

00384
4
2ej-



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES ESPECTRALES DE LAS MATRICES DE COXETER Y LAS MATRICES DE ADYACENCIA DE LAS ALGEBRAS HEREDITARIAS DE TIPO SALVAJE.

T E S I S

Que para obtener el Grado de

DOCTORA EN CIENCIAS
(Matemáticas)

p r e s e n t a

MARTHA TAKANE IMAY

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Asesor: DR. JOSE ANTONIO S. DE LA PEÑA

MEXICO, D. F.

FEBRERO, 1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE.

Introducción.....	I
0. Conos y transformaciones lineales.....	1
1. Propiedades espectrales de la matriz de adyacencia de una gráfica.....	19
3. La Cubierta de Galois de una gráfica. Propiedades fundamentales.....	31
4. La Cubierta de Galois de una gráfica. Propiedades espectrales.....	44
5. Álgebras hereditarias y ocultas.....	59
6. Cubiertas de Galois y representaciones de álgebras.....	78
7. Propiedades espectrales de las matrices de Coxeter. Propiedades fundamentales.....	87
8. Propiedades espectrales de las matrices de Coxeter. Clases espectrales y Cubiertas de Galois.....	103
9. La categoría $\text{mod}k[\tilde{\Delta}]$ de una k -álgebra hereditaria salvaje.....	130
Bibliografía.....	145

**PROPIEDADES ESPECTRALES DE LAS MATRICES DE COXETER
Y LAS MATRICES DE ADYACENCIA
DE LAS ALGEBRAS HEREDITARIAS DE TIPO SALVAJE**

MARTHA TAKANE IMAY

Sea k un campo algebraicamente cerrado y $\tilde{\Delta}$ una gráfica orientada, finita y conexa ($\tilde{\Delta}$ es un *carcaj*). Sea B un álgebra oculta del álgebra hereditaria $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$. Los B -módulos inescindibles pueden ser clasificados en tres tipos de acuerdo a su posición en el carcaj de Auslander-Reiten de B , y son: los B -módulos postproyectivos, regulares y preinjectivos.

Si Λ es de tipo de representación finita (ie. existen a lo más un número finito de Λ -módulos inescindibles (hasta isomorfía)), entonces cada B -módulo es postproyectivo y preinjectivo.

Si Λ es de tipo de representación manso (ie. los Λ -módulos se pueden clasificar en una lista finita de familias 1-parametrizadas), entonces existe una función lineal (llamada defecto) $\partial: K_0(B) \rightarrow \mathbf{Z}$ tal que un módulo inescindible $X \in \text{mod}B$ es postproyectivo (resp. preinjectivo, regular) si y sólo si $\partial(\underline{\dim} X) < 0$ (resp. $\partial(\underline{\dim} X) > 0$, $\partial(\underline{\dim} X) = 0$).

En los casos restantes, cuando Λ es de tipo de representación *salvaje*, obtuvimos en trabajo conjunto con José Antonio de la Peña, lo siguiente:

Existen dos funciones "lineales" $\partial^-, \partial^+: K_0(B) \rightarrow \mathbf{Z}$ tal que si $X \in \text{mod}B$ es inescindible:

X es postproyectivo sii $\partial^-(\underline{\dim} X) < 0$,

X es preinjectivo sii $\partial^+(\underline{\dim} X) < 0$,

Más aún, obtuvimos una descripción del comportamiento asintótico de los vectores $(\phi^m(\underline{\dim} X))_{m \in \mathbf{Z}}$, en el caso que $\tilde{\Delta}$ sea árbol, donde ϕ es la matriz de Coxeter de Λ :

Existen dos vectores con todas sus coordenadas positivas y^-, y^+ , tales que para cualquier módulo inescindible regular X

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-m}(\underline{\dim} X)}{\rho^m} = \lambda^- y^- \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi^m(\underline{\dim} X)}{\rho^m} = \lambda^+ y^+.$$

para algunos números $\lambda^-, \lambda^+ > 0$. Aquí ρ denota el radio espectral de ϕ . Ver [1].

Las propiedades espectrales de ϕ dan mucha información sobre el comportamiento de $\text{mod}B$, para seguir con el estudio de éstas utilizamos los métodos de tilteo y de cubiertas de Galois (importantes teoría-herramientas en la teoría de representaciones de álgebras) y la teoría de gráficas.

Primero estudiamos a $\tilde{\Delta}$ vista como gráfica (sin orientación) y las relaciones de sus propiedades espectrales con sus cubiertas de Galois, llegando a resultados muy interesantes (ver [2], trabajo con de la Peña):

Sea $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois de una gráfica finita, definida por la acción de un grupo G . Estudiamos el problema de la relación entre el radio espectral $\rho(\Delta)$ de Δ y el de $\tilde{\Delta}$. Demostramos que $\rho(\tilde{\Delta}) \leq \rho(\Delta) \leq \rho(\tilde{\Delta})^2$. Probamos que en el caso que G sea un grupo manejable, entonces $\rho(\tilde{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Siguiendo con el estudio de las propiedades espectrales de la matriz de Coxeter de B , demostramos utilizando teoría de tildeo y cubiertas de Galois que si $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{\Delta}'$ son carcajes con la misma gráfica subyacente (ie. $\Delta = \Delta'$), y si $\tilde{\Delta}'$ es un carcaj con orientación bipartita (o *fuentes - pozos*), entonces

$$\rho(\phi_{\tilde{\Delta}'}) \leq \rho(\phi_{\tilde{\Delta}}).$$

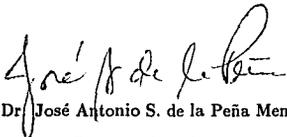
Existen ejemplos en que esta desigualdad es estricta.

Estos resultados además tienen aplicaciones a problemas relacionados con la homología del álgebra Λ . Por ejemplo (ver [3]), si Λ es una k -álgebra hereditaria de tipo de representación infinita (con carcaj $\tilde{\Delta}$). Definimos $g(\Delta) :=$ género de Δ . Entonces

$$\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_{\Lambda})} \leq \frac{|\Delta_0|}{2}.$$

Referencias

- [1] de la Peña, J.A. y Takane, M.: Spectral properties of Coxeter transformations and Applications. Arch. Math. Vol. 55, 120-134 (1990).
- [2] de la Peña, J.A. y Takane, M.: The Spectral Radius of the Galois covering of a finite graph. Linear Algebra Appl. 160, 175-188 (1992).
- [3] de la Peña, J.A. y Takane, M.: Some bounds for the spectral radius of a Coxeter transformation. Preprint, México (1991).
- [4] Takane, M.: Conos en teoría de Representaciones de Álgebras. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 7, Soc. Mat. Mexicana, 157-174 (1989).



Dr. José Antonio S. de la Peña Mena

Director de tesis.



M. en C. Martha Takane Imay

**SPECTRAL PROPERTIES OF THE COXETER MATRIX
AND THE ADJACENCY MATRIX
OF A WILD HEREDITARY ALGEBRA**

MARTHA TAKANE IMAY

Let k be an algebraically closed field and $\tilde{\Delta}$ be an oriented, finite and connected graph ($\tilde{\Delta}$ is a quiver). Let B be a concealed algebra of the hereditary algebra $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$. The B -indecomposable modules can be classified in three types according to their position in the Auslander-Reiten quiver of B : the postprojective, regular and preinjective B -modules.

If Λ is of finite representation type (ie. there exist at most a finite number of Λ -indecomposable modules up to isomorphism), then each B -module is postprojective and preinjective.

If Λ is of tame representation type (ie. the Λ -modules can be classify in a finite list of 1-parametrized families), then there exists a linear defect function $\partial: K_0(B) \rightarrow \mathbf{Z}$ such that an indecomposable module $X \in \text{mod} B$ is postprojective (resp. preinjective, regular) if and only if $\partial(\underline{\dim} X) < 0$ (resp. $\partial(\underline{\dim} X) > 0$, $\partial(\underline{\dim} X) = 0$).

In the other cases, when Λ is of *wild* representation type we obtained, in a joint work with José Antonio de la Peña, the following:

There exist linear functions $\partial^-, \partial^+: K_0(B) \rightarrow \mathbf{Z}$ such that if $X \in \text{mod} B$ is indecomposable:

X is postprojective iff $\partial^-(\underline{\dim} X) < 0$,

X is preinjective iff $\partial^+(\underline{\dim} X) < 0$,

X is regular iff $\partial^+(\underline{\dim} X) > 0$ y $\partial^-(\underline{\dim} X) > 0$.

Moreover, we obtained a description of the asymptotic behaviour of the vectors $(\phi^m(\underline{\dim} X))_{m \in \mathbf{Z}}$, when $\tilde{\Delta}$ is a tree, where ϕ is the Coxeter matrix of Λ :

There exist two vectors y^-, y^+ with all their coordinates positives, such that for every regular indecomposable module X

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{\phi^{-m}(\underline{\dim} X)}{\rho^m} = \lambda^- y^- \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi^m(\underline{\dim} X)}{\rho^m} = \lambda^+ y^+.$$

for some numbers $\lambda^-, \lambda^+ > 0$. Here ρ denotes the spectral radius of ϕ . See [1].

The spectral properties of ϕ give us a lot of information of the behaviour of $\text{mod} B$. For the study of these properties, we used the tilting techniques and the Galois covering theory (very important tools in the representation theory of algebras); and graph theory.

First we studied $\tilde{\Delta}$ as a graph (without orientation) and the relations of the spectra of the graph and its Galois coverings. We obtained interesting results (see [2], a joint work with de la Peña):

Let $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ be a Galois covering of a finite graph, defined by the action of a group G . We studied the problem of the relation between the spectral radius $\rho(\Delta)$ of Δ and that of $\tilde{\Delta}$. We showed that $\rho(\tilde{\Delta}) \leq \rho(\Delta) \leq \rho(\tilde{\Delta})^2$. We proved that when G is an amenable group, then $\rho(\tilde{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Following with the spectral properties of the Coxeter matrix of B , we showed using tilting theory and Galois coverings that if $\tilde{\Delta}$ and $\tilde{\Delta}'$ are quivers with the same underlying graph (ie. $\Delta = \Delta'$), and if $\tilde{\Delta}'$ is a quiver with bipartite orientation (of *sink - source*), then

$$\rho(\phi_{\tilde{\Delta}'}) \leq \rho(\phi_{\tilde{\Delta}}).$$

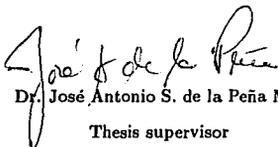
There exist examples where this inequality is strict.

Moreover, these results have applications to problems related with the homology of the algebra A . For example (see [3]), if A is an hereditary k -algebra of infinite representation type (with quiver $\tilde{\Delta}$). We defined $g(\Delta) :=$ genus of Δ . Then

$$\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_{\Delta})} \leq \frac{|\Delta_0|}{2}.$$

References

- [1] de la Peña, J.A. and Takane, M.: Spectral properties of Coxeter transformations and Applications. Arch. Math. Vol. 55, 120-134 (1990).
- [2] de la Peña, J.A. and Takane, M.: The Spectral Radius of the Galois covering of a finite graph. Linear Algebra Appl. 160, 175-188 (1992).
- [3] de la Peña, J.A. and Takane, M.: Some bounds for the spectral radius of a Coxeter transformation. Preprint, México (1991).
- [4] Takane, M.: Conos en teoría de Representaciones de Álgebras. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 7, Soc. Mat. Mexicana, 157-174 (1989).



Dr. José Antonio S. de la Peña Mena
Thesis supervisor



M. en C. Martha Takane Imay

INTRODUCCIÓN.

Sea k un campo algebraicamente cerrado.

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita. Por $\text{mod}\Lambda$ denotamos la categoría de Λ -módulos (izquierdos) de dimensión finita.

El principal propósito de la *Teoría de Representaciones de Álgebras* es el estudio de la categoría $\text{mod}\Lambda$. Esta teoría recibió un impulso decisivo a principios de los años 70's, con el trabajo de Auslander, Gabriel, Roiter, Ringel,...

Uno de los problemas que ha tenido un papel central en la teoría es determinar el *tipo de representación* de un álgebra. Decimos que Λ es de *tipo de representación finito* si existen sólo un número finito de Λ -módulos inescindibles (hasta isomorfía). Si Λ no es de tipo de representación finita: Λ es de tipo de representación *manso* (o Λ es *mansa*) si para cualquier $d \in \mathbb{N}$, existe un número finito de Λ - $k[x]$ -bimódulos X_1, \dots, X_m que como $k[x]$ -módulos derechos son libres de rango finito, y tales que todo Λ -módulo inescindibile de dimensión d es de la forma $X_i \otimes_{k[x]} k[x]/(x - \lambda)$, para algún $1 \leq i \leq m$, y $\lambda \in k$. Finalmente, Λ es de tipo de representación *salvaje* (o Λ es *salvaje*) si existe X un Λ - $k(x, y)$ -bimódulo tal que X es libre finitamente generado como $k(x, y)$ -módulo derecho y $X \otimes_{k(x, y)} - : \text{mod}k(x, y) \rightarrow \text{mod}\Lambda$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

El problema del tipo de representación está resuelto para una clase especial de álgebras: las *álgebras hereditarias* (Λ es hereditaria si todo submódulo de un módulo proyectivo es proyectivo). Por ésto y otras razones (algunas trataremos en este trabajo), estas álgebras sirven como una importante fuente de inspiración; tratando con ellas, uno puede esperar obtener respuesta aún a preguntas que en general parecen imposibles de atacar.

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita y sea C_Λ su *matriz de Cartan*:

$$C_\Lambda = (p_1^T \cdots p_n^T),$$

donde $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, y $p_i := \underline{\dim} P_i$ es el vector dimensión del proyectivo P_i .

La *matriz de Cozeter* $\phi_\Lambda = -C_\Lambda^{-T} C_\Lambda$ (donde M^T denota la matriz traspuesta de M), es una importante herramienta en la teoría, pues para cada Λ -módulo X no proyectivo, con vector dimensión $\underline{\dim} X$, tenemos que $\underline{\dim} \tau X = \phi_\Lambda(\underline{\dim} X)$, donde τX denota el *trasladado de Auslander-Reiten* de X .

Esta matriz guarda importante información sobre la categoría de Λ -módulos, $\text{mod}\Lambda$. Por ejemplo, si $\rho_\Lambda := \rho(\phi_\Lambda)$ es el *radio espectral* de ϕ_Λ , entonces:

Λ es de tipo de representación manso o de tipo de representación finito si y sólo si $\rho_\Lambda = 1$.

Λ es de tipo de representación salvaje si y sólo si $\rho_\Lambda > 1$.

Además, ρ_Λ es el *número de crecimiento* de Λ . Es decir, para todo $X \in \text{mod}\Lambda$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dim_k \tau^m X = \rho_\Lambda,$$

donde $\tau^m X$ es el m -ésimo trasladado de Auslander-Reiten de X .

En el caso en que Λ es un álgebra hereditaria mansa, el comportamiento de la categoría de Λ -módulos (izquierdos) de dimensión finita, $\text{mod}\Lambda$, está muy bien entendida.

Uno de los propósitos de este trabajo es estudiar las *propiedades espectrales de las matrices de Coxeter de las álgebras hereditarias salvajes*. Estas propiedades nos darán valiosa información sobre la categoría de Λ -módulos, $\text{mod}\Lambda$.

Un enfoque que ha sido de gran utilidad para el estudio de $\text{mod}\Lambda$, en la Teoría de Representaciones de álgebras, es el siguiente:

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita, entonces existe un número finito de k -álgebras de dimensión finita, básicas e indescomponibles $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$ tales que

$$\text{mod}\Lambda \simeq \text{mod}\Lambda_1 \times \dots \times \text{mod}\Lambda_\ell$$

es una equivalencia de categorías. Con lo que nos bastará poner atención a las categorías $\text{mod}\Lambda$, con Λ k -álgebra básica e indescomponible.

A su vez, si Λ es un álgebra hereditaria, básica e indescomponible, el estudio de estas categorías de módulos corresponde al estudio de las categorías de *representaciones* $\text{rep}_k(\vec{\Delta})$ de gráficas finitas, conexas y orientadas $\vec{\Delta}$. A $\vec{\Delta}$ le llamaremos *carcaj*. En efecto, si Λ es una k -álgebra hereditaria, básica e indescomponible, entonces existe un carcaj finito, que es único (salvo isomorfía de carcajes), tal que

$$\text{mod}\Lambda \simeq \text{rep}_k(\vec{\Delta}).$$

Con este enfoque, es natural preguntarnos: ¿Qué propiedades tiene el carcaj asociado a un álgebra, o más aún, su gráfica subyacente? Consideraremos este problema estudiando la *matriz de adyacencia* A_Δ de la gráfica Δ (llamada la gráfica subyacente a $\vec{\Delta}$). Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado conocido:

Sea Λ una k -álgebra hereditaria y $\tilde{\Delta}$ el carcaj asociado a Λ (i.e. tal que $\text{mod}\Lambda \cong \text{rep}_k(\tilde{\Delta})$). Entonces

Λ es de tipo de representación finito sii $\rho(A_{\Delta}) < 2$.

Λ es mansa sii $\rho(A_{\Delta}) = 2$.

Λ es salvaje sii $\rho(A_{\Delta}) > 2$.

recordemos que $\rho(A_{\Delta})$ es el radio espectral de A_{Δ} .

Otro resultado interesante es:

Si $\tilde{\Delta}$ es el carcaj asociado a Λ y Δ es un árbol (i.e. Δ no tiene ciclos), entonces existe D matriz invertible tal que $\phi_{\Lambda} = D(-I - M^T)(I + M)D^{-1}$, donde $A_{\Delta} = M + M^T$.

Esto nos despierta el interés en otro de los problemas importantes de este trabajo: el estudio de las *propiedades espectrales de las matrices de Adyacencia* (en particular, las de gráficas asociadas a álgebras salvajes).

Para estos propósitos utilizaremos diferentes métodos y teorías. Entre las que sobresalen los métodos combinatorios (por ejemplo, la teoría algebraica de gráficas); el uso de *Cubiertas de Galois* (de gráficas y carcajes); la Teoría de Tilteo (que en ciertas álgebras podemos reducir el comportamiento de su categoría de módulos a la de módulos sobre álgebras hereditarias). Finalmente, utilizaremos las propiedades espectrales de los operadores de Coxeter y los de adyacencia, que desarrollaremos en este trabajo, para tratar de entender un poco más el comportamiento de la categoría de los módulos de las álgebras hereditarias salvajes.

Haciendo un poco de historia, podríamos decir que la noción intuitiva de álgebra "salvaje" fué construida en investigaciones realizadas por Corner y Brenner. Sobresalen también las investigaciones de Kerner sobre el comportamiento de los módulos regulares de un álgebra salvaje; Baer sobre las propiedades homológicas entre módulos regulares; Zhang sobre la estructura de las componentes regulares en el carcaj de Auslander-Reiten; Dlab, Ringel y Xi sobre el estudio del número de crecimiento del álgebra; de la Peña y Lenzing sobre las álgebras canónicas salvajes; y de la Peña y Takane sobre las propiedades espectrales de las matrices de Coxeter y de Adyacencia de las álgebras hereditarias salvajes.

Cabe mencionar que los resultados de los trabajos conjuntos con de la Peña están incluidos en este trabajo. Algunos de ellos en versiones mejoradas.

Extenderemos nuestros resultados de álgebras hereditarias a las *álgebras ocultas-salvajes*, que tienen un comportamiento "casi hereditario".

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el **capítulo 0** introduciremos definiciones, notación e hipótesis que serán supuestas a lo largo de todo el trabajo.

El **capítulo 1** tratará de resultados conocidos sobre las *Propiedades Espectrales de las matrices que dejan conos invariantes* y el *Teorema de Perron-Frobenius*, que nos serán de mucha utilidad en los capítulos 3, 4, 7 y 8.

En el **capítulo 2** recordaremos definiciones y resultados conocidos sobre las propiedades espectrales de *gráficas finitas e infinitas* como introducción para los **capítulos 3 y 4**, donde consideraremos las principales propiedades fundamentales y espectrales de las *cubiertas de Galois* de gráficas. Por ejemplo: Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois de una gráfica conexa Δ , definida por la acción de un grupo G de automorfismos de $\bar{\Delta}$. Entonces,

a) $\rho(A_{\bar{\Delta}}) \leq \rho(A_{\Delta}) \leq \rho(A_{\bar{\Delta}})^2$.

b) Si G es un grupo manejable, entonces $\rho(A_{\bar{\Delta}}) = \rho(A_{\Delta})$.

El **capítulo 5** es una revisión de *álgebras hereditarias* y la *teoría de Tilteo*, para de aquí arrancar con las propiedades de la matriz de Coxeter y estudiar el comportamiento de la categoría de módulos.

En el **capítulo 6** se revisarán las propiedades fundamentales de las *cubiertas de Galois de álgebras* $\pi: \bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda$, y propiedades de los *funtores pull-up y push-down* que nos relacionan las categorías de módulos $\text{mod } \bar{\Lambda}$ y $\text{mod } \Lambda$.

Empezando por un resumen sobre parte de la teoría de los *Grupos de Weyl*, los **capítulos 7 y 8** unen gran parte de los resultados de capítulos anteriores para estudiar las *propiedades fundamentales y espectrales de las matrices de Coxeter*.

Estudiaremos estas propiedades utilizando las relaciones que existen entre las matrices de Coxeter y las matrices irreducibles no negativas; también utilizando que las matrices de Coxeter de álgebras hereditarias salvajes (o en general de tipo de representación infinita) dejan conos sólidos invariantes; y utilizando cubiertas de Galois de álgebras. Entre los resultados importantes de estas secciones están:

Teorema: Sea Λ una k -álgebra hereditaria salvaje. Entonces

a) $\rho(\phi_{\Lambda})$ es un valor propio de ϕ_{Λ} .

b) Existe un único (salvo múltiplos reales) vector $y^+ \gg 0$ (con todas sus coordenadas positivas) tal que $\phi_{\Lambda}(y^+) = \rho(\phi_{\Lambda})y^+$.

c) Si $\pi: \bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ es una cubierta de Galois de Λ definida por un grupo G , entonces

$$c.1) \rho(\phi_{\bar{\Lambda}}) \leq \rho(\phi_{\Lambda}) \leq (\rho(\phi_{\bar{\Lambda}}) + 3)^2.$$

$$c.2) \text{ Si } G \text{ es un grupo finito, entonces } \rho(\phi_{\bar{\Lambda}}) = \rho(\phi_{\Lambda}).$$

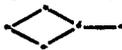
Haremos énfasis en las propiedades espectrales de las matrices de Coxeter de una clase especial de álgebras, las álgebras *fuentes - pozos* (i.e. si su carcaj asociado tiene una orientación tal que para todo vértice x en el carcaj, todas sus flechas salen de x ó todas entran a x). Entre los principales resultados tenemos:

Teorema: Sea Λ una k -álgebra hereditaria salvaje tal que $\bar{\Delta}$, su carcaj asociado, tiene orientación fuente-pozos. Entonces

$$\lambda^2 \in \sigma(\phi_{\Lambda}) \text{ sii } \lambda + \lambda^{-1} \in \sigma(A_{\Delta}).$$

Además, $\rho(\phi_{\Lambda})$ es un valor propio simple de ϕ_{Λ} .

Otro problema interesante, es el siguiente:

Dadas dos álgebras salvajes Λ y Λ' con carcajes asociados $\bar{\Delta}$ y $\bar{\Delta}'$ respectivamente, tal que $\Delta = \Delta'$. ¿Qué relaciones existen entre los espectros de sus respectivas matrices de Coxeter? Si Λ es una k -álgebra salvaje tal que Δ contiene un único ciclo que es de longitud par (por ejemplo, ). Entonces

$$\rho(\phi_{\Lambda'}) \leq \rho(\phi_{\Lambda})$$

donde Λ' es la k -álgebra asociada a $\bar{\Delta}'$, con $\Delta = \Delta'$ y $\bar{\Delta}'$ con orientación fuente-pozos.

Otro problema que ha sido de interés es encontrar cotas para los radios espectrales de las matrices de Coxeter. Utilizando los resultados anteriores podemos dar cotas y relaciones de $\rho(\phi_{\Lambda})$ y el género de la gráfica subyacente al carcaj de Λ . A saber:

Si Λ es una k -álgebra hereditaria de tipo de representación infinito (con carcaj $\bar{\Delta}$). Definamos $g(\Delta) :=$ género de Δ . Entonces

$$\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_{\Lambda})} \leq \frac{|\Delta_0|}{2}.$$

En el capítulo 9 estudiaremos la categoría de módulos de las álgebras hereditarias. Nos plantearemos y resolveremos la siguiente pregunta:

Dado un módulo inescindible ¿cuándo es postproyectivo, regular o preinyectivo?

Teorema: Sean Λ una k -álgebra hereditaria salvaje y $X \in \text{mod}\Lambda$ un módulo inescindible. Entonces

a) X es postproyectivo sii $\langle y^-, \dim X \rangle < 0$,

b) X es preinyectivo sii $\langle \dim X, y^+ \rangle < 0$,

donde $\langle -, - \rangle$ es la forma bilineal asociada al álgebra (recordemos que $\langle \dim X, \dim Y \rangle = \sum_{i \geq 0} \text{Ext}_{\Lambda}^i(X, Y)$); con $y^+, y^- \gg 0$, $\phi_{\Lambda}(y^-) = \rho(\phi_{\Lambda})^{-1}y^-$ y $\phi_{\Lambda}(y^+) = \rho(\phi_{\Lambda})y^+$.

Respecto al estudio del crecimiento de los módulos de las k -álgebras salvajes, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Sean Λ un álgebra salvaje tal que $\tilde{\Delta}$ tiene orientación fuente-pozos. Entonces

Si X es preinyectivo o regular

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\dim \tau^m X}{\rho_{\Lambda}^m} = \lambda_X^+ y^+$$

para algún número $\lambda_X^+ > 0$.

Otro punto de interés es el comportamiento de los módulos regulares de las álgebras hereditarias salvajes. En la última parte del trabajo, usando nuestras técnicas, demostraremos resultados sobre propiedades homológicas de módulos regulares para álgebras salvajes cuyo carcaj es un árbol.

Este trabajo se trató de hacer más o menos autocontenido. Recomendamos como referencia general sobre Teoría de Representaciones de Álgebras a [R1]; sobre Teoría de gráficas finitas a [CDS] y sobre gráficas infinitas a [MoWo]; además de la bibliografía recomendada en cada capítulo.

Creemos que nuestros resultados están suficientemente detallados.

Parte del trabajo consta de investigaciones conjuntas con José Antonio de la Peña:

Los capítulos 3 y 4 están parcialmente basados en el artículo "The Spectral Radius of the Galois covering of a graph" [PT2].

El capítulo 6 incluye resultados del artículo antes mencionado.

Los capítulos 7 y 8 están parcialmente basados en los artículos conjuntos con de la Peña: [PT1]: "Spectral properties of Coxeter transformations and its applications", y [PT3]: "Some bounds for the spectral radius of the Coxeter transformation".

El capítulo 9 está también basado en [PT1] y en resultados aún no publicados.

Los criterios que se siguieron para incluir demostraciones de resultados ya conocidos, fueron los siguientes: la demostración es nuestra; se completaron de manera significativa y creemos que "importante"; y será importante el desarrollo de la demostración para nuestros fines.

Este trabajo lo realicé siendo becaria del Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M.; parte de éste se realizó durante mi estancia de trabajo en la Universidad de Tsukuba, Japón y mi estancia de trabajo en la Universidad Nicolás Copérnico, Polonia. Expreso aquí mi agradecimiento a estas instituciones por su apoyo.

Realmente espero contagiar al lector, al menos un poquitito, lo apasionante que fué para mí la realización de este trabajo.

0. CONCEPTOS BÁSICOS Y NOTACIÓN

En este capítulo introduciremos definiciones, notación e hipótesis que serán supuestas a lo largo de todo el trabajo.

0.1. Denotaremos por \mathbf{C} (resp. \mathbf{R}) al campo de los números complejos (resp. reales). Sean $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbf{N}$ ó $J = \mathbf{N}$, donde \mathbf{N} denota los números naturales, y ℓ_J^2 el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $(x_i)_{i \in J}$ de números complejos tales que $\sum_{i \in J} |x_i|^2$ converge, con el producto interno

$$(x, y) = \sum_{i \in J} x_i \bar{y}_i$$

donde $x = (x_i)_{i \in J}$, $y = (y_i)_{i \in J}$, vectores que escribiremos como renglones.

Sea $e_i = (\delta_{ij})_{j \in J}$ donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. Entonces $\{e_j; j \in J\}$ forma un sistema ortonormal completo en ℓ_J^2 , ver [Y].

Sea $f: \ell_J^2 \rightarrow \ell_J^2$, una transformación lineal y continua que llamaremos *operador*. Denotemos por $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; \|x\| = 1\}$ a la *norma* de f . Recordemos que si f es transformación lineal entonces f es continua sii ($:=$ si y sólo si) f es *acotada*, esto es, $\|f\| < \infty$, ver [H], [Ta] y [Y].

0.1.1. Si f es un operador, entonces existe un único operador f^* , llamado *adjunto* de f , tal que $(f(x), y) = (x, f^*(y))$, para todo x, y . El operador f^* es tal que $\|f^*\| = \|f\|$. Un operador (o matriz) f es llamado *autoadjunto* si $f^* = f$. Como ejemplo importante de matrices autoadjuntas tenemos a las matrices simétricas con coeficientes reales, ver [H].

0.2. Si $f: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ con $n \in \mathbf{N}$, denotaremos también como f a la matriz asociada a f y emplearemos la notación implícita en la fórmula $f(x) = xf$.

La matriz *traspuesta* f^T de f , es la matriz cuya (i, j) -ésima coordenada está dada por $f^T(i, j) = f(j, i)$.

Denotaremos por I a la matriz identidad, que en cada caso tendrá el tamaño que convenga.

0.2.1. Todas las matrices infinitas con las que trabajaremos tienen sólo un número finito de entradas no cero en cada renglón y en cada columna. Para este tipo de matrices las operaciones de suma y producto están bien definidas en la forma usual.

0.3. Si A es una matriz finita, diremos que A es *irreducible* si no existe una permutación de los renglones de A combinada con la misma permutación en las columnas tal que A tome la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{12} & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 y A_2 son matrices cuadradas.

0.4. El *espectro* de un operador $f: \ell_j^2 \rightarrow \ell_j^2$, en símbolos $\sigma(f)$, es

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbf{C}; \lambda I - f \text{ no es invertible}\}.$$

Sea $\sigma_0(f)$ el conjunto de *valores propios* de f . Diremos que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un *valor propio aproximado* de f si existe una sucesión $(x^{(m)})_{m \in \mathbf{N}}$ de vectores en ℓ_j^2 , de norma 1, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f(x^{(m)}) - \lambda x^{(m)}\| = 0$. Denotemos por $\Pi(f)$ al conjunto de valores propios aproximados de f . Se tiene,

$$\sigma_0(f) \subset \Pi(f) \subset \sigma(f) = \overline{\sigma(f)}$$

donde $\sigma(f)$ es un compacto en \mathbf{C} .

En el caso en que f es un operador *normal* (esto es, $ff^* = f^*f$), entonces $\Pi(f) = \sigma(f)$, ver [H].

El *radio espectral* de f , $\rho(f) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(f)\}$.

Como referencias para estas nociones básicas ver [H] y [Ta].

0.5. Sea Δ una gráfica conexa. Por Δ_0 (resp. Δ_1) denotaremos al conjunto de vértices (resp. aristas) de Δ .

Dados $u, v \in \Delta_0$ denotemos por $\Delta(u, v)$ el conjunto de aristas entre u y v . Si $v \in \Delta_0$, el *grado* $\deg(v)$ de v es el número de aristas que contienen a v , contándose dos veces cada lazo, donde un lazo en v es una arista entre v y v .

Diremos que Δ es una gráfica *localmente finita* si $\deg(v) < \infty$ para todo $v \in \Delta_0$.

Sea $M_\Delta = \sup\{\deg(v); v \in \Delta_0\}$. Si $M_\Delta < \infty$ diremos que Δ es *acotada*.

Siempre supondremos que nuestras gráficas son conexas y acotadas.

Una *orientación* (s, e) de Δ , es una pareja de funciones $s, e: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ tal que para cada arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ tenemos que $\{i, j\} = \{s(\alpha), e(\alpha)\}$. Si $e(\alpha) = s(\alpha)$, entonces α es un lazo.

Un *carcaj* (o *gráfica dirigida*) es una pareja $(\Delta, (s, e))$, donde Δ es una gráfica y (s, e) una orientación de Δ . Denotamos este carcaj por $\bar{\Delta}$ y llamamos a Δ la *gráfica subyacente* de $\bar{\Delta}$.

Diremos que $\bar{\Delta}' = (\Delta', (s', e'))$ es un *subcarcaj* de $\bar{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ si $\Delta'_0 \subset \Delta_0$, $\Delta'_1 \subset \Delta_1$ y $s' = s|_{\Delta'_1}$, $e' = e|_{\Delta'_1}$. Un subcarcaj $\bar{\Delta}'$ de $\bar{\Delta}$ se llamará *pleno* si para todo $u, v \in \Delta'_0$, $\Delta'(u, v) = \Delta(u, v)$.

Un *morfismo* $\varphi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ de gráficas es una función $\varphi: \bar{\Delta}_0 \rightarrow \Delta_0$ y $\varphi: \bar{\Delta}_1 \rightarrow \Delta_1$ tal que $\varphi(i \xrightarrow{\alpha} j) = \varphi(i) \xrightarrow{\varphi(\alpha)} \varphi(j)$.

Un *morfismo* $\varphi: (\bar{\Delta}, (\bar{s}, \bar{e})) \rightarrow (\Delta, (s, e))$ de carcajes es un morfismo de gráficas que satisface $\varphi\bar{s} = s\varphi$, $\varphi\bar{e} = e\varphi: \bar{\Delta}_1 \rightarrow \Delta_0$.

0.6. Sea $k = \bar{k}$ un campo algebraicamente cerrado. Sea Λ una k -categoría localmente de dimensión finita. Denotemos por $\text{MOD}\Lambda$ la k -categoría de módulos izquierdos; y por $\text{mod}\Lambda$ la subcategoría plena de Λ -módulos de k -dimensión finita. Ver capítulo 6.

Siempre que digamos *módulo* se entenderá módulo izquierdo.

Un Λ -módulo $M \in \text{MOD}\Lambda$ es *inescindible* si siempre que $M \cong M_1 \oplus M_2$, suma directa de Λ -módulos, se tiene que $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$.

Proposición. Sea Λ una k -categoría localmente de dimensión finita, entonces $\text{mod}\Lambda$ es una categoría de Krull-Schmidt, i.e. si $X \in \text{mod}\Lambda$ entonces existen módulos inescindibles $X_1, \dots, X_\ell \in \text{mod}\Lambda$, tales que $X \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} X_i$ y si $\bigoplus_{i=1}^{\ell} X_i \cong \bigoplus_{j=1}^m Y_j$, entonces $\ell = m$ y existe una permutación $\mu: \{1, \dots, \ell\} \rightarrow \{1, \dots, \ell\}$ tal que $X_i \cong Y_{\mu(i)}$. Además, si X es un Λ -módulo inescindible, entonces $\text{End}_{\Lambda}(X)$ es un anillo local. \square

Λ es una k -categoría localmente de dimensión finita *descomponible* si existen Λ_1 y Λ_2 k -categorías localmente de dimensión finita no triviales con $\Lambda \cong \Lambda_1 \times \Lambda_2$. En otro caso diremos que Λ es *indescomponible*. Se sabe que si $\Lambda \cong \Lambda_1 \times \Lambda_2$, entonces $\text{mod}\Lambda \cong \text{mod}\Lambda_1 \times \text{mod}\Lambda_2$.

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita. Dada una descomposición $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ en Λ -módulos inescindibles, si $P_i \not\cong P_j$ para $i \neq j$, se dice que Λ es *básica*. Si Λ

no es básica, entonces existe una k -álgebra Λ' básica y una equivalencia de categorías $\text{mod}\Lambda \cong \text{mod}\Lambda'$.

Por lo anterior, para conocer los módulos de las k -álgebras en general, *basta estudiar módulos de k -álgebras básicas e indescomponibles*. (Una referencia que permite detallar lo anterior es [AnF] y [Ga3]).

0.7. Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj. Por $k[\vec{\Delta}]$ denotaremos a la k -álgebra de trayectorias de $\vec{\Delta}$, ver [Ga3]. Un ideal bilateral J de $k[\vec{\Delta}]$ es llamado *admisibile* si $J \subset \mathcal{F}^2$ y existe $m \in \mathbf{N}$, tal que $\mathcal{F}^m \subset J$, donde \mathcal{F} denota al ideal de $k[\vec{\Delta}]$ generado por las flechas de $\vec{\Delta}$.

Proposición [Ga1]. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible, entonces existe $\vec{\Delta}$ un carcaj finito y J un ideal (bilateral) admisibile de $k[\vec{\Delta}]$ tal que $\text{mod}\Lambda \cong \text{mod}k[\vec{\Delta}]/J$. \square

Por este resultado y (0.6), *siempre* que se diga Λ es una k -álgebra de dimensión finita, podremos suponer que $\Lambda = k[\vec{\Delta}]/J$, con $\vec{\Delta}$ carcaj finito y J ideal admisibile de $k[\vec{\Delta}]$.

Sea $K_0(\Lambda) = \mathbf{Z}^{\Delta_0}$ el grupo de Grothendieck de Λ . Algunas veces será conveniente encajar $K_0(\Lambda)$ en $K_0(\Lambda, \mathbf{Q}) := K_0(\Lambda) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}^{\Delta_0}$.

0.8. Sean $\Lambda = k[\vec{\Delta}]/J$ k -álgebra básica e indescomponible de dimensión finita y $n = |\Delta_0|$, el número de vértices de Δ .

Sea $M \in \text{mod}\Lambda$, el vector dimensión de M , se define como

$$\dim M = (\dim_k \text{Hom}_{\Lambda}(P_i, M))_{i \in \Delta_0},$$

donde P_i es la cubierta proyectiva del simple en i , S_i .

Denotaremos por C_{Λ} a la matriz de Cartan de Λ , que es la matriz de $n \times n$ con i -ésima columna $p_i := \dim P_i$, esto es,

$$C_{\Lambda} = (p_1^T \dots p_n^T).$$

En el caso en que la dimensión global de Λ es finita (i.e. $gl \dim \Lambda < \infty$), C_{Λ} es invertible.

Supongamos que Λ tiene dimensión global finita.

Definamos la función bilineal $\langle -, - \rangle_\Lambda$

$$\langle x, y \rangle_\Lambda = x C_\Lambda^{-T} y^T,$$

donde $x, y \in \mathbf{C}^{\Delta_0}$ y C_Λ^{-T} denota la matriz traspuesta de la inversa de C_Λ .

Tenemos la siguiente relación homológica:

$$\langle \dim X, \dim Y \rangle_\Lambda = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \text{Ext}_\Lambda^i(X, Y),$$

donde $\text{Ext}_\Lambda^0(X, Y) := \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$.

La forma cuadrática q_Λ asociada a $\langle -, - \rangle_\Lambda$ se llama la *forma de Tits*. Así, $q_\Lambda(z) = \langle z, z \rangle_\Lambda$.

La matriz simétrica $T_\Lambda = C_\Lambda^{-1} + C_\Lambda^{-T}$ asociada a la forma bilineal $\langle -, - \rangle_\Lambda$ se llama la *matriz de Tits* (en algunos lugares, a T_Λ le llaman "matriz de Cartan").

Nota: Estrictamente hablando, la matriz asociada a $\langle -, - \rangle_\Lambda$ es

$$\frac{1}{2}(C_\Lambda^{-1} + C_\Lambda^{-T}).$$

El quitarle la constante, no cambia en nada todo lo que aquí se afirma con lo ya conocido; pero en cambio, como veremos después (cap. 3, 4, 7 y 8), nos facilita su manejo y la visualización de ciertas relaciones entre propiedades de gráficas y de carcajes.

Definimos ϕ_Λ la *matriz de Cozeter* de Λ ,

$$\phi_\Lambda := -C_\Lambda^{-T} C_\Lambda$$

que en el caso en que Λ sea una k -álgebra hereditaria nos será de gran utilidad (ver capítulo 5).

Observemos que,

$$\langle x, y \rangle_\Lambda = -\langle y, x \phi_\Lambda \rangle_\Lambda = \langle x \phi_\Lambda, y \phi_\Lambda \rangle_\Lambda,$$

para cada $x, y \in \mathbf{C}^{\Delta_0}$.

Como referencia ver [R1].

0.9. Sea $\tilde{\Delta}$ un carcaj conexo localmente finito (es decir, para cada $i \in \Delta_0$, $\deg(i) < \infty$, ver (0.5)).

La categoría de representaciones $\text{REP}_k(\tilde{\Delta})$ se define de la siguiente manera:

Una representación (= objeto de $\text{REP}_k(\tilde{\Delta})$) es una familia

$$X = ((X(i))_{i \in \Delta_0}, (X(\alpha))_{\alpha \in \Delta_1})$$

donde $X(i)$ es un k -espacio vectorial y $X(i \xrightarrow{\alpha} j): X(i) \rightarrow X(j)$ es una transformación k -lineal. Un morfismo de representaciones $f: X \rightarrow Y$ es una familia $f = (f_i: X(i) \rightarrow Y(i))_{i \in \Delta_0}$ de transformaciones k -lineales tales que

$$Y(\alpha)f_i = f_j X(\alpha), \quad (i \xrightarrow{\alpha} j) \in \Delta_1.$$

Denotemos por $\text{Rep}_k(\tilde{\Delta})$ a la subcategoría plena formada por las representaciones $X \in \text{REP}_k(\tilde{\Delta})$ tales que para todo $i \in \Delta_0$, $\dim_k X(i) < \infty$; y por $\text{rep}_k(\tilde{\Delta})$ a la subcategoría plena de las representaciones $X \in \text{REP}_k(\tilde{\Delta})$ de k -dimensión finita (esto es, tales que $\sum_{i \in \Delta_0} \dim_k X(i) < \infty$).

Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]/J$ una k -categoría localmente de dimensión finita. Entonces $\text{REP}_k(\Lambda)$ (resp. $\text{Rep}_k(\Lambda)$ y $\text{rep}_k(\Lambda)$) es la subcategoría plena de $\text{REP}_k(\tilde{\Delta})$ (resp. $\text{Rep}_k(\tilde{\Delta})$ y $\text{rep}_k(\tilde{\Delta})$) que satisfacen las relaciones del ideal J . Existe una equivalencia de categorías entre MODA (resp. $\text{mod}\Lambda$) y $\text{REP}_k(\Lambda)$ (resp. $\text{rep}_k(\Lambda)$), ver [Ga3] o [CiLaSi].

Denotemos por $\text{Mod}\Lambda$ a la subcategoría plena de MODA formada por los módulos que vistos como representaciones corresponden a los objetos de $\text{Rep}_k(\Lambda)$.

0.10. El carcaj de Auslander-Reiten.

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita.

Sea X un Λ -módulo inescindible, denotemos por $[X]$ a la clase de isomorfía de X en $\text{mod}\Lambda$.

Como referencia general para esta sección ver [R1].

0.10.1. El carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ de Λ , tiene por vértices las clases de isomorfía de Λ -módulos inescindibles. Ponemos una flecha $[X] \rightarrow [Y]$ en Γ_Λ sii existe un morfismo irreducible de X a Y . Recordemos que el morfismo $f: X \rightarrow Y$ de $\text{mod}\Lambda$ es irreducible si (i) $f \in R(X, Y)$, con $R(-, Y) :=$ el radical de $\text{Hom}_\Lambda(-, Y)$; (ii) si $hg = f$ entonces g es sección o h es retracción.

Denotamos por $[X]^+$ (resp. $[X]^-$) al conjunto de vértices $[Y]$ en Γ_Λ para los cuales existe una flecha $[X] \rightarrow [Y]$ (resp. $[Y] \rightarrow [X]$) en Γ_Λ .

Lema. i) $[X]^+$, $[X]^-$ son finitos (i.e., Γ_Λ es localmente finita).

ii) En Γ_Λ no hay lazos. □

Proposición [R1, pág. 79]. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita. Supongamos que Γ_Λ contiene una componente conexa y finita \mathcal{C} , entonces $\Gamma_\Lambda = \mathcal{C}$. □

Por simplicidad, a menudo abusaremos del lenguaje y escribiremos, en lugar de $[X]$, simplemente X .

0.10.2 Sea $X \in \text{mod } \Lambda$ un módulo inescindible no proyectivo.

Una sucesión exacta $\eta: 0 \rightarrow Y \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} X \rightarrow 0$ se llama la *sucesión de Auslander-Reiten* (que termina en X) si satisface las siguientes condiciones:

i) η no se escinde;

ii) Y es inescindible;

iii) Condición "casi se divide": Para todo $Z \xrightarrow{f} X$ no retracción, existe $\bar{f}: Z \rightarrow E$ tal que $\beta\bar{f} = f$, i.e. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \bar{f} & \\ E & & X \\ & \xrightarrow{\beta} & \\ & & \downarrow f \end{array}$$

Dualmente se define la sucesión de Auslander-Reiten (que empieza en Y), cuando Y es no inyectivo.

Sabemos que estas sucesiones existen y son únicas salvo isomorfía, ver [AR] y [Ga3].

a) Si X es inescindible no proyectivo y

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$$

es la sucesión de Auslander-Reiten que termina en X , entonces Y está determinado de manera única hasta isomorfismo. Emplearemos la notación $\tau X := Y$ y llamamos a τX el *traslado de Auslander-Reiten* de X . Además se tiene que $[X]^- = [\tau X]^+$.

b) Simétricamente, si Y es inescindible no inyectivo, la sucesión de Auslander-Reiten que empieza en Y , tiene la siguiente forma:

$$0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow \tau^- Y \rightarrow 0$$

ver [AR].

0.10.3. Diremos que un módulo inescindible $X \in \text{mod } \Lambda$ es *postproyectivo* (resp. *preinyectivo*) sii existen $m \in \mathbf{N}$ y $s \in \Delta_0$ tales que

$$X \cong \tau^{-m}P_s \quad (\text{resp. } X \cong \tau^mQ_s)$$

con P_s (resp. Q_s) el Λ -proyectivo (resp. Λ -inyectivo) en s .

$X \in \text{mod } \Lambda$ inescindible es un módulo *regular* si para todo $m \in \mathbf{N}$, $\tau^m X$ y $\tau^{-m} X$ existen.

Sean \mathcal{P}, \mathcal{I} componentes conexas de Γ_Λ .

Diremos que \mathcal{P} (resp. \mathcal{I}) es una componente *postproyectiva* (resp. *preinyectiva*) de Γ_Λ si todo $X \in \mathcal{P}$ (resp. $X \in \mathcal{I}$) es postproyectivo (resp. preinyectivo) y \mathcal{P} (resp. \mathcal{I}) no tiene ciclos orientados.

Proposición. Sea \mathcal{P} una componente postproyectiva.

a) Sean $X, Y \in \mathcal{P}$ y $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$, entonces f es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles.

b) $\phi_\Lambda(\dim P_s) = -\dim Q_s$, $s \in \Delta_0$. (Además, $\phi_\Lambda: K_0(\Lambda) \rightarrow K_0(\Lambda)$ es la única transformación lineal con esa propiedad). \square

0.11. Sea \mathcal{C} un conjunto de Λ -módulos inescindibles, diremos que $X \in \text{add } \mathcal{C}$ si X es suma directa de Λ -módulos en \mathcal{C} .

1. CONOS Y TRANSFORMACIONES LINEALES

En este capítulo consideraremos uno de los aspectos importantes de la teoría de las transformaciones lineales: el estudio de las *propiedades espectrales de las matrices que dejan conos invariantes*. Revisaremos nociones básicas y algunos resultados que nos serán de utilidad más adelante. También ver [Bir], [V], [T], [PT1].

1.1. Sea F el campo de los números reales \mathbf{R} ó el campo de los números complejos \mathbf{C} .

Sea V el F -espacio vectorial F^n .

Un *precono* K es un subconjunto cerrado de V que satisface:

$$K + K \subset K \text{ y } \alpha K \subset K, \text{ para toda } \alpha \geq 0.$$

Un *cono* es un precono K que satisface:

$$K \cap (-K) = \{0\}, \text{ donde } -K = \{-v; v \in K\}.$$

Un ejemplo importante de precono es el siguiente:

Sea $f: V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si K es un precono en V entonces $f^{-1}(K)$ es también un precono.

1.2. Algunos ejemplos de conos en $V = \mathbf{R}^n$:

a) El *cono positivo* $V^+ = \{v \in V; v(i) \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

b) Los *conos poliédricos*. Se dice que un cono K es poliédrico si existen $v_1, \dots, v_m \in K$ tales que $K = \mathbf{R}^+v_1 + \dots + \mathbf{R}^+v_m$.

c) Sea K un precono en V . Consideremos el espacio dual V^* de V .

El *precono ortogonal* K^\perp se define como

$$K^\perp = \{f \in V^*; f(v) \geq 0 \text{ para todo } v \in K\}.$$

Lema. Sea K un precono en $V = \mathbf{R}^n$. Sea φ el isomorfismo natural

$$V \xrightarrow{\varphi} V^{**}, v \mapsto \varphi_v: V^* \longrightarrow F \quad (\varphi_v: g \mapsto g(v)).$$

Entonces:

- a) K^\perp es un precono en V^* .
 b) $K^{\perp\perp} = \varphi(K)$.

Demostración: a): K^\perp es cerrado. En efecto, para cada $v \in V$ la función

$$\varepsilon_v: V^* \longrightarrow \mathbf{R}, f \mapsto f(v)$$

es continua. Luego $K^\perp = \bigcap_{v \in K} \varepsilon_v^{-1}(\mathbf{R}^+)$ es cerrado.

Es fácil concluir que K^\perp es precono.

b): Sea $v \in K$, veremos que $\varphi(v) \in K^{\perp\perp}$. Si $g \in K^\perp$, entonces $\varphi_v(g) = g(v) \geq 0$.

Sea $\psi \in K^{\perp\perp}$. Existe $v \in V$ con $\varphi_v = \psi$. Debemos demostrar que $v \in K$.

Supongamos que esto no fuese así.

Si $v \in K - K$, podemos entonces escribir $v = w_1 - w_2$ con $w_1, w_2 \in K$ y tales que si $w_1 \neq 0$ entonces w_1 y w_2 son linealmente independientes. Sea W un subespacio vectorial real de V tal que $V = \mathbf{R}w_2 \oplus W$.

Sea $h \in V^*$ tal que $h(w_2) = 1$ y $h(W) = 0$. Entonces $h \in K^\perp$ y $\psi(h) = \varphi_v(h) = h(v) = -1$, contradicción.

Si $v \notin K - K$. Observemos que $K - K$ es un subespacio vectorial real de V . Entonces existe W tal que $V = (K - K) \oplus \mathbf{R}v \oplus W$. Definimos $h \in V^*$ satisfaciendo: $h(K - K) = 0$, $h(v) = -1$ y $h(W) = 0$. Como antes obtenemos una contradicción. \square

1.3. Un cono K es *sólido* si su interior K^0 es no vacío.

Lema. Sea K un cono en $V = \mathbf{R}^n$ entonces K es sólido si y solamente si K contiene una \mathbf{R} -base de \mathbf{R}^n .

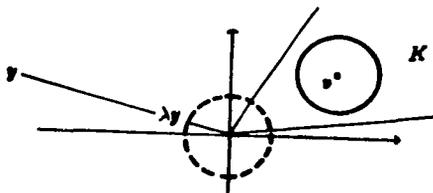
Demostración: Sea K un cono sólido.

Demostremos que para todo $y \in V$, $y \in K - K = \{z - w; z, w \in K\}$ (esto es, K genera a V).

En efecto, sean $v \in K^0$ y $r > 0$ tales que $\{z \in V; \|z - v\| < r\} = B_r(v) \subset K$.

Entonces existe $\lambda > 0$ tal que $w := \lambda y + v \in B_r(v) \subset K$.

Luego $y = \lambda^{-1}(w - v) \in K - K$ (ver figura).



Supongamos ahora que K contiene una \mathbf{R} -base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de \mathbf{R}^n . Claramente $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \in K^0$, pues

$$\sigma = \{z \in V; z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1\}$$

es el n -simplejo generado por $\{v_i\}_{i=1}^n \cup \{0\}$ (o la cápsula convexa generada por $\{v_i\}_{i=1}^n \cup \{0\}$), está contenido en K y $v \in \sigma^0 \subset K^0$. \square

1.4. Ejemplos importantes de conos sólidos.

Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria de dimensión finita, con Δ no Dynkin.

El cono postproyectivo $K_{\mathcal{P}}$ de Λ es el cono generado por los vectores dimensión de módulos inescindibles postproyectivos, es decir, es la cápsula convexa de todos los rayos $\mathbf{R}^+ \phi_{\Lambda}^{-r}(p_i)$ con $1 \leq i \leq n$ y $r \in \mathbf{N}$, donde $p_i = \underline{\dim} P_i$ es el vector dimensión del proyectivo en i , ([DIR2], [PT1] y capítulo 5).

Entonces $K_{\mathcal{P}}$ es sólido. Además $K_{\mathcal{P}}$ es invariante bajo la inversa de la matriz de Coxeter de Λ , i.e. $\phi_{\Lambda}^{-1}(K_{\mathcal{P}}) \subset K_{\mathcal{P}}$.

Análogamente el cono preinyectivo $K_{\mathcal{I}}$ de Λ es sólido y $\phi_{\Lambda}(K_{\mathcal{I}}) \subset K_{\mathcal{I}}$.

Si Δ no es diagrama Dynkin ni euclidiano, entonces el cono regular también es sólido, ya que para $|\Delta_0| \geq 3$, Λ tiene módulos de tilteo regulares ([Ba 4]); y para $|\Delta_0| = 2$, se demuestra directamente. Trataremos con más detalle a estos conos y sus propiedades en los capítulos 7 y 8.

1.5. Sea K un cono en $V = \mathbf{R}^n$. El *espacio complexificado* de V es

$$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = V + iV \cong \mathbf{C}^n.$$

El cono complexificado

$$K \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = K + iK$$

es un cono en \mathbf{C}^n . Si K es sólido (en \mathbf{R}^n), entonces $K \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ es sólido (en \mathbf{C}^n).

Si $f: V \rightarrow V$ es una transformación \mathbf{R} -lineal, entonces la transformación

$$T: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n, v = (a + ib) \mapsto f(a) + if(b),$$

donde $a, b \in \mathbf{R}^n$, es \mathbf{C} -lineal.

Además, si f deja invariante al cono K (i.e. $f(K) \subset K$), entonces T deja invariante al cono $K + iK$.

1.6. Matrices que dejan conos invariantes.

Teorema [Bi]. Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una transformación lineal.

Sea C un cono sólido en \mathbf{R}^n tal que $f(C) \subset C$. Entonces existe un vector propio v de f tal que:

a) $v \in C$;

b) $f(v) = \rho(f)v$,

donde $\rho(f) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ es valor propio de } f\}$ es el *radio espectral* de f .

Demostración (ver [T]): Como en (1.5), denotaremos por T a la transformación \mathbf{C} -lineal, asociada a f , que deja invariante al cono $K := C + iC$.

1.6.0. Observemos que para probar el teorema basta demostrar que existe $w \in K \setminus \{0\}$, tal que $T(w) = \rho w$. En efecto, si $0 \neq w = a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}^n$ (y al menos alguno distinto de 0), tal que $T(w) = \rho(T)w$. Entonces $f(a) = \rho(T)a$ y $f(b) = \rho(T)b$. Además, $\sigma(T) = \sigma(f)$; en particular, $\rho(T) = \rho(f)$.

Si $T = 0$, el resultado se sigue trivialmente. Entonces supondremos que $T \neq 0$.

Sea $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ una base de Jordan de T , donde $[T]_B$ tiene ℓ bloques, y B está ordenada de la siguiente manera:

Sean $\varepsilon_{m_1}, \dots, \varepsilon_{m_\ell} \in B$, los vectores propios de T con $m_1 < m_2 < \dots < m_\ell$; y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$, sus respectivos valores propios, ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_\ell|$).

Sean $\lambda_j = |\lambda_j|e^{i\alpha_j}$, $1 \leq j \leq n$.

1.6.1. Además, si $1 \leq h \leq n$, entonces existe una única $1 \leq j(h) \leq \ell$ tal que $m_{j(h)-1} < h \leq m_{j(h)}$, con $m_0 := 0$ y $m_\ell = n$. Así,

$$T(\varepsilon_h) = \lambda_{j(h)} \varepsilon_h + \varepsilon_{h+1}, \text{ si } h < m_{j(h)}; \text{ y}$$

$$T(\varepsilon_{m_{j(h)}}) = \lambda_{j(h)} \varepsilon_{m_{j(h)}}.$$

Por inducción sobre r , obtenemos:

a) Si $\lambda_{j(h)} = 0$, $T^r(\varepsilon_h) = 0$, para r suficientemente grande.

b) Si $\lambda_{j(h)} \neq 0$, $T^r(\varepsilon_h) = \sum_{k=h}^{m_{j(h)}} \lambda_{j(h)}^{r-(k-h)} \binom{r}{k-h} \varepsilon_k$, con $\binom{r}{k-h} = 0$ si $r < k-h$, y $\binom{r}{0} = 1$.

Sea $\rho := \rho(T) = \max\{|\lambda_j|; 1 \leq j \leq \ell\}$.

Consideremos primero el caso (sencillo) $\rho = 0$, entonces T es nilpotente. Sea $0 < r$ mínima tal que $T^r = 0$ en K (existe pues si $T(K) = 0$, entonces $T = 0$). Sea $x \in K$ tal que $0 \neq w = T^{r-1}(x) \in K$. Entonces $T(w) = 0 = \rho w$.

1.6.2. Supongamos ahora que $\rho > 0$.

Denotemos por b_j al tamaño del bloque de Jordan de T , correspondiente a j , $1 \leq j \leq \ell$. Observemos que $b_j = m_j - m_{j-1}$.

Sea $M := \max\{b_j; |\lambda_j| = \rho, 1 \leq j \leq \ell\}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1, 2, \dots, t$ (para alguna t), son los índices j de $\{1, \dots, \ell\}$, tales que $|\lambda_j| = \rho$ y $b_j = M$.

En (1.6.3), demostraremos que existen números $d_j \in \mathbf{C}$, $1 \leq j \leq t$ y

$$0 \neq y = \sum_{j=1}^t d_j \varepsilon_{m_j} \in K.$$

Usaremos este hecho para demostrar el teorema:

Supongamos que $\lambda_1 \notin \mathbf{R}^+$ (i.e., $\lambda_1 \neq \rho$). Por el lema (1.6.5), existen números reales $0 \leq w_0, \dots, w_q$ tales que $\sum_{p=0}^q w_p \lambda_1^p = 0$.

Definimos

$$y^* = \sum_{p=0}^q w_p T^p(y) = \sum_{p=0}^q w_p T^p \left(\sum_{j=1}^t d_j \varepsilon_{m_j} \right) = \sum_{j=2}^t d_j \varepsilon_{m_j} \left(\sum_{p=0}^q w_p \lambda_j^p \right) \in K,$$

vector en K (por ser K como invariante bajo T), que es combinación lineal de $\{\varepsilon_{m_j}; 1 < j \leq t\}$.

Además, tenemos que $0 \neq y^* \in K$, si no

$$\sum_{p=1}^q w_p T^p(y) = -w_0 y \in K \cap (-K) = \{0\}.$$

Luego, $w_0 = 0$ y podemos continuar hasta demostrar que $w_p = 0$, $0 \leq p \leq q$ (ya que $T^p(y) \neq 0$, para toda p). Esto es absurdo.

Si $\lambda_2 \notin \mathbf{R}^+$, como antes podemos construir $0 \neq y^{**} \in K$, vector que es combinación lineal de $\{\epsilon_{m_j}; 2 < j \leq t\}$.

Este proceso es finito, lo que demuestra que existe $0 \neq \tilde{y} \in K$, vector que es combinación lineal de $\{\epsilon_{m_j}; \lambda_j = \rho\}$. Entonces $T(\tilde{y}) = \rho \tilde{y}$. *Esto termina la demostración del Teorema.*

1.6.3. Ahora construyamos $0 \neq y = \sum_{j=1}^t d_j \epsilon_j \in K$.

Como K es un cono sólido, existe $z = \sum_{h=1}^n c_h \epsilon_h \in K^0$ con $0 \neq c_h \in \mathbf{C}$, para cada h . (Razonamiento análogo a (1.3)).

Seguimos con la hipótesis de que $T \neq 0$.

Por (1.6.1), para r suficientemente grande, tenemos que

$$T^r(z) = \sum_{h=1}^n c_h T^r(\epsilon_h) = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{m_{j(h)-1} < k \leq h} c_k \lambda_{j(h)}^{r-(h-k)} \binom{r}{h-k} \right) \epsilon_h$$

1.6.3.1. Veamos qué sucede al multiplicar el coeficiente de cada ϵ_h , en $T^r(z)$, por $\frac{1}{\rho^r m^{r-1}}$.

Observando que $\binom{r}{m} = \frac{1}{m!}(r^m + d(r, m))$, donde $d(r, m)$ es de grado en r menor que m , tenemos:

Sea $1 \leq h \leq n$.

a) Si $m_{j(h)-1} < h \leq m_{j(h)}$, con $|\lambda_{j(h)}| = \rho$, pero $h \notin \{m_1, \dots, m_t\}$. Tenemos que $\lambda_{j(h)} = \rho e^{i\alpha_{j(h)}}$ y $b_{j(h)} \leq M$. Entonces

$$0 \leq \frac{1}{\rho^r r^{M-1}} \left| \sum_{m_{j(h)-1} < k \leq h} c_k \lambda_{j(h)}^{r-(h-k)} \binom{r}{h-k} \right|$$

$$\leq \sum_{m_{j(h)-1} < k \leq h} \left| \frac{c_k}{(h-k)!} \rho^{-(h-k)} e^{i(r-(h-k))\alpha_j(h)} \frac{r^{h-k} + d(r, h-k)}{r^{M-1}} \right| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

pues $h - k < M - 1$.

b) Si $m_{j(h)-1} < h \leq m_{j(h)}$, y $|\lambda_{j(h)}| < \rho$. Entonces

$$0 \leq \frac{1}{\rho^r r^{M-1}} \left| \sum_{m_{j(h)-1} < k \leq h} c_k \lambda_{j(h)}^{r-(h-k)} \binom{r}{h-k} \right|$$

$$\leq \sum_{m_{j(h)-1} < k \leq h} \left| \frac{c_k}{(h-k)!} e^{i(r-(h-k))\alpha_j(h)} |\lambda_{j(h)}|^{-(h-k)} \left(\frac{|\lambda_{j(h)}|}{\rho} \right)^r \left(\frac{r^{h-k} + d(r, h-k)}{r^{M-1}} \right) \right| \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$$

pues $|\lambda_{j(h)}| < \rho$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|\lambda_{j(h)}|}{\rho} \right)^r \left(\frac{r^{h-k} + d(r, h-k)}{r^{M-1}} \right) = 0$.

c) Si $h = m_{j(h)}$, $1 \leq j(h) \leq t$, entonces $\lambda_{j(h)} = \rho e^{i\alpha_j(h)}$ y $b_{j(h)} = M$. Sea $j := j(h)$.

Notemos que $M = m_j - m_{j-1}$ (con $m_0 := 0$). Entonces

$$\frac{1}{\rho^r r^{M-1}} \sum_{m_{j-1} < k \leq m_j} c_k \lambda_j^{r-(m_j-k)} \binom{r}{m_j-k}$$

$$= \sum_{m_{j-1} < k \leq m_j} \frac{c_k}{(m_j-k)!} \rho^{-(m_j-k)} e^{i(r-(m_j-k))\alpha_j} \left(\frac{r^{m_j-k} + d(r, m_j-k)}{r^{M-1}} \right) \quad (=: c'(r, j, k))$$

$$= \frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r-(M-1))\alpha_j}$$

$$+ \left(\frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r-(M-1))\alpha_j} \frac{d(r, M-1)}{r^{M-1}} + \sum_{m_{j-1}+2 \leq k \leq m_j} c'(r, j, k) \right)$$

Como en (a), el segundo sumando tiende a 0 cuando $r \rightarrow \infty$.

1.6.4. Ahora observemos que

$$a = \inf_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^t \frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r-(M-1))\alpha_j} \varepsilon_{m_j} \right\| \right\} > 0.$$

En efecto, supongamos que $a = 0$, existe entonces una sucesión creciente $(r_s)_{s \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^t \frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r_s-(M-1))\alpha_j} \varepsilon_{m_j} = 0$.

Entonces para toda $1 \leq j \leq t$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r_s-(M-1))\alpha_j} = 0$ (pues tomemos $1 \leq j_0 \leq t$ y $b \neq 0$ un vector ortogonal al espacio vectorial generado por $\{\varepsilon_{m_j}; j \neq j_0\}$ y tal que $\langle \varepsilon_{m_{j_0}}, b \rangle \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=1}^t \frac{c_{m_{j-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r_s-(M-1))\alpha_j} \varepsilon_{m_j}, b \right\rangle \\ &= \langle \varepsilon_{m_{j_0}}, b \rangle \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{c_{m_{j_0-1}+1}}{(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r_s-(M-1))\alpha_{j_0}}, \end{aligned}$$

con $\langle \varepsilon_{m_{j_0}}, b \rangle \neq 0$, esto es $c_{m_{j_0-1}+1} = 0$. Contradicción.

$$\text{Por (1.6.3.1), } 0 < a = \inf_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{\rho^r r^{M-1}} \|T^r(z)\| \right\}.$$

1.6.4.1. Por lo tanto, $\left\{ \frac{T^{r_s}(z)}{\|T^{r_s}(z)\|} \right\}_{r \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en un subespacio compacto de K (ya que $T(K) \subset K$). Entonces por (1.6.4) y (1.6.3), tiene una subsucesión que converge a un vector no nulo de K . A saber,

$$\begin{aligned} 0 \neq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{T^{r_\ell}(z)}{\|T^{r_\ell}(z)\|} &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{a(\rho^{r_\ell} r_\ell^{M-1})} T^{r_\ell}(z) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^t \frac{c_{m_{j-1}+1}}{a(M-1)!} \rho^{1-M} e^{i(r_\ell-(M-1))\alpha_j} \varepsilon_{m_j} \in K, \end{aligned}$$

que es un vector de la forma $\sum_{j=1}^t d_j \varepsilon_{m_j} \in K$. □

1.6.5. Lema [Bir]. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, entonces existen $w_0, \dots, w_q \in \mathbb{R}^+$ no todos cero tales que: $\sum_{p=0}^q w_p \lambda^p = 0$.

Demostración: Escribimos $\lambda = re^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$.

Caso a) $r = 1$:

a.1) Si $\theta = \frac{h}{m}\pi$, $h, m \in \mathbf{N}$, entonces es sabido que θ es una raíz de la unidad y $\{e^{ip\theta}; p \in \mathbf{N}\}$ forma un grupo finito. En este caso $\{e^{ip\theta}; p \in \mathbf{N}\}$ forma un polígono regular con centro 0.

a.2) Si $\theta = m\pi$, $m \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, entonces $\{e^{ip\theta}; p \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto denso en S^1 (los números complejos de norma 1).

En ambos casos, existe $q \in \mathbf{N}$ tal que $0 \in E_\lambda =$ envolvente convexa de $\{e^{ip\theta}; 0 \leq p \leq q\}$.

b) Caso general: Sea $\lambda = re^{i\theta}$. Por (a), $0 = \sum_{p=0}^q w'_p e^{ip\theta}$, con $w'_0, \dots, w'_q \in \mathbf{R}^+$, no todos cero.

Entonces $0 = \sum_{p=0}^q w_p e^{ip\theta}$, donde $w_p := r^{-p} w'_p \in \mathbf{R}^+$, para cada p . \square

1.7. Corolario ([DIR1], ver también [PT1]). Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra con Δ diagrama no Dynkin. Entonces

i) $\rho(\phi_\Lambda)$ (resp. $\rho(\phi_\Lambda^{-1})$) es valor propio de ϕ_Λ (resp. ϕ_Λ^{-1}). Más aún, en (7.1) demostraremos que $\rho(\phi_\Lambda) = \rho(\phi_\Lambda^{-1})$.

ii) Existe $y_\Lambda^+ \geq 0$ (resp. $y_\Lambda^- \geq 0$) vector propio de ϕ_Λ (resp. ϕ_Λ^{-1}) con valor propio $\rho(\phi_\Lambda)$ (resp. $\rho(\phi_\Lambda^{-1})$).

Demostración: $\phi_\Lambda^{-1}(K\mathcal{P}) \subset K\mathcal{P}$ y $\phi_\Lambda(K\mathcal{I}) \subset K\mathcal{I}$, donde $K\mathcal{P}$ (resp. $K\mathcal{I}$) es el cono postproyectivo (resp. preinyectivo) de Λ y ambos sólidos, (por (1.4)). \square

En los capítulos 7 y 8 trataremos con más detalle las propiedades del espectro de ϕ_Λ .

1.8. Un caso particular del teorema (1.6) es parte del conocido teorema de *Perron-Frobenius*. Recordemos que una matriz $A = (a_{ij})$ se dice *irreducible* si no existe una permutación de los renglones de A combinada con la misma permutación en las columnas tal que A tome la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{12} & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 y A_2 son matrices cuadradas.

Teorema [GmII, §2]. Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matriz real, no negativa e irreducible. Entonces:

- a) $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ valor propio de } A\}$ es una raíz simple de su polinomio característico.
- b) Existe $v \gg 0$ (vector con todas sus coordenadas positivas) tal que $vA = \rho(A)v$.
- c) A no puede tener dos vectores propios no negativos linealmente independientes (ver [GmII, pág. 63, remark 3]). \square

1.9. El siguiente resultado nos será de gran utilidad más tarde.

Lema [GmII, pág. 57]. Sean $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$ matrices cuadradas de orden n , no negativas. Supongamos que A es irreducible y que $A' \leq A$ (i.e. $a'_{ij} \leq a_{ij}$), entonces para cada valor propio γ de A' , $|\gamma| \leq \rho(A)$. En particular, $\rho(A') \leq \rho(A)$. Si $A' < A$ (esto es, $A' \leq A$ y $\exists(i, j), a'_{ij} < a_{ij}$) entonces $\rho(A') < \rho(A)$. \square

2. PROPIEDADES ESPECTRALES DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA DE UNA GRÁFICA

En los últimos años ha habido un aumento en el interés por el estudio de las propiedades espectrales de gráficas y sus relaciones con la estructura combinatoria.

La motivación para este capítulo fué desarrollar un poco más el estudio de las cubiertas de Galois de gráficas. Nos interesa particularmente el caso en que la cubierta es una gráfica infinita. Tratamos de dar algunas relaciones entre sus espectros.

Como referencias, recomendamos ver [CDS] para gráficas finitas y para una revisión de gráficas infinitas, ver [MoWo].

2.1. Sea Δ una gráfica conexa y acotada, recordemos que Δ es acotada si

$$M_{\Delta} = \sup\{\deg(v); v \in \Delta_0\} < \infty.$$

Con lo que tenemos que el conjunto de vértices de Δ , Δ_0 , es numerable. Podemos entonces suponer que $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ ó $\Delta_0 = \mathbb{N}$. Denotemos por Δ_1 el conjunto de aristas de Δ .

La *matriz de adyacencia* de Δ , $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$ es la matriz (posiblemente infinita), cuya (i, j) -ésima coordenada es el número de aristas entre i y j , si $i \neq j$, y a_{ii} es dos veces el número de lazos en i .

Nota: Si $p: \Delta_0 \rightarrow \Delta_0$ es otra numeración de los vértices de Δ , y A' es la matriz de adyacencia de Δ correspondiente a p , entonces existe una matriz de permutaciones P tal que $A' = PA_{\Delta}P^{-1}$. En particular, las propiedades espectrales de ambas matrices son las mismas.

Observemos que si Δ es una gráfica finita, se tiene que

Δ es conexa sii A_{Δ} es matriz irreducible.

2.2. Sea ℓ^2_Δ el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $(x_i)_{i \in \Delta_0}$ de números complejos tales que $\sum_{i \in \Delta_0} |x_i|^2$ converge, con el producto interno

$$(x, y) = \sum_{i \in \Delta_0} x_i \bar{y}_i$$

donde $x = (x_i)_{i \in \Delta_0}$ y $y = (y_i)_{i \in \Delta_0}$.

Sea $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \Delta_0}$, donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. Entonces $\{e_j; j \in \Delta_0\}$ forma un sistema ortonormal completo en ℓ^2_Δ .

Siguiendo [Mo1] consideremos $A := A_\Delta$ como el operador (recordemos que para nosotros operador significa transformación lineal acotada) sobre ℓ^2_Δ definido por $(A(e_i), e_j) = a_{ij}$. El dominio de definición $D(A)$ del operador de adyacencia A , es el conjunto de puntos $x \in \ell^2_\Delta$ tales que $A(x) \in \ell^2_\Delta$.

El primer resultado básico sobre operadores de adyacencia es el siguiente:

Teorema. Sea Δ una gráfica acotada. Entonces

a) A es un operador acotado definido en ℓ^2_Δ , es decir

$$D(A) = \ell^2_\Delta \quad \text{y} \quad \|A\| := \sup\{\|A(x)\|; \|x\| = 1\} \leq M_\Delta.$$

b) A es un operador autoadjunto, esto es, $(A(x), y) = (x, A(y))$.

c) $\|A\| = \sup\{|(A(x), x)|; \|x\| = 1\}$.

Demostración: (a) se sigue del teorema de Schur [Ta, teorema 6.12.A]. (b) se sigue de que A es matriz simétrica y [H, §24, teor. 2]. (c) se sigue de (b) y [H, §24]. \square

2.3. El espectro $\sigma(\Delta)$ de la gráfica Δ está definido como el espectro del operador de adyacencia $A = A_\Delta$ (ver (0.4)).

Siendo A un operador, su espectro $\sigma(\Delta)$ es el siguiente

$$\sigma(\Delta) = \{\lambda \in \mathbf{C}; \lambda I - A \text{ es un operador no invertible}\},$$

donde I denota el operador identidad en ℓ^2_Δ ; además, el conjunto de valores propios $\sigma_0(\Delta)$ de A está contenido en \mathbf{R} (ver [Mo1]).

Como A es un operador autoadjunto, tenemos la siguiente caracterización del espectro $\sigma(\Delta)$.

Proposición [H,§31]. Sea Δ una gráfica acotada. Entonces

$$\sigma(\Delta) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbf{C}; \text{ existe una sucesión } (x_m)_{m \in \mathbf{N}} \text{ en } \ell_{\Delta}^2 \\ \text{con } \|x_n\| = 1, \text{ tal que } \lim_{m \rightarrow \infty} \|A(x_m) - \lambda x_m\| = 0 \end{array} \right\}. \quad \square$$

2.4. El *radio espectral* $\rho(\Delta)$ de Δ está definido como el radio espectral de A , es decir, $\rho(A) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(\Delta)\}$.

Si Δ es una gráfica finita, entonces el teorema de Perron-Frobenius (1.8), asegura que $\rho(\Delta) \in \sigma_0(\Delta)$ (i.e. $\rho(\Delta)$ es un valor propio de A), y existe un vector $x \gg 0$ (con todas sus coordenadas positivas) tal que $A(x) = \rho(\Delta)x$. En la situación general, lo siguiente es sabido (ver por ejemplo [Ta, §6.2] y [H, §24]).

Proposición. Sea Δ una gráfica acotada. Entonces:

- a) $\rho(\Delta) \in \sigma(\Delta)$.
- b) $\rho(\Delta) = \|A_{\Delta}\| = \sup\{|(A_{\Delta}(x), x)|; x \in \ell_{\Delta}^2, \|x\| = 1\}$.
- c) $\sigma(\Delta) \subset [-M_{\Delta}, M_{\Delta}]$. □

2.5. Sea F_1, F_2, \dots una sucesión de subgráficas de Δ .

Siguiendo [Mol], decimos que esta sucesión *converge* a Δ , en símbolos $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \Delta$, si para cada arista $\alpha \in \Delta_1$, existe un número $N = N(\alpha)$ tal que $\alpha \in (F_m)_1$, para cada $m \geq N(\alpha)$.

El siguiente resultado será muy útil.

Teorema [Mol]. Sea F_1, F_2, \dots una sucesión de subgráficas de Δ que converge a Δ . Entonces

$$\rho(\Delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F_m).$$

Para la demostración necesitaremos de la siguiente:

Proposición [Mol]. Sean F_1, F_2, \dots subgráficas de Δ tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \Delta$. Denotemos por $A_m = A_{F_m}$ a los operadores de adyacencia. Podemos suponer que F_m y Δ tienen los mismos vértices, de forma que el operador A_m está definido en ℓ_{Δ}^2 .

Entonces, los operadores A_m convergen fuertemente a $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$, i.e. para cada $x \in \ell_{\Delta}^2$, $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(x) = A(x)$.

Demostración [Mol]: Denotemos las entradas de la matriz de adyacencia de F_m por m_{ij} ; más precisamente: $m_{ij} = (A_m(e_i), e_j)$, si $i, j \in (F_m)_0$ y $m_{ij} = 0$ en otro caso. Por (2.4.b y c), $\|A\| \leq M_\Delta$ y $\|A_m\| \leq M_\Delta$ ($m \in \mathbf{N}$). Sean $x = (x_i)_{i \in \Delta_0} \in \ell_\Delta^2$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, definamos $x^{(m)} = (x_i^{(m)})_{i \in \Delta_0}$, donde $x_i^{(m)} = 0$ si $i \leq m$ y $x_i^{(m)} = x_i$ si no. Escojamos ℓ suficientemente grande tal que $\|x^{(\ell)}\| < \varepsilon/2M_\Delta$. Las gráficas F_m convergen a Δ ; entonces podemos encontrar un número $L \in \mathbf{N}$ tal que $m_{ij} = a_{ij}$ para cada $m \geq L$ y cada $i \leq \ell$. Entonces para $m \geq L$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|A(x) - A_m(x)\| &= \|A(x^{(\ell)}) - A_m(x^{(\ell)})\| \leq \|A(x^{(\ell)})\| + \|A_m(x^{(\ell)})\| \\ &\leq M_\Delta \|x^{(\ell)}\| + M_\Delta \|x^{(\ell)}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε fue arbitraria, $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(x) = A(x)$. □

Demostración del teorema [Mol]: Por la proposición anterior tenemos que $\{A_n\}_n$ converge fuertemente a $A = A_\Delta$ y por lo tanto, para cada $x \in \ell_\Delta^2$ con $\|x\| = 1$,

$$2.5.1. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m(x), x) = (A(x), x).$$

Por el teorema (2.2.c), podemos escoger x tal que $|(A(x), x)|$ esté arbitrariamente cerca de $\|A\|$. Entonces de (2.5.1) y (2.4.b), obtenemos

$$2.5.2. \quad \rho(\Delta) = \|A\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|A_m\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \rho(F_m).$$

Ahora se demostrará que $\rho(\Delta) \geq \rho(F)$ para cualquier subgráfica finita F de Δ . Por el teorema de Perron-Frobenius, podemos elegir un vector propio x de A_F , con todas sus coordenadas positivas y de norma uno, que corresponde al valor propio $\rho(F)$. Como antes, podemos suponer que $x \in \ell_\Delta^2$. Entonces, como las matrices de adyacencia son no negativas,

$$\rho(\Delta) = \|A\| \geq \|A(x)\| \geq \|A_F(x)\| = \rho(F).$$

Si todas las gráficas F_1, F_2, \dots son finitas, obtenemos

$$2.5.3. \quad \rho(\Delta) \geq \sup\{\rho(F_m); m \in \mathbf{N}\} \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \rho(F_m) \geq \rho(\Delta).$$

Esto dice que la igualdad se cumple en (2.5.2). Más aún,

$$2.5.4. \quad \rho(\Delta) = \sup\{\rho(F); F \text{ es subgráfica finita de } \Delta\},$$

pues siempre podemos escoger subgráficas finitas que convergen a Δ .

Ahora, como cualquier subgráfica de F_n es también subgráfica de Δ , concluimos de (2.5.4) que $\rho(F_n) \leq \rho(\Delta)$, también para subgráficas infinitas de Δ . Por lo tanto, (2.5.3) es cierto en el caso general. Por (2.5.2) y (2.5.3), se tiene el resultado. \square

2.6. Corolario a) $\rho(\Delta) = \sup\{\rho(F); F \text{ es subgráfica finita de } \Delta\}$
 $= \sup\{\rho(F); F \text{ es subgráfica de } \Delta\}.$

b) Sean $\Delta' \subset \Delta$ gráficas (no necesariamente finitas), entonces $\rho(\Delta') \leq \rho(\Delta)$. \square

2.7. Sea Δ una gráfica conexa y localmente finita, ver (0.5).

Un camino (no orientado) de longitud m de u a v es una sucesión $\gamma = (z_0, \beta_1, z_1; \dots; z_{m-1}, \beta_m, z_m)$ con $z_{i-1} \xrightarrow{\beta_i} z_i$ tal que $z_0 = u$ y $z_m = v$. Para cada camino γ definiremos formalmente γ^{-1} como $\gamma^{-1} = (z_m, \beta_m, z_{m-1}; \dots; z_1, \beta_1, z_0)$ (es decir, recorreremos γ en sentido contrario).

Otra manera de verlo es la siguiente:

Sea $\tilde{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ un carcaj con la gráfica subyacente Δ , ver (0.5). Entonces, la orientación de Δ está determinada por las funciones $s, e: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$.

Dada una arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ con $s(\alpha) = i$ y $e(\alpha) = j$, definiremos formalmente α^{-1} con $s(\alpha^{-1}) = j$ y $e(\alpha^{-1}) = i$. Un camino (no orientado) de longitud m de u a v es una sucesión $\gamma = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ tal que $\beta_i = \alpha_i$ ó α_i^{-1} para alguna arista α_i , y $u = s(\beta_1)$, $e(\beta_1) = s(\beta_2), \dots, e(\beta_m) = v$. Definimos $s(\gamma) = u$ y $e(\gamma) = v$.

Si A denota la matriz de adyacencia de Δ , las matrices potencia $A^m = (a_{uv}^{(m)})$ están bien definidas para $m \in \mathbf{N}$, y es bien conocido que $a_{uv}^{(m)}$ es el número de caminos de longitud m de u a v .

Proposición ([Ki], [Vj]). Sea Δ una gráfica conexa y acotada. Entonces para cada $u, v \in \Delta_0$,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_{uv}^{(m)}} = \rho(\Delta).$$

Demostración [PT2]: a) Δ es finita. Sea n el número de vértices de Δ . Como A es matriz simétrica y real, tenemos que A es ortogonalmente diagonalizable (ver [HrJ, pág. 107]) y $\sigma(\Delta) \subset \mathbf{R}$. Sea $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \rho(\Delta)$ los valores propios de Δ .

Como A es ortogonalmente diagonalizable, existe una base de \mathbf{R}^n que consiste de vectores propios normalizados y mutuamente ortogonales v_1, \dots, v_n (en la cual A se diagonaliza). Entonces

$$A = V^T D V,$$

donde $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y V es la matriz ortogonal de $n \times n$, cuyo i -ésimo renglón es el vector v_i . De donde obtenemos que $(a_{ij}^{(\ell)}) := A^\ell = V^T D^\ell V$, y $a_{ij}^{(\ell)} = \sum_{s=1}^n \lambda_s^\ell v_s(i) v_s(j)$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por (1.8), $\lambda_n \neq \lambda_s$ para $s \neq n$, y podemos escoger $v_n \gg 0$.

Por lo tanto, para ℓ suficientemente grande, tenemos que

$$0 \leq \frac{\sqrt[\ell]{a_{nn}^{(\ell)}}}{\rho(\Delta)} = \sqrt[n]{v_n^2(n) + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_s}{\rho(\Delta)} \right)^\ell v_s^2(n)} \leq \sqrt[n]{\sum_{s=1}^n v_s^2(n)} \leq 1.$$

Más aún, si ℓ es par, entonces se tiene:

$$0 < a_{nn}^{(\ell)} \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_s}{\rho(\Delta)} \right)^\ell v_s^2(n).$$

Luego, $0 < \sqrt[\ell]{v_n^2(n)} \leq \frac{\sqrt[\ell]{a_{nn}^{(\ell)}}}{\rho(\Delta)} \leq 1$.

Por lo tanto, sabiendo que $\limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{v_n^2(n)} = 1$ y dejando nuevamente correr $\ell \in \mathbf{N}$, se tiene:

$$\rho(\Delta) = \limsup_{\ell} \sqrt[2\ell]{a_{nn}^{(2\ell)}} \leq \limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{nn}^{(\ell)}} \leq \rho(\Delta).$$

Esto es,

$$2.7.1 \quad \rho(\Delta) = \limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{nn}^{(\ell)}}$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, existe un número $j \geq 0$ tal que $a_{in}^{(j)} > 0$, ya que Δ es conexa. Como $a_{in}^{(j)} a_{nn}^{(\ell-j)} \leq a_{in}^{(\ell)}$, para $\ell \geq j$; $\limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{in}^{(\ell-j)}} = \rho(\Delta)$, y $\limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{in}^{(j)}} = 1$, se sigue que

$$0 \leq \sqrt[\ell]{a_{in}^{(j)}} \sqrt[\ell]{a_{nn}^{(\ell-j)}} \leq \sqrt[\ell]{a_{in}^{(\ell)}}.$$

Por (2.7.1), obtenemos que

$$2.7.2 \quad \limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{in}^{(\ell)}} \geq \rho(\Delta).$$

Observemos que para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tenemos, $a_{in}^{(\ell)} = a_{ni}^{(\ell)}$, entonces

$$\limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{ni}^{(\ell)}} \geq \rho(\Delta).$$

Además,

$$2.7.3 \quad \limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{ih}^{(\ell)}} \geq \rho(\Delta), \quad \text{para todo } 1 \leq i, h \leq n$$

se sigue de $a_{ih}^{(\ell)} \geq a_{in}^{(\ell-j)} a_{nh}^{(j)}$, con j elegida como antes de (2.7.2).

b) Si Δ es finita, observemos que $a_{ij}^{(\ell)} \leq \rho(\Delta)^\ell$. En efecto, por el teorema de Perron-Frobenius (1.8), existe un vector $x \gg 0$, con todas sus entradas positivas, tal que $A(x) = \rho(\Delta)x$. Definamos la matriz diagonal $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, donde x_i es la i -ésima coordenada de x . Consideremos la matriz estocástica $P = \frac{1}{\rho(\Delta)} D A D^{-1}$, (i.e. $P \geq 0$, $(1, \dots, 1)P = (1, \dots, 1)$). Entonces P^ℓ es también estocástica, en particular su (i, j) -ésima entrada $\frac{1}{\rho(\Delta)^\ell} x_i a_{ij}^{(\ell)} x_j^{-1} \leq 1$. Análogamente obtenemos $\frac{1}{\rho(\Delta)^\ell} x_j a_{ij}^{(\ell)} x_i^{-1} \leq 1$. Luego, como $A^{(\ell)}$ es simétrica, $a_{ij}^{(\ell)} \leq \rho(\Delta)^\ell$ y usando (2.7.3), tenemos

$$\limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{ij}^{(\ell)}} = \rho(\Delta).$$

c) Supongamos que Δ es infinita. Por (2.5), podemos escribir $\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m$, donde F_m es una subgráfica finita y conexa de Δ , con $F_m \subset F_{m+1}$. Entonces, por (2.6), $\rho(\Delta) = \sup\{\rho(F_m)\}$. Sea $A_{F_m} = (a(F_m)_{ij})$. Sea $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \rho(\Delta) - \rho(F_m) < \varepsilon$. Por (a,b), $\sup_{\ell} \sqrt[\ell]{a(F_m)_{ij}^{(\ell)}} = \rho(F_m)$. Tomemos $h \in \mathbb{N}$ con $0 \leq \rho(F_m) - \sqrt[h]{a(F_m)_{ij}^{(h)}} < \varepsilon$. Como $a_{ij}^{(h)} \geq a(F_m)_{ij}^{(h)}$, entonces

$$0 \leq \rho(\Delta) - \sqrt[h]{a_{ij}^{(h)}} \leq (\rho(\Delta) - \rho(F)) + (\rho(F) - \sqrt[h]{a(F_m)_{ij}^{(h)}}) < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, $\rho(\Delta) \leq \limsup_{\ell} \sqrt[\ell]{a_{ij}^{(\ell)}}$. La otra desigualdad se sigue de que en general $a_{ij}^{(\ell)} \leq \rho(\Delta)^\ell$ (pues $a_{ij}^{(\ell)} = a(F_m)_{ij}^{(\ell)}$ para m suficientemente grande, ver (b) y (2.6)). \square

2.8. A continuación veremos en ejemplos algunos de los métodos para calcular el radio espectral de gráficas infinitas. Encontrar el espectro o simplemente el radio espectral de gráficas infinitas es en muchos casos una tarea bastante complicada.

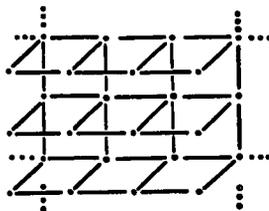
a) $A_\infty^\infty : \dots \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \dots$.

Por (2.4.c), $\sigma(A_\infty^\infty) \subset [-2, 2]$; en (4.1.a), demostraremos que $\sigma(A_\infty^\infty) = [-2, 2]$.

Por lo tanto, $\rho(A_\infty^\infty) = 2$.

Además, se tiene que $\sigma_0(A_\infty^\infty) = \emptyset$ (ver [CDS]).

b) Δ :



Para calcular el radio espectral de Δ usaremos la siguiente definición de *suma de gráficas*, ver [CDS, pág. 65].

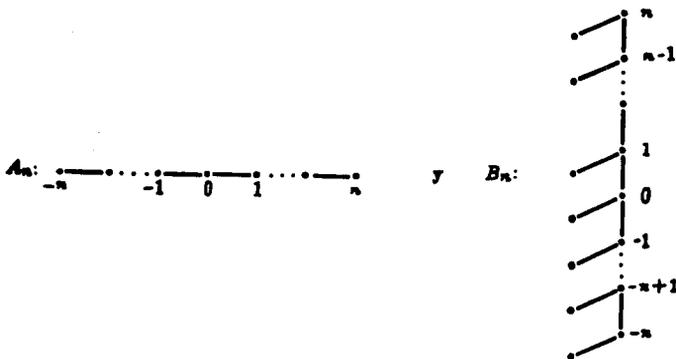
Sean A, B dos gráficas, definamos su suma $A + B$ como sigue:

Por definición, $(A + B)_0 = A_0 \times B_0$.

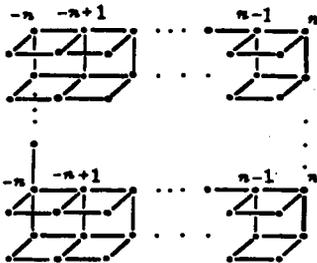
Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in (A + B)_0$. Entonces (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son *adyacentes* en $A + B$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $B(b_1, b_2) \neq \emptyset$ (i.e. son adyacentes en B) ó $b_1 = b_2$ y $A(a_1, a_2) \neq \emptyset$.

Además, sabemos que en general, $\rho(A + B) = \rho(A) + \rho(B)$, ver [CDS, 2.5].

Consideremos las siguientes gráficas:

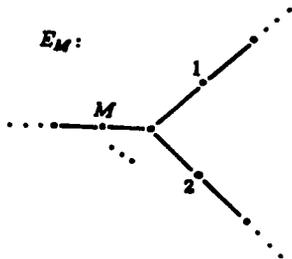


Entonces $A_n + B_n$:



Tenemos que $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n)$. Por (2.5), $\rho(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(A_n) + \rho(B_n))$. Además, el polinomio característico de B_n es $P_{B_n}(\lambda) = \lambda^n P_{A_n}(\lambda - \lambda^{-1})$, esto se demuestra usando inducción y [CDS, 2.3]. Luego, el radio espectral $\rho(A_n) = \rho(B_n) - \rho(B_n)^{-1}$ o bien $\rho(B_n) = \frac{\rho(A_n) + \sqrt{\rho(A_n)^2 + 4}}{2}$. Por otro lado, por (2.5) y (2.8.a), $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n) = 2$. Luego, $\rho(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(A_n) + \rho(B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \rho(A_n) + \frac{1}{2} \sqrt{\rho(A_n)^2 + 4} \right) = 3 + \sqrt{2}$.

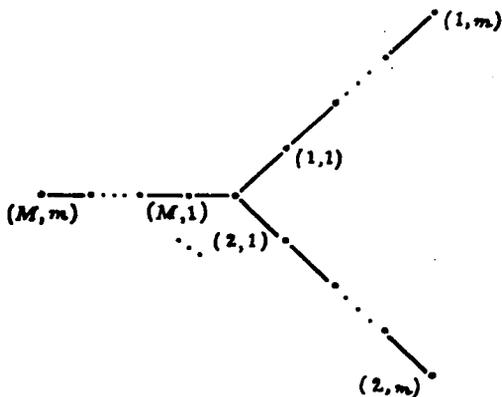
c) Sea $1 < M \in \mathbb{N}$. Denotemos por E_M a la estrella con M brazos infinitos.



Entonces $\rho(E_M) = (M-1)^{1/2} + (M-1)^{-1/2}$.

Demostración [PT3]: Sin pérdida de generalidad $M \geq 3$, pues cuando $M = 2$, $E_M = A_\infty$, entonces (a) nos da el resultado.

Sea $M \geq 3$. Consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$, la siguiente estrella finita, $E_M^{(m)}$:



Sea A_m la gráfica: $1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \dots \text{ --- } m$.

Mostraremos que $\rho(E_M) > \lambda$. Como $p_m(\lambda_0) > 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, bastará demostrar que existe $m_0 = m_0(\lambda)$ tal que $p_{m_0}(\lambda) < 0$ (pues así, $\lambda < \rho(E_M^{(m_0)}) \leq \rho(E_M^{(m_0+1)}) \leq \dots \leq \rho(E_M)$). En efecto, como $\mu^2 - (M - 1) < 0$ podemos encontrar m_0 suficientemente grande tal que

$$\mu^{-(m_0+1)}(\mu^2(M-1) - 1) < (M-1) - \mu^2 < \mu^{m_0+1}((M-1) - \mu^2).$$

Por lo tanto, $p_{m_0}(\lambda) < 0$. Luego, $\rho(E_M) = \lambda_0$. □

3. LA CUBIERTA DE GALOIS DE UNA GRÁFICA PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Este capítulo trata de las principales propiedades de las cubiertas de Galois de gráficas, que nos permitirán más adelante estudiar otras propiedades espectrales de las matrices de adyacencia de gráficas finitas e infinitas.

Este capítulo se basa principalmente en [P1], [MzP], [PT2] y [PT3].

3.1. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ un morfismo de gráficas, ver (0.5), diremos que π es *sobre* si para cada arista $\alpha \in \Delta_1$, existe $\beta \in \bar{\Delta}_1$ tal que $\pi(\beta) = \alpha$.

Sea G un grupo de automorfismos de la gráfica $\bar{\Delta}$ actuando libremente en $\bar{\Delta}$, es decir, si para algún $g \in G$, existe $x \in \bar{\Delta}_0$ (resp. $\alpha \in \bar{\Delta}_1$) tal que $g(x) = x$ (resp. $g(\alpha) = \alpha$), entonces $g = 1$.

Por definición un morfismo sobre, $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$, es una *cubierta de Galois* definida por el grupo G si $\pi g = \pi$, para cada $g \in G$, y para cada $x \in \bar{\Delta}_0$ (resp. $\alpha \in \bar{\Delta}_1$) $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$ (resp. $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$).

3.2. Lema. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Supongamos que Δ es una gráfica finita. Entonces

- a) $\bar{\Delta}$ es una gráfica acotada, ver (0.5).
- b) G es un grupo finitamente generado.

Demostración: a) Basta observar que si $i \in \bar{\Delta}_0$, entonces $\deg_{\bar{\Delta}}(i) = \deg_{\Delta}(\pi(i)) < \infty$. Además,

$$M_{\bar{\Delta}} = M_{\Delta} = \sup\{\deg_{\Delta}(s); s \in \Delta_0\} < \infty.$$

b) La siguiente construcción sigue a [GoMc] y [B].

Denotemos las órbitas de G en $\bar{\Delta}_0$ por $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, donde $n = |\Delta_0|$. Veremos que existe una subgráfica conexa y plena W de $\bar{\Delta}$ tal que $|W_0 \cap \Omega_i| = 1$, para $1 \leq i \leq n$.

Por inducción construiremos una subgráfica conexa W_i de $\bar{\Delta}$, de forma que W_i tiene i vértices, $i \leq n$ y la intersección $W_i \cap \Omega_j$ tiene a lo más 1 vértice para toda $j = 1, \dots, n$. Entonces $W = W_n$ es la subgráfica que deseamos.

Sea $u_0 \in \bar{\Delta}$, $W_1 := \{u_0\}$ y supongamos definida W_i , ($i < n$) con esta propiedad. Tenemos que $\pi(W_i)$ es una subgráfica conexa de Δ con i puntos. Luego, existen $\bar{u}_i \in \Delta_0 \setminus (\pi(W_i))_0$ y una arista $\bar{\alpha}_i$ tales que $\bar{u}_i \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} x = \pi(x_i)$ con $x_i \in (W_i)_0$. Entonces existe una arista $u_i \xrightarrow{\alpha_i} x_i$ de forma que $\pi(\alpha_i) = \bar{\alpha}_i$. La subgráfica plena y conexa W_{i+1} de $\bar{\Delta}$ con vértices $(W_i)_0 \cup \{u_i\}$ interseca cada órbita Ω_j en a lo más 1 vértice.

Entonces $|W_0| = n$; $W_0 \cap g(W_0) = \emptyset$ si $g \neq 1$; $\bar{\Delta}_0 = \bigcup_{g \in G} g(W_0)$ (pues $|W_0 \cap \Omega_i| = 1$, $1 \leq i \leq n$, y G define a π).

Sea S el conjunto de todos los elementos $1 \neq g \in G$ tales que las subgráficas disjuntas W y $g(W)$ son adyacentes en $\bar{\Delta}$ (esto es, tales que existe una arista $u \xrightarrow{\alpha} v$ con $u \in W$ y $v \in g(W)$). En este caso escribimos $g(W) \text{---} W$. Como $\bar{\Delta}$ es acotada (por (a)) y W es finita, entonces S es finito. Más aún, $\bar{\Delta}$ conexa implica que S genera a G , ya que $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$, $\alpha \in \bar{\Delta}_1$; $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$, $x \in \bar{\Delta}_0$; y $g(W) \text{---} g'(W)$ sii $g^{-1}g' \in S$.

Por lo tanto, G es un grupo finitamente generado. □

3.3. Lema. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción del grupo G . Sea (s, e) una orientación en Δ , ver (0.5). Entonces existe una orientación (\bar{s}, \bar{e}) de $\bar{\Delta}$ que satisface:

i) $\pi\bar{s} = s\pi$ y $\pi\bar{e} = e\pi$;

ii) $\bar{s}g = g\bar{s}$ y $\bar{e}g = g\bar{e}$, para toda $g \in G$.

iii) Además, (\bar{s}, \bar{e}) es única hasta isomorfía de carcajes; esto es, si existe (s', e') otra orientación de Δ que satisface (i) y (ii), entonces existe $\varphi: (\bar{\Delta}, (\bar{s}, \bar{e})) \rightarrow (\bar{\Delta}, (s', e'))$ isomorfismo de carcajes, ver (0.5).

Demostración: Para cada arista $\alpha \in \Delta_1$, escogemos una arista $i \xrightarrow{\bar{\alpha}} j$ en $\bar{\Delta}_1$ tal que $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$. Definimos $\bar{s}(\bar{\alpha})$ y $\bar{e}(\bar{\alpha})$ con las siguientes propiedades: $\pi\bar{s}(\bar{\alpha}) = s(\alpha)$, $\pi\bar{e}(\bar{\alpha}) = e(\alpha)$. Entonces, $\{\bar{s}(\bar{\alpha}), \bar{e}(\bar{\alpha})\} = \{i, j\}$.

Para $g \in G$, ponemos $\bar{s}(g(\bar{\alpha})) = g(\bar{s}(\bar{\alpha}))$ y $\bar{e}(g(\bar{\alpha})) = g(\bar{e}(\bar{\alpha}))$.

Están bien definidas por construcción y porque si $g(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$ entonces $g = 1$.

Demostraremos (iii) en (3.5).

3.4. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción del grupo G . Fijemos (s, e) una orientación de Δ y (\bar{s}, \bar{e}) una orientación de $\bar{\Delta}$ que satisface las propiedades (i) y (ii) del lema (3.3).

Para cada arista $\alpha \in \bar{\Delta}$, definamos $\pi(\alpha^{-1}) = \pi(\alpha)^{-1}$. Para un camino de longitud m , $\gamma = (z_0, \beta_1, z_1; \dots; z_{m-1}, \beta_m, z_m)$ en $\bar{\Delta}$, definimos $\pi(\gamma) = (\pi(z_0), \pi(\beta_1), \pi(z_1); \dots; \pi(z_{m-1}), \pi(\beta_m), \pi(z_m))$ un camino de longitud m en Δ (ver (2.7)).

Proposición. π tiene la propiedad del levantamiento único de caminos, esto es, para cada camino δ en Δ y cada vértice $i \in \bar{\Delta}_0$ con $\pi(i) = s(\delta)$, existe un único camino $\bar{\delta}$ en $\bar{\Delta}$ que satisface $\bar{s}(\bar{\delta}) = i$ y $\pi(\bar{\delta}) = \delta$.

Demostración: Por inducción es suficiente demostrar la propiedad del levantamiento único para caminos de longitud 1 (i.e. para aristas).

Existencia. Sea $u \xrightarrow{\alpha} v \in \Delta_1$ tal que $s(\alpha) = u$ y $e(\alpha) = v$. Sea $i \in \bar{\Delta}_0$, $\pi(i) = u$. Como π es sobre, existe una arista $a \xrightarrow{\gamma} b \in \bar{\Delta}_1$ con $\pi(\gamma) = \alpha$. Sin pérdida de generalidad $\pi(a) = u$, por lo tanto, existe $g \in G$, con $g(a) = i$. Entonces $i \xrightarrow{g(\gamma)} g(b)$ es una arista en $\bar{\Delta}$ con $\pi(g(\gamma)) = \alpha$. Denotemos $\beta := g(\gamma)$ y $j := g(b)$.

Si $i = \bar{s}(\beta)$, entonces $\bar{\alpha} = \beta$. Si $i = \bar{e}(\beta)$, entonces $\pi(j) = v = e(\alpha) = \pi(\bar{e}(\beta)) = \pi(i)$, por tanto existe $h \in G$ con $h(j) = i$. Entonces $\bar{\alpha} = h(\beta)$ satisface $\bar{s}(\bar{\alpha}) = h(\bar{s}(\beta)) = i$.

Unicidad. Si $\alpha' \in \bar{\Delta}_1$ es otra arista que satisface $\bar{s}(\alpha') = i$ y $\pi(\alpha') = \alpha$, entonces $g(\bar{\alpha}) = \alpha'$, para algún $g \in G$. Así, obtenemos $i = \bar{s}(\alpha') = \bar{s}(g(\bar{\alpha})) = g(\bar{s}(\bar{\alpha})) = g(i)$, y $g = 1$. \square

3.5. Demostración de (3.3 (iii)): Supongamos que existe (s', e') otra orientación de $\bar{\Delta}$ que satisface (i) y (ii). Demostraremos que $\bar{\Delta} := (\bar{\Delta}, (\bar{s}, \bar{e}))$ y $\bar{\Delta}' := (\bar{\Delta}', (s', e'))$ con $\Delta' = \bar{\Delta}$, son isomorfos.

Recordemos que nuestras gráficas $\bar{\Delta}$ son conexas, entonces cualesquiera dos vértices en $\bar{\Delta}_0$ están conectados por un camino finito.

Usando la propiedad del levantamiento único de caminos (3.4), demostraremos que existe $\varphi: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}'$ isomorfismo de carcajes.

Sean $x_1 \in \bar{\Delta}_0$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell_1} \in \bar{\Delta}_1$ las flechas de $\bar{\Delta}$ que contienen a x_1 . Sea $y_1 \in \bar{\Delta}'_0$ tal que $\pi(x_1) = \pi(y_1)$.

Tomemos $\pi(\alpha_i) \in \bar{\Delta}_1$, para cada $1 \leq i \leq \ell_1$, donde $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}, (s, e))$. Como $\bar{\Delta}'$ satisface (i) y (ii) del lema, entonces existe $\beta_i \in \bar{\Delta}'_1$ flecha que contiene a y_1 , tal que $\pi(\beta_i) = \pi(\alpha_i)$ con $\pi s'(\beta_i) = s\pi(\alpha_i)$, $\pi e'(\beta_i) = e\pi(\alpha_i)$; además con la propiedad de que $\bar{s}(\alpha_i) = x_1$ sii $s'(\beta_i) = y_1$. Definimos $\varphi(x_1) := y_1$ y $\varphi(\alpha_i) := \beta_i$. Por lo anterior, $\varphi\bar{s}(\alpha_i) = s'\varphi(\alpha_i)$ y $\varphi\bar{e}(\alpha_i) = e'\varphi(\alpha_i)$. Además, por la propiedad del levantamiento único de caminos $\beta_i \neq \beta_j$ para toda $i \neq j$.

Y así continuamos construyendo φ inductivamente (podemos hacerlo pues $\bar{\Delta}$ es acotada y por la propiedad (ii) del lema). La construcción simétrica de $\bar{\Delta}'$ en $\bar{\Delta}$ nos dá la inversa de φ . Por lo tanto, $(\bar{\Delta}, (\bar{s}, \bar{e}))$ y $(\bar{\Delta}, (s', e'))$ son isomorfos. \square

3.5.1. Observemos que φ hace conmutativo el siguiente diagrama de morfismos de carcajes

$$\begin{array}{ccc} (\bar{\Delta}, (\bar{s}, \bar{e})) & \xrightarrow{\varphi} & (\bar{\Delta}, (s', e')) \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi & \\ (\Delta, (s, e)) & & \end{array}$$

3.6. Corolario [PT2]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por el grupo G . Sea $\bar{A} = A_{\bar{\Delta}} = (\bar{a}_{ij})$ (resp. $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$) la matriz de adyacencia de $\bar{\Delta}$ (resp. Δ). Para cada $i, j \in \bar{\Delta}_0$ y $m \geq 1$ tenemos

$$\sum_{\pi(t)=\pi(j)} \bar{a}_{it}^{(m)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(m)} \quad \text{y} \quad \sum_{\pi(t)=\pi(i)} \bar{a}_{tj}^{(m)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(m)}.$$

Donde $A^m = (a_{uv}^{(m)})$ es la matriz potencia de A . Recordemos que $a_{uv}^{(m)}$ es el número de caminos de longitud m de u a v en Δ (ver 2.7).

Demostración: Sean $i, j \in \bar{\Delta}_0$. Denotemos por $\bar{W}^{(m)}(i, j)$ (resp. $W^{(m)}(\pi(i), \pi(j))$) el conjunto de todos los caminos de longitud m de i a j en $\bar{\Delta}$ (resp. de $\pi(i)$ a $\pi(j)$ en Δ). La proposición (3.4) da una biyección

$$\bigcup_{\pi(t)=\pi(j)} \bar{W}^{(m)}(i, t) \rightarrow W^{(m)}(\pi(i), \pi(j))$$

por el levantamiento único de caminos. El resultado se sigue de las observaciones en (2.7). \square

3.7. Ejemplos.

a) Sea $\bar{\Delta}$ una gráfica y G un grupo de automorfismos de $\bar{\Delta}$ actuando libremente sobre $\bar{\Delta}$. Definamos la *gráfica cociente* $\bar{\Delta}/G$ como la gráfica cuyos vértices son las órbitas Gx , $x \in \bar{\Delta}_0$ y cuyas aristas son de la forma $G\alpha: Gx \rightarrow Gy$ para cualquier arista $x \xrightarrow{\alpha} y$ de $\bar{\Delta}$. Claramente el morfismo de gráficas $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}/G$, $\alpha \mapsto G\alpha$, es una cubierta de Galois definida por la acción de G .

b) Sea G un grupo finitamente generado. Sea S un conjunto finito de generadores, tal que $1 \notin S$. La *gráfica de Cayley* $\Delta = \Delta(G, S)$ tiene como conjunto de vértices $\Delta_0 = G$ y para cada $g \in G$ y $s \in S$, una arista $g \xrightarrow{s} gs$. Entonces G es un grupo de automorfismos de Δ que actúa libremente sobre Δ . La gráfica cociente Δ/G es un bouquet de $|S|$ lazos. Observemos que Δ es gráfica regular (i.e., el grado de todos los vértices es el mismo).

Las siguientes proposiciones son versiones para gráficas de resultados bien conocidos en Topología Algebraica (ver por ejemplo [Ma] y [P1]).

3.8. Proposición. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de cubiertas de Galois

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{\Delta} \\ & \nearrow \bar{\pi} & \downarrow \pi \\ \Delta' & \xrightarrow{\pi'} & \Delta \end{array}$$

donde π está definido por la acción de un grupo G . Entonces,

i) $G = \{f \in \text{Aut}(\bar{\Delta}); \pi f = \pi\}$;

ii) Existe $N \triangleleft G$ tal que N define a $\bar{\pi}$ y G/N a π' . □

Recíprocamente,

3.8.1. Proposición. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Entonces si N es un subgrupo normal de G , existe un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{\Delta} \\ & \nearrow \bar{\pi} & \downarrow \pi \\ \Delta' & \xrightarrow{\pi'} & \Delta \end{array}$$

donde N define a $\bar{\pi}$ y G/N a π' .

Demostración: Sea Δ' la gráfica cociente $\bar{\Delta}/N$ (ver (3.7.a)), entonces G/N actúa libremente sobre Δ' . En efecto, si $\bar{g} \in G/N$ y $Nx \in \Delta'_0$ (resp. $N\alpha \in \Delta'_1$) son tales que $Nx = \bar{g}(Nx) := Ng(x)$ (resp. $N\alpha = \bar{g}(N\alpha) := Ng(\alpha)$) entonces existe $h \in N$ tal que $g(x) = h(x)$ (resp. $g(\alpha) = h(\alpha)$), luego, como G actúa libremente en $\bar{\Delta}$, $\bar{g} = \bar{1}$. Definimos $\bar{\pi}: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta'$ como en (3.7.a).

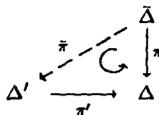
Construiremos $\pi': \Delta' \rightarrow \Delta$ cubierta de Galois definida por la acción de G/N . Sea $Nx \in \Delta'_0$ (resp. $N\alpha \in \Delta'_1$), definamos $\pi'(Nx) = \pi(x)$ (resp. $\pi'(N\alpha) = \pi(\alpha)$). π' está bien definida y satisface $\pi'\bar{g} = \pi'$, $\bar{g} \in G/N$, $\pi'^{-1}\pi'(Nx) = G/N(Nx)$ (resp. $\pi'^{-1}\pi'(N\alpha) = G/N(N\alpha)$), pues π es cubierta de Galois. \square

3.9. Un grupo G es *residualmente finito* sii para cada $x \in G$, $x \neq 1$ existe un subgrupo normal N_x de índice finito en G con $x \notin N_x$.

Observemos que G es residualmente finito sii para cada subconjunto finito $S \subset G$, $1 \notin S$, existe un subgrupo normal N_S , de índice finito en G con $S \cap N_S = \emptyset$. (Esto sucede pues intersección finita de subgrupos normales de índice finito es un subgrupo normal de índice finito).

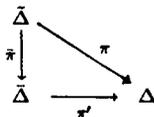
3.9.1. Como ejemplos de grupos residualmente finitos tenemos a los grupos libres, los grupos lineales finitamente generados, entre otros, ver [Hl] y [Pi].

3.9.2. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Una *factorización* (finita) de π , es una cubierta de Galois $\pi': \Delta' \rightarrow \Delta$ (con Δ' gráfica finita) de forma que existe un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois.



Proposición [PT3]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G residualmente finito y supongamos que Δ es una gráfica finita.

Entonces, dada $\Delta' \subset \tilde{\Delta}$ una subgráfica finita de $\tilde{\Delta}$, existe $\pi': \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ factorización finita de π



de forma que $\tilde{\pi}|: \Delta' \rightarrow \tilde{\Delta}$ es inyectiva.

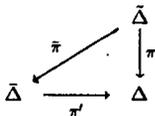
Más aún, si $\Delta' \subset \tilde{\Delta}$ es una subgráfica plena, entonces podemos encontrar dicha factorización finita de tal forma que $\tilde{\pi}(\Delta') \subset \tilde{\Delta}$ es subgráfica plena de $\tilde{\Delta}$.

Demostración: a) Sea $S := \{g \in G; g \neq 1, g(\Delta') \cap \Delta' \neq \emptyset\}$, demostraremos que S es un conjunto finito. Supongamos que S es infinito, como Δ' es finita, existe $x \in \Delta'_0$ y $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de elementos distintos en S y $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en Δ'_0 tales que $g_m(y_m) = x$, otra vez, por ser Δ' finita existen $y \in \Delta'_0$ y una subsucesión $(y_{m_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tales que $y_{m_\ell} = y$, para toda ℓ .

Tomemos $\ell \neq \ell'$, por lo anterior $g_{m_\ell}(y) = g_{m_{\ell'}}(y)$.

Como G actúa libremente sobre $\tilde{\Delta}$, tenemos que $g_{m_\ell} = g_{m_{\ell'}}$, una contradicción. Por lo tanto, S es un conjunto finito. Por (3.9), existe $N \triangleleft G$ subgrupo normal de índice finito tal que $N \cap S = \emptyset$.

Por (3.8.1), obtenemos un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois



con $\tilde{\pi}$ (resp. π') definida por N (resp. G/N).

b) Falta demostrar que $\tilde{\pi}|: \Delta' \rightarrow \tilde{\Delta}$ es inyectiva. En efecto, si $x \neq y \in \Delta'_0$ son tales que $\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$ entonces $y \in Nx$ y existe $h \in N$ tal que $y = h(x)$, luego $h \in N \cap S = \emptyset$, contradicción.

c) Ahora, si $\Delta' \subset \tilde{\Delta}$ es una subgráfica plena, escojamos $\Delta'' \subset \tilde{\Delta}$ la subgráfica plena de $\tilde{\Delta}$ cuyo conjunto de vértices es $\Delta'_0 \cup \{x \in \tilde{\Delta}_0; \exists y \in \Delta'_0, y \xrightarrow{\pi} x\}$. Entonces $\Delta' \subset \Delta''$ es una gráfica finita (pues Δ' lo es y $\tilde{\Delta}$ es acotada), y por lo anterior, existe una factorización finita $\tilde{\pi}$ de π , de tal forma que $\tilde{\pi}|: \Delta'' \rightarrow \tilde{\Delta}$ es inyectiva; por lo tanto, $\tilde{\pi}|: \Delta' \rightarrow \tilde{\Delta}$ también lo es.

Además, $\tilde{\pi}(\Delta')$ es subgráfica plena de $\tilde{\Delta}$: pues supongamos que $x \xrightarrow{\alpha} y \in \tilde{\Delta}$, $x, y \in (\tilde{\pi}(\Delta'))_0$. Tomemos $\bar{x}, \bar{y} \in \Delta'_0$ tales que $\tilde{\pi}(\bar{x}) = x$ y $\tilde{\pi}(\bar{y}) = y$. Por la propiedad

del levantamiento único de caminos (en \bar{x}), existe $\bar{x} \xrightarrow{\bar{\alpha}} z$ en $\tilde{\Delta}$ (de hecho, en Δ'') tal que $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$, entonces $\bar{\pi}(z) = y = \bar{\pi}(\bar{y})$, pero $\bar{\pi}$ es inyectiva en Δ'' , por lo tanto $\bar{y} = z$, y como Δ' es plena en $\tilde{\Delta}$, entonces $\bar{\alpha} \in \Delta'_1$, esto es $\alpha \in \bar{\pi}(\Delta')$. \square

3.10. Decimos que una cubierta de Galois $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ definida por un grupo G es *cubierta universal* de Δ , si cualquier otra cubierta de Galois $\pi': \tilde{\Delta}' \rightarrow \Delta$ es una factorización de π . Es decir, existe una cubierta de Galois $\bar{\pi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}'$ con $\pi' \bar{\pi} = \pi$. Además, si $x \in \tilde{\Delta}_0$ y $y \in \tilde{\Delta}'_0$ son tales que $\pi(x) = \pi'(y)$, entonces existe una única $\bar{\pi}$, con $\bar{\pi}(x) = y$.

Observemos que una cubierta universal de Δ es única hasta isomorfía.

3.10.1. Sea Δ una gráfica conexa.

Recordemos qué es el *grupo fundamental* $\Pi_1(\Delta)$ de Δ . Sea $x \in \Delta_0$. Tomemos C_x el conjunto de todos los caminos (no orientados) γ de x a x , es decir $\gamma = (x = x_0, \beta_1, x_1; x_1, \beta_2, x_2; \dots; x_{m-2}, \beta_{m-1}, x_{m-1}; x_{m-1}, \beta_m, x_m = x)$ con $x_{i-1} \xrightarrow{\beta_i} x_i$ en Δ . Un camino puede pasar por la misma arista más de una vez, ver (2.7).

Denotamos por \sim la relación de equivalencia en C_x inducida por las siguientes relaciones elementales:

a) Si $\gamma \in C_x$, entonces $\gamma\gamma^{-1} \sim \tau_x$ y $\gamma^{-1}\gamma \sim \tau_x$, donde τ_x es el camino trivial en x (i.e. $\tau_x = (x, x)$).

b) Si $u \sim v$ por medio de (a), entonces $w'u \sim w'v$.

La relación \sim se llama *homotopía*.

Esta relación y el producto de caminos son compatibles en el siguiente sentido: Si $u_0 \sim u_1$ y $v_0 \sim v_1$, entonces $u_0v_0 \sim u_1v_1$.

Claramente, el conjunto de las clases de equivalencia de todos los caminos de x a x forma un grupo. Este grupo se llama el *grupo fundamental de Δ (con base x)* y se denota por $\Pi(\Delta, x)$.

Como Δ es conexa, si $x, y \in \Delta_0$, entonces $\Pi(\Delta, x)$ es isomorfo a $\Pi(\Delta, y)$.

Definamos el *grupo fundamental de Δ* , $\Pi_1(\Delta) = \Pi(\Delta, x)$ para cualquier $x \in \Delta_0$.

3.10.2. Teorema. El grupo fundamental de una gráfica conexa Δ es un grupo libre. (En particular, es residualmente finito (3.9.1)). \square

Como referencia sobre grupos fundamentales ver por ejemplo [Ma].

3.11. Proposición [P1]. Sea Δ una gráfica finita y conexa. Entonces

1) Existe $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ la cubierta universal de Δ , definida por la acción del grupo fundamental $\Pi_1(\Delta)$.

2) $\tilde{\Delta}$ es un árbol (i.e. no tiene ciclos).

Demostración [P1]:

3.11.1. Sea \mathcal{W} el conjunto de todos los caminos (no orientados) de Δ . Recordemos de (2.7), que un camino en Δ es una sucesión de aristas consecutivas. La *longitud* del camino es el número de aristas en él. Un camino puede pasar por la misma arista más de una vez.

Sea $\gamma = (x_0, \beta_1, x_1; x_1, \beta_2, x_2; \dots; x_{m-2}, \beta_{m-1}, x_{m-1}; x_{m-1}, \beta_m, x_m)$ un camino en Δ . Diremos que γ inicia en $x_0 =: i(\gamma)$ y termina en $x_m =: f(\gamma)$. Para cada camino γ tenemos el camino $\gamma^{-1} = (x_m, \beta_m, x_{m-1}; x_{m-1}, \beta_{m-1}, x_{m-2}; \dots; x_1, \beta_1, x_0)$ que se obtiene recorriendo γ en sentido contrario, ver (2.7).

Si $\gamma = (x_0, \beta_1, x_1; \dots; x_{m-1}, \beta_m, x_m)$ y $\gamma' = (x'_0, \beta'_1, x'_1; \dots; x'_{\ell-1}, \beta'_\ell, x'_\ell)$ son caminos de Δ tal que $i(\gamma') = f(\gamma)$ entonces el producto $\gamma'\gamma$ estará definido por

$$\gamma'\gamma = (x_0, \beta_1, x_1; \dots; x_{m-1}, \beta_m, x_m; x'_0, \beta'_1, x'_1; \dots; x'_{\ell-1}, \beta'_\ell, x'_\ell)$$

con $i(\gamma'\gamma) = i(\gamma)$ y $f(\gamma'\gamma) = f(\gamma')$.

Denotamos por \sim la relación de equivalencia en \mathcal{W} inducida por las siguientes relaciones elementales:

a) Si $\gamma \in \mathcal{W}$, entonces $\gamma\gamma^{-1} \sim \tau_{f(\gamma)}$ y $\gamma^{-1}\gamma \sim \tau_{i(\gamma)}$, donde τ_x es el camino trivial en x (i.e. $\tau_x = (x, x)$).

b) Si $u \sim v$ por medio de (a), entonces $w'u w \sim w'v w$, siempre que estos productos estén definidos.

La relación \sim se llama *homotopía*.

3.11.1.1. Observación. Esta relación y el producto de caminos son compatibles en el siguiente sentido: Si $u_0 \sim u_1$ y $v_0 \sim v_1$, entonces $u_0 v_0 \sim u_1 v_1$ (se supone, desde luego, que el final de v_0 coincide en el inicio de u_0).

Es decir, tenemos dos funciones $i, f: \mathcal{W}/\sim \rightarrow \Delta_0$, $i([u]) = i(u)$ y $f([u]) = f(u)$, con $[u]$ la clase de homotopía de u .

Se construye una gráfica W que tenga como conjunto de vértices a $W_0 = \mathcal{W}/\sim$. Tomemos $x_1, x_2 \in W_0$ con $i(x_1) = i(x_2)$. Pondremos $x_1 \text{ --- } x_2$ en W_1 sii existen

$w_1, w_2 \in W$ con $x_1 = [w_1]$, $x_2 = [w_2]$ y una arista $\alpha \in \Delta_1$ con $w_2 = \alpha w_1$. Notemos que α está determinada de manera única.

Se puede demostrar que W es unión de $|\Delta_0|$ componentes conexas, todas ellas isomorfas. Definamos $\Pi: W \rightarrow \Delta$ el morfismo de gráficas suprayectivo tal que $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2 \longmapsto f(x_1) \xrightarrow{\alpha} f(x_2)$.

3.11.2. Llamamos $\tilde{\Delta}$ a una de las componentes conexas de W (que corresponde a clases de caminos no orientados que parten de un punto fijo en Δ), y denotamos por $\pi := \Pi|_{\tilde{\Delta}}: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ la restricción de Π . Obviamente π es también un morfismo suprayectivo de gráficas.

Proposición [P1]. Sea $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ el morfismo construido anteriormente. Entonces

a) Para cada $x \in \tilde{\Delta}_0$, el morfismo inducido por $\pi: \{\alpha \in \tilde{\Delta}_1; \alpha \text{ contiene a } x\} \rightarrow \{\beta \in \Delta_1; \beta \text{ contiene a } \pi(x)\}$ es biyectivo.

b) Sea $G = \{g_{x,y}; x, y \in \tilde{\Delta}_0, \pi(x) = \pi(y)\}$ con $g_{x,y} \in \text{Aut}(\tilde{\Delta})$ definido por $g_{x,y}: \tilde{\Delta}_0 \rightarrow \tilde{\Delta}_0, z \longmapsto zx^{-1}y$, en vértices (definiendo el producto de dos clases de caminos como la clase del producto; está bien definido por (3.11.1.1)), y $g_{x,y}: \tilde{\Delta}_1 \rightarrow \tilde{\Delta}_1$, de la siguiente forma: si $z = [w] \xrightarrow{\hat{\alpha}} z' = [w']$ en $\tilde{\Delta}_1$, entonces existe $\alpha \in \Delta_1$ tal que $w' = \alpha w$ y $w'x^{-1}y = \alpha wx^{-1}y$, por lo que existe una única arista $zx^{-1}y \longrightarrow z'x^{-1}y$. Entonces G es un grupo con: $g_{x,y}^{-1} = g_{y,x}$ y $g_{x,y}g_{x',y'} = g_{xy^{-1}x',y'}$. Además,

b.1) π es una cubierta de Galois definida por la acción de G .

b.2) G es isomorfo al grupo fundamental de Δ , $\Pi_1(\Delta)$. Hay un isomorfismo inducido por $\varphi: G \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\Delta), g_{x,y} \longmapsto y^{-1}x$, ver (3.10.1).

b.3) $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ es cubierta universal de Δ (3.10). Esto es, si $\pi': \Delta' \rightarrow \Delta$ es una cubierta de Galois, definida por la acción del grupo H . Entonces,

Existe una cubierta de Galois $\bar{\pi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta'$, definida por $L \triangleleft G$ tal que $H \cong G/L$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\Delta} \\ & \swarrow \bar{\pi} & \downarrow \pi \\ \Delta' & \xrightarrow{\pi'} & \Delta \end{array}$$

(Señalado con un símbolo \odot en el centro del triángulo)

Para ejemplos, ver (4.1.(a,c,d)).

Demostración [P1]: a) se sigue de (3.6).

b.1) No es difícil demostrar que G es un grupo, y por la definición de la relación de homotopía, G actúa libremente sobre $\tilde{\Delta}$. Ahora, i) $\pi g_{x,y} = \pi$ con $\pi(x) = \pi(y)$. En efecto, $\pi g_{x,y}(z) = \pi(zx^{-1}y) = f(zx^{-1}y) = f(z) = \pi(z)$.

ii) Para cada $x \in \tilde{\Delta}_0$ (resp. $x \xrightarrow{\alpha} x' \in \tilde{\Delta}_1$), $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$ (resp. $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$), esto sucede porque si $y \in \tilde{\Delta}_0$ (resp. $y \xrightarrow{\beta} y' \in \tilde{\Delta}_1$) con $\pi(y) = \pi(x)$ (resp. $\pi(\beta) = \pi(\alpha)$), entonces $g_{x,y}(x) = y$ (resp. $g_{x,y}(\alpha) = \beta$).

Por lo tanto, π es cubierta de Galois, definida por G .

b.2) El homomorfismo $\varphi: G \rightarrow \Pi_1(\Delta)$, $g_{x,y} \mapsto y^{-1}x$ es claramente monomorfismo; φ es epimorfismo pues existe $i_0 \in \Delta_0$ tal que $\tilde{\Delta}_0 = \{[w] \in \mathcal{W}/\sim; i(w) = i_0\}$.

b.3) Sea $\pi': \Delta' \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G' . No es difícil probar el siguiente

3.11.3. Lema [P1]. Sean \bar{u}, \bar{v} caminos en Δ' ambos con punto inicial $x \in \Delta'_0$. Supongamos que $u = \pi'(\bar{u})$ y $v = \pi'(\bar{v})$ son tales que $u \sim v$, entonces también tienen ambos el mismo punto final $y \in \Delta'_0$. □

Ahora probaremos la "universalidad" de π : Sean $\pi': \Delta' \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois y $x \in \tilde{\Delta}_0$, $y \in \Delta'_0$ con $\pi(x) = \pi'(y)$. Construiremos $\bar{\pi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta'$.

Definamos $\bar{\pi}(x) = y$. Sea $x \xrightarrow{\hat{\alpha}} x'$ una arista en $\tilde{\Delta}$, luego tenemos $x = [w]$, $x' = [w']$ con $w' = \alpha w$. Como π' es cubierta de Galois, por el levantamiento único de trayectorias (3.4), hay una única arista $y \xrightarrow{\alpha'} y'$ con $\pi'(\alpha') = \alpha$. Ponemos $\bar{\pi}(x) = y \xrightarrow{\alpha' = \bar{\pi}(\hat{\alpha})} y' = \bar{\pi}(x')$. Y continuamos inductivamente de esta manera. Nuestro problema es ver si este morfismo está bien definido. Supongamos que $z \in \tilde{\Delta}_0$ y que podemos llegar a z desde x por dos caminos diferentes \bar{u} y \bar{v} , basta demostrar que el punto determinado en Δ'_0 por medio de cada uno de estos caminos es el mismo.

Pongamos $u = \pi(\bar{u})$, $v = \pi(\bar{v})$ y recordemos que $x = [w]$. El punto final de \bar{u} es $z = [uw]$ y el de \bar{v} es $z = [vw]$, luego $uw \sim vw$ y $u \sim v$. El punto asociado a z por medio de \bar{u} es el punto final del levantamiento por π' de u comenzando en y , llámese a este punto $f_{\Delta'}(u)$. Similarmente el punto asociado a z por medio de v es $f_{\Delta'}(v)$ el punto final del levantamiento en Δ' de v comenzando en y . Por (3.11.3), estos puntos son iguales, $f_{\Delta'}(u) = f_{\Delta'}(v)$ y $\bar{\pi}(z)$ está bien definido.

Luego, $\bar{\pi}$ es morfismo suprayectivo de gráficas con $\pi = \pi'\bar{\pi}$, $y = \bar{\pi}(x)$. La unicidad es una consecuencia trivial de la definición de $\bar{\pi}$ y de que π' es cubierta.

Consideremos $H = \{g \in G; \bar{\pi}g = \bar{\pi}\}$ subgrupo de G ($\cong \Pi_1(\Delta)$) que define a $\bar{\pi}$. En efecto, H actúa libremente sobre $\bar{\Delta}$, pues G lo hace y para cada $x \in \bar{\Delta}_0$ (resp. $x \xrightarrow{\hat{\alpha}} x'$ en $\bar{\Delta}_1$) $\bar{\pi}^{-1}\bar{\pi}(x) = Hx$ (resp. $\bar{\pi}^{-1}\bar{\pi}(\hat{\alpha}) = H\hat{\alpha}$) pues $\pi'\bar{\pi} = \pi$ y por el levantamiento único de caminos. Luego, por (3.8), obtenemos el resultado. \square

3.11.4. Recordemos que una gráfica es un árbol si no tiene ciclos.

La construcción que hicimos anteriormente de la cubierta universal, $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$, de Δ "es" su cubierta universal topológica, que sabemos es un espacio simplemente conexo, es decir $\bar{\Delta}$ es un árbol, ver [Ma].

Con lo que queda demostrado el teorema (3.11). \square

El siguiente resultado se sigue de (3.10.1) y (3.11):

3.12. Lema. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ la cubierta universal de Δ entonces

π está definida por \mathbf{Z} sii Δ tiene un único ciclo. \square

3.13. Podemos también definir *cubiertas de Galois de un carcaj* dado $\bar{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ y su cubierta universal (pedimos además que todos los morfismos que aparecen respeten las orientaciones de los carcajes). Por (3.3), podemos mostrar versiones de (3.8), (3.8.1), (3.9.2) y (3.11) para cubiertas de Galois de carcajes (también tenemos que estas últimas tienen la propiedad del levantamiento único de caminos orientados, como caso particular de (3.4)). Lo interesante es que con (3.3), evitamos rehacer las argumentaciones completas, por ejemplo mostraremos la existencia de la cubierta universal de $\bar{\Delta} = (\Delta, (s, e))$:

Sea $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ la cubierta universal de Δ definida en (3.11). Por (3.3), existe (\tilde{s}, \tilde{e}) orientación de $\tilde{\Delta}$ tal que $\pi: \tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}, (\tilde{s}, \tilde{e})) \rightarrow \tilde{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ es una cubierta de Galois. Falta demostrar la “universalidad” de π :

Sea $\pi': \tilde{\Delta}' = (\Delta', (s', e')) \rightarrow \tilde{\Delta}$ una cubierta de Galois. Entonces existe $\pi'': \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta'$ cubierta de Galois de gráficas tal que $\pi' \pi'' = \pi$.

Otra vez por (3.3), existe (\tilde{s}', \tilde{e}') orientación de $\tilde{\Delta}'$ tal que $\pi'': \tilde{\Delta}' := (\tilde{\Delta}', (\tilde{s}', \tilde{e}')) \rightarrow \tilde{\Delta}'$ es cubierta de Galois. Entonces para todo $\alpha \in \tilde{\Delta}_1$, $\pi \tilde{s}'(\alpha) = \pi'(\pi'' \tilde{s}'(\alpha)) = \pi' s'(\pi''(\alpha)) = s\pi(\alpha)$; análogamente $\pi \tilde{e}'(\alpha) = e\pi(\alpha)$.

Luego (por (3.3)), existe $\varphi: \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}'$ isomorfismo de carcajes. Denotemos por $\bar{\pi} := \pi'' \varphi: \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}'$ cubierta de Galois. Por (3.5.1), $\pi' \bar{\pi} = \pi$; $\bar{\pi} \tilde{s} = s' \bar{\pi}$ y $\bar{\pi} \tilde{e} = e' \bar{\pi}$. Con esto termina la demostración. \square

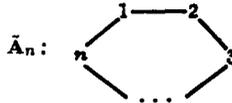
4. LA CUBIERTA DE GALOIS DE UNA GRÁFICA PROPIEDADES ESPECTRALES

Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois de una gráfica conexa Δ , definida por la acción de un grupo G . Estudiaremos las relaciones que existen entre los radios espectrales $\rho(\bar{\Delta})$ y $\rho(\Delta)$, de $\bar{\Delta}$ y Δ respectivamente. Probaremos que $\rho(\bar{\Delta}) \leq \rho(\Delta) \leq \rho(\bar{\Delta})^2$. Demostraremos que en el caso en que G es un grupo *manejable*, $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Este capítulo está basado en el artículo "The Spectral Radius of the Galois covering of a finite graph", trabajo conjunto con J.A. de la Peña [PT2].

4.1. Empezaremos dando algunos ejemplos de cubiertas de Galois y sus radios espectrales.

a) Sea Δ la gráfica . Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos las siguientes gráficas



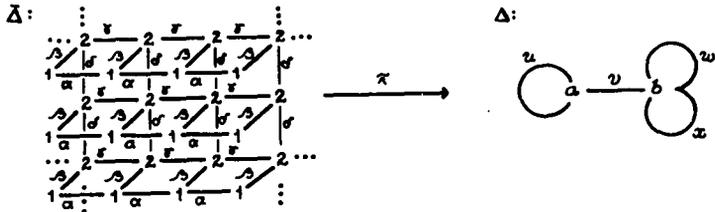
Existen únicos morfismos que son cubiertas de Galois $\pi_n: \bar{A}_n \rightarrow \Delta$ definidos por $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$, y $\pi_\infty: A_\infty \rightarrow \Delta$ definido por \mathbb{Z} .

Es conocido que $\sigma(\Delta) = \{2\}$, $\sigma(\bar{A}_n) = \{2 \cos \frac{2\pi}{n} j; j = 1, \dots, n\}$, ver [CDS, 2.1].

Por (4.11) y (2.4), se tiene que $[-2, 2] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A_\infty) \subset [-2, 2]$.

Entonces $\rho(\Delta) = \rho(\bar{A}_n) = \rho(A_\infty) = 2$.

b) Consideremos el siguiente morfismo de gráficas

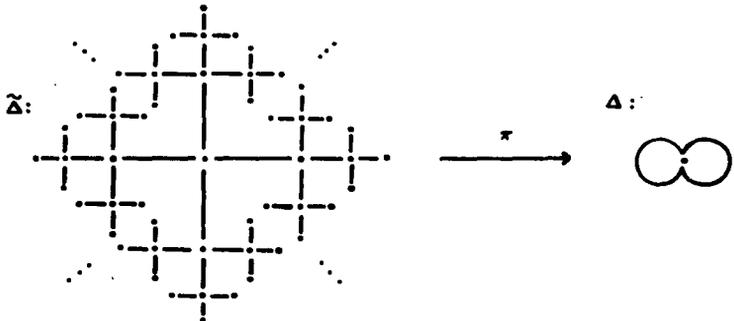


donde los puntos indicados por 1 (resp. 2) son enviados a a (resp. b) y las aristas indicadas por α (resp. β, γ, δ) son enviadas a u (resp. v, w, x). Por tanto, $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ es una cubierta de Galois definida por la acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

El radio espectral de Δ es la raíz maximal del polinomio $x^2 - 6x + 7$, entonces $\rho(\Delta) = 3 + \sqrt{2}$ y, por (2.8.b), $\rho(\tilde{\Delta}) = 3 + \sqrt{2} = \rho(\Delta)$.

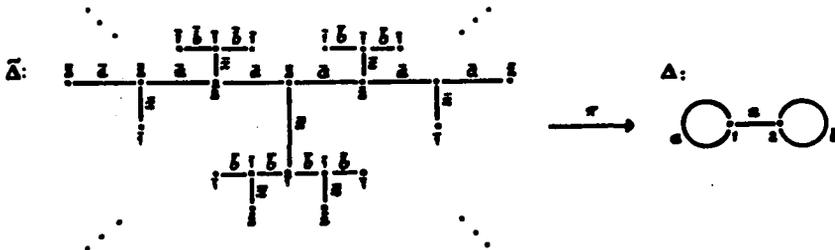
El caso general será tratado en (4.8).

c) Sea G el grupo libre en dos generadores a, b . Sea $\tilde{\Delta}$ la gráfica de Cayley $\Delta(G, \{a, b\})$. Por (3.7.b), tenemos que $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ es una cubierta de Galois (ver figura).



Entonces $\rho(\Delta) = 4$ y $\sigma(\tilde{\Delta}) = [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ (ver [Mc], [MoWo, §7]). En particular $\rho(\tilde{\Delta}) < \rho(\Delta)$.

d) Sea G el grupo libre en dos generadores u, v (como en (c)). Tomemos la siguiente cubierta de Galois definida por el grupo G :



donde $\pi(\bar{z}) = z$, $\bar{z} \in \tilde{\Delta}_0 \cup \tilde{\Delta}_1$.

Entonces $\sigma(\tilde{\Delta}) = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ y $\rho(\Delta) = 3$. En particular, $\rho(\tilde{\Delta}) < \rho(\Delta)$, ver [Mc] y [MoWo, §7]. (Aquí podemos observar que no todas las cubiertas universales son gráficas de Cayley).

Recordemos que nuestras gráficas son conexas.

4.2. Proposición [PT2]. Sea $\pi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois. Entonces

$$\rho(\tilde{\Delta}) \leq \rho(\Delta) \leq \rho(\tilde{\Delta})^2.$$

Demostración: a) Sean $u \in \Delta_0$, $i \in \tilde{\Delta}_0$ tales que $\pi(i) = u$. Por (3.6), $\bar{a}_{ii}^{(m)} \leq \alpha_{uu}^{(m)}$. Ahora por (2.7), se tiene

$$4.2.1 \quad \rho(\tilde{\Delta}) = \limsup \sqrt[m]{\bar{a}_{ii}^{(m)}} \leq \limsup \sqrt[m]{\alpha_{uu}^{(m)}} = \rho(\Delta).$$

b) Sean i y u como antes. Con la notación de (3.6), definimos una función $\varphi: W^{(m)}(u, u) \rightarrow \tilde{W}^{(2m)}(i, i)$. Para $\gamma = (x_0, \beta_1, x_1; \dots; x_{m-1}, \beta_m, x_m) \in W^{(m)}(u, u)$ tomamos un levantamiento de γ en $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\gamma} = (\bar{x}_0, \bar{\beta}_1, \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{m-1}, \bar{\beta}_m, \bar{x}_m) \in \tilde{W}^{(2m)}(i, i)$. Escribimos $\tilde{\gamma} = (\bar{x}_0, \bar{\beta}_1, \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{m-1}, \bar{\beta}_m, \bar{x}_m) =: (\bar{\beta}_1; \dots; \bar{\beta}_m)$ si no hay confusión.

Definimos $\varphi(\gamma) = (\bar{\beta}_1; \dots; \bar{\beta}_m; \bar{\beta}_m^{-1}; \dots; \bar{\beta}_1^{-1})$.

Claramente φ es inyectiva. Entonces por (2.7),

$$\rho(\Delta) = \limsup \sqrt[m]{a_{uu}^{(m)}} \leq \limsup \sqrt[m]{\bar{a}_{ii}^{(2m)}} = (\limsup \sqrt[m]{\bar{a}_{ii}^{(2m)}}) \leq \rho(\bar{\Delta})^2.$$

□

4.3. Proposición [PT2]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois. Si $\bar{\Delta}$ es una gráfica finita, entonces

a) $\sigma(\Delta) \subset \sigma(\bar{\Delta})$, donde $\sigma(\Delta)$ es el espectro de A_Δ . Más aún, el polinomio $\det(\lambda I - A_\Delta)$ divide a $\det(\lambda I - A_{\bar{\Delta}})$.

b) $\rho(\Delta) = \rho(\bar{\Delta})$.

Demostración: a) Sean $\bar{A} = A_{\bar{\Delta}} = (\bar{a}_{ij})$ y $A = A_\Delta = (a_{ij})$ las respectivas matrices de adyacencia. Observemos que $\bar{\Delta}$ finita implica que Δ es finita. Para probar el resultado es suficiente construir una base de $\mathbf{C}^{\bar{\Delta}_0}$ donde la matriz \bar{A} tome la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right].$$

Para cada $s \in \Delta_0$ definimos el vector $v^{(s)} \in \mathbf{C}^{\bar{\Delta}_0}$ tal que $v_j^{(s)} := 1$ si $\pi(j) = s$ y 0 en otro caso. Claramente, los vectores $v^{(s)}$ ($s \in \Delta_0$) son linealmente independientes. Más aún, por (3.6),

$$\bar{A}(v^{(s)})_j = \sum_{k \in \bar{\Delta}_0} \bar{a}_{kj} v_k^{(s)} = \sum_{\pi(k)=s} \bar{a}_{kj} = a_{s\pi(j)}.$$

Por lo tanto, $\bar{A}(v^{(s)}) = \sum_{t \in \Delta_0} a_{ts} v^{(t)}$, es decir, los vectores $v^{(s)}$ ($s \in \Delta_0$) son una base de un subespacio de $\mathbf{C}^{\bar{\Delta}_0}$ invariante bajo \bar{A} , con ésto obtenemos (a).

b) Es consecuencia de (4.2).

□

4.4. Proposición [PT2]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo finito G . Donde Δ no necesariamente gráfica finita. Entonces $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Demostración: Sea $(F_m)_m$ una sucesión de subgráficas finitas y plenas de $\bar{\Delta}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \bar{\Delta}$. Sea $F'_m = \pi(F_m)$ la subgráfica finita de Δ obtenida como la imagen de F_m . Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} F'_m = \Delta$ (ver 2.5).

Consideremos \hat{F}_m la subgráfica finita y plena de $\bar{\Delta}$ cuyo conjunto de vértices es $G(F_m)_0$. \hat{F}_m es finita, pues F_m y G lo son. La restricción $\pi|: \hat{F}_m \rightarrow F'_m$ es una cubierta de Galois definida por G . Entonces por (2.5) y (4.2), se tiene que

$$\rho(\bar{\Delta}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\hat{F}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F'_m) = \rho(\Delta).$$

□

4.5. En algunos casos especiales se pueden obtener estimaciones sencillas del valor del radio espectral $\rho(\Delta)$. La siguiente nos será de utilidad.

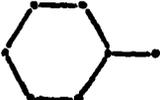
Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ la cubierta universal de Δ , donde Δ es una gráfica finita, conexa y sin vértices de grado 1.

$$\text{Sea } M_{\Delta} = \sup\{\deg(v); v \in \Delta_0\}.$$

Proposición ([PT3], [HfSm]). Con las anteriores hipótesis, tenemos

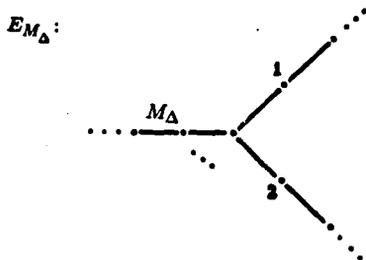
$$\rho(\Delta) \geq \rho(\bar{\Delta}) \geq (M_{\Delta} - 1)^{-1/2} + (M_{\Delta} - 1)^{1/2}.$$

Lo anterior es falso si Δ tiene vértices de grado 1. Veámoslo con un ejemplo sencillo.

Sea Δ :  , entonces $\rho(\Delta) = 2.1010\dots < 2^{1/2} + 2^{-1/2}$.

4.5.1. Para la demostración de (4.5) necesitamos el siguiente lema

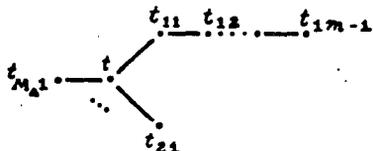
Lema. Con las hipótesis de (4.5). Existe una subgráfica plena de $\tilde{\Delta}$ isomorfa a E_{M_Δ} , donde



es la estrella infinita con M_Δ brazos.

Demostración: Como Δ es finita, entonces existe $v \in \Delta_0$ tal que $\deg(v) = M_\Delta$. Sea $t \in \tilde{\Delta}_0$ con $\pi(t) = v$. Entonces $\deg(t) = M_\Delta$ y como $\tilde{\Delta}$ es árbol, existen $t_{11}, \dots, t_{M_\Delta 1} \in \tilde{\Delta}_0$ vértices adyacentes a t en $\tilde{\Delta}$. Basta demostrar que de t_{11} podemos prolongar un brazo infinito, los demás se demuestran análogamente.

Supongamos que existe m y un brazo $t - t_{11} - \dots - t_{1m-1}$ tal que ya no se puede continuar a un camino de longitud m .



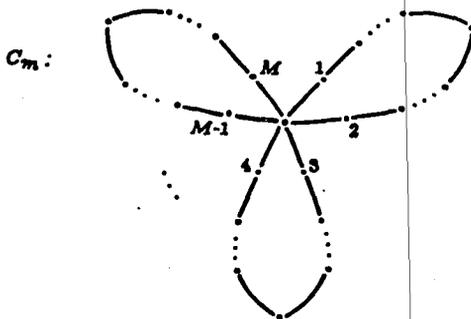
Como $\tilde{\Delta}$ es árbol, entonces $\deg(t_{1m-1}) = 1$, $\deg(\pi(t_{1m-1})) = 1$, que es una contradicción, pues Δ no tiene vértices de grado 1. \square

4.5.2. *Demostración de (4.5):* Como $E_{M_\Delta} \subset \tilde{\Delta}$, entonces por (2.8.c), (2.6) y (4.2), $(M_\Delta - 1)^{-1/2} + (M_\Delta - 1)^{1/2} = \rho(E_{M_\Delta}) \leq \rho(\tilde{\Delta}) \leq \rho(\Delta)$. \square

4.5.3. La proposición (4.5) da una cota óptima.

Lema. Sean $0 < M \in \mathbb{N}$, un número par y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ tal que $M_\Delta = M$ y $\rho(\Delta) - \rho(E_M) < \varepsilon$. (Utilizamos $M = 2\ell$ par, sólo por facilidad). En [HfSm], se trata este problema usando las llamadas “gráficas topológicamente equivalentes”.

Demostración: Tomemos la siguiente familia de gráficas. Para $m \in \mathbb{N}$, construimos la siguiente gráfica, que tiene ℓ ciclos de longitud m .



Entonces, por [HfSm, 2.4 y 3.4], $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(C_m) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \{\rho(C_m)\} = \rho(E_M)$. \square

4.6. La constante isoperimétrica y el crecimiento de grupos.

Sea Δ una gráfica y $X \subset \Delta_0$. La frontera ∂X de X es el conjunto de aristas en Δ que tiene un vértice en X y el otro en $\Delta_0 \setminus X$. La constante isoperimétrica $i(\Delta)$ de Δ es una medida de expansión de la gráfica. Se define como

$$i(\Delta) = \inf \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|}; X \subset \Delta_0, X \text{ es un subconjunto finito de } \Delta_0 \right\},$$

si Δ es una gráfica infinita. Si Δ es finita,

$$i(\Delta) = \min \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|}; X \subset \Delta_0, |X| \leq \frac{1}{2} |\Delta_0| \right\},$$

ver por ejemplo [MoWo], [BiMoST].

Ejemplos: a) Consideremos la gráfica



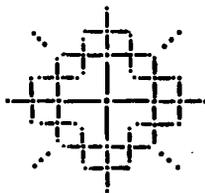
entonces, $i(\Delta) = \min \{2M, 2, \frac{2M-2\ell}{2}; \ell = 1, \dots, [\frac{M+1}{2}]\} = 2M [\frac{M+1}{2}]^{-1} - 1$.

b) En general, si Δ es una gráfica finita, conexa con más de un punto, $i(\Delta) > 0$. Sin embargo, podemos tener gráficas finitas con constante isoperimétrica tan pequeña como queramos, por ejemplo:

Sean $\tilde{A}_n = i_1 - i_2 - \dots - i_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(\tilde{A}_n) = 0:$$

c) Sea $\tilde{\Delta}$:



Por [Mo2, 3.1] y (4.1.c) tenemos

$$i(\tilde{\Delta}) \geq \frac{4^2(4 - 2\sqrt{3})}{4^2 - 4 - (4 - 2\sqrt{3})} > 1.$$

4.6.1 Si F es una subgráfica de Δ , denotemos por $\text{int}(F)$ al conjunto de *puntos interiores* de F . Esto es, sea $i \in F_0$, $i \in \text{int}(F)$ sii para cada arista $i - j$ en Δ , $j \in F_0$.

4.7. Un grupo finitamente generado G , con una gráfica de Cayley Γ tal que $i(\Gamma) = 0$ es llamado *manejable*. Si G es manejable, toda gráfica de Cayley de G tiene constante isoperimétrica 0, ([MoWo], [Pi]).

La definición de “manejable” viene de teoría de la medida: G un grupo topológico *finitamente generado* es manejable, si existe una función no-negativa μ , definida en la familia Γ de todos los conjuntos de Borel de G , tal que: (a) $\mu(G) = 1$; (b) μ es finitamente aditiva y (c) μ es invariante bajo la acción derecha de G en Γ .

Como ejemplos de grupos manejables tenemos a los grupos abelianos, y más en general, a los grupos que tienen crecimiento polinomial, ver (4.13).

Esta clase de grupos tienen muchas propiedades interesantes, como veremos a continuación, también ver [MoWo], [Pi].

4.8. Fijemos para el resto del capítulo una cubierta de Galois $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ definida por un grupo G , con $\bar{\Delta}$ y Δ gráficas conexas.

Teorema [PT2]. Sean Δ una gráfica conexas, finita, y $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por un grupo manejable G , entonces:

- a) $\sigma(\Delta) \subset \sigma(\bar{\Delta})$ y
- b) $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Daremos la demostración en (4.10).

4.9. Consideremos la cubierta $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$. Recordemos que por (3.2), $\bar{\Delta}$ es una gráfica acotada y G un grupo finitamente generado.

Denotemos las órbitas de G en $\bar{\Delta}_0$ por $\Omega_1, \dots, \Omega_t$. Por (3.2), existe una subgráfica conexas y plena W de $\bar{\Delta}$ tal que $|W_0 \cap \Omega_i| = 1$, para $1 \leq i \leq t$, con $|W_0| = |\Delta_0| =: t$; además si S es el conjunto de todos los elementos $1 \neq g \in G$ tales que las subgráficas disjuntas W y $g(W)$ son adyacentes en $\bar{\Delta}$, (esto es, existen $v \in W_0$, $u \in (g(W))_0$ y $v \xrightarrow{\alpha} u$ en $\bar{\Delta}$, escribimos $W \text{ --- } g(W)$), entonces S es finito y genera a G . Ver la construcción de W en (3.2).

Definimos $\Gamma = \Delta(G, S)$ la gráfica de Cayley asociada a (G, S) .

Lema [PT2]. Con la notación anterior, $i(\bar{\Delta}) \leq M_{\bar{\Delta}} i(\Gamma)$.

Demostración: Sea F una subgráfica finita y plena de Γ . Consideremos la subgráfica finita y plena L de $\bar{\Delta}$ con vértices $\bigcup_{g \in F_0} g(W_0)$. Entonces $|L_0| = t|F_0|$. Demostraremos que $|\partial L_0| \leq M_{\bar{\Delta}} t|\partial F_0|$, lo cual implica el resultado.

Consideremos la función $\varphi: L_0 \setminus \text{int}(L) \rightarrow F_0 \setminus \text{int}(F)$, $a \mapsto g_a$ tal que $a \in g_a(W_0)$. φ está bien definida: si $a \in L_0 \setminus \text{int}(L)$, existe alguna arista $a \text{ --- } b$ con $b \notin L_0$. Entonces $g_a^{-1}g_b \in S$ y obtenemos una arista $g_a \text{ --- } g_b$ en Γ . Como $b \notin L_0$, entonces $g_b \notin F_0$.

Claramente $\varphi^{-1}(g) \subset g(W_0)$. Esto implica que $|L_0 \setminus \text{int}(L)| \leq t|F_0 \setminus \text{int}(F)|$. Obtenemos $|\partial L_0| \leq M_{\bar{\Delta}} |L_0 \setminus \text{int}(L)| \leq M_{\bar{\Delta}} t|F_0 \setminus \text{int}(F)| \leq M_{\bar{\Delta}} t|\partial F_0|$. \square

4.10. Demostración del teorema (4.8). Sean $\bar{A} = A_{\bar{\Delta}} = (\bar{a}_{ij})$, $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$, y $t = |\Delta_0|$.

a) Sea $\lambda \in \sigma(\Delta)$. Demostraremos que $\lambda \in \sigma(\bar{\Delta})$. Para este propósito construiremos una sucesión $(y^{(n)})_n$ en $\ell_{\bar{\Delta}}^2$ con $\|y^{(n)}\| = 1$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{A}(y^{(n)}) - \lambda y^{(n)}\| = 0$ (2.3).

Como G es manejable, por (4.9), $i(\bar{\Delta}) = 0$, entonces sea $(L_n)_n$ una sucesión de subgráficas plenas y finitas de $\bar{\Delta}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial(L_n)_0|}{|(L_n)_0|} = 0$ y la función

$$4.10.1 \quad \Delta_0 \rightarrow \mathbf{N}, \quad s \mapsto |\pi^{-1}(s) \cap (L_n)_0|$$

es constante para cada $n \in \mathbf{N}$, ver (4.9).

Como Δ es una gráfica finita, podemos encontrar un vector $x \neq 0$ que satisface $A(x) = \lambda x$ y $\|x\| = 1$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, definimos $x^{(n)} \in \ell_{\bar{\Delta}}^2$ tal que $x_i^{(n)} = x_{\pi(i)}$ si $i \in (L_n)_0$ y $x_i^{(n)} = 0$ en otro caso. Entonces $y^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|} \in \ell_{\bar{\Delta}}^2$ y $\|y^{(n)}\| = 1$. Para $i \in \text{int}(L_n)$, tenemos que $\bar{a}_{ij} = 0$ para cada $j \notin (L_n)_0$. Así,

$$(\bar{A}(x^{(n)}))_i = \sum_{j \in (L_n)_0} \bar{a}_{ji} x_j^{(n)} = \sum_{s \in \Delta_0} \left(\sum_{\pi(j)=s} \bar{a}_{ji} \right) x_s = \sum_{s \in \Delta_0} a_{s\pi(i)} x_s = (A(x))_{\pi(i)} = \lambda x_i^{(n)}.$$

Si $(\bar{A}(x^{(n)}))_i \neq \lambda x_i^{(n)}$, entonces $i \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$ ó $i \notin (L_n)_0$ pero existe $j \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$ tal que $\bar{a}_{ji} x_j^{(n)} \neq 0$, (pues si $i \notin (L_n)_0$, $x_i^{(n)} = 0$; pero $\bar{A}(x^{(n)})_i \neq 0$). En ambos casos,

$$4.10.2 \quad |\bar{A}(x^{(n)})_i - \lambda x_i^{(n)}| \leq t M_{\bar{\Delta}}.$$

En efecto, si $i \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$, entonces $(\bar{A}(x^{(n)}))_i - \lambda x_i^{(n)} = - \sum_{s \in \Delta_0} \left(\sum_{\substack{\pi(j)=s \\ j \notin (L_n)_0}} \bar{a}_{ij} \right) x_s$.

El otro caso es similar.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\bar{A}(x^{(n)}) - \lambda x^{(n)}\| &= \sqrt{\sum_{i \notin \text{int}(L_n)} |\bar{A}(x^{(n)})_i - \lambda x_i^{(n)}|^2} \\ &\stackrel{(4.10.2)}{\leq} tM_{\Delta} \sqrt{|(L_n \setminus \text{int}(L_n))_0|} \leq tM_{\Delta} \sqrt{2|\partial(L_n)_0|}. \end{aligned}$$

Por (4.10.1), como $\|x\| = 1$, tenemos que $\|x^{(n)}\|^2 = \frac{|(L_n)_0|}{s \in \Delta_0} \sum |x_s|^2 = \frac{|(L_n)_0|}{s \in \Delta_0}$.

Entonces obtenemos

$$\|\bar{A}(y^{(n)}) - \lambda y^{(n)}\| \leq \sqrt{2} M_{\Delta} t^{3/2} \sqrt{\frac{|\partial(L_n)_0|}{|(L_n)_0|}}.$$

Luego, $\lambda \in \sigma(\bar{\Delta})$.

b) En particular, $\rho(\Delta) \in \sigma(\bar{\Delta})$ y por (4.2), tenemos que $\rho(\Delta) = \rho(\bar{\Delta})$. □

4.11. El siguiente resultado se sigue de (4.8) y de (0.4).

Corolario. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por un grupo G manejable. Si Δ es finita, entonces

$$\overline{\bigcup_{\substack{\Delta \rightarrow \Delta \\ \text{factorización} \\ \text{finita de } \pi}} \sigma(\bar{\Delta})} \subset \sigma(\bar{\Delta}).$$

□

4.11.1. Las contenciones anteriores pueden ser propias: por (2.8.a) y (4.1.a), tenemos que la cubierta universal

$$\bar{\Delta}: \dots \longrightarrow \Delta: \bigcirc$$

satisface $\phi = \sigma_0(\bar{\Delta}) \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2 \cos \frac{2\pi}{n} j; j = 1, \dots, n\} \subsetneq [-2, 2]$. Sin embargo,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2 \cos \frac{2\pi}{n} j; j = 1, \dots, n\} = [-2, 2].$$

4.12. Corolario. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por un grupo manejable G (con Δ no necesariamente finita), entonces $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Demostración: Sea $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ una sucesión de subgráficas finitas, plenas y conexas de Δ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \Delta$, ver (2.5). Para cada F_m , $m \in \mathbf{N}$, construiremos una cubierta de Galois asociada a π , de la siguiente forma:

Sea $\bar{\Delta}_m$ una componente conexa de la imagen inversa $\pi^{-1}(F_m)$.

Definamos $G_m = \{g \in G; g(\bar{\Delta}_m) \subset \bar{\Delta}_m\}$ que resulta ser un subgrupo de G : claramente, a) $1 \in G_m$; y b) Si $g, h \in G_m$, entonces $gh \in G_m$.

Mostraremos c): Si $g \in G_m$ entonces $g^{-1} \in G_m$.

Sea $x \xrightarrow{\alpha} y \in (\bar{\Delta}_m)_1$, como $\bar{\Delta}_m$ es conexa, existe un camino $\gamma = (g(x), g(\alpha) = \beta_1, g(y); \dots; x, \beta_\ell = \alpha, y)$ en $\bar{\Delta}_m$, entonces $g^{-1}(\gamma)$ es un camino de α a $g^{-1}(\alpha)$. Como π es cubierta de Galois, $\pi g^{-1}(\gamma) = \pi(\gamma) \subset F_m$. Es decir, si $\Delta' = \bar{\Delta}_m \cup \{g^{-1}(\gamma)\}$, entonces Δ' es conexa, $\bar{\Delta}_m \subset \Delta' \subset \pi^{-1}(F_m)$. Como $\bar{\Delta}_m$ es componente conexa de $\pi^{-1}(F_m)$, entonces $\bar{\Delta}_m = \Delta'$, y $g^{-1}(\alpha) \in \bar{\Delta}_m$.

Por lo tanto, $g^{-1}(\bar{\Delta}_m) \subset \bar{\Delta}_m$, y $G_m \leq G$ es subgrupo de G .

Así obtenemos que $\pi_m := \pi|_{\bar{\Delta}_m} : \bar{\Delta}_m \rightarrow F_m$ es una cubierta de Galois definida por G_m . Por [Ch], G_m es un grupo manejable, entonces por (2.6) y (4.8),

$$\rho(\bar{\Delta}) \geq \rho(\bar{\Delta}_m) = \rho(F_m) \quad \text{y} \quad \rho(\Delta) = \lim \rho(F_m) \leq \rho(\bar{\Delta}).$$

Por lo tanto, (4.2) implica que $\rho(\Delta) = \rho(\bar{\Delta})$. □

4.13. Sea Δ una gráfica conexa y acotada. Dados dos vértices $i, j \in \Delta_0$, la *distancia* $d(i, j)$ entre i y j está definida como

$$d(i, j) = \min \{n; \text{existe un camino de longitud } n \text{ de } i \text{ a } j\}.$$

Fijemos un vértice $i \in \Delta_0$. Entonces la *función de crecimiento* de Δ alrededor de i es $b_i(n) = |\{j \in \Delta_0; d(i, j) \leq n\}|$.

Se dice que Δ tiene *crecimiento polinomial de grado a lo más p* (con $p \in \mathbf{N}$) si existe una constante $c > 0$ tal que $b_i(n) \leq cn^p$; Δ tiene *crecimiento exponencial* si existen constantes $c > 0$ y $\xi > 1$ tales que $b_i(n) \geq c\xi^n$; Δ tiene *crecimiento subexponencial* si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_i(n)} = 1$. Es fácil ver que estas definiciones no dependen del vértice escogido i .

Sea G un grupo finitamente generado y S un conjunto finito de generadores de G . Consideremos la gráfica de Cayley $\bar{\Delta} = \Delta(G, S)$. Entonces $b_i(n)$ no depende de

la elección de i . Definamos $b(n) = b_i(n)$. Se dice que el grupo G tiene *crecimiento polinomial* (resp. *exponencial*, *subexponencial*) si $\Delta(G, S)$ tiene esa propiedad. Esta definición no depende de la elección de S .

La función de crecimiento fué originalmente introducida en [M1] para grupos. Lo siguiente es conocido sobre el crecimiento de un grupo finitamente generado G :

a) Si G es abeliano, entonces tiene crecimiento polinomial.

Por ejemplo, $G = \mathbf{Z}$: tomemos $S = \{1\}$, conjunto generador de \mathbf{Z} y $\Delta = \Delta(\mathbf{Z}, S)$ la gráfica de Cayley asociada a (\mathbf{Z}, S) es la siguiente, (ver (3.7.b)).

$$\Delta: \cdots \overset{-2}{\text{---}} \overset{-1}{\text{---}} \overset{0}{\text{---}} \overset{1}{\text{---}} \overset{2}{\text{---}} \cdots$$

Luego,

$$b(n) = b_0(n) = |\{j \in \mathbf{Z}; d(0, j) \leq n\}| = 2n + 1 \leq 3n, \text{ para cada } n \geq 1.$$

Esto es, G tiene crecimiento polinomial de grado 1.

b) Si G tiene un subgrupo nilpotente de índice finito, entonces G tiene crecimiento polinomial [Wf].

c) Si G tiene un subgrupo libre (no abeliano), entonces G tiene crecimiento exponencial, [Sa]. Por ejemplo, $G = \langle a, b \rangle$ el grupo libre en dos generadores: Tomemos $S = \{a, b\}$, entonces $\Delta = \Delta(G, S)$ es la siguiente:

$$\Delta: \begin{array}{ccccc} & & b^2 & & \\ & \ddots & | & \ddots & \\ & b a^{-1} & - b & - b a & \ddots \\ & | & | & | & \\ a^{-1} b & | & 1 & | & a b \\ a^{-2} & - a^{-1} & - 1 & - a & - a^2 \\ & | & | & | & \\ & a^{-1} b^{-1} & | & | & a b^{-1} \\ & | & | & | & \\ & b^{-1} a^{-1} & - b^{-1} & - b^{-1} a & \\ & \ddots & | & \ddots & \\ & & b^{-2} & & \end{array}$$

Sea $n \in \mathbf{N}$, $b(n)$ puede verse como el número de distintos elementos de G que pueden ser representados como un producto de a lo más n factores de la forma: a, a^{-1}, b, b^{-1} .

Entonces, $b(n) = 4 \left(\sum_{i=1}^{n-1} 3^i \right) + 1 > 3^n$ y G tiene crecimiento exponencial.

Luego, G no es manejable.

d) Hay grupos con crecimiento subexponencial y no polinomial, [Gr].

e) Si G no es manejable, entonces G tiene crecimiento exponencial (ver [Mo3, pág. 393, 4.3]).

f) Hay grupos manejables con crecimiento exponencial.

Por ejemplo, todo grupo soluble no policíclico tiene crecimiento exponencial, ([M2], [Wf]) y es manejable, [Pi].

Un grupo G es llamado *policíclico* si cada subgrupo de G es finitamente generado.

4.14. Proposición [PT2]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ cubierta de Galois definida por la acción de un grupo *finitamente generado* G con crecimiento polinomial, entonces $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Demostración: Demostraremos que G es manejable y aplicamos (4.12).

Sea $\Gamma = \Delta(G, S)$ la gráfica de Cayley definida en (4.9). Entonces Γ es una gráfica regular con valencia M_Γ . Luego, $\rho(\Gamma) \leq M_\Gamma$ (2.4). Como G tiene crecimiento polinomial, por [BiMoS-T, 2.2], $\rho(\Gamma) = M_\Gamma$.

Por (4.3), podemos suponer que $\bar{\Delta}$ es una gráfica infinita (por lo tanto Γ lo es). Por [BiMoS-T, 3.3], $i(\Gamma) = 0$, y G es manejable.

El teorema (4.12) da el resultado. □

4.15. Proposición [PT2]. Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por un grupo *finitamente generado* G . Si $\rho(\bar{\Delta}) < \rho(\Delta)$, entonces G tiene crecimiento exponencial.

Demostración: Sea $\Gamma = \Delta(G, S)$ la gráfica de Cayley definida en (4.9). Por (4.12), $i(\Gamma) > 0$. Otra vez [BiMoS-T; 3.3, 2.2] dice que $\rho(\Gamma) < M_\Gamma$ y Γ tiene crecimiento exponencial. □

4.16. Observación (de la Peña): Sea G un grupo finitamente generado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) G es manejable.

b) $\forall \pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ cubierta de Galois definida por G , entonces $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

c) S es un conjunto finito de generadores de G , entonces $\rho(\Delta(G, S)) = 2|S|$.

Demostración: a) \Rightarrow b): es (4.12);

b) \Rightarrow c): $\Delta(G, S) \xrightarrow{\pi} \bigcirc_{\alpha_s}^{\alpha_1}$, es cubierta de Galois definida por G y $s = |S|$; entonces $\rho(\Delta(G, S)) = 2|S|$.

c) \Rightarrow a): Si G es *finitamente generado*, entonces $\Delta = \Delta(G, S)$ es una gráfica regular, conexa de grado $2|S|$.

Si G no es manejable, entonces $\rho(\bar{\Delta}) \leq 2|S| - \frac{i(\bar{\Delta})^2}{4|S|} < 2|S|$, por [BiMoS-T]. Esto es a una contradicción. \square

4.17. Problema: ¿Son equivalentes:

a) G es manejable

b) Existe una cubierta de Galois $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ definida por G , con $\bar{\Delta}$ conexa tal que $\rho(\bar{\Delta}) = \rho(\Delta)$?

5. ÁLGEBRAS HEREDITARIAS Y OCULTAS

En este capítulo haremos un recorrido en el estudio de uno de los principales tipos de álgebras: las álgebras *hereditarias*; y trataremos una de las principales “teoría-herramienta” de la teoría de representaciones: la *teoría de tilteo*, que utilizaremos con mucha frecuencia en este trabajo.

Daremos aquí, sólo resultados ya conocidos; como referencias generales, ver ([R1], [HaR], [Ga2], [Bo1]); para definiciones y conceptos básicos, ver el capítulo 0.

5.1. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]/J$ una k -álgebra de dimensión finita. Diremos que Λ es de *tipo de representación*:

a) *Finito* si Λ tiene un número finito de clases de isomorfía de módulos inescindibles, ver ([Ga1], [Ga2], [BnGP], [DIR1]).

Si Λ es de tipo de representación infinito, se tienen los siguientes tipos de representación:

b) *Manso*: si para cualquier $d \in \mathbb{N}$, existe un número finito de Λ - $k[t]$ -bimódulos X_1, \dots, X_ℓ que son libres de rango d como $k[t]$ -módulos derechos, tales que todos los Λ -módulos inescindibles de dimensión d son de la forma $X_i \otimes_{k[t]} (k[t]/(t - \lambda))$, para algún $1 \leq i \leq \ell$ y $\lambda \in k$, ver [DIR1], [G1].

(Notemos que toda álgebra de tipo de representación finito cumple las propiedades del tipo de representación manso).

c) *Salvaje*: si existe X un Λ - $k(x, y)$ -bimódulo tal que X es libre finitamente generado como $k(x, y)$ -módulo derecho y $X \otimes_{k(x, y)} - : \text{mod } k(x, y) \rightarrow \text{mod } \Lambda$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Por comodidad, diremos que Λ es mansa (resp. salvaje) si Λ es de tipo de representación manso (resp. salvaje).

En 1979, en [Dr1], [Dr2] Drozd demostró que cualquier k -álgebra de dimensión finita, es mansa o salvaje, pero no ambas, ver también [Cb1].

En general, no hay técnicas para decidir si una k -álgebra Λ es de cierto tipo de representación. Sin embargo, se tienen algunos resultados parciales.

5.1.1. Teorema [P2]. Sean $\vec{\Delta}$ un carcaj finito y sin ciclos dirigidos, y J un ideal admisible de $k[\vec{\Delta}]$. Sea $\Lambda = k[\vec{\Delta}]/J$.

Si Λ es mansa entonces q_Λ , la forma cuadrática de Tits, es débilmente no negativa (i.e. $\forall z \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$, $q_\Lambda(z) \geq 0$). \square

5.1.2. Teorema [Cb1]. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita.

Si Λ es mansa, entonces casi todos los Λ -módulos inescindibles X de cada dimensión fija satisfacen $\tau X \cong X$. \square

Ahora nos enfocaremos a las k -álgebras hereditarias que han sido de las más estudiadas y en las cuales el problema de clasificación según su tipo de representación está resuelto.

5.2. Se dice que una k -álgebra Λ es *hereditaria* si todo ideal de Λ es proyectivo.

Proposición [Ga2]. Sea $\Lambda = k[\vec{\Delta}]/J$ una k -álgebra de dimensión finita. Λ es hereditaria si y sólo si $J = 0$ y $\vec{\Delta}$ no tiene ciclos dirigidos.

Demostración [CiLaSl]: (sólo si):

Supongamos que $x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\alpha_\ell} x_\ell = x_0$ es un ciclo en $\vec{\Delta}$. Por lo tanto, para cada i , la multiplicación por α_i define un morfismo $0 \neq \varphi_{\alpha_i}: P_{x_i} \rightarrow P_{x_{i-1}}$.

Sea $K_i = \text{Ker } \varphi_{\alpha_i}$, entonces K_i es proyectivo (Λ es hereditaria). Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K_i & \hookrightarrow & P_{x_i} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_i}} & P_{x_{i-1}} \\
 & & & & \downarrow \pi & \curvearrowright & \nearrow \varphi_{\alpha_i} \\
 & & & & P_{x_i}/K_i & &
 \end{array}$$

Existe $\bar{\varphi}_{\alpha_i}$ tal que $\bar{\varphi}_{\alpha_i} \pi = \varphi_{\alpha_i}$, además $\bar{\varphi}_{\alpha_i}$ es mono.

Entonces P_{x_i}/K_i es proyectivo y π se divide. Como P_{x_i} es inescindible, se tiene que $P_{x_i} \cong P_{x_i}/K_i$, y $K_i = 0$.

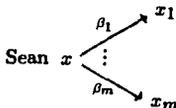
Tenemos que $\varphi := \varphi_{\alpha_1} \cdots \varphi_{\alpha_\ell}: P_{x_0} \rightarrow P_{x_0}$ es mono y como P_{x_0} es inescindible, φ es iso. Con lo que resulta que φ_{α_1} es iso y $x_1 = x_0$.

Sea $\bar{\alpha}_1 \in \Lambda$ la imagen de α_1 bajo la proyección canónica, entonces existe m con $\bar{\alpha}_1^m = 0$, $\bar{\alpha}_1^{m-1} \neq 0$ pero $\varphi_{\alpha_1}(\bar{\alpha}_1^{m-1}) = \bar{\alpha}_1^m = 0$, que es una contradicción (pues φ_{α_1} es iso).

Por lo tanto, Δ no tiene ciclos dirigidos.

Supongamos que $J \neq 0$. Podemos encontrar $x, y \in \Delta_0$ tal que $J(x, y) \neq 0$ y x es el punto "más adelantado" con esta propiedad, en el siguiente sentido:

Si $x \rightsquigarrow z$ es un camino dirigido de x a z , entonces $J(z, t) = 0$ para cada $t \in \Delta_0$.



Sean $x \begin{matrix} \nearrow \beta_1 \\ \vdots \\ \searrow \beta_m \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{matrix}$ todas las flechas que salen de x (donde las x_i 's no necesariamente son distintas entre sí).

No es difícil demostrar que $\bigoplus_{i=1}^m P_{x_i} \cong \text{rad } P_x$ (el radical de P_x), por ser Λ hereditaria.

Sea $c(s, t) =$ número de caminos dirigidos de s a t .

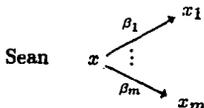
Entonces $\dim_k \text{rad } P_x(y) < c(x, y)$ (pues $J(x, y) \neq 0$); pero como $J(x_i, y) = 0$, $\dim_k \text{rad } P_x(y) = \dim_k \bigoplus_{i=1}^m P_{x_i}(y) = \sum_{i=1}^m c(x_i, y) = c(x, y)$, que es una contradicción.

Por lo tanto $J = 0$.

(si): Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]/J, \tilde{\Delta}$ sin ciclos orientados, y $J = 0$.

Demostremos que los submódulos de P_x son proyectivos, para toda $x \in \Delta_0$. (Ya que éstos son los proyectivos inescindibles de Λ).

Basta demostrar que el $\text{rad } P_x$ es proyectivo, para toda $x \in \Delta_0$ (pues si $X \subsetneq P_x$, entonces $X \subset \text{rad } P_x$).



Sean $x \begin{matrix} \nearrow \beta_1 \\ \vdots \\ \searrow \beta_m \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{matrix}$ todas las flechas que salen de x en $\tilde{\Delta}$, entonces

$\bigoplus_{i=1}^m P_{x_i} \xrightarrow{\pi} \text{rad } P_x \rightarrow 0$ es la cubierta proyectiva de $\text{rad } P_x$, donde $P_{x_i} \xrightarrow{\pi_i} \text{rad } P_x$, tiene la siguiente receta: $\gamma \mapsto \gamma\beta_i$.

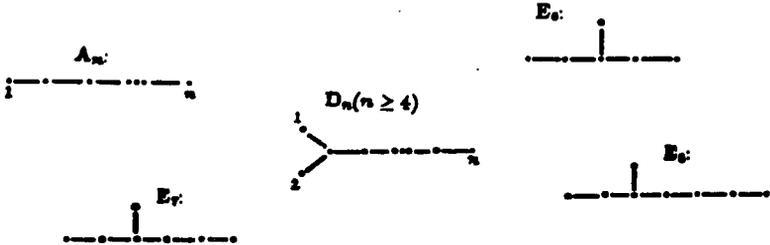
Supongamos que π no es mono. Entonces existe $y \in \Delta_0$ tal que $(\text{Ker } \pi)(y) \neq 0$. Luego, existe $0 \neq \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \bigoplus_{i=1}^m P_{x_i}(y)$, así algún $\gamma_i \neq 0$. Tenemos

$\bar{0} = \pi(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i$, y esto implica que $0 \neq \sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i \in J(x, y)$, que es una contradicción, porque $J = 0$. \square

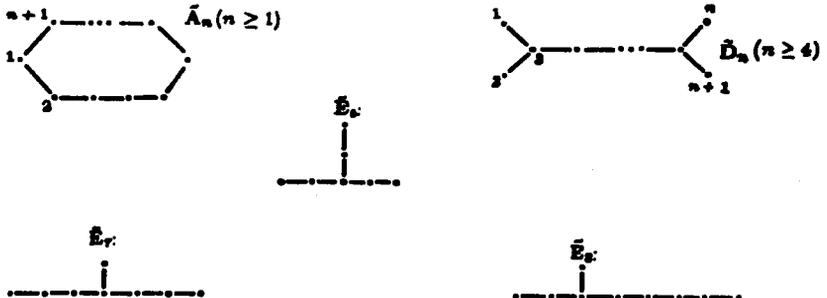
5.3. Ahora veremos algunos teoremas de clasificación de las álgebras hereditarias según su tipo de representación. El primero depende de Δ , la gráfica subyacente al carcaj $\tilde{\Delta}$.

5.3.1. Teorema ([Gal], [BeMW], [BnGP]): Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria de dimensión finita (i.e. $\tilde{\Delta}$ sin ciclos orientados). Entonces

a) Λ es de tipo de representación finito sii Δ es alguno de los siguientes diagramas, conocidos como diagramas de *Dynkin*:



b) Λ es de tipo de representación manso (y no finito) sii Δ es alguno de los siguientes diagramas, llamados *euclidianos*:



5.3.1.1. Teorema. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria de dimensión finita. Sea $\rho(\Delta)$ el radio espectral de la matriz de adyacencia de Δ (ver (2.4)). Entonces

- i) Λ es de tipo de representación finito sii $\rho(\Delta) < 2$.
- ii) Λ es de tipo de representación manso sii $\rho(\Delta) = 2$.
- iii) Λ es de tipo de representación salvaje sii $\rho(\Delta) > 2$.

Demostración: Para (ii) se hacen explícitamente los cálculos, utilizando (5.3.1).

(i) y (iii) se siguen de (1.9). □

Siempre que digamos "tipo de representación manso" implicará que no es de tipo finito.

5.3.2. Como en (0.8), sea T_Λ la matriz de Tits asociada a $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$. Como Λ es hereditaria, T_Λ toma la siguiente forma: $T_\Lambda = 2I - A_\Delta$, donde A_Δ es la matriz de adyacencia de Δ .

Sean V^+ el cono positivo de $V = \mathbf{R}^n$, ver (cap. 1) y $T_\Lambda^{-1}(V^+)$ la imagen inversa de V^+ bajo T_Λ .

Now es difícil probar que T_Λ satisface una y sólo una de las siguientes propiedades (ver [T]):

- a) (T_Λ es Elíptico) $T_\Lambda^{-1}(V^+) \subset V^+$;
- b) (T_Λ es Parabólico) $T_\Lambda^{-1}(V^+) = \text{Ker } T_\Lambda = \mathbf{R}u$, para algún vector $u \gg 0$;
- c) (T_Λ es Hiperbólico) $T_\Lambda^{-1}(V^+) \cap V^+ = \{0\}$ (sii existe $u \ll 0$ con $T_\Lambda(u) \gg 0$).

Teorema ([Kc1], ver también [T]). Sean $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria y $n = |\Delta_0|$. Entonces,

- a) Λ es de tipo de representación finito sii $\bar{\Delta}$ es elíptico (es decir, T_Λ es elíptico).
- b) Λ es de tipo de representación manso sii $\bar{\Delta}$ es parabólico.
- c) Λ es de tipo de representación salvaje sii $\bar{\Delta}$ es hiperbólico.

5.3.3. Teorema. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria, con $n = |\Delta_0|$, y sea q_Λ su forma de Tits. Entonces

- i) Λ es de tipo de representación finito sii q_Λ es positiva definida, (i.e. $\forall 0 \neq z \in \mathbf{Z}^n$, $q_\Lambda(z) > 0$).
- i') Λ es de tipo de representación finito sii q_Λ es débilmente positiva, (i.e. $q_\Lambda(z) > 0$,

$\forall 0 \neq z \in V^+$).

ii) Λ es mansa sii q_Λ es no negativa, (i.e. $\forall z \in \mathbb{Z}^n$, $q_\Lambda(z) \geq 0$ y q_Λ no es positiva definida). También, en este caso, la conclusión del teorema (5.1.1) es una afirmación equivalente.

iii) Λ es salvaje sii q_Λ es indefinida, (esto es, existen z_1, z_2 tales que $q_\Lambda(z_1) > 0$ y $q_\Lambda(z_2) < 0$).

Para demostrar ambos teoremas, probaremos primero el siguiente:

5.3.4. Teorema. 1) $\tilde{\Delta}$ es *elíptico* sii q_Λ es positiva definida.

2) $\tilde{\Delta}$ es *parabólico* sii q_Λ es no negativa.

3) $\tilde{\Delta}$ es *hiperbólico* sii q_Λ es indefinida.

Para la demostración de este teorema necesitaremos las siguientes consideraciones:

Sea $1 \leq i \leq n$. Por $T_\Lambda^{(i)}$ denotaremos la *submatriz principal* de T_Λ que resulta de eliminar el i -ésimo renglón y la i -ésima columna de la matriz T_Λ . Claramente, $T_\Lambda^{(i)} = T_{\Lambda^{(i)}}$, donde $\Lambda^{(i)} = k[\tilde{\Delta}^{(i)}]$ y $\tilde{\Delta}^{(i)}$ es el subcarcaj pleno de $\tilde{\Delta}$ que se obtiene de eliminar el vértice i .

En general si $\tilde{\Delta}'$ es un subcarcaj pleno de $\tilde{\Delta}$, diremos que $T_{\Lambda'}$ ($\Lambda' = k[\tilde{\Delta}']$), es una submatriz principal de T_Λ . El determinante $\det T_{\Lambda'}$ se llama un *menor principal* de T_Λ .

Lema. i) Sea $\tilde{\Delta}$ un carcaj elíptico. Entonces todo subcarcaj pleno de $\tilde{\Delta}$ es elíptico.

ii) Sea $\tilde{\Delta}$ un carcaj parabólico. Entonces todo subcarcaj pleno propio de $\tilde{\Delta}$ es elíptico. \square

5.3.5. Demostración del teorema (5.3.4): 1) Por inducción sobre el número de vértices n de $\tilde{\Delta}$, demostraremos que si $\tilde{\Delta}$ es elíptico entonces q_Λ es positiva.

Si $n = 1$, el resultado es claro. Por el lema (5.3.4), las formas $q^{(i)} = q_{\Lambda^{(i)}}$ son positivas, $1 \leq i \leq n$. En particular, todos los menores principales propios de T_Λ son positivos (ver [Gm, pág. 306]). Por esta caracterización de las formas cuadráticas positivas, nos basta demostrar que $\det T_\Lambda > 0$.

Supongamos que $\det T_\Lambda \leq 0$. Por [Gm, pág. 83], se tiene

$$\text{ad}(T_\Lambda)T_\Lambda = (\det T_\Lambda)I$$

donde $\text{ad}(T_\Lambda)$ es la matriz adjunta de T_Λ . Sean B_i los vectores renglón de $\text{ad}(T_\Lambda)$. Entonces $T_\Lambda(B_i) = B_i T_\Lambda \leq 0$, esto es, $-B_i \in T_\Lambda^{-1}(V^+) \subset V^+$ (por ser $\tilde{\Delta}$ elíptico). Pero la entrada i -ésima del vector B_i es $\det T_{\Lambda(i)} > 0$, contradicción.

Es claro, que la forma de Tits q_Λ asociada a un carcaj $\tilde{\Delta}$ parabólico o hiperbólico no es positiva definida.

2) Supongamos que $\tilde{\Delta}$ es parabólico y sea $u \gg 0$ tal que $T_\Lambda(u) = 0$. Sea $v \in \mathbf{Z}^n$ un vector que no es múltiplo de u . Entonces existe $\lambda \neq 0$ de forma que $\lambda u + v \in \partial V^+$. Digamos $(\lambda u + v)(i) = 0$. Entonces

$$0 < q^{(i)}(\lambda u + v) = q_\Lambda(v). \text{ Además } q_\Lambda(u) = 0.$$

Si q_Λ es semipositiva y no positiva, por (1) $\tilde{\Delta}$ no es elíptico y es fácil ver, por la definición de hiperbólico, que $\tilde{\Delta}$ tampoco es hiperbólico. Así $\tilde{\Delta}$ debe ser parabólico.

3) Supongamos que $\tilde{\Delta}$ es hiperbólico y sea $u \ll 0$ con $T_\Lambda(u) \gg 0$. Entonces $q_\Lambda(u) < 0$, pero $q_\Lambda(e_i) = 1$ donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de $V = \mathbf{R}^n$.

El converso es inmediato. □

5.3.6. Corolario. $\tilde{\Delta}$ es un carcaj elíptico sii q_Λ es débilmente positiva. □

5.3.7. Esbozo de la demostración del Teorema (5.3.2.a): Λ es de tipo de representación finito sii $\tilde{\Delta}$ es elíptico.

(sólo si): Esta es parte del llamado *argumento de Tits* (ver [Gal], [BnGP]). Recordamos la idea:

Supongamos que Λ es de tipo de representación finito. Sean $z \in \mathbf{N}^n$ y V_z el conjunto de todas las representaciones $X \in \text{rep}_k(\tilde{\Delta})$ tales que $\dim_k X(i) = z(i)$. El conjunto V_z tiene estructura de variedad algebraica con dimensión $\dim V_z = \sum_{(i \rightarrow j) \in \tilde{\Delta}_1} z(i)z(j)$.

El grupo algebraico $G_z = \prod_{i=1}^n GL(z(i), k)$ actúa sobre V_z de forma que si $X, Y \in V_z$, entonces $X \cong Y$ sii existe $g \in G_z$ tal que $g(X) = Y$. Consideremos $k \setminus \{0\} \hookrightarrow G_z$, la inclusión diagonal. Entonces $k^\times := k \setminus \{0\}$ actúa trivialmente sobre V_z . Por hipótesis existe sólo un número finito de órbitas de la acción G_z/k^\times sobre V_z . Entonces

$$\sum_{i=1}^n z(i)^2 - 1 = \dim G_z/k^\times \geq \dim V_z = \sum_{(i \rightarrow j) \in \tilde{\Delta}_1} z(i)z(j).$$

En otras palabras $q_\Lambda(z) \geq 1$. Concluimos que q_Λ es débilmente positiva y por (5.3.6), $\tilde{\Delta}$ es elíptico.

(si [BnGP]): Para esto necesitamos de la siguiente

Proposición. i) Si $\bar{\Delta}$ es elíptico, entonces existe $m > 0$ tal que $\phi_{\Lambda}^m = I$.

ii) ϕ_{Λ} tiene un vector $u \geq 0$ invariante (esto es, $u \neq 0$ y $\phi_{\Lambda}(u) = u$) sii $\bar{\Delta}$ es parabólico. \square

Ahora, supongamos que $\bar{\Delta}$ es elíptico. Sea $X \in \text{rep}_k(\bar{\Delta})$ inescindible. Sea $v = \dim X$. Si para todo $\ell \in \mathbb{N}$ tuviéramos que $\phi_{\Lambda}^{\ell}(v) \geq 0$, entonces el vector

$$v + \phi_{\Lambda}(v) + \cdots + \phi_{\Lambda}^{m-1}(v)$$

es un vector invariante de ϕ_{Λ} . Contradicción a la proposición anterior.

Existe entonces, $h > 0$ tal que $\phi_{\Lambda}^h(v)$ no es positivo. Supongamos que h es mínima con esta propiedad. Entonces se puede mostrar que $\phi_{\Lambda}^{h-1}(v)$ es el vector dimensión de un proyectivo inescindible. Esto prueba que v es una raíz positiva de q_{Λ} . \square

5.3.8. En [Dr2] se prueba que Λ es de tipo de representación manso sii q_{Λ} es no negativa, y de (5.3.4) se sigue que Λ es de tipo manso sii $\bar{\Delta}$ es parabólico.

5.3.9. Por (5.1), Λ es de tipo salvaje sii Λ no es de tipo finito ni manso sii ((5.3.7) y (5.3.8)) $\bar{\Delta}$ no es parabólico ni elíptico sii $\bar{\Delta}$ es hiperbólico.

Con esto se finaliza la demostración de los teoremas (5.3.2) y (5.3.3). \square

5.3.10. Observemos que el teorema (5.1.2) también nos da una equivalencia, en el caso en que Λ es hereditaria: Λ es mansa sii casi todos los Λ -módulos inescindibles X de cada dimensión fija satisfacen $\tau X \cong X$, ver ([Dir1]). \square

5.4. Algunas propiedades de la matriz de Coxeter.

Una de las principales propiedades de $\phi_{\Lambda} = -C_{\Lambda}^{-T}C_{\Lambda}$, la matriz de Coxeter de Λ , es la siguiente:

5.4.1. Proposición [R1]. Sean $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria y $X \in \text{mod } \Lambda$ un Λ -módulo inescindible. Tenemos:

a) Si X no es proyectivo, entonces

$$\dim \tau X = \phi_A(\dim X).$$

b) Si X no es inyectivo, entonces

$$\dim \tau^{-1} X = \phi_A^{-1}(\dim X).$$

□

En los capítulos 7 y 8 veremos que las propiedades espectrales de las matrices de Tits y de Coxeter nos permiten estudiar propiedades importantes de los módulos: por ejemplo, caracterizar a los módulos según su posición en Γ_Λ , el carcaj de Auslander-Reiten de Λ .

A continuación, nos adelantaremos en dar algunos resultados, ya conocidos sobre el espectro $\sigma(\phi_\Lambda)$ de ϕ_Λ .

5.4.2. Si $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$, con $\bar{\Delta}$ carcaj finito, entonces $\rho(\phi_\Lambda) \geq 1$ ver [Ho]. De hecho, si Δ es un diagrama Dynkin o euclidiano, $\rho(\phi_\Lambda) = 1$, (se pueden hacer los cálculos explícitos, utilizando (5.3.1)); y si Λ es salvaje, entonces $\rho(\phi_\Lambda) > 1$. Esto se puede demostrar, sabiendo que cualquier álgebra hereditaria salvaje “contiene” un álgebra hereditaria minimal salvaje (ver (8.10)), cuyo carcaj es un subcarcaj pleno de $\bar{\Delta}$ y utilizando el siguiente

Lema (Kerner, Xi; ver [X]). Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria salvaje. Sea $\bar{\Delta}'$ un subcarcaj conexo y pleno de $\bar{\Delta}$ tal que $\Lambda' = k[\bar{\Delta}']$ es también salvaje. Entonces $\rho(\phi_{\Lambda'}) \leq \rho(\phi_\Lambda)$. □

Corolario. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria. Sea $\bar{\Delta}'$ un subcarcaj conexo y pleno de $\bar{\Delta}$ con $\Lambda' = k[\bar{\Delta}']$. Entonces $\rho(\phi_{\Lambda'}) \leq \rho(\phi_\Lambda)$. □

5.5. El carcaj de Auslander-Reiten de una k -álgebra hereditaria.

En el capítulo 0, introdujimos el concepto de carcaj de Auslander-Reiten, Γ_Λ , de Λ y algunas de sus propiedades. Aquí, veremos que en el caso hereditario, Γ_Λ tiene una estructura “sencilla”, con propiedades homológicas muy bonitas.

Recordemos que un Λ -módulo inescindible X es postproyectivo (resp. preinyectivo) sii existen $m \in \mathbf{N}$ y $s \in \Delta_0$ tales que

$$X \cong \tau^{-m} P_s \quad (\text{resp. } X \cong \tau^m Q_s),$$

con P_s (resp. Q_s) el Λ -proyectivo (resp. Λ -inyectivo) en s .

Un Λ -módulo inescindible X es regular si $\forall m \in \mathbf{N}$, $\tau^m X$ y $\tau^{-m} X$ existen.

También recordemos que una componente conexa \mathcal{C} del carcaj de Auslander-Reiten de Λ es una componente postproyectiva (resp. preinyectiva) si $\forall X \in \mathcal{C}$, X es postproyectivo (resp. preinyectivo) y \mathcal{C} no tiene ciclos dirigidos.

Proposición. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria, entonces Γ_Λ tiene una componente postproyectiva \mathcal{P}_Λ , que contiene a todos los proyectivos, y una componente preinyectiva \mathcal{I}_Λ , que contiene a todos los inyectivos. Sea $\mathcal{R}_\Lambda = \Gamma_\Lambda \setminus (\mathcal{P}_\Lambda \cup \mathcal{I}_\Lambda)$. Entonces para todo $X \in \mathcal{P}_\Lambda$, $Y \in \mathcal{R}_\Lambda$ y $Z \in \mathcal{I}_\Lambda$ se tiene que

$$\text{Hom}_\Lambda(Y, X) = 0 = \text{Hom}_\Lambda(Z, Y).$$

□

Ahora veamos como es Γ_Λ en este caso.

a) Si Λ es de tipo finito, $\Gamma_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda = \mathcal{I}_\Lambda$.

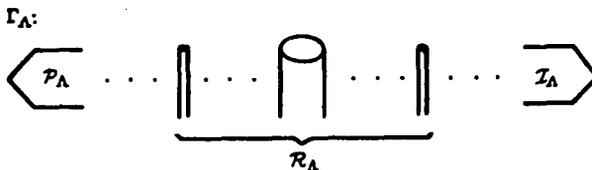
Sea $\mathbf{A}_\infty: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots$. Definamos $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$ como el carcaj cuyo conjunto de vértices es $\mathbf{Z} \times (\mathbf{A}_\infty)_0$ y para cada flecha $\alpha: i \rightarrow i+1$ en \mathbf{A}_∞ , hay en $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$ las siguientes flechas $(m, \alpha): (m, i) \rightarrow (m, i+1)$ y $(m, \alpha'): (m, i+1) \rightarrow (m+1, i)$ para cada $m \in \mathbf{Z}$. Es decir, $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$ tiene la siguiente forma:



Sea $m \in \mathbf{N}$, el carcaj $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty/m$, llamado *tubo estable de rango m* , es el carcaj obtenido de $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$ por medio del cociente dado por la siguiente relación de equivalencia \sim :

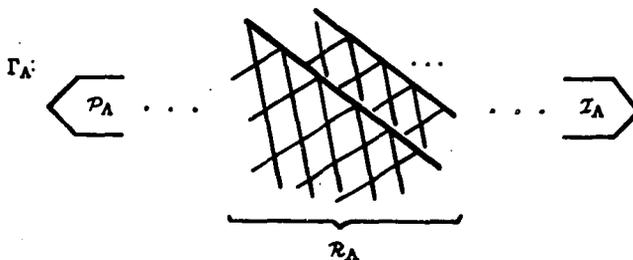
$$\begin{aligned}
 (h, i) &\sim (\ell, i) \quad \text{sii } h \equiv \ell \pmod{m} \\
 i \xrightarrow{\alpha} i+1, \quad (h, \alpha) &\sim (\ell, \alpha) \quad \text{sii } h \equiv \ell \pmod{m} \\
 (h, \alpha)' &\sim (\ell, \alpha)' \quad \text{sii } h \equiv \ell \pmod{m}.
 \end{aligned}$$

b) Si Λ es de tipo manso: $\Gamma_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda \cup \mathcal{I}_\Lambda$



donde cada componente es infinita, y \mathcal{R}_Λ es unión de componentes que constan de los Λ -módulos regulares: \mathcal{R}_Λ es una familia $(T_\lambda)_{\lambda \in k \cup \{\infty\}}$ de tubos donde casi todo tubo T_λ es de rango 1.

c) Si Λ es de tipo salvaje: $\Gamma_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda \cup \mathcal{I}_\Lambda$, donde cada componente es infinita, y \mathcal{R}_Λ es unión de componentes regulares de la forma $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$.



5.6. Veamos algunas características del comportamiento de los módulos en Γ_Λ y ciertas propiedades homológicas, cuando Λ es hereditaria salvaje.

5.6.1. El siguiente resultado nos dice que en las componentes postproyectiva y preinyectiva, sólo hay un número finito de inescindibles cuyo vector dimensión tiene alguna coordenada cero.

Proposición [U1]. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$, tal que Δ no es Dynkin, entonces existe $N = N(\bar{\Delta})$ tal que $\tau_\Lambda^m I$ es sincero (i.e. $\dim \tau_\Lambda^m I >> 0$), para toda $m \geq N$, donde I es cualquier Λ -módulo inescindible preinyectivo. \square

5.6.2. En Γ_Λ , algunas τ -órbitas de inescindibles tienen propiedades interesantes y útiles, como las *mono-órbitas*.

Sea $P \in \mathcal{P}$, la órbita $P^\tau = \{\tau^{-n}P; n \geq 0\}$ es una mono-órbita sii

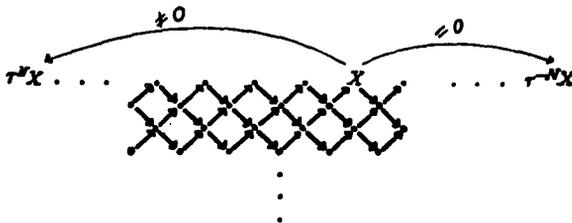
- i) Cada $0 \neq f: X \rightarrow Y$, $X \in P^\tau$, $Y \in \mathcal{P}$, es monomorfismo; y
- ii) Cada $0 \neq f: Z \rightarrow Z'$; $Z, Z' \in P^\tau$, tiene conúcleo con todos sus sumandos directos regulares.

Proposición [Ba1]: Sea Λ una k -álgebra hereditaria salvaje, entonces existe P un Λ -módulo proyectivo tal que P^τ es mono-órbita. \square

5.6.3. Proposición ([Ba2, (3.1)], [K2, (1.4)]). Sea Λ k -álgebra hereditaria salvaje, sean $X, Y \in \mathcal{R}$ Λ -inescindibles regulares, entonces existe N tal que

- a) $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^m Y) \neq 0$, $\forall m \geq N$.
- b) $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m} Y) = 0$, $\forall m \geq N$. \square

Para esquematizar lo anterior, tomemos $X = Y$, por (5.5), la componente regular que contiene a X se ve de la siguiente forma (es un ZA_∞):



A pesar de que las flechas en Γ_Λ van hacia la derecha, desde un momento en adelante ya no hay morfismos distintos de cero de X a $\tau^{-m}X$, $m \geq N$.

Además, esto nos dice que entre componentes regulares hay una infinidad de morfismos no cero. En (9.9), daremos una demostración muy sencilla de esto, para el caso oculta-salvaje de tipo fuente-pozos.

5.7. Como ya hemos dicho, la parte central de este trabajo es el estudio de las álgebras hereditarias salvajes. En esta sección recordaremos resultados sobre álgebras hereditarias que nos ayudarán a enfocar y poner en contexto nuestro problema.

El problema general es el estudio de las representaciones inescindibles de $\tilde{\Delta}$, un carcaj sin ciclos orientados. El problema ha sido estudiado:

a) El caso de tipo de representación *finito*, es bien conocido (ver [Ga1], [Ga2], [BnGP], [DIR1]).

b) En el caso *manso*, es decir, cuando Δ es un diagrama euclidiano, se tiene lo siguiente (ver [DIR1], [Ga1]):

Existe una función "lineal" (i.e. es lineal si la extendemos de $K_0(\Lambda) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^n \rightarrow \mathbf{Q}$), $\partial = \langle z_0, - \rangle_\Lambda: K_0(\Lambda) \rightarrow \mathbf{Z}$, del grupo de Grothendieck de $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ a los enteros tal que si $X \in \text{mod } \Lambda$ es inescindible, entonces

X es postproyectivo sii $\partial(\dim X) < 0$,

X es regular sii $\partial(\dim X) = 0$, y

X es preinyectivo sii $\partial(\dim X) > 0$.

Esto da una caracterización completa de la posición de los inescindibles en el carcaj de Auslander-Reiten, Γ_Λ , de Λ . La función ∂ recibe el nombre de *función defecto*.

La idea es la siguiente (ver [DIR1] y [GP]):

Existe $z_0 \in \mathbf{N}^{\Lambda_0}$ tal que $\forall y \in K_0(\Lambda)$, si $q_\Lambda(y) = 0$, entonces $y \in \mathbf{R}z_0$. A z_0 se le llama el *generador del radical de q_Λ* , y $\partial = \langle z_0, - \rangle_\Lambda$ es la función defecto.

c) En el caso *salvaje*: Baer introduce un número *infinito* de funciones defecto para resolver el problema como en el caso manso, [Ba2].

Nosotros, en el capítulo 9, definiremos *dos* funciones lineales para atacar este problema.

A continuación, daremos, sin pruebas, la solución de Baer:

5.7.1. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria salvaje. En [Ba2] se tratan de definir funciones defecto, que en el caso manso coinciden con la definida en (b) y así obtener la caracterización.

Sea $S \in \text{add } \mathbf{R}$, un módulo con todos sus sumandos directos regulares, se define para cada $j \in \mathbf{Z}$

$$\delta_j^S: \text{mod } \Lambda \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$X \mapsto (\dim \tau^j S, \dim X)_\Lambda.$$

Recordemos que $(\underline{\dim} \tau^j S, \underline{\dim} X)_\Lambda = \dim_k \text{Hom}_\Lambda(\tau^j S, X) - \dim_k \text{Ext}_\Lambda^1(\tau^j S, X)$, donde $\tau^j S := \bigoplus_i \tau^j S_i$, con $S = \bigoplus_i S_i$, la descomposición en inescindibles de S .

Observeemos que si Λ es mansa y S es homogéneo (i.e. S es inescindible y está en un tubo estable de rango 1, en particular $\tau_\Lambda S \cong S$), entonces $\delta_j^S =$ múltiplo real de $(z_0, -)_\Lambda$ (ver (b)).

Se tiene el siguiente resultado:

5.7.2. Teorema [Ba2]. Sean Λ un álgebra hereditaria salvaje y $X \in \text{mod } \Lambda$ inescindible. Entonces

- i) X es postproyectivo sii $\delta_j^S(\underline{\dim} X) \leq 0$, para todo $j \in \mathbf{Z}$, y existe $j_0 \in \mathbf{Z}$, $\delta_{j_0}^S(\underline{\dim} X) < 0$.
- ii) X es regular sii existen enteros N y L de tal forma que

$$\begin{aligned} \delta_j^S(\underline{\dim} X) &> 0 & \forall j \leq N & \text{ y} \\ \delta_j^S(\underline{\dim} X) &< 0 & \forall j \geq L. \end{aligned}$$

- iii) X es preinyectivo sii $\delta_j^S(\underline{\dim} X) \geq 0$, $\forall j \in \mathbf{Z}$, y existe $j_0 \in \mathbf{Z}$, $\delta_{j_0}^S(\underline{\dim} X) > 0$. \square

5.8. Teoría de tilteo. Álgebras ocultas.

En esta sección veremos una de las teoría-herramientas más útiles en teoría de representaciones. Daremos los principales resultados sobre álgebras tilteadas.

En (5.9) veremos con más cuidado un caso particular de álgebras tilteadas: las *álgebras ocultas*.

La teoría de tilteo fué iniciada por Brenner y Butler como una generalización de los “funtores de Coxeter” [BnGP], los “funtores reflexión” [BrBu] y los “funtores parciales de Coxeter” [APIR].

En su forma final, la noción de módulo de tilteo fue introducida y elaborada en [HaR], por Happel y Ringel, ver también [Bo2].

En lo que resta de este capítulo sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria de dimensión finita.

5.8.1. Un Λ -módulo T se llama *módulo de tilteo* si satisface:

$$(\alpha) \text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0; \text{ y}$$

(β) El número de clases de isomorfía de sumandos inescindibles de T es igual al número de Λ -módulos simples (i.e. igual a la dimensión de $K_0(\Lambda, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\Delta_0}$).

Un Λ -módulo T se llama *parcial de tilteo* si satisface (α) .

Lema (Bongartz, ver [R1]). Sea T un Λ -módulo parcial de tilteo. Entonces existe $T' \in \text{mod}\Lambda$ tal que $T \oplus T'$ es módulo de tilteo. Además, si T'' es un sumando inescindible de T' , entonces T'' es proyectivo o $\text{Hom}_\Lambda(T'', T) \neq 0$. \square

Corolario (Definición opcional). T es un módulo de tilteo sii

(α) $\text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0$, y

(β') Existe $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow 0$ sucesión exacta, $T_1, T_2 \in \text{add}T$, esto es, los sumandos inescindibles de T_1 y T_2 son sumandos de T . \square

Del lema (5.8.1) y de (5.5) se sigue:

Corolario. Si $T \in \text{add } \mathcal{P}_\Lambda$ es un módulo parcial de tilteo, entonces existe $T' \in \text{add } \mathcal{P}_\Lambda$ tal que $T \oplus T'$ es Λ -módulo de tilteo. \square

5.8.2. En el caso en que Λ es una k -álgebra salvaje, se tiene el siguiente resultado.

Proposición (Ringel, ver [Ba4]). Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra salvaje, con $|\Delta_0| \geq 3$, entonces Λ tiene módulos de tilteo con todos sus sumandos regulares. \square

La anterior proposición es falsa si Λ es mansa, ya que los vectores dimensión de los inescindibles regulares generan un subespacio de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} K_0(\Lambda)$ de dimensión $|\Delta_0| - 1$.

5.8.3. Sean $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria y $T \in \text{mod}\Lambda$ un módulo de tilteo. El álgebra $B := \text{End}_\Lambda(T)$ se llama *álgebra tilteada* (de tipo $\tilde{\Delta}$).

Por medio de propiedades de Λ , $\text{mod}\Lambda$, ϕ_Λ , Γ_Λ , $gl \dim \Lambda, \dots$ se pueden obtener propiedades de las álgebras B , que veremos en ésta y las próximas secciones.

5.8.4. Un par de clases de Λ -módulos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se llama un *par de torsión* si:

a) \mathcal{F} es la clase de los $F \in \text{mod}\Lambda$ tales que $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{G}, F) = 0$ (i.e. $\forall G \in \mathcal{G}, \text{Hom}_\Lambda(G, F) = 0$).

b) \mathcal{G} es la clase de los $G \in \text{mod}\Lambda$ tales que $\text{Hom}_\Lambda(G, \mathcal{F}) = 0$.

A los módulos de \mathcal{G} se les llama los *módulos de torsión* y a los de \mathcal{F} los *módulos libres de torsión*.

Lema. Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un par de torsión de Λ -módulos, entonces

i) \mathcal{F} es cerrado bajo la formación de submódulos, extensiones y sumas directas.

ii) \mathcal{G} es cerrado bajo la formación de extensiones, imágenes homomórficas y sumas directas finitas.

iii) $\text{mod}\Lambda = \mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, i.e. $\forall M \in \text{mod}\Lambda$ existe un único $M' \in \mathcal{G}$ tal que

$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M/M' \rightarrow 0$ es sucesión exacta y $M/M' \in \mathcal{F}$. A $M' =: t(M)$ se le llama la *parte de torsión* de M . □

5.8.5. Ejemplos importantes:

Sea $T \in \text{mod}\Lambda$ un Λ -módulo de tilteo. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T) &:= \{M \in \text{mod}\Lambda; \text{Hom}_\Lambda(T, M) = 0\} \\ &= \{M \in \text{mod}\Lambda; M \text{ está cogenerado por } \tau_\Lambda T\}, \text{ y} \\ \mathcal{G}(T) &= \{M \in \text{mod}\Lambda; \text{Ext}_\Lambda^1(T, M) = 0\} \\ &= \{M \in \text{mod}\Lambda; \exists T^m \rightarrow X \rightarrow 0 \text{ sucesión exacta}\}.\end{aligned}$$

Entonces $(\mathcal{F}(T), \mathcal{G}(T))$ es un par de torsión en $\text{mod}\Lambda$.

Sea $B = \text{End}_\Lambda(T)$ y consideremos

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(T) &= \{N \in \text{mod}B; \text{Tor}_1^B(T_B, N) = 0\} \\ \mathcal{X}(T) &= \{N \in \text{mod}B; T_B \otimes_B N = 0\}\end{aligned}$$

Entonces $(\mathcal{Y}(T), \mathcal{X}(T))$ es un par de torsión en $\text{mod}B$.

Además cumplen las siguientes relaciones:

5.8.5.1. Teorema (Brenner-Butler, ver [HaR]). El funtor $\Sigma_T = \text{Hom}_\Lambda(\Lambda T_B, -)$ define una equivalencia de $\mathcal{G}(T)$ a $\mathcal{Y}(T)$, con inversa $T \otimes_B -$. El funtor $\Sigma'_T := \text{Ext}_\Lambda^1(T, -)$ define una equivalencia de $\mathcal{F}(T)$ a $\mathcal{X}(T)$, con inversa $\text{Tor}_1^B(T, -)$.

Además estos funtores mandan sucesiones exactas en sucesiones exactas. □

5.8.5.2. Proposición [HaR]. Sea $B = \text{End}_\Lambda(T)$ como antes. Entonces

- i) $\text{mod } B = \mathcal{X}(T) \vee \mathcal{Y}(T)$ (esto es, los B -módulos inescindibles están contenidos en $\mathcal{X}(T) \cup \mathcal{Y}(T)$);
- ii) $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado bajo predecesores y bajo τ_B ;
- iii) $\mathcal{X}(T)$ es cerrado bajo sucesores y bajo τ_B^{-1} ;
- iv) *Lema de Conexión.* Denotemos por $Q_\Lambda(x)$ (resp. $P_\Lambda(x)$) al Λ -inyectivo (resp. Λ -proyectivo) correspondiente al vértice $x \in \Delta_0$. Se tiene que $\tau_B^{-1}\Sigma_T(Q_\Lambda(x)) = \Sigma_T'(P_\Lambda(x))$. Además, si Q es un B -módulo inescindible inyectivo con $Q \notin \mathcal{X}(T)$ entonces existe $x \in \Delta_0$ tal que $Q = \Sigma_T(Q_\Lambda(x))$ con $P_\Lambda(x)$ sumando directo de T . \square

5.8.5.3. Proposición ([Bo2], [R1]). Sean $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ y $B = \text{End}_\Lambda(T)$ como antes. Entonces

- a) Si $M \in \mathcal{G}(T)$, entonces $\Sigma_T(\tau_\Lambda M) = \tau_B \Sigma_T(M)$ y $\text{Ext}_B^m(\Sigma_T M, \mathcal{X}(T)) = 0 \forall m \geq 1$.
- b) Si $N \in \mathcal{F}(T)$, entonces $\text{Ext}_B^m(\mathcal{Y}(T), \Sigma_T'(N)) = 0, \forall m \geq 1$.
- c) $gl \dim B \leq 2$. \square

Estos resultados ayudan a comprender un poco más la estructura del carcaj de Auslander-Reiten de B , problema que no está resuelto en general.

5.8.6. Ahora veamos la estrecha relación que existe entre las transformaciones de Coxeter, formas de Tits de Λ y las de sus álgebras tildeadas.

Proposición ([Bo2], [R1]). Con la notación anterior, sea $B = \text{End}_\Lambda(T)$. Definimos

$\sigma_T := C_\Lambda^{-1} t^T$, donde C_Λ es la matriz de Cartan de Λ , y $t = \begin{pmatrix} \dim T_1 \\ \vdots \\ \dim T_n \end{pmatrix}$, la matriz de $n \times n$, con $\{T_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de sumandos inescindibles de T no isomorfos dos a dos.

Entonces

- 1) $\sigma_T: K_0(\Lambda) \xrightarrow{\sim} K_0(B)$ es un isomorfismo lineal tal que

$$\sigma_T(\dim M) = \dim \Sigma_T M - \dim \Sigma_T' M.$$

2) $(x\sigma)_i = \langle \dim T_i, x \rangle_\Lambda$.

3) $C_B = t C_\Lambda^{-T} t^T$.

4) $C_\Lambda^{-T} = \sigma_T C_B^{-T} \sigma_T^T$.

5) $\forall x, y \in K_0(\Lambda), \langle x, y \rangle_\Lambda = \langle x\sigma_T, y\sigma_T \rangle_B$. En particular, $q_\Lambda(x) = q_B(x\sigma_T)$.

6) Si $M \in \mathcal{G}(T)$, entonces $q_A(\dim M) = q_B(\dim \Sigma_T(M))$.

Si $N \in \mathcal{F}(T)$, entonces $q_A(\dim M) = q_B(\dim \Sigma'_T(N))$.

Donde, $q_A(\dim M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \text{Ext}_\Lambda^i(M, M)$ la forma cuadrática de Tits de Λ .

7) $\phi_B = \sigma_T^{-1} \phi_A \sigma_T$. En particular, sus respectivos polinomios característicos son iguales. \square

En los capítulos 7 y 8 veremos propiedades espectrales de la matriz de Coxeter. La proposición anterior nos dice que estudiar las propiedades espectrales de álgebras tilteadas es equivalente a estudiarlas en el caso hereditario.

5.9. Álgebras Ocultas.

En esta sección estudiaremos un caso particular, pero muy importante de álgebras tilteadas: cuando T , el módulo de tilteo, tiene todos sus sumandos postproyectivos. Estas álgebras tienen un comportamiento "casi hereditario".

5.9.1. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria de tipo infinito, $|\Delta_0| = n$, $T \in \text{mod } \Lambda$ un módulo de tilteo y $B = \text{End}_\Lambda(T)$.

B es llamada *oculta* (de tipo $\tilde{\Delta}$) si $T \in \text{add } \mathcal{P}_\Lambda$, esto es, si T tiene todos sus sumandos postproyectivos. Además si Λ es mansa a B se le llama *mansa-oculta*, éste es un nombre muy sugerente ya que en este caso se prueba que: Λ es mansa sii B es mansa (i.e. es mansa y oculta). En otras palabras, "ocultar" *preserva* el tipo de representación.

Por lo tanto, Λ es salvaje sii B lo es.

Nota: Las álgebras ocultas-mansas han sido clasificadas. La lista se asocia a los nombres de Bongartz, Happel y Vossieck, ver [Bo3] y [HaVo].

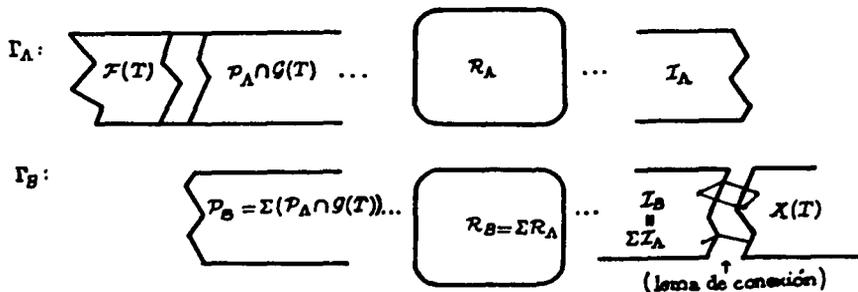
5.9.2. Un ejemplo importante: Sean $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{\Delta}'$ carcajes tales que $\Delta = \Delta'$ son árboles, entonces $k[\tilde{\Delta}]$ es álgebra oculta de tipo $\tilde{\Delta}'$. (Se puede probar fácilmente usando reflexiones), [BnGP].

5.9.3. En el caso en que B es una k -álgebra oculta se puede dar una descripción muy precisa de su carcaj de Auslander-Reiten, Γ_B . A saber,

Proposición [R1]. Sea $B = \text{End}_\Lambda(T)$ oculta. Entonces,

1) $\mathcal{F}(T)$ es un conjunto finito y contenido en \mathcal{P}_Λ , la componente postproyectiva de Λ .

- 2) $\mathcal{G}(T)$ es cofinito y consta de una subcategoría cofinita de \mathcal{P}_Λ ; de \mathcal{I}_Λ y de \mathcal{R}_Λ .
- 3) $\mathcal{P}_B = \Sigma_T(\mathcal{P}_\Lambda \cap \mathcal{G}(T))$ es una componente postproyectiva de Γ_B que contiene a todos los proyectivos; la clase de los módulos regulares de B es $\mathcal{R}_B = \Sigma_T(\mathcal{R}_\Lambda)$, y forma una familia infinita de componentes regulares de la misma forma de \mathcal{R}_Λ ; $\mathcal{I}_B = \Sigma_T(\mathcal{I}_\Lambda) \vee \mathcal{X}(T)$ es una componente preinyectiva de Γ_B con todos los inyektivos. \square



5.9.4. Lema. Sean $B = \text{End}_\Lambda(T)$ álgebra oculta de tipo $\tilde{\Delta}$ y $X \in \text{mod} B$ inescindible.

a) Si X es B -postproyectivo, entonces $X = \text{Hom}_\Lambda(T, L)$ para algún Λ -postproyectivo inescindible; $L \in \mathcal{G}(T)$ con $\dim X = \sigma_T(\dim L)$ y $\tau_B X = \Sigma_T(\tau_\Lambda L)$. Si X no es proyectivo y $\text{Hom}_B(X, B) = 0$, $\dim \tau_B X = \phi_B(\dim X)$.

b) X es B -regular sii existe $L \in \mathcal{G}(T) \cap \mathcal{R}_\Lambda$ con $X \cong \Sigma_T(L)$. Además, $\tau_B X = \Sigma_T(\tau_\Lambda L)$ y $\dim \tau_B X = \phi_B(\dim X)$.

c) Si X es B -preinyectivo, entonces sucede alguna de las siguientes:

c.1) Existe $L \in \mathcal{G}(T) \cap \mathcal{I}_\Lambda$ tal que $X \cong \Sigma_T(L)$, $\tau_B X = \Sigma_T(\tau_\Lambda L)$ y $\dim \tau_B X = \phi_B(\dim X)$; ó

c.2) $X \in \mathcal{X}(T)$ (i.e. existe $L \in \mathcal{F}(T)$ tal que $X \cong \Sigma'_T(X)$), pero existe $m(X) =: m$ tal que cada $\tau^\ell X$, con $\ell \geq m$ es del tipo (c.1). \square

6. CUBIERTAS DE GALOIS Y REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS

Muchas de las propiedades espectrales de las cubiertas de Galois de gráficas, (ver capítulo 3), se cumplen para las de álgebras. En este capítulo recordaremos definiciones y resultados importantes ya conocidos.

Para referencias generales ver [MzP], [BoGa], [P1], [DoSk] y [PT2].

6.1. Una k -categoría Λ se llama *localmente de dimensión finita* (resp. *localmente acotada*) si satisface las condiciones (a), (b) y (c) (resp. (a), (b) y (c')) siguientes:

- a) Λ es *esquelética*, (esto es, objetos diferentes en Λ son no isomorfos),
- b) Para cada objeto $x \in \text{Ob}(\Lambda)$, el álgebra $\Lambda(x, x)$ es local,
- c) $\dim_k \Lambda(x, y) < \infty$ para $x, y \in \text{Ob}(\Lambda)$.
- c') $\sum_{y \in \text{Ob}(\Lambda)} \dim_k \Lambda(y, x) < \infty$, $\sum_{y \in \text{Ob}(\Lambda)} \dim_k \Lambda(x, y) < \infty$ para todo objeto x .

Donde $\Lambda(x, y)$ es el k -espacio vectorial de los Λ -morfismos de x a y .

6.2. Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj conexo, posiblemente infinito. Sea $k[\vec{\Delta}]$ la categoría de trayectorias. Por \mathcal{F} denotamos también al ideal bilateral generado por las flechas. Un ideal admisible J en $k[\vec{\Delta}]$ es uno tal que para cada vértice $x \in \Delta_0$ tiene un número natural n_x , con $\mathcal{F}^{n_x}(x, -) \subset J(x, -) \subset \mathcal{F}^2(x, -)$ y similarmente para la segunda coordenada.

Dado el carcaj $\vec{\Delta}$ y un vértice $x \in \Delta_0$, por x^+ denotamos al conjunto de vértices en Δ_0 a los cuales llegan flechas que comienzan en x , y por x^- a los vértices donde comienzan flechas con punto final x . $\vec{\Delta}$ se llama *localmente finito* si x^+ , x^- son finitos para todo vértice $x \in \Delta_0$.

Dado $\vec{\Delta}$ localmente finito y J un ideal admisible de $k[\vec{\Delta}]$, es fácil ver que la categoría $k[\vec{\Delta}]/J$ es localmente acotada. De hecho, con una prueba análoga a la del caso de un álgebra de dimensión finita, puede probarse que toda categoría Λ localmente acotada es isomorfa a $k[\vec{\Delta}]/J$ para un carcaj localmente finito $\vec{\Delta}$ y un ideal admisible J .

Análogamente al caso de carcajes finitos, podemos definir las categorías $\text{mod}\Lambda$, $\text{Mod}\Lambda$ y $\text{MOD}\Lambda$ (resp. $\text{rep}_k(\vec{\Delta})$, $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$ y $\text{REP}_k(\vec{\Delta})$), para $\Lambda = k[\vec{\Delta}]/J$ con $\vec{\Delta}$ carcaj localmente finito.

Como sólo trabajaremos con álgebras hereditarias, podemos suponer que $J = 0$ y todo carcaj $\vec{\Delta}$ sin ciclos dirigidos.

6.3. Sea $F: \vec{\Lambda} = k[\vec{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\vec{\Delta}]$ un k -functor entre categorías localmente acotadas.

Decimos que F es un functor cubriente si es denso y para cada $a \in \text{Ob}(\Lambda)$ los siguientes morfismos inducidos son biyecciones:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\substack{y \in \text{Ob}(\vec{\Lambda}) \\ F(y)=a}} \vec{\Lambda}(x, y) & \longrightarrow & \Lambda(F(x), a) \\ \bigoplus_{\substack{y \in \text{Ob}(\vec{\Lambda}) \\ F(y)=a}} \vec{\Lambda}(y, x) & \longrightarrow & \Lambda(a, F(x)). \end{array}$$

En ambos casos la regla es $(f_y)_{F(y)=a} \mapsto \sum_{F(y)=a} F(f_y)$.

6.3.1. En los capítulos 3 y 4 definimos la noción de cubierta de Galois de gráficas y dimos algunas de sus propiedades, entre ellas: dados un carcaj $\vec{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ y una cubierta de Galois $\pi: \vec{\Delta} \rightarrow \Delta$, definida por la acción de un grupo G que actúa libremente sobre $\vec{\Delta}$, entonces existe (\bar{s}, \bar{e}) orientación de $\vec{\Delta}$ tal que: (i) $\pi\bar{s} = s\pi$ y $\pi\bar{e} = e\pi$; (ii) $\bar{s}g = g\bar{s}$ y $\bar{e}g = g\bar{e}$, para toda $g \in G$, ver (3.3). Entonces, $\pi: \vec{\Delta} \rightarrow \vec{\Delta}$ es una cubierta de Galois de carcajes que induce un functor cubriente $k[\pi]: k[\vec{\Delta}] \rightarrow k[\vec{\Delta}]$. En efecto, basta dar un morfismo entre los carcajes para tenerlo entre sus respectivas k -categorías de trayectorias.

Además, como G actúa libremente sobre $\vec{\Delta}$ y para todo $g \in G$, $\pi g = \pi$, tenemos:

- i) G es un grupo de automorfismos de $k[\vec{\Delta}]$, (extendiendo cada morfismo primero en forma natural sobre los caminos dirigidos de $\vec{\Delta}$ y después linealmente), que actúa libremente sobre $k[\vec{\Delta}]$, esto es, si x es un objeto de $k[\vec{\Delta}]$ (resp. α un morfismo de $k[\vec{\Delta}]$), $g(x) = x$ (resp. $g(\alpha) = \alpha$), $g \in G$, entonces $g = 1$.
- ii) Para todo $g \in G$, $k[\pi]g = k[\pi]$.

6.3.2. Un ejemplo importante:

Recordemos de (3.7.a), que si $\vec{\Delta}$ es un carcaj localmente finito y G un grupo que actúa libremente sobre $\vec{\Delta}$, entonces tenemos $\pi: \vec{\Delta} \rightarrow \vec{\Delta}/G$ una cubierta de Galois de $\vec{\Delta}/G$, el carcaj cociente (localmente finito), definida por la acción de G . Entonces, $k[\pi]: k[\vec{\Delta}] \rightarrow k[\vec{\Delta}/G]$ es un functor cubriente con las propiedades (i) y (ii) de (6.3.1).

Este ejemplo nos ayudará a dar la siguiente definición:

6.4. Sean $F: \bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\bar{\Delta}]$ un functor cubriente y G un grupo de automorfismos de $\bar{\Lambda}$ que actúa libremente sobre $\bar{\Lambda}$.

Diremos que F es una *cubierta de Galois* definida por la acción de G , si satisface lo siguiente:

i) $Fg = F$, para cada $g \in G$.

ii) Existe un functor $F': k[\bar{\Delta}] \rightarrow k[\bar{\Delta}/G]$ que es una equivalencia de categorías tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & k[\bar{\Delta}] & \\ & \swarrow F & \downarrow \\ k[\bar{\Delta}] & \xrightarrow{-\frac{\pi}{F'}} & k[\bar{\Delta}/G] \end{array}$$

6.5. Recíprocamente a (6.3.1), si tenemos $F: k[\bar{\Delta}] \rightarrow k[\bar{\Delta}]$ un functor cubierta de Galois, entre k -categorías localmente acotadas, definido por la acción de un grupo G , entonces éste induce una cubierta de Galois $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$, definida por la acción de G tal que $k[\pi] = F$. Entonces nos bastará trabajar con estas últimas, y ambas cubiertas tendrán las "mismas propiedades", ver capítulos 3 y 4.

Nota: Abusando del lenguaje, usaremos la misma letra π , para $k[\pi]$.

6.5.1. Sea $\bar{\Delta}$ un carcaj conexo y finito. Definimos la *categoría de cubiertas de Galois de $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$* (resp. de $\bar{\Delta}$), denotada por $Gal(\Lambda)$ (resp. $Gal(\bar{\Delta})$), de la siguiente manera:

a) $(\pi: k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda) \in Ob(Gal(\Lambda))$ sii π es una cubierta de Galois de Λ .

b) Un morfismo $f: (\pi: k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda) \rightarrow (\pi': k[\bar{\Delta}'] \rightarrow \Lambda)$, entre objetos es un k -functor $f: k[\bar{\Delta}] \rightarrow k[\bar{\Delta}']$ tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & k[\bar{\Delta}] & \\ & \swarrow f & \downarrow \pi \\ k[\bar{\Delta}'] & \xrightarrow{\pi'} & \Lambda \end{array}$$

La definición análoga para $Gal(\bar{\Delta})$.

(6.5) nos dice que existe una equivalencia de categorías entre $Gal(\bar{\Delta})$ y $Gal(\Lambda)$.

Entonces todas las propiedades que tenemos de las cubiertas de Galois de $\vec{\Delta}$, como por ejemplo: la propiedad de levantamiento único de caminos, la existencia de la cubierta universal, etc., las tenemos para Λ , ver capítulo 3 y especialmente (3.13).

6.6. Los módulos de las cubiertas de $k[\vec{\Delta}]$.

Sea $\pi: \vec{\Lambda} = k[\vec{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\vec{\Delta}]$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G .

Sea $X \in \text{Mod } \vec{\Lambda}$ y $g \in G$, denotemos por $X^g \in \text{Mod } \vec{\Lambda}$ al $\vec{\Lambda}$ -módulo, que como k -espacio vectorial es X , con el siguiente producto: sea $a \in \vec{\Lambda}$ y $v \in X^g$, entonces $av^g := g(a)v$, donde el último producto se efectúa en X .

Para mejor visualización, tomemos $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$ la categoría de representaciones de $\vec{\Delta}$, (ver capítulo 0). Sea $X = ((X(i))_{i \in \vec{\Delta}_0}, (X(\alpha))_{\alpha \in \vec{\Delta}_1})$ una representación de $\vec{\Delta}$ y $g \in G$. Entonces $X^g = ((X(g(i)))_{i \in \vec{\Delta}_0}, (X(g(\alpha)))_{\alpha \in \vec{\Delta}_1})$.

Obviamente, de esta forma $g \in G$ induce un automorfismo de la categoría $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$ de manera que el grupo G actúa en $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$. (Si $f: X \rightarrow X'$ es un morfismo en $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$, $f^g = (f_{g(i)})_{i \in \vec{\Delta}_0}$, $g \in G$).

Denotemos por $\text{Rep}_k^G(\vec{\Delta})$ a la categoría de las representaciones G -periódicas, a saber:

a) $(X, (\varphi_g)_{g \in G}) \in \text{Ob}(\text{Rep}_k^G(\vec{\Delta}))$ sii $X \in \text{Rep}_k(\vec{\Delta})$ (= representaciones de $\vec{\Delta}$ tal que $X(i)$ es espacio de dimensión finita para cada $i \in \vec{\Delta}_0$), $\varphi_g: X \rightarrow X^g$ es un isomorfismo en $\text{Rep}_k(\vec{\Delta})$, φ_1 es la identidad y $\varphi_h^g \varphi_g = \varphi_{hg}$, para $g, h \in G$.

b) $f: (X, (\varphi_g)_{g \in G}) \rightarrow (Y, (\psi_g)_{g \in G})$ es morfismo en $\text{Rep}_k^G(\vec{\Delta})$, si $f: X \rightarrow Y$ es morfismo de representaciones y para $g \in G$, $i \in \vec{\Delta}_0$, el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} X(i) & \xrightarrow{f(i)} & Y(i) \\ \varphi_g(i) \downarrow & & \downarrow \psi_g(i) \\ X^g(i) & \xrightarrow{f^g(i)} & Y^g(i) \end{array} .$$

Tenemos, entonces también la definición $\text{Mod } \vec{\Lambda}^G$ (resp. $\text{mod } \vec{\Lambda}^G$) de $\vec{\Lambda}$ -módulos G -periódicos, correspondiente a $\text{Rep}_k^G(\vec{\Delta})$ (resp. $\text{rep}_k^G(\vec{\Delta})$).

6.6.1. Proposición ([Ga4], ver también [P1]). Las categorías $\text{mod } \Lambda$ y $\text{mod } \vec{\Lambda}^G$ son equivalentes. □

6.7. Los funtores "push-down" y "pull-up".

Sea $\pi: k[\bar{\Delta}] \rightarrow k[\bar{\Delta}]$ una cubierta de Galois definida por un grupo G que actúa libremente sobre $\bar{\Delta}$.

6.7.1. Sean $\bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}]$ y $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$. Definamos los siguientes funtores asociados a π .

$$D_\pi: \text{MOD}\bar{\Lambda} \rightarrow \text{MOD}\Lambda \quad (\text{con restricción } D_\pi: \text{mod}\bar{\Lambda} \rightarrow \text{mod}\Lambda).$$

Si $X \in \text{MOD}\bar{\Lambda}$, $D_\pi(X)$ está definido como sigue: Para cada $i \in \Delta_0$,

$$D_\pi(X)(i) = \bigoplus_{\substack{j \in \Delta_0 \\ \pi(j)=i}} X(j),$$

y si $\alpha_{i \rightarrow h} \in \bar{\Delta}_1$,

$$D_\pi(X)(\alpha): D_\pi(X)(i) \longrightarrow D_\pi(X)(h),$$

está dado por

$$(v_j)_{\pi(j)=i} \longmapsto (X(\ell\bar{\alpha}_h)(v_j))_{\pi(\ell)=h},$$

donde $j \xrightarrow{\ell\bar{\alpha}_h} \ell$ es la única flecha tal que $\pi(\ell\bar{\alpha}_h) = \alpha$.

$$U_\pi: \text{MOD}\Lambda \rightarrow \text{MOD}\bar{\Lambda} \quad (\text{con restricción } U_\pi: \text{mod}\Lambda \rightarrow \text{Mod}\bar{\Lambda})$$

tal que $X \mapsto X\pi$.

En ambos casos hemos dado la regla de asociación de los funtores, viendo los $\bar{\Lambda}$ -módulos como representaciones de $\bar{\Delta}$, ver (0.9) y (6.2).

A D_π (resp. U_π) le llamamos el funtor *push-down* (resp. *pull-up*) de π .

6.7.2. Proposición ([BoGa] y [Ga4]). a) $D_\pi \dashv U_\pi$ (D_π es adjunto izquierdo de U_π). Es decir, para cada $X \in \text{MOD}\bar{\Lambda}$ y $Y \in \text{MOD}\Lambda$ existe una biyección

$$\text{Hom}_\Lambda(D_\pi(X), Y) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{\Lambda}}(X, U_\pi(Y))$$

que es "natural" en ambas variables.

b) Sea $Y \in \text{mod}\bar{\Lambda}$, Y es proyectivo (resp. inyectivo) sii $D_\pi(Y)$ lo es.

c) Si $\bar{\Lambda}$ es una k -álgebra de dimensión finita y Y un $\bar{\Lambda}$ -módulo no-proyectivo, entonces $D_{\pi}(\tau_{\bar{\Lambda}}Y) = \tau_{\bar{\Lambda}}D_{\pi}(Y)$. \square

6.7.3. Denotemos por $\text{mod}_1\Lambda$ a la subcategoría plena de $\text{mod}\Lambda$ formada por todos los módulos de la forma $D_{\pi}(X)$, $X \in \text{mod}\bar{\Lambda}$; a $Y \in \text{mod}_1\Lambda$ se le llamará *módulo de primera clase*; si $Y \in \text{mod}_2\Lambda := \text{mod}\Lambda \setminus \text{mod}_1\Lambda$ se le llamará de *segunda clase*, (relativa a la cubierta $\pi: \bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda$).

Proposición [Ga4]. a) $\mathcal{P}_{\Lambda} \cup \mathcal{I}_{\Lambda} \subset \text{mod}_1\Lambda$, donde \mathcal{P}_{Λ} (resp. \mathcal{I}_{Λ}) son los Λ -módulos postproyectivos (resp. preinjectivos).

b) $U_{\pi}D_{\pi}X \cong \bigoplus_{g \in G} X^g$, para todo $X \in \text{mod}\bar{\Lambda}$. \square

6.7.4. Definición. Diremos que $\bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}]$ es *localmente de representación salvaje* sii $\bar{\Delta}$ contiene un subcarcaj finito y salvaje.

Así, si $\bar{\Delta}$ es finita, la categoría $k[\bar{\Delta}]$ es localmente de representación salvaje sii el álgebra $k[\bar{\Delta}]$ es salvaje (ver (5.1.c)).

Observación: Si $\{\bar{F}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subcarcajes finitos de $\bar{\Delta}$ tal que $\lim F_m = \bar{\Delta}$ y $\bar{\Lambda}$ es localmente de representación salvaje. Entonces existe N tal que $k[\bar{F}_m]$ es salvaje, para toda $m \geq N$ (ver (2.5)).

Proposición. Sean $\pi: \bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\Delta]$ una cubierta de Galois y $\bar{\Delta}$ un carcaj finito, entonces $\bar{\Lambda}$ es localmente de representación salvaje sii Λ es salvaje.

Demostración: a) Si Δ es un árbol, entonces $\bar{\Delta} = \Delta$. Luego, $\bar{\Lambda}$ es salvaje sii Λ lo es.

b) Cuando Δ no es un árbol, tenemos:

b.1) Si $\bar{\Delta}$ es un carcaj finito, entonces por (4.3) y (5.3.1.1), $\bar{\Lambda}$ es salvaje sii Λ lo es.

b.2) Sea $\bar{\Delta}$ un carcaj infinito:

Si $\bar{\Lambda}$ es localmente de representación salvaje, entonces Λ es salvaje. En efecto, existe $\bar{F} \subset \bar{\Delta}$ subcarcaj finito y salvaje, entonces por (5.3.1.1), (1.9) y (4.2), tenemos que $2 < \rho(F) \leq \rho(\bar{\Delta}) \leq \rho(\Delta)$, luego por (5.3.1.1), Λ es salvaje.

Ahora, si Λ es salvaje (como $\bar{\Delta}$ es infinita), entonces Δ tiene al menos un ciclo C y un vértice $x \in C$ de grado mayor o igual que 3 (si no, Δ sería un diagrama euclidiano).

Luego (por ser Δ finita), $\bar{\Delta}$ contiene como subgráfica (no necesariamente plena) a una gráfica de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \uparrow \text{---} \cdot \text{---} \uparrow \text{---} \cdot \text{---} \uparrow \text{---} \cdot \text{---} \\ \nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3 \end{array}, \quad \pi(\nu_i) = \nu \quad i = 1, 2, 3.$$

que es una gráfica salvaje, entonces $\bar{\Lambda}$ es localmente de representación salvaje. \square

6.8. Sea $\pi: \bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\Delta]$ una cubierta de Galois, con $\bar{\Delta}$ finita (por lo tanto, Δ también lo es). Entonces los funtores push-down y pull-up definen funciones lineales con propiedades muy interesantes:

En lo que resta del capítulo, supondremos que Λ es de tipo de representación infinito.

6.8.1. Definimos el operador push-down d_π asociado a D_π :

$$d_\pi: \mathbb{C}^{\bar{\Delta}_0} \rightarrow \mathbb{C}^{\Delta_0}, \text{ con } d_\pi((x_j)_{j \in \bar{\Delta}_0}) = \left(\sum_{\substack{j \in \bar{\Delta}_0 \\ \pi(j) = i}} x_j \right)_{i \in \Delta_0}.$$

Observemos que para todo $X \in \text{mod } \bar{\Lambda}$, $d_\pi(\dim X) = \dim D_\pi(X)$.

Lema. a) $d_\pi \phi_{\bar{\Lambda}} = \phi_{\Lambda} d_\pi$, con ϕ_{Λ} la matriz de Coxeter de Λ (ver (0.8)).

b) $d_\pi A_{\bar{\Delta}} = A_{\Delta} d_\pi$, con A_{Δ} la matriz de adyacencia de Δ .

Demostración: a) Sea $\{q_i\}_{i \in \bar{\Delta}_0}$, $q_i = \dim Q_i$, el vector dimensión del inyectivo en i , entonces $\{q_i\}_{i \in \bar{\Delta}_0}$ forma una base para $\mathbb{C}^{\bar{\Delta}_0}$.

Como $d_\pi(q_i) = \dim D_\pi(Q_i)$, entonces por (6.7.2) y (5.4.1), tenemos que

$$d_\pi \phi_{\bar{\Lambda}}(q_i) = \phi_{\Lambda} d_\pi(q_i), \quad \text{para toda } i \in \bar{\Delta}_0.$$

Luego, $d_\pi \phi_{\bar{\Lambda}} = \phi_{\Lambda} d_\pi$.

b) Se sigue de (3.6): Sea $\{e_j\}_{j \in \bar{\Delta}}$ la base canónica de $C^{\bar{\Delta}_0}$. Entonces

$$d_{\pi} A_{\bar{\Delta}}(e_i) = d_{\pi}((\bar{a}_{ij})_{j \in \bar{\Delta}_0}) = \left(\sum_{\pi(j)=s} \bar{a}_{\pi(i)s} \right)_{s \in \Delta_0} = (a_{\pi(i)s})_{s \in \Delta_0} = A_{\Delta} d_{\pi}(e_i),$$

donde $A_{\bar{\Delta}} = (\bar{a}_{ij})$ y $A_{\Delta} = (a_{st})$. □

6.8.2. Definimos el *operador pull-up*, $u_{\pi}: C^{\Delta_0} \rightarrow C^{\bar{\Delta}_0}$, asociado U_{π} , el funtor pull-up de π , de la siguiente manera: Para $j \in \Delta_0$, $u_{\pi}((x_s)_{s \in \Delta_0})_j = x_t$, con $\pi(j) = t$.

También aquí tenemos que para todo $X \in \text{mod } \Lambda$, $u_{\pi}(\dim X) = \dim U_{\pi}(X)$.

Lema. u_{π} satisface

$$u_{\pi} \phi_{\Lambda} = \phi_{\bar{\Lambda}} u_{\pi}.$$

Demostración: Una observación que nos será muy útil es que

6.8.3. Si Q_i (resp. P_i) denota el inyectivo (resp. proyectivo) en i , entonces

$$u_{\pi}(\dim Q_s) = \sum_{\substack{i \in \bar{\Delta}_0 \\ \pi(i)=s}} \dim Q_i, \text{ y}$$

$$u_{\pi}(\dim P_s) = \sum_{\substack{i \in \bar{\Delta}_0 \\ \pi(i)=s}} \dim P_i.$$

Como ϕ_{Λ} (resp. $\phi_{\bar{\Lambda}}$) es la única transformación lineal tal que, para $s \in \Delta_0$ (resp. $i \in \bar{\Delta}_0$) $\phi_{\Lambda}(\dim P_s) = -\dim Q_s$ (resp. $\phi_{\bar{\Lambda}}(\dim P_i) = -\dim Q_i$), (ver (0.10.3)).

Por tanto, para toda $s \in \Delta_0$

$$u_{\pi} \phi_{\Lambda}(\dim P_s) = - \sum_{\pi(i)=s} \dim Q_i = \phi_{\bar{\Lambda}} \left(\sum_{\pi(i)=s} \dim P_i \right) = \phi_{\bar{\Lambda}} u_{\pi}(\dim P_s).$$

Entonces (como $\{\dim P_s\}_{s \in \Delta_0}$ forma una base para C^{Δ_0}), $u_{\pi} \phi_{\Lambda} = \phi_{\bar{\Lambda}} u_{\pi}$. □

6.8.4. Lema. Sea $\pi: \bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\Delta]$ una cubierta de Galois, definida por la acción de un grupo G . Sea $\bar{\Delta}$ finita. Entonces

- a) G es finito, y $|\bar{\Delta}_0| = t|\Delta_0|$, donde t es el orden de G .
 b) Con la notación de (6.8.1 - 6.8.3), si $v \in \mathbb{C}^{\Delta_0}$, entonces

$$d_{\pi} u_{\pi}(v) = tv.$$

Demostración: a) Si $\pi(j) = s$, $Gj \subset \pi^{-1}(s) = \pi^{-1}\pi(j) = Gj$ y como G actúa libremente en Gj , entonces $|Gj| = |G| = t$.

b) Sean $v \in \mathbb{C}^{\Delta_0}$, y $s \in \Delta_0$. Entonces

$$(d_{\pi} u_{\pi}(v))_s = \sum_{\pi(j)=s} (u_{\pi}(v))_j = \sum_{\pi(j)=s} v_s \stackrel{(a)}{=} tv_s.$$

□

7. PROPIEDADES ESPECTRALES DE LAS MATRICES DE COXETER

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

En éste y en los siguientes capítulos, uniremos gran parte de los resultados anteriores para obtener propiedades del espectro de la matriz de Coxeter y aplicaciones a la teoría de representaciones de álgebras. Obtendremos algunos de los resultados incluidos en artículos con de la Peña: [PT1], [PT3]; y otros resultados que no han sido aún publicados.

La siguiente sección es un resumen sobre parte de la teoría de grupos de Weyl. La finalidad de ésta es enfatizar la importancia de las matrices de Coxeter en esta teoría y observar que muchas de las técnicas que después desarrollaremos, pueden utilizarse en algunos casos más generales.

7.0. El grupo de Weyl.

Los grupos de Weyl juegan un papel fundamental en la teoría de álgebras de Lie (álgebras de Kař-Moody), ver [Kc1]; como hemos visto y veremos a lo largo de este trabajo, también en la teoría de representaciones de álgebras, en especial en el estudio de las álgebras hereditarias. Esta sección se basa en [P3], [Bou] y [Kc2].

7.0.1. Como una generalización de (0.8), sea $A = (a_{ij})$ una matriz de Tits de tamaño $n \times n$, esto es: $a_{ii} = 2$ para $1 \leq i \leq n$; $a_{ij} = 0$ si $a_{ji} = 0$, donde a_{ij} es un entero no positivo si $i \neq j$. (En la literatura, A también aparece con el nombre de matriz de "Cartan").

Sean $E = \mathbb{R}^n$ y e_1, \dots, e_n un conjunto de vectores linealmente independientes de E . Definamos $(-, -)$ la forma bilineal (no necesariamente simétrica) en E dada por $(e_i, e_j) = a_{ij}$. Las reflexiones $s_i \in GL(E)$ están definidas por $s_i(v) = v - (v, e_i)e_i$, para cada $v \in E$. Se tienen las siguientes relaciones

$$s_i^2 = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{y} \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

donde los enteros m_{ij} están dados en la siguiente tabla

$a_{ij}; a_{ji}$	0	1	2	3	≥ 4
m_{ij}	2	3	4	6	∞

ver [Bou, cap. IV, 1.5] y [Kc2, 3.12].

El subgrupo W de $GL(E)$ generado por s_1, \dots, s_n es llamado el *grupo de Weyl* de A .

7.0.2 Como hemos visto en (5.3.2), la matriz de Tits A satisface una y sólo una de las siguientes tres propiedades:

- a) (Caso Elíptico) $\det A \neq 0$ y existe un vector positivo $u \gg 0$ tal que $uA \gg 0$;
- b) (Caso Parabólico) $\det A = 0$ y existe $u \gg 0$ tal que $uA = 0$;
- c) (Caso Hiperbólico) existe $u \gg 0$ tal que $uA \ll 0$.

Asociada a A existe una *gráfica (valuada) de Coxeter* Δ que está dada de la siguiente forma: Δ tiene como conjunto de vértices $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$. Si $i < j$ y $a_{ij} \neq 0$, entonces existe una arista en Δ que une a i y j con valor $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$.

Observemos que si tenemos un carcaj $\tilde{\Delta}$ y T su matriz de Tits como en (0.8), la gráfica de Coxeter de T coincide con Δ , si en lugar de valuaciones ponemos tantas aristas entre dos vértices i y j como $|a_{ij}| = |a_{ji}|$.

Siempre supondremos que Δ es conexa, es decir A es *irreducible*.

Sabemos que A es elíptica sii Δ es un diagrama de Dynkin. En este caso W , el grupo de Weyl, es finito.

La matriz A es parabólica sii Δ es un diagrama euclidiano, ver (5.3.2). En este caso W es un producto semidirecto $\overset{\circ}{W} \ltimes G$, donde $\overset{\circ}{W}$ es un grupo de Weyl finito y G es un grupo abeliano.

7.0.3. Un elemento $\psi = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n} \in W$, con $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, es llamado una *transformación de Coxeter*. En general, la clase de conjugación (en $GL(E)$) de una transformación de Coxeter depende del orden escogido de los índices, ver [Co] y (8.10).

Claramente $\det \psi = (-1)^n$, pues $s_i^2 = 1$, para toda i .

7.0.4. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria. En (0.8), definimos la matriz de Coxeter ϕ_Λ asociada a Λ .

Supongamos que Δ_0 , el conjunto de vértices de $\vec{\Delta}$, tiene una numeración (+)-accesible. Esto es, numeramos primero a todos los pozos en $\vec{\Delta}$, después a los que son pozos en el subcarcaj $\vec{\Delta}'$ pleno de $\vec{\Delta}$, con $\Delta'_0 = \Delta_0 \setminus \{\text{pozos de } \vec{\Delta}\}$ y así sucesivamente. Existe tal numeración pues $\vec{\Delta}$ no tiene ciclos dirigidos.

7.0.4.1. Tomemos $\Psi = s_1 s_2 \cdots s_n \in W$ una transformación de Coxeter del grupo de Weyl W asociado a T_Λ . Entonces existe una permutación de renglones de ϕ_Δ , combinada con la misma permutación en columnas tal que ϕ_Λ toma la forma Ψ , ver [BnGP]. En otras palabras, si ϕ_Λ es la matriz de Coxeter de Λ con una numeración (+)-accesible en Δ_0 , entonces $\phi_\Lambda = \Psi$.

Demostración [Ho]: Sean $C_\Lambda =: C$ la matriz de Cartan de $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ y $A_\Delta = (a_{ij})$ la matriz de adyacencia de Δ , ver (0.8) y (2.1). Sean $n = |\Delta_0|$ y para cada $i \in \Delta_0$, $p_i := \dim P_i$, el vector dimensión del proyectivo en i .

Como Δ_0 está ordenado (+)-accesiblemente, tenemos que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & p_2(1) & p_3(1) & \cdots & p_n(1) \\ & 1 & p_3(2) & \cdots & p_n(2) \\ & & 1 & \cdots & p_n(3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, la matriz de reflexión s_i , $i \in \Delta_0$ tiene la siguiente forma

$$s_i = \begin{bmatrix} I & a_i^T & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & b_i^T & I \end{bmatrix},$$

donde $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{i-1i})$, $b_i = (a_{i+1i}, \dots, a_{ni})$ y las I 's son matrices identidad que en cada caso tienen el tamaño apropiado.

Para cada $i \in \Delta_0$, definimos L_i y u_i de tal forma que

$$C = \begin{pmatrix} L_i & X_i \\ 0 & u_i^T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^T = \begin{pmatrix} L_i^T & 0 \\ X_i^T & u_i \end{pmatrix},$$

donde L_i es de tamaño $i \times i$ y u_i matriz de $(n-i) \times (n-i)$. Entonces

$$L_i = \begin{pmatrix} L_{i-1} & w_i^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_i^T & u_i \end{pmatrix}$$

donde $w_i = (p_i(1), \dots, p_i(i-1))$ y $v_i = (p_{i+1}(i), \dots, p_n(i))$.

Usaremos inducción sobre i para demostrar que

$$C^T s_1 \cdots s_i = \begin{pmatrix} -L_i & 0 \\ 0 & u_i \end{pmatrix}.$$

Esto es obviamente cierto para $i = 0$. Supongamos cierto esto para $i - 1$. Reemplazando i tenemos

$$\begin{aligned} C^T s_1 \cdots s_i &= \begin{pmatrix} -L_{i-1} & 0 \\ 0 & u_{i-1} \end{pmatrix} s_i \\ &= \begin{pmatrix} -L_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_i^T & u_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & a_i^T & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & b_i^T & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -L_{i-1} & w_i^T & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L_i & 0 \\ 0 & u_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo anterior se sigue de las siguientes identidades (recordando que Δ_0 está numerado (+)-accesiblemente): sean $h, i, j \in \Delta_0$

$$p_i(h) = a_{ih} + \sum_{j>h} p_j(h) a_{ji}$$

$$p_j(i) = \sum_{i<h\leq j} p_j(h) a_{hi}$$

Por lo tanto, $C^T s_1 \cdots s_n = -C$, con lo que se sigue el resultado. \square

Por lo anterior, *siempre* supondremos que Δ_0 está numerado (+)-accesiblemente.

7.0.4.2. Observación: Sean k y k' dos campos. Si $\vec{\Delta}$ es un carcaj sin ciclos orientados y $s \in \Delta_0$, entonces

$$\dim P_s = \dim P'_s$$

con P_s (resp. P'_s) el proyectivo en s de $k[\vec{\Delta}]$ (resp. $k'[\vec{\Delta}]$).

Luego, $\phi_{k[\vec{\Delta}]} = \phi_{k'[\vec{\Delta}]} =: \phi_{\vec{\Delta}}$

Por lo tanto, $\phi_{\vec{\Delta}}$ es *realmente* un invariante de $\vec{\Delta}$ (lo mismo para $\rho(\phi_{\vec{\Delta}})$).

7.0.5. Algebras de Lie y de Kač-Moody.

Sea k un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

Sea $A = (a_{ij})$ una $(n \times n)$ -matriz de Tits y sea Γ un grupo abeliano libre con generadores libres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Asociamos a la matriz A la siguiente k -álgebra de Lie

Γ -graduada $\mathcal{L}(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{L}_\alpha$, la cual está únicamente determinada por las siguientes propiedades:

- a) Cada ideal graduado que intersekte trivialmente a \mathcal{L}_0 es cero,
- b) $\mathcal{L}(A)$ está generado por los elementos $e_i, f_i, h_i, i = 1, \dots, n$, tal que $\mathcal{L}_{\alpha_i} = ke_i$, $\mathcal{L}_{-\alpha_i} = kf_i$; los $h_i, i = 1, \dots, n$ forman una base de \mathcal{L}_0 y las siguientes relaciones se cumplen:

$$[h_i, h_j] = 0, [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i, [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j,$$

con $i, j = 1, \dots, n$, y δ_{ij} denota la delta de Kronecker.

Llamamos a $\mathcal{L}(A)$ un *álgebra de Lie* si $\mathcal{L}(A)$ tiene k -dimensión finita, en otro caso le diremos *álgebra de Kač-Moody*.

Es sabido que $\mathcal{L}(A)$ es un álgebra de Lie sii A es elíptica; y $\mathcal{L}(A)$ es un álgebra simple (es decir, cuyos únicos ideales son 0 y $\mathcal{L}(A)$) sii A es irreducible y no tiene raíces nulas. Una *raíz nula* de A es por definición un vector no negativo $x = (x_i)$ tal que $xA = 0$.

Por otro lado, desde que Coxeter estudió las transformaciones de Coxeter y sus espectros, en $[Cx]$, éstos han jugado un papel muy importante en la teoría de álgebras de Lie $[Bou]$, $[Cr]$, particularmente en el estudio de la teoría de álgebras afines (esto es, cuando su matriz de Tits es parabólica) y recientemente en las álgebras *salvajes* (es decir, si su matriz de Tits es hiperbólica). Además de la bibliografía ya mencionada, ver $[A']$, $[BeMW]$, $[BeLM]$, $[BnGP]$, $[Co]$, $[Dir1]$ y $[PT1]$.

Daremos sólo como ejemplo uno de estos resultados: (ver $[PT1]$, $[P3]$).

Proposición. Sea $\mathcal{L}(A)$ una k -álgebra de Lie. Entonces

- a) $\mathcal{L}(A)$ es de k -dimensión infinita sii el radio espectral de alguna de sus transformaciones de Coxeter ϕ pertenece a su espectro, esto es, $\rho(\phi) \in \sigma(\phi)$.
- b) A es hiperbólica sii existen $\phi \in W = W(A)$ transformación de Coxeter y $\lambda, \mu \in \sigma(\phi)$ dos valores propios de ϕ tales que $|\lambda| \neq |\mu|$. Además en este caso $\rho(\phi) > 1$.
- c) Si A es hiperbólica y $n \geq 3$, entonces W tiene un subgrupo libre no abeliano. \square

Terminamos aquí nuestra breve revisión sobre grupos de Weyl. Volvamos a nuestro asunto.

Recordemos: Sea $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ la k -álgebra de trayectorias de $\vec{\Delta}$ un carcaj finito y sin ciclos orientados, $|\Delta_0| = n$.

Sean $T \in \text{mod } \Lambda$ un Λ -módulo de tilteo y $B = \text{End}_\Lambda(T)$ k -álgebra tilteada. Como antes, ϕ_Λ denota la matriz de Coxeter de Λ ; C_Λ la matriz de Cartan de Λ ; A_Δ la matriz de adyacencia de Δ ; $\sigma(L)$ denota el espectro del operador L , ver capítulos 0 y 2.

Denotemos por $\rho(L) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(L)\}$ el *radio espectral* de L .

A lo largo del resto de este capítulo y del siguiente, $\vec{\Delta}$ es un carcaj no Dynkin.

7.1. Lema. 1) $\sigma(\phi_B) = \sigma(\phi_B^{-1})$. Más aún, $\det(xI - \phi_B) = \det(xI - \phi_B^{-1})$. En particular, $\rho(\phi_B) = \rho(\phi_B^{-1})$.

2) Si $\vec{\Delta}$ y $\vec{\Delta}'$ son árboles y $\Delta = \Delta'$ con $\Lambda' = k[\vec{\Delta}']$, entonces $\rho(\phi_\Lambda) = \rho(\phi_{\Lambda'})$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \det(xI - \phi_B) &= \det(xI - (-C_B^{-T}C_B)) = \det(xI - (-C_B C_B^{-T})), \text{ ([HrJ, pág. 53])} \\ &= \det(xI - (-C_B^{-1}C_B^T)) \text{ (pues } \det H = \det H^T) \\ &= \det(xI - \phi_B^{-1}). \end{aligned}$$

Ahora, si $\Delta = \Delta'$ árboles, entonces Λ' es álgebra oculta de Λ , y aplicamos (5.8.6). □

Notemos que la parte (1) del lema vale para cualquier k -álgebra de dimensión global finita.

Ver también [Co].

7.2. Lema. a) Si $\lambda \in \sigma(\phi_B)$, entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(\phi_B)$ con la misma multiplicidad de λ en $\det(xI - \phi_B)$.

b) La multiplicidad de 1, como valor propio de ϕ_B , es congruente con cero módulo 2.

Demostración: (a) Como ϕ_B es invertible, por (7.1) tenemos

$$\lambda \in \sigma(\phi_B) \text{ sii } \lambda^{-1} \in \sigma(\phi_B).$$

Además, también de lo anterior vemos que la multiplicadad de λ^{-1} en $\det(xI - \phi_B)$ es la de λ en $\det(xI - \phi_B^{-1}) = \det(xI - \phi_B)$.

(b) [BeLM, pág. 343]: Sea p (resp. q) la multiplicadad de 1 (resp. -1) en el polinomio característico de ϕ_B . Por (7.0.3) y (5.8.6), $\det(\phi_B) = (-1)^n$. Por (a), usando la forma canónica de Jordan de ϕ_B , tenemos $(-1)^n = \det(\phi_B) = (-1)^q$. Otra vez utilizando (a) y como $n = p + q + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(\phi_B) \\ \lambda \neq 1, -1}} \text{mult}_{\phi_B}(\lambda)$, donde $\text{mult}_{\phi_B}(\lambda) =$ multiplicadad de λ en $\det(xI - \phi_B)$, obtenemos $(-1)^{p+q} = (-1)^q$. Luego, $(-1)^p = 1$ y $p \equiv 0 \pmod{2}$. \square

7.3. Recordemos que p (del lema anterior) es igual a 2 para todo carcaj euclidiano, ver [BeLM] o [Ho].

7.4. Para simplificar, denotemos $\rho_B := \rho(\phi_B) = \rho(\phi_B^{-1})$.

Para el siguiente resultado ver [PT1] y [DIR2].

Proposición. Sean $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$, y $B = \text{End}_{\Lambda}(T)$ un álgebra oculta salvaje de tipo $\bar{\Delta}$, $|\Delta_0| = n$. Entonces,

- i) $\rho_B \in \sigma(\phi_B)$. Además, existe $y_B^+ \geq 0$ vector propio no negativo de ϕ_B , con valor propio ρ_B . i.e. $\phi_B(y_B^+) = \rho_B y_B^+$.
- ii) Existe $y_B^- \geq 0$ tal que $\phi_B^{-1}(y_B^-) = \rho_B y_B^-$.
- iii) $y_B^- \notin \mathbf{R}y_B^+$.

Demostración: Primero demostraremos el resultado para $B = \Lambda$: sea $K\mathcal{P}_{\Lambda}$ (resp. $K\mathcal{I}_{\Lambda}$) el cono preproyectivo (resp. preinyectivo) de Λ , ambos conos son sólidos (1.4).

Como Λ es hereditaria, si X es Λ -inescindible no proyectivo (resp. no inyectivo) $\dim \tau_{\Lambda} X = \phi_{\Lambda}(\dim X)$ (resp. $\dim \tau_{\Lambda}^{-1} X = \phi_{\Lambda}^{-1}(\dim X)$). Además $\tau_{\Lambda} X$ (resp. $\tau_{\Lambda}^{-1} X$) está en la misma componente conexa que X . En otras palabras,

$$\phi_{\Lambda}^{-1}(K\mathcal{P}_{\Lambda}) \subset K\mathcal{P}_{\Lambda}, \quad \phi_{\Lambda}(K\mathcal{I}_{\Lambda}) \subset K\mathcal{I}_{\Lambda}$$

esto es, $\phi_{\Lambda}^{-1}(x) \in K\mathcal{P}_{\Lambda}, \forall x \in K\mathcal{P}_{\Lambda}$.

Por [Bir], existen

$$\begin{aligned} y_{\Lambda}^+ &\in K\mathcal{I}_{\Lambda} \subset V^+ = \text{cono de los vectores no negativos de } \mathbf{R}^n, \text{ y} \\ y_{\Lambda}^- &\in K\mathcal{P}_{\Lambda} \subset V^+ \end{aligned}$$

vectores propios de ϕ_Λ y ϕ_Λ^{-1} respectivamente con valor propio ρ_Λ , ver (1.6) y (1.7).

Además, $y_\Lambda^- \notin \mathbf{R}y_\Lambda^+$ pues $\phi_\Lambda(y_\Lambda^-) = \rho_\Lambda^{-1}y_\Lambda^-$, $\rho_\Lambda > 1$, por (5.4.2).

7.4.1. Para $B = \text{End}_\Lambda(T)$ oculta-salvaje, recordemos que $\sigma(\phi_B) = \sigma(\phi_\Lambda)$, y $\phi_B = \sigma_T^{-1}\phi_\Lambda\sigma_T$. Tomemos $y_B^- = y_\Lambda^-\sigma_T$, $y_B^+ = y_\Lambda^+\sigma_T$, entonces

$$\phi_B^{-1}(y_B^-) = \rho_B y_B^- \quad \text{y} \quad \phi_B(y_B^+) = \rho_B y_B^+.$$

Además, $y_B^-, y_B^+ \geq 0$, pues $T \in \text{add}(\mathcal{P}_\Lambda)$. Por (5.8.6.2),

$$\begin{aligned} y_B^-(i) &= \langle \dim T_i, y_\Lambda^- \rangle_\Lambda = \langle \dim \tau^{-\ell_i} P_{s_i}, y_\Lambda^- \rangle_\Lambda \\ &= \langle \dim P_{s_i}, y_\Lambda^- \phi_\Lambda^{\ell_i} \rangle_\Lambda = \rho_\Lambda^{-\ell_i} y_\Lambda^-(s_i) \geq 0 \end{aligned}$$

para algunos $\ell_i \in \mathbf{N}$, $s_i \in \Delta_0$.

Para y_B^+ es análogo. □

7.5. Proposición. Como antes, sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$, $B = \text{End}_\Lambda(T)$ álgebra tilteada de tipo $\tilde{\Delta}$.

1) $\lambda \in \sigma(\phi_B)$ sii $0 \in \sigma(T_\lambda)$, con $T_\lambda := -(\lambda C_B^{-1} + C_B^{-T})$.

2) 0 es *valor propio simple* de T_{ρ_Λ} (esto es, 0 es raíz simple del polinomio característico de T_{ρ_Λ}).

3) Hay un sólo bloque de Jordan con valor propio ρ_B en la descomposición de ϕ_B . Además $y_B^+ \gg 0$, (donde $\phi_B(y_B^+) = \rho_B y_B^+$ de la proposición (7.4)).

(Observemos que y_B^+ es único salvo \mathbf{R} -múltiplos).

Demostración: 1) es directo:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(\phi_B) \quad \text{sii} \quad & \exists 0 \neq z \in \mathbf{C}^n, -zC_B^{-T}C_B = z\phi_B = \lambda z \\ \text{sii} \quad & zT_\lambda = -zC_B^{-T} - \lambda zC_B^{-1} = 0, z \neq 0 \\ \text{sii} \quad & 0 \in \sigma(T_\lambda). \end{aligned}$$

a) *Demostración de (2) y (3) para $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$:* No es difícil ver que el inverso de la matriz de Cartan (0.8), C_Λ^{-1} tiene la siguiente forma:

$C_\Lambda^{-1} = I - M$ con I la matriz identidad de \mathbf{C}^n y M es la matriz triangular superior donde $A_\Delta = M + M^T$ es la matriz de adyacencia de Δ (ver también [R1]).

Con lo que se tiene que

$$T_{\rho_\Lambda} = -(\rho_\Lambda C_\Lambda^{-1} + C_\Lambda^{-T}) = -[(\rho_\Lambda + 1)I - (\rho_\Lambda M + M^T)], \quad y$$

$$\det(xI - T_{\rho_\Lambda}) = \det((x + (\rho_\Lambda + 1))I - (\rho_\Lambda M + M^T)).$$

Por tanto,

7.5.1. $\lambda \in \sigma(T_{\rho_\Lambda})$ sii $\lambda + (\rho_\Lambda + 1) \in \sigma(\rho_\Lambda M + M^T)$ y con la misma multiplicidad.

Como $\rho_\Lambda > 0$, $\rho_\Lambda M + M^T \geq 0$ matriz no negativa. Además, $\rho_\Lambda M + M^T$ es matriz irreducible, ya que $\rho_\Lambda \neq 0$ y A_Δ es irreducible, ver (2.1).

Aplicando el teorema de Perron-Frobenius (1.8), se tiene que el radio espectral r de $\rho_\Lambda M + M^T$, es valor propio simple de $\rho_\Lambda M + M^T$ y existe $z \gg 0$ tal que $z(\rho_\Lambda M + M^T) = rz$.

Además, por (7.5.1), $r - (\rho_\Lambda + 1)$ es valor propio simple de T_{ρ_Λ} y obtenemos:

7.5.2.
$$zT_{\rho_\Lambda} = (r - (\rho_\Lambda + 1))z.$$

Ahora se demostrará que $r = \rho_\Lambda + 1$.

Si $y^+ := y_\Lambda^+$ como en la proposición (7.4), entonces

$$0 = y^+ T_{\rho_\Lambda} = -(\rho_\Lambda + 1)y^+ + y^+(\rho_\Lambda M + M^T)$$

Luego, $y^+(\rho_\Lambda M + M^T) = (\rho_\Lambda + 1)y^+$ y como $y^+ \geq 0$, por (1.8.b y c), tenemos que

$$\rho_\Lambda + 1 = r.$$

Por (1.8.c), $y^+ \in \mathbf{R}z$, $y^+ \gg 0$.

Por (7.5.2), 0 es valor propio simple de T_{ρ_Λ} . En particular, ρ_Λ tiene un solo bloque de Jordan en la descomposición de ϕ_Λ . En efecto, cada vector propio de ϕ_Λ con valor propio ρ_Λ , es un vector propio de T_{ρ_Λ} , con valor propio 0, y por (2), obtenemos el resultado.

b) Cuando $B = \text{End}_\Lambda(T)$ es álgebra oculta-salvaje, el resultado se obtiene de (5.8.6) y (7.4.1), pues $\det(xI - \phi_B) = \det(xI - \phi_\Lambda)$ y $y_B^+ = y_\Lambda^+ \sigma_T$. \square

7.6. Resumiendo:

(El siguiente resultado es una generalización, para toda álgebra hereditaria salvaje de la proposición [PT1, (2.1)]).

Proposición. Sean $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria salvaje y $B = \text{End}_\Lambda(T)$ una k -álgebra oculta (salvaje) de tipo $\tilde{\Delta}$. Entonces

- a) $1 < \rho_B \in \sigma(\phi_B)$, donde $\rho_B = \rho(\phi_B)$.
- b) $\exists y_B^+ \gg 0$ tal que $\phi_B(y_B^+) = \rho_B y_B^+$. Con y_B^+ único salvo \mathbf{R} -múltiplos.
Análogamente para ϕ_B^{-1} :
- c) $\exists y_B^- >> 0$ tal que $\phi_B^{-1}(y_B^-) = \rho_B y_B^-$, y_B^- único salvo \mathbf{R} -múltiplos.
- d) $y_B^+ \notin \mathbf{R}y_B^-$, y $y_B^-, y_B^+ \notin \mathbf{R}(\dim X)$, para todo B -módulo inescindible X .
- e) $\text{mult}_{\phi_B}(\rho_B) = \text{mult}_{\phi_B}(\rho_B^{-1})$.

Falta demostrar (d): Sabemos que $y_B^+ \notin \mathbf{R}y_B^-$, por (7.4.iii).

Mostraremos el resultado para y_B^- (demostrarlo para y_B^+ es análogo).

1. Haremos primero la prueba para el caso $B = \Lambda$: Sea X un Λ -módulo inescindible. Supongamos que $y^- := y_\Lambda^- = \lambda \dim X$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Observemos que $\langle y^-, y^- \rangle_\Lambda = 0$, la forma de Tits de Λ . En efecto, $\langle y^-, y^- \rangle_\Lambda = \langle y^- \phi_\Lambda, y^- \phi_\Lambda \rangle_\Lambda = \rho_\Lambda^{-2} \langle y^-, y^- \rangle_\Lambda$ y $\rho_\Lambda > 1$, ver (0.8) y (a).

Entonces, por (9.1), $0 \neq \langle y^-, \dim X \rangle_\Lambda = \lambda^{-1} \langle y^-, y^- \rangle_\Lambda = 0$, que es una contradicción.

2. Sean B k -álgebra oculta de tipo $\tilde{\Delta}$ y X un B -módulo inescindible. Siguiendo la notación de (7.4.1) y (5.9.4), podemos suponer que $y_B^- = y_\Lambda^- \sigma_T$.

Supongamos que $y_B^- = \lambda \dim X$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Por (5.8.6) y (5.9.4), existe $L \in \text{mod } \Lambda$ tal que $\dim X = (\dim L) \sigma_T$ ó $\dim X = -(\dim L) \sigma_T$. En ambos casos, por (9.1), $0 \neq \langle y_B^-, \dim X \rangle_B = \lambda^{-1} \langle y_B^-, y_B^- \rangle_B = \lambda^{-1} \langle y_\Lambda^-, y_\Lambda^- \rangle_\Lambda = 0$, que es una contradicción. \square

7.7. Los carcajes “fuente-pozos”.

En muchas partes de la literatura sobre matrices de Coxeter se trata un caso muy particular de éstas, el caso “bipartita” o “fuente-pozos” (ver (9.5)-(9.8), [BnGP], [BeLM], [Ho], [PT1], [Co], [A’]). La razón principal de este interés es que, en este caso,

la matriz de Coxeter de $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ y la matriz de adyacencia de Δ tienen muy estrechas relaciones.

Diremos que $\bar{\Delta}$ tiene *orientación fuente-pozos* si todo $x \in \Delta_0$ es *fuelle* (i.e. toda flecha que contiene a x , sale de x) o es un *pozo* (que es la noción dual de fuente).

7.7.1. Lema. Sea Δ una gráfica sin ciclos de longitud impar, entonces a Δ le podemos dar una orientación fuente-pozos.

En particular, si $\bar{\Delta}$ es un carcaj *árbol*, entonces existe $\bar{\Delta}'$ con orientación fuente-pozos tal que $\Delta = \Delta'$.

Demostración: Recordemos que Δ es gráfica finita y sin lazos.

Se demostrará el lema por inducción sobre el número de vértices de Δ .

Si $|\Delta_0| = 2$, entonces Δ es alguna de las siguientes gráficas:



En el primer caso no hay nada que hacer y en el segundo, por ejemplo



Sea $|\Delta_0| > 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Δ es conexas, si no por hipótesis de inducción en cada componente conexas, tenemos una orientación fuente-pozos para cada una, entonces la obtenemos para Δ .

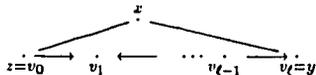
Sea $x \in \Delta_0$ un vértice fijo. Sea Δ' la subgráfica plena (posiblemente desconexa) de Δ con vértices $\Delta_0 \setminus \{x\}$. Δ' no tiene ciclos de longitud impar pues Δ no los tiene.

Por hipótesis de inducción, podemos asociar a Δ' una orientación fuente-pozos $\bar{\Delta}' = (\Delta', (s', e'))$.

Si todo vértice adyacente a x en Δ es fuente (resp. pozo) en $\bar{\Delta}'$, entonces orientamos todas las aristas que contienen a x , para que x sea pozo (resp. fuente).

Si no sucede esto, entonces existen $y, z \in \Delta_0$, adyacentes a x , con y pozo y z fuente en $\bar{\Delta}'$. Podemos suponer que y y z están en la misma componente conexas de $\bar{\Delta}'$, pues si no, a alguna de las dos componentes le asociamos su orientación opuesta (invertimos el sentido de cada flecha), observemos que sigue siendo orientación fuente-pozos.

Entonces en $\vec{\Delta}'$ existe una trayectoria simple (es decir, sin repetición de vértices) que une a z con y , con orientación fuente-pozos:



luego, ℓ es impar y Δ tiene un ciclo de longitud impar; que es una contradicción. \square

7.7.2. Proposición ([A'], [PT1]). Sea $\vec{\Delta}$ un carcaj con orientación fuente-pozos, $|\Delta_0| = n$. Sean $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ y $B = \text{End}_{\Lambda}(T)$ álgebra tiltada de tipo $\vec{\Delta}$. Entonces

- $\sigma(\phi_B) \subset S^1 \cup \mathbf{R}^+$, donde S^1 son los complejos de norma 1.
- $\lambda^2 \in \sigma(\phi_B)$ sii $\lambda + \lambda^{-1} \in \sigma(A_{\Delta})$, donde $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}$.
- Existe $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \geq 1$ tal que $\rho(A_{\Delta}) = \lambda + \lambda^{-1}$ y $\rho(\phi_{\Lambda}) = \lambda^2$. Más aún, si $\vec{\Delta}$ es salvaje $\lambda > 1$.

Creemos que (a) vale para cualquier k -álgebra oculta B , pero no hemos podido demostrarlo.

Demostración: Por (5.8.6), basta tomar el caso $B = \Lambda = k[\vec{\Delta}]$.

Podemos ordenar los vértices de Δ en tal forma que para cada $1 \leq i \leq m$, i es un pozo en $\vec{\Delta}$ y para cada $m+1 \leq i \leq n$, i es una fuente en $\vec{\Delta}$. Sea $N := N_{\Delta} := C_{\Lambda} - I$, con C_{Λ} la matriz de Cartan de Λ e I la matriz identidad. En este caso N toma una forma muy sencilla

$$7.7.3. \quad N = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{0}^m & D \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]^m$$

donde $N(i, j) =$ número de aristas entre i y j , con $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq n$.

Observemos que $A_{\Delta} = N + N^T$ es la matriz de adyacencia de Δ (ver capítulo 2).

Mostraremos que, si $x \neq 0$, entonces

$$7.7.4. \quad \det(x^2 I - \phi_{\Lambda}) = x^n \det((x + x^{-1})I - A_{\Delta})$$

En efecto, por (7.7.3), $N^2 = 0$ y así tenemos que $C_\Delta^{-1} = I - N$ y

$$\begin{aligned} \det(x^2 I - \phi_\Delta) &= \det(x^2 I + (I - N^T)(I + N)) \det(I - N) \quad , \text{ pues } \det(I - N) = 1 \\ &= \det(x^2 I - x^2 N + (I - N^T)) \\ &= x^n \det((x + x^{-1})I - xN - x^{-1}N^T) \\ &= x^n \det((x + x^{-1})I - A_\Delta), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se explica por lo siguiente:

Sea $\alpha = x + x^{-1}$. Es inmediato que

$$\alpha I - A_\Delta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & xI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I & -xD \\ -x^{-1}D^T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & x^{-1}I \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\det((x + x^{-1})I - A_\Delta) = x^{n-m} \det((x + x^{-1})I - (xN + x^{-1}N^T)) x^{-(n-m)}.$$

a) ϕ_Δ es isomorfismo. Recordemos que $\sigma(\phi_\Delta) = \{\mu \in \mathbf{C}; \mu \text{ es valor propio de } \phi_\Delta\}$. Entonces por (7.7.4), si $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}$:

$$7.7.5. \quad \lambda^2 \in \sigma(\phi_\Delta) \text{ sii } \lambda + \lambda^{-1} \in \sigma(A_\Delta).$$

Ahora, A_Δ es matriz simétrica real, entonces $\sigma(A_\Delta) \subset \mathbf{R}$. Por (7.7.6), se sigue que $\sigma(\phi_\Delta) \subset S^1 \cup \mathbf{R}^+$.

b) Se sigue de (7.7.5).

c) Por (7.4), $\rho(\phi_\Delta) \in \sigma(\phi_\Delta)$; entonces existe $\mu \in \mathbf{C}$ tal que $\mu^2 = \rho(\phi_\Delta) \in \mathbf{R}^+$ y $\mu + \mu^{-1} \in \sigma(A_\Delta)$. Por (7.1), $\mu^{-2} \in \sigma(\phi_\Delta)$, entonces $\mu^2 \geq 1$. De hecho, $\mu \in \mathbf{R}$.

Por (1.8), $\rho(A_\Delta) =: \rho(\Delta) \in \sigma(A_\Delta)$ y por (5.3.1.1), $\rho(\Delta) \geq 2$. Entonces por (7.7.6) y (7.7.5), existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$ con $\lambda \geq 1$, tal que $\lambda + \lambda^{-1} = \rho(\Delta) \in \mathbf{R}^+$ y $\lambda^2 \in \sigma(\phi_\Delta)$. Como $|\mu + \mu^{-1}| \leq \lambda + \lambda^{-1}$, entonces $0 < \mu^2 + \mu^{-2} \leq \lambda^2 + \lambda^{-2}$, y por ser $x + x^{-1}$ función creciente en $x \geq 1$, tenemos que $\mu^2 \leq \lambda^2 \leq \rho(\phi_\Delta) = \mu^2$, y $\lambda = |\mu| \geq 1$.

Entonces $\rho(\Delta) = \lambda + \lambda^{-1}$ y $\rho(\phi_\Delta) = \lambda^2$ con $\lambda \geq 1$.

Ahora, supongamos que Λ es salvaje. Por (5.4.2), $1 < \rho(\phi_\Lambda) = \lambda^2$ entonces $\lambda > 1$. □

7.7.6. Lema. Sea $r \in \mathbf{R}^+$, entonces

1) Existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $\lambda + \lambda^{-1} = r$. Además, si $|\lambda| \geq 1$, entonces λ es única.

2) Si $r \leq 2$, entonces $\lambda \in S^1$.

3) Si $r \geq 2$, entonces $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Demostración: Para mostrar la existencia de λ basta resolver la siguiente ecuación $\lambda^2 - r\lambda + 1 = 0$, esto es, $\lambda \in \left\{ \frac{r + \sqrt{r^2 - 4}}{2}, \frac{r - \sqrt{r^2 - 4}}{2} \right\}$.

Observemos que $\lambda \in \mathbf{C}$ sii $r \leq 2$, y como $r \in \mathbf{R}^+$, tenemos que $\lambda \in \mathbf{R}^+$ sii $r \geq 2$.

Sea $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}$, con $a, b \in \mathbf{R}$, tal que $r = \lambda + \lambda^{-1} = a + \frac{a}{|\lambda|} + i \left(b - \frac{b}{|\lambda|} \right) \in \mathbf{R}$, entonces

$$b = 0 \quad \text{ó} \quad |\lambda| = 1.$$

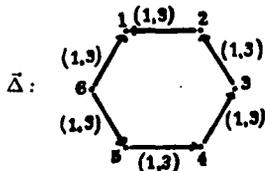
Luego, $\lambda \in S^1 \cup \mathbf{R}^+$. □

7.7.7. Observación: Con la notación de la prueba de (7.7.2) tenemos: si $\lambda \in \mathbf{C}$, con $|\lambda| \geq 1$ es tal que $\lambda + \lambda^{-1} = \rho(\Delta)$ (≥ 2), entonces $\lambda \in \mathbf{R}^+$ y $\lambda^2 = \rho(\phi_\lambda)$.

7.7.8 El siguiente ejemplo muestra que existen transformaciones de Coxeter, cuyo espectro no está contenido en $S^1 \cup \mathbf{R}$.

El siguiente ejemplo es de [BeLM] y es una matriz de Coxeter asociada a un álgebra de Kač-Moody, (7.0.5).

Sea T la siguiente matriz de Tits, asociada al álgebra de Kač-Moody de $\tilde{\Delta}$, ver (7.0.1):



$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_T = s_1 \cdots s_6 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Luego, $\sigma(C_T) = \{10.5953, .0013, -1.6671 + 1.7971i, -1.6671 - 1.7971i, 2.8687 + 1.8465i, 2.8687 - 1.8465i\} \not\subset S^1 \cup \mathbf{R}$.

También en [BeLM] se obtiene una matriz de Tits T , no simetrizable tal que $\sigma(C_T) \subset \mathbf{R}$.

El siguiente resultado es un refinamiento del lema (5.4.2) para el caso fuente-pozos (ver [PT1]):

7.8. Proposición. Supongamos que $\bar{\Delta}$ es un carcaj salvaje con orientación fuente-pozos. Sea $\bar{\Delta}'$ un subcarcaj "propio" de $\bar{\Delta}$ (donde $\bar{\Delta}'$ puede no ser subcarcaj pleno de $\bar{\Delta}$), ver (0.5). Sean $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ salvaje y $\Lambda' = k[\bar{\Delta}']$. Entonces $\rho(\phi_{\Lambda'}) < \rho(\phi_{\Lambda})$.

Demostración: Caso 1.- Si Λ' es mansa, entonces por (5.4.2), $\rho(\phi_{\Lambda'}) = 1 < \rho(\phi_{\Lambda})$.

Caso 2.- Λ' salvaje, entonces por (7.7.2.c), existen $\lambda', \lambda \in \mathbf{R}$ con $\lambda', \lambda \geq 1$ tales que $\rho(\Delta') = \lambda' + \lambda'^{-1}$, $\rho(\Delta) = \lambda + \lambda^{-1}$ y $\rho(\phi_{\Lambda'}) = \lambda'^2$, $\rho(\phi_{\Lambda}) = \lambda^2$.

Por (1.9), $\rho(\Delta') < \rho(\Delta)$. Como $x + x^{-1}$ es creciente en $x \geq 1$, se tiene que $\lambda' < \lambda$ y $\rho(\phi_{\Lambda'}) < \rho(\phi_{\Lambda})$. \square

7.9. Lema [PT1]. Supongamos que Δ no es un diagrama Dynkin ni euclidiano y $\bar{\Delta}$ con orientación fuente-pozos. Sea $B = \text{End}_{\Lambda}(T)$ álgebra tilteada del tipo $\bar{\Delta}$. Entonces

- i) $\rho(\phi_B)$ es una raíz simple del polinomio característico de ϕ_B .
- ii) Si $\lambda \in \sigma(\phi_B)$, es valor propio de ϕ_B , tal que $\lambda \neq \rho(\phi_B)$, entonces $|\lambda| < \rho(\phi_B)$.

Demostración: Por (5.8.6), basta demostrar el lema para $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$, $\bar{\Delta}$ con orientación fuente-pozos. Sea A_{Δ} la matriz de adyacencia de Δ . Como en (7.7.2), existe $\lambda > 1$ tal que $\rho(A_{\Delta}) = \lambda + \lambda^{-1}$ y $\rho_{\Lambda} = \rho(\phi_{\Lambda}) = \lambda^2$. En (7.7.4) vimos que

$$\det(x^2I - \phi_{\Lambda}) = x^n \det((x + x^{-1})I - A_{\Delta}).$$

Por (1.8), el teorema de Perron-Frobenius, también se tiene que $\rho(A_{\Delta})$ es raíz simple del polinomio característico de A_{Δ} .

Entonces, $\frac{d}{d(x+x^{-1})}(\det((x+x^{-1})I - A_{\Delta}))|_{x=\lambda} \neq 0$. Un cálculo demuestra que

$$\frac{d}{dx^2}(\det(x^2I - \phi_{\Lambda}))|_{x=\lambda} = \frac{1}{2}x^{n-1}(1-x^{-2}) \frac{d}{d(x+x^{-1})}(\det((x+x^{-1})I - A_{\Delta}))|_{x=\lambda}.$$

Por (5.4.2), $\rho_{\Lambda} > 1$; entonces este número es distinto de cero.

Por lo tanto, $\rho_\Lambda = \lambda^2$ es raíz simple del polinomio característico de ϕ_Λ .

ii) Se sigue de que $\rho_\Lambda > 1$ y $\sigma(\phi_\Lambda) \subset S^1 \cup \mathbf{R}^+$. □

Observemos que cuando Δ es un diagrama euclidiano, la prueba anterior demuestra que el radio espectral $\rho_B (= 1)$, nunca es raíz simple del polinomio característico de ϕ_B . De hecho, la multiplicidad de ρ_B en este polinomio, es 2, ver [BeLM] o [Ho].

7.9.1. Problema: El radio espectral de una matriz de Coxeter puede no ser raíz simple de su polinomio característico. Por ejemplo si la matriz T que la define, no es simétrica.

En nuestro caso, cuando ϕ_Λ está definido por $T = 2I - A_\Delta$, que es una matriz de Tits simétrica, creemos que $\rho(\phi_\Lambda)$ siempre es raíz simple del polinomio característico de ϕ_Λ .

Propiedades espectrales de las matrices de Coxeter de cubiertas de Galois.

8.3. Sea $\pi: \bar{\Lambda} = k[\bar{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\Delta]$ una cubierta de Galois, definida por la acción de un grupo G , donde $\bar{\Delta}$ es un carcaj finito, conexo (y como siempre sin ciclos orientados). Sea $n = |\Delta_0|$.

Proposición [PT3]. Si $\bar{\Delta}$ es un carcaj finito, entonces,

a) $\sigma(\phi_\Lambda) \subset \sigma(\phi_{\bar{\Lambda}})$. Más aún, $\det(xI - \phi_\Lambda)$ divide a $\det(xI - \phi_{\bar{\Lambda}})$.

b) $\rho(\phi_\Lambda) = \rho(\phi_{\bar{\Lambda}})$,

ver (0.4) y (4.3).

Demostración: a) Sea $J = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de C^{Δ_0} .

Para probar que el $\det(xI - \phi_\Lambda)$ divide al $\det(xI - \phi_{\bar{\Lambda}})$ es suficiente construir una base de C^{Δ_0} donde la matriz de $\phi_{\bar{\Lambda}}$ asociada a esta base, tome la siguiente forma

$$\left[\begin{array}{c|c} [\phi_{\bar{\Lambda}}]_J & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right].$$

Tomemos $u_\pi(J) = \{u_\pi(v_1), \dots, u_\pi(v_n)\}$ (donde u_π es el operador pull-up, (6.8.2)).

1) $u_\pi(J)$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. En efecto, si $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_\pi(v_i)$, entonces aplicando el operador push-down a ésta, y por (6.8.4), obtenemos:

$$0 = d_\pi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_\pi(v_i) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i t v_i,$$

donde $|\bar{\Delta}_0| = t|\Delta_0|$ y t es el orden de G .

Luego, $\alpha_i = 0$ para toda i .

2) Sea $v_i \in J$, si $\phi_{\bar{\Lambda}}(v_i) = \sum_j a_{ij} v_j$. Por (6.8.2),

$$\phi_{\bar{\Lambda}}(u_\pi(v_i)) = u_\pi(\phi_{\bar{\Lambda}}(v_i)) = u_\pi\left(\sum_j a_{ij} v_j\right) = \sum_j a_{ij} u_\pi(v_j),$$

por lo tanto, $u_\pi(J)$ es una base de un subespacio de $C^{\bar{\Delta}_0}$ invariante bajo $\phi_{\bar{\Lambda}}$, con ésto obtenemos (a).

b) Por (7.4), existe $0 \leq \bar{y} \in C^{\bar{\Delta}_0}$, con $\bar{y} \neq 0$ tal que $\phi_{\bar{\Lambda}}(\bar{y}) = \rho(\phi_{\bar{\Lambda}})\bar{y}$.

Como $\bar{y} \geq 0$, entonces $0 \leq d_\pi(\bar{y}) \neq 0$.

Sea $0 \neq \psi := d_\pi(\bar{y})$, por (6.8.1.a), se tiene que

$$\phi_\Lambda(\psi) = d_\pi(\phi_\Lambda(\bar{y})) = \rho(\phi_\Lambda)\psi$$

Entonces por (a), $\rho(\phi_\Lambda) = \rho(\phi_\Lambda)$. □

Nota: Ver (4.3).

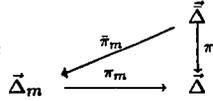
8.4. Supongamos que $\vec{\Delta}$ es un carcaj no necesariamente finito. Como en (2.5), podemos encontrar una sucesión de subcarcajes finitos y plenos de $\vec{\Delta}$, $\vec{F}_1 \subset \vec{F}_2 \subset \dots \subset \vec{\Delta}$ tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \vec{\Delta}$.

Proposición. Sea $\pi: \bar{\Lambda} = k[\vec{\Delta}] \rightarrow \Lambda = k[\vec{\Delta}]$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G residualmente finito, y $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \vec{\Delta}$, como antes. Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{\vec{F}_m}) \leq \rho(\phi_\Lambda),$$

con $\phi_{\vec{F}_m} := \phi_{k[\vec{F}_m]}$.

Demostración: Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces por (3.13) y (3.9.2), existe una factorización finita

de π :  tal que $\bar{\pi}_m!: \vec{F}_m \rightarrow \vec{\Delta}_m$ es inyectiva y $\bar{\pi}_m(\vec{F}_m)$ es subcarcaj pleno de $\vec{\Delta}_m$. Entonces,

8.4.1.

$$\rho(\phi_{\vec{F}_m}) \underset{(5.4.2)}{\leq} \rho(\phi_{\vec{\Delta}_m}) \underset{(8.3)}{=} \rho(\phi_\Lambda).$$

Como $F_m \subset F_{m+1}$, entonces por (5.4.2), $\rho(\phi_{\vec{F}_m}) \leq \rho(\phi_{\vec{F}_{m+1}})$. Luego,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{\vec{F}_m}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\rho(\phi_{\vec{F}_m})\} \underset{(8.4.1)}{\leq} \rho(\phi_\Lambda).$$

Esto es, el límite existe y así obtenemos el resultado. □

8.4.2. Observemos que la hipótesis $F_m \subset F_{m+1}$, se puede eliminar:

Sea $\{\vec{H}_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ otra sucesión de subcarcajes finitos, conexos y plenos de $\vec{\Delta}$ tal que

$\lim_{i \rightarrow \infty} H_i = \vec{\Delta}$. Como en (8.4.1), para cada $m \in \mathbf{N}$, $\rho(\phi_{H_m}) \leq \rho(\phi_\Lambda)$.

Denotemos por $r := \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m})$, (como en (8.4)).

Para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $N := N(m) \in \mathbf{N}$ tal que $H_m \subset F_\ell, \forall \ell \geq N$, (pues

$\lim_{\ell \rightarrow \infty} F_\ell = \vec{\Delta}$). Entonces por (5.4.2), $\rho(\phi_{H_m}) \leq \rho(\phi_{F_\ell}), \forall \ell \geq N$. Es decir,

$$\rho(\phi_{H_m}) \leq r.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $L \in \mathbf{N}$ tal que

$$r - \rho(\phi_{F_\ell}) < \varepsilon, \quad \forall \ell \geq L.$$

Además, existe $L' \in \mathbf{N}$ tal que $F_L \subset H_m, \forall m \geq L'$ (pues $\lim_{m \rightarrow \infty} H_m = \vec{\Delta}$). Luego,

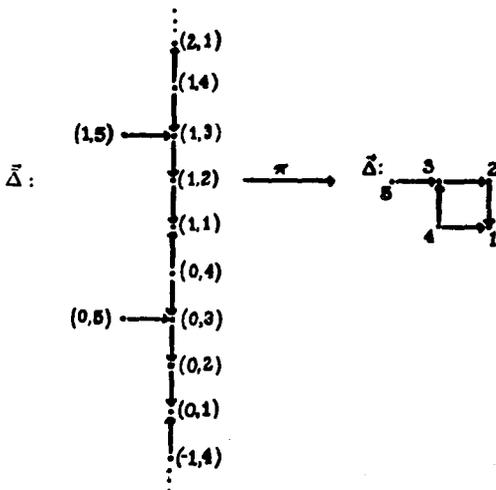
$$\rho(\phi_{F_L}) \leq \rho(\phi_{H_m}), \quad \forall m \geq L'.$$

Por lo tanto, para todo $m \geq L'$, tenemos

$$-\varepsilon \leq r - \rho(\phi_{H_m}) \leq r - \rho(\phi_{F_L}) < \varepsilon.$$

Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{H_m}) = r (= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m}))$ y en particular, $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{H_m}) \leq \rho(\phi_\Lambda)$. \square

8.5. La desigualdad de (8.4) puede ser estricta: Sea



donde $(i, j) \mapsto j$.

Definamos \vec{F}_m el subcarcaj pleno de $\vec{\Delta}$, con vértices $\{(i, j); -m \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 5\}$. Luego, $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{F}_m = \vec{\Delta}$.

Además, $\pi: k[\vec{\Delta}] \rightarrow k[\vec{\Delta}] = \Lambda$ es cubierta de Galois definida por \mathbb{Z} , entonces, si $\phi_{\vec{F}_m} := \phi_{k[\vec{F}_m]}$, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{\vec{F}_m}) = 2.081\dots < \rho(\phi_{\Lambda}) = 2.296\dots$$

En (8.6) y (8.7) veremos cómo calcular este límite y trataremos con más detenimiento este problema.

8.6. En esta sección, sean $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ una k -álgebra salvaje y $\pi: \vec{\Delta} = k[\vec{\Delta}] \rightarrow \Lambda$ su cubierta universal que supondremos definida por la acción de G .

Sea $\vec{F}_1 \subset \vec{F}_2 \subset \dots \subset \vec{\Delta}$ una sucesión de subcarcajes finitos y conexos de $\vec{\Delta}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{F}_m = \vec{\Delta}$.

Proposición. Sea Δ una gráfica salvaje que tiene un único ciclo. Si $\tilde{\Delta}$ tiene orientación fuente-pozos, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m}) = \rho(\phi_\Delta),$$

donde $\rho(\phi_E) := \rho(\phi_{k[E]})$.

En (8.4) vimos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m}) \leq \rho(\phi_\Delta)$, para toda cubierta de Galois. Además, por (8.4.2), tenemos el siguiente

Corolario. Sea $\{\tilde{H}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de subcarcajes finitos de $\tilde{\Delta}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} H_m = \tilde{\Delta}$. Si $\tilde{\Delta}$ tiene orientación fuente-pozos, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{H_m}) = \rho(\phi_\Delta).$$

□

8.6.1. Demostración de la proposición: Como Δ tiene un único ciclo, por (3.12), la cubierta universal de Λ está definida por $G \cong \mathbf{Z}$.

Siendo \mathbf{Z} un grupo manejable, por (4.8), tenemos que $\rho(\tilde{\Delta}) = \rho(\Delta)$, (los radios espectrales de sus respectivas matrices de adyacencia coinciden).

Como $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \tilde{\Delta}$ y $F_m \subset F_{m+1}$, entonces por (2.5) y (1.9):

$$\mathbf{8.6.2.} \quad \rho(\tilde{\Delta}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F_m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\rho(F_m)\}$$

Por otro lado, como $\tilde{\Lambda}$ es cubierta universal de Λ , y Λ es k -álgebra salvaje, podemos sin pérdida de generalidad suponer que cada carcaj árbol \tilde{F}_m es salvaje (pues $\tilde{\Delta}$ lo es), para toda $m \in \mathbb{N}$, ver (6.7.4).

Por lo tanto, por (7.7.2) y (7.7.1), tenemos que para toda $m \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_m > 1$ tal que $\rho(F_m) = \lambda_m + \lambda_m^{-1}$ y $\rho(\phi_{F_m}) = \lambda_m^2$.

Sea $\lambda := \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m\} > 1$, (existe por (8.6.2) y (5.4.2)). Además,

$$\lambda + \lambda^{-1} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m + \lambda_m^{-1}\} = \rho(\tilde{\Delta}) \stackrel{(4.8)}{=} \rho(\Delta).$$

Como $\tilde{\Delta}$ tiene orientación fuente-pozos, por (7.7.7)

$$\rho(\phi_\Delta) = \lambda^2 = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m^2\} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\rho(\phi_{F_m})\}$$

□

8.7. Como en (8.6), sea Δ una gráfica con un único ciclo.

Teorema. Sea $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ una k -álgebra salvaje y Δ tal que su único ciclo es de longitud par. Sea $\vec{\Delta}'$ carcaj con orientación fuente-pozos tal que $\Delta' = \Delta$ y $\Lambda' = k[\vec{\Delta}']$. Entonces,

$$\rho(\phi_{\Lambda'}) \leq \rho(\phi_{\Lambda}).$$

Demostración: Sean $\pi: \vec{\Lambda} = k[\vec{\Delta}] \rightarrow k[\vec{\Delta}] = \Lambda$ y $\pi': \vec{\Lambda}' = k[\vec{\Delta}'] \rightarrow k[\vec{\Delta}'] = \Lambda'$ las cubiertas universales de Λ y Λ' respectivamente. Por (3.12), ambas cubiertas están definidas por \mathbf{Z} . Como $\Delta = \Delta'$, entonces $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}'$. Otra vez como en (8.4), podemos encontrar dos sucesiones

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \subset \vec{F}_2 \subset \dots \subset \vec{\Delta}, & \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \vec{\Delta} \\ \vec{F}'_1 \subset \vec{F}'_2 \subset \dots \subset \vec{\Delta}', & \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F'_m = \vec{\Delta}' \end{aligned}$$

de subcarcajes finitos y conexos, tales que $F_m = F'_m$.

Entonces, como $F_m = F'_m$ son árboles, utilizando (7.1) tenemos que

$$\rho(\phi_{F_m}) = \rho(\phi_{F'_m}), \text{ para toda } m \in \mathbf{N}.$$

Además, por (8.6) y (8.4)

$$\rho(\phi_{\Lambda'}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F'_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m}) \leq \rho(\phi_{\Lambda}).$$

□

En (8.1) hemos visto que la desigualdad en (8.7) puede ser estricta.

Creemos que (8.7), vale en general. Aquí podemos decir lo siguiente:

8.8. Proposición. Sea $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ un álgebra salvaje y Δ sin ciclos de longitud impar. Sean $\Lambda' = k[\vec{\Delta}']$, $\vec{\Delta}'$ con orientación fuente-pozos y $\Delta = \Delta'$. Entonces,

$$\rho(\phi_{\Lambda'}) < (\rho(\phi_{\Lambda}) + 3)^2.$$

Demostración: Tomemos sucesiones de subcarcajes finitos y salvajes de $\vec{\Delta}$ y $\vec{\Delta}'$, y las cubiertas universales de $\vec{\Delta}$ y $\vec{\Delta}'$ respectivamente, como en (8.7).

Por (4.2) y (2.5),

$$\rho(\Delta') \leq \rho(\bar{\Delta}')^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F'_m)^2 = \sup_{m \in \mathbf{N}} \{\rho(F'_m)^2\}.$$

Además, por (7.7.2), existen $\lambda, \lambda_m > 1, m \in \mathbf{N}$ tales que

$$\rho(\Delta') = \lambda + \lambda^{-1} \text{ y } \rho(\phi_{A'}) = \lambda^2, \text{ y}$$

$$\forall m \in \mathbf{N} \quad \rho(F'_m) = \lambda_m + \lambda_m^{-1} \text{ y } \rho(\phi_{F'_m}) = \lambda_m^2.$$

Entonces, $\lambda < \lambda + \lambda^{-1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_m + \lambda_m^{-1})^2 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^2 + 3$.

Como $F_m = F'_m$ son árboles, $\rho(\phi_{F_m}) = \rho(\phi_{F'_m})$, y por (3.10.2) y (8.4), se sigue que

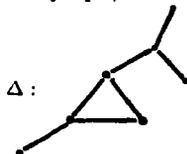
$$\lambda < \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^2 + 3 = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\phi_{F_m}) + 3 \leq \rho(\phi_{A'}) + 3.$$

Por lo tanto, $\rho(\phi_{A'}) = \lambda^2 < (\rho(\phi_{A'}) + 3)^2$. □

Las clases espectrales de Δ .

8.9. Recordemos de (3.12):

Si $\vec{\Delta}$ es un carcaj conexo, finito y con cubierta universal definida por \mathbf{Z} , entonces Δ tiene un único ciclo. Por ejemplo,



En particular el género de Δ es 1.

Recordemos que el género de un carcaj finito $\vec{\Delta}$ (o de una gráfica Δ) es, hablando rudamente, el número de hoyos que tiene Δ .

Formalmente, es el número mínimo de elementos que generan al grupo fundamental de Δ , $\Pi_1(\Delta)$, ver (3.10.1).

Como vimos en (8.1), dada una gráfica, al tener dos orientaciones distintas podemos obtener espectros de la matriz de Coxeter distintos.

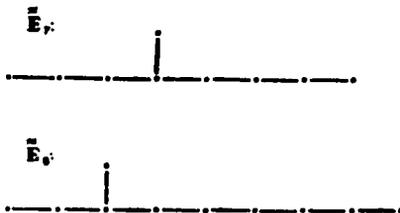
El siguiente resultado nos dice cuántas “clases espectrales” tiene Δ , cuando Δ tiene género 1, ver (8.2).

Teorema [Co, 4.6]. Sea Δ una gráfica salvaje (es decir no es diagrama Dynkin ni euclidiano), con Δ de género 1. Entonces existen $[m/2]$ distintas clases espectrales de Δ . Donde m es el número de vértices que contiene el ciclo de Δ y $[x]$ =mayor entero menor o igual que x . □

Nuestro teorema (8.7) indica que si m es par, entonces el valor mínimo entre los radios espectrales de las matrices de Coxeter con gráfica subyacente Δ , se obtiene para una orientación fuente-pozos.

8.9.1. Los siguientes resultados nos dan algunas cotas para el radio espectral de ϕ_Λ .

Proposición [X]. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ hereditaria salvaje. Entonces, $\rho(\phi_\Lambda) < c$ sii Δ es una de las siguientes gráficas:



donde $c = \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{23}{108}\right)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{23}{108}\right)^{1/2}\right)^{1/3} \doteq 1.32717\dots$, es la raíz real de $x^3 - x - 1$. \square

8.9.2. Lema [PT3]. Sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ hereditaria salvaje. Supongamos que Δ no tiene vértices de grado 1. Sea $M_\Delta := \max\{\deg(v); v \in \Delta\}$, ver (2.1). Entonces

$$\rho(\phi_\Lambda) \geq M_\Delta - 1.$$

Demostración: Observemos que $M_\Delta \geq 2$.

Sea $\pi: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ la cubierta universal de Δ . Por (4.5),

$$(M_\Delta - 1)^{-1/2} + (M_\Delta - 1)^{1/2} \leq \rho(\bar{\Delta}) \leq \rho(\Delta)$$

Ahora, como siempre, sea $\bar{F}_1 \subset \bar{F}_2 \subset \dots \subset \bar{\Delta}$ una sucesión de subcarcajes finitos y salvajes de $\bar{\Delta}$, tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \bar{\Delta}$. Entonces, por (7.7.2) y (8.4), existen $\lambda_m > 1$, $m \in \mathbf{N}$, satisfaciendo

$$\rho(F_m) = \lambda_m + \lambda_m^{-1}, \quad \text{y} \quad \rho(\phi_{F_m}) = \lambda_m^2 \leq \rho(\phi_\Lambda).$$

Además, por (2.5),

$$\rho(\bar{\Delta}) = \sup_{m \in \mathbf{N}} \{\rho(F_m)\}.$$

Caso a) Si $\rho(\tilde{\Delta}) > (M_{\Delta} - 1)^{-1/2} + (M_{\Delta} - 1)^{1/2}$.

Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$,

$$\lambda_m + \lambda_m^{-1} = \rho(F_m) > (M_{\Delta} - 1)^{-1/2} + (M_{\Delta} - 1)^{1/2}.$$

Como $x + x^{-1}$ es creciente en $x \geq 1$ y $M_{\Delta} \geq 2$, $\lambda_m > (M_{\Delta} - 1)^{1/2}$, $m \geq N$. De aquí, $\rho(\phi_{F_m}) = \lambda_m^2 > M_{\Delta} - 1$.

Por (8.4), se tiene que $\rho(\phi_{\Lambda}) > M_{\Delta} - 1$.

Caso b) Si $\rho(\tilde{\Delta}) = (M_{\Delta} - 1)^{-1/2} + (M_{\Delta} - 1)^{1/2}$.

Usando que $\rho(\tilde{\Delta}) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m + \lambda_m^{-1}\}$, demostraremos que $(M_{\Delta} - 1)^{1/2} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m\}$.

Como $\lambda_m + \lambda_m^{-1} \leq (M_{\Delta} - 1)^{1/2} + (M_{\Delta} - 1)^{-1/2}$, y $\lambda_m, (M_{\Delta} - 1)^{1/2} \geq 1$, tenemos:

$$1 < \lambda_m \leq (M_{\Delta} - 1)^{1/2}.$$

Además, si $1 < \beta < (M_{\Delta} - 1)^{1/2}$, entonces $\beta + \beta^{-1} < \rho(\tilde{\Delta})$.

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

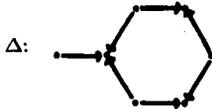
$$\lambda_m + \lambda_m^{-1} > \beta + \beta^{-1}, \quad m \geq N$$

$$\text{y } \lambda_m > \beta, \quad m \geq N.$$

Luego, $\sup_{m \in \mathbb{N}} \{\lambda_m\} = (M_{\Delta} - 1)^{1/2}$.

Por (8.4), $\rho(\phi_{\Lambda}) \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\rho(\phi_{F_m})\} = M_{\Delta} - 1$. □

8.9.3. Observemos que (8.9.2) puede ser falso si Δ tiene vértices de grado 1. Por ejemplo:



$$, \rho(\phi_{\Lambda}) = 1.8832 \dots < 2 = M_{\Delta} - 1.$$

8.10. Las clases espectrales de las gráficas mínimas salvajes.

Como ya hemos dicho, toda k -álgebra salvaje contiene una k -álgebra mínima salvaje. Recordemos que $\Lambda' = k[\vec{\Delta}']$ es mínima salvaje si $\vec{\Delta}'$ no contiene subcarcajes propios salvajes (ver [X]). Luego, el radio espectral $\rho(\phi_{\vec{\Delta}'})$ para un carcaj salvaje $\vec{\Delta}$ es mayor o igual que $\rho(\phi_{\vec{\Delta}'})$ para $\vec{\Delta}'$ en la lista de mínimas salvajes. Por ésto es importante conocer las clases espectrales de las gráficas subyacentes a las k -álgebras hereditarias mínimas salvajes. Este es el trabajo que efectuamos en esta sección.

Con precisión, el contenido de nuestra lista es:

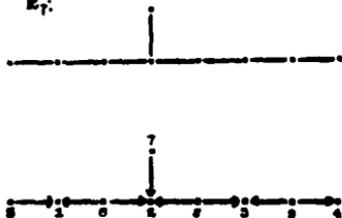
Si $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$ es una k -álgebra mínima salvaje, entonces $\vec{\Delta}$ es oculta de algún carcaj $\vec{\Delta}'$ de la siguiente lista, con $\Delta = \Delta'$ y $\sigma(\phi_{\Lambda}) = \sigma(\phi_{\Lambda'})$.

Para obtener esta lista, utilizamos los paquetes de cómputo *Matlab* y *Derive*.

Sean $\Lambda = k[\vec{\Delta}]$, $\phi := \phi_\Lambda$ la matriz de Coxeter de Λ , $\sigma(\phi)$ el espectro de ϕ y $\rho := \rho(\phi_\Lambda)$ el radio espectral de ϕ_Λ . Denotaremos por $\text{cl.esp}(\Delta)$ al número de clases espectrales de Δ .

I) $\rho(\phi_\Lambda) \leq c \doteq 1.32717\dots$, ver (8.9.1).

I.1) \vec{E}_7 :

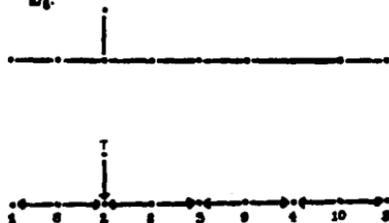


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$\rho = 1.2806$
 .7809
 .1962 + .9802i
 .1962 - .9802i
 -.3469 + .9379i
 -.3469 - .9379i
 -.8820 + .4712i
 -.8820 - .4712i
 -1

I.2) \vec{E}_8 :



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

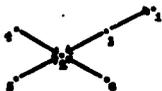
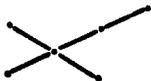
$$\sigma(\phi)$$

$\rho = 1.1763$
 .8501
 .4569 + .8895i
 .4569 - .8895i
 -.2923 + .9563i
 -.2923 - .9563i
 -.7344 + .6787i
 -.7344 - .6787i
 -.9433 + .3319i
 -.9433 - .3319i

II) $\rho > c$

II.a) Árboles. $\text{cl. esp}(\Delta) = 1$.

a.1) \vec{D}_4 :



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$\rho = 1.7221$

.5807

-.6514 + .7587i

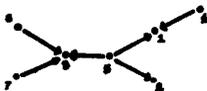
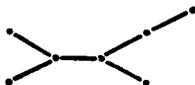
-.6514 - .7587i

-1

-1

a.2)

\vec{D}_5 :



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$\rho = 1.5823$

.6320

-.2696 + .9630i

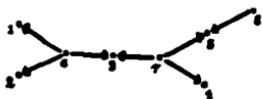
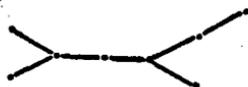
-.2696 - .9630i

-.8376 + .5463i

-.8376 - .5463i

-1

a.3) \bar{D}_6 :



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$\rho = 1.5061$

.6640

.1556 + .9878i

.1556 - .9878i

-.7406 + .6719i

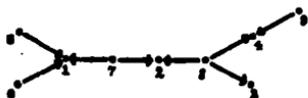
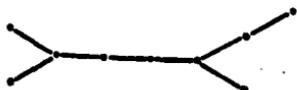
-.7406 - .6719i

-1

-1

a.4)

\bar{D}_7 :



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$\rho = 1.4580$

.6859

.4292 + .9032i

.4292 - .9032i

-.6092 + .7931i

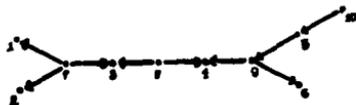
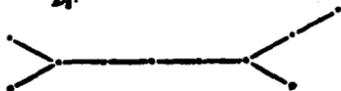
-.6092 - .7931i

-.8920 + .4520i

-.8920 - .4520i

-1

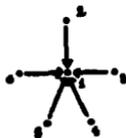
a.5) \bar{D}_4 :



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) \\ \rho = 1.4250 \\ .7018 \\ .5986 + .8011i \\ .5986 - .8011i \\ -.3737 + .9275i \\ -.3737 - .9275i \\ -.7882 + .6154i \\ -.7882 - .6154i \\ -1 \\ -1 \end{aligned}$$

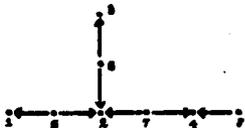
a.6)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) \\ \rho = 2.6180 \\ .3820 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{aligned}$$

a.7) \vec{E}_c



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$$\rho = 1.4013$$

.7136

$$-.1271 + .9919i$$

$$-.1271 - .9919i$$

$$-.5000 + .8660i$$

$$-.5000 - .8660i$$

$$-.9304 + .3665i$$

$$-.9304 - .3665i$$

b) No árboles.

b.1) Δ : , $l \geq 3$. $\text{cl. esp}(\Delta) = 1$.



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -\ell \\ \ell & \ell - 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$$\rho = \frac{-(2 - \ell) + \sqrt{(2 - \ell)^2 - 4}}{2}$$

$$\rho^{-1} = \frac{-(2 - \ell) - \sqrt{(2 - \ell)^2 - 4}}{2}$$

b.2) Δ : . $\text{cl. esp}(\Delta) = 1$ (ver (8.9)).



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sigma(\phi)$

$$\rho = 2.6180$$

.3820

-1

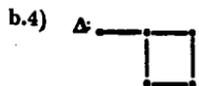


$$\text{cl.esp}(\Delta) = 1 \text{ (ver (8.9))}.$$

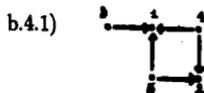


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) \\ \rho = 2.3692 \\ .4221 \\ -.8956 + .4448i \\ -.8956 - .4448i \end{aligned}$$

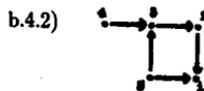


$$\text{cl.esp}(\Delta) = 2 \text{ (ver (8.9))}.$$



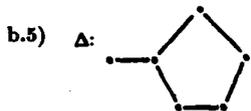
$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) \\ \rho = 2.0810 \\ .4805 \\ -.7808 + .6248i \\ -.7808 - .6248i \\ -1 \end{aligned}$$

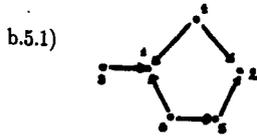


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) \\ \rho = 2.2966 \\ .4354 \\ -.3660 + .9306i \\ -.3660 - .9306i \\ -1 \end{aligned}$$



$$\text{cl.esp}(\Delta) = 2 \text{ (ver (8.9))}.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

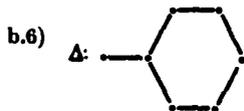
$$\begin{aligned} \rho &= 1.9878 \\ &.5031 \\ &-.3283 + .9446i \\ &-.3283 - .9446i \\ &-.9171 + .3986i \\ &-.9171 - .3986i \end{aligned}$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$$\begin{aligned} \rho &= 2.2684 \\ &.4408 \\ &.0970 + .9953i \\ &.0970 - .9953i \\ &-.9516 + .3073i \\ &-.9516 - .3073i \end{aligned}$$



$$\text{cl.esp}(\Delta) = 3 \text{ (ver (8.9))}.$$

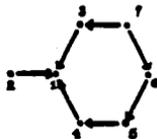


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1.8832 \\ &.5310 \\ &-.2071 + .9783i \\ &-.2071 - .9783i \\ &-.5000 + .8660i \\ &-.5000 - .8660i \\ &-1 \end{aligned}$$

b.6.2)

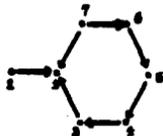


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\begin{aligned} \rho &= 1.9469 \\ &.5136 \\ &.1196 + .9928i \\ &.1196 - .9928i \\ &-.8498 + .5271i \\ &-.8498 - .5271i \\ &-1 \end{aligned}$$

b.6.3)

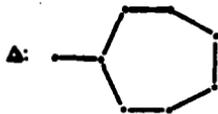


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

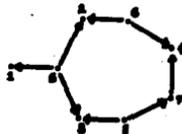
$$\begin{aligned} \rho &= 2.2565 \\ &.4432 \\ &.3804 + .9248i \\ &.3804 - .9248i \\ &-.7303 + .6832i \\ &-.7303 - .6832i \\ &-1 \end{aligned}$$

b.7)



$$\text{cl.esp}(\Delta) = 3 \text{ (ver (8.9))}.$$

b.7.1)

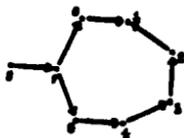


$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\begin{aligned} \rho &= 1.8349 \\ &.5450 \\ &.1457 + .9893i \\ &.1457 - .9893i \\ &-.3755 + .9268i \\ &-.3755 - .9268i \\ &-.9601 + .2796i \\ &-.9601 - .2796i \end{aligned}$$

b.7.2)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 1.9268$

.5190

$.3984 + .9172i$

$.3984 - .9172i$

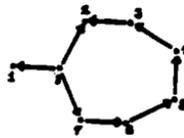
$-.6852 + .7284i$

$-.6852 - .7284i$

$-.9361 + .3516i$

$-.9361 - .3516i$

b.7.3)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 2.2512$

.4442

$.5538 + .8326i$

$.5538 - .8326i$

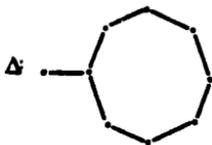
$-.4317 + .9020i$

$-.4317 - .9020i$

$-.9699 + .2437i$

$-.9699 - .2437i$

b.8)



$\text{cl. esp}(\Delta) = 4 \text{ (ver (8.9))}.$

b.8.1)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 1.7816$

.5613

$.2353 + .9719i$

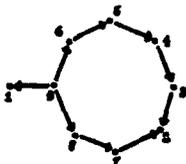
$.2353 - .9719i$

$-.9068 + .4216i$

$-.9068 - .4216i$

 i $-i$ -1

b.8.2)



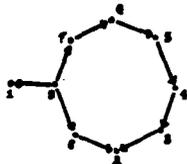
$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 1.8098$

$$\begin{aligned} & 5526 \\ & .4129 + .9108i \\ & .4129 - .9108i \\ & -.3398 + .9405i \\ & -.3398 - .9405i \\ & -.7542 + .6566i \\ & -.7542 - .6566i \\ & -1 \end{aligned}$$

b.8.3)



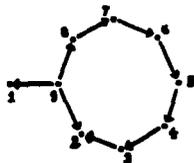
$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 1.9165$

$$\begin{aligned} & 5218 \\ & .5693 + .8221i \\ & .5693 - .8221i \\ & -.4101 + .9120i \\ & -.4101 - .9120i \\ & -.8783 + .4781i \\ & -.8783 - .4781i \\ & -1 \end{aligned}$$

b.8.4)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$\rho = 2.2489$

$$\begin{aligned} & .4447 \\ & .6649 + .7470i \\ & .6649 - .7470i \\ & -.1649 + .9863i \\ & -.1649 - .9863i \\ & -.8468 + .5320i \\ & -.8468 - .5320i \\ & -1 \end{aligned}$$

b.9)



$$\text{cl. esp}(\Delta) = 1.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$$\rho = 2\sqrt{2} + 3$$

$$2\sqrt{2} - 3$$

$$-1$$

b.10)



$$\text{cl. esp}(\Delta) = 1.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$$\rho = \frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$-1$$

b.11)



$$\text{cl. esp}(\Delta) = 1.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\phi)$$

$$\rho = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$9 - 4\sqrt{5}$$

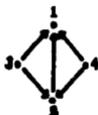
$$-1$$

b.12)



$$\text{cl.esp}(\Delta) = 2.$$

b.12.1)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 4.7913$$

$$.2087$$

$$-1$$

$$-1$$

b.12.2)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 5.2745$$

$$.1896$$

$$-.7321 + .6813i$$

$$-.7321 - .6813i$$

b.13)



$$\text{cl.esp}(\Delta) = 2.$$

b.13.1)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 3.7321$$

$$.2679$$

$$-1$$

$$-1$$

$$-1$$

b.13.2)



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 4.6116$$

$$.2168$$

$$-.4142 + .9102i$$

$$-.4142 - .9102i$$

$$-1$$

b.14)

 Δ :

$$\text{cl.esp}(\Delta) = 1.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 8.7946$$

.1137

$$- .9542 + .2993i$$

$$- .9542 - .2993i$$

b.15)

 Δ :

$$\text{cl.esp}(\Delta) = 1.$$



$$\phi = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\sigma(\phi)$

$$\rho = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$3 - 2\sqrt{2}$$

-1

Relaciones del radio espectral de ϕ_Λ con el género.

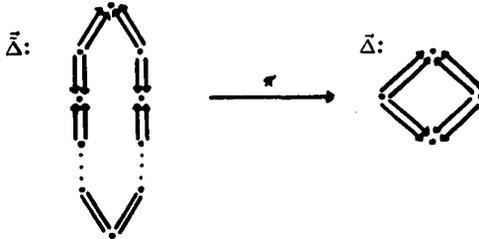
8.11. Los siguientes resultados fueron motivados por la siguiente pregunta de O. Kerner:

Sean $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria salvaje y $g(\Delta)$ el género de Δ .

¿Se cumplirá siempre que $\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_\Lambda)} \leq 2$?

La respuesta es: No siempre, de hecho $\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_\Lambda)}$ puede ser tan grande como queramos. El siguiente contraejemplo aparece en [PT3]:

Tomemos cubiertas finitas de Galois de $\tilde{\Delta}$, de la siguiente forma



Pongamos $\tilde{\Lambda} = k[\tilde{\Delta}]$ y $\Lambda = k[\Delta]$. Por (8.3), tenemos que $\rho(\phi_{\tilde{\Lambda}}) = \rho(\phi_\Lambda) = 7 + 4\sqrt{3}$.

Además, $g(\tilde{\Delta}) = \text{género de } \tilde{\Delta} = |\tilde{\Delta}_0| + 1$. Luego, $\frac{g(\tilde{\Delta})}{\rho(\phi_{\tilde{\Lambda}})} = \frac{|\tilde{\Delta}_0| + 1}{7 + 4\sqrt{3}} \xrightarrow{|\tilde{\Delta}_0| \rightarrow \infty} \infty$.

En particular $\frac{g(\tilde{\Delta})}{\rho(\phi_{\tilde{\Lambda}})} > 2$, para $|\tilde{\Delta}_0| \geq 32$.

Lo que se puede decir es lo siguiente:

8.12. Teorema [PT3]. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria, de tipo de representación infinito. Definamos $g(\Delta) := \text{género de } \Delta$. Entonces,

$$\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_\Lambda)} \leq \frac{|\Delta_0|}{2}.$$

Demostración: a) Cuando Λ es mansa: $\rho(\phi_\Lambda) = 1$, $g(\Delta) \leq 1$, y $|\Delta_0| \geq 2$. Entonces el resultado se satisface trivialmente.

b) Para el caso salvaje:

b.1) Si Δ es árbol, $g(\Delta) = 0$.

b.2) Sea $\tilde{\Delta}' \subset \tilde{\Delta}$ el subcarcaje pleno de $\tilde{\Delta}$ con $\Delta'_0 = \{v \in \Delta_0; \deg(v) > 1\}$.

Como Δ es conexo, Δ' también lo es. Además, $g(\Delta) = g(\Delta')$ y por (5.4.2), $\rho(\phi_{\Delta'}) \leq \rho(\phi_{\Delta})$, donde $\Lambda' = k[\tilde{\Delta}']$. Luego,

$$\frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_{\Delta})} \leq \frac{g(\Delta')}{\rho(\phi_{\Delta'})} \quad \text{y} \quad \frac{|\Delta'_0|}{2} \leq \frac{|\Delta_0|}{2}.$$

Por lo que, basta considerar carcajes sin “pelos” (i.e. sin vértices de grado 1).

En adelante, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que Δ no tiene vértices de grado 1.

8.12.1. Observemos que

$$g(\Delta) - 1 = |\Delta_1| - |\Delta_0|,$$

pues tomemos un árbol conexo, T , que contenga a todos los vértices de Δ , entonces $|T_1| = |\Delta_0| - 1$. Ahora, cada arista de Δ_1 que agreguemos a T nos forma uno y sólo un ciclo, entonces

$$g(\Delta) = |\Delta_1| - (|\Delta_0| - 1).$$

Además, como $|\Delta_1| = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Delta_0} \deg(i) \leq \frac{M_{\Delta} |\Delta_0|}{2}$ se tiene

$$g(\Delta) \leq \frac{(M_{\Delta} - 2)|\Delta_0| + 2}{2}.$$

Por (8.9.2) y (8.12.1), no es difícil demostrar

$$\mathbf{8.12.2.} \quad \frac{g(\Delta)}{\rho(\phi_{\Delta})} \leq \frac{(M_{\Delta} - 2)|\Delta_0| + 2}{2(M_{\Delta} - 1)} \leq q|\Delta_0|, \quad \text{si } q \geq \frac{1}{2}.$$

□

Observemos que (8.12.2) no se da, si por ejemplo

i) $q = \frac{1}{4}$ y $M_{\Delta} \geq 3$.

ii) $q = \frac{1}{3}$ y $M_{\Delta} \geq 4$.

Pero si $M_{\Delta} = 3$, $|\Delta_0| \geq 6$, entonces $q = \frac{1}{3}$ sirve para (8.12.2).

9. LA CATEGORÍA $\text{mod}k[\tilde{\Delta}]$ DE UNA k -ÁLGEBRA HEREDITARIA SALVAJE

Ya hemos visto en el capítulo 5 la estructura del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ y otras de sus propiedades; el siguiente paso es conocer más sobre los módulos inescindibles. Podemos plantear por ejemplo las preguntas: dado un inescindible cuándo es postproyectivo, regular o preinyectivo; cuándo un vector $z \in \mathbf{N}^{\Delta_0}$ es un vector dimensión de un Λ -módulo inescindible; si X es un Λ -módulo inescindible y tomamos los vectores dimensión de su τ -órbita $(\underline{\dim} \tau^m X)_{m \in \mathbf{N}}$ cuál es su crecimiento, ...

Para la consideración de estos problemas, las principales técnicas que usaremos son el estudio de las propiedades espectrales de las matrices de Coxeter (en particular, su radio espectral; ver capítulos 7 y 8) y las cubiertas de Galois.

Como antes:

Sea $\tilde{\Delta}$ un carcaj conexo y finito. Supongamos que $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ es una k -álgebra hereditaria salvaje, y B es una k -álgebra oculta de tipo $\tilde{\Delta}$ (B es oculta-salvaje) (ver capítulo 5).

Recordemos que $\rho_B := \rho(\phi_B)$ denota el radio espectral de la matriz de Coxeter de B , $r_\Delta := \rho(A_\Delta)$ el radio espectral de la matriz de adyacencia de Δ (ver capítulos 2, 7 y 8), y $\langle x, y \rangle_B = x C_B^{-T} y^T$ la forma bilineal asociada a B .

Para simplificar, denotaremos por $\rho_B = \rho$, $\phi_B = \phi$, $\langle -, - \rangle_B = \langle -, - \rangle$, $\tau_B = \tau$, $y_B^+ = y^+$, ..., a menos que pueda haber confusión.

9.1. Caracterización de la posición de los B -módulos inescindibles en el carcaj de Auslander-Reiten.

Retomando (5.7). Un problema importante en la teoría de representaciones ha sido el buscar criterios para decidir si un B -módulo inescindible es postproyectivo, regular o preinyectivo, para el caso de un álgebra oculta B .

En el caso de tipo de representación finita, sabemos que todo módulo inescindibile es postproyectivo y preinyectivo (ver (5.5)).

En el caso manso, existe una función defecto $\partial: K_0(B) \rightarrow \mathbf{Z}$ tal que si X es un B -módulo inescindible de dimensión finita, entonces X es postproyectivo, regular o preinyectivo sii $\partial(\underline{\dim} X) < 0, = 0$ ó > 0 respectivamente.

Aquí estudiaremos el caso *salvaje*.

Baer introdujo un conjunto de funciones defecto ∂_j^S , donde S corre sobre *todos* los B -módulos regulares inescindibles y $j \in \mathbf{Z}$, obteniendo una caracterización de los módulos postproyectivos, regulares y preinjectivos, similar al caso manso.

El siguiente resultado es una generalización del teorema [PT1, (2.2)].

Teorema. Sean B una k -álgebra oculta salvaje de tipo $\tilde{\Delta}$ y X un B -módulo inescindible, entonces:

a) X es postproyectivo sii $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle < 0$. Más aún, si X no es postproyectivo $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle > 0$.

b) X es preinjectivo sii $\langle \underline{\dim} X, y^+ \rangle < 0$. Más aún, si X no es preinjectivo $\langle \underline{\dim} X, y^+ \rangle > 0$.

c) X es regular sii $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle > 0$ y $\langle \underline{\dim} X, y^+ \rangle > 0$. Donde $\phi^{-1}(y^-) = \rho y^-$ y $\phi(y^+) = \rho y^+$, con $y^- \gg 0$, $y^+ \gg 0$.

Demostración. El caso: $B = \Lambda = k[\tilde{\Delta}]$.

Recordemos que por (7.6), existe $y^- \in K_{\mathcal{P}}$, único salvo múltiplos, tal que $y^- \gg 0$, $\phi^{-1}(y^-) = \rho y^-$, $\rho := \rho(\phi) = \rho(\phi^{-1})$.

9.1.1. Supongamos que $X \in \mathcal{P}$ es un inescindible postproyectivo, entonces existen $m \geq 0$, $s \in \Delta_0$ tales que $\underline{\dim} X = \phi^{-m}(\underline{\dim} P_s)$, donde P_s es el proyectivo en s , ver (5.4.1) y (0.10.3). Entonces por (0.8), $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle = \langle y^- \phi^m, \underline{\dim} P_s \rangle = -\rho^{-m} y^-(s) < 0$, ya que $y^- \gg 0$.

Ahora supongamos que $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle < 0$. Como $y^- \in K_{\mathcal{P}}$, $K_{\mathcal{P}}$ el cono postproyectivo de Λ (1.4), entonces existe una sucesión $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$, $u_m = \sum_{i=1}^{\ell_m} \mu_i^{(m)} \underline{\dim} V_i^{(m)}$, con $V_i^{(m)} \in \mathcal{P}$ y $\mu_i^{(m)} > 0$ tal que $y^- = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$.

Como $0 > \langle y^-, \underline{\dim} X \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, \underline{\dim} X \rangle$, entonces existe m tal que $0 > \langle u_m, \underline{\dim} X \rangle = \sum_{i=1}^{\ell_m} \mu_i^{(m)} \langle \underline{\dim} V_i^{(m)}, \underline{\dim} X \rangle$.

Luego, existe $1 \leq j \leq \ell_m$ con

$$0 > \langle \underline{\dim} V_j^{(m)}, \underline{\dim} X \rangle \stackrel{(0.8)}{=} \dim_k \text{Hom}_{\Lambda}(V_j^{(m)}, X) - \dim_k \text{Ext}_{\Lambda}^1(V_j^{(m)}, X).$$

De aquí se sigue que $\text{Ext}_\Lambda^1(V_i^{(m)}, X) \neq 0$, y como $V_i^{(m)}$ es postproyectivo, también lo es X .

9.1.2. Si X es preinyectivo, entonces existen $m \geq 0$, $s \in \Delta_0$ tales que $\underline{\dim} X = \phi_\Lambda^m(\underline{\dim} Q_s)$, donde Q_s es el inyectivo inescindible en s . Con un razonamiento análogo al anterior, obtenemos: $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle_\Lambda \underset{(0,s)}{=} \langle y^- \phi_\Lambda^m, \underline{\dim} Q_s \rangle_\Lambda = \rho^{-m} y^-(s) > 0$.

9.1.3. Si X es regular. Supongamos que $\langle y^-, \underline{\dim} X \rangle_\Lambda = 0$. Podemos suponer que tiene dimensión mínima entre los módulos regulares con esa propiedad. En este caso,

i) X no tiene submódulos regulares propios.

Supongamos que $0 \neq Y \subset X$, y Y es regular, entonces $0 \rightarrow Y \hookrightarrow X \rightarrow C \rightarrow 0$ es exacta y $C \in \text{add}(\mathcal{R} \cup \mathcal{I})$ (i.e. C no tiene sumandos postproyectivos). Entonces, por lo anterior,

$$0 \leq \langle y^-, \underline{\dim} Y \rangle_\Lambda = \langle y^-, \underline{\dim} X \rangle_\Lambda - \langle y^-, \underline{\dim} C \rangle_\Lambda = -\langle y^-, \underline{\dim} C \rangle_\Lambda \leq 0$$

y $\langle y^-, \underline{\dim} Y \rangle_\Lambda = 0$. Luego, $X = Y$ (por la minimalidad de X).

Mostraremos ahora:

ii) Existe $0 \neq m \in \mathbf{Z}$ y $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(\tau_\Lambda^{-m} X, X)$. Siguiendo una idea de Ringel, ver [Ba1, (1.1)]. Denotemos por $L := \bigoplus_{i=0}^n \tau_\Lambda^{-2i} X$, donde $n = |\Delta_0|$. Por (5.5), $\tau_\Lambda^{-2i} X \not\cong \tau_\Lambda^{-2j} X$, $\forall i \neq j$. Además, $\text{Ext}_\Lambda^1(L, L) \neq 0$, pues si $\text{Ext}_\Lambda^1(L, L) = 0$, como Λ es hereditaria, tenemos que L es un Λ -módulo parcial de tilteo (5.8.1), luego por (5.8.1. β), $n + 1 = |\{\text{clases de isomorfía de sumandos inescindibles de } L\}| \leq n$, obtenemos una contradicción.

Por lo tanto, $0 \neq \text{Ext}_\Lambda^1(L, L) \simeq D\text{Hom}_\Lambda(L, \tau_\Lambda L)$ (la fórmula de Auslander-Reiten [R1, 2.4.6]), donde D denota la dualidad usual $D = \text{Hom}_k(-, k)$.

Entonces $0 \neq \text{Hom}_\Lambda(L, \tau_\Lambda L)$, así encontramos $r, \ell \in \{0, \dots, n\}$ y un morfismo

$$0 \neq f': \tau_\Lambda^{-2r} X \rightarrow \tau_\Lambda^{-2\ell-1} X.$$

Como τ_Λ es una equivalencia entre módulos regulares, entonces existe

$$0 \neq f: \tau_\Lambda^{2(\ell-r)+1} X \rightarrow X,$$

con f no iso, pues $2(\ell-r)+1 \neq 0$. Definamos $m = -2(\ell-r)-1$. Así, tenemos

$$0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(\tau_\Lambda^{-m} X, X),$$

como se afirmaba en (ii).

Como $0 \neq \text{Im } f \subset X$ y $\tau_\Lambda^{-m} X \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0$, entonces por (i) y (5.5), $\text{Im } f \in \text{add } (\mathcal{R})$ y f es un epimorfismo propio. Sea $0 \neq K = \text{Ker } f \in \text{add } (\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$, por (5.5); consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow \tau_\Lambda^{-m} X \rightarrow X \rightarrow 0.$$

Entonces $\dim X = \dim \tau_\Lambda^m X + \phi_\Lambda^m(\dim K)$.

Como $\langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} \tau_\Lambda^m X \rangle_\Lambda = 0$, pues X lo cumple y (0.8). Por minimalidad de X , $\dim_k \tau_\Lambda^m X \geq \dim_k X$. Por tanto, $\phi_\Lambda^m(\underline{\dim} K)$ tiene alguna coordenada negativa. Entonces, K tiene algún sumando directo postproyectivo no trivial y $m > 0$ (pues $K \in \text{add } (\mathcal{P} \cup \mathcal{R})$).

iii) Sea $K = K_p \oplus K_r$, con $0 \neq K_p \in \text{add } \mathcal{P}$ y $K_r \in \text{add } \mathcal{R}$. Se demostrará que $K_r = 0$.

Como τ_Λ preserva monomorfismos [R1, pág. 73] y $K_p \neq 0$, entonces $\tau_\Lambda^m K_r \subset X$; y por (i), $\tau_\Lambda^m K_r = X$ ó $K_r = 0$.

Si $\tau_\Lambda^m K_r = X$, entonces $\underline{\dim} K_r = \underline{\dim} \tau_\Lambda^{-m} X$. Pero $K_p \neq 0$ implica que $\dim_k \tau_\Lambda^{-m} X = \dim_k K_r < \dim_k K_p + \dim_k K_r \leq \dim_k \tau_\Lambda^{-m} X$, una contradicción.

Por lo que $K_r = 0$.

Como $K_p \in \text{add } \mathcal{P}$, por la primera parte de la demostración se tiene

$$0 > \langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} K_p \rangle_\Lambda = \langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} \tau_\Lambda^{-m} X \rangle_\Lambda - \langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} X \rangle_\Lambda = 0$$

y se obtiene otra contradicción.

Por lo tanto, $\langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} X \rangle_\Lambda > 0$.

La demostración de (b) es similar a la de (a); (c) se sigue de (a) y (b).

9.1.4. El caso general cuando $B = \text{End}_\Lambda(T)$ es oculta salvaje de tipo $\tilde{\Delta}$ se sigue de (5.9 - 5.9.4). Por ejemplo, sea X un B -inescindible postproyectivo, entonces $X = \text{Hom}_\Lambda(T, M)$ para algún Λ -inescindible postproyectivo $M \in \mathcal{G}(T)$ (notación como en (5.8.5)). Entonces

$$\langle y_B^-, \underline{\dim} X \rangle_B = \langle y_\Lambda^-, \underline{\dim} M \rangle_\Lambda < 0,$$

por (5.4) y (5.8.6), donde $y_B^- = y_\Lambda^- \sigma_T$.

Recíprocamente, si X es un B -módulo inescindible tal que $\langle y_B^-, \underline{\dim} X \rangle_B < 0$:

Si $X = \text{Hom}_\Lambda(T, M)$ con $M \in \mathcal{G}(T)$, entonces $(y_\Lambda^-, \dim M)_\Lambda < 0$ y M es postproyectivo. Entonces, X es postproyectivo. Si $X = \text{Ext}_\Lambda^1(T, M)$ con $M \in \mathcal{F}(T)$, entonces $(y_\Lambda^-, \dim M)_\Lambda = -(y_\Lambda^-, \dim X) > 0$. Entonces M no es postproyectivo, una contradicción. El resto de la prueba es similar. \square

9.2. Teniendo el resultado anterior faltaría saber cuándo un vector de coordenadas naturales es vector dimensión de un B -módulo inescindible. Este problema fue resuelto por Kač, quien demostró que el conjunto de vectores dimensión de los módulos inescindibles de un álgebra hereditaria Λ es exactamente el conjunto de las raíces positivas de su forma cuadrática q_Λ , ver (0.8).

Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria de dimensión finita, donde k es un campo algebraicamente cerrado. Diremos que $z \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$ es una raíz positiva de q_Λ si $q_\Lambda(z) \leq 1$. (Estas se dividen en raíces reales ($q_\Lambda(z) = 1$), y raíces imaginarias ($q_\Lambda(z) \leq 0$)).

Teorema [Kc1]. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra hereditaria de dimensión finita. Entonces existe un Λ -módulo inescindible de dimensión $\alpha \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$ sii α es raíz positiva de q_Λ . \square

9.2.1. Observación: El caso en que B es una k -álgebra oculta de tipo $\tilde{\Delta}$ se deduce de (5.9.4) y el teorema anterior.

9.3. El “número de crecimiento” de un módulo.

El radio espectral $\rho_B = \rho(\phi_B)$ de ϕ_B coincide con el “número de crecimiento” de cualquier módulo inescindible postproyectivo o preinyectivo.

Proposición [DIR2]. Sea B un álgebra oculta salvaje de tipo $\tilde{\Delta}$. Sea X un B -módulo inescindible postproyectivo, entonces

$$\rho_B = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau^{-m} X}.$$

La siguiente demostración se basa en la de [DIR2]. Completamos (J.A. de Peña y yo) algunas lagunas.

Demostración: Por (7.1), sabemos que $\rho_B = \rho(\phi_B^{-1}) = \rho(\phi_B) \in \sigma(\phi_B^{-1})$ es valor propio de ϕ_B^{-1} . Sea $|\Delta_0| = n$.

Observemos que basta mostrar el resultado para proyectivos inescindibles, pues

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau^{-m} X} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau^{-m} P},$$

donde $X = \tau^{-\ell} P$, $\ell \in \mathbf{N}$ y P un B -proyectivo inescindible.

Sea P_t el B -proyectivo inescindible en $t \in \Delta_0$. Por (5.4.1), tenemos que $\dim \tau^{-m} P_t = \bar{p} \phi_B^{-m}$, con $\bar{p} := \dim P_t$. Queremos calcular el $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{p} \phi_B^{-m}|}$, donde $|\bar{p} \phi_B^{-m}| := \sum_{i=1}^n (\bar{p} \phi_B^{-m})_i = \dim_k \tau^{-m} P_t$.

Primero demostraremos el resultado para $B = \Lambda = k[\bar{\Delta}]$.

Sean $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de \mathbf{C}^n y $v \in \mathbf{C}^n$ un vector cualquiera. Denotamos por $|v|^e := \sum_{i=1}^n |v_i^e|$, donde $v = \sum_{i=1}^n v_i^e e_i$.

Notemos que si $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ es la base canónica, $|\bar{p} \phi_B^{-m}|^c = |\bar{p} \phi_B^{-m}|$.

Procederemos como sigue: Primero veremos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{p} \phi_B^{-m}|^e}$ no depende de la base e , y luego construiremos una base adecuada J que permite un cálculo explícito de $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{p} \phi_B^{-m}|^J}$.

9.3.1. Sean $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ dos bases de \mathbf{C}^n .

Se afirma que existen $a, b \in \mathbf{R}^+$ tales que $a|v|^f \leq |v|^e \leq b|v|^f$, para todo $v \in \mathbf{C}^n$. En efecto, si $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, $a_{ij} \in \mathbf{C}$, entonces $v_j^e = \sum_{i=1}^n v_i^f a_{ij}$. Así,

$$|v_j^e| \leq \alpha |v|^f, \quad \text{donde } \alpha = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Además, $|v|^e \leq n\alpha |v|^f$. Similarmente, existe $\beta \in \mathbf{R}^+$, $|v|^f \leq n\beta |v|^e$. Entonces $\frac{1}{n\beta} |v|^f \leq |v|^e \leq n\alpha |v|^f$.

9.3.2. Sea $(v_m)_{m \in \mathbf{N}}$ una sucesión de vectores en \mathbf{C}^n . Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|v_m|^e} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|v_m|^f}.$$

(En efecto, basta aplicar (9.3.1) y $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a} = 1$, $a \neq 0$).

9.3.3. Sea $J = \{e_{ij}; 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n_i\}$ una base de Jordan de \mathbf{C}^n con respecto a la cual ϕ_B^{-1} es el producto de g matrices de Jordan de $n_i \times n_i$ de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ \lambda_i & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_i & \lambda_i \end{bmatrix}, \text{ con } \lambda_i = \rho_B$$

(i.e. $e_{ij}\phi_B^{-1} = \lambda_i(e_{ij} + e_{i,j-1})$ y $e_{i,0} := (0, \dots, 0)$). Tal base existe pues si $\{f_{ij}\}$ es una base correspondiente a la forma canónica de Jordan de ϕ_B (i.e. $f_{ij}\phi_B^{-1} = \lambda_i f_{ij} + f_{i,j-1}$), tómesese $e_{ij} = \lambda_i^{-(n_i-j)} f_{ij}$. Donde $\rho_B = \lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_g|$.

9.3.4. Escribamos

$$\bar{p} = \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} e_{ij}, \quad \text{con } \alpha_{ij} \in \mathbf{C}, 1 \leq j \leq n_i, \text{ y } 1 \leq i \leq g$$

Entonces

$$\bar{p}\phi_B^{-m} = \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} \lambda_i^m [e_{ij} + \binom{m}{1} e_{i,j-1} + \dots + \binom{m}{s} e_{i,j-s} + \dots]$$

donde $\binom{m}{s}$ son las combinaciones de m en s , y $e_{i,h} := (0, \dots, 0)$ si $h \leq 0$. (Esto se demuestra fácilmente por inducción).

9.3.4.1. Ahora, tomemos $d = \max_i d(\lambda_i)$, donde $d(\lambda_i)$ es el tamaño del mayor bloque de Jordan de ϕ_B^{-1} con valor propio λ_i (notemos que tiene a lo más d sumandos). Denotemos por $s_m := \binom{m}{d}$.

9.3.5. Si $s \leq d$, para $m > 0$ suficientemente grande, $\frac{1}{s_m} \binom{m}{s} \leq 1$.

(En efecto: si $s, d, m \in \mathbf{N}$ son tales que $m \geq 2d-1$ y $d \geq s$, entonces $\binom{m}{d} \geq \binom{m}{s}$).

Demostración: $\binom{m}{d} \geq \binom{m}{s}$ sii $s!(m-s)! \geq d!(m-d)!$

$$\text{sii } \frac{(m-s)!}{(m-d)!} \geq d(d-1) \cdots (s+1)$$

$$\text{sii } (m-s)(m-s-1) \cdots (m-d+1) \geq d(d-1) \cdots (s+1).$$

Si $m \geq 2d-1$, entonces $m-d+1 \geq d$ y también

$$m-s \geq m-s-1 \geq \dots \geq m-d+2 \geq m-d+1 \geq d \geq d-1 \geq \dots \geq s+2 \geq s+1,$$

de donde se sigue $\binom{m}{d} \geq \binom{m}{s}$.

9.3.6. Claramente, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{s_m} = 1$.

Ahora, si $\bar{p} = \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} e_{ij}$, con $\alpha_{ij} \in \mathbf{C}$ es la expresión de \bar{p} con respecto a la base $J = \{e_{ij}\}_{(i,j)}$, calculemos $|\bar{p}\phi_B^{-m}|^J$ para m suficientemente grande:

9.3.7. Para $m > 0$ suficientemente grande y $s \leq d$, tenemos: $\frac{1}{s_m} \binom{m}{s} \leq 1$ y

$$\begin{aligned} \frac{|\bar{p}\phi_B^{-m}|^J}{s_m \lambda_1^m} &= \left| \sum_{(i,j)} \alpha_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \left[\frac{e_{ij}}{s_m} + \frac{1}{s_m} \binom{m}{1} e_{i,j-1} + \cdots + \frac{1}{s_m} \binom{m}{s} e_{i,j-s} + \cdots \right] \right|^J \\ &= \left| \sum_{(i,j)} \left[\sum_{n_i \geq k \geq j} \alpha_{ik} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \frac{1}{s_m} \binom{m}{k-j} \right] e_{ij} \right|^J = \sum_{(i,j)} \left| \left[\sum_{n_i \geq k \geq j} \alpha_{ik} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m \frac{1}{s_m} \binom{m}{k-j} \right] \right|^J \\ &\stackrel{(9.3.5)}{\leq} \sum_{(i,j)} \sum_{\substack{(i,k) \\ n_i \geq k \geq j}} |\alpha_{ik}| \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^m \stackrel{(9.3.4.1)}{\leq} \sum_{(i,j)} |\alpha_{ij}| \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m d. \end{aligned}$$

9.3.8. Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{p}\phi_B^{-m}|^J} \stackrel{(9.3.6)}{=} \lambda_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{|\bar{p}\phi_B^{-m}|^J}{s_m \lambda_1^m}} \stackrel{(9.3.7)}{\leq} \lambda_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\sum_{(i,j)} |\alpha_{ij}| \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^m d} \leq \lambda_1,$$

$$\text{pues } \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\sum_{(i,j)} |\alpha_{ij}| \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^m d} \leq 1.$$

$$\text{Por lo tanto, } \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{p}\phi_B^{-m}|^J} \leq \lambda_1 = \rho_B.$$

9.3.8.1 Observemos que si $\alpha_{ij} \neq 0$ para algún $1 \leq j \leq n_1$, entonces (pues $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$, para toda i).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\sum_{(i,j)} |\alpha_{ij}| \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^m d} = 1.$$

9.3.9 Por otro lado, como $\{\dim P_i\}_{i \in \Delta_0}$ forma una base para \mathbf{R}^n , entonces existe P_{i_0} el B -indecindible asociado a $t_0 \in \Delta_0$ tal que $\alpha_{i_1}^0 \neq 0$ con $\bar{p}_0 = \dim P_{i_0} = \sum_{(i,j)} \alpha_{ij}^0 e_{ij}$.

Por (9.3.8.1), $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_0 \phi_B^{-m}|^J} = \lambda_1 = \rho_B$.

Sea $i_1 \in \Delta_0$ adyacente a i_0 en $\tilde{\Delta}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_0 \phi_B^{-m}|^J} \stackrel{(9.3.1)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_0 \phi_B^{-m}|^c} \stackrel{(9.4)}{\leq} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_1 \phi_B^{-m}|^c + |\bar{\rho}_1 \phi_B^{-(m+1)}|^c} \\ \text{ó} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_1 \phi_B^{-(m-1)}|^c + |\bar{\rho}_1 \phi_B^{-m}|^c} \end{array} \right. \\ &\stackrel{(9.3.1)}{=} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_1 \phi_B^{-m}|^J + |\bar{\rho}_1 \phi_B^{-(m+1)}|^J} \\ \text{ó} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_1 \phi_B^{-(m-1)}|^J + |\bar{\rho}_1 \phi_B^{-m}|^J} \end{array} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\bar{\rho}_1 \phi_B^{-m}|^J} \stackrel{(9.3.8)}{\leq} \lambda_1. \end{aligned}$$

Como $\tilde{\Delta}$ es un carcaj conexo, tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau^{-m} P} = \lambda_1 = \rho_B$, para todo B -módulo proyectivo inescindible P .

Luego, por (9.3.2),

$$\rho_B = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau^{-m} X}.$$

Para $B = \text{End}_A(T)$ un álgebra oculta salvaje de tipo $\tilde{\Delta}$, el resultado se sigue de (5.9.4). □

9.4. Lema. Sea $\Lambda = k[\tilde{\Delta}]$ k -álgebra salvaje, con $n = |\Delta_0|$. Denotemos por

$$z_{ij}^m := \dim_k \tau^{-m} P_j(i), \quad P_j \text{ es el proyectivo en } j; \quad j, i \in \Delta_0; \text{ y}$$

$$q_{ij}^m := \dim_k \tau^m Q_j(i), \quad Q_j \text{ es el inyectivo en } j; \quad j, i \in \Delta_0.$$

Denotemos por $p_j := \dim P_j$, $q_j := \dim Q_j$. Entonces

a) Para todo $i, s \rightarrow t$ en $\tilde{\Delta}$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$z_{it}^m \leq z_{is}^{m-1} + z_{is}^m$$

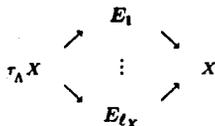
$$z_{is}^m \leq z_{it}^m + z_{it}^{m+1}$$

$$q_{it}^m \leq q_{is}^m + q_{is}^{m+1}$$

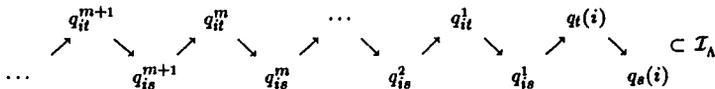
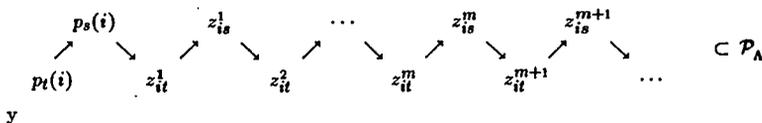
$$q_{is}^m \leq q_{it}^{m-1} + q_{it}^m.$$

b) Para todo $t, i \in \Delta_0$ y $m \in \mathbb{N}$, $q_{it}^m = z_{it}^m$.

Demostración: (a) se sigue de las propiedades del carcaj de Auslander-Reiten de Λ . En efecto, si



representa el subcarcaj de Γ_Λ determinado por las flechas que llegan al inescindible X , entonces $\dim X + \dim \tau_\Lambda X = \sum_{i=1}^{\ell_X} \dim E_i$; además, si $s \rightarrow t \in \vec{\Delta}_1$, entonces indicando cada módulo con su dimensión en i , tenemos:



(b) Sea $m \in \mathbb{N}$, $z_{it}^m = \dim_k \tau_\Lambda^{-m} P_t(i) = \langle \dim \tau_\Lambda^{-m} P_t, q_i \rangle_\Lambda = \langle (\dim P_t) \phi_\Lambda^{-m}, q_i \rangle_\Lambda = \langle \dim P_t, \dim \tau_\Lambda^m Q_i \rangle_\Lambda = q_{it}^m$. \square

9.5. Continuamos con el estudio del comportamiento de las τ -órbitas de módulos inescindibles X . En el caso en que $\vec{\Delta}$ tiene orientación fuente-pozos se puede obtener un resultado más preciso sobre el crecimiento de la sucesión de vectores $(\dim \tau^m X)_{m \in \mathbb{Z}}$.

En esta sección supondremos que B es álgebra oculta de tipo $\vec{\Delta}$; $\vec{\Delta}$ con orientación fuente-pozos y $|\Delta_0| = n$, (ver (7.7)).

Teorema [PT1]. Sean B álgebra salvaje y X un B -módulo inescindible. Entonces:

- Si X es postproyectivo o regular, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\dim \tau^{-m} X}{\rho_B^m} = \lambda_X^- y^-$ para algún número $\lambda_X^- > 0$.
- Si X es regular o preinyectivo, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\dim \tau^m X}{\rho_B^m} = \lambda_X^+ y^+$, para algún número $\lambda_X^+ > 0$.

Observemos que no hay una contraparte para el caso manso de este teorema.

Antes de demostrar este resultado, veamos un poco más del comportamiento de ϕ_B .

9.6. Con las hipótesis de (9.5). Sea $y_B^+ =: y^+ = (y_1, \dots, y_n) \gg 0$, vector propio de $\phi_B =: \phi$ con valor propio $\rho := \rho_B$, ver (7.6).

Sea D la matriz diagonal de $n \times n$: $D = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$ y definamos

$$P = \frac{1}{\rho} D \phi_B D^{-1}.$$

Observemos que $(1, 1, \dots, 1)$ es un vector propio de P con valor propio 1. Más aún, $\det(\lambda I - P) = \frac{1}{\rho^n} \det(\lambda \rho I - \phi_B)$.

Por (7.9), tenemos que P satisface las siguientes propiedades:

a) 1 es una raíz simple del polinomio característico de P .

b) Si $\lambda \in \sigma(P)$, valor propio de P , y $\lambda \neq 1$, entonces $|\lambda| < 1$.

En [Gm, cap. XIII], Gantmacher demuestra que una matriz P satisfaciendo (a) y (b) tiene la siguiente propiedad (él sólo lo enuncia para matrices estocásticas, pero la prueba es más general).

Lema [PT1]. El límite $P^\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} P^q$ existe. Cada renglón de P^∞ es un múltiplo real del vector $(1, \dots, 1)$.

Daremos sólo un *bosquejo de la demostración*:

Sea $m(x) = (x - 1)(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$ el polinomio minimal de P , donde $|\lambda_i| < 1$. Sea $C(x)$ la matriz adjunta reducida de $xI - P$ ([Gm, cap. IV]). Entonces, por [Gm, cap. V],

$$P^q = \frac{C(1)}{m'(1)} + \sum_{i=2}^s \frac{1}{(m_i - 1)!} \left[\frac{C(x)}{m(x)} (x - \lambda_i)^{m_i x^q} \right]_{x=\lambda_i}^{(m_i-1)}$$

Por la propiedad (b), $\lim_{q \rightarrow \infty} P^q = \frac{C(1)}{m'(1)}$ existe.

Además, $P^\infty P = P^\infty$, esto es, cada renglón de P^∞ es un vector propio de P con valor propio 1. Por la propiedad (a), obtenemos la segunda afirmación del lema. \square

9.7. Demostración del teorema (9.5): Por (5.9.4), nos basta considerar sólo el caso hereditario $B = \Lambda = k[\bar{\Delta}]$.

Demostraremos (b), la prueba de (a) es similar.

Sea X un módulo regular o preinyectivo. Sea $v = \dim X$.

Definimos P como en (9.6), $\rho = \rho_\Lambda$, $\phi = \phi_\Lambda$. Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{v\phi^m}{\rho^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} vD^{-1}P^m D = vD^{-1}P^\infty D$$

existe. Un cálculo muy sencillo demuestra que

$$vD^{-1}P^\infty D = \lambda_X^+ y^+, \quad \text{con } \lambda_X^+ = \sum_{i=1}^n v(i)\alpha_i y_i^{-1}$$

donde α_i es el valor constante del i -ésimo renglón de P^∞ .

Claramente, $\lambda_X^+ \geq 0$. Más aún,

$$\begin{aligned} \mathbf{9.8} \quad \lambda_X^+(y^-, y^+) &= \langle y^-, \lambda_X^+ y^+ \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^m} \langle y^-, v\phi^m \rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^m} \langle y^- \phi^{-m}, v \rangle = \langle y^-, v \rangle \end{aligned}$$

que es positivo, (9.1.a). Entonces $\lambda_X^+ > 0$. □

Observación:

$$\lambda_X^+ = \langle y^-, \dim X \rangle / \langle y^-, y^+ \rangle$$

$$\lambda_X^- = \langle \dim X, y^+ \rangle / \langle y^-, y^+ \rangle$$

ver (9.8).

Además, de (9.5) resulta que la proposición (9.3) (que dice: $\rho_B = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\dim_k \tau_\Lambda^{-m} X}$) es válida también para módulos regulares. Cabe observar que de este teorema se sigue (9.3) pero no al contrario; ver también [Z2].

9.9. Para finalizar este capítulo daremos una serie de aplicaciones de los resultados anteriores. Por lo que resta del capítulo, sea $\Lambda = k[\bar{\Delta}]$ una k -álgebra hereditaria salvaje y $\bar{\Delta}$ con orientación *fuentes-pozos*, $|\Delta_0| = n$, $\rho_\Lambda = \rho$, $\tau_\Lambda = \tau, \dots$

La siguiente proposición incluye resultados conocidos ([Ba2], [K2], [Ba1]) ver (5.6.2, 5.6.3), pero nuestras demostraciones usan las técnicas anteriores y son mucho más simples; en algunos casos, hemos obtenido resultados más precisos, ver [PT1].

Homomorfismos entre módulos regulares.

Proposición ([Ba2], [K2]). Sean X, Y Λ -módulos inescindibles regulares. Entonces existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq N$, tenemos:

a) $\text{Hom}_\Lambda(\tau_\Lambda^{-m} X, Y) \neq 0$

b) $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m} Y) = 0$.

Demostración [PT1]: a) Como X, Y son ambos regulares, utilizando (9.1) y (9.5) tenemos que

$$0 < \lambda_X^-(y^-, \dim Y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^m} (\dim \tau^{-m} X, \dim Y).$$

Por (0.8), tenemos que $\text{Hom}_\Lambda(\tau^{-m} X, Y) \neq 0$, para m suficientemente grande.

b) Por inducción sobre $\dim_k Y$. Distinguiremos dos casos:

i) Y no tiene submódulos propios regulares (por ejemplo, si $\dim_k Y$ es minimal).

Spongamos que el resultado no es verdadero, entonces existe una sucesión creciente $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{N} y morfismos $0 \neq f_i \in \text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m_i} Y)$. Por (9.5), no toda f_i puede ser sobre. Entonces para algún j , $M_j = \text{Im } f_j$ es un submódulo propio regular de $\tau^{-m_j} Y$. Como τ preserva monomorfismos ([R1, pág. 73]) y ambos módulos son regulares, $\tau^{m_j} M_j \xrightarrow{\sim} Y$, es un iso, lo cual implica que $M_j \xrightarrow{\sim} \tau^{-m_j} Y$, una contradicción.

ii) Sea Y un módulo regular arbitrario y sea S un módulo regular sin submódulos propios regulares. Entonces, por (i),

9.9.1. $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m} S) = 0$, para cada $m \geq N_1$.

Ahora, por (a), podemos encontrar $\ell \in \mathbb{N}$ y un morfismo $0 \neq f \in \text{Hom}_\Lambda(\tau^{-\ell} Y, S)$, donde f es epimorfismo, pues S no tiene submódulos regulares propios no triviales.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow \tau^{-\ell} Y \xrightarrow{f} S \rightarrow 0.$$

Sea $K = K_p \oplus K_r$, donde K_p (resp. K_r) es una suma directa de módulos postproyectivos (resp. regulares). Ahora, $\tau^\ell K_r \subsetneq Y$ submódulo propio de Y , pues si $\tau^\ell K_r = Y$, entonces $K_r = K = \tau^{-\ell} Y$ y $f \equiv 0$, contradicción.

Por hipótesis de inducción,

9.9.2. $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{\ell-m} K_r) = 0$, para cada $m \geq N_2$.

Luego, para cada $m \geq \max\{N_1, N_2\}$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tau^{-m} K_p \oplus \tau^{-m} K_r \rightarrow \tau^{-m-\ell} Y \rightarrow \tau^{-m} S \rightarrow 0.$$

Aplicamos $\text{Hom}_\Lambda(X, -)$ a esta sucesión y obtenemos

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m} K_p \oplus \tau^{-m} K_r) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m-\ell} Y) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m} S) \rightarrow \dots$$

sucesión exacta.

Como $X \in \mathcal{R}$ y $\tau^{-m}K_p \in \mathcal{P}$, por la proposición (5.5), $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m}K_p) = 0$; también $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m}K_r) = 0$, por (9.9.2), y por (9.9.1), $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-m}S) = 0$; entonces $\text{Hom}_\Lambda(X, \tau^{-(m+\ell)}Y) = 0$, para toda $m \geq \max\{N_1, N_2\}$. \square

9.10. Extensiones entre módulos regulares y postproyectivos.

Proposición [Ba2]. Seguimos con las hipótesis de (9.9). Sea X un Λ -módulo inescindible regular o preinyectivo. Sea Y un Λ -módulo postproyectivo. Entonces existe un número N tal que para cada $m \geq N$ existe una sucesión exacta que no se escinde

$$0 \rightarrow \tau^{-m}Y \rightarrow E_m \rightarrow X \rightarrow 0$$

tal que $E_m \notin \text{add}(\mathcal{P})$, es decir, no todos los sumandos de E_m son postproyectivos.

Demostración [PT1]: Como en la prueba de (9.9.a), por (9.1) y (9.5)

$$0 > \lambda_Y^-(\dim X, y^-) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^m} (\dim X, \dim \tau^{-m}Y),$$

entonces existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y para cada $m \geq N_1$ una sucesión exacta que no se escinde $0 \rightarrow \tau^{-m}Y \rightarrow E_m \rightarrow X \rightarrow 0$, por (0.8). Entonces por (5.4.1.a) y (0.8),

$$\langle y^-, \dim X \rangle + \frac{1}{\rho^m} \langle y^-, \dim Y \rangle = \langle y^-, \dim E_m \rangle.$$

Como $\langle y^-, \dim X \rangle > 0$ por (9.1.a), existe un número $N_2 \geq N_1$ tal que para cada $m \geq N_2$, $\langle y^-, \dim E_m \rangle > 0$, (pues como $\rho > 1$, $\frac{1}{\rho^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$). Por (9.1.a), $E_m \notin \text{add}(\mathcal{P})$. \square

9.11. Mono-órbitas. En [Ba1] se demuestra que cuando Λ es k -álgebra hereditaria salvaje, las mono-órbitas siempre existen, ver (5.6.2). Más precisamente:

Proposición [PT1]. Sea $s \in \Delta_0$ tal que $y^+(s) = \min\{y^+(i); i \in \Delta_0\}$. Entonces, P_s^r es una mono-órbita, donde P_s es el proyectivo en s .

Demostración: i) Sea $0 \neq f: Y \rightarrow Z$ con $Y = \tau^{-\ell}P_s \in P_s^r$ y $Z \in \mathcal{P}$. Supongamos que f no es inyectiva. Sea $E = \text{Im } f$ y consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow Y \xrightarrow{f} E \rightarrow 0.$$

Sea $E = \bigoplus_{i=1}^m Z_i$ la descomposición de E en inescindibles. Entonces, $Z_i \in \mathcal{P}$, pues $Z \in \mathcal{P}$; y $Z_i = \tau^{-t_i} P_{s_i}$ con $t_i \geq \ell$ (por (5.5.c)).

Entonces, $\langle \dim Z_i, y^+ \rangle = \rho^{t_i} y^+(s_i) \geq \rho^\ell y^+(s) = \langle \dim Y, y^+ \rangle$. Luego, $\langle \dim K, y^+ \rangle = \langle \dim Y, y^+ \rangle - \langle \dim E, y^+ \rangle \leq 0$.

Por (9.1.b), K debe tener un sumando directo preinyectivo, esto es una contradicción.

ii) Sea $0 \neq f: Z \rightarrow Z'$ con $Z = \tau^{-\ell} P_s \in P_s^r$, $Z' = \tau^{-t} P_s \in P_s^r$; entonces por (5.5), $\ell \leq t$. Por (i), f es mono. Sea $C = \text{coker } f$. Para cualquier descomposición $C = C' \oplus C''$ obtenemos un diagrama conmutativo que es producto fibrado (o pullback [M1]):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \text{ P.F. } & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{f} & Z' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow g & & \downarrow \\
 & & & & C'' & \longrightarrow & C'' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Si C' es preinyectivo, usando que $Y \in \mathcal{P}$ como en (i) y el teorema (9.1), obtenemos:

$$0 > \langle \dim C', y^+ \rangle = \langle \dim Y, y^+ \rangle - \langle \dim Z, y^+ \rangle \geq 0,$$

una contradicción.

Si C'' es postproyectivo, como $Z' \in P_s^r$, entonces g es mono y $Z = 0$, otra vez una contradicción. \square

BIBLIOGRAFIA

- [A'] A'Campo, N.: Sur les valeurs propres de la transformation de Coxeter, *Invent. math.* 33, 61-67 (1976).
- [AnF] Anderson, F. W. y Fuller, K. R.: *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics 13, Springer Verlag (1973).
- [AR] Auslander, M. y Reiten, I.: Representation theory of algebras III. *Comm. Algebra* 3, 239-294 (1975).
- [APIR] Auslander, M., Platzeck, M. I. y Reiten, I.: Coxeter functors without diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.* 250, 1-46 (1979).
- [B] Babai, L.: Some applications of graph contractions, *J. Graph Theory* 1, 125-130 (1977).
- [Ba1] Baer, D.: Homological Properties of Wild Hereditary Artin Algebras, Representation Theory I - Finite Dimensional Algebras. *Springer LNM* 1177, 1-12 (1986).
- [Ba2] Baer, D.: Wild hereditary Artin algebras and Linear methods, *Manuscripta math.* 55, 69-82 (1986).
- [Ba3] Baer, D.: Tilting sheaves in representation theory of algebras, *Manuscripta math.* 60, 323-347 (1988).
- [Ba4] Baer, D.: A note on wild quiver algebras and tilting modules, *Communications in Algebra*, 17 (3), 751-757 (1989).
- [BeLM] Berman, S., Lee, Y. S. y Moody, R. V.: The Spectrum of a Coxeter transformation, Affine Coxeter Transformations, and the Defect Map, *Journal of Alg.*, vol. 121, No. 2, 339-357 (1989).
- [BeMW] Berman, S., Moody, R. y Wonenburger, M.: Cartan Matrices with Null Roots and Finite Cartan Matrices, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 21, No. 12, 1091-1099 (1972).
- [BnGP] Bernstein, I. N., Gelfand, I. M. y Ponomarev, V. A.: Coxeter Functors and Gabriel's Theorem, *Uspechi Mat. Nauk.* 28 (1973), *Russian Math. Surveys* 28, 17-32 (1973).

- [BiMoS-T] Biggs, N. L., Mohar, B. y Shawe-Taylor, J.: The spectral radius of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc.* 20, 116-120 (1988).
- [Bir] Birkhoff, G.: Linear Transformations with invariant cones, *Amer. Math. Monthly*, 74, 274-276 (1967).
- [Bo1] Bongartz, K.: Algebras and quadratic forms, *J. of London Math. Soc.* (2), 28, 461-469, (1983).
- [Bo2] Bongartz, K.: Tilted algebras, *Representation of algebras*, LNM 903. Springer, 26-38 (1981).
- [Bo3] Bongartz, K.: Critical simply connected algebras. *Manuscripta math.* 46, 117-136 (1984).
- [BoGa] Bongartz, K. y Gabriel, P.: Covering spaces in representation theory. *Invent. Math.* 65, 331-378 (1982).
- [BoR] Bongartz, K. y Ringel, C. M.: Representation-finite tree algebras, *Proc. ICRA III*, Springer LNM 903, 39-54 (1980).
- [Bou] Bourbaki, N.: *Groupes et Algebres de Lie*, cap. 4, 5 y 6. Hermann, París (1968).
- [Br] Brenner, S.: Decomposition properties of some small diagrams of modules, *Symposia Mathematica XIII*. Academic Press, 127-141 (1974).
- [BrBu] Brenner, S. y Butler, M. C. R.: Generalizations of Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors *Representation theory II*, Springer Lecture Notes in Math. 832, 103-169 (1980).
- [Cr] Carter, R. W.: *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, New York (1972).
- [CiLaSl] Cibils, C., Larrión, F. y Salmerón, L.: *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones*, Monografía 11 del Instituto de Matemáticas, UNAM, México (1982).
- [Co] Coleman, A. J.: Killing and the Coxeter transformation of Kac-Moody algebras, *Invent. math.* 95, 447-477 (1989).
- [Cx] Coxeter, H. S. M.: The product of the generators of a finite group generated by reflections, *Duke Math. J.* 18, 765-782 (1951).
- [Cb1] Crawley-Boevey, W. W.: On tame algebras and bocses, *Proc. London Math. Soc.* (3), 56, 451-483 (1988).
- [CDS] Cvetković, D. M. Doob, M. y Sachs, H.: *Spectra of graphs*, Academic Press, New York (1979).

- [Ch] Chou, Ch.: Elementary amenable groups. *Illinois Journal of Mathematics*, Vol. 24, No. 3 (1980).
- [DIR1] Dlab, V. y Ringel, C. M.: Indecomposable representations of graphs and algebras. *Memoirs Amer. Math. Soc.* 173 (1976).
- [DIR2] Dlab, V. y Ringel, C. M.: Eigenvalues of Coxeter transformations and the Gelfand-Kirillov dimension of the preprojective algebras, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 83, No. 2, 228-232 (1981).
- [DoSk] Dowbor, P. y Skowronski, A.: Galois coverings of representation-infinite algebras. *Comment. Math. Helvetici* 62, 311-337 (1987).
- [Dr1] Drozd, Y. A.: On tame and wild matrix problems, in *Matrix problems*, Kiev (1977). (En ruso).
- [Dr2] Drozd, Y. A.: Tame and wild matrix problems, in *Representation Theory II*, Springer LMN 832 (1980).
- [Ga1] Gabriel, P.: Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.* 6, 71-103 (1972).
- [Ga2] Gabriel, P.: Indecomposable Representations II, *Istituto di Alta Matematica, Symposia mathematica*. Vol. XI, 81-104 (1973).
- [Ga3] Gabriel, P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, in *Representation of Algebras*, Springer LNM 831, 1-71 (1975).
- [Ga4] Gabriel, P.: The universal covering of a representation-finite algebra. *Proc. Puebla 1980. Springer Lect. Notes* 903, 68-105.
- [Gm] Gantmacher, F. R.: *The theory of matrices*, Vol. I y II, Chelsea, New York (1959).
- [GP] Gelfand, I. M. y Ponomarev, V. A.: Problems of Linear Algebra and classification of quadruples in a finite vector space. *Coll. Math. Soc. Bolyai Tihany (Hungria)* 5, 163-237 (1970).
- [GoMc] Godsil, C. D. y McKay, B. D.: The dimension of a graph, *Quart J. Math. Oxford* (2), 31, 423-427 (1980).
- [Gr] Grigorchuk, R. I.: Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means, *Math. USSR Izvestiya* Vol. 25, No. 2, 259-300 (1985).
- [HI] Hall, P.: *Group Theory*, Academic Press (1984).
- [H] Halmos, P. R.: *Introduction to Hilbert Space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea, New York (1951).

- [HaR] Happel, D. y Ringel, C. M.: Tilted Algebras, Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol. 274, No. 2, 399-443.
- [HaVo] Happel, D. y Vossieck, D.: Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component. Manuscripta math. 42, 221-243 (1983).
- [HrJ] Horn, R. A. y Johnson, Ch. R.: Matrix Analysis. Cambridge University Press (1990).
- [Ho] Howlett, R.: Coxeter graphs and M -matrices, Bull. London Math. Soc. 14, 137-141 (1982).
- [HfSm] Hoffman, A. J. y Smith, J. H.: On the Spectral Radii of Topologically Equivalent Graphs. Recent advances in Graph Theory (ed. M. Fiedler), Academia Praha, 273-281 (1975).
- [Kc1] Kac, V.: Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. Invent. math. 56, 57-92 (1980).
- [Kc2] Kac, V.: Infinite Dimensional Lie Algebras. Birkhäuser (1983).
- [K1] Kerner, O.: Preprojective components of wild hereditary algebras. Manuscr. Math. 61, 429-445 (1988).
- [K2] Kerner, O.: Tilting wild algebras. J. London Math. Soc. (2) 39, 29-47 (1989).
- [K3] Kerner, O.: Stable components of wild tilted algebras. Por aparecer en J. Algebra.
- [Ki] Kingman, J.F.C.: The exponential decay of Markov transition probabilities, Proc. London Math. Soc. 13, No. 3, 337-358 (1963).
- [Mc] McKay, B. D.: The Expected Eigenvalue Distribution of a large Regular Graph. Linear Algebra Appl. 40, 203-216 (1981).
- [Ml] MacLane, S.: Category theory for the Working Mathematician. Springer-Verlag, Berlin y New York (1971).
- [MzP] Martínez-Villa, R. y de la Peña, J. A.: The Universal Cover of a quiver with relations. J. Pure Appl. Algebra 30, 277-292 (1983).
- [Ma] Massey, W.S.: Introducción a la topología algebraica. Ed. Reverté, España (1972).
- [M1] Milnor, J.: A note on curvature and fundamental group, J. Differential Geom. 2, 1-7 (1968).

- [M2] Milnor, J.: Growth of finitely generated solvable groups. *J. Differential Geom.* 2, 447-449 (1968).
- [Mo1] Mohar, B.: The spectrum of an infinite graph, *Linear Algebra Appl.* 48, 245-256 (1982).
- [Mo2] Mohar, B.: Isoperimetric inequalities, growth and the spectrum of graphs, *Linear Algebra Appl.* 103, 119-131 (1988).
- [Mo3] Mohar, B.: Some relations between analytic and geometric properties of infinite graphs, preprint Yugoslavia (1989).
- [MoWo] Mohar, B. y Woess, W.: A survey on spectra of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc.* 21, 209-234 (1989).
- [P1] de la Peña, J. A.: La cubierta universal de un carcaj con relaciones. Tesis (Maestría), México, D.F. (1982).
- [P2] de la Peña, J. A.: On the Representation type of one point extensions of tame concealed algebras. *Manuscripta math.* 61, 183-194 (1988).
- [P3] de la Peña, J. A.: The Weyl group of a wild graph. *Proc. ICRA V, CMS-AMS Conference Proceedings Vol. 11* (1991).
- [PT1] de la Peña, J. A. y Takane, M.: Spectral properties of Coxeter transformations and Applications. *Arch. Math.* Vol. 55, 120-134 (1990).
- [PT2] de la Peña, J. A. y Takane, M.: The Spectral radius of the Galois covering of a finite graph. *Linear Algebra Appl.* 160, 175-188 (1992).
- [PT3] de la Peña, J. A. y Takane, M.: Some bounds for the spectral radius of a Coxeter transformation. Preprint. México (1991).
- [Pi] Pier, J. P.: Amenable locally compact groups. Wiley (1984).
- [R1] Ringel, C. M.: Tame algebras and integral quadratic forms, Springer LNM 1099 (1984).
- [R2] Ringel, C. M.: Representations of K -Species and Bimodules. *J. Algebra* 41, 269-302 (1976).
- [R3] Ringel, C. M.: Finite dimensional algebras of wild representation type. *Math. Z.* 161, 235-255 (1978).
- [R4] Ringel, C. M.: Recent Advances in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. *Progress in Mathematics, Vol.95*, Birkhäuser Verlag Basel (1991).
- [Sa] Sawyer, S.: Isotropic random walks in a tree, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 42, 279-292 (1978).

- [SuSt] Subbotin, V. F. y Stekol'shchik, R. B.: Jordan Form of Coxeter transformations and applications to representations of finite graphs, *Funkcional Anal. i Priložen* 12, 84-85 (1978) = *Functional Appl.*, 12, 67-68 (1978).
- [T] Takane, M.: Conos en teoría de Representaciones de Algebras, *Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones* 7, Soc. Mat. Mexicana, 157-174 (1989).
- [Ta] Taylor, A. E.: *Introduction to functional analysis*, Wiley, New York (1958).
- [U1] Unger, L.: Lower bounds for indecomposable, faithful, preinjective modules. *Manuscr. Math.* 57, 1-31 (1986).
- [U2] Unger, L.: The concealed algebras of the minimal wild hereditary algebras. *Bayreuther Math. Schriften* 31, 145-154 (1990).
- [V] Vandergraft, J. S.: Spectral properties of matrices which have invariant cones, *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 1208-1222 (1968).
- [Vj] Vere-Jones, D.: Ergodic properties of nonnegative matrices-I, *Pacific J. of Math.* 22, No. 2, 361-386 (1967).
- [Wf] Wolf, J. A.: Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* 2, No. 5, 421-446 (1968).
- [X] Xi, Ch.: On wild hereditary algebras with the small growth number, *Comm. Algebra* 18, 3413-3422 (1990).
- [Y] Yosida, K.: *Functional Analysis*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 123, Springer-Verlag (1978).
- [Z1] Zhang, Y.: The modules in any component of the AR -quiver of a wild hereditary artin algebra are uniquely determined by their composition factors, *Archiv Math.* 53, 250-251 (1989).
- [Z2] Zhang, Y.: Eigenvalues of Coxeter transformations and the structure of the regular components of the Auslander-Reiten quiver. *Comm. Algebra* 17, 2347-2362 (1989).
- [Z3] Zhang, Y.: The structure of stable components. *Can. J. Math.* (To appear).