_2 a(t)\phi_2'+\alpha_1 b(t)\phi_1+\alpha_2 b(t)\phi_2 =$$

$$= \alpha_1[\phi_1''+a(t)\phi_1'+b(t)\phi_1]+\alpha_2[\phi_2''+a(t)\phi_2'+b(t)\phi_2] =$$

$$= \alpha_1(0)+\alpha_2(0) = 0.$$

es decir:

$$[\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2]\in V \quad z$$

Prueba de 2. Se quiere demostrar que si ϕ_1, ϕ_2 $\in V$ y linealmente independientes en el intervalo I, entonces cualquier $\phi \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2.

Demostración: Dado un $t_0 \in$ I definamos $\phi(t_0) = a$ y $\phi'(t_0) = b$. Considereando el sistema siguiente:

$$\alpha_1\phi_1(t_0) + \alpha_2\phi_2(t_0) = a.$$

$$\alpha_1\phi_1'(t_0) + \alpha_2\phi_2'(t_0) = b.$$

en donde el determinante del mismo es el wronskiano de ϕ_1 y ϕ_2 en t_0 , por la proposición 1, éste es diferente de cero y por tanto hay solución única para α_1 y α_2, luego existe $\phi^* \in V$, tal que:

$$\phi^* = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2, \ni \phi^*(t_0) = a \text{ y } \phi^*(t_0) = b.$$

por el Teorema 3 se tiene que $\phi^* \equiv \phi$ para toda $t \in$ I.

Ejemplo 1. Sean $\phi_1(t)=e^{2t}$, $\phi_2(t)=e^{-5t}$, soluciones de la ecuación diferencial: $x''+ 3x' - 10x = 0$. Determinar la solución que satis - face las condiciones iniciales: $x(0) = 2$ y $x'(0) = -1$.

Solución: Verifiquemos que las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación dada, es decir:

$$[e^{2t}]'' + 3[e^{2t}]' - 10[e^{2t}] = 4e^{2t} + 6e^{2t} - 10e^{2t} = 0.$$

$$[e^{-5t}]'' + 3[e^{-5t}]' - 10[e^{-5t}] = 25e^{-5t} - 15e^{-5t} - 10e^{-5t} = 0.$$

de donde ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación diferencial propuesta. Luego:

$$W(\phi_1,\phi_2) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ 2e^{2t} & -5e^{-5t} \end{vmatrix} = -5e^{-3t} - 2e^{-3t} = -7e^{-3t} \neq 0, \ \forall\ t \in I.$$

de donde ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones linealmente independientes en I, por tanto la solución general de la ecuación diferencial propuesta es:

$$x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{-5t}.$$

para determinar la solución única, se utilizan las condiciones iniciales dadas, es decir:

$$x(0) = 2 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

$$x'(0) = -1 = 2\alpha_1 - 5\alpha_2.$$

del sistema anterior se tiene que: $\alpha_1=9/7$ y $\alpha_2=5/7$. Por tanto la solución es:

$$x(t) = \frac{9}{7}\, e^{2t} + \frac{5}{7}\, e^{-5t}.$$

Prueba de 3. Sustituyendo $\phi - \phi_p$ en el miembro izquierdo de la ecuación (3), se tiene que:

$$[\phi - \phi_p]'' + a(t)[\phi - \phi_p]' + b(t)[\phi - \phi_p] =$$

$$=[\phi'' + a(t)\phi' + b(t)\phi] + [\phi_p'' + a(t)\phi_p' + b(t)\phi_p] =$$

$$= f(t) - f(t) = 0.$$

por tanto $[\phi - \phi_p] \in V$, si ϕ_1, $\phi_2 \in V$ y son linealmente independientes en I, entonces:

$$\phi - \phi_p = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2.$$

es decir:

$$\phi = \phi_p + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2.\zeta$$

Ejemplo 2. Sea $\phi_p=(1/2)te^t$, una solución particular de la ecua -- ción diferencial: $x''- x =e^t$. Si $\phi_1=e^t$ y $\phi_2 =e^{-t}$, son soluciones de $x''- x=0$. Determinar la solución general de la ecuación no homogé - nea propuesta.

Solución: El Wronskiano de ϕ_1 y ϕ_2 es:

$$W(\phi_1,\ \phi_2) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{t-t} - e^{t-t} = -2 \neq 0, \forall\ t \in \mathrm{I}.$$

de donde ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes, por tanto la solu ción general de la ecuación propuesta es:

$$\phi(t) = (1/2)te^t + \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t}.$$

A continuación presentaremos un método para encontrar una solución a partir de otra conocida de manera que ambas resulten li - nealmente independientes. Para esto considérese la ecuación diferencial homogénea (3) y sea la función $\phi_1(t)$, definida en el inter valo $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, solución de la ecuación (3) entonces para determinar una segunda solución de (3), tal que ϕ_1 y ϕ_2 sean linealmente in - dependientes, se procede en la forma siguiente. Sea la función $u(t)$ definida en el intervalo $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, tal que, $u(t) = \phi_2(t)/\phi_1(t)$, con la condición de que $u(t)$ no sea una constante, entonces se tiene que, $\phi_2 = u\,\phi_1$, como ϕ_2 debe ser solución de (3), se tiene que:

$$(u\phi_1)'' + a(t)(u\phi_1)' + b(t)(u\phi_1) = 0.$$

de donde:

$$u(\phi_1'' + a(t)\phi_1' + b(t)\phi_1) + u'(2\phi_1' + a(t)\phi_1) + u''\phi_1 = 0.$$

como ϕ_1 es solución de (3), se tiene que:

$$u'(2\phi_1' + a(t)\phi_1) = -u''\phi_1.$$

de aquí:

$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{\phi_1'}{\phi_1} - a(t).$$

es decir:

$$u' = \phi_1^{-2}\, e^{-\int a(t)dt}.$$

por tanto:

$$\phi_2(t) = \phi_1(t)\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2(t)}\, dt. \qquad (5)$$

Ejemplo 3. Probar que (5) es solución de (3).

Solución: Sustituyendo en el miembro izquierdo de la ecuación (3) la expresión (5), se tiene que:

$$\left\{\phi_1\int\frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}\,dt\right\}'' + a(t)\left\{\phi_1\int\frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}\,dt\right\}' + b(t)\left\{\phi_1\int\frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}\,dt\right\} =$$

$$= \phi_1''\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}\,dt + \frac{\phi_1'\ e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2} - \frac{a(t)e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1} - \frac{\phi_1'\ e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2} +$$

$$+\ a(t)\phi_1'\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt + a(t)\frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1} + b(t)\phi_1\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt =$$

$$= [\phi_1''+a(t)\phi_1'+b(t)\phi_1]\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt + 0 = 0.$$

por tanto la función $\phi_2 = \phi_1\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt$, es solución de (3).

Ejemplo 4. Del problema anterior, probar que las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.

Solución: Usando el Wronskiano, se tiene que:

$$W(\phi_1,\phi_2) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_1\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt \\ \phi_1' & \phi_1'\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt + \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \phi_1\phi_1'\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt + e^{-\int a(t)dt} - \phi_1\phi_1'\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{\phi_1^2}dt = e^{-\int a(t)dt} \neq 0.$$

para toda t en I. Por tanto las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.

Ejemplo 5. La ecuación diferencial de Legendre de orden uno es: $(1-t^2)x''- 2tx'+ 2x = 0$, con, $|t| < 1$, si una solución de esta ecuación es $\phi_1 = t$. Determinar la solución general.

Solución: La ecuación diferencial dada se transforma en:

$$x''- \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{2}{1-t^2}x = 0.$$

usando la expresión (5) y ϕ_1, se tiene que:

$$\phi_2(t) = t\int \frac{e^{-\ln(1-t^2)}}{t^2}\,dt = t\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} =$$

$$= t\int [(1/t^2)+(1/1-t^2)]dt = t[(-1/t)+(1/2)\ln(1+t/1-t)] =$$

$$= \frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1.$$

por tanto la solución general es:

$$\phi(t) = \alpha_1 t + \alpha_2[(t/2)\ln(1+t/1-t)-1].$$

Ejercicios

1.- Sean $\phi_1(t)$=sen$2t$, $\phi_2(t)=\cos 2t$, soluciones de la ecuación diferencial $x''+4x=0$. Determinar la solución general de esta ecuación.

2.- Si la función $\phi_p(t)=\cos 3t$, es una solución particular de la ecuación diferencial: $x''+4x=-5\cos 3t$. Determinar la solución general de esta ecuación.

3.- Sea la función $\phi_1(t)=e^{3t}$, una solución de la ecuación diferencial : $x''-9x=0$. Determinar la solución general de esta ecuación

Regresando a nuestro objetivo inicial de resolver la ecuación (2), podemos contestar a la segunda pregunta, es decir, si existe solución de (2), ¿Como determinarla?. de hecho como ya se dijo antes, no hay un método general para determinar la solución de (2), pero para casos específicos existe, y éstos son los que se discutirán a continuación.

3.2. Métodos de Solución

Coeficientes Constantes

Si en la ecuación diferencial (3), las funciones $a(t)$, $b(t)$, son constantes se tiene la ecuación:

$$x'' + ax' + bx = 0. \tag{6}$$

donde a y b son constantes reales. El método de solución consiste en suponer que una solución de (6) es del estilo $\phi(t) = e^{\alpha t}$, donde α es una constante a determinar. Sustituyendo esta función ϕ en la ecuación (6) se tiene que:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + a\alpha\, e^{\alpha t} + b\, e^{\alpha t} = 0.$$

como la función $e^{\alpha t} \neq 0$, para toda t en I, se tiene que:

$$\alpha^2 + \alpha a + b = 0. \tag{7}$$

a la ecuación (7) se le denomina **ecuación característica** de la ecuación (6). Resolviendo la ecuación (7), se tiene que:

$$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

de donde existen tres casos por analizar:

1^{ero}. Si $a^2 - 4b > 0$.
2^{ndo}. Si $a^2 - 4b = 0$.
3^{ero}. Si $a^2 - 4b < 0$.

1^{ero}. Si $a^2 - 4b > 0$, entonces $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $\phi_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ y $\phi_2(t) = e^{\alpha_2 t}$, son soluciones de (6), aplicando el wronskiano a estas funciones, se tiene que:

$$W(\phi_1,\ \phi_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\alpha_2-\alpha_1] \neq 0.$$

para todo t en I, por tanto ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes entonces la solución general para este caso es:

$$\phi(t)=\lambda_1 e^{\alpha_1 t}+\lambda_2 e^{\alpha_2 t}.$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes reales.

Ejemplo 6. Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x''-5x'+x = 0$.

Solución: La ecuación característica correspondiente es:

$$\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0.$$

de donde $a^2-4b = 21 > 0$, por tanto la solución general es:

$$\phi(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}.$$

donde: $\alpha_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$.

2^{ndo}. Si $a^2- 4b = 0$, hay raíz doble, es decir $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha/2$, entonces $\phi_1 = e^{-(\alpha/2)t}$, es una solución de (6). Para determinar una segunda solución ϕ_2 de (6), que sea linealmente independiente con la primera, se usa la expresión (5). Por tanto:

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{e^{-\int a dt}}{\phi_1^2} dt =$$

$$= e^{-(a/2)t}\int dt = te^{-(a/2)t}.$$

de donde la solución general correspondiente a este caso es:

$$\phi(t) = \lambda_1 e^{-(a/2)t} + \lambda_2 t e^{-(a/2)t}.$$

Ejemplo 7. Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x''-6x'+9x=0$.

Solución: La ecuación característica correspondiente es:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0.$$

de donde: $a^2-4b=0$, por tanto la solución general a la ecuación propuesta es:

$$\phi(t) = \lambda_1 e^{-3t}+\lambda_2 t e^{-3t}.$$

Antes de analizar el tercer caso, cuando $a^2- 4b < 0$, considere lo siguiente:

Un número complejo z es una expresión de la forma:

$$z = \beta + i\gamma.$$

donde β y γ son números reales e $i = \sqrt{-1}$. También puede representarse al complejo z en forma polar, es decir:

$$|z| = r = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

el argumento de z es $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(\gamma/\beta)$, $\beta = r\cos\theta$ y $\gamma = r\,\mathrm{sen}\theta$. Por tanto

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

considere las series:

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} .$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} .$$

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

sustituyendo t por it en la serie de e^t se tiene que:

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \dots =$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right] + i\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right] =$$

$$= \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

por tanto el número complejo z puede representarse en la forma:

$$z = re^{i\theta}. \tag{8}$$

3^{ero}. Si $a^2 - 4b < 0$, las raíces de la ecuación característica (7) son complejas, es decir:

$$\alpha_1 = \beta + i\gamma \qquad y \qquad \alpha_2 = \beta - i\gamma.$$

donde $\beta = -(a/2)$ y $\gamma = \left(\sqrt{4b-a^2}\right)/2$, así, $\phi_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ y $\phi_2(t) = e^{\alpha_2 t}$, son soluciones de la ecuación (6), por la propiedad uno de las soluciones de la ecuación (3), se tiene que:

$$\phi_1^*(t) = \frac{e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}}{2} \quad \text{y} \quad \phi_2^*(t) = \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{2i}.$$

son soluciones de (6). Usando la expresión (8), se tiene que:

$$\phi_1^*(t) = \frac{e^{\beta t}[e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}]}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\beta t}[\cos\gamma t + i\operatorname{sen}\gamma t + \cos(-\gamma)t + i\operatorname{sen}(-\gamma)t] =$$

$$= e^{\beta t}\cos\gamma t.$$

análogamente:

$$\phi_2^*(t) = e^{\beta t}\operatorname{sen}\gamma t.$$

para probar que ϕ_1^* y ϕ_2^* son linealmente independientes, se tiene que:

$$W(\phi_1^*, \phi_2^*) = \begin{vmatrix} e^{\beta t}\cos\gamma t & e^{\beta t}\operatorname{sen}\gamma t \\ \beta e^{\beta t}\cos\gamma t - \gamma e^{\beta t}\operatorname{sen}\gamma t & \beta e^{\beta t}\operatorname{sen}\gamma t + \gamma e^{\beta t}\cos\gamma t \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\beta t}\operatorname{sen}\gamma t\, \cos\gamma t + \gamma e^{2\beta t}\cos^2\gamma t - \beta e^{2\beta t}\operatorname{sen}\gamma t + \gamma e^{2\beta t}\operatorname{sen}^2\gamma t =$$

$$= \gamma e^{2\beta t} \neq 0 \ , \forall\ t \in I.$$

por tanto ϕ_1^* y ϕ_2^* son linealmente independientes. La solución general para este caso es:

$$\phi(t) = e^{\beta t}[\lambda_1 \cos\gamma t + \lambda_2 \operatorname{sen}\gamma t].$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes reales.

Ejemplo 8. Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x'' + x = 0$.

Solución: La ecuación característica correspondiente es:

$$\alpha^2 + 1 = 0.$$

cuyas raíces son $\alpha_1 = i$ y $\alpha_2 = -i$, por tanto, $\beta = 0$ y $\gamma = 1$, luego la solución general es:

$$\phi(t) = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \operatorname{sen} t.$$

Ejercicios

Determinar la solución general y en los casos que se indique, la solución única, de las ecuaciones diferenciales siguientes.

a) $2x'' - 8x = 0.$

b) $x'' + x' - 6x = 0$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 5.$

c) $8x'' + 40x' + 50x = 0$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 2.$

d) $x'' + 2\pi x' + \pi^2 x = 0.$

e) $x'' + 2x' + x = 0$, tal que, $x(0) = 1$ y $x'(0) = 6.$

f) $x'' - 5x = 0$, tal que, $x(0) = 3$ y $x'(0) = -\sqrt{5}.$

g) $x'' - 2x' - 2x = 0$, tal que, $x(0) = 1$ y $x'(0) = 1 + 3\sqrt{3}.$

h) $x'' + 3x' + x = 0.$

i) $2x'' + 4x' + 4x = 0.$

j) $8x'' + 4x' + x = 0$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = -1.$

k) $x'' + x' + 2x = 0.$

l) $x'' + 2x' + 5x = 0$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3.$

m) $x'' + 2x' + 8x = 0.$

n) $x'' - x' + 9x = 0.$

ñ) $x'' + 5x' - 10x = 0.$

Coeficientes Indeterminados.

Considérese la ecuación diferencial no homogénea:

$$x'' + ax' + bx = f(t). \tag{9}$$

donde a y b son constantes reales y $f(t)$ una función continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. El método de los coeficientes indeterminados tiene como objetivo determinar una solución particular $\phi_p(t)$ de la ecuación (9). El método consiste en que la función $f(t)$ de la ecuación (9) tenga alguna de las formas que se indican en la tabla $N_o 1$,para que así se tome la correspondiente ϕ_p, que al sustituirse en la ecuación diferencial a resolver, se determinan los coeficientes respectivos y de como resultado la solución buscada. Para aclarar lo anterior veamos los ejemplos siguientes.

Si $f(t)$ es de la forma:		ϕ_p es de la forma:
$P_n(t)$	ENTONCES	$a_0+a_1t+ \dots +a_nt^n$.
$P_n(t)e^{at}$		$a_0+a_1t+ \dots +a_nt^n]e^{at}$
$P_n(t)e^{at}\text{sen } bt$ o $P_n(t)e^{at}\cos bt$		$Q_ne^{at}\text{sen}bt+H_ne^{at}\cos bt$

TABLA 1

donde P_n,Q_n y H_n son polinomios de grado n.

Ejemplo 9. Determinar la solución particular ϕ_p de la ecuación diferencial: $x''-x'-2x=8e^{3t}$.

Solución: Como $f(t)=8e^{3t}$, la forma de escoger ϕ_p, según la tabla 1 es, a_0e^{3t}, sustituyendo ϕ_p en la ecuación propuesta, se tiene que:

$$(a_0e^{3t})'' - (a_0e^{3t})' - 2(a_0e^{3t}) = 8e^{3t},$$

$$[9a_0 - 3a_0 - 2a_0]e^{3t} = 8e^{3t}.$$

y de aquí a_0=2, por tanto la solución particular es:

$$\phi_p(t) = 2e^{3t}.$$

Ejemplo 10. Determinar la solución particular ϕ_p de la ecuación diferencial: $x'' + x' = 40$ sen $4t$.

Solución: Como $f(t)= 40$ sen $4t$ entonces la solución particular es de la forma: $\phi_p = a_0\text{sen}4t + c_0\cos 4t$, sustituyendo ésta en la ecuación propuesta se tiene que:

$$[a_0\text{sen}4t + c_0\cos 4t]'' + [a_0\text{sen}4t + c_0\cos 4t]' = 40\text{sen}4t.$$

operando y reduciendo, se obtiene que:

$$\begin{aligned} -16a_0 - 4c_0 &= 40 \\ 4a_0 - 16c_0 &= 0 \end{aligned}$$

de aquí se tiene que, $a_0 = -(40/17)$ y $c_0 = -(10/17)$, por tanto la solución particular es:

$$\phi_p(t) = -\frac{40}{17}\text{ sen } 4t - \frac{10}{17}\cos 4t.$$

Ejercicios

1.- Determinar la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x'' + 5x' - 4x = 6e^{t}$.

b) $x'' + 2x' + 10x = 2\text{sen}2t + 10\cos 2t$.

c) $x'' - 3x' = 3e^{3t}$.

d) $x'' - 7x = 2\text{sen}5t$.

e) $x'' - 6x' + x = 8\text{sen}2t$.

2.- Determinar la solución general de las ecuaciones deferenciales siguientes.

a) $x'' - x' - 2x = 8e^{t}$.

b) $x'' - x = e^{-t}$.

c) $x'' - x = 8e^{5t}$.

d) $x'' + 4x = 5\text{sen}7t$.

e) $x'' + x = -7e^{2t}$.

f) $x'' - 3x' + x = 4\cos 3t$.

Variación de Constantes.

Este método consiste en suponer que una solución particular ϕ_p de la ecuación (2) es de la forma:

$$\phi_p(t) = \lambda_1(t)\phi_1 + \lambda_2(t)\phi_2.$$

donde λ_1 y λ_2 son funciones a determinar, ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (3). Derivando la función $\phi_p(t)$, se tiene que:

$$\phi_p'(t) = \lambda_1\phi_1' + \lambda_2\phi_2' + \lambda_1'\phi_1 + \lambda_2'\phi_2. \tag{10}$$

considerando que:

$$\lambda_1'\phi_1 + \lambda_2'\phi_2 = 0.$$

entonces $\phi_p'(t) = \lambda_1\phi_1' + \lambda_2\phi_2'$, derivando nuevamente, se tiene que:

$$\phi_p''(t) = \lambda_1\phi_1'' + \lambda_2\phi_2'' + \lambda_1'\phi_1' + \lambda_2'\phi_2'.$$

sustituyendo las funciones ϕ_p, ϕ'_p y ϕ''_p en la ecuación (2), se tiene que:

$$\phi''_p + a(t)\phi'_p + b(t)\phi_p =$$

$$= \lambda_1(t)[\phi''_1 + a(t)\phi'_1 + b(t)\phi_1] + \lambda_2(t)[\phi''_2 + a(t)\phi'_2 + b(t)\phi_2] +$$
$$+ \lambda'_1\phi'_1 + \lambda'_2\phi'_2 = f(t).$$

de donde:

$$\lambda'_1\phi'_1 + \lambda'_2\phi'_2 = f(t). \tag{11}$$

las expresiones (10) y (11) forman un sistema de ecuaciones donde λ_1 y λ_2 son las incógnitas a determinar. Como el determinante del sistema formado por (10) y (11) es $W(\phi_1, \phi_2)$ y es diferente de cero, se tiene que:

$$\lambda'_1(t) = \frac{-f(t)\phi_2}{W(\phi_1, \phi_2)} \quad \text{y} \quad \lambda'_2(t) = \frac{f(t)\phi_1}{W(\phi_1, \phi_2)}.$$

integrando las expresiones anteriores se tiene que:

$$\lambda_1(t) = -\int \frac{f(t)\phi_2}{W(\phi_1, \phi_2)} dt \quad \text{y} \quad \lambda_2(t) = \int \frac{f(t)\phi_1}{W(\phi_1, \phi_2)} dt \tag{12}$$

Ejemplo 11. Determinar la solución particular de la ecuación diferencial: $x'' - 3x = 2e^t$.

Solución: Como la solución de $x'' - 3x = 0$, es, $\phi_1 = e^{\sqrt{3}t}$ y $\phi_2 = e^{-\sqrt{3}t}$, se tiene que:

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int e^{(1-\sqrt{3})t} dt = \frac{1}{2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})} e^{(1-\sqrt{3})t}.$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int e^{(1+\sqrt{3})t}dt = -\frac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}e^{(1+\sqrt{3})t}.$$

Ejemplo 12. Determinar la solución particular de la ecuación diferencial: $x''+(1/t)x'-(1/t^2)x = 4t^{-1}$, si la solución general de la ecuación: $x''+(1/t)x'-(1/t^2)x = 0$, es la función $\alpha_1 t+\alpha_2 t^{-1}$.

Solución: El $W(\phi_1, \phi_2)=-2t^{-1}$, entonces:

$$\lambda_1(t) = \int\frac{-t^{-1}(4t^{-1})dt}{-2t^{-1}} = \ln\ t^2.$$

$$\lambda_2(t) = \int\frac{t(4t^{-1})dt}{-2t^{-1}} = -t^2.$$

por tanto la solución particular es:

$$\phi_p(t) = t\ln t^2 - t.$$

Ejercicios

Determinar la solución particular de la ecuación diferencial: $x'' + x = f(t)$, si la función $f(t)$ está dada por:

a) $f(t) = \text{ctg}\ t$, si $t\in(0, \pi/2)$.
b) $f(t) = \sec^3 t$, si $t\in(-\pi/2, \pi/2)$.
c) $f(t) = \csc\ t$, si $t\in(0, \pi)$.
d) $f(t) = \sec\ t$, si $t\in(-\pi/2, \pi/2)$.
e) $f(t) = 6e^t$.

CAPITULO II

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales por series de potencias

1. Introducción.

Se ha visto la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes, sin embargo, no hay un procedimiento similar para resolver ecuaciones diferenciales cuando los coeficientes son variables.

Por ejemplo la ecuación

$$tx'' + x' + tx = 0,$$

no puede resolverse por los métodos vistos. Generalmente para resolver ecuaciones diferenciales de éste tipo se requieren de las técnicas de series de potencias. Ecuaciones relevantes que se resuelven por éste método son la ecuación de Bessel de orden n;

$$t^2x'' + t\,x' + (t^2 - n^2)\,x = 0$$

o bién la ecuación de Legendre de orden n

$$(1-t^2)\,x'' - 2tx' + n(n+1)\,x = 0.$$

Estas ecuaciones aparecen al estudiar algunos problemas en Física y resulta interesante tanto su estudio como algún método para encontrar y analizar sus soluciones.

Para facilitar el entendimiento del presente capítulo es indispensable manejar el tema de Series de Potencias, por lo que se hará un breve repaso al respecto antes de empezar con el tema.

2. Propiedades de las Series de Potencias

Una serie de potencias es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n = c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + \ldots + \ldots \qquad (1)$$

donde los números c_n son los coeficientes de la serie, a es una constante llamada centro de la serie y t es la variable independiente. Una serie de potencias centrada en cero, es decir, $a = 0$, tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + \ldots \qquad (2).$$

una serie de la forma (1) siempre puede reducirse a la forma (2) mediante la sustitución $t = t - a$, por ésta razón se utilizará en lo que resta del presente capítulo la forma (2).

La serie (2) converge en t_0, si existe el siguiente límite:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n t_0^n$$

o bién, $\lim S_n$, donde S_n es la n-ésima suma parcial de la serie (2) en t_0. Las principales propiedades de las series de potencias se exponen a continuación.

Propiedades de las Series de Potencias

1. Si la serie (2) converge para t_0 entonces los términos $c_n t_0^n$ tienden a cero.
2. Los valores para los cuales la serie (2) converge se hallan en un intervalo centrado en cero, llamado intervalo de convergen-

cia, así a cada serie (2) le corresponde un número real R con la propiedad $0 \leq R \leq \infty$, llamado radio de convergencia. Con lo anterior la convergencia de la serie (2) puede clasificarse en la forma siguiente

i) Sólo en t_0.
ii) Para todo t real.
iii) Existe un real positivo R, denominado radio de convergencia, tal que la serie converge para: $|t| < R$ y diverge para $|t| > R$. En $|t| = R$ la serie puede o no converger.

3. Para la determinación del radio de convergencia de la serie (2) se usarán los criterios siguientes

i) $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

ii) $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}}$

donde c_n son los coeficientes de la serie (2). El intervalo $(-R,R)$ se denomina intervalo de convergencia de la serie, la serie puede o no converger en los extremos del intervalo de convergencia.

4. Considérese que la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, converge para $|t| < R_1$ y la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, converge para: $|t| < R_2$, pongamos: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ y $R = \min\{R_1,R_2\}$, entonces se tiene:

a) Si $f(t) = g(t)$ para $|t| < R$ entonces $a_n = b_n$ $\forall$ n.

b) Si λ es un número real entonces

$$\lambda f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n t^n.$$

c)................$f(t) \pm g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)\ t^n.$

d)..................$f(t)\ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_m t^n$ donde:

$$c_m = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

5. Para ver la siguiente propiedad es necesario la de finición siguiente.

Una función $f(t)$ definida en un intervalo I que contenga a t_0 es **analítica en** t_0 si la función $f(t)$ puede expresarse como una serie de potencias convergente alrededor de t_0, con radio de convergencia R, es decir, la función $f(t)$ es analítica en t_0 si: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$, convergente en $|t-t_0| < R$.

Si la función $f(t)$ es analítica en t_0, entonces f , tiene derivadas de todos los órdenes en t_0, esto es, si:

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, converge en: $|t| < R$, entonces f puede derivarse tantas veces como queramos y sus derivadas están dadas por las siguientes series de potencias

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) t^n,$$

converge en:

$$|t| < R.$$

$$f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n+1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n, \text{ converge en: } |t| < R$$

y en general:

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} t^n,$$

converge en

$$|t| < R.$$

Ejemplo 1. Determinar el radio R de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Solución: Haciendo $c_n = \frac{1}{n!}$ y aplicando la propiedad 3, se tiene que:

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lím}} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \underset{n \to \infty}{\text{Lím}} (n+1) = +\infty .$$

por tanto la serie propuesta, converge para todo valor de $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Determinar el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t.$$

Solución: Haciendo $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ y aplicando la propiedad 3, se tie̲ne que:

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lím}} \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} \right| = \underset{n \to \infty}{\text{Lím}} (2n + 2) = \infty .$$

por tanto la serie propuesta converge para todo t real.

Ejemplo 3. Si $ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$, converge en $|t| < 1$ entonces probar que la serie:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots,$$

converge en $|t| < 1$.

Solución: Usando la propiedad 5, se tiene que:

$$\ln'(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots, \quad \text{converge en } |t|<1.$$

Ejemplo 4. Determinar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

por tanto la serie propuesta sólo converge en $t = 0$.

Ejercicios

1.- Probar que:

a) $tg^{-1} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$,converge en $|t| < 1$

b) $\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \ldots$, converge en $|t| < 1$

2.- Determinar el radio de convercia en las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t-2}{n}\right]^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n t^n$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2(t-1)^n}{2^n}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!\,t^n}{(n!)^2}$ f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(k+n)!\,(t+1)^n}{k!\;n!}$

3. Método de Series de potencias

Considerando la ecuación diferencial:

$$x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = f(t) \qquad (1).$$

el método por series de potencias supone que la solución de la e - cuación (1) es la de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n .$$

de tal manera que al ser sustituida en la ecuación diferencial, e- fectuando los cálculos respectivos y reduciendo éstos, se obtienen los valores c_n. El teorema que justifica estas afirmaciones será dado en la página 12.

Ejemplo 4. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial $x' - x = t^2$, con $x(0) = 1$.

Solución: Encontrando la expresión para x y x′ en series de potencias

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{y} \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = t^2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-c_n + c_{n+1}(n+1)]\ t^n = t^2.$$

para que la igualdad se cumpla es necesario que los coeficientes bajo las mismas potencias de t sean iguales de donde obtenemos que: si $n \neq 2$, $-c_n + c_{n+1}(n+1) = 0$ y si $n = 2$, $-c_2 + 3c_3 = 1$, de aquí se tiene :

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}\ ,\ \text{es decir: } c_1 = c_0\ ;\ c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2}\ ;$$

$$c_3 = \frac{1 + c_2}{3} = \frac{2 + c_0}{2\cdot 3}\ \ ;\ c_4 = \frac{c_3}{3+1} = \frac{c_0 + 2}{4!}\ ;\ \ldots$$

por lo tanto la solución es:

$$x(t) = c_0 + c_0 t + \frac{c_0}{2!}\ t^2 + \frac{c_0 + 2}{3!}\ t^3 + \frac{c_0 + 2}{4!}\ t^4 + \frac{c_0 + 2}{5!}\ t^5 + \ldots, =$$

$$= (c_0 + 2)\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\right] - 2\left[1 + t + \frac{t^2}{2!}\right]$$

pero ya que $e^t = \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots +\right]$, sustituyendo en la última expresión, se tiene que

$$x(t) = (c_0 + 2)\ e^t - 2(1 + t + \frac{t^2}{2!})$$

usando la condición inicial $x(0) = 1$, se obtiene $c_0 = 1$, por lo tanto la solución es:

$$x(t) = 3e^t - t^2 - 2t - 2.$$

Ejemplo 5. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial $x'' + x = 0$.

Solución: Sustituyendo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{y} \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+1)(n+2) t^n.$$

en la ecuación dada, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+1)(n+2) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

de aquí: $c_{n+2} = \frac{-c_n}{(n+1)(n+2)}$, es decir:

$$c_2 = \frac{-c_0}{2!} \; ; \; c_3 = \frac{-c_1}{3!} \; ; \; c_4 = -\frac{-c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!} ; \; c_5 = \frac{c_1}{5!} \; , \; \ldots$$

la solución puede expresarse:

$$x(t) = c_0 + c_1 t - \frac{c_0}{2!} t^2 - \frac{c_1}{3!} t^3 + \frac{c_0}{4!} t^4 + \frac{c_1}{5!} t^5 + \ldots,$$

de aquí se tiene que:

$$x(t) = c_0 \left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \right] + c_1 \left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots \right]$$

pero: $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, t^{2n}}{(2n)!}$ y $\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, luego:

$$x(t) = c_0 \cos t + c_1 \operatorname{sen} t.$$

Por ser una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes también puede resolverse buscando las soluciones como $e^{\lambda t}$ con λ a determinar de la ecuación característica, lo cual puede comprobar el lector directamente.

Ejemplo 6. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial $(1+t^2)x' = 2ptx$, con, $x(0) = 1$.

Solución: Sustituyendo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad y \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n$$

en la ecuación diferencial propuesta se tiene que:

$$(1+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n = 2pt\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^{n+2} = 2p\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}(n-1)t^n = 2p\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} t^n$$

$$c_1 + \left[2c_2 - 2pc_0\right]t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)c_{n+1} + ([n-1]-2p)c_{n-1}\right]t^n = 0.$$

de aquí se tiene que:

$$c_1 = 0;\ 2c_2 - 2pc_0 = 0 \quad y \quad (n+1)c_{n+1} + [(n-1)-2p]c_{n-1} = 0,\ \text{con } n \geq 2$$

por tanto: $c_1 = 0$, $c_2 = pc_0$, luego:

$$c_3 = 0;\ c_4 = \frac{2p-2}{4}c_2 = \frac{p(p-1)}{2!}c_0;\ c_5 = 0;\ c_6 = \frac{2p-4}{6}c_4 = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}c_0;$$

$$c_7 = 0,$$

de aquí, los coeficientes con subíndice impar se anulan, así, $x(t)$, está dada por:

$$x(t) = c_0 + pc_0t^2 + \frac{p(p-1)}{2!}c_0t^4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}c_0t^6 + \ldots, =$$

$$= c_0\left[1 + pt^2 + \frac{p(p-1)}{2!}t^4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}t^6 + \ldots\right]$$

aplicando el binomio de Newton y sustituyendo t por t^2, se tiene que:

$$(1 + t)^p = 1 + pt + \frac{p(p-1)}{2!}t^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}t^3 + \ldots ,$$

de donde:

$$x(t) = c_0(1 + t^2)^p.$$

como $x(0) = 1$, se tiene que, $c_0 = 1$ y por tanto $x(t) = (1 + t^2)^p$.

Ejemplo 7. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial: $x'' + tx' + x = 0$.

Solución: Sustituyendo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \; ; \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n \quad \text{y}$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n .$$

en la ecuación diferencial dada, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$2c_2 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+2}(n+2)(n+1) + nc_n + c_n \right] t^n = 0$$

igualando los coeficientes bajo las mismas potencias de t, se tiene que

$$c_2 = -\frac{c_0}{2} \; ; \; c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{n+2} \quad \text{con } n \geq 1 \text{ , por tanto:}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3}\ ;\ c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2\cdot 4}\ ;\ c_5 = -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3\cdot 5}\ ;\ c_6 = -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6},\ ,$$

de donde:

$$x(t) = c_0 + c_1 t - \frac{c_0}{2}t^2 - \frac{c_1}{3}t^3 + \frac{c_0}{2\cdot 4}t^4 + \frac{c_1}{3\cdot 5}t^5 - \dots ,=$$

$$= c_0\left[1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\cdot 4} - \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots\right] + c_1\left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{3\cdot 5} - \frac{t^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \dots\right]$$

pero:

$$1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\cdot 4} - \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots = 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^3 + \dots =$$

$$= e^{-t^2/2}.$$

tomando $\phi_1(t) = e^{-t^2/2}$, entonces ; $\phi_2(t) = e^{-t^2/2}\int e^{t^2/2}dt$, esto es por lo visto en el capítulo uno, con la propiedad, dada una solución de la ecuación diferencial lineal, determinar otra.

Así la solución buscada es:

$$x(t) = c_0 e^{-t^2/2} + c_1 e^{-t^2/2}\int e^{t^2/2}dt.$$

Ejemplo 8. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial $tx'' + x' + tx = 0$.

Solución: Sustituyendo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\ ;\ x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n \quad \text{y}$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n$$

en la ecuación diferencial dada, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} t^n = 0.$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1}(n+1)n + c_{n+1}(n+1) + c_{n-1}\right] t^n = 0.$$

$c_1 = 0$; $c_{n+1}(n+1)^2 = - c_{n-1}$ con $n \leq 1$, de aquí todos los coeficientes con subíndices impares se anulan, luego:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2} \; ; \; c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2} \; ; \; c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2} \; , \; \dots ,$$

por tanto, se tiene que:

$$x(t) = c_0 - \frac{c_0}{2^2} t^2 + \frac{c_0}{2^2 4^2} t^4 - \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2} t^6 + \dots = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(-\frac{t}{4}^2\right)^2 =$$

$$= J_0(t).$$

donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero. Para obtener la segunda solución de la ecuación diferencial propuesta, se usa nuevamente la propiedad de las soluciones, vista en el capítulo uno, dada una solución obtener otra. Por tanto la segunda solución es

$$x_2(t) = J_0(t) \int \frac{dt}{tJ^2},$$

y la solución geneneral es:

$$x(t) = \gamma_1 J_0(t) + \gamma_2 J_0(t) \int \frac{dt}{tJ^2} \quad .$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes reales.

Ejemplo 9. Determinar por el método de series de potencias la solución de la ecuación diferencial de Euler: $t^2x'' + tx' + x = 0$.

Solución: Sustituyendo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \; ; \; x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n \quad y$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n \; ,$$

en la ecuación diferencial dada, se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

de aquí $c_n = 0$ para toda n, en éste caso el método de series de potencias no es el adecuado.

Ejercicios

Determinar por el método de series de potencias la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x'' - x = t$, tal que $x(0) = 2$

b) $x'' + x = t$.

c) $x'' + 4x = 0$, con , $x(0)=1$ y $x'(0) = 0$.

d) $tx'' - tx + x = e^t$, con, $x(0) = 1$ y $x'(0) = 2$.

e) $(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0$.

f) $(1 - t)x'' - x' + t\,x = 0$, con , $x(0) = 1$ y $x'(0) = 1$.

g) $x'' - 2tx' + 4x = 0$, con , $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

h) $x'' - tx' + x = -\,t\cos t$, con $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

i) $x'' - tx' + tx + 0$, con, $x(0) = 2$ y $x'(0) = 1$.

j) $(1-t)^2x'' - (1-t)\,x' - x = 0$, con , $x(0) = x'(0) = 1$.
k) $x'' - 2t\,x' + 2x + 0$
l) $x'' - 2tx' - 2x = t$, con , $x(0) = 1$ y $x'(0) = -\frac{1}{4}$

4. Ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos

Una ecuación diferencial de la forma:

$$x'' + a(t)x' + b(t)\,x = f(t) \qquad (3).$$

donde el coeficiente de x'' es + 1, se llama **normal**.

Una función $f(t)$ es **analítica** en un intervalo abierto si y solamente si es analítica en cada punto del intervalo y se dice que es una función analítica si y solamente si es analítica en cada punto de su dominio, por ejemplo las funciones sen t, cos t, tg t, e^t, ln t y $p(t)$, donde $p(t)$ es un polinomio, son analíticas. Si las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ de la expresión (3) son analíticas en un punto $t_0 \in I$, se dice que t_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (3). Un punto $t_0 \in I$, que no es ordinario, se llama un **punto singular** de la ecuación diferencial.

La forma de justificar que una solución $x(t)$ de la ecuación (3) pueda expresarse con una serie de potencias, es por el resultado siguiente:

TEOREMA

Sea t_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial (3) y sean las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ analíticas en el intervalo (t_0-R, t_0+R), donde R es un número real positivo entonces cada solución $\phi(t)$ de (3), que esté definida en t_0, es analítica en el intervalo $(t_0-R,\ t_0+R)$.

Por ejemplo la ecuación diferencial: $x''+x=0$, se observa que $b(t)\equiv 1$ y $f(t)=0$, de aquí ambas funciones son analíticas en todo t, por tanto, si $\phi(t)$ es solución de la ecuación diferencial propuesta, ésta puede expresarse como una series de potencias potencias: $\sum\limits_{n=0} c_n t^n$, encontrando que la solución es:

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots ,$$

la cual converge para toda t.

Ejemplo 10. Resolver la ecuación diferencial de Legendre:

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}\, x' + \frac{p(p+1)}{1-t^2} x = 0.$$

Solución: Sustituyendo: $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$; $x'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n \text{ y } x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+1)(n+2)t^n,$$

en la ecuación diferencial propuesta, se tiene que:

$$(1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - 2t\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)t^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n+1}(n+1)t^{n+1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n t^n = 0$$

$$2c_2 + p(p+1)c_0 + \Big[(p+2)(p-1)c_1 + 3\cdot 2c_3\Big]\, t \, +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+(p+n+1)(p-n)c_n\right]t^n=0.$$

de aquí se tiene que:

$2c_2+p(p+1)c_0=0$; $(p+2)(p-1)C_1+3\cdot2c_3=0$ y $(n+2)(n+1)c_{n+2}+$ $+(p+n+1)(p-n)c_n=0$, con $n\geq 2$, de donde c_n se expresa en términos de c_0 cuando n es par, y en términos de c_1, cuando n es impar, es decir:

$$c_2=\frac{-(p+1)p}{2}c_0;\quad c_4=\frac{-(p+3)(p-2)}{4\cdot3}c_2=\frac{(p+3)p(p+1)(p-2)}{4!}c_0;\quad\ldots$$

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n(p+2n-1)(p+2n-3)\cdots(p+1)p(p-2)\cdots(p-2n+2)}{(2n)!}c_0,\ \ldots$$

en tanto que:

$$c_3=\frac{-(p+2)(p-1)}{3!}c_1;\quad c_5=\frac{-(p+4)(p-3)}{5\cdot4}c_3=\frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}c_1;\ \ldots$$

$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n(p+2n)(p+2n-2)\cdots(p+2)(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)}{(2n+1)!}c_1;\ \ldots$$

por tanto la solución es :

$$x(t)=c_0\left[1-\frac{(p+1)p}{2!}t^2-\frac{(p+3)(p+1)p(p-2)}{4!}t^4-\ldots\right]+$$

$$+c_1\left[t-\frac{(p+2)(p-1)}{3!}t^3+\frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}t^5-\ldots\right]$$

para determinar el radio R de convergencia de $x(t)$, usar las funciones: $-\frac{2t}{1-t^2}$ y $\frac{1}{1-t^2}$, luego como:

$$\frac{1}{1-t}=1+t^2+t+\ldots+\ldots\quad\text{converge en}\quad|t|<1.$$

si t la hacemos igual a t^2, se tiene que:

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \ldots + \ldots \quad \text{converge en } |t| < 1$$

como:

$$\frac{t}{1-t^2} = t + t^3 + t^5 + \ldots + t^{2n+1} + \ldots \quad \text{converge en } |t| < 1$$

entonces $-\frac{2t}{1-t^2}$ converge en $|t| < 1$, por tanto $R = 1$.

5. Método de Frobenius

Decimos que t_0 es un punto singular de la ecuación diferencial

$$x'' + a(t)x' + b(t)\,x = 0 \qquad (4).$$

si los productos: $(t-t_0)a(t)$ y $(t-t_0)^2 b(t)$, son ambos funciones analíticas en t_0. Se dice que t_0 es un **punto singular regular** de la ecuación diferencial propuesta. Un punto t_0 que no es singular regular de la ecuación (4), se dice que es un **punto singular irregular**.

Ejemplo 11. Determinar si la excuación diferencial:

$$x'' + t(t-3)x' + \frac{1}{t^3(t-3)^2}x = 0$$

tiene puntos singulares regulares o irregulares.

Solución: La ecuación propuesta tiene puntos singulares en $t = 0$ y en $t = 3$, luego el punto $t = 3$ es singular regular ya que:

$$(t-3)\Big[t(t-3)\Big] = t(t-3)^2 \quad \text{y} \quad (t-3)^2\left[\frac{1}{t^3(t-3)^2}\right] = \frac{1}{t^3}$$

son ambas analíticas en $t = 3$, en tanto que en $t = 0$ es singular rregular, pués

$$t^2\left[\frac{1}{t^3(t-3)^2}\right] = \frac{1}{t(t-3)^2}$$

no es analítica en $t = 0$.

Ejemplo 12. La ecuación de Legendre: $x'' - \dfrac{2t}{1-t^2}x' + \dfrac{n(n+1)}{1-t^2}x = 0$, tiene puntos singulares en $x = 1$ y en $x = -1$. El punto $x = 1$, es regular puesto que:

$$(t-1)\left[\frac{-2t}{1-t^2}\right] = \frac{t}{t+1} \quad \text{y} \quad (t-1)^2\left[\frac{n(n+1)}{1-t^2}\right] = \frac{(1-t)n(n+1)}{1+t}$$

son ambas analíticas en $t=1$. En forma análoga el punto $t = -1$, es singular regular.

Considérese la ecuación diferencial: $x'' + \frac{2}{t}x' - x = 0$, la cual tiene un punto singular en $t = 0$.

Puede probarse que la función $x(t) = \dfrac{e^t}{t}$, es una solución de ésta ecuación, aunque es imposible desarrollar a la función: e^t/t, como una serie de potencias en t, sin embargo este problema puede solventarse escribiendo una potencia de la variable t, multiplicada por una serie de potencias en t, es decir:

$$\frac{e^t}{t} = \frac{1}{t}\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots\right]$$

Esta modificación sugiere que debe tratarse de hallar soluciones de la forma:

$$x(t) = t^r\left[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots\right] \qquad (5).$$

donde r es algún número real o complejo. El método de Frobenius consiste, en suponer soluciones del tipo (5), al sustituirse éstas en la ecuación (4), con $c_0 = 1$ y $t > 0$, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (r+n)(r+n-1)t^{r+n-2} + a(t)\sum_{n=0}^{\infty} c_n (r+n)t^{r+n-1} + b(t)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{r+n} = 0$$

de aquí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)ta(t)+t^2b(t)\right]t^{r+n-2} = 0 \qquad (6)$$

si $t = 0$, es un punto singular regular de (4), entonces las funciones: $ta(t)$ y $t^2b(t)$, son analíticas en $t = 0$, es decir

$$\begin{aligned} ta(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \\ t^2b(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots \end{aligned} \qquad (7)$$

por tanto t^{r-2} es la mínima potencia de t en (6), si $n = 0$, es decir

$$c_0[r(r-1) + a_0 r + b_0] = 0$$

como $c_0 = 1$, se tiene que

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0 \qquad (8)$$

a ésta ecuación (8) se le llama indical, cuyas raíces r_1, r_2 , se denominan exponentes de la ecuación (4). Una solución de la ecuación (4) será de la forma (5) y hay tres formas posibles para una segunda solución. Estos hechos se resumen en el siguiente resultado.

TEOREMA.

Sea $t=0$ un punto singular regular de la ecuación (4) y sean r_1, r_2 las raíces de la ecuación indical (8), donde a_0 y b_0 están dados por (7) entonces la ecuación (4) tiene dos soluciones linealmente independientes: x_1 y x_2, cuya forma depende de r_1 y r_2, como sigue:

Caso Uno: Si r_1 y r_2 no difieren por un entero, entonces:

$$x_1(t) = |t|^{r_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right] \quad , \text{ con } c_0 = 1.$$

$$x_2(t) = |t|^{r_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* t^n\right] \quad , \text{ con } c_0^* = 1.$$

Caso Dos: Si $r_1 = r_2 = r$, entonces

$$x_1(t) = |t|^{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right] \quad , \text{ con } c_0 = 1.$$

$$x_2(t) = |t|^{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right] + x_1(t)\ \ln|t|.$$

Caso Tres: Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces

$$x_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad , \text{ con } c_0 = 1.$$

$$x_2(t) = |t|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* t^n + c^* x_1(t)\ \ln|t| \quad , \text{ con } c_0^* = 1.$$

Ejemplo 13. Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x'' + (1/4t)x' + (1/8t^2)x = 0$.

Solución: El punto $t = 0$ es singular regular ya que $ta(t) = \frac{1}{4}$ y $t^2 b(t) = 1/8$, además $a_0 = 1/4$ y $b_0 = 1/8$, usando el método de Frobenius se tiene que la ecuación indical correspondiente es:

$$r(r-1) + \frac{1}{4} r + \frac{1}{8} = (r - \frac{1}{2})(r - \frac{1}{4}) = 0.$$

de aquí se tiene que: $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = \frac{1}{4}$ las cuales no difieren por un entero, entonces por el teorema anterior se tiene que una solución es de la forma:

$$x_1(t) = t^{1/4}\left[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + \dots\right]$$

luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\left(\frac{1}{4} + n\right)\left(\frac{1}{4} + n-1\right) + \left(\frac{1}{4} + n\right)\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right]t^{n-7/4} = 0.$$

de aquí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[n^2 - \frac{n}{4}\right] t^{n-7/4} = 0.$$

de donde $n(n - \frac{1}{4})c_n = 0$, es decir $c_n = 0$ con $n > 0$, por tanto: $x_1(t) = c_0 t^{-1/4} = t^{-1/4}$. Para determinar la segunda solución, se toma $r = \frac{1}{2}$, luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \left[\left(\frac{1}{2} + n\right)\left(\frac{1}{2} + n-1\right) + \left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] t^{1/2+n-2} = 0.$$

de aquí: $n(n+ \frac{1}{4})c_n^* = 0$, entonces $c_n^* = 0$, para $n > 0$, por tanto:

$x_2(t) = c_0^* \, x^{1/2}$ luego la solución general de la ecuación diferencial propuesta es: $x(t) = \lambda_1 t^{1/4} + \lambda_2 t^{1/2}$.

Ejemplo 14: Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x''+\frac{1}{t}x'+\frac{1}{t^2}x = 0.$

Solución: Como las funciones: $ta(t) = t^2b(t) = 1$, son analíticas y $a_0= b_0= 1$, la ecuación indical correspondiente es:

$$r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1 = 0.$$

cuyas raíces son: $r_1= i$ y $r_2=-i$, las cuales no difieren por un entero, para la primera raíz, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Big[(i+n)(i+n-1)+(i+n)+1\Big]t^{i+n-2} = 0.$$

de aquí $c_n(n^2+2in) = 0$, implica que $c_n= 0$ para $n >0$, entonces una solución es $x_1(t)= c_0t^{i}= e^{i\ln t}= \cos(\ln t) + i\,\mathrm{sen}(\ln t)$, análogamente, para $r = -i$, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \Big[(-i+n)(-i+n-1)+(-i+n)+1\Big]t^{-i+n-2} = 0.$$

de aquí $c_n^*(n^2-2in) = 0$, entonces: $c_n^*= 0$ para $n >0$, por tanto la segunda solución es $x_2(t) = c_0^*t^{-i}= \cos(\ln t)-i\,\mathrm{sen}(\ln t)$, las funciones: $x_1^*(t) = \frac{1}{2}(x_1+ x_2) = \cos(\ln t)$ y $x_2^*(t)= \frac{1}{2i}(x_1- x_2)= \mathrm{sen}(\ln t)$, también son soluciones de la ecuación diferencial propuesta, por tanto la solución general es:

$$x(t) = \lambda_1\cos(\ln t) + \lambda_2\mathrm{sen}(\ln t) \quad , \text{ con } t > 0.$$

Ejemplo 15. Determinar la solución general de la ecuación diferencial: $x''+ x'+ \frac{1}{4t^2}x = 0.$

Solución: Las funciones: $ta(t)=t$ y $tb(t)=1/4$, son analíticas y $a_0= 0$, $b_0= \frac{1}{4}$, por tanto la ecuación indical correspondiente es

$$r(r-1) + \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

cuya raíz es doble, es decir: $r = \frac{1}{2}$, por tanto de tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)t + \frac{1}{4}\right] t^{n-3/2} = 0.$$

o bién

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2 t^{n-3/2} + \sum_{n=0} c_n\left(n+\frac{1}{2}\right) t^{n-1/2} = 0.$$

de aquí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{k+1}(k+1)^2 + c_k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] t^{K-1/2} = 0.$$

luego: $c_{K+1}(k+1)^2 + c_K\left(k+\frac{1}{2}\right) = 0$, es decir, $c_1 = -\frac{c_0}{2}$,

$$c_2 = -\frac{c_1\left(\frac{3}{2}\right)}{2^2} = \frac{3c_0}{2^2 \cdot 2^2} \; ; \; c_3 = -\frac{5c_2}{2 \cdot 3^2} = -\frac{3 \cdot 5c_0}{2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2}; \; c_4 = -\frac{7c_3}{2 \cdot 4^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7c_0}{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}, \; \ldots \;, \text{ así que:}$$

$$x_1(t) = t^{1/2}\left[c_0 - \frac{c_0}{2}\, t + \frac{3c_0}{2^2 \cdot 2^2} t^2 - \frac{3.5}{2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2} c_0 t^3 + \frac{3.5.7\; c_0 t^4}{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \ldots\right]$$

$$x_1(t) = c_0 t^{1/2}\left[1 - \left(\frac{t}{2}\right) + \frac{3}{2^2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \ldots\right] =$$

$$= t^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^3}\left(-\frac{t}{4}\right), \text{ con } t > 0.$$

para determinar la segunda solución, se tiene que $x_2 = ux_1$ luego

$$\frac{u''}{u'}=-2\frac{x_1'}{x_1}-1=\frac{-2\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]\left[1-3(\frac{t}{2})+\frac{3\cdot 5}{2^2}(\frac{t}{2})^2-\ \ldots\right]}{\sqrt{t}\left[1-\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{3}{2^2}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\ \ldots\right]}-1$$

Usando el algoritmo de la división, se tiene que

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{t}\left[1-t+\frac{t^2}{4}-\ \ldots\right]-1=\frac{-1}{t}-\frac{t}{4}+\ \ldots$$

integrando ambos miembros, se tiene que

$$\ln v'=-\ \ln t-\frac{t}{8}+\ \ldots$$

$$v'=\frac{1}{t}\exp\left[-\ \frac{t}{8}+\ \ldots\right]=\frac{1}{t}\left[1+\left(-\frac{t^2}{8}+\ldots\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{8}+\ \ldots\right)+\ \ldots\right]$$

$$v=\ln t-\frac{t^2}{16}+\ \ldots$$

entonces

$$x_2(t)=(\ln t)x_1+\sqrt{t}\left[-\ \frac{t^2}{16}+\ \ldots\right].$$

por tanto la solución general es:

$$x(t)=\sqrt{t}\left[(\lambda_1+\lambda_2\ \ln t)\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)+\ldots\right]+\lambda_2\left(-\frac{t^2}{16}+\ldots\right)\right]\text{ con } t>0.$$

Ejemplo 16. Determinar la solución general de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$, es decir de la ecuación: $t^2x''+\ tx'+[t^2-\ (1/2)^2]x$ $x=0$.

Solución: Las funciones: $ta(t)=1$ y $t^2b(t)=t^2-\frac{1}{4}$, son ambas analíticas en $t=0$, entonces el punto $t=0$ es singular regular, la ecuación indical correspondiente es:

$$r(r-1) + r - \frac{1}{4} = r^2 - \frac{1}{4} = 0\ ,$$

cuyas raíces son: $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$, en este caso las raíces difieren por el entero uno, por tanto se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)\right]t^{n-3/2} = 0$$

o:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n^2+n)\,t^{n-3/2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1/2} = 0$$

de aquí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+3)\,t^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1/2} =$$

$$= 2c_1 t^{-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+3)c_{n+2} + c_n\Big]t^{n+1/2} = 0$$

luego: $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{(n+2)\,(n+3)}$, por tanto los coeficientes de subíndice impar desaparecen, por tanto se tiene que: $c_2 = -\dfrac{c_0}{3!}$; $c_4 = -\dfrac{c_2}{4\cdot 5} = \dfrac{c_0}{5!}$; $c_6 = -\dfrac{c_4}{6\cdot 7} = -\dfrac{c_0}{7!}$; ... , de donde una solución es

$$x_1(t) = c_0 t^{1/2}\left[1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \frac{1}{7!}t^6 + \ldots\right] = t^{1/2}\text{sen } t.$$

considerando $r_2 = -\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) + \left(n-\frac{1}{2}\right) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\right]t^{n-5/2} = 0.$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)\,t^{n-5/2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n-1/2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n\right]t^{n-1/2}=0$$

de donde: $c_{n+2}=\dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)}$, de aquí: $c_2=-\dfrac{c_0}{2!}$;

; $c_4=-\dfrac{c_2}{3\cdot 4}=\dfrac{c_0}{4!}$; $c_6=-\dfrac{c_0}{6!}$; . . . ; $c_3=-\dfrac{c_1}{3!}$; $c_5=-\dfrac{c_3}{4\cdot 5}=\dfrac{c_1}{5!}$;

; $c_7=-\dfrac{c_5}{6\cdot 7}=-\dfrac{c_1}{7!}$, . . . , por tanto:

$$x_2(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left[c_0\cos t+c_1\operatorname{sen}t\right],\ \text{con } c_0=1.$$

y la solución general es:

$$x(t)=\lambda_1\frac{\cos t}{\sqrt{t}}+\lambda_2\frac{\operatorname{sen}t}{\sqrt{t}}\quad,\ \text{con}\ \ t>0.$$

Ejemplo 17. Determinar la solución general de la ecuación de Bessel de orden uno, es decir: $t^2x''+tx'+(t^2-1)x=0$.

Solución: Como t = 0esunpunto singular regular, la ecuación indical correspondiente es: $r(r-1)+r-1=r^2-1=0$, cuyas raíces son $r_1=1$ y $r_2=-1$, que difieren en 2, para la primera de éstas raíces, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left[n(n+1)+(n+1)+(t^2-1)\right]\ t^{n-1}=0$$

o bién:

$$3c_1+\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{n+2}(n+2)(n+4)+c_2\right]\ t^{n-1}=0$$

de aquí: $c_{n+2}=-\dfrac{c_n}{(n+2)(n+4)}$, luego, $c_2=-\dfrac{c_0}{2.4}$; $c_4=\dfrac{c_0}{2\cdot 4^2\cdot 6}$

$c_6=-\dfrac{c_4}{6\cdot 8}=-\dfrac{c_0}{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}$, . . . , pero $c_0=1$, entonces:

$$x_1(t) = t\left[1 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{t}{2}\right)^6 + \dots\right]$$

Para determinar $x_2(t)$, se tiene que:

$$-\frac{u''}{u'} = 2\frac{x_1'}{x_1} + a(t) = \frac{3}{t} - \frac{t}{2} - \dots$$

integrando ambos miembros:

$$-\ln u' = 3\ln t - \frac{t^2}{4} - \dots$$

o

$$u' = t^{-3}\exp\left[\frac{t^2}{4} + \dots\right] = t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-1} + \dots$$

luego:

$$u = -\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{4}\ln t + \dots$$

de donde:

$$x_2(t) = u\,x_1 = \frac{1}{4}x_1\ln t - \frac{1}{2}t^{-1} + \frac{1}{16} + \dots, \quad t > 0.$$

Ejercicios

Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, usando el método de Frobenius.

a) $3t^2x'' + (7t - 7t^2)x' + (1 + t^3)x = 0.$

b) $t^2x'' + tx' + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0.$

c) $(t + 2)x'' + \frac{1}{2}x' + 6x = 0.$

d) $t(t - 1)x'' + (7t - 1)x' + x = 0.$

e) $(t + 1)x'' - tx' + 6x = 0.$

f) $4tx'' + 2x' - x = 0.$

g) $tx'' + x' - x = 0.$

CAPITULO III

Transformada de Laplace

1. Introducción.

Otro método para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (y en algunos casos con coeficientes variables), homogéneas o no es usando la Transformada de Laplace.

El método consiste en transformar una ecuación diferencial a una algebraica, cuya solución al ser invertida da como resultado la solución de la ecuación diferencial propuesta.

Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo $[0,\infty)$, la Transformada de Laplace de $f(t)$ es:

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s).$$

donde:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st} f(t)dt.$$

si el último límite existe, se dice que la integral es convergente y por tanto hay Transformada de Laplace, si el límite en cuestión no existe, se dice que la integral diverge y por tanto no hay Transformada de Laplace.

Ejemplo 1. Determinar la Transformada de Laplace de $f(t) = 1$.

Solución: Aplicando la Definición correspondiente, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \mathcal{L}\,[1] = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st}dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{A\to\infty}\left[e^{-sA}-1\right] = \begin{cases} \frac{1}{s} = F(s)\ , \text{ si } s > 0. \\ \text{no existe, si } s = 0. \\ -\infty \quad , \text{ si } s < 0. \end{cases}$$

por tanto: $\mathcal{L}\,[1] = 1/s$ si $s>0$, de aquí si c es una constante se tiene que $\mathcal{L}\,[c] = c/s$ si $s > 0$.

Ejemplo 2. Determinar la Transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = e^{-at}.$$

Solucion: Aplicando la definición, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^\infty e^{(a-s)t}dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[e^{(a-s)t}/a-s\right]_0^A = \frac{1}{s-a}\quad , \ s > a.$$

Ejemplo 3. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \text{sen } at.$$

Solución: Usando la definición y la integración por partes:

$$\mathcal{L}\,[\text{sen } at] = \lim_{A\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\text{sen } at\ dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\text{ sen } at - a\cos at)\right]_0^A =$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}\quad , \text{ con } \ s > 0.$$

Ejemplo 4. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^n \text{ , con } t > 0.$$

Solución:

$$\mathcal{L}\,[t^n] = \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt \, .$$

integrando por partes se tiene que: $u = t^n$;$dv = e^{-st}dt$, de aquí, $du = nt^{n-1}dt$ y $v = -(1/s)e^{-st}$, por consiguiente:

$$\mathcal{L}\,[t^n] = -\frac{t^n}{s} e^{-st}\Big|_0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\,[t^{n-1}].$$

por tanto:

$$\mathcal{L}\,[t^n] = \frac{n}{s}\,\mathcal{L}\,[t^{n-1}] = \frac{n(n-1)}{s^2}\,\mathcal{L}\,[t^{n-2}] = \ . \ \ . \ \ . = \frac{n!}{s^n}\,\mathcal{L}\,[1] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

para $s > 0$.

Ejemplo 5. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \frac{1}{t} \, .$$

Solución:

$$\mathcal{L}\,[1/t] = \int_0^\infty e^{-st}(1/t)dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-st}(1/t)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1/t)dt.$$

para $t \in [0,1]$, se cumple que, $t \le 1$, de aquí, $-t \ge -1$, si $s > 0$ se tiene que, $-st \ge -s$, por tanto, $e^{-st} \ge e^{-s}$, luego se cumple que:

$$\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}\, dt \geq e^{-s} \int_0^1 \frac{dt}{t} .$$

considerando:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \underset{A \to 0}{\text{Lím}} \int_A^1 \frac{dt}{t} = \underset{A \to 0}{\text{Lím}} \ \ln t \Big|_A^1 = \underset{A \to 0}{\text{Lím}} \ [\ln 1 - \ln A] = +\infty.$$

se tiene que:

$$\mathcal{L}\ [1/t] = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}\, dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt \geq e^{-s} \int_0^1 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t}\, dt.$$

por tanto la función $f(t)=1/t$, no tiene Transformada de Laplace.

Ejemplo 6. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{t^2}.$$

Solución:

$$\mathcal{L}\ [e^{t^2}] = \int_0^\infty e^{(-st+t^2)} dt = \int_0^{2s} e^{t(t-s)} dt + \int_{2s}^\infty e^{t(t-s)} dt.$$

la primera integral de los dos últimos términos es positiva ya que el integrando $e^{t(t-s)}$ es positivo para todo t y s. Para $t \geq 2s$ se tiene $t-s \geq s$, de aquí, $e^{t(t-s)} \geq e^{st}$, luego:

$$\int_{2s}^\infty e^{t(t-s)} dt \geq \int_{2s}^\infty e^{st} dt = \infty .$$

para $s > 0$. Por tanto:

$$\mathcal{L}\,[e^{t^2}] = \int_0^{2s} e^{t(t-s)}dt + \int_{2s}^{\infty} e^{t(t-s)}dt \geq \int_{2s}^{\infty} e^{st}dt = \infty.$$

de aquí $\mathcal{L}\,[e^{t^2}]$ no existe.

Los ejemplos 5 y 6 muestran que no cualquier función $f(t)$ definida en el intervalo $[0,\infty)$ tiene Transformada de Laplace, esto motiva la pregunta siguiente: ¿ Que funciones tienen Transformada de Laplace?, para responder a esta se veran los conceptos y teoremas siguientes.

Una función $f(t)$ es de orden exponencial a cuando $t\to$ si existen constantes positivas M , t_0 y una constante a, tal que:

$$|\ f(t)\ | < M\,e^{at}\ ,\ \text{para}\ t \geq t_0.$$

Ejemplo 7. **La función $f(t)$ = senh t es de orden exponencial ya que:**

$$|\text{senh}\ t| = |(e^t - e^{-t})/2| < \frac{e^t}{2} < e^t$$

Ejemplo 8. La función $f(t) = t^n$, es de orden exponencial ya que:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

para $t > 0$, se tiene que, $t^n/n! \leq e^t$, de aquí $t^n \leq n!e^t$.

Ejemplo 9. Sea la función $f(t) = e^{t^2}$ y sean M y a constantes fijas entonces se cumple que para t suficientemente grande:

$$t > a + (\ln M)/t\ .$$

de aquí, $t^2 > \ln M + at$, tomando exponenciales, $e^{t^2} > e^{\ln M + at} = Me^{at}$, por tanto la función e^{t^2}, no es de orden exponencial.

Una función $f(t)$ es **seccionalmente continua** en un intervalo

$$t_0, \; t_1$$

si:

i) $f(t)$ es continua en el intervalo t_0, t_1, excepto en un número finito de puntos.

ii) Existen los Límites: $f(t_0^+)$ y $f(t_1^-)$.

iii) Si c es un punto de discontinuidad de la función $f(t)$ en el intervalo $(t_0, \; t_1)$, entonces existen los siguientes límites: $f(t_0^+)$ y $f(t_0^-)$.

Nota. En la definición anterior, si los límites en *iii*) son iguales, se dice que $f(t)$ tiene una **discontinuidad removible** en c y cuando estos límites son diferentes se dice que $f(t)$ tiene una **discontinuidad de salto** en el punto c. En la figura 1 se muestra la gráfica de una función seccionalmente continua en el intervalo t_0, t_1, donde en c_0 hay una discontinuidad removible en tanto que en c_1 y c_2 hay discontinuidades de salto.

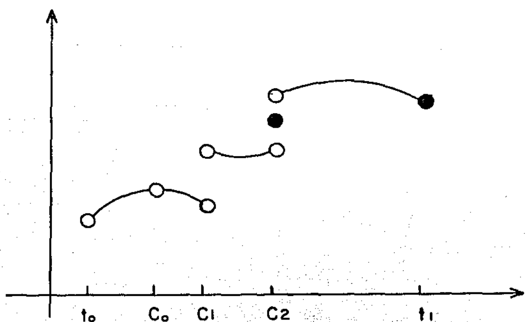

FIGURA 1.

TEOREMA 1

Sea la función $f(t)$ seccionalmente continua en el intervalo 0, t para $t > 0$ y de orden exponencial a cuando $t \to \infty$, entonces existe la Transformada de Laplace de la función $f(t)$ para $s>a$.

Prueba: Por definición se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

la primera integral de los dos últimos sumandos existe ya que $f(t)$ es seccionalmente continua en 0, t_0. Por hipótesis existen constantes positivas M y t_0 tales que $|f(t)| < M\, e^{at}$, para $t > t_0$, entonces para la segunda integral se tiene que:

$$\left|\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} |f(t)|dt < M \int_{t_0}^{\infty} e^{(a-t)t}dt =$$

$$= \frac{M}{a-s}\, e^{(a-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{M}{s-a}\ , \text{ para } s > a.$$

2. Propiedades de la Transformada de Laplace.

Propiedad 1. Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$ funciones que tienen transformada de Laplace para $s > s_1$ y $s > s_2$ respectivamente y sean λ_1, λ_2 constantes reales entonces:

$$\mathcal{L}\,[\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)] = \lambda_1 \mathcal{L}\,[f_1(t)] + \lambda_2 \mathcal{L}\,[f_2(t)].$$

para $s > \max\ s_1,\ s_2$.

Prueba: Sea $s > \max s_1, s_2$, entonces por definición:

$$\mathcal{L}\,[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2] = \int_0^\infty e^{-st}[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]dt =$$

$$= \lambda_1\int_0^\infty e^{-st}f_1 dt + \lambda_2\int_0^\infty e^{-st}f_2 dt =$$

$$= \lambda_1\mathcal{L}\,[f_1(t)] + \lambda_2\mathcal{L}\,[f_2(t)] \text{ Z}$$

Ejemplo 10. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 2t^3+ 3.$$

Solución: Usando la propiedad 1, se tiene que;

$$\mathcal{L}\,[2t^3+3] = 2\mathcal{L}\,[t^3] + 3\mathcal{L}\,[1] = \frac{4}{s^2} + \frac{3}{s} \quad \text{, para } s > 0.$$

Ejemplo 11. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(\mathrm{t}) = \text{senh } bt.$$

Solución: Como senh $bt=(1/2)[e^{bt}-e^{-bt}]$, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[\text{senh } bt] = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,[e^{bt}] - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\,[e^{-bt}] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-b} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+b} = \frac{1}{s^2-b^2} \quad \text{,para } s > |b|.$$

Ejemplo 12. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 3t^5-t^8+ 4 - 5e^{2t}+ 6 \cos 3t.$$

Solución:

$$\mathcal{L}\,[3t^5-t^8+4-5e^{2t}+6 \cos 3t] = 3\mathcal{L}\,[t^5]-\mathcal{L}\,[t^8]+4\mathcal{L}\,[1]-5\mathcal{L}\,[e^{2t}]+$$

$$+\,6\mathcal{L}\,[\cos 3t] = 3\frac{5!}{s^6} - \frac{8!}{s^9} + \frac{4}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{6s}{s^2+9}.$$

Propiedad 2. Si $\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$ para $s > s_0$ entonces:

$$\mathcal{L}\,[e^{at}f(t)] = F(s-a)\ ,\ \text{para } s > s_0 + a.$$

Prueba: Por definición se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[e^{at}f(t)] = \int_0 e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)\ ,\ \text{para } s > s_0 + a \quad z$$

Ejemplo 14. Determinar la Transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^n e^{at},$$

donde n es un entero positivo.

Solución: Como $\mathcal{L}\,[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} = F(s)$, para $s > 0$, se tiene que

$$\mathcal{L}\,[t^n e^{at}] = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \text{para } s > a.$$

Ejemplo 14. Determinar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{2t}\cos 3t.$$

Solución: Como $\mathcal{L}\,[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9} = F(s)$, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[e^{2t}\cos 3t] = F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}.$$

Propiedad 3. Sean las funciones f y f' definidas en 0, t , ambas seccionalmente continuas para $t > 0$, luego si $f(t)$ es de orden exponencial a cuando $t \to \infty$ entonces la transformada de Laplace de f' para toda $s > a$, es:

$$\mathcal{L}\,[f'(t)] = s\mathcal{L}\,[f(t)] - f(0).$$

Prueba: Si $f'(t)$ es de orden exponencial se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[f'(t)] = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt\ .$$

integrando por partes: $u=e^{-st}$, $dv=f'(t)dt$, $du=-se^{-st}dt$ y $v=f(t)$, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[f'(t)] = \lim_{A\to\infty}\ [e^{-st}f(t)]_0^A + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt =$$

$$= s\mathcal{L}\,[f(t)] + \lim_{A\to\infty}\ e^{-sA}f(t) - f(0) =$$

$$= s\mathcal{L}\,[f(t)] - f(0).$$

Nota. El $\lim\limits_{A\to\infty} e^{-st}f(t) = 0$, ya que $f(t)$ es de orden exponencial.

Ejemplo 15. Determinar la Transformada de Laplace de la función $\cos t$.

Solución: Aplicando la propiedad 3, y considerando que

$$(\operatorname{sen} t)'=\cos t\ ,\ \operatorname{sen}0 = 0,$$ se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[\cos t] = s(1/(s^2+1)) - 0 = \frac{s}{s^2+1}\ .$$

Generalizando la propiedad 3, si existen f'', f'''y son seccionalmente continuas para $t > 0$, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[f''] = s\mathcal{L}\,[f']-f'(0) = s^2F(s)-sf(0)-f'(0).$$

$$\mathcal{L}\,[f'''] = s\mathcal{L}\,[f''] - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

por tanto si las funciones: f, f', ..., $f^{(n-1)}$, son continuas en el intervalo [0,) y son de orden exponencial entonces:

$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Propiedad 4. Si $\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$ entonces $\mathcal{L}\,[tf(t)] = -F'(s)$.

Prueba:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\,[f(t)] = F'(s)$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))dt =$$

$$= -\,\mathcal{L}\,[tf(t)].$$

$$\therefore \mathcal{L}\,[tf(t)] = -F'(s)$$

Ejemplo 16. Determinar $\mathcal{L}\,[te^{2t}]$.

Solución: Como $\mathcal{L}\,[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$ y aplicando la propiedad 4 se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[te^{2t}] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\right] = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Ejemplo 17. Determinar $\mathcal{L}\,[t\,\mathrm{sen}\,t]$.

Solución: Como $\mathcal{L}\,[\mathrm{sen}t] = \frac{1}{s^2+1}$, aplicando la propiedad 4 se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[t\,\mathrm{sen}t] = -\frac{d}{ds}(1/(s^2+1)) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Generalizando la propiedad 4, se tiene que si $\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$ entonces :

$$\mathcal{L}\,[t^2 f(t)]=\mathcal{L}\,[t(tf(t))]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\,[tf(t)]=F''(s).$$

$$\mathcal{L}\,[t^3 f(t)]=-\frac{d}{ds}F''(s)=-F'''(s).$$

por tanto:

$$\mathcal{L}\,[t^n f(t)]=(-1)^n F^{(n)}(s).$$

Ejemplo 18.

$$\mathcal{L}\,[t^2 e^{-t}]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}(1/s+1)=2(s+1)^{-3}.$$

Para facilitar la determinación de la Transformada de Laplace de una función $f(t)$, es útil la Tabla 1.

Ejercicios

1. Usando la Tabla 1 y las propiedades 1, 2, 3 y 4 determinar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

a) $\mathcal{L}\,[5]$.

b) $\mathcal{L}\,[3t-2]$.

c) $\mathcal{L}\,[e^{2t}\text{sen } 3t - 2\cos t]$.

d) $\mathcal{L}\,[e]$.

e) $\mathcal{L}\,[e^{2t+2}]$.

f) $\mathcal{L}\,[-\text{sen } 3t]$.

g) $\mathcal{L}\,[t^5]$.

h) $\mathcal{L}\,[3\,\text{senh } 4t]$.

i) $\mathcal{L}\,[\cosh 2t]$.

j) $\mathcal{L}\,[3e^{-2t}\cos 4t - t^2\text{sen } 2t]$.

2. Probar que las funciones siguientes son de orden exponencial *a* cuando $t \to \infty$

a) $f(t) = t$.

b) $f(t) = \text{sen } t$.

c) $f(t) = \text{senh } at$.

d) $f(t) = t^2$.

e) $f(t) = \cosh at$.

f) $f(t) = t^2+t^3+\text{sen } 3t$.

3. Probar que si las funciones f y g son de orden exponencial a cuando $t \to \infty$ entonces $(\alpha f+\beta g)$ es de orden exponencial, para α, β reales.

$f(t)$	$L[f(t)]$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
sen bt	$\frac{b}{s^2+b^2}$, con $s>0$.
cos bt	$\frac{s}{s^2+b^2}$, con $s>0$.
senh bt	$\frac{b}{s^2-b^2}$, con $s>\|b\|$.
cosh bt	$\frac{b}{s^2-b^2}$, con $s>\|b\|$.
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, con $s>a$.
e^{at}sen bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, con $s>a$.
e^{at}cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, con $s>a$.
e^{at}senh bt	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$, con $s>\|b\|+a$.
e^{at}cosh bt	$\frac{s}{(s-a)^2-b^2}$, con $s>\|b\|+a$.

TABLA 1.

3. Transformada Inversa de Laplace.

Si $\mathcal{L}[f(t)]$=F(s) existe, se conoce que F(s) es única puesto que $\mathcal{L}$ es una función. Si $f(t)$ es la única función para la cual $\mathcal{L}$= F(s), entonces $\mathcal{L}$ tiene una inversa, denotada $\mathcal{L}^{-1}$, tal que: $\mathcal{L}^{-1}= f(t)$.

Generalmente no es este el caso como lo prueba el ejemplo siguiente: sea la función $f(t) = t$ definida en [0,) y sea la función $f=g$, excepto en t=1, donde $g(1)$=2, luego $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$.

Este ejemplo muestra que dos funciones pueden tener la misma Transformada de Laplace sin ser iguales, entonces ¿Como saber si existe o no la Transformada Inversa de Laplace de una función?. El teorema siguiente contesta a esta pregunta

TEOREMA 2

(*Teorema de Lerch's*) Sean las funciones f y g definidas en el intervalo [0, +∞) ambas seccionalmente continuas y de orden expo - nencial *a* cuando $t \to \infty$ sea s_0 un número real tal que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] ,$$

para todo $s > s_0$ entonces $f(t) = g(t)$ para toda $t > 0$. excepto en un número finito de puntos de discontinuidad.

Ejemplo 19. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[1/s]$.

Solución: Usando la tabla 1 se tiene $\mathcal{L}[1]$= 1/s, por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s]=1.$$

Ejemplo 20. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[1/s^2+1]$.

Solución: Como $\mathcal{L}[\text{sen } t]=1/s^2+1$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s^2+1] = \text{sen}t.$$

TEOREMA 3.

Sean $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=g(t)$, λ_1, λ_2 números reales entonces :

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda_1 F(s)+\lambda_2 G(s)] = \lambda_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)]+\lambda_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Prueba: Como $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ y $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, se tiene que:

$$\mathcal{L}[\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)] = \lambda_1\mathcal{L}[f(t)] + \lambda_2\mathcal{L}[g(t)] .$$

de aquí:

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda_1 F(s) + \lambda_2 G(s)] = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t) =$$
$$= \lambda_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad Z$$

Ejemplo 21. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[s+9/(s^2+6s+13)]$.

Solución: Aplicando el teorema 3, se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}[s+9/(s^2+6s+13)] = \mathcal{L}^{-1}[s+3+6/(s+3)^2+2^2] =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}[s+3/(s+3)^2+2^2]+3\mathcal{L}^{-1}[2/(s+3)^2+2^2] =$$
$$= e^{-3t}\cos 2t + 3\ e^{-3t}\text{sen } 2t.$$

Ejemplo 22. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[3-4s/s^2+25]$.

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}[3-4s/s^2+25] = \mathcal{L}^{-1}[(3/5)\ 5/s|+25 - \ 4s/s|+25] =$$
$$= (3/5)\ \text{sen } 5t - 4 \cos 5t.$$

Ejemplo 23. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[8/s^2+6s+10]$.

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}[8/s^2+6s+10] = 8\mathcal{L}^{-1}[1/(s+3)^2+1] = 8e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}[1/s^2+1] =$$

$$= 8e^{-3t}\text{sen } t.$$

Ejemplo 24. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[4/(s-3)^2]$.

Solución: Puesto que $\dfrac{4}{(s-3)^2} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{-4}{s-3}\right)$, se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}[4/(s-3)^2] = -t\mathcal{L}^{-1}[-4/s-3] = 4t\ e^{3t}.$$

Ejemplo 25. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[6s/(s^2+4)^2]$.

Solución: Puesto que $\dfrac{6s}{(s^2+4)^2} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{-3}{s^2+4}$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}[6s/(s^2+4)^2] = -t\mathcal{L}^{-1}[-3/s^2+4] = (3/2)t\mathcal{L}^{-1}[2/s^2+4] =$$

$$= (3/2)t \text{ sen } 2t.$$

Ejemplo 26. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[2/s^2-1]$.

Solución: Como: $\dfrac{2}{s^2-1} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+1}$, con $s\neq 1, -1$, entonces:

$$2 = A(s+1)+B(s-1)$$

de aquí A=1 y B=-1, por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[2/s^2-1] = \mathcal{L}^{-1}[1/s-1] - \mathcal{L}^{-1}[1/s+1] = e^t-e^{-t} = 2\text{senh } t.$$

Ejemplo 27. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[3s-1/s(s^2+1)]$.

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}[3s-1/s(s^2+1)] = \mathcal{L}^{-1}[-(1/s)+(s+3)/(s^2+1)] =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}[1/s]+\mathcal{L}^{-1}[s/s^2+1]+3\mathcal{L}^{-1}[1/s^2+1] =$$

$$= -1 + \cos t + 3 \text{ sen } t.$$

Ejemplo 28. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[(2s^2-3s+4)/(s^3-3s^2+2s)]$.

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(2s^2-3s+4)}{(s^3-3s^2+25)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(2s^2-3s+4)}{s(s-1)(s-2)}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{1}\,[(2/s)-(3/s-1)+(3/s-2)] = 2-3e^{t}+3e^{2t}.$$

Ejercicios

Determinar:

a) $\mathcal{L}^{-1}[-(2/5)]$.

b) $\mathcal{L}^{-1}[4/(s+2)^2]$.

c) $\mathcal{L}^{-1}[s+5/s^2+10s+26]$.

d) $\mathcal{L}^{-1}[1/s(s^2-1)]$.

e) $\mathcal{L}^{-1}[18/s(s^2+19)]$.

f) $\mathcal{L}^{-1}[2s/s^2+9]$.

g) $\mathcal{L}^{-1}[s-4/s^2+4]$.

h) $\mathcal{L}^{-1}[5/s^2+2s+5]$.

i) $\mathcal{L}^{-1}[12s/(s^2+1)^2]$.

j) $\mathcal{L}^{-1}[1/s^2(s+1)]$.

k) $\mathcal{L}^{-1}[s+4/(s-1)(s+2)]$.

l) $\mathcal{L}^{-1}[5s^2-9s+2/(s-3)(s^2+1)]$.

4. Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales.

El método para resolver ecuaciones diferenciales lineales, usando la Transformada de Laplace, se resume en los siguientes pasos:

1^{ero}. Dada la ecuación diferencial, aplicar la Transformada de Laplace a ambos miembros, dando como resultado una expresión en términos de F(s) y s.

2^{ndo}. Despejar de esta expresión a F(s).

3^{ero}. Aplicar la inversa de la Transformada de Laplace, dando como resultado la solución de la ecuación diferencial propuesta

Ejemplo 29. Resolver la ecuación: $x'-2x = 4$, tal que $x(0) = 3$.

Solución: Aplicando el método de la transformada de Laplace, se tiene que:

1^{ero}.
$$\mathcal{L}[x'-2x] = \mathcal{L}[4].$$
$$sF(s) - 3 - 2F(s) = \frac{4}{s}$$

2^{ndo}.
$$F(s) = \frac{(4/s)+3}{s-2} = \frac{-2}{s} + \frac{5}{s-2}.$$

3^{ero}.
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 5e^{2t}-2.$$

Ejemplo 30. Resolver: $x''+ 4x'+ 4x = 0$, tal que $x(0) = 0$ y $x'(0) = 5$.

Solución:

$$\mathcal{L}[x''+4x'+4x] = \mathcal{L}[0] .$$

$$s^2F(s)-5+4sF(s)+4F(s) = 0.$$

$$F(s) = \frac{5}{s^2+4s+4} = \frac{5}{(s+2)^2} .$$

$$\therefore\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 5te^{-2t}.$$

Ejemplo 31. Resolver: $x''+ 6x'+ 25x = 0$, tal que $x(0) = 2$ y $x'(0) = 3$.

Solución:

$$s^2F(s)-2s-3+6sF(s)-12+25F(s) = 0.$$

$$(s^2+6s+25)F(s) = 2s+15.$$

$$F(s) = \frac{2s+15}{(s+3)^2+4^2} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+4^2} + \frac{9}{4}\ \frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

$$\therefore\ x(t) = 2e^{-3t}\cos 4t + \frac{9}{4}\ e^{-3t}\operatorname{sen} 4t.$$

Ejemplo 32. Resolver: $x'' + 9x = \text{sen } 3t$, tal que $x(0) = 2$ y $x'(0) = 1$.

Solución:

$$s^2F(s)-2s-1+9F(s) = 3/s^2+9 \quad .$$

$$(s^2+9)F(s) = 2s + 1 + \frac{3}{s^2+9}$$

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+9} + \frac{3}{(s^2+3)^2}$$

$$\therefore\ x(t) = 2\cos 3t + \frac{7}{18}\text{ sen } 3t - \frac{1}{6}\ t\cos 3t.$$

Ejemplo 33. Resolver: $x''' + 3x' = 9t^2 - 12t + 6$, tal que $x(0) = 3$, $x' = 0$ y $x''(0) = -4$.

Solución:

$$s^3F(s)-3s^2+4+3sF(s)-9 = \frac{18}{s^3} - \frac{12}{s^2} + \frac{6}{s}$$

$$F(s) = \frac{(s^2+3)(3s^3-4s+6)}{s^4\ (s^4+3)} = \frac{3}{s} - \frac{4}{s^3} + \frac{6}{s}\ .$$

$$\therefore\ x(t) = 3-2t^2+t^3.$$

Ejemplo 34. Resolver: $x'' + 4x = 0$, tal que $x(0) = A$ y $x'(0) = B$.

Solución:

$$\mathcal{L}\ [x''+4x] = 0.$$

$$\mathcal{L}\ [x] = \frac{As+B}{s^2+4} = A\ \frac{s}{s^2+4} + \frac{B}{2}\ \frac{2}{s^2+4}\ .$$

$$\therefore\ x(t) = \frac{B}{2}\text{ sen } 2t + A\cos 2t.$$

Ejemplo 35. Resolver: $x''- 5x' + 4x = e^{2t}$, tal que $x(0)=1$ y $x(0)=0$.

Solución:

$$\mathcal{L}[x'']-5\mathcal{L}[x']+4\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

$$(s^2-5s+4)\mathcal{L}[x] = \frac{s^2-7s+11}{s-2}.$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{s^2-7s+11}{(s-2)(s-1)(s-4)}$$

resolviendo por fracciones parciales, se tiene que:

$$\frac{s^2-7s+11}{(s-2)(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-4}.$$

$$A = \left.\frac{s^2-7s+11}{(s-1)(s-4)}\right|_{s=2} = -\frac{1}{2},\quad B = \left.\frac{s^2-7s+11}{(s-2)(s-4)}\right|_{s=1} = \frac{5}{3}.$$

$$C = \left.\frac{s^2-7s+11}{(s-2)(s-4)}\right|_{s=2} = -\frac{1}{6}$$

luego:

$$\mathcal{L}[x] = \frac{-(1/2)}{s-2} + \frac{-(1/6)}{s-4}.$$

$$\therefore x(t) = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{5}{3}e^{t} - \frac{1}{6}e^{4t}.$$

Ejercicios

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes usando el método de la Transformada de Laplace.

1. $x''+ x = 0$, tal que, $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.
2. $x''+ x = 0$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$.
3. $x''- 16x = 0$, tal que, $x(0) = 2$ y $x'(0) = -1$.
4. $x''- ax'= 0$, tal que, $x(0) = 1$ y $x'(0) = a$.
5. $x''+ 2x'+ 5x = 0$, tal que, $x(0) = x'(0) = 1$.

6. $x'' - x' + x = 0$, tal que, $x(0) = x'(0) = -1$.
7. $x'' - 9x = t$, tal que, $x(0) = 1$ y $x'(0) = 2$.
8. $x'' - 3x' - 4x = t^2$, tal que, $x(0) = 2$ y $x'(0) = 1$.
9. $x''' + x = 0$, tal que, $x(0) = x''(0) = 1$ y $x'(0) = -1$.
10. $x''' - 3x' - 2x = e^{2t}$, tal que, $x(0) = x'(0) = 0$ y $x''(0) = 1$.
11. $x'' + k^2 x = \cos kt$, tal que, $x(0) = 0$ y $x'(0) = k$.
12. $x'' + 4x = \cos t$, tal que, $x(0) = x'(0) = 0$.
13. $x'' - 4x' - x = \operatorname{sen} t$, tal que, $x(0) = x'(0) = -1$.
14. $x'' - x = te^t$, tal que, $x(0) = x'(0) = 1$.

5. Teorema de Convolución..

Con frecuencia ocurre que en el proceso de resolver una ecuación diferencial por Transformada de Laplace, aparece una transformada que es el producto de otras dos transformadas, por ejemplo al resolver la ecuación: $x'' + x = \cos t$, tal que, $x(0) = x'(0) = 0$, se tiene que:

$$\mathcal{L}\,[x(t)] = \left[\frac{s}{s^2+1}\right]\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}\,[\cos t] \cdot \mathcal{L}\,[\operatorname{sen}\, t]$$

pero claramente:

$$\mathcal{L}\,[\cos t\ \operatorname{sen}\, t] \neq \mathcal{L}\,[\cos t] \cdot \mathcal{L}\,[\operatorname{sen}\, t].$$

así este ejemplo prueba que la transformada de Laplace del producto de dos funciones es diferente al producto de la transformada de Laplace de cada una de estas. Entonces ¿Como encontrar la inversa de la transformada para estos casos?, el teorema siguiente da respuesta a esta cuestión, pero antes:

Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ seccionalmente continuas en el intervalo $[0, t]$, la convolución de f y g es:

$$f * g\ (t) = \int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha.$$

Ejemplo 36. Determinar la convolución de las funciones sen t y cos t.

Solución: Por definición se tiene que:

$$\text{sen } t * \cos t = \int_0^t \text{sen}(t-\alpha) \cos \alpha \, d\alpha =$$

$$= \int_0^t (\text{sen } t \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cos t)\cos \alpha \, d\alpha =$$

$$= \text{sen } t \int_0^t \cos^2\alpha \, d\alpha - \cos t \int_0^t \text{sen}\alpha \cos \alpha \, d\alpha =$$

$$= \text{sen } t[(1/2)t+(1/2)\text{sen } t \cos t]-\cos t[(1/2)\text{sen}|t] =$$

$$= \frac{1}{2} t \text{ sen } t .$$

Nota. La convolución es conmutativa ya que:

$$f * g\ (t) = \int_0^t f(t-\alpha)\ g(\alpha)\ d\alpha =$$

usando el cambio de variable $v = t-\alpha$, se tiene que:

$$= -\int_t^0 f(v)\ g(t-v)\ dv = \int_0^t g(t-v)\ f(v)\ dv = g * f\ (t).$$

$$\therefore \quad f * g\ (t) = g * f\ (t) \quad z$$

TEOREMA 4.

Sean $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ y $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = F(s)\,G(s)$$

es decir $f * g(t)= \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$.

Prueba: Usando la definición se tiene que:

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha\right] = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha dt\ .$$

donde la integración se efectúa sobre la región del plano $t\alpha$ des-descrita por: $0 \le \alpha \le t$ y $0 \le t < \infty$ y $0 \le \alpha < \infty$, de aquí se tiene que:

$$\int_0^\infty \int_A^\infty e^{-st}f(t-\alpha)g(\alpha)dtd\alpha = \int_0^\infty g(\alpha)\left[\int_A^\infty e^{-st}f(t-\alpha)dt\right]d\alpha.$$

haciendo el cambio de variable $u=t-\alpha$ en $\int e^{-st}f(t-\alpha)dt$ se tiene que:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t-\alpha)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du.$$

de donde:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha\right] = \int_0^\infty g(\alpha)\left[\int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du\right]d\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} g(\alpha)[\int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du]d\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} g(\alpha)d\alpha \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du =$$

$$= \mathcal{L}[f]*\mathcal{L}[g] \quad Z$$

Ejemplo 37. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[s/(s^2+1)^2]$.

Solución: Usando el Teorema 3 y como: $\mathcal{L}[\cos t] = s/s^2+1$ y $\mathcal{L}[\text{sen } t] = 1/s^2+1$, se tiene que:

$$\text{sen } t * \cos t = \mathcal{L}^{-1}[(s/s^2+1)(1/s^2+1)].$$

pero sen t * cos t=(1/2)$t$sen t, por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[s/(s^2+1)^2] = (1/2)\ t\text{sen } t.$$

Ejemplo 38. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[1/\ s^2(1+s)^2]$.

Solución: Como $\mathcal{L}[t]=1/s^2$ y $\mathcal{L}[te^{-t}]=1/(s+1)^2$, se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s^2(1+s)^2] = \mathcal{L}^{-1}[(1/s^2)(1/(1+s)^2)] = t * te^{-t}.$$

luego:

$$t * te^{-t} = \int_0^t (t-\alpha)\alpha e^{-a}d\alpha = t\int_0^t \alpha e^{-a}d\alpha - \int_0^t \alpha^2 e^{-a}d\alpha =$$

$$= \left[-te^{-a}(1+\alpha)+e^{-a}[\alpha^2+2\alpha+2]\right]\Big|_0^t = t-2+(t+2)e^{t}.$$

por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s^2(1+s)^2] = t-2+(t+2)e^{-t}$$

Ejemplo 39. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[1/s(s^2+1)]$.

Solución:

$$\mathcal{L}\,[1/s(s^2+1)] = \mathcal{L}^{-1}[1/s] * \mathcal{L}^{-1}[1/s^2+1] = 1 * \text{sen } t =$$

$$= \int_0^t \text{sen } \alpha \, d\alpha = 1 - \cos t.$$

Ejemplo 40. Resolver la ecuación diferencial: $x'' + 100x = 100$ tal que, $x(0) = 2$ y $x'(0) = 0$.

Solución:

$$\mathcal{L}\,[x''+100x] = \mathcal{L}\,[100]$$

$$s^2\mathcal{L}\,[x]-2s+100\mathcal{L}\,[x] = 100/s$$

$$\mathcal{L}\,[x] = \frac{2s}{s^2+100} + 10[(1/s)(10/s^2+100)] =$$

aplicando la Transformada Inversa de Laplace, se tiene que:

$$x(t) = 2\cos 10t + 10\int_0^t \text{sen } 10\alpha \, d\alpha =$$

$$= \cos 10t + 1.$$

Ejercicios

1. Determinar:

a) $\mathcal{L}^{-1}[1/s^2(s-1)]$

b) $\mathcal{L}^{-1}[1/(s-2)(s-3)]$.

c) $\mathcal{L}^{-1}[2/s(s^2+4)]$.

d) $\mathcal{L}^{-1}[1/s(s-3)]$.

e) $\mathcal{L}^{-1}[4s-8/s(s^2+4)]$.

f) $\mathcal{L}^{-1}[1/s(s+5)]$.

g) $\mathcal{L}^{-1}[1/s^2(s^2+4)]$.

h) $\mathcal{L}^{-1}[s/(s^2+a^2)^2]$.

i) $\mathcal{L}^{-1}[s/(s^2+1)|]$.

j) $\mathcal{L}^{-1}[s/(s^2+a^2)^2]$.

2. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $x''+x = 2e^{-t}$, tal que , $x(0) = x'(0) = 0$.

b) $x''+4x = 8$, tal que , $x(0) = 1$ y $x'(0) = 1$.

c) $x''+2x'+2x = 4$, tal que , $x(0) = x'(0) = 0$.

CAPITULO IV

Sistemas Diferenciales Lineales de Primer Orden

1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones diferenciales lineales que involucran una variable independiente y una dependiente. Con frecuencia en aplicaciones físicas se encuentran ecuaciones diferenciales que contienen una variable independiente pero con dos o más variables dependientes, así es natural esperar que no baste una sóla ecuación diferencial para determinar estas variables, sino que, la ley de comportamiento quede expresado por dos o más ecuaciones diferenciales en las que aparezcan relacionadas las variables del sistema. Por ejemplo supóngase que una partícula de masa m se mueve en el plano XY (ver figura 1) debido a que actúa sobre ella una fuerza tal que su dirección está en el plano XY, y que su magnitud depende de la posición instantánea (x, y) de la partícula en el tiempo t, si la partícula está inicialmente en reposo en algún punto, digamos el origen, es natural preguntar donde estará la partícula en cualquier tiempo posterior. Si consideramos la fuerza en dos componentes F_1 y F_2 en las direcciones positivas X y Y como se indica en la figura 1, entonces por la ley de Newton se tiene que:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt}x &= F_1(x,\ y,\ t). \\ m\frac{d^2}{dt}y &= F_2(x,\ y,\ t). \end{aligned} \tag{1}$$

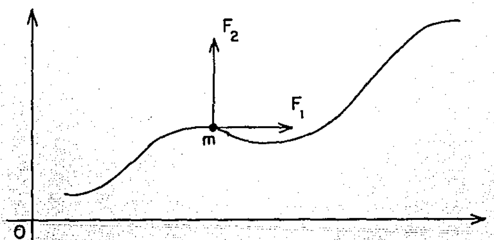

FIGURA 1

con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$. A la expresión (1) se le denomina **Sistema de ecuaciones Diferenciales**, siendo su forma más general la expresión:

$$\begin{matrix} F_1\left(t,\ f_1,\ f_1',\ \ldots,\ f_1^{(n)},\ \ldots,\ f_m,\ f_m',\ \ldots,\ f_m^{(n)}\right) = 0. \\ \vdots \\ F_m\left(t,\ f_1,\ f_1',\ \ldots,\ f_1^{(n)},\ \ldots,\ f_m,\ f_m',\ \ldots,\ f_m^{(n)}\right) = 0. \end{matrix} \qquad (2)$$

El orden de la mayor derivada que aparece en el sistema de ecuaciones diferenciales define el **orden del sistema**, por ejemplo el sistema (1) es de segundo orden, en tanto que el sistema (2) es de orden n. A estos sistemas se les llaman sistemas de ecuaciones ordinarias por que no involucran derivadas parciales.

En el presente capítulo nos restringiremos aconsiderar sistemas del tipo:

$$\begin{matrix} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{matrix} \qquad (3).$$

denominados **sistemas lineales de primer orden.**

El sistema (3) también puede ser escrito en forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n^{\ n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ldots & \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

equivalente a:

$$\overline{X}' = \overline{A}(t)\ \overline{X} + \overline{b}(t) \tag{5}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix} = \overline{A}(t),\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{X},\quad \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n^{n} \end{bmatrix} = \overline{X}',\ \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} = \overline{b}(t).$$

note que en la expresión (5) los vectores columna: $\overline{X}$, $\overline{X}'$ y $\overline{b}$ son de tamaño nx1, en tanto que la matriz $\overline{A}(t)$ es de tamaño nxn. Si en la expresión (5) $\overline{b}(t) \equiv 0 \quad \forall\ t$ se dice que el sistema lineal es de **homogéneo** en otro caso se dice ser **no homogéneo**.

El vector $\overline{\phi} = (\phi_1, \ \ldots, \ \phi_2)^T$ es una solución de la expresión (5), si al sustituirse en ésta se obtiene una identidad, es decir:

$$\overline{\phi}' = \overline{A}(t)\ \overline{\phi} + \overline{b}(t)$$

Ejemplo 1. El vector $(-2e^{-t},\ e^{-t})^T$ es una solución del sistema:

$$x_1' = 2x_1 + 6x_2$$

$$x_2' = -\ 2x_1 - 5x_2$$

Solución: Haciendo $\overline{\phi} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ de aquí: $\overline{\phi}' = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^{-t}+6e^{-t} \\ 4e^{-t}-5e^{-t} \end{bmatrix}$$

es decir el vector $\bar{\phi}$ es solución del sistema propuesto.

2. Relación de Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Lineales

Considérese la ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n siguiente:

$$x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)x = f(t). \qquad (6)$$

sean las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ definidas por: $x_1 = x$, $x_2 = x_2' = x'$, $x_3 = x_2' = x''$, $\ldots$, $x_n = x'_{n-1} = x^{(n-1)}$, entonces la ecuación diferencial (6) se transforma en:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2. \\ x_2' &= x_3. \\ x_3' &= x_4. \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n. \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad (7)$$

es decir toda ecuación diferencial lineal de orden n es equivalente a un sistema lineal de primer orden.

Ejemplo 2. Transformar la ecuación diferencial: $x^{(IV)} - 3x^{III} + 5x'' + 2x = 6\text{sen } t$, a un sistema lineal de primer orden.

Solución: Sean las variables: x_1, x_2, x_3 y x_4 definidas por: $x = x_1$, $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$ y $x_3' = x_4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2. \\ x_2' &= x_3. \\ x_3' &= x_4. \\ x_4' &= 3x_4 - 5x_3 + 2x_1 + 6\text{sen } t. \end{aligned}$$

o bién:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\text{sen } t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Transformar a un sistema lineal de primer orden la ecuación diferencial: $x^{(VI)} - 6x^{(V)} + 5x^{(IV)} - 3x''' + 6x' - x = 0$.

Solución: Sean las variables x_1, x_2, x_3, ... y x_6 definidas por: $x = x_1$, $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, ..., $x_5' = x_6$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= x_5 \\ x_5' &= x_6 \\ x_6' &= 6x_6 - 5x_5 + 3x_4 - 6x_2 + x_1 \end{aligned}$$

o bién:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \\ x_5' \\ x_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 0 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1

(*Existencia y Unicidad*) Considérese el sistema lineal (5), si la matriz $A(t)$ y el vector $\overline{b}(t)$ tienen componentes reales y continuos para toda t en el intervalo I, entonces $\forall\ t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución $\overline{\phi}$ del sistema (5) tal que:

$$\overline{\phi}' = A(t)\,\overline{\phi} + \overline{b}(t).$$

$$\text{con: } \overline{\phi}(t_0) = \overline{x}_0$$

3. Propiedades de las Soluciones de Sistemas Lineales

Considérese el sistema lineal de primer orden homogéneo siguiente:

$$\overline{X}' = A(t)\,\overline{X}\ . \tag{8}$$

Propiedad 1. Si $\overline{\phi}_1$ y $\overline{\phi}_2$ son soluciones de (8) entonces la combinación lineal $\alpha_1\overline{\phi}_1 + \alpha_2\overline{\phi}_2$ es solución de (8).

Prueba: Como $\overline{\phi}_1$ y $\overline{\phi}_2$ son soluciones de (8) se cumple que:

$$(\alpha_1\overline{\phi}_1)' = A(t)(\alpha_1\overline{\phi}_1) \quad \text{y} \quad (\alpha_2\overline{\phi}_2)' = A(t)(\alpha_2\overline{\phi}_2).$$

de aquí se cumple que:

$$\alpha_1\overline{\phi}_1' + \alpha_2\overline{\phi}_2' = A(t)(\alpha_1\overline{\phi}_1 + \alpha_2\overline{\phi}_2).$$

haciendo $\overline{\phi} = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \alpha_2\overline{\phi}_2$, se tiene que:

$$\overline{\phi}' = A(t)\overline{\phi} \qquad \zeta$$

de lo anterior se tiene que *el conjunto solución de (8) forma un espacio vectorial.*

Sea $\overline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{bmatrix}$, ..., $\overline{\phi}_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{bmatrix}$, el **Wronskiano** de estos vectores es:

$$W(t, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \ldots, \bar{\phi}_n) = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2i} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{ni} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema 2

Si el $W(t, \bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n) \neq 0$ para cualquier t en el intervalo I entonces los vectores $\bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n$ son linealmente independientes en I.

Prueba: Considérese:

$$\alpha_1\bar{\phi}_1 + \alpha_2\bar{\phi}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\phi}_n = \bar{0}.$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las incógnitas, por tanto:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

como el determinante de (9) es diferente de cero ya que por hipótesis el $W(\bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n) \neq 0$, esto implica que, necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ para todo $t \in$ I. Por tanto $\bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n$ son linealmente independientes.z

Teorema 3

Si $\bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n$, son soluciones linealmente independientes del sistema (8) para $t \in$I entonces el Wronskiano de $\bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n$ no es cero para todo $t \in$I.

Prueba: Por reducción a lo absurdo, supongamos que para algún t_0 en I, $W(\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n) = 0$. Considérese:

$$\alpha_1\overline{\phi}_1(t_0) + \alpha_2\overline{\phi}_2(t_0) + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n(t_0) = \overline{0}.$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las incógnitas, es decir:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t_0) & \ldots & \phi_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t_0) & \ldots & \phi_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

como el determinante del sistema anterior es el $W(\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n) = 0$ esto implica que existen constantes en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no todas cero haciendo:

$$\overline{\phi}(t) = \alpha_1\overline{\phi}_1(t) + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n(t).$$

por la propiedad uno $\overline{\phi}(t)$ es solución de (8) y como $\overline{\phi}(t_0) = 0$, esto implica que $\overline{\phi}(t) \equiv \overline{0}$, para toda t en I, es decir:

$$\alpha_1\overline{\phi}_1(t) + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n(t) = \overline{0} \quad , \forall\ t \in \mathrm{I}.$$

de aquí $\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n$ son linealmente dependientes lo que contradice a la hipótesis del Teorema 3, por tanto $W(t, \overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n) \neq 0$, para toda t en I z

El teorema 2 y 3 prueban la propiedad siguiente:

Propiedad 2. Sean $\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n$ soluciones del sistema (8) en el intervalo I. El conjunto $\{\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n\}$ es linealmente independiente en I si y solamente si $W(\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n) \neq 0$ para toda t en I.

Ejemplo 4. Verificar que $\overline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$ y $\overline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ son soluciones li-nealmente independientes del sistema homogéneo lineal:

$$\overline{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \overline{X}.$$

Solución: Sustituyendo $\overline{\phi}_1$ y $\overline{\phi}_2$ en el sistema propuesto se tiene que

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \overline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^t+4e^t \\ -2e^t+3e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} = \overline{\phi}_1{}'.$$

$$\begin{bmatrix} =3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \overline{\phi}2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{-t}+4e^{-t} \\ -4e^{-t}+3e^{-t} \end{bmatrix} = \overline{\phi}2'.$$

de donde $\overline{\phi}_1$ y $\overline{\phi}_2$ son sluciones del sistema propuesto, entonces:

$$W(\overline{\phi}_1,\ \overline{\phi}_2) = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = e^0-2e^0 = -1 \neq 0.$$

para toda t en I, por tanto $\overline{\phi}_1$ y $\overline{\phi}_2$ son soluciones linealmente independientes en I.

Propiedad 3. El espacio vectorial de soluciones del sistema (8) tiene dimención n.

Prueba: Considérese el sistema (8), sean $a_{ij}(t)$ continuas en el intervalo I, sea $t \in$ I, defínase los vectores: $\overline{e} = (1,\ 0,\dots,0)^T$, ..., $\overline{e}_n = (0,\ \dots,\ 1)^T$ y considérese: $\overline{\phi}_i{}' = A(t)\overline{\phi}_i$, tal que $\overline{\phi}_i(t_0) = \overline{e}_i$ con $i = 1,\ 2,\ \dots,$ n. Por el Teorema 1, existen n soluciones únicas: $\overline{\phi}_1,\ \dots,\ \overline{\phi}_n$. Si, $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$ son constantes reales tales que:

$$\alpha_1\overline{\phi}_1 + \alpha_2\overline{\phi}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n = \overline{0}.$$

para toda t en I, de aquí:

$$\begin{bmatrix} \phi 11 & \ldots & \phi 1n \\ \cdot & & \cdot \\ \phi_{n1} & & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha 1 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz nxn anterior es:

$$W(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \ldots, \overline{\phi}_n, t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

de donde $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ y por consiguiente las soluciones $\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \ldots, \overline{\phi}_n$ son linealmente independientes.

La segunda parte de la prueba del teorema 3, consiste en que si $\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \ldots, \overline{\phi}_n$ son linealmente independientes, del sistema (8) en intervalo I y si $\overline{\phi}$ es cualquier otra solución del mismo sistema entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,
tales que

$$\overline{\phi} = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \alpha_2\overline{\phi}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n .$$

Para probar esto sea $t_0 \in$ I y $\overline{\phi}\ (t_0) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$

considerando:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(t_0) & \ldots & \phi_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t_0) & \ldots & \phi_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

como $\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n$ son linealmente independientes entonces se cumple que $W(\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n) \neq 0$ y por tanto existe un vector solución único $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ tal que $\overline{\phi}^* = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n$ es solución de (8), pero $\overline{\phi}^*(t_0) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$, por el teorema 1, se tiene que $\overline{\phi}^* \equiv \overline{\phi} = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n$ ∎

Propiedad 4. Si $\overline{\phi}_P$ es cualquier solución del sistema (5) en el intervalo I y si $\overline{\phi}_1, \ldots, \overline{\phi}_n$ son soluciones linealmente independientes del sistema (8) en I entonces cada solución $\overline{\phi}^*$ del sistema (5) es de la forma $\overline{\phi}^* = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n + \overline{\phi}_P$.

Prueba: Sea $\overline{\phi}^*$ cualquier solución del sistema (5), considérese $\overline{\phi} = \overline{\phi}^* - \overline{\phi}_P$, luego:

$$\overline{\phi}' = \left[\overline{\phi}^* - \overline{\phi}_P\right]' = A(t)\overline{\phi}^* + \overline{b}(t) - A(t)\overline{\phi}_P - \overline{b}(t) = A(t)\overline{\phi}.$$

es decir $\overline{\phi}$ es solución del sistema (8), por tanto existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $\overline{\phi} = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n$ entonces $\overline{\phi} = \overline{\phi}^* - \overline{\phi}_P$ implica que:

$$\overline{\phi}^* = \alpha_1\overline{\phi}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\phi}_n + \overline{\phi}_P. \quad ∎$$

Ejercicios

1. Usar el Wronskiano para probar que los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $\begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen } t \\ \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos t \\ \text{sen } t \end{bmatrix}$

2. Verificar que $\overline{\phi}_1 = (e^t,\ 2e^t)^T$ y $\overline{\phi}_2 = (e^{-t},\ -2e^{-t})^T$ son soluciones linealmente independientes del sistema:

$$\overline{X}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \overline{X}$$

3. ¿Por que $(\cosh t,\ 2\operatorname{senh} t)^T$ y $(\operatorname{senh} t,\ 2\cosh t)^T$ son soluciones del sistema del ejercicio 2 ?.

4. Verificar que $\overline{\phi}_p = (1-e^t,\ 2t)^T$ es una solución particular del sistema:

$$\overline{X}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \overline{X} + \begin{bmatrix} -1-e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

y escribir la solución general del mismo.

4. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Constantes

Considérese el sistema siguiente:

$$\overline{X}' = A\ \overline{X} \qquad (10)$$

donde A es una matriz de nxn, las a_{ij} son constantes reales y $\overline{X}$ es un vector columna nx1. Para resolver el sistema (10) se supone que las soluciones tienen la forma $\overline{\phi} = \overline{c}\ e^{rt}$, donde $\overline{c}$ es un vector incógnita nx1 y r es constante real que debe ser determinada. Sustituyendo la supuesta solución en (10) se tiene que:

$$r * \overline{c} * e^{rt} = A * \overline{c} * e^{rt}$$

de aquí:

$$\left[A*\bar{c} - r*\bar{c}\right] e^{rt} = \bar{0}$$

es decir:

$$\left[A - r\,I\right]\bar{c} = \bar{0}$$

donde I es la matriz unidad, como $\bar{c} \neq \bar{0}$ entonces el sistema anterior tiene solución para aquellos valores de r tales que

$$\det\left|A - r\ I\right| = 0$$

Esta ecuación da como resultado un polinomio de grado n en la incógnita r denominado **ecuación característica** de la matriz A. Si r_1 es una raíz de la ecuación característica de A se le denomina **eigenvalor** y si $\bar{c}_1$ es un vector que satisface

$$\left[A - r_1 I\right]\bar{c}_1 = \bar{0}$$

se denomina **eigenvector**.

Teorema 4

Considérese el sistema (10), para cada eigenvalor real r de A y cada eigenvector $\bar{E}_r$ correspondiente a r, la función $\bar{\phi}_r = \bar{E}_r e^{rt}$ es una solución de (10). Además, las soluciones deesta forma, con eigenvalores distintos, son linealmente independientes.

Prueba: como $\bar{E}_r$ es un eigenvector correspondiente al eigenvalor r, se tiene que $A*\bar{E}_r = r\bar{E}_r$, por tanto:

$$A*\bar{\phi}_r = r\bar{E}_r e^{rt} = r\bar{\phi}_r$$

pero $\overline{\phi}'_r = r\overline{E}_r e^{rt} = r\overline{\phi}_r$ luego se tiene que:

$$\overline{\phi}'_r = A*\overline{\phi}_r \quad \blacksquare$$

Sean r_1, ..., r_k eigenvalores distintos de A con eigenvectores $\overline{E}_{r_1}$, ..., $\overline{E}_{r_k}$ respectivamente, supóngase que:

$$\alpha_1\overline{E}_{r_1}e^{r_1 t} + \ldots + \alpha_k\overline{E}_{r_k}e^{r_k t} = \overline{0}$$

entonces si $t = 0$ se tiene que:

$$\alpha_1\overline{E}_{r_1} + \ldots + \alpha_k\overline{E}_{r_k} = \overline{0}$$

y como los vectores $\overline{E}r_i$ son linealmente independientes para toda i se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ de donde $\overline{E}_{r_i}e^{r_i t}$ son $l.i.$ $\blacksquare$

Nota: Si del sistema (10) A tiene n eigenvalores distintos r_1, r_2, ..., r_n con sus respectivos eigenvectores $\overline{E}r_i$ entonces la solución general del sistema (10) es:

$$\overline{\phi}(t) = \alpha_1\overline{E}_{r_1}e^{r_1 t} + \ldots + \alpha_n\overline{E}_{r_n}e^{r_n t}$$

donde α_1, α_2, ..., α_n son constantes reales.

Ejemplo 5. Determinar la solución general del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución: La ecuación característica correspondiente a A es:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 3 \\ 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

es decir, $r^2 - 4 = 0$, de aquí $r = \pm 2$ o sea $r_1 = +2$ y $r_2 = -2$ para determinar los egenvectores correspondientes se tiene que;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e_1 \\ 2e_2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e_1 \\ -2e_2 \end{bmatrix}$$

de aquí $\overline{E}_2 = (3,\ 1)^T$ y $\overline{E}_{-2} = (-1,\ 1)^T$, por tanto la solución general correspondiente es:

$$\overline{\phi}\ (t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

En el caso en que el eigenvalor r se repita se procede como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6. Resolver el sistema:

$$x_1' = -3x_1 - 4x_2$$
$$x_2' = x_1 + x_2$$

Solución: La ecuación característica correspondiente es:

$$\begin{vmatrix} r+3 & 4 \\ -1 & r-1 \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 1 = 0$$

es decir hay raíz doble $r=-1$. El eigenvector correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

de aquí el eigenvector correspondiente es $\overline{E}_1 = (-2,\ 1)^T$ y la primer solución es $\overline{\phi}_1 = \overline{E}_1 e^{-t}$. Para determinar otra solución del sistema propuesto se procede como en el capítulo I, es decir se supone que $\bar{\phi}_2 = \bar{E}_1 te^{-t}$, sustituyendo ésta en el sistema se tiene que:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} = 0$$

lo que prueba que $\bar{\phi}_2$ no es solución del sistema, sin embargo esto nos induce hacer una nueva proposición tal que:

$$\bar{\phi}_2 = \bar{E}_1 te^{-t} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

donde c_1 y c_2 son constantes a determinar, para esto hay que sustituir la última expresión en el sistema propuesto, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2c_1 + 4c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \end{bmatrix} e^{-t} = \bar{0}$$

de aquí si $c_2 = 0$ entonces $c_1 = 1$, luego la segunda solución linealmente independiente (verificarse con el wronskiano) es:

$$\bar{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}$$

por tanto la solución general del sistema es:

$$\bar{\phi} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \left[\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \right]$$

En el caso en que el eigenvalor r sea complejo se tiene:

Teorema 5

Sea A una matriz nxn con sus elementos constantes reales y supóngase que $r = \alpha + i\beta$ es un eigenvalor de A entonces si $\bar{E}_r$ es un eigenvector correspondiente a r, $\overline{E_r}$ el conjugado de $\bar{E}_r$, es un eigenvector correspondiente al eigenvalor $\overline{r} = \alpha - i\beta$.

Prueba: Como $A*\bar{E}_r = r\bar{E}_r$, se tiene que:

$$\overline{A*\bar{E}_r} = \overline{r\ \bar{E}_r}$$

pero $A = \overline{A}$ entonces:

$$A*\overline{\bar{E}_r} = \overline{r}\ \overline{\bar{E}_r} \qquad \blacksquare$$

Teorema 6

Considérese el sistema (10) sea $\bar{E}_r$ un eigenvector correspondiente al eigenvalor complejo $r = \alpha + i\beta$ de A entonces $\bar{E}_r e^{rt}$ y $\overline{\bar{E}_r} e^{\bar{r}t}$ son soluciones del sistema (10).

La demostración del teorema 6 se deja como ejercicio.

Usando la fórmula de Euler, se tiene que

$$\bar{E}_r e^{rt} = \bar{E}_r e^{\alpha t}\left[\cos \beta t + i \text{ sen } \beta t\right]$$

$$\overline{\bar{E}_r}\ e^{\bar{r}t} = \overline{\bar{E}_r}\ e^{\alpha t}\left[\cos \beta t - i \text{ sen } \beta t\right]$$

donde $r = \alpha + i\beta$, como $\bar{E}_r e^{rt}$ y $\overline{\bar{E}_r} e^{\bar{r}t}$ son soluciones del sistema (10) entonces

$$\frac{1}{2}\left[\bar{E}_r e^{rt} + \overline{\bar{E}_r} e^{\bar{r}t}\right] = e^{\alpha t}\left[\frac{\bar{E}_r + \overline{\bar{E}_r}}{2} \cos \beta t + \frac{i(\bar{E}_r + \overline{\bar{E}_r})}{2} \text{ sen } \beta t\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{E}_r e^{rt} - \overline{\overline{E}_r e^{\bar{r}t}}\right] = e^{\alpha t}\left[\frac{\overline{E}_r - \overline{\overline{E}_r}}{2}\cos\beta t - \frac{i(\overline{E}_r + \overline{\overline{E}_r})}{2}\operatorname{sen}\beta t\right]$$

por tanto

Teorema 7

Sea $r = \alpha + i\beta$ un eigenvalor complejo de la matriz A del sistema (10) y sea $\overline{E}_r$ el eigenvector correspondiente entonces los vectores:

$$\overline{\phi}_1 = e^{\alpha t}\left[\frac{\overline{E}_r + \overline{\overline{E}_r}}{2}\cos\beta t + \frac{i(\overline{E}_r + \overline{\overline{E}_r})}{2}\operatorname{sen}\beta t\right]$$

$$\overline{\phi}_2 = e^{\alpha t}\left[\frac{\overline{E}_r - \overline{\overline{E}_r}}{2}\cos\beta t - \frac{i(\overline{E}_r + \overline{\overline{E}_r})}{2}\operatorname{sen}\beta t\right]$$

son soluciones linealmente independientes del sistema (10).

Ejemplo 7. Determinar la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución: La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, de donde i es un eigenvalor, por tanto

$$\frac{\overline{E}_1 + \overline{\overline{E}_1}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{E}_1 + \overline{\overline{E}_1}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\bar{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\bar{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

la solución general es:

$$\bar{\phi} = \alpha_1 \bar{\phi}_1 + \alpha_2 \bar{\phi}_2$$

5. Sistemas no Homogéneos

Para obtener una solución particular del sistema no homogéneo

$$\bar{X}' = A * \bar{X} + \bar{b}$$

se usa el método de variación de parámetros, que se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8. Resolver el sistema:

$$x_1' = 2x_1 + 6x_2 - 2t - 2 - e^{-t}$$
$$x_2' = -2x_1 - 5x_2 + 2e^{-t} + 3t - 3$$

Solución: La solución del sistema homogéneo asociado al propuesto es:

$$\bar{\phi} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

para determinar la solución particular se sustituye en la última expresión a α_1 y α_2 por funciones de t denotadas por γ_1 y γ_2 respectivamente, sustituyendo en el sistema propuesto se tiene que:

$$\gamma_1' \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \gamma_2' \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} 2t - 2 - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 3t + 3 \end{bmatrix}$$

de aquí:

$$-2\gamma_1' e^{-t} - 3\gamma_2' e^{-2t} = 2t - 2 - e^{-t}$$

$$\gamma_1' e^{-t} + 2\gamma_2' e^{-2t} = 2e^{-t} - 3t + 3$$

luego:

$$\gamma_1' = 5te^{-t} - 5e^{t} - 4 \qquad y \qquad \gamma_2' = 3e^{t} - 4te^{2t} + 4e^{2t}$$

integrando se tiene que:

$$\gamma_1 = 5te^{t} - 5e^{t} - 4 \qquad y \qquad \gamma_2 = 3e^{t} - 2te^{2t} + 3e^{2t}$$

por tanto la solución general es:

$$\overline{\phi} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} (5t - 10 - 4te^{-t}) + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} (3e^{-t} - 2t + 3)$$

Ejercicios

Resolver los sistemas siguientes.

a) $x_1' = -3x_1 + 6x_2$

$x_2' = x_1 - 3x_2$ con $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = -1$

b) $x_1' = x_1 + 8x_2$

$x_2' = -2x_1 - 7x_2$

c) $x_1' = -12x_1 - 7x_2$

$x_2' = 19x_1 + 11x_2$

d) $x_1' = x_2 + t$

$x_2' = -x_1 + t^2$ con $x_1(0) = 2$ y $x_2(0) = -1$

e) $x_1' = -3x_1 - 4x_2 + 8e^t$

$x_2' = x_1 + x_2$

CAPITULO V

Series de Fourier

1. Introducción

El propósito del presente capítulo se divide en dos partes la primera trata del estudio de las **Series de Fourier**, la segunda es una aplicación de estas series, usando como modelo la ecuacón de onda.

Para la primera parte se verá bajo que condiciones una función $f(t)$ definida en toda t real y de período 2π puede representarse mediante una serie del tipo:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt\right] \qquad (1)$$

donde los coeficientes a_0, $a_1, \ldots,$ b_1, $b_2, \ldots,$ son constantes a determinar. Consecuentemente se extenderá la expresión anterior a funciones de cualquier período. Si una función $f(t)$ puede expresarse como (1) se dice que $f(t)$ tiene una representación en **Series de Fourier**.

Para la segunda se hará la deducción de la ecuación de onda y la solución de ésta por el método de variables separables.

2. Funciones Periódicas y sus Propiedades

Una función $f(t)$ definida para todo t real se dice ser **periódica** si existe un número T real positivo tal que

$$f(t) = f(t+T)$$

para todo t . El número T se denomina periodo de la función f y se dice que la función es T-periódica, ver figura 1

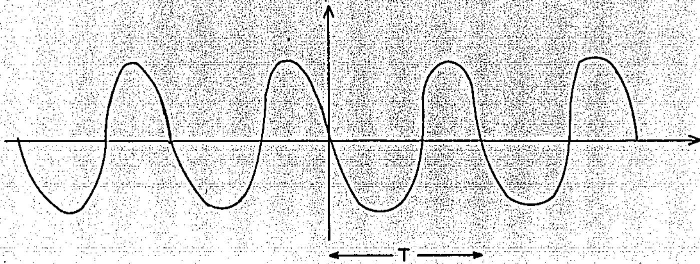

FIGURA 1

Ejemplo 1. Las funciones: sen t, cos t, son 2π-periódicas ya que:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t \cos 2\pi + \text{sen } 2\pi \cos t = \text{sen } t$$
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \cos 2\pi - \text{sen } t \text{ sen } 2\pi = \cos t$$

donde sen $2\pi = 0$ y $\cos 2\pi = 1$.

Algunas propiedades importantes de las funciones periódicas se presentan a continuación.

Propiedad 1. Sea la función $f(t)$ T-periódica entonces es nT-periódica, con n entero.

Prueba: Como:

$$f(t) = f(t+ \text{T}) = f([t+\text{T}]+ \text{T}) = \ldots = f(t+ n\text{T}) \; z$$

Ejemplo 2. Como sen t es 2π-periódica entonces por la propiedad anterior también es 2πn-periódica.

Propiedad 2. Sea la función $f(t)$ T-periódica y sea la función $g(t) = f(kt)$, con $k > 0$ entonces la función $g(t)$ es $\frac{\text{T}}{k}$-periódica.

Prueba: Considérese:

$$g\left(t + \frac{T}{k}\right) = f\left(k\left[t + \frac{T}{k}\right]\right) = f(kt+T)$$

como f es T-periódica se tiene que: $f(kt+T) = f(kt)$, luego:

$$g(t + \frac{T}{k}) = g(t) \quad z$$

Ejemplo 3. Como cos t es 2π-periódica entonces la función cos $5t$ es $\frac{2\pi}{5}$-periódica, y en general cos kt es $\frac{2\pi}{k}$ -periódica, con $k \neq 0$.

Propiedad 3. Sean las funciones f y g T-periódicas y sean λ_1 y λ_2 números reales entonces $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ es T-periódica. De aquí se ssigue que el conjunto de las funciones T-periódicas forman un espacio vectorial.

Prueba:

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(t + T) = \lambda_1 f(t + T) + \lambda_2 g(t + T) = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t).$$

$$\therefore \quad (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(t + T) = (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(t)$$

Por ejemplo las funciones sen t, sen $2t$, ..., sen nt y cos t, cos $2t$, ..., cos nt, son 2πn-periódicas, entonces:

$$a_1\cos t+a_2\cos 2t+\ldots+a_n\cos nt+b_1\text{sen}\, t+b_2\text{sen}\, 2t+\ldots+b_n\text{sen}\ nt.$$

es 2πn-periódica, con a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n, constantes reales.

3. Fórmulas de Euler

Sea la función $f(t)$ definida para toda t real y 2π-periódica y suponga que puede representarse en una Serie de Fourier de la forma (1), entonces para determinar los coeficientes: $a_0, \ldots,$ $b_1, \ldots,$ ..., se toma en cuenta lo siguiente:

Teorema 1

Sean las funciones cos nt y sen mt definidas para toda t real 2π-periódicas, entonces para el intervalo $[-\pi, \pi]$, con n,m enteros se cumple que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \begin{cases} 0 \text{ , si } m \neq n. \\ \pi \text{ , si } m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \operatorname{sen} mt \, dt = 0 \text{ , para toda n y m.}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} mt \, dt = \begin{cases} 0 \text{ , si } m \neq n. \\ \pi \text{ , si } m = n. \end{cases}$$

Nota. A las fórmulas anteriores se les conocen como relaciones de ortogonalidad, el uso de la palabra ortogonal es una generalización de la que se hace en vectores. Aquí el producto escalar ordinario es sustituido por una integral, es decir, se dice que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales en el intervalo $[-T,T]$ si:

$$\int_{-T}^{T} f \, g \, dt = 0$$

Prueba (del Teorema 1): Usando las identidades:

$$\cos nt \cos mt = \frac{1}{2} \Big[\cos(n+m)t - \cos(n-m)t \Big]$$

$$\cos nt \operatorname{sen} mt = \frac{1}{2} \Big[\operatorname{sen}(n+m)t - \operatorname{sen}(n-m)t \Big]$$

$$\operatorname{sen} nt \operatorname{sen} mt = \frac{1}{2} \Big[\cos(n-m)t - \cos(n+m)t \Big]$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

se tiene que si $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t\, dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n+m)}{n+m}\,t\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n-m)}{n-m}\,t\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

si $n = m$ se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,(2P) + \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2nt}{2n}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt = \begin{cases} 0 \text{ , si } n \neq m. \\ \pi \text{ , si } n = m. \end{cases}$$

si $n = m$, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \operatorname{sen} mt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \operatorname{sen} nt\, dt = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}^2 nt}{n}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

si $n \neq m$, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \operatorname{sen} mt\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)t\, dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)t\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos(n+m)}{n+m}t\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\cos(n-m)}{n-m}t\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \ \text{sen}\ mt\ dt = 0, \text{ para toda n y m entero.}$$

Si n = m, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\ nt\ \text{sen}\ mt\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 nt\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nt\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{2}\frac{\text{sen}\ 2nt}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Si $n \neq m$, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\ nt\ \text{sen}\ mt\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t\ dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\text{sen}(n-m)}{n-m}t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\text{sen}(n+m)}{n+m}t\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\ nt\ \text{sen}\ mt\ dt = \begin{cases} 0 & \text{, si } n \neq m. \\ \pi & \text{, si } n = m. \end{cases} \qquad \zeta$$

Para determinar los coeficientes: a_0, a_1, ..., b_1, ..., de la expresión (1) se utilizará el resultado del Teorema 1 y se considerará como válido que la integración puede realizarse término a término, aunque esto no sea tan trivial, pués demostrarlo sale de los objetivos de este capítulo.

Dada la forma (1) e integrándola en $[-\pi, \pi]$, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{a}{2}o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) dt =$$

$$= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt\, dt = a_0\pi.$$

Ya que por el teorema 1 se tiene que: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt\, dt = 0$, por tanto:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por la función cos mt e integrando en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt \cos mt + b_n \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} mt) dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nt \cos mt \, dt = a_n \pi$$

por tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \qquad (3)$$

Multiplicando (1) por sen mt e integrando en $[-\pi, \pi]$ se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{ sen } mt \, dt =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mt \, dt + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt \text{ sen } mt + b_n \text{sen } nt \text{ sen } mt) dt =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mt \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \text{ sen } mt \, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nt \text{ sen } mt \, dt =$$

$$= \pi \, b_n$$

por tanto:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{ sen } nt \, dt \qquad (4)$$

A las fórmulas (2), (3) y (4) se denominan fórmulas de Euler.

Ejemplo 4. Suponer que la función $f(t)$ definida en $[-\pi, \pi]$ puede representarse en una serie de Fourier y

$$f(t) = \begin{cases} -t & ,\text{si } -\pi \le t < 0. \\ t & ,\text{si } \ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

determinar los coeficientes: a_0, a_1, ..., b_1, ..., .

Solución: La función propuesta es 2π-periodica, ver figura 2.

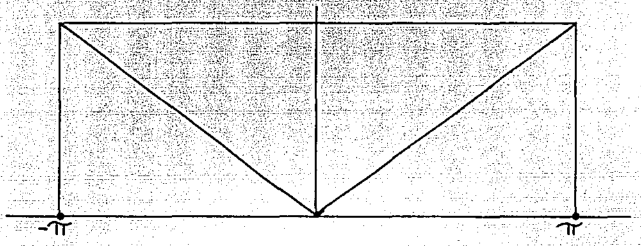

FIGURA 2.

Usando las fórmulas de Euler, se tiene que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} = \pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-t)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos nt\,dt$$

como:

$$\int t\cos nt\,dt = \frac{t}{n}\,\text{sen}\,nt - \frac{1}{n}\int \text{sen}\,nt\,dt = \frac{t}{n}\,\text{sen}\,nt + \frac{1}{n}2\cos nt$$

$$u = t \qquad dv = \cos nt\,dt$$

$$du = dt \qquad v = \frac{1}{n}\,\text{sen}\,nt$$

se tiene que:

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\frac{t}{n}\,\text{sen}\,nt\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi^2}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{t}{\pi}\,\text{sen}\,nt\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n\pi^2}\cos nt\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, \text{ si n es par.} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} \text{ si n es impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)\text{sen}\,nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\,\text{sen}\,nt\,dt$$

pero:

$$\int t\,\text{sen}\,nt\,dt = -\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n}\int \cos nt\,dt = -\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\text{sen}\,nt$$

$$u = t \qquad dv = \text{sen}\,nt\,dt$$

$$du = dt. \qquad v = -(1/n)\cos nt$$

entonces:

$$b_n = -\frac{t}{\pi n}\cos nt\Big|_{0}^{-\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\text{sen}\,nt\Big|_{0}^{-\pi} - \frac{t}{\pi n}\cos nt\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\text{sen}\,nt\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} = 0$$

por tanto la Serie de Fourier correspondiente a la función propuesta es:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \frac{1}{7^2}\cos 7t + \ldots\right).$$

4. Funciones de Periodo 2T

Considérese la función $f(t)$ de periodo 2T. Si existe su representación en Serie de Fourier, ¿Que forma tendrá?. Para contestar esto hágase el siguiente cambio de variable: $t = \frac{T}{\pi}\alpha$. Entonces la función $\phi(\alpha) = f(\frac{T}{\pi}\alpha)$ es de periodo 2π, y por tanto su representación en la forma (1) es:

$$\phi(\alpha) = \frac{a}{2}o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \operatorname{sen} n\alpha)$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}\alpha\right) \cos n\alpha \, d\alpha$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}\alpha\right) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha$$

regresando a la variable t, es decir, $\alpha = \frac{\pi}{T}t$, se tiene que:

$$f(t) = \frac{a_{wo}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{T} t + b_n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{T} t\right) \qquad (5)$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t) \cos\frac{\pi n}{T} t \, dt \qquad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t) \operatorname{sen}\frac{\pi n}{T} t \, dt \qquad (7)$$

Nota. Para obtener la fórmula (6), se utiliza el teorema de sustitución de Integrales, es decir:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}\alpha\right) \cos n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(t) \cos\frac{\pi n}{T} t \left(\frac{\pi}{T}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t) \cos\frac{\pi n}{T} t \, dt$$

análogamente para la obtención de la fórmula (7).

Teorema Básico

Sean las funciones f y f′ seccionalmente continuas y f de periodo 2T entonces si t es un punto de continuidad en el intervalo [-T, T] se cumple que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{T}\,t + b_n\operatorname{sen}\frac{\pi n}{T}\,t\right)$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{\pi n}{T}\,t\,dt. \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{T}\,t\,dt.$$

Si t es un punto de discontinuidad, se tiene que:

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

donde $f(t^+)$ y $f(t^-)$ son los límites de $f(t)$ por la derecha e izquierda respectivamente de t.

Ejemplo 5. Determinar la serie de Fourier de la función periódica $f(t) = (-1)^n k$, con $n < t < n+1$, n entero y $k > 0$.

Solución: Graficando la función propuesta, ver figura 3, se tiene que $2T = 2 \Rightarrow T = 1$, así que:

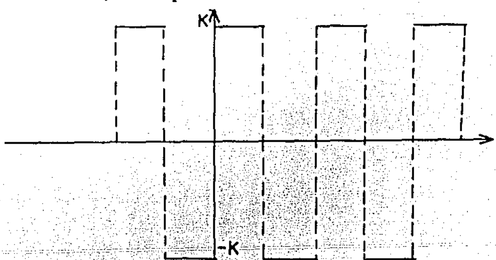

FIGURA 3

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi\ t\ dt = -k\int_{-1}^{0} \cos n\pi t\ dt + k\int_{0}^{1} \cos n\pi t\ dt$$

si n = 0, se tiene que: $a_0 = 0$, si $n \neq 0$, entonces:

$$a_n = \frac{-k}{n\pi} \text{ sen } n\pi t \Big|_{-1}^{0} + \frac{k}{n\pi} \text{ sen } n\pi t \Big|_{0}^{1} = 0.$$

Como $\cos(-t) = \cos t$, se tiene que:

$$b_n = -k\int_{-1}^{0} \text{sen } n\pi t\ dt + k\int_{0}^{1} \text{sen } n\pi t\ dt =$$

$$= \frac{k}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{-1}^{0} - \frac{k}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{0}^{1} = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4k}{n\pi}, & \text{si n es impar.} \\ 0, & \text{si n es par.} \end{cases}$$

Por tanto donde $f(t)$ es continua, la Serie de Fourier correspondiente es:

$$f(t) = \frac{4k}{\pi}\left[\text{sen}\pi t + \frac{1}{3}\text{ sen}3\pi t + \frac{1}{5}\text{ sen}5\pi t + \ldots\right].$$

En tanto que para las discontinuidades de $f(t)$, es decir para $t = n$, se tiene por el Teorema Básico que, si n es par:

$$f(n) = \frac{f(n^+)+f(n^-)}{2} = \frac{k - k}{2} = 0.$$

Si n es impar:

$$f(n) = \frac{f(n^+)+f(n^-)}{2} = \frac{-k + k}{2} = 0.$$

En la figura 4, se representa $f(t)$ en el intervalo [-1, 1] y las tres primeras sumas parciales.

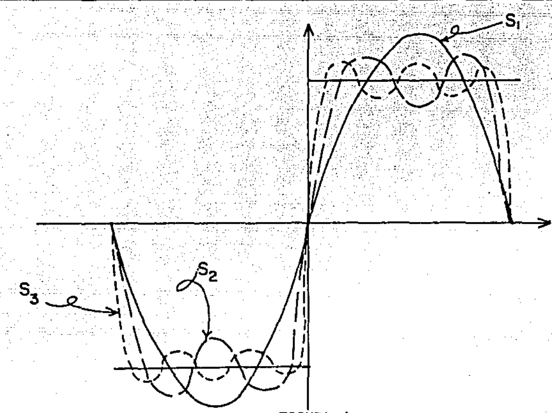

FIGURA 4.

Ejemplo 6. Determinar la Serie de Fourier de la función $f(t) = t^2$ en $-\pi \le t \le \pi$.

Solución: De la figura $N_0 5$, se tiene que $2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$, por tanto se tiene que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt\ dt = \frac{1}{\pi n}\ t^2 \text{sen } nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} t \text{ sen } nt\ dt =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & \text{para n par.} \\ -\dfrac{4}{n^2}, & \text{para n impar.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \text{sen } nt\ dt = -\frac{1}{\pi n}\ t^2 \cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt\ dt =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\ t\,\mathrm{sen}\ nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\ nt\ dt\ = 0$$

por tanto:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos\ t - \frac{1}{2^2}\ \cos\ 2t + \frac{1}{3^2}\cos 3t - \ldots\right].$$

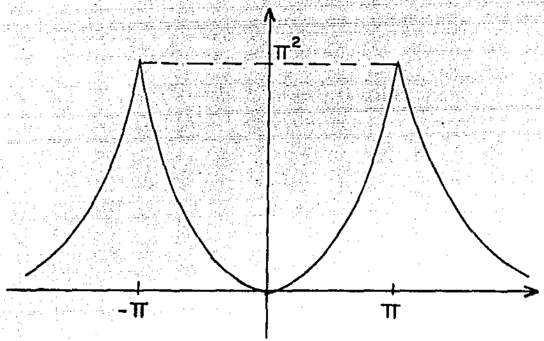

FIGURA 5.

Ejemplo 7. Determinar la Serie de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , \ \text{si}\ -\pi \le t \le 0. \\ t\ , \ \text{si}\ \ 0 < t \le \pi. \end{cases}$$

Solución: De la figura 6, se tiene que la función propuesta es 2π -periódica, por tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\ dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\ dt = \frac{1}{\pi n}\ t\,\text{sen}\ nt\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \text{sen}\ nt\ dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nt\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{si n es impar.} \\ 0\ , & \text{si n es par.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\text{sen}\ nt\ dt = -\frac{1}{\pi n}\ t\cos nt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\ dt =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi = \begin{cases} 1/n\ , & \text{si n es par.} \\ -1/n\ , & \text{si n es impar.} \end{cases}$$

por tanto:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos t + \frac{1}{3}\ 2\cos 3t + \frac{1}{5}\ 2\cos 5t + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\text{sen}\ t - \frac{1}{2}\ \text{sen}\ 2t + \frac{1}{3}\ \text{sen}\ 3t - \ldots\right].$$

esto es en los puntos donde $f(t)$ es continua. Se deja como ejercicio determinar $f(t)$ si t es un punto de discontinuidad.

Ejercicios

Determinar la Serie de Fourier de las siguientes funciones.

a) $f(t) = t$, con $|t| < \pi$.

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < t < 0. \\ 1, & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} t\ , & \text{si } \pi < t < 0. \\ t-\pi, & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} -1\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t\ , & \text{si } -1 < t < 1 \\ 1\ , & \text{si } 1 < t < \pi. \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} \pi+t, & \text{si} -\pi < t < 0. \\ \pi-t, & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases}$

f) $f(t) = e^t$, si $|t| < 1$.

g) $f(t) = \text{sen}^2 t$, si $-\pi \leq t \leq \pi$.

5. Funciones Pares e Impares

Una función $f(t)$, 2T-periódica es **par** si para toda t que esté en el intervalo [-T, T] se cumple que:

$$f(t) = f(-t)$$

ver figura 7, una función $f(t)$ 2T-periódica es una función **impar** si para toda t en el intervalo [-T, T] se cumple que:

$$f(t) = -f(-t)$$

ver figura 8. Por ejemplo la función cos t es una función par en en el intervalo $[-\pi, \pi]$, ya que cos t = cos($-t$), en tanto que la función sen t es impar en $[-\pi, \pi]$, pués sen($-t$) = $-$sen t.

Propiedades de las funciones Pares e Impares

Propiedad 1. El conjunto formado por todas las funciones pares en un mismo dominio forman un espacio vectorial. Análogamente para el conjunto formado por todas las funciones impares en un mismo dominio.

Propiedad 2. Sea la función $f(t)$ par y 2T-periódica entonces:

$$\int_{-T}^{T} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{T} f(t)\, dt$$

Prueba:

$$\int_{-T}^{T} f(t)\, dt = \int_{-T}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt = -\int_{0}^{-T} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt =$$

$$= -\int_{0}^{T} f(-t)(-1)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt = 2\int_{0}^{T} f(t)dt \quad z$$

Nota. En la prueba anterior se usó el hecho de que $f(t)$ es par y el teorema: si $k > 0$ entonces:

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{t}{k}\right)\, dt.$$

Propiedad 3. Sea la función $f(t)$ impar y 2T-periódica entonces:

$$\int_{-T}^{T} f(t)\, dt = 0$$

Prueba:

$$\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \int_{-T}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt = -\int_{0}^{-T} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt =$$

$$=-\int_{0}^{T} f(-t)(-1)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt = -\int_{0}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt = 0 \quad z$$

Propiedad 4. Sea la función $f(t)$ impar y la función $g(t)$ par, ambas 2T-periódicas y definidas en el intervalo [-T, T] entonces el producto $(f)(g)$ es impar.

Propiedad 5. Sean las funciones $f(t)$ impar y $g(t)$ impar, ambas 2T -periódicas y definidas en [-T, T] entonces $(f)(g)$ es par.

Propiedad 6. Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ pares, ambas 2T-periódicas y definidas en [-T, T] entonces $(f)(g)$ es par.

Nota. Las demostraciones de las propiedades 4, 5 y 6 se dejan como ejercicio.

Ejemplo 8. Como una aplicación de las propiedades anteriores, considérese la función $f(t)$ 2T-periódica definida en [-T, T] tal que f y f' son seccionalmente continuas en dicho intervalo entonces por el Teorema Básico se tiene que:

i) Si $f(t)$ es impar, el producto $f(t)\cos nt$ es impar y el producto $f(t)\operatorname{sen} nt$ es par, por tanto:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = 0, \quad a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos nt\ dt = 0 \quad \text{y}$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\operatorname{sen} nt\ dt.$$

ii) Si $f(t)$ es par, se tiene que el producto $f(t)$sen nt es una función impar y el producto $f(t)$cos nt es una función par, por tanto:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \ , \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nt \ dt \quad y \quad b_n = 0.$$

De lo anterior se concluye que la Serie de Fourier de una función impar contiene únicamente términos senos, en tanto que la Serie de Fourier de una función par contiene únicamente términos cosenos.

Ejemplo 9. Determinar la Serie de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } -\pi < t < 0. \\ t, & \text{si } \ 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Solución: Como $f(t) = f(-t)$, la función propuesta es par, por tanto:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \ dt = \frac{t^2}{\pi}\Big|_0^\pi = \pi \ , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt \ dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{si n es impar.} \\ 0 & , \text{si n es par.} \end{cases}$$

$$b_n = 0 \ , \ \text{luego:}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \ldots + \ldots\right].$$

Ejercicios

1. De las siguientes funciones / Cuáles son; Pares, Impares, ni Pares, ni Impares?.

a) $t + 1$ b) t^2-6 c) $-t^5$ d) t^{-1}.
e) sen$t$ cos$3t$. f) $t + |t|$. g) tg $2t$. h) cos$2t$.

2. Determinar la Serie de Fourier en términos de senos, de la función $f(t) = -\pi$, definida en el intervalo $0 < t < \pi$.

3. Determinar la Serie de Fourier en términos de cosenos de la función $f(t) = -\pi$, definida en $0 < t < \pi$.

4. Determinar la Serie de Fourier en términos de senos de la función $f(t) = 1$, definida en $0 < t < \pi$.

5. Determinar la Serie de Fourier en términos de cosenos de la función $f(t) = 1$, definida en $0 < t < \pi$.

5.1. Extensiones Pares e Impares

En varios problemas prácticos de la Física o bién de Ingeniería surge la necedidad de aplicar las series de Fourier a funciones definidas en algún intervalo finito, por ejemplo $[0, T]$ para este propósito se usará el teorema Básico y se hará una extensión de la función ya sea par o impar, dando como resultado una función de periodo $2T$.

Extensión Par: Sea la función $f(t)$ definida en $[0, T]$, si por contrucción apliamos el dominio al intervalo $[-T, T]$, con la condición $f(t) = f(-t)$, resulta una función par. Su extensión se obtendrá al definir a f en todo $\mathbb{R}$ con periodo $2T$.

Extensión Impar: Sea la función $f(t)$ definida en $[0, T]$, si por contrucción apliamos el dominio al intervalo $[-T, T]$, con la condición $f(t) = -f(-t)$, resulta una función impar. Su extensión se obtendrá al definir a f en todo $\mathbb{R}$ con periodo $2T$.

Ejemplo 10. Sea la función $f(t) = t$ en $[0, T]$, dar su extensión periódica, su extensión par y su extensión impar.

Solución: En la figura 9 se representa a la función propuesta $f(t)$. En la figura 10 se representa la Extensión de la función $f(t)$ de periodo T. En la figura 11 se representa la extensión par de la función $f(t)$ cuyo periodo es 2T. En la figura 12 se representa la Extensión Impar de la función $f(t)$ con periodo 2T.

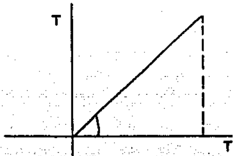

FIGURA N_O9.

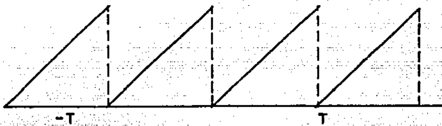

FIGURA N_O10.

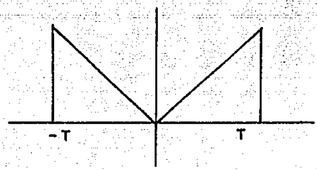

FIGURA N_O11.

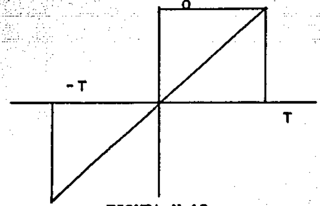

FIGURA N_O12.

Ejemplo 11. Sea la función:

$$f(t) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi t}{T}, & \text{si } 0 \le t \le \dfrac{T}{2}. \\ 0, & \text{si } \dfrac{T}{2} < t \le T. \end{cases}$$

determinar la Serie de Fourier de tal manera que aparezcan única - mente términos cosenos.

Solución: En la figura 13 se representa a la Extensión Par de la función $f(t)$, como esta función satisface las hipótesis del Teorema Básico se tiene que:

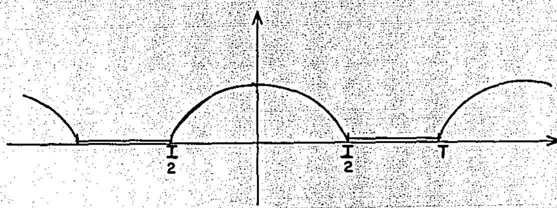

FIGURA 13.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \cos\frac{\pi t}{T}\ dt = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \cos\frac{\pi n}{T}\ dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \cos\frac{\pi t}{T}\ \cos\frac{\pi n}{T}\ t\ dt$$

haciendo $\frac{\pi t}{T} = \alpha$, se tiene que:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\ \cos n\alpha\ d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} [\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha]d\alpha$$

de aquí se tiene que:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos 2\alpha + 1)d\alpha = \frac{1}{\pi}\ [(1/2)\operatorname{sen}2\alpha + \alpha]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(n-1)\alpha}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , \text{ si n es impar mayor que 1.} \\ \dfrac{-2(-1)^{n-2}}{\pi(n^2-1)} \quad , \text{ si n es par.} \end{cases}$$

$b_n=0$, por tanto:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi t}{T} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2\pi n t}{T} =$$

$$= \begin{cases} \cos\dfrac{\pi t}{T} \ , \text{ si } 0 \le t < \dfrac{T}{2}. \\ 0 \quad , \text{ si } \dfrac{T}{2} < t \le T. \end{cases}$$

Ejemplo 12. Sea la función $f(t)= \begin{cases} t, \text{si} 0 \le t \le \dfrac{T}{2}. \\ T-t, \text{si } \dfrac{T}{2} < t \le T \end{cases}$, dar su representación en Serie de Fourier en términos de senos.

Solución: En la figura 14 se representa la expansión impar de la función $f(t)$ con periodo 2T, como esta función satisface las hipótesis del Teorema Básico, se tiene que:

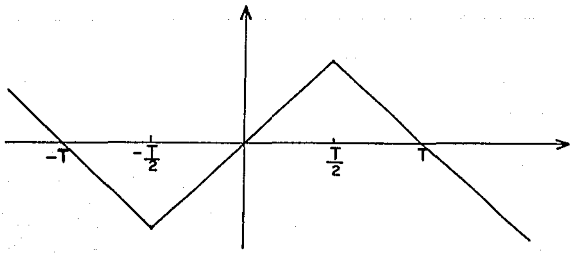

FIGURA NO 14.

$$a_o = 0, \text{ para } n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \text{sen}\ \frac{\pi n t}{T}dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} t\ \text{sen}\ \frac{\pi n}{T}t\ dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(T-t)\text{sen}\ \frac{\pi n}{T}t\ dt$$

haciendo $\frac{\pi t}{T} = \alpha$, se tiene que:

$$b_n = \frac{2T}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\alpha \text{sen}\ n\alpha\ d\alpha + \frac{2T}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-\alpha)\text{sen}\ n\alpha\ d\alpha =$$

$$= \frac{2T}{\pi^2}\left\{\frac{\alpha\ \cos\ n\alpha}{n}\right\}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{2T}{\pi^2 n}\int_0^{\pi/2}\cos\ n\alpha\ d\alpha + \frac{2T}{\pi^2}\left\{-\frac{(\pi-\alpha)\cos\ n\alpha}{n}\right\}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} +$$

$$- \frac{2T}{\pi^2 n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\ n\alpha\ d\alpha = \frac{4T}{\pi^2 n^2}\ \text{sen}\ \frac{\pi n}{2}$$

por tanto:

$$\frac{4T}{\pi^2}\left[\text{sen}\ \frac{\pi}{T}\ t - \frac{1}{3^2}\ \text{sen}\ \frac{3\pi t}{T} + \frac{1}{5^2}\ \text{sen}\ \frac{5\pi t}{T} - \ldots\right] =$$

$$= \begin{cases} t\ , & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}. \\ T - t, & \text{si } \frac{T}{2} < t \le T. \end{cases}$$

Ejercicios

11. Dar la representación en Series de Fourier de las siguientes funciones de tal manera que den únicamente términos cosenos.

 a) $f(t) = \text{sen}\ at$, para $0 \le t \le \pi$, tal que a no es un entero.

 b) $f(t) = \begin{cases} 1, \text{si } 0 \le t \le h. \\ 0, \text{si} 2h < t \le \pi. \end{cases}$

$$c)\ f(t) = \begin{cases} 1-t/2h, & \text{si } 0 \le t \le 2h. \\ 0, & \text{si } 2h < t \le \pi. \end{cases}$$

2. Dar la representación en Series de Fourier de las siguientes funciones, de tal manera que den únicamente términos senos.

$$a)\ f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{\pi t}{T}, & \text{si } 0 \le t < \frac{T}{2}. \\ 0, & \text{si } \frac{T}{2} < t \le T. \end{cases}$$

$$b)\ f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi}{T}\, t, & \text{si } 0 \le t < T. \\ -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} < t \le T. \end{cases}$$

6. Ecuación de Onda

Para deducir esta ecuación considérese como modelo la vibración de una cuerda, cuya longitud es l sujeta fijamente en sus extremos, ver figura 1. Supóngase que la cuerda se estira verticalmente una distancia pequeña en relación con su longitud l, dejándola libre en el tiempo $t = 0$, provocando así un movimiento vibratorio.

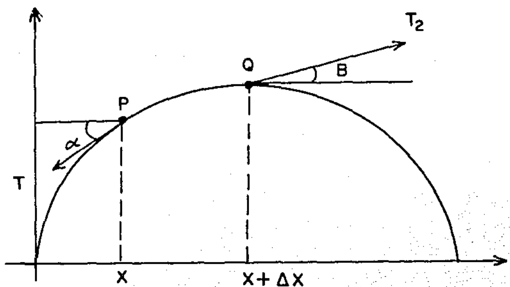

FIGURA 15

El problema consiste en determinar el desplazamiento $u(t, x)$ en cualquier tiempo t. Para obtener la ecuación correspondiente considérese:

i) La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante.
ii) La tensión T de la cuerda es tan grande que se desprecia la gravedad.
iii) El movimiento vibratorio de la cuerda es sobre un plano vertical, esto es, el movimiento de cada partícula de la cuerda es únicamente vertical.

Considerando que no hay movimiento en la dirección horizontal (ver figura 16), se tiene que:

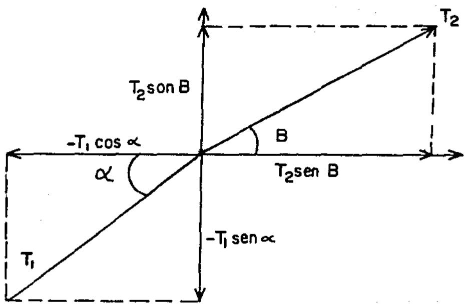

FIGURA No. 16

$$T_1\cos\,\alpha = T_2\cos\,\beta = T. \tag{8}$$

con T constante. Considerando un segmento de la cuerda de longitud Δx, ρ la masa por unidad de longitud entonces por la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$T_2\text{sen}\,\beta - T_1\text{sen}\,\alpha = \rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9}$$

dividiendo la ecuación (9) con (8), se tiene que:

$$\frac{T_2 \text{ sen } \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \text{ sen } \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho\ \Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

resultando:

$$\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

pero como $\text{tg } \alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$ y $\text{tg } \beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$, se tiene que:

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right\} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

haciendo en la última expresión $\Delta x \longrightarrow 0$, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ tal que, } c^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{10}$$

donde:

$$u(t,\ 0) = u(t,\ l) = 0 \text{ , para toda } t. \tag{11}$$

$$u(0,\ x) = f(x) \text{ , con } 0 \le x \le l.$$

(12).

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

a la ecuación (10) se le denomina ecuación **de Onda** en una dimensión , a la ecuación (11) se le denomina **condiciones de frontera** de la ecuación (10) y a las ecuaciones (12) se les denomina **condiciones iniciales** de la ecuación (10). Para resolver la ecuación (10) se verá el método de separación de variables, que se expone a continuación.

7. Separación de Variables

Considérese las ecuaciones (10), (11) y (12) el método de separación de variables consiste en suponer que una solución de la ecuación diferencial (10) pueda expresarse como

$$u(t,\ x) = G(t)\ F(x)\ . \tag{13}$$

donde la función G depende únicamente de la variable t y la función F de x. Sustituyendo (13) en (10) se tiene que:

$$G''\ F = c^2 F''\ G$$

o bién:

$$\frac{G''}{c^2 G} = \frac{F''}{F}. \tag{14}$$

donde el primer miembro de (18) depende únicamente de la variable t y el segundo miembro depende únicamente de la variable x. Fijando, por ejemplo, la variable x y variando t (o alrevés), se obtiene que ambos miembros de (18) se mantienen constantes, es decir:

$$\frac{G''}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = \lambda \tag{15}$$

donde λ es una constante, de (15) se tiene que:

$$\begin{aligned} F'' - \lambda F &= 0\ . \\ G'' - c^2 \lambda G &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

para determinar las soluciones F y G de (16) tal que $u = F \cdot G$ y

$$u(0,\ t) = F(0) \cdot G(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(l,\ t) = F(l) \cdot G(t) = 0$$

para toda t. Se cumple que si $G \equiv 0$ entonces $u \equiv 0$, la cual no es de interés. Por tanto suponemos que $G \not\equiv 0$ lo que implica

$$F(0) = 0 \quad \text{o bién} \quad F(l) = 0 \tag{17}$$

para $\lambda = 0$ la solución general de la primera ecuación diferencial de (16) es $F = ax + b$ y entonces $a = b = 0$ y entonces $G \equiv 0$ y no es de interés por que daría $u \equiv 0$. Si λ es positivo, es decir si $\lambda = \mu^2$ la solución general de la primera ecuación de (16) es

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

y de (17) se tiene que $G \equiv 0$ y tampoco nos interesa. Por tanto si $\lambda < 0$, es decir si $\lambda = -p^2$ entonces la primera ecuación de (16) tiene por solución

$$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px$$

y por (17) se tiene que $F(0) = A = 0$ y $F(l) = B \operatorname{sen} pl = 0$ de aquí $B \neq 0$, de otra forma nos daría $F \equiv 0$. Entonces se tiene que

$$pl = n\pi \qquad \text{o} \qquad p = \frac{n\pi}{l}$$

si $B = 1$ se tiene $F(x) = F_n(x)$ es decir

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

que satisface (17). Para la segunda ecuación diferencial de (16) se tiene que

$$G'' - \lambda^2 G = 0 \quad \text{donde} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

por tanto la solución general es

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^{*} \operatorname{sen} \lambda_n t$$

entonces las funciones $u_n(t, x) = F_n(x) \cdot G_n(t)$ pueden escribirse

$$u_n(t,\ x) = \left[B_n \cos \lambda_n t + B_n^{\bullet} \text{ sen } \lambda_n t\right] \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x \qquad (18)$$

con n = 1, 2, ... son soluciones de (1) y satisfacen las condiciones de frontera pero no en general las condiciones iniciales, así que se propone la solución:

$$u(t,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^{\bullet} \text{ sen } \lambda_n t) \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x \qquad (19)$$

la cual satisface las condiciones iniciales y de frontera. Si t es cero en (19) se tiene que

$$u(0,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi}{l} x = f(x) \ . \qquad (20)$$

si en (20) suponemos que f y f' son seccionalmente continuas, puede aplicarse el teorema básico de Fourier, teniéndose:

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x \ dx \ , \text{ con } n = 1,\ 2,\ \ldots \ .$$

calculando la derivada parcial con respecto a t en (19) se tiene que

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\bullet} \lambda_n \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x = g(x)$$

y para este caso se tiene que

$$B_n^{\bullet} = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{l} \ dx$$

con n = 1, 2, ... ,.

Ejemplo 13. Determinar la función $u(t, x)$, donde la longitud de la cuerda es π, $c^2= 1$, la velocidad inicial es cero y la distor - sión inicial es $f(x) = x(\pi-x)$.

Solución:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi-x) \text{ sen } nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-x(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi-2x)\cos nx \, dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2\pi^2}{n}\cos n\pi + \frac{(\pi-2x)}{n^2} \text{ sen } n\pi \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi}\right\} =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n} .$$

por tanto:

$$u(t,x) = 2\pi\left[\cos t \text{ sen} x - \frac{1}{2}\cos 2t \text{ sen} 2t + \frac{1}{3}\cos 3t \text{ sen} 3t - \ldots\right].$$

Ejercicios

Determinar $u(t,x)$ que satisfaga la ecuación (10) tal que $l = \pi$ $c^2= \frac{T}{\rho}$ = la velocidad inicial cero y la deflexión inicial:

a) .01 sen x *b*) k sen 2x *c*) k (sen x + sen 3x)

BIBLIOGRAFIA.

Apostol, Tom M. 1973. Calculus. Reverté.

Bartle, Robert.G. 1976. Introducción al Análisis Matemático. Limusa.

Bentley, Donald L. Cooke, Kenneth, H. 1973. Linear Algebra with Differential Equations. Holt, Rinehart and winston, INC.

Boyce, William E. Diprima, Richard. 1973. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Limusa.

Carrier, George F. Pearson, Carl E. 1976. Partial Differential Equations. Academic Press.

Carrillo Calvet H. 1975. Notas de Ecuaciones Diferenciales. U. N. A. M

Coddington, Earl A. 1968. Introducciónа las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. C.E.C.S.A.

Churchil, Rivel V, Brown, James W. 1970. Fourier Series and Boundary Value Problems. International Student Eddition.

Derrik, William R, Grossman, Stanley. 1982. Elementary Differential Equations whit Applications. Addison-Wesley.

Elsgoltz, L. 1973. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Operacional. Mir, MOSCU.

Haberman, Richard. 1977. Mathematical Models. Prentice/Hall.

Kreider, Donald L, Kuller, Ostberg. 1973. Ecuaciones Diferenciales. Fondo Educativo Interamericano.

Kreyszig, Erwin. 1980. Introducción al Análisis lineal. John Wiley & Sons

Kreyszig, Erwin. 1979. Introductory Functional Analysis whit Applications. John Wiley & Sons

Kreyszig, Erwin. 1979. Advanced Enginnering Mathematics. John Wiley & Sons

Kiselio, A. M. Krasnov. G. Makarenco. 1970 . Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Mir, MOSCU.

Kuratowski. 1970. Introdución al Cálculo.Limusa.

Marsden, Jerrold E. 1974. Elementary Classical Analysis. Freeman.

Martin, Robert H Jr. 1983. Ordinary Differential Equations. International Student Edittion.

Rabenstein, A. L. 1966. Introduction to Ordinary Differential Equations. Academic Press International.

Ramírez, R. Takeuchi. 1980. Ecuaciones Diferenciales. Limusa.

Roberts, C. E. Jr. 1980. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Prentice/Hall.

Spiegel, Murray R. 1981. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Prentice/Hall.

Tierney, Jhon A. 1979. Differential Equations. Allin and Bacon.

Tolstov, G. P. 1980. Fourier Series. Dover.

Trench, William F. 1981. Advanced Calculus. Harper & Row.

Zill, Dennis G. 1982. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Iberoamericana.