

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

01173
6
201

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS
EN LA RAIZ DE LOS DIENTES DE ENGRANES

EDILBERTO MATIAS MEJIA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSTGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

MECANICA

(DISEÑO Y MANUFACTURA)

CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO D.F., FEBRERO 1992.



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**DETERMINACION EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS
EN LA RAIZ DE LOS DIENTES DE ENGRANES.**

Nomenclatura.....	vi
Introducción.....	ix
Antecedentes.....	xi
Capítulo 1. Diseño del experimento.....	1
1.1 Forma de los dientes y dimensiones de los modelos.....	2
1.2 Fabricación de los modelos.....	4
1.3 Dispositivos de carga.....	7
1.3.1 Dispositivo de carga para porciones de engranes...7	
1.3.2 Fabricación del dispositivo de carga para engranes completos.....	11
Capítulo 2. Determinación de los estados de esfuerzos en las raíces de los dientes de porciones de engranes.....	15
2.1 Condiciones de frontera y carga.....	16
2.2 Determinación de esfuerzos en las raíces de los dientes.....	18
Capítulo 3. Determinación de los estados de esfuerzos en las raíces de los dientes de engranes completos..	21
3.1 Condiciones de frontera y carga en engranes completos, para un estado de carga estático.....	22
3.1.1 Determinación de esfuerzos en las raíces de los dientes.....	24
3.2 Condiciones de frontera y carga en engranes completos. Estado de carga dinámica 	25
3.2.1 Determinación de esfuerzos en las raíces de los dientes.....	28

Capítulo 4.	Determinación analítica de esfuerzos en las raíces de los dientes de engranes.....	30
4.1.	Cálculo del radio de la raíz de diente (A.G.M.A).....	31
4.2.	Cálculo de esfuerzos utilizando la ecuación de la A.G.M.A.....	32
Capítulo 5.	Discusión de resultados.....	38
5.1	Comparación de resultados obtenidos en porciones de engranes.....	39
5.1.1	Factores de concentración de esfuerzos para porciones de engranes.....	41
5.2.	Comparación de resultados obtenidos en engranes completos. Condiciones de cargas estáticas.....	43
5.2.1	Comparación de esfuerzos de compresión en las raíces de los dientes de engranes	44
5.2.2	Factores de concentración de esfuerzos para engranes completos. Carga estática.....	46
5.3.	Comparación de resultados obtenidos en engranes completos. Condición de carga dinámica.....	48
5.3.1	Comparación de esfuerzos de compresión en las raíces de los dientes de engranes.....	49
	Conclusiones.....	51
	Recomendaciones.....	54
	Bibliografía.....	56
	Apéndice A.....	58
	Apéndice B.....	62

NOMENCLATURA.

AB, AC, DH = Distancias entre puntos.

a = Adendo.

b = Dedendo.

$C\psi$ = Factor de sobrecarga helicoidal.

C_h = Factor helicoidal.

D = Diámetro del disco de calibración.

d_p = Diámetro de paso.

F = Fuerza normal a la superficie del diente.

F_c = Ancho de cara del diente.

F_{tr} = Fuerza transmitida.

f_r = Factor de franja.

ht = Espesor del modelo.

hk = Altura de trabajo.

h = Distancia radial de la sección crítica a la intersección, de la línea de acción de la fuerza con el eje de simetría del diente.

J = Factor geométrico.

K_{tn} = Factores de concentración de esfuerzos ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

K_a = Factor de aplicación.

K_s = Factor de tamaño.

K_m = Factor de distribución de carga.

K_v = Factor dinámico.

k_r = Factor de concentración de esfuerzos.

$K\psi$ = Factor de ángulo de hélice.

m_N	= Índice de repartición de carga.
m	= Módulo.
N	= Orden de franja.
N_d	= Número de dientes.
P_c	= Carga diametral de compresión, para el disco de calibración
P_d	= Paso diametral.
Q	= Peso del contrapeso.
Q_v	= Índice de calidad con que se fabricaron los engranes.
r_f/t	= Relación de esbeltez.
r_r	= Radio de la raíz del diente.
r_T	= Radio de la esquina en la punta del diente del cortador.
R_o	= Radio de paso r_d para generación por cremallera ó fresa.
r_p	= Radio de la polea.
r_E	= Distancia del eje de rotación, del engrane, a la punta del diente sobre el eje se simetría de este.
t	= Espesor del diente sobre la sección crítica.
t_d	= Grueso del diente.
T_o	= Par aplicado al eje.
T_i	= Par ejercido sobre el engrane, debido a la carga tangencial W_t .
T_{b1}, T_{b2}	= Fuerzas de tensión (en los extremos la banda del freno).
u	= Distancia radial.
v	= Velocidad en la línea de paso.
W	= Pesos colocados en el extremo C del brazo de palanca.
W_t	= Fuerza tangencial.
W_r	= Fuerza radial.

x	= Distancia entre puntos.
Y	= Factor de forma.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	= Esfuerzos principales.
σ_t	= Esfuerzo de flexión, (Ecuación de la A.G.M.A.).
σ_{EP}	= Esfuerzo máximo de tensión en porciones de engranes (experimental).
σ_{EC}	= Esfuerzo máximo de tensión en engranes completos (experimental).
ϕ	= Angulo de presión.
ϕ_L	= Angulo de acción de la fuerza.
ρ	= Paso circunferencial.
γ	= Angulo de rotación del analizador.

INTRODUCCION.

Los dientes de engranes han sido objeto de diversos estudios básicamente enfocados a las raices de los dientes, de donde se han establecido los esfuerzos tangenciales de tensión y compresión para diferentes radios; y para algunos análisis (Fotoelasticidad tridimensional) σ_3 , en las raices de los dientes. Con el uso de fotoelasticidad bidimensional se estableció por Dolan y Broghamer [1], que los esfuerzos máximos de tensión en las raices de los dientes son de 30 a 120 por ciento mayores que los calculados por la ecuación de Lewis.

Sin embargo Rubayi y Tam [2], con el uso de fotoelasticidad tridimensional donde, el espesor del diente y el esfuerzo transversal σ_3 no son ignorados, los esfuerzos máximos de tensión en las raices de los dientes son de 35 a 150 por ciento mayores a los calculados por la ecuación de Lewis. De dichos análisis se ha establecido que los valores de σ_3 son alrededor del 22 a 25 por ciento menores en magnitud que los esfuerzos tangenciales máximos.

En el desarrollo de este trabajo dos factores, que hasta ahora no han sido considerados, son tomados en cuenta. En los trabajos anteriores se encontraron esfuerzos en las raices de los dientes utilizando porciones de engranes sometidos a estados de carga estáticos. El empleo de modelos de porciones de engranes implica que las condiciones de frontera y carga no sean las que se presentan realmente bajo condiciones de trabajo; para simular éstas se fabricaron 4 modelos de engranes completos de dientes rectos, cada uno de ellos con diferente radio en la raíz del diente, los cuales fueron montados sobre ejes giratorios y sometidos a cargas estáticas y dinámicas.

Con el objeto de comparar los resultados experimentales con los teóricos, se utiliza la ecuación de la A.G.M.A.. También se comparan los resultados obtenidos experimentalmente para engranes completos y para porciones de engranes.

Este trabajo incluye gráficas de los esfuerzos obtenidos para condiciones estáticas y dinámicas de carga; también se presentan gráficas de factores de concentración de esfuerzos.

ANTECEDENTES.

Actualmente el diseño de engranes se basa en los resultados proporcionados por la ecuación propuesta por la A.G.M.A. (American Gear Manufacturers Association), de la cual uno de sus factores más importantes K_f (Factor de concentración de esfuerzos) se basa en resultados experimentales fotoelásticos, realizados sobre porciones de engranes. Como consecuencia, las condiciones de carga y de frontera no son las que se presentan en engranes bajo condiciones de trabajo reales.

Debido a las razones anteriores surge la necesidad de hacer comparaciones entre los resultados obtenidos experimentalmente, en porciones de engranes y engranes completos, y los calculados analíticamente, a través de la ecuación de la A.G.M.A..

Con el objeto de realizar las comparaciones anteriores se diseñó un nuevo experimento, en el cual se estudian engranes completos bajo condiciones de carga estáticas y dinámicas.

CAPITULO 1. DISEÑO DEL EXPERIMENTO.

Durante el desarrollo de éste trabajo se fabricaron 8 modelos de material fotoelástico Homalite 100. Para el formado del contorno de los diente se siguió el método de la evolvente. De los modelos, 4 son porciones de engranes y los restantes, son engranes completos.

En el experimento se consideraron 4 variaciones en el radio de la raíz del diente (r_f). Se compararon los resultados obtenidos entre parejas formadas, por engranes completos y porciones de engranes, con el mismo radio en la raíz del diente. Donde r_f toma los siguientes valores: 3, 4, 5.9 y 7 mm.

El dispositivos de carga estático y dinámico, para engranes completos, se diseñó y fabricó durante el desarrollo de este experimento.

1.1 FORMA DE LOS DIENTES Y DIMENSIONES DE LOS MODELOS.

Los engranes son elementos mecánicos utilizados en la transmisión, de potencia y movimiento, de una flecha a otra. Estos elementos son gobernados por un gran número de variables que rigen, sobre todo, la forma de los dientes de engranes. Afortunadamente, debido a un gran número de investigaciones realizadas en torno a las formas óptimas de los dientes de engranes, estas se han reducido a sistemas estándares.

Todos los perfiles de dientes de engranes son diseñados de modo que se produzca, en el eje, una relación constante de velocidades angulares, durante el funcionamiento de los mismos (durante el engranaje de los diferentes dientes). En tales perfiles se dice que se tiene acción conjugada. Dos superficies son conjugadas si cualquiera de estas genera o crea a la otra bajo un movimiento específico relativo. Uno de los perfiles que proporciona dicho movimiento es el llamado de evolvente (o involuta); este perfil, con algunas excepciones, es de uso universal para dientes de engranes.

Dentro del estándar A.G.M.A. (American Gear Manufacturers Association) se establecen básicamente cuatro sistemas de dientes para engranes rectos de uso común, los cuales son clasificados según el ángulo de presión con que son formados; estos son $14\ 1/2^\circ$, 20° , $22\ 1/2^\circ$, y 25° .

En algún tiempo se utilizaron engranes con ángulos de presión de $14\ 1/2^\circ$, y, según las investigaciones realizadas estos deben ser sustituidos por cualquiera de los otros tres tipos de engranes. Lo anterior se debe a que en este tipo de engranes se presentan problemas de interferencia, además de que, en estos, se acentúan los esfuerzos de tensión en las raíces de los dientes, debido a que los valores que toma el ángulo de acción ϕ_L son relativamente pequeños. Por las razones anteriores, se seleccionaron engranes formados con ángulos de presión igual a 25° .

El ángulo de acción ϕ_L es el formado por las líneas: Línea de acción de la fuerza y una línea perpendicular al eje de simetría del diente, las cuales tienen su punto de intersección en el punto de aplicación de la fuerza.

Todos los modelos utilizados en el desarrollo de este trabajo se construyeron bajo el estándar de A.G.M.A. Para la fabricación de los modelos se tomó como base un módulo de 12.7 mm (paso diametral de 2 dientes/pulgada) y un número de dientes igual a 15, con lo cual se obtiene un diámetro de paso igual a 19.05 cm (7.5 pulgadas).

Las dimensiones anteriores se seleccionaron con la intención de que los engranes fuesen de un tamaño lo suficientemente grande, como para poder observar y fotografiar los patrones de franja sin ninguna dificultad. Las fotografías deben ser lo más nítidas posibles, pues a partir de éstas se determinaron los esfuerzos en las raíces de los dientes; además de que sirvieron para la comparación de las distribuciones de esfuerzos entre los dientes de porciones de engranes y engranes completos.

A continuación se presentan las relaciones con las cuales se obtuvieron los valores de: paso diametral, número de dientes, adendo, dedendo, altura de trabajo, grueso del diente, paso circular, y módulo.

Paso diametral	$P_d = N_d / d_p$
Adendo	$a = 1 / P_d$
Dedendo	$b = 1.25 / P_d$
Altura de trabajo	$h_k = 2.0 / P_d$
Grueso del diente	$t_d = \pi / 2P_d$
Paso circular	$p = \pi m$
Módulo	$m = 1 / P_d$ (milímetros)

La figura siguiente ilustra gráficamente algunos de los parámetros anteriores.

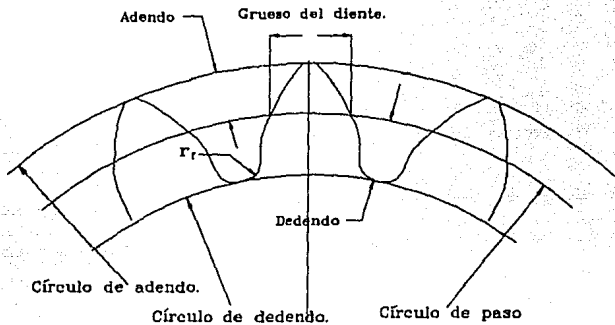


Fig 1.1 Nomenclatura de los dientes de engranes.

1.2 FABRICACION DE LOS MODELOS.

Para la fabricación de los engranes se utilizó material fotoelástico Homalite 100. Este material presenta como características principales su maquinabilidad, fragilidad y dureza. La fragilidad puede no ser un obstáculo si se trabaja con el equipo adecuado (por ejemplo el empleo de la máquina cortadora Router).

Para la fabricación de los engranes se contó con las siguientes máquinas: fresadoras, taladros de columna y banco, cortadoras de disco, tornos y cepillos; y herramientas tales como fresas, cortadores verticales, brocas y buriles.

Los engranes no pudieron ser cortados con fresadora horizontal debido a que la geometría de la raíz del diente cambia para cada uno de los engranes y, por consiguiente, tendría que fabricarse una fresa para cada uno de ellos lo cual resulta inconveniente pues la fabricación de estas requiere de tiempo y equipo. Por otro lado, el empleo de cortadores verticales requiere de un trabajo muy laborioso pues la utilización de estos requiere de una gran destreza para cortar con precisión los bordes de los engranes.

De las opciones mencionadas para el maquinado de los engranes la más viable fue el empleo del taladro de columna y cortadores verticales. Para proceder con el maquinado se deben de tener dibujados los contornos de los engranes sobre la cubierta de papel que protege al material fotoelástico. Los dibujos sirvieron como guía para los cortadores verticales a través de los bordes de los engranes.

Los engranes se dibujaron con el paquete Autocad [8] escala 1=1, donde, los contornos de los dientes se generaron siguiendo el método de la evolvente [3]. Posteriormente se imprimieron los ocho dibujos, cada uno con sus respectivas características, con el empleo de un "plotter", también se dibujaron manualmente siguiendo el mismo método. De los dibujos se cortaron plantillas de plástico de la evolvente, teniendo cuidado de situar apropiadamente los centros de los engranes con respecto a cada curvatura del diente. Estas plantillas sirvieron para el trazado de los dientes de los engranes sobre la superficie de papel protector del material fotoelástico.

El material fotoelástico Homalite 100 se vende comercialmente en placas, las cuales tienen en sus superficies una delgada protección de papel para evitar rayaduras durante su transporte y premaquinado, ya que de presentarse éstas, se pierden detalles de los patrones de franja.

El maquinado se inició con el torneado de los diámetros exteriores e interiores de los engranes, los primeros de 21.59 cm. (8.5 pulg) y los segundos 5.08 cm (2 pulg). En seguida se perforaron, con una broca de 0.793 cm (5/16 pulg.), los espacios entre dientes, lo más próximo a las raíces, de tal manera que se tenga una porción de material entre el borde de los barrenos y las líneas de contorno del engrane de 0.25 cm. aproximadamente.

Los espacios, entre el borde de los barrenos y las líneas de contorno de los dientes, permiten absorber los esfuerzos residuales que se generaron durante el barrenado del material; estos se generan debido a la fricción entre la broca y el material fotoelástico. Los esfuerzos residuales son tan pequeños que no alcanzaron a transmitirse más allá de 0.158 cm (1/16 pulg), los cuales se eliminaron en el maquinado final.

En seguida, con una máquina cortadora de disco abrasivo se cortó el material existente entre los dientes, dejando una porción de material de 0.125 cm (1/8 pulg) entre el borde cortado por el disco y la línea de contorno del diente.

La siguiente operación fue cortar el perfil de la evolvente con un cortador vertical, para esto se montó el engrane en turno sobre una mesa de coordenadas, el engrane se sujetó a través de tornillos, procurando que la cara de aquel sea paralela a la superficie de la mesa, para evitar irregularidades al cortar la cara de los dientes. El proceso de corte se realizó manualmente guiando el engrane hacia el cortador vertical; el cual gira a 800 rpm. Finalmente se cortaron las raíces de los dientes con cortadores de diferentes diámetros para cada uno de los modelos.

Como último paso se pulió, con una lija de agua envuelta sobre una lima, la superficie de la cara de los dientes eliminando cualquier irregularidad dejada por los cortadores verticales. Esta última lijada dejó las superficies de los dientes pulidas, lo cual es conveniente pues reduce la fricción entre los dientes cuando se encuentran en contacto.

1.3 DISPOSITIVOS DE CARGA.

En este experimento uno de los objetivos principales es el de comparar los resultados experimentales obtenidos sobre porciones de engranes y engranes completos. Para lograr lo anterior se requirieron dispositivos de carga, en los cuales fue posible ensayar cada uno de los modelos, para condiciones de carga estáticas y dinámicas.

En un principio sólo se contó con el dispositivo de carga para porciones de engranes, para el cual tuvieron que diseñarse aditamentos de sujeción y carga para los modelos.

El dispositivo de carga, para engranes completos, se diseñó y fabricó durante el transcurso de este trabajo; el dispositivo permite simular estados de carga estáticos y dinámicos. Las características principales de este dispositivo se describen en el párrafo 1.3.2.

1.3.1 DISPOSITIVO DE CARGA PARA PORCIONES DE ENGRANES.

Este dispositivo de carga fue construido en el Instituto de Ingeniería y básicamente está formado por soleras, unidas a través de tornillos y pernos, estos últimos permiten el movimiento angular de los brazos de palanca, a través de los cuales se transmite la carga al dispositivo de pivote ajustable, (ver figura 1.3.1).

El dispositivo de carga tiene un contrapeso ajustable (Q) en uno de los extremos del brazo de palanca (3) cuyo objetivo es equilibrar el peso de las barras 1,2, y 3, de tal forma que la fuerza aplicada al modelo sea debida únicamente a los pesos (W) colocados en el punto C del brazo de palanca o barra (1).

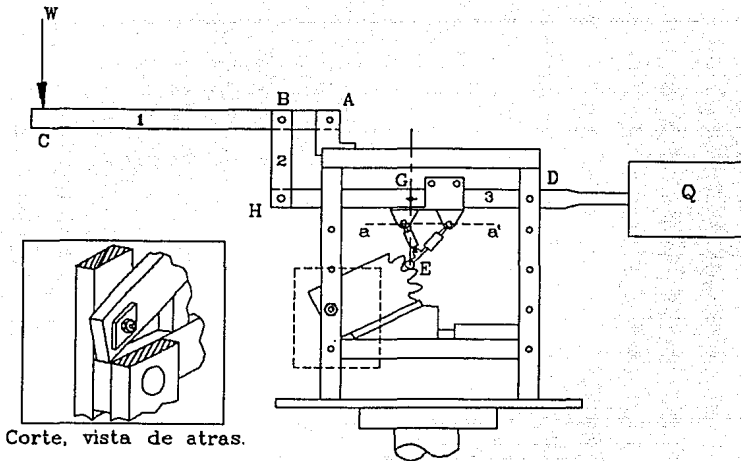


Figura 1.3.1 Dispositivo de carga para porciones de engranes.

De la figura 1.3.1 se elaboraron los diagramas de cuerpo libre para cada una de las barras que intervienen para la aplicación de la fuerza (F).

NOMENCLATURA.

W = Pesos colocados en el extremo C.

F_{tr} = Fuerza transmitida a la articulación B.

F_{tr1} = Fuerza transmitida a la articulación H.

F = Fuerza normal a la superficie del diente.

AB, AC, DH = Distancias entre puntos.

x = Distancia de la articulación D al punto G.

x_1 = Distancia de la articulación D al punto I.

G = Punto en la intersección de la línea de acción de F y la recta que une a H y D .

I = Punto que identifica el centroide de contrapeso.

DATOS NUMERICOS.

$$\underline{AB} = 9.15 \text{ cm.}$$

$$\underline{AC} = 58 \text{ cm.}$$

$$\underline{DH} = 45.05 \text{ cm.}$$

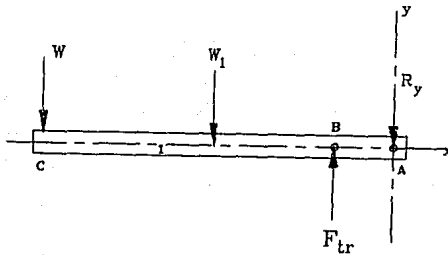
W = Toma valores entre 2.5 kg - 1.0 kg.

x = Toma valores entre 18.5 cm - 22.0 cm.

x₁ = variable que depende de la distancia x.

El valor de la variable x permanecería fijo si los modelos fuesen del mismo tamaño; sin embargo, esto no fue posible debido a que el material que se utilizó ya estaba cortado. La variable x₁ queda determinada al ajustar el contrapeso sobre la barra 3; esto elimina la carga en el rodillo E generada por el peso de las barras.

Diagrama de cuerpo libre correspondiente a la barra número 1.

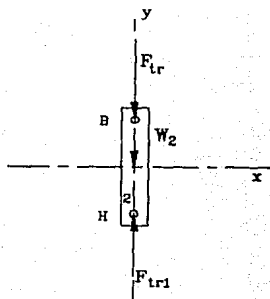


$$\sum M_A = 0$$

$$-F_{tr} \cdot (\underline{AB}) + W_1 \cdot (\underline{AC}/2) + W \cdot (\underline{AC}) = 0$$

$$F_{tr} = \left[W + \frac{W_1}{2} \right] \frac{\underline{AC}}{\underline{AB}}$$

Diagrama de cuerpo libre correspondiente a la barra número 2.



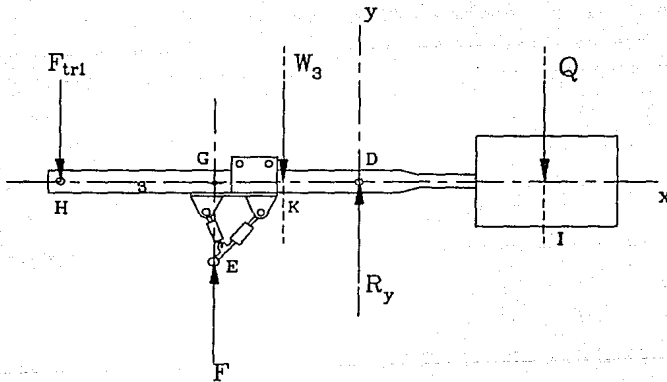
$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{tr} - W_2 + F_{tr1} = 0$$

$$: F_{tr1} = \left[W + \frac{W_1}{2} \right] \frac{AC}{AB} + W_2$$

$$\sum F_x = 0$$

Diagrama de cuerpo libre correspondiente a la barra número 3.



$$\sum M_D = 0$$

$$F_{tr1} \cdot (\underline{DH}) - F \cdot (\underline{DE}) + W_3 \cdot (\underline{DK}) - Q \cdot (\underline{DI}) = 0$$

$$: \underline{DG} = x \quad y \quad \underline{DI} = x_1$$

$$F = \left[\left(\frac{AC \cdot DH}{AB} \right) \cdot W + \left(\frac{AC \cdot DH}{2 \cdot AB} \right) \cdot W_1 + W_2 \cdot (DH) + W_3 \cdot (DK) - Q \cdot (x_1) \right] / x$$

La distancia x_1 se selecciona de tal forma que $Q(x_1)$ elimine las cargas generadas por el peso de las barras (W_1 , W_2 y W_3), de tal forma que:

$$\left(\frac{AC \cdot DH}{2 \cdot AB} \right) \cdot W_1 + W_2 \cdot (DH) + W_3 \cdot (DK) - Q \cdot (x_1) = 0$$

por lo tanto F es igual a:

$$F = \left(\frac{AC \cdot DH}{AB} \right) W / x$$

$$F = 285.6 \frac{W}{x} \quad (1.3.1)$$

1.3.2 FABRICACION DEL DISPOSITIVO DE CARGA PARA ENGRANES COMPLETOS.

El dispositivo de carga para engranes completos se diseñó de tal manera que se ajustara a las limitaciones de : espacio, condiciones de trabajo, transporte, y presupuesto.

Este dispositivo permite la colocación de los engranes en diferentes posiciones angulares, además de facilitar la rotación de los mismos; lo anterior es necesario para someterlos a estados de carga estáticos y dinámicos.

Para satisfacer los requisitos anteriores los engranes se montaron sobre ejes giratorios; los cuales deben por conveniencia, estar soportados por chumaceras, que a su vez están soportadas por columnas fabricadas de perfil tubular, lo anterior con el objeto de tener una mejor visibilidad de la distribución de esfuerzos en todo el cuerpo de los engranes. Estas columnas están sujetas a una estructura metálica mediante tornillos.

Se procuró que la estructura metálica fuese lo más ligera posible; sin que esto origine vibraciones cuando los engranes están en funcionamiento, la estructura se fabricó de perfil angular de 3.81 x 3.81 x 0.635 cm (1.5 x 1.5 x 1/4 pulg); todas sus partes están unidas por un cordón de soldadura 6013. En la siguiente figura 1.3.2 se puede observar el dispositivo de carga.

La parte motriz del dispositivo consta de un motor de 1 hp, bandas trapeziales y poleas en V, estas últimas montadas en sus respectivos ejes y chumaceras. El eje del motor inicialmente giraba a 3450 rpm; lo cual es inconveniente para los engranes pues ésta velocidad origina pequeñas fracturas en la superficie de los engranes, que se propagan y como consecuencia conducen a la fractura total debido a que el Homalite 100 es un material frágil. Por la razón anterior se redujo la velocidad a 360 rpm en los ejes de los engranes.

Para simular el estado de carga dinámico se empleó un freno por fricción el cual frena al eje conducido, provocando un estado de carga dinámico. El freno consta de una polea plana, banda plana, aditamento de carga, pesos y un resorte previamente calibrado, ver figura 1.3.3. La polea plana está montada sobre el eje conducido, sobre de ésta está colocada la banda plana, la cual en uno de sus extremos porta el soporte de pesas, mientras que en el otro se sujeta a uno de los extremos del resorte, el cual a su vez está sujeto a la estructura del dispositivo de carga ver figura 1.3.3.

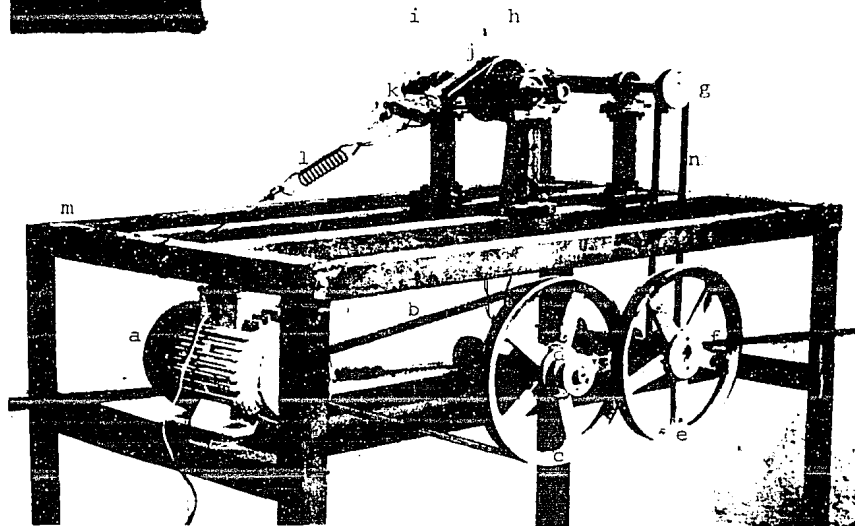


Fig.1.3.2 Dispositivo de carga

Este dispositivo de carga está formado esencialmente por:

- a Motor de 1 hp.
- b Banda tipo V, conecta la polea del motor con la polea c.
- c, e Poleas.
- d, f, g Poleas.
- h, i Engranés.
- J Polea plana.
- k Banda plana.
- l Resorte.
- m Estructura angular.
- n Banda que conecta la polea f con la g.
- o Banda que conecta la polea d con la e (falta en la figura).

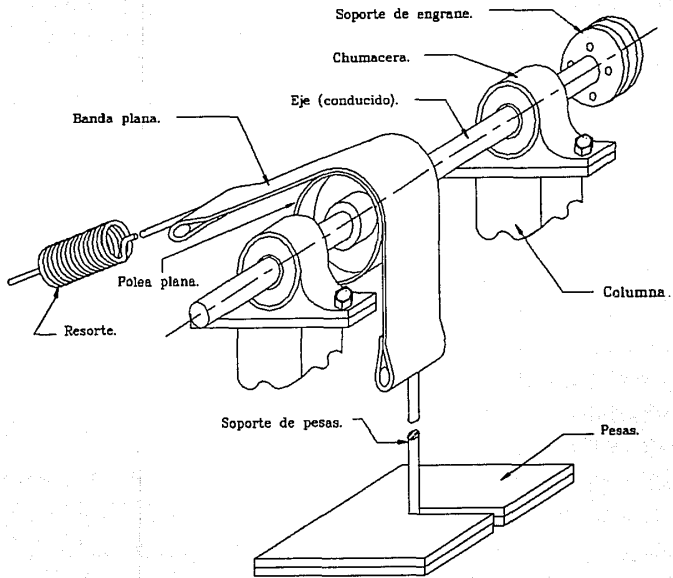


Figura 1.3.3. Detalle freno Prony.

CAPITULO 2. DETERMINACION DE LOS ESTADOS DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES DE PORCIONES DE ENGRANES.

Como se mencionó, se fabricaron 4 porciones de engranes de material fotoelástico, los cuales se montaron en el dispositivo de carga descrito en el párrafo 1.3.1. Las restricciones y magnitud de las cargas impuestas a los modelos se describen dentro de este capítulo.

Los modelos se cargaron dentro del campo de un polariscopio circular, del cual se utilizó la fuente de luz monocromática. Bajo estas condiciones se tomaron fotografías de los modelos, para determinar los esfuerzos de tensión y compresión en las raices de los dientes. Obviamente las constantes elásticas, de los modelos de material fotoelástico y de los prototipos metálicos, son muy diferentes; sin embargo la distribución de esfuerzos obtenida mediante un análisis fotoelástico bidimensional (problema de esfuerzos o deformaciones planos), es usualmente independiente de las constantes elásticas [5] (ver apéndice A); donde, los resultados pueden ser escalados a prototipos de cualquier material, para mayor información ver el apéndice antes citado.

Los resultados de este capítulo se discuten en el capítulo 5.

2.1 CONDICIONES DE FRONTERA Y CARGA.

Las porciones de engranes se sujetaron al dispositivo de carga a través de una perforación que tienen en el extremo contrario al de los dientes. La sujeción se realizó mediante un tornillo, el cual liga a una de las soleras del dispositivo de carga con la porción de engrane como se observa en la figura 1.3.1. Una de las superficies del modelo está en contacto con la solera mientras que la otra superficie está en contacto únicamente con la tuerca del tornillo. Para asegurar una mayor área de sujeción en el modelo, se colocó una pequeña placa de metal, entre la tuerca y éste, de tal forma que una mayor área del modelo esté en contacto; lo anterior protege al modelo al momento de apretar el tornillo y ,además, garantiza una sujeción más rígida (ver detalle de la figura 1.3.1).

Estas perforaciones no influyen en las distribuciones de esfuerzos en los dientes de los modelos, debido a que están lo suficientemente alejadas de la zona de interés.

Uno de los costados del modelo descansa sobre un plano inclinado, ajustable a diferentes ángulos con respecto a la horizontal. Las características anteriores de sujeción permitieron orientar el área de la superficie de la cara del diente deseada, con el plano horizontal.

La carga se aplicó a los modelos a través de un mecanismo de pivote ajustable E, éste mecanismo permite ser ajustado en las direcciones horizontal, vertical y, además, permite su desplazamiento sobre el brazo de palanca 3; donde, la fuerza transmitida por el rodillo (E) es normal al plano horizontal. El rodillo transmite la carga a la superficie de la cara del diente, éste dispositivo de carga tiene la libertad de girar un pequeño ángulo con respecto al eje $a - a'$ de la figura 1.3.1, para asegurar una línea de contacto transversal (a lo ancho de la cara del diente).

También se introdujo una pequeña placa de acrílico, entre el rodillo de carga y la cara del diente, para evitar el exceso de esfuerzos cortantes en el punto de contacto, lo anterior se debe a que la aplicación de una fuerza puntual genera en la zona de contacto una gran concentración de esfuerzos. La adición de esta placa no influye en la distribución de esfuerzos en la raíz del diente [1].

La fuerza se aplicó a una distancia de 9.8 cm medidos sobre una línea paralela al eje de simetría del diente; cuyo punto inicial está determinado por la intersección de una línea perpendicular a ésta, la cual se interseca con el centro del engrane, y cuyo punto final está en la zona de contacto, ver figura 4.2.1.



Figura 2.1.2 Distribución de esfuerzos, en la raíz del diente, generados por la aplicación de la carga a través de una placa de acrílico. Campo oscuro.

Los modelos se sometieron a tres niveles de carga 334.80, 251.07 y 167.35 N (los cuales corresponden a pares de 3, 2.25, y 1.5 kg-m respectivamente, aplicados en el extremo de uno de los ejes). El par límite superior se adoptó debido a que uno ligeramente mayor a éste (par > 3 kg-m), provocó la fractura de 2 engranes completos. Dicha fractura se originó en uno de los vértices del cuñero, donde la concentración de esfuerzos es muy grande. Los otros dos niveles de carga se seleccionaron debido a que son valores menores a la carga anterior y permiten formarse una idea más clara de las variaciones de los esfuerzos con respecto a la carga.

2.2 DETERMINACION DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES.

Los modelos se cargaron en el campo de un polariscopio circular en el cual se utilizó luz monocromática, de acuerdo con lo anterior se observaron patrones de franjas oscuras y blancas, tal como se puede ver en la figura 2.2.1 .

Las fotografías de isocromáticas que se tomaron en el polariscopio circular, en general, pueden ser de dos tipos conocidos como campo oscuro y campo claro. Si se superponen las imágenes de las fotografías de isocromáticas de ambos campos, las franjas de una caen entre las franjas de la otra otra. Lo anterior se debe a que existe un desfase de onda igual $\pi/2$.

Las franjas isocromáticas en el modelo son lugares geométricos de puntos, para las cuales, las diferencias de esfuerzos principales ($\sigma_1 - \sigma_2$) son constantes.

Para un campo claro, o de luz, las franjas isocromáticas se presentan de la siguiente forma: el lugar geométrico de puntos para los cuales $N = 0$ forma una franja de luz, el lugar de puntos para los cuales $N = 1/2$ forma una franja adyacente de color oscuro, adyacente a ésta se forma otra franja de luz donde $N = 1$, y así sucesivamente son formadas franjas oscuras y de luz.

En la figura 2.2.1 se muestra el ejemplo típico de un patrón de franjas de isocromáticas para un campo claro. Para la determinación de los esfuerzos de tensión y compresión, en las raíces de los dientes es necesario determinar primeramente el orden de franja (N) para cualquier punto de interés en el modelo.

Por ejemplo, para la raíz del diente etiquetada con la letra A, sujeta a tensión, N es igual a $2 \frac{1}{2}$; sin embargo, para la raíz del diente etiquetada con la letra B, sujeta a compresión, N es igual a $3 \frac{1}{2}$.



Figura 2.2.1 Patrones de franjas de isocromáticas para un campo claro.

Como las raíces de los dientes son bordes libres, la determinación de los esfuerzos es inmediata; puesto que en estos bordes se tienen únicamente esfuerzos tangenciales de tensión o de compresión; donde los esfuerzos principales normales sobre las raíces de los dientes son iguales a cero, por lo que la ecuación fundamental de la fotoelasticidad se reduce de:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f \sigma}{ht}$$

a

$$\sigma_1 \text{ ó } \sigma_2 = \pm \frac{N f \sigma}{ht} \quad (2.2.1)$$

Donde: N = Orden de franja.
 $f\sigma$ = Factor de franja.
 ht = Espesor del material.

N se obtiene de la contabilidad de franjas en el modelo, $f\sigma$ de la calibración del material fotoelástico (ver el apéndice B).

Para la determinación de los órdenes de franja máximos se recurrió a la aproximación funcional [4]; donde se tienen como datos la evolución de las franjas (N) y la posición de las mismas, estos puntos se llevan a un plano coordenado donde se tienen como ordenadas los órdenes de franja y como abscisas las posiciones. A los puntos graficados se les ajusta un polinomio el cual es derivado e igualado a cero para su solución, de tal forma que se obtenga el valor de N máximo.

En lugar del procedimiento anterior pueden utilizarse las técnicas de compensación de Tardy ó de Babinet-Soleil [5] las cuales proporcionan muy buenos resultados. La técnica de compensación de Tardy es descrita en el apéndice B.

En la siguiente tabla se presentan los esfuerzos máximos de tensión y compresión, obtenidos experimentalmente, para los modelos de porciones de engranes, los cuales se sometieron a una fuerza normal a la superficie del diente de 334.80 N (34.15 kg).

Esfuerzo (Mpa).	$r_f = 3 \text{ mm}$	$r_f = 4 \text{ mm}$	$r_f = 5.9 \text{ mm}$	$r_f = 7 \text{ mm}$
Tensión	12.75	11.70	10.22	8.33
Compresión	18.95	17.22	15.26	17.00

CAPITULO 3. DETERMINACION DE LOS ESTADOS DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES DE ENGRANES COMPLETOS.

Como se mencionó, se fabricaron 4 engranes completos de material fotoelástico, los cuales fueron cargados, en el dispositivo descrito en el párrafo 1.3.2, bajo condiciones de trabajo semejantes a las que se presentan en la realidad. Los modelos se colocaron dentro del campo del polariscopio circular, utilizando luz monocromática; bajo estas condiciones se tomaron fotografías de los modelos para determinar los esfuerzos de tensión y compresión en las raíces de los dientes.

Los resultados correspondientes a este capítulo se discuten en la capítulo 5.

3.1. CONDICIONES DE FRONTERA Y CARGA EN ENGRANES COMPLETOS PARA UN ESTADO DE CARGA ESTÁTICA.

CONDICIONES DE FRONTERA Y DE CARGA. Como se mencionó en el capítulo 2, dos engranes se montaron sobre ejes giratorios; a uno se le aplicó un par de 29.41 N-m (3 Kg-m), mientras que al otro se le restringió su movimiento. Para restringir el movimiento angular de los engranes sobre sus ejes se utilizaron cuñas cuadradas y para restringir los desplazamientos axiales sobre los ejes se utilizaron collarines, sujetos a los ejes mediante prisioneros. Las cuñas se fabricaron del mismo material con que se fabricaron los engranes, con el objeto de evitar diferencias entre los módulos de elasticidad.

En la figura 3.1 se muestra el diagrama de cuerpo libre de uno de los ejes con su respectivo engrane, así como los apoyos y la fuerzas que actúan sobre este.

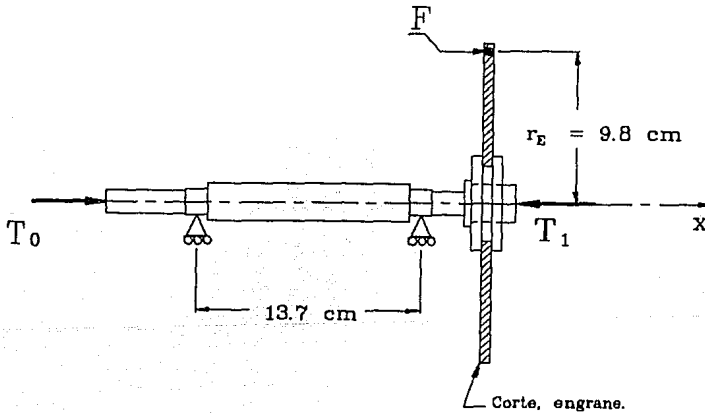


Figura 3.1 Diagrama de cuerpo libre del engrane
montado sobre su eje.

Para determinar la fuerza aplicada (F) en el diente se hace necesario obtener, del dibujo anterior, la ecuación de equilibrio.

NOMENCLATURA.

T_o = Torque aplicado en el extremo de uno de los ejes.

T_1 = Torque soportado por el engrane.

r_E = Distancia del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza F.

F = Fuerza normal a la superficie del diente.

W_t = Fuerza tangencial.

W_r = Fuerza radial.

ϕ_L = Angulo de acción.

DATOS CONOCIDOS.

$T_o = 29.41 \text{ N-m.}$

$r_E = 0.098 \text{ m.}$

$\phi_L = 26.333^\circ$

De la figura 3.1 se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\sum M_x = 0$$

$$T_o - T_1 = 0$$

$$T_o = T_1$$

$$T_1 = W_t \cdot r_E$$

$$: W_t = T_o / r_E$$

$$F = W_t / \cos \phi_L$$

$$W_r = F \cdot \sin \phi_L$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$W_t = 300.11 \text{ N.}$$

$$F = 334.80 \text{ N}$$

$$W_r = 148.51 \text{ N}$$

Los engranes se montaron sobre ejes giratorios, lo cual dificultó un poco la determinación de los esfuerzos en las raíces de los dientes, pues se requirió de un mayor trabajo para colocar la posición de los dientes que cumpliera con las condiciones de carga mencionadas anteriormente. Para esto se tuvo que repetir varias veces el proceso de carga-restricción de movimiento, debido a que se presentaban pequeños desplazamientos angulares en los ejes, ocasionados por el deslizamiento de los dientes en contacto. El par se aplicó mediante un torquímetro previamente calibrado.

Un vez colocados los modelos en el campo del polariscopio circular se procedió a fotografiarlos, (campo claro y campo oscuro); lo anterior se realizó para tres condiciones de carga. El procedimiento para la determinación de los esfuerzos en las raíces de los dientes de los engranes se describe en el siguiente tema.

3.1.1 DETERMINACION DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES.

Como se describió en el capítulo anterior, para la determinación de esfuerzos en las raíces de los dientes es necesario el conocer el orden de franja (N), la constante de franja ($f\sigma$) y el espesor del modelo (h); N se obtiene de la contabilidad de las franjas en el modelo y $f\sigma$ de la calibración del material fotoelástico.

Para determinar los ordenes de franja máximos se procedió como en el capítulo 2, mediante la aproximación funcional. Donde se requiere conocer la evolución de las franjas (N) y la posición de las mismas, estos puntos se llevan a un plano coordenado donde se tienen como ordenadas los ordenes de franja y como abcisas la posición de las franjas. A los puntos graficados se les ajusta un polinomio el cual es derivado e igualado a cero para su solución, de tal forma que se obtenga el valor de N máximo.

Como se conocen ($f\sigma$) de la calibración del material y el espesor del material (h); unicamente resta sustituir estos valores en la ecuación 2.2.1 para obtener los esfuerzos de tensión y compresión.

En la siguiente tabla se presentan los valores para los esfuerzos máximos de tensión y compresión obtenidos experimentalmente para los modelos de engranes completos; los cuales se sometieron a una fuerza estática normal a la superficie del diente de 334.80 N.

Esfuerzo (Mpa).	$r_f = 3 \text{ mm}$	$r_f = 4 \text{ mm}$	$r_f = 5.9 \text{ mm}$	$r_f = 7 \text{ mm}$
Tensión	13.15	13.08	8.78	11.80
Compresión	14.81	14.76	12.77	13.50

3.2. CONDICIONES DE FRONTERA Y CARGA EN ENGRANES COMPLETOS. ESTADO DE CARGA DINAMICA.

CONDICIONES DE FRONTERA Y CARGA. Como se mencionó, los modelos no pueden ser sometidos a grandes cargas dinámicas debido a que son materiales sumamente fragiles y el contacto a grandes velocidades ($\geq 1000 \text{ rpm}$) genera inmediatamente desprendimiento de pequeñas porciones de material, sobre todo en las superficies correspondientes a los contornos de los dientes de los engranes. Por esa razón, la velocidad angular en los ejes de los engranes

tuvo que reducirse (360 rpm).

El par aplicado a los engranes se determinó a partir de un freno de banda para el cual se obtuvo como dato, la tensión en uno de los extremos de la banda (T_{b1}), que es debida a las pesas colocadas en el soporte de pesas, y para el otro extremo de ésta se determinó la tensión (T_{b2}) mediante la ley de Hooke (ver detalle figura 3.2); puesto que se conoce la deformación Δx del resorte para el estado de carga dinámico.

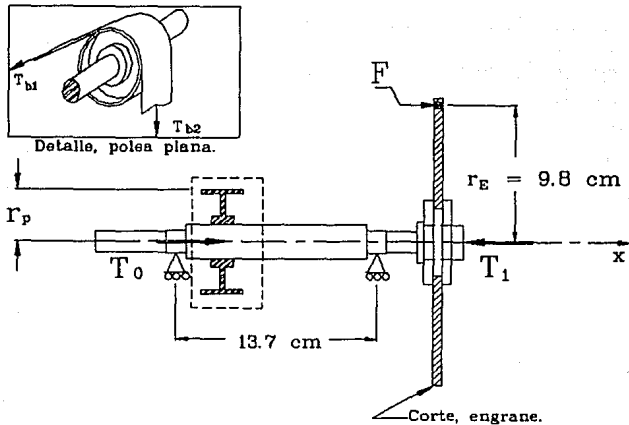


Figura 3.2 Diagrama de cuerpo libre del engrane montado sobre su eje.

Para determinar la fuerza aplicada (F) en el diente se hace necesario obtener, del dibujo anterior, la siguiente ecuación de equilibrio.

NOMENCLATURA.

T_0 = Torque aplicado en el extremo de uno de los ejes.

T_1 = Torque soportado por el engrane.

r_E = Distancia del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza F .

r_p = Radio de la polea plana.

T_{b1} y T_{b2} = Tensiones en los extremos de la banda.

F = Fuerza normal a la superficie del diente.

W_t = Fuerza tangencial.

W_r = Fuerza radial.

ϕ_L = Angulo de acción.

DATOS CONOCIDOS.

$T_{b1} = 103.92 \text{ N.}$

$T_{b2} = 331.05 \text{ N.}$

$r_p = 0.0425 \text{ m.}$

$r_E = 0.098 \text{ m.}$

$\phi_L = 26.333^\circ$

De la figura 3.2 se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\sum M_x = 0$$

$$T_0 - T_1 = 0$$

$$T_0 = T_1$$

$$: \quad T_0 = (T_{b1} - T_{b2}) \cdot r_p$$

$$T_1 = W_t \cdot r_E$$

$$W_t = \left(\frac{(T_{b1} - T_{b2}) r_p}{r_E} \right)$$

$$F = W_t / \cos \phi_L$$

$$W_r = F \cdot \text{Sen } \phi_L$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$T_o = 9.62 \text{ N-m.}$$

$$W_t = 98.28 \text{ N.}$$

La ecuación de la A.G.M.A. incluye un factor de efectos dinámicos (K_v) el cual depende de la velocidad v (m/s) en el diámetro de paso, precisión en el formado de los engranes, desalineamientos, etc. (ver AGMA 226). Para el cálculo de éste factor se considera una velocidad lineal de 3.908 m/s, correspondiente a una velocidad angular (360 rpm), y se considera una precisión en el formado de los engranes similar a la de los engranes comerciales, por lo que el factor K_v toma el valor de 0.78.

3.2.1 DETERMINACION DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES.

Para la determinación de esfuerzos en un estado dinámico de carga se propuso como recurso más viable la filmación de una película, de la cual posteriormente se extraería la información deseada. Uno de los procedimientos más comunes [6] para realizar lo anterior es mediante el auxilio de una fuente de luz estroboscópica que reemplaza la fuente de luz convencional. La videocasetera es colocada en el lugar del observador, de tal manera que se registre una serie de cuadros oscuros y de luz (imágenes).

De la película, se tomaron fotografías de las imágenes, en las cuales los (4 tipos) dientes en contacto cumplen con las condiciones de carga especificadas.

Las fotografías seleccionadas para el modelo con radio en la raíz del diente $r_f = 3$ mm, presentan una gran definición de los patrones de franjas; sin embargo para los otros modelos la definición de los patrones de franjas disminuyen drásticamente a tal grado que la cuantificación de los ordenes de franja (N) es sumamente difícil. Lo anterior se debe a la reducción de los esfuerzos en las raíces de los dientes debido básicamente al incremento de r_f . Desafortunadamente la carga impuesta tuvo que ser pequeña, como ya se mencionó, y con un único experimento no puede asegurarse esta tendencia.

En la siguiente tabla se presentan los valores máximos para los esfuerzos de tensión y compresión obtenidos experimentalmente para los modelos de engranes completos, los cuales se sometieron a un estado dinámico de carga donde la fuerza tangencial es de 98.28 N (10.02 kg).

Esfuerzo (Mpa).	$r_f = 3$ mm	$r_f = 4$ mm	$r_f = 5.9$ mm	$r_f = 7$ mm
Tensión	6.15	4.01	2.35	2.90
Compresión	7.31	6.81	4.48	4.81

CAPITULO 4. DETERMINACION ANALITICA DE ESFUERZOS EN LAS RAICES DE LOS DIENTES DE ENGRANES.

En este capítulo se describe el procedimiento seguido para el cálculo de los esfuerzos de tensión, en las raíces de los dientes, utilizando la ecuación de la A.G.M.A.. En este estudio se consideran dientes de engranes sujetos a tres diferentes niveles de carga, donde las fuerzas aplicadas son normales a las superficies de los dientes.

La fuerza se aplicó normal a la superficie del diente, a una distancia $r_E = 9.8$ cm medida sobre su eje de simetría, desde el centro del engrane hasta la intersección con la línea de acción de la componente tangencial de la fuerza, ver figura 4.2.1. Lo anterior se determinó experimental y gráficamente, al considerar la posición para la cual un solo par de dientes está en contacto, donde éste se encuentra lo más cerca posible de la punta de uno de los dientes, sin que otro par de dientes inicie su contacto.

4.1 CALCULO DEL RADIO EN LA RAIZ DEL DIENTE (A.G.M.A.).

La A.G.M.A. propone un método para el cálculo del radio en la raíz del diente, el cual es publicado en la norma A.G.M.A. 226.01; en la cual se considera que los engranes son generados con cortadores helicoidales. Sin embargo, con el objeto de facilitar los cálculos, se considera en lugar de dicho cortador a una cremallera equivalente (Basic rack).

La expresión para determinar el radio de la raíz del diente bajo el proceso de generación por cremallera es [10].

$$r_f = r_1 + r_T \quad (4.1.5)$$

$$r_1 = \frac{b_1^2}{R_o + b_1} p_d \quad (4.1.6)$$

$$b_1 = b + r_T \quad (4.1.7)$$

Donde r_T = Radio de la esquina, en la punta del diente;
para un cortador con diente biselado $r_T = 0$.

R_o = Radio de paso (r_d) del engrane a ser generado,
(para generación por cremallera ó fresa).

r_1 = Radio del trocoide.

b = Dedendo = b_1 si $r_T = 0$

p_d = Paso diametral.

4.2 CALCULO DE ESFUERZOS UTILIZANDO LA ECUACION DE LA AGMA.

En este tema se presenta la ecuación fundamental para el cálculo de esfuerzos en engranes rectos. Esta incluye todos los factores, que son conocidos, para calcular la resistencia de los dientes de engranes. El esfuerzo a la flexión puede ser valuado, tanto para los dientes del engrane y del piñón, cuando se modifican, la geometría del diente, las propiedades mecánicas del material, el número de dientes en contacto, etc.. La información aquí presentada se obtuvo de la publicación de la A.G.M.A. 218.01 Dec. 1982.

La ecuación fundamental para esfuerzos de flexión en un diente de engranes es:

$$\sigma_t = \frac{W_t K_a}{K_v} \frac{P_d}{F_c} \frac{K_s K_m}{J} \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_t = \frac{W_t K_a}{K_v} \frac{1}{F_{cm}} \frac{K_s K_m}{J} \quad (4.2.2)$$

Donde: σ_t = Esfuerzo de flexión.

K_a = Factor de aplicación.

K_s = Factor de tamaño.

K_m = Factor de distribución de carga.

K_v = Factor dinámico.

J = Factor geométrico.

m = Módulo.

F_c = Ancho de cara.

P_d = Paso diametral.

W_t = Carga transversal transmitida.

Debido a la importancia de estos factores, se discutirá cada uno de ellos en los siguientes incisos:

a) Factor de aplicación (K_a).

El factor K_a toma el valor de 1 para las condiciones de trabajo en el experimento ya que la velocidad de operación es baja (360 rpm), y no están sometidos a vibraciones, desalineamientos, sobrecargas, y, la velocidad angular de los ejes es constante.

b). Factor de tamaño (K_s).

El factor de tamaño puede ser tomado como la unidad para la mayoría de los engranes, a condición de que se haga una apropiada selección de: acero, para el tamaño de las partes, y, procesos de endurecido y tratamiento térmico. Para este trabajo se tomó un valor para $K_s = 1$.

c). Factor de distribución de carga (K_m).

A través del método empírico, en este trabajo, se obtiene un valor para $K_m = 1.342$, este es un valor muy aproximado a los publicados en las tablas 2 y 3 de la norma A.G.M.A. 225.01 Dec. 1967, en la cual K_m es igual a 1.3.

Debe tenerse en cuenta que los ejes de los engranes están soportados por 4 columnas tubulares y estas por dos perfiles angulares perpendiculares a los ejes de los engranes, lo que implica que los engranes se encuentren en el centro de un claro de perfil angular de 90 cm de longitud (ver figura 1.3.2). La altura de las columnas sobre las cuales descansan los ejes es de 24 cm; estas están sujetas a los perfiles angulares mediante tornillos.

Lo anterior implica que posiblemente se generen deflexiones en los perfiles angulares, y como consecuencia, desalineamientos entre los engranes. Sin embargo, como las cargas impuestas no son grandes se considera que dichas deflexiones son nulas, lo anterior se confirma con las observaciones hechas sobre el dispositivo.

Para la evaluación de los factores de éste y de los otros incisos se recurre a: gráficas, tablas y comentarios hechos en las normas A.G.M.A, libros de diseño mecánico [3],[7] y también, a las experiencias recopiladas en el desarrollo de este trabajo

d). Factor dinámico (Kv).

A partir del índice de calidad y de la velocidad en la línea de paso v (m/s), puede evaluarse el factor K_v mediante las gráficas o las expresiones publicadas en la A.G.M.A. 218.01 DEC. Para los engranes estudiados de obtuvo un valor para $K_v = 0.78$.

e). Factor geométrico de resistencia a la flexión (J).

El factor geométrico (J) evalúa: la forma del diente, la concentración de esfuerzos debido a la forma geométrica del diente, y, la posición en la cual la carga máxima es aplicada.

El factor J es definido como:

$$J = \frac{Y C\psi}{K_r m_n} \quad (4.2.5)$$

Donde Y = Factor de forma del diente.

K_r = Factor de concentración de esfuerzos.

m_n = Índice de repartición de carga.

$C\psi$ = Factor de sobrecarga helicoidal (para engranes rectos toma del valor de 1).

1). Factor de forma del diente (Y).

Este factor se debe obtener a partir de la geometría del diente, (para un $P_a = 1$), y del punto de aplicación de la carga (ver referencia 10, pp 14,15). La ecuación para Y es:

$$Y = \frac{k\psi}{\left[\frac{\cos \phi_L}{\cos \phi_n} \right] \left[\frac{1.5}{u C_h} - \frac{\text{Tang } \phi_L}{t} \right] m_n} \quad (4.2.6)$$

- Donde: $K\psi$ = Factor de ángulo de hélice (para engranes rectos es igual a 1).
- ϕ_L = Angulo de acción.
- Ch = Factor helicoidal (1 para engranes rectos).
- u = Distancia dependiente del punto de aplicación de la carga.
- t = Espesor del diente para la sección crítica.
- m_n = Módulo normal del esquema (usualmente $m_n = 25.4$ mm)

Las dimensiones geométricas tales como u, t, h , y ϕ_L son determinadas para la condición de carga más crítica que se presentada en los dientes de los engranes. Las cantidades geométricas se pueden observar en la siguiente figura.

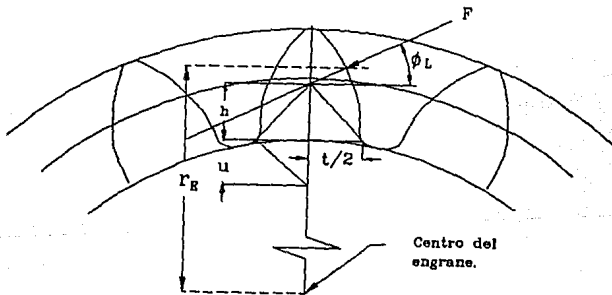


Figura 4.2.1 Dibujo del diente para el cual se tiene la carga máxima de trabajo.

2).Factor de concentración de esfuerzos (Kr).

El factor de concentración de esfuerzos citado aquí se debe a Dolan y Broghamer y sólo incluye la concentración de esfuerzos efectivos y la localización de la carga. Este factor debe de tenerse en cuenta ya que considera las variaciones en los radios, de las raíces de los dientes, los cuales son precisamente el objetivo de este estudio. El factor Kr viene dado por la siguiente expresión.

$$K_r = H + \left[\frac{t}{r_f} \right]^L \left[\frac{t}{h} \right]^M \quad (4.2.7)$$

donde: h = distancia f_m ver la figura 4.2.1

r_f = radio de la raíz del diente.

H, L y M son obtenidas de las siguientes expresiones:

$$H = 0.18 - 0.008 (\phi_n - 20)$$

$$L = H - 0.03 \quad (4.2.8)$$

$$M = 0.45 + 0.010 (\phi_n - 20)$$

En la siguiente tabla se presentan los valores del factor geométrico (J).

Factor geométrico	$r_f = 3 \text{ mm}$	$r_f = 4 \text{ mm}$	$r_f = 5.9 \text{ mm}$	$r_f = 7 \text{ mm}$
J	0.3732	0.4	0.4567	0.441

3).Relación de repartición de carga (m_H).

La relación de repartición de carga m_N es igual al ancho de cara dividido entre la longitud total mínima de las líneas de contacto. Este factor depende de la relación de contacto transversal m_p , la relación de contacto con la cara m_F , los efectos de cualquier modificación del perfil, y la deflexión del diente. Para el caso de engranes rectos $m_F = 1.0$.

Al sustituir el valor de las variables, en la ecuación de la A.G.M.A., se obtiene la siguiente tabla de resultados, en la cual se presentan los esfuerzos obtenidos para dos niveles de carga. Las fuerzas aplicadas, (334.80 N y 167.254 N.), son normales a las superficies de los dientes.

Esfuerzo (Mpa).	$r_f = 3$ mm	$r_f = 4$ mm	$r_f = 5.9$ mm	$r_f = 7$ mm
Tensión	13.39	12.49	10.94	11.33
Tensión	6.69	6.24	5.47	5.66

CAPITULO 5. DISCUSION DE RESULTADOS.

En los capítulos anteriores se determinaron experimentalmente los esfuerzos máximos, de tensión y compresión, en las raíces de los dientes, para porciones de engranes, y engranes completos, para estados estáticos y dinámicos de carga. También se determinaron esfuerzos de tensión, mediante el empleo de los criterios de diseño disponibles en la literatura.

El objetivo de este capítulo es el de hacer comparaciones entre resultados calculados analíticamente y resultados obtenidos experimentalmente.

5.1. COMPARACION DE RESULTADOS OBTENIDOS EN PORCIONES DE ENGRANES.

Este tema comprende las comparaciones hechas entre los resultados obtenidos experimentalmente, sobre porciones de engranes, y los resultados analíticos presentados en el capítulo 4. Los resultados anteriores se encuentran graficados en la figura 5.1.1.

En la figura 5.1 se muestran unos dientes de engrane, en ella están representadas las direcciones de los esfuerzos máximos de compresión y de tensión. Nótese las diferencias en sus magnitudes.

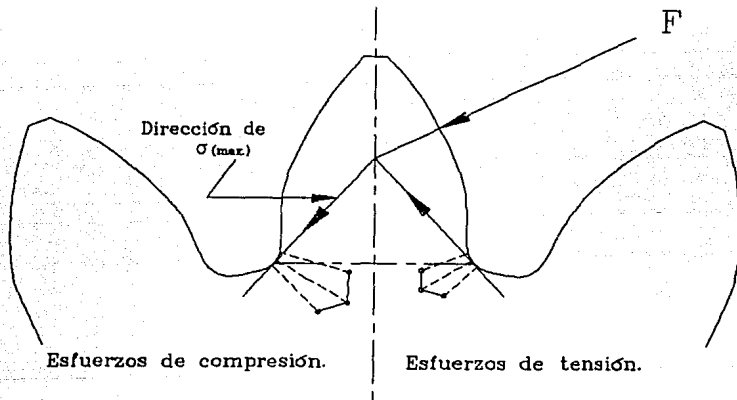


Figura 5.1. Diente de engrane donde se muestra, para las características de éste, la posición de los esfuerzos máximos de tensión y compresión.

La longitud de los segmentos de recta punteada, son proporcionales a los esfuerzos.

A partir de la gráfica 5.1.1 puede establecerse, inmediatamente, una correspondencia entre los resultados calculados a través de la ecuación de la A.G.M.A. y los obtenidos experimentalmente. La concordancia puede justificarse debido a que el factor de concentración de esfuerzos (K_r), presente en la ecuación de la A.G.M.A., fue inspirado en los resultados obtenidos experimentalmente sobre porciones de engranes. Este factor modifica directamente el factor geométrico de la A.G.M.A.; dicho trabajo fue realizado por Dolan y Broghamer [1]. Las diferencias observadas se deben, posiblemente, a lo conservador de los resultados generados por la A.G.M.A.

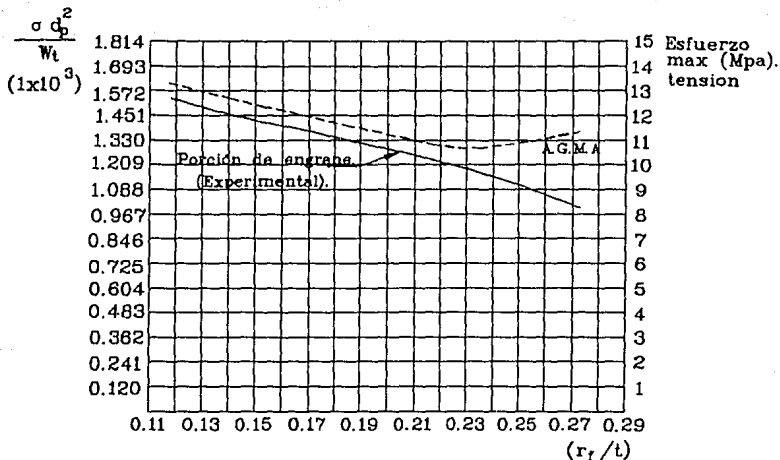
Como puntos de comparación se toman tres relaciones de esbeltez que caracterizan a los resultados presentados.

La primera relación de esbeltez es $r_f/t = 0.154$, la cual corresponde a la relación $r_f = 0.3/P_d$; este radio es el que normalmente se emplea para los engranes rectos. Para esta relación los resultados experimentales son 6.4 % menores que los calculados a través de la A.G.M.A.

En la gráfica se observa que, para los resultados de la A.G.M.A., existe una relación de esbeltez óptima, es decir, un radio en el cual los esfuerzos en la raíces de los dientes son mínimos. Esta se localiza aproximadamente, para la relación de esbeltez $r_f/t = 0.22$, donde los resultados experimentales son 6.48 % menores que los calculados a través de la ecuación de A.G.M.A..

Un último punto de comparación se localiza, para $r_f/t = 0.273$, donde, debido a la magnitud de r_f , se presenta socavamiento en las raíces de los dientes, lo que origina que los esfuerzos se incrementen. Para la relación de esbeltez $r_f/t = 0.273$ los resultados experimentales son 26.7 % menores que los calculados a través de la ecuación de A.G.M.A..

Inmediatamente se nota que la última diferencia es mayor a las anteriores y se debe al socavamiento de los dientes.



Gráfica 5.1.1 Esfuerzos de tensión en las raíces de los dientes.

5.1.1 FACTORES DE CONCENTRACION DE ESFUERZOS PARA PORCIONES DE ENGRANES.

En la figura 5.1.2 se muestra la gráfica de factores de concentración de esfuerzos; donde los esfuerzos reales son los experimentales, y, los nominales son los resultados analíticos obtenidos en el capítulo 4.

La línea quebrada representa los factores de concentración de esfuerzos, estos se calculan mediante la expresión siguiente.

$$K_{t1} = \frac{\sigma_{EP}}{\sigma_t}$$

Donde: σ_{EP} = Esfuerzos en porciones de engranes.

σ_t = Esfuerzos proporcionados por la ecuación de la A. G. M. A.

En la gráfica 5.1.2 se observa, en general, que los factores de concentración de esfuerzos disminuyen, conforme los radios en las raíces de los dientes aumentan.

Los factores de concentración de esfuerzos, representados por la polilínea K_{t1} , toman valores de 0.96 a 0.9 para las relaciones de esbeltez $r_f/t = 0.118$ y $r_f/t = 0.22$; lo anterior significa que los resultados experimentales y los de la A.G.M.A son muy parecidos; sin embargo, para las siguientes relaciones de esbeltez los factores disminuyen rápidamente, lo que indica que los esfuerzos obtenidos en las porciones de engranes disminuyen conforme aumenta el radio de la raíz del diente; caso contrario al comportamiento de la ecuación de la A.G.M.A.

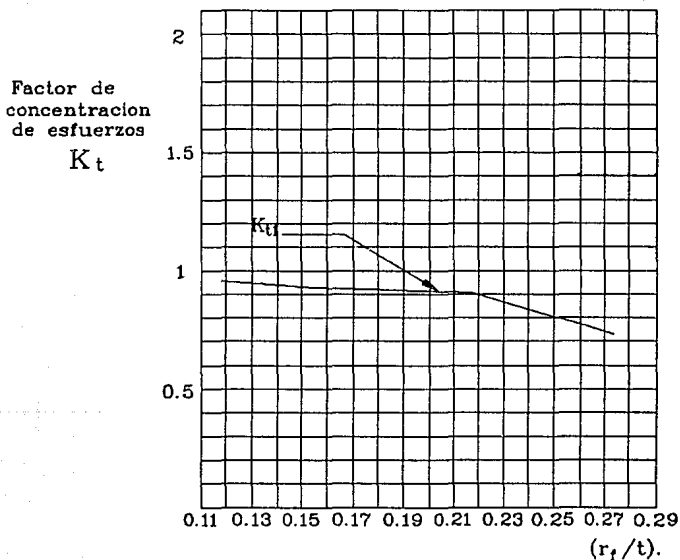
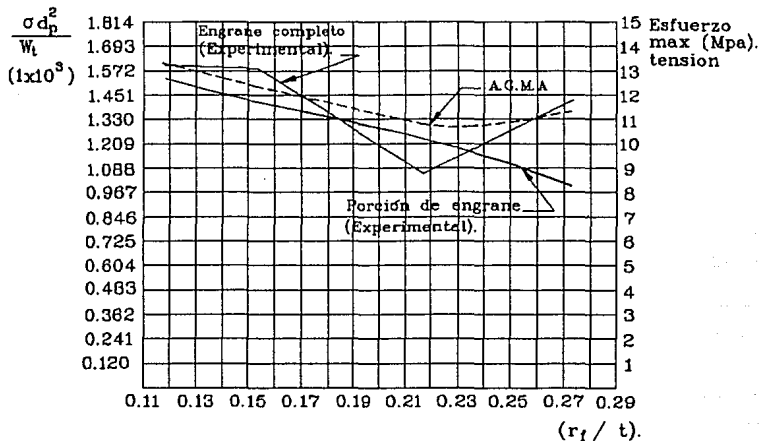


Figura 5.1.2 Factores de concentración de esfuerzos.

5.2. COMPARACION DE RESULTADOS OBTENIDOS EN ENGRANES
COMPLETOS. CONDICIONES DE CARGAS ESTATICAS.

En la gráfica y tabla siguientes se presentan los resultados experimentales y analíticos.



Gráfica 5.2. Esfuerzos de tensión en las raíces de los
dientes.

En la siguiente tabla se muestra la variación, en porcentaje, de los esfuerzos obtenidos en engranes completos σ_{EC} , cuando se comparan con los resultados calculados analíticamente y los obtenidos en porciones de engranes.

r_f/t	σ_t	σ_{EP}
0.154	+ 6.61	+11.60
0.22	-22.31	-13.30
0.273	+ 4.89	+43.50

Comparando los resultados de la A.G.M.A. y los obtenidos experimentalmente en engranes completos se tiene que: los esfuerzos en las raíces de los dientes para la relación de esbeltez $r_f/t = 0.154$ ($r_f = 0.3/P_d$) son muy semejantes, observando una diferencia del 6.61 %. Tal vez una de las comparaciones más importantes sea específicamente la referente a los resultados obtenidos para la relación de esbeltez de $r_f/t = 0.22$, donde los esfuerzos experimentales son 22.31 % menores a los calculados por la ecuación de la A.G.M.A..

Y para la última relación de esbeltez considerada $r_f/t = 0.273$ se tiene que los esfuerzos en engranes completos son 4.89 % mayores a los calculados a través de la ecuación de la A.G.M.A.

5.2.1 COMPARACION DE ESFUERZOS DE COMPRESION EN LAS RAICES DE LOS DIENTES DE ENGRANES.

Ya que no existe un método analítico para la evaluación de los esfuerzos de compresión, en la gráfica 5.2.1 se presentan, únicamente, los esfuerzos de compresión obtenidos, experimentalmente, para las raíces de porciones de engranes y engranes completos.

Los esfuerzos de compresión varían en forma constante; donde, en promedio los esfuerzos en porciones de engranes son 22.3 % mayores a los obtenidos en engranes completos. En ambos modelos se presenta la tendencia, de los esfuerzos, a disminuir conforme se incrementa el radio en la raíz del diente, hasta el llamado radio óptimo, donde los esfuerzos vuelven a incrementarse debido a que para radios mayores se presenta socavamiento; cabe señalar que los esfuerzos de tensión en las porciones de engranes tienden a disminuir, mientras que los de compresión tienden a aumentarse y, para los engranes completos, ambos esfuerzos tienden a incrementarse conjuntamente con el incremento de r_f .

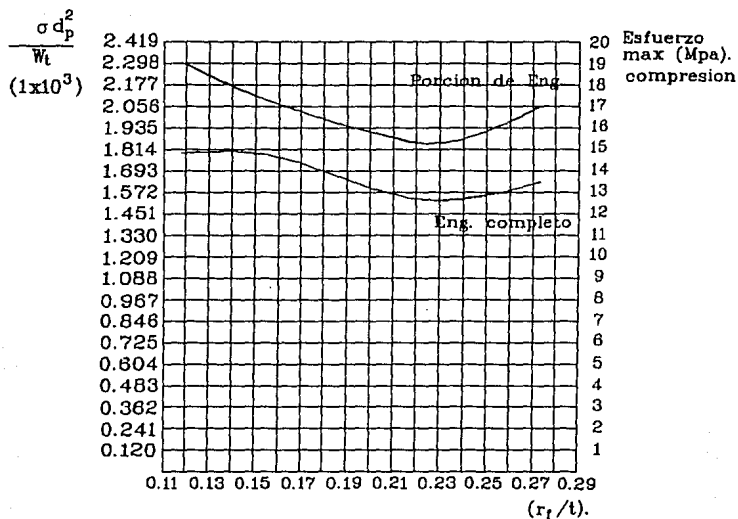


Figura 5.2.1 Esfuerzos de compresión en las raíces de los dientes.

5.2.2 FACTORES DE CONCENTRACION DE ESFUERZOS PARA ENGRANES COMPLETOS. CARGA ESTATICA.

En este subtema se discuten los factores de concentración de esfuerzos, donde los esfuerzos reales son los obtenidos en engranes completos y, los nominales, los analíticos y los obtenidos en porciones de engranes.

Las líneas quebradas representan los factores de concentración de esfuerzos, los cuales se calcularon mediante las expresiones siguientes.

$$K_{t1} = \frac{\sigma_{EC}}{\sigma_t} \quad K_{t2} = \frac{\sigma_{EC}}{\sigma_{EP}}$$

Donde σ_{EC} = Esfuerzos en engranes completos.
 σ_{EP} = Esfuerzos en porciones de engranes.
 σ_t = Esfuerzos proporcionados por la ecuación de la A. G. M. A.

En la gráfica 5.2.2 los factores de concentración de esfuerzos representados por las líneas quebradas K_{t1} y K_{t2} presentan un comportamiento muy parecido; sin embargo, los factores correspondientes a K_{t1} toman valores muy próximos a la unidad, hasta cerca de la relación $r_f/t = 0.16$; a partir de esta, los factores tienden a disminuir hasta la relación $r_f/t = 0.218$, donde toman el valor de 0.78; esta última relación corresponde al llamado radio óptimo y la magnitud de este valor se debe a que los resultados experimentales disminuyen para esta relación, no así los analíticos.

Los factores para las porciones de engranes presentan la misma tendencia que K_{t1} ; sin embargo, para los radios donde se presenta socavamiento los factores tienen la tendencia a incrementarse, esto se debe a que los esfuerzos en los engranes completos tienden a aumentar para estos radios, todo lo contrario a lo que sucede en las porciones de engranes.

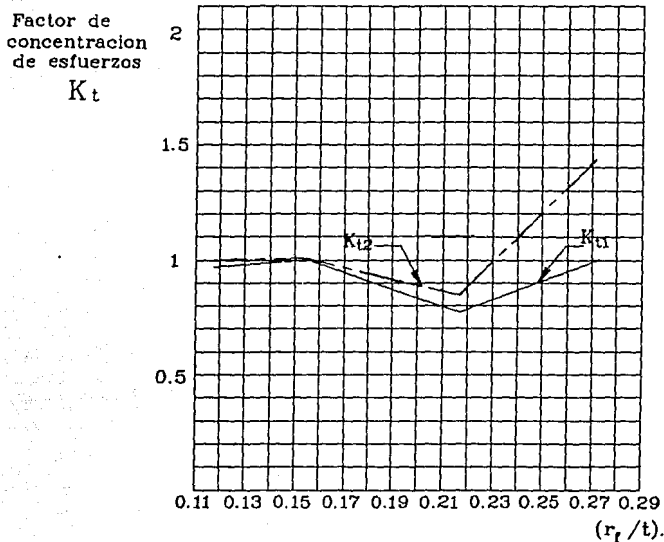


Figura 5.2.2 Factores de concentración de esfuerzos.

5.3. COMPARACION DE RESULTADOS OBTENIDOS EN ENGRANES COMPLETOS. CONDICION DE CARGA DINAMICA.

En la gráfica 5.3 se presentan los resultados experimentales y analíticos para la condición de carga dinámica.

Tomando como puntos de comparación las relaciones de esbeltez usadas en el tema 5.1 se tiene que para $r_f/t = 0.154$ los esfuerzos obtenidos experimentalmente son 20.01 % menores a los calculados a través de la ecuación de la A.G.M.A., sin embargo, para las relaciones de esbeltez $r_f/t = 0.22$ y $r_f/t = 0.273$ los resultados obtenidos a través de la A.G.M.A son 106.3 y 170.02 % mayores que

los obtenidos experimentalmente.

A partir de la gráfica 5.3 se puede concluir que para pequeños radios en las raíces de los dientes, alrededor $r_f = 3$ mm ($r_f/t = 0.118$), los esfuerzos son aproximadamente 8.84 % mayores que los calculados a través de la ecuación de la A.C.M.A., sin embargo, para radios mayores, alrededor de 7 mm ($r_f/t = 0.27$), los esfuerzos experimentales son 64.0 % menores que los calculados a través de la A.C.M.A..

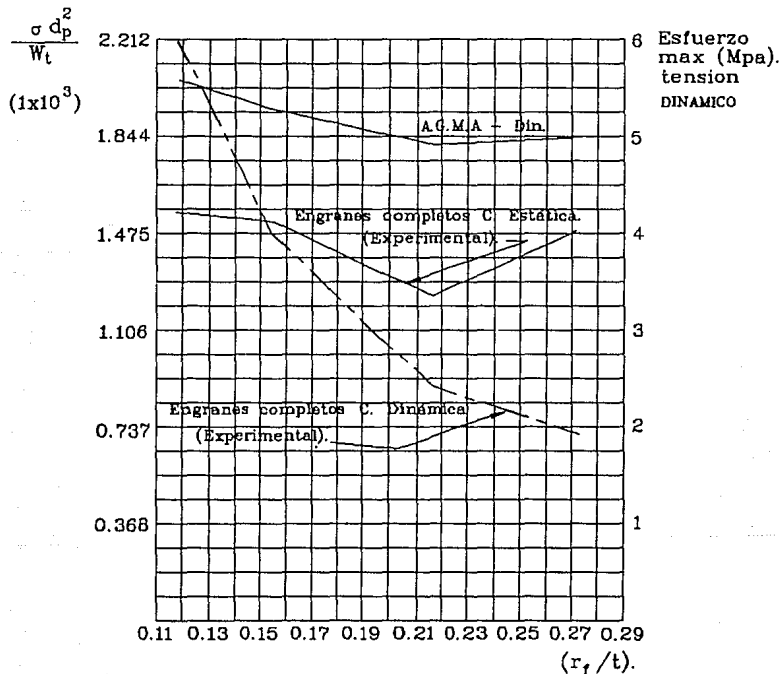


Figura 5.3 Esfuerzos de tensión en las raíces de los dientes.

Si se comparan los esfuerzos experimentales para $r_f/t = 0.118$ con los obtenidos para $r_f/t = 0.273$ se observa que los esfuerzos se reducen en un 70.49 % para esta última relación de esbeltez.

También se presentan los resultados obtenidos experimentalmente para engranes completos bajo un estado estático de carga, lo anterior con el objeto de contrastar el comportamiento de los engranes bajo distintas condiciones de carga.

5.3.1 COMPARACION DE LOS ESFUERZOS DE COMPRESION EN LAS RAICES DE LOS DIENTES DE ENGRANES.

En la gráfica 5.3.1 se presentan los esfuerzos de compresión, obtenidos experimentalmente en engranes completos, para un estado dinámico, y, para un estado estático, de carga. Las comparaciones se hacen con resultados experimentales, debido a que, para este caso, no existen métodos analíticos para la obtención de los esfuerzos de compresión.

Tomando como puntos de comparación las relaciones de esbeltez usadas anteriormente se tiene que: Para $r_f/t = 0.154$, los esfuerzos obtenidos experimentalmente para un estado dinámico de carga son 43.15 % mayores que los obtenidos experimentalmente para la condición de carga estática; sin embargo, para las relaciones de esbeltez $r_f/t = 0.22$ y $r_f/t = 0.273$ los resultados dinámicos son 7.22 y 14.28 % mayores que los obtenidos para una carga estática.

En ambos modelos se presenta la tendencia de disminuir los esfuerzos conforme se incrementa el radio de las raices de los dientes; sin embargo, a partir del llamado radio óptimo las variaciones de los esfuerzos son pequeñas y con una ligera tendencia a incrementarse, tal vez debido a que para estos radios se presenta socavamiento.

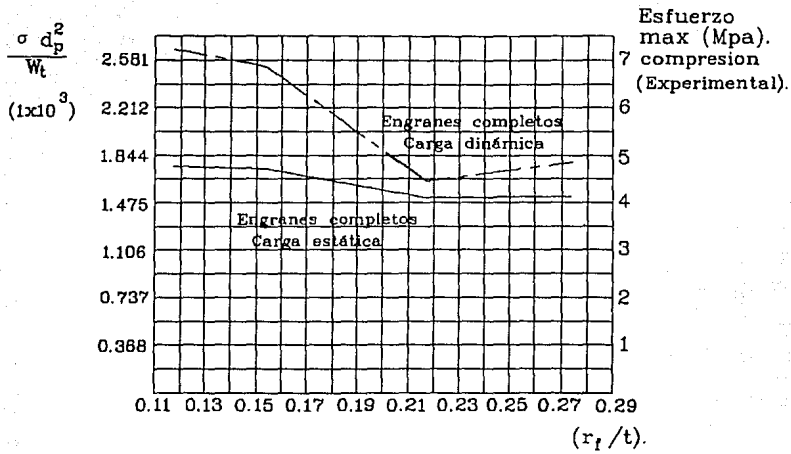


Figura 5.3.1 Esfuerzos de compresión en las raíces de los dientes para un estado de carga estático y dinámico.

CONCLUSIONES.

1.- Los esfuerzos obtenidos experimentalmente en porciones de engranes y engranes completos, para la relación $r_f = 0.3/P_d$, son respectivamente 6.4 % menores y 5.64 % mayores que los obtenidos a través de la acuación de la A.G.M.A., para condiciones de carga estática.

2.- Según los resultados experimentales, obtenidos en engranes completos, bajo condiciones de carga estática existe un radio óptimo para la raíz del diente; para su determinación se propone la relación $r_f = 0.45/P_d$ (la cual debe ser verificada mediante un análisis más extenso), para el cual los esfuerzos de tensión se reducen en un 32.30 % con respecto a los calculados con la relación $r_f = 0.3/P_d$.

3.- Utilizando la ecuación de la A.G.M.A. con la relación $r_f = 0.45/P_d$ se encuentra que los esfuerzos se reducen en 14 % con respecto a $r_f = 0.3/P_d$.

4.- En el experimento dinámico se observa que los esfuerzos determinados experimentalmente se reducen conforme se incrementa el radio de la raíz del diente. Para un intervalo de variación de $r_f = 3$ a $r_f = 7$ mm los esfuerzos se reducen aproximadamente en un 68.85 %; sin embargo debido a lo limitado de éste experimento no puede asegurarse esta tendencia.

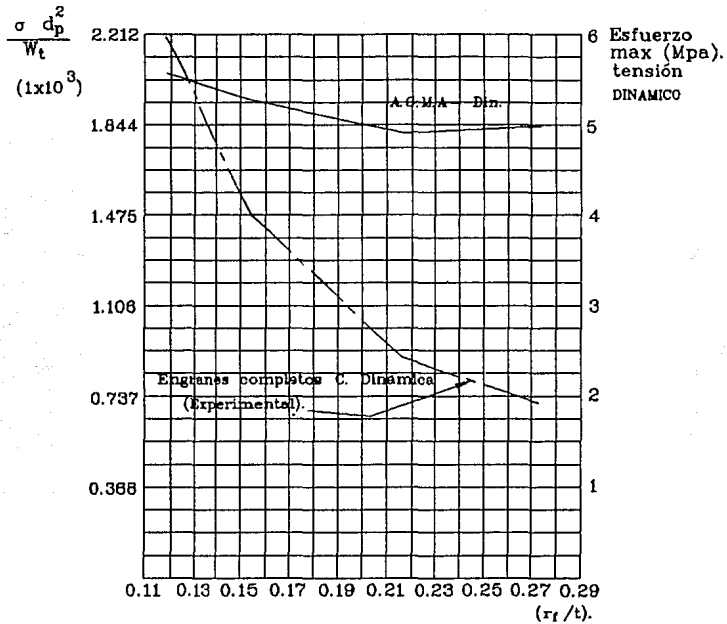
5.- Para los esfuerzos de tensión determinados experimentalmente para un estado dinámico de carga se observa que para $r_f = 3$ mm ($r/t = 0.154$) los esfuerzos son aproximadamente 8.92 % mayores a los calculados por la ecuación de la A.G.M.A., sin embargo para $r_f = 7$ mm ($r/t = 0.273$) son 62.0 % menores.

6.- Los esfuerzos de compresión en las raíces de los dientes de porciones de engranes y engranes completos, para condiciones estáticas de carga varían en forma muy parecida, observándose que los resultados de porciones de engranes son en promedio 22.3 % mayores a los obtenidos a través de engranes completos.

7.- Para los estados estáticos y dinámicos de carga se tiene que los esfuerzos, de compresión determinados experimentalmente en engranes completos, varían dentro de un intervalo donde la máxima diferencia es de 53.68 ($r/t = 0.118$) y la mínima es de 12.8 % ($r/t = 0.273$); donde los esfuerzos determinados dinámicamente son mayores.

8.- Las variaciones de los factores de concentración de esfuerzos con respecto al incremento en la raíz del diente no son tan grandes; sin embargo éstos presentan un punto en particular donde tienen variaciones bruscas, dicho punto corresponde a el radio óptimo.

9.- En la siguiente gráfica (9) se presentan los esfuerzos de tensión obtenidos, para la condición de carga dinámica, en los modelos de engranes completos y los calculados a través de la ecuación de la A.G.M.A.. En ésta se puede apreciar la disminución de esfuerzos como consecuencia del incremento de los radios de las raíces de los dientes.



Gráfica 9. Esfuerzos de tensión en las raíces de los dientes para un estado de carga dinámico.

RECOMENDACIONES.

1.- Se requiere de una investigación más profunda y extensa en cuanto a la concentración de esfuerzos, para el estado de carga dinámico, de tal manera que pueda establecerse un método para la determinación de K_r y K_v .

2.- El experimento dinámico pone de manifiesto la necesidad de estudiar el esfuerzo de contacto que se presenta entre los dientes de los engranes; este fenómeno deteriora rápidamente las superficies y se le conoce comúnmente como picadura. En la película obtenida del experimento, se tiene una cantidad considerable de información de éste fenómeno.

3.- También se hace necesario realizar un estudio acerca de la influencia del cuerpo de los engranes sobre los esfuerzos en la raíz del diente y en el cuñero, así como la relación que existe entre estos parámetros.

4.- En la zona del cuñero se presenta una gran concentración de esfuerzos, por lo que, se sugiere se realice una investigación para determinar la forma y tamaño que deben tener estos elementos.

5.- En la fabricación de engranes debe procurarse que el radio en la raíz del diente sea lo suficientemente grande (sin provocar socavamiento en la raíz) de tal manera que los esfuerzos se distribuyan mejor sobre los bordes de las raíces; éste radio es aproximadamente $r_f = 0.45/P_a$.

6.- Debido a las variaciones tan bruscas de los resultados obtenidos experimentalmente para condiciones de carga dinámica, se hace necesario realizar una serie de experimentos para diferentes tipos de engranes (paso diametral, número de dientes, modificaciones en el adendo y dedendo, etc.) con el objeto de verificar estas variaciones.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Thomas J. Dolan and Edward L. Broghamer, "A photoelastic study of stresses in gear tooth fillets"., University of Illinois, Engineering Experiment Estation., Bulletin series No 335.
- [2] N.A. Rubayi and H.W. Tam., Three-dimensional photoelastic study of stresses in rack gear. Experimental Mechanics may., 1979.
- [3] J.E. Shigley and C.R. Mischke, Diseño en ingeniería mecánica, MacGraw-Hill interamericana de México, S.A. de C.V., (1990).595 - 614, 628 - 692.
- [4] R. Luthé, A. Olivera y F. Schutz., Métodos numéricos, Editorial Limusa, México 1988.
- [5] J.W. Dally and W.F. Riley, Experimental stress analysis, International student edition, McGraw Hill, MacGraw Hill Singapore (1985). 337 - 375, 406 - 500.
- [6] D. Post., Photoelasticity., Experimental Mechanics., May., 1979.
- [7] Hamilton H. Mable, Fred W. Ocvirk, Mecanismos y dinámica de maquinaria, Editorial Limusa, S.A. de C.V., 1985.
- [8] G. Omura., AutoCAD referencia instantanea., Macrobit editores, S.A. de C.V., México (1989).
- [9] AGMA Information sheet, Geometry factors for determining the strength of spur, helical, herringbone and bevel gear teeth., AGMA 226.01, Aug., 1970.
- [10] AGMA Standard, For rating the pitting resistance and bending strength of spur and helical involute gear teeth, AGMA 218.01, Dec. 1982.

- [11] AGMA Standard system, Tooth proportions for coarse-pitch involute spur gears, AGMA 201.02 August 1968, reaffirmed February 1974.
- [12] A.J. Durelli, E.A. Phillips and C.H. Tsao, Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain, McGraw Hill, New York (1958). 81 - 136.
- [13] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of elasticity, MacGraw Hill International Student Edition. 15 - 23.
- [14] A.J. Durelli, Optimización de formas estructurales, Instituto de Ingeniería, U.N.A.M., México.
- [15] H. Schildt., Programación en lenguaje C. Osborne/MacGraw Hill., MacGraw Hill/Interamericana de México S.A. de C.V., (1990).
- [16] H. Schildt., Turbo C, The complete reference, Osborne MacGraw Hill, Berkeley, California ., (1988).
- [17] L. Ferrer, A. Olivares and O. Hernandez., Optimización of plugs for the diversion tunnels of dams. Engineering fracture mechanics vol. 35 Great Britain. (1990).
- [18] W. Winter, M. Hirt, The measurement of actual strains at gear teeth, influence of fillet radius on stresses and tooth strength, Journal of engineering for industry, feb. 1974.

APENDICE A.

A.1 EL PROBLEMA BIDIMENSIONAL.

En el problema bidimensional (plano), se considera un cuerpo, elástico, isotropico y continuo, rodeado por dos planos paralelos y una o más superficies cilíndricas perpendiculares a las fronteras planas. El caso donde la región (D) ocupada por el cuerpo es infinita y simplemente conectada, es mostrada en la figura A.1. Donde S_L denota la frontera lateral, cuya trayectoria en el plano medio ($z = 0$) es la curva plana C; donde R denota la región rodeada por C.

Se tiene que el cuerpo es cargado unicamente por fuerzas superficiales sobre S_L y por fuerzas de cuerpo. Todas las fuerzas externas son paralelas a las fronteras planas y constantes en la dirección z. Las componentes de las fuerzas de superficie se expresan por $X_n(x,y)$ y $Y_n(x,y)$. La notación $X_n(x,y)$ y $Y_n(x,y)$ es usada para expresar que X_n y Y_n son función unicamente de x y y. Las componentes de las fuerzas de cuerpo son:

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$Z = 0$$

donde $\Omega = \Omega(x,y)$.

Las condiciones de frontera son:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{sobre } z = \pm \frac{t}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, x) &= X \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, x) &= Y \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{sobre } S_L.$$

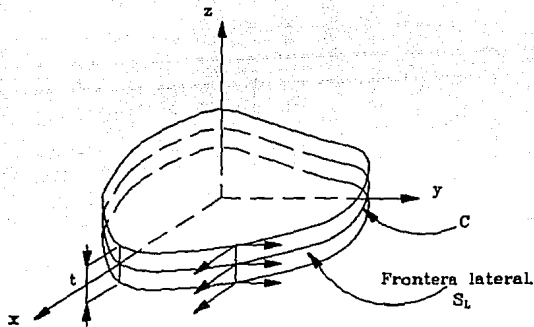


Figura A.1 Cuerpo cilíndrico rodeado por los planos $\pm t/2$ y las superficies laterales S_L .

Este tipo de problema, con valores en la frontera, es llamado el problema plano ó el problema bidimensional. Dentro de éste, caen una gran variedad de problemas prácticos. Para resolver el problema plano existen tres diferentes aproximaciones ó métodos los cuales se describen en la referencia [12].

A.2 ESCALAMIENTO DE ESFUERZOS (MODELO-PROTOTIPO).

Los modelos fotoelásticos tienen constantes elásticas muy diferentes con respecto a los prototipos, usualmente materiales metálicos. Sin embargo las constantes elásticas de los modelos no influyen sobre la distribución de esfuerzos obtenida. Lo anterior puede comprenderse mejor, a través de las ecuaciones de compatibilidad para el caso de esfuerzos planos.

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - (v + 1) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)$$

Esta ecuación es independiente del módulo de elasticidad (E) y demuestra que este no influye sobre la distribución de esfuerzos [5] pp.59,60,61. La influencia de la constante v (módulo de Poisson) depende de la distribución de las fuerzas de cuerpo. Si la distribución de esfuerzos es independiente de las fuerzas de cuerpo ($\partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y = 0$), es también independiente del módulo de Poisson, lo anterior implica que:

$$\begin{aligned} F_x = F_y = 0 & \quad (\text{ausencia de fuerzas de cuerpo}). \\ F_x = C_1, F_y = C_2 & \quad (\text{El campo, de fuerzas de cuerpo, es uniforme}). \\ F_x = C_1 x, F_y = - C_2 y & \quad (\text{Un campo, de fuerzas de cuerpo, lineal en } x \\ & \quad \text{y } y). \end{aligned}$$

Sin embargo existen dos excepciones para las consideraciones anteriores:

- Si el modelo esta multiplemente conectado.
- Si el modelo fotoelástico esta expuesto a deformaciones considerables, bajo la acción de las cargas aplicadas.

El prototipo puede diferir del modelo con respecto a: escala, espesor, carga aplicada y constantes elásticas. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones fotoelásticas, el escalamiento de los esfuerzos del modelo a el prototipo es relativamente sencillo. Para el caso bidimensional los esfuerzos para el prototipo pueden ser calculados a través de:

$$\sigma_p = \sigma_m \frac{P_p h_m l_m}{P_m h_p l_p}$$

y los desplazamientos como:

$$\delta_p = \delta_m \frac{P_p E_m h_m}{P_m E_p h_m}$$

Donde: σ = Esfuerzo para un punto dado.

δ = Desplazamiento para un punto dado.

P = Carga aplicada.

l = Espesor.

Donde los subíndices p y m se refieren a el prototipo y modelo respectivamente.

APENDICE B.

Fotoelásticidad es una técnica experimental para análisis de esfuerzos y deformaciones que es particularmente usada para miembros que tienen geometría irregular, condiciones de carga irregulares ó ambos [6]. El nombre de fotoelasticidad refleja la naturaleza de este método experimental; foto implica el uso de rayos luminosos y técnicas ópticas; y elasticidad implica el estudio de deformaciones y esfuerzos en cuerpos elásticos.

Esta técnica experimental se basa en la propiedad de birrefringencia que tienen algunos cuerpos transparentes. Suponga que se tiene un modelo fotoelástico de cualquier elemento estructural bidimensional; cuando el cuerpo es sometido a un estado de sollicitaciones y un rayo de luz polarizada plana normal a la superficie lo penetra, el rayo de luz incidente es descompuesto en dos componentes que tienen planos de vibración paralelos a las direcciones de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 . Estas ondas viajan a diferentes velocidades dentro del cuerpo y como resultado emergen de él con diferente fase o retardo relativo (Específicamente el retardo relativo es la diferencia entre el número de ciclos de onda experimentado por los dos rayos que viajan dentro del cuerpo). Este desfazamiento es el responsable de que para algunos casos (donde la magnitud de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son iguales) se presente el fenómeno de interferencia destructiva, que se manifiesta mediante los patrones de franja.

Este patrón de franjas se incrementa o decrementa en proporción directa a las fuerzas externas y es el que determina el valor de N y apropiadamente debe ser llamado patrón de isocromáticas. Los patrones de isocromáticas están relacionados con el campo de esfuerzos mediante la ley de esfuerzo óptico

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f\sigma N}{ht}$$

Donde $f\sigma$ = Factor de franja.
N = Orden de franja.
ht = Espesor del material.

De las variables definidas $f\sigma$ es la que puede obtenerse como una constante para cada tipo de material; lo anterior se logra mediante la calibración de éste, N se obtiene de la contabilidad de las franjas en el modelo y t es el espesor.

B 1. CALIBRACION DEL MATERIAL.

Los valores de $f\sigma$ vienen en la literatura y como información adicional en la compra de material fotoelástico; sin embargo siempre es conveniente calibrar el material antes de cada análisis debido a que sufre alteraciones en sus propiedades como consecuencia de la humedad del ambiente, temperatura, variaciones con respecto al tiempo, etc. Para calibrarlo puede utilizarse cualquier cuerpo para el cual la distribución de esfuerzos sea aproximadamente conocida. Preferiblemente el cuerpo debe de ser fácil de maquinar y simple de cargar.

El modelo de calibración es cargado en incrementos, donde el orden de franja y la carga son registrados, a partir de estos datos el valor de franja puede ser determinado. El modelo más fácil de ensillar y fabricar es un disco de calibración, el cual es sometido a compresión diametral. Este modelo presenta diferentes puntos que pueden ser tomados como referencia.

la distribución de esfuerzos a lo largo del diámetro horizontal (donde $y=0$) es dado por

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = \frac{2P}{\pi ht D} \left[\frac{D^2 - 4x^2}{D^2 + 4x^2} \right]^2$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_2 = \frac{2Pc}{\pi ht D} \left[\frac{4D^4}{(D^2 + 4x^2)^2} - 1 \right]$$

Donde D = Diámetro del disco.

x = Distancia a lo largo del diámetro horizontal medido a partir del centro del disco.

ht = Espesor del disco.

Pc = Carga de compresión diametral para el disco de calibración.

La diferencia en los esfuerzos principales $\sigma_1 - \sigma_2$ es

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8Pc}{\pi ht D} \frac{D^4 - 4D^2 x^2}{(D^2 + 4x^2)^2} = \frac{Nf\sigma}{ht}$$

$$f\sigma = \frac{8P_c}{\pi DN} \frac{D^4 - 4D^2x^2}{(D^2 + 4x^2)^2}$$

Esta expresión puede ser utilizada siempre y cuando una sola carga esté aplicada al disco, en este el orden de franja N es determinado como una función de x a lo largo del diámetro horizontal.

Si se utiliza el centro del disco $x = 0$ y $y = 0$ como punto de calibración.

$$f\sigma = \frac{8 P_c}{\pi DN}$$

Debe notarse que el valor de $f\sigma$ es independiente de el espesor del modelo. El valor de P_c/N es determinado por la graficación de los carga P_c contra el orden de franja N, para la cual se determina su pendiente.

B 2. ISOCLINAS.

En general, la dirección de los esfuerzos principales varía continuamente de punto a punto en un modelo fotoelástico; sin embargo existen lugares de puntos para los cuales los esfuerzos principales tienen una dirección común, a lo largo de una curva continua formada por puntos. Estas líneas de puntos se pueden observar a través de un polariscopio como franjas de color oscuro; a las cuales se les llama franjas de isoclinas.

Las isoclinas se pueden determinar para puntos individuales ó para todo el modelo. Lo anterior se logra colocando el modelo cargado en el campo de un polariscopio plano. Por ejemplo para un modelo de esfuerzos planos donde los ejes del polarizador y analizador están cruzados se observarán las isoclinas de 0° (el eje del analizador esta sobre el eje horizontal x), lo que quiere decir que la dirección de uno de los esfuerzos principales de los puntos localizados dentro de esta (s) banda oscura esta orientado a cero grados.

Si se desea conocer la isoclina de 20° solo basta rotar el analizador y el polariscopio 20° , ambos en la misma dirección. Para determinar la dirección de los esfuerzos principales en todo el modelo, las franjas de isoclinas son dibujadas ó fotografiadas para posiciones angulares sucesivas del polarizador y analizador.

En el polariscopio plano se presentan tanto las franjas de isoclinas como las de isocromáticas, la forma de distinguir unas de otras es en cuanto a su color, mediante el empleo de luz blanca. Si se utilizara luz monocromática se observarán los patrones de isoclinas e isocromáticas simplemente como un patrón de franjas oscuras lo cual imposibilita la identificación de las franjas isoclinas. Con el empleo de luz blanca las isoclinas son franjas oscuras mientras que las isocromáticas son franjas que contienen todo el espectro de luz.

B 3. COMPENSACION POR EL METODO DE TARDY.

Cuando valores fraccionarios de franja (N) son requeridos, pueden determinarse valores de hasta 1/2 de N (media franja) empleando patrones de campo de claro y campo oscuro. Sin embargo, en ciertos casos donde grandes aproximaciones son requeridas, y compensaciones de punto por punto son requeridas para establecer el valor fraccional de N, es recomendado el método de compensación de Tardy, ya que no se requiere equipo auxiliar; y dónde, el analizador del polariscopio es utilizado como compensador.

Para utilizar el método de compensación de Tardy es necesario que se tengan identificados los ordenes de franja (N) y la dirección de los esfuerzos principales para todo el modelo.

Para compensar en un punto x cualquiera, los ejes del polarizador y analizador deben estar alineados según las direcciones de los esfuerzos principales σ_1 o σ_2 de tal forma que se tenga un campo oscuro como los demas elementos del polariscopio circular. El analizador entonces es rotado hasta que la extinción de luz ocurra para el punto de interes.

El orden de franja correspondiente se obtiene a partir de la siguiente relación.

$$N = n + \frac{\gamma}{\pi}$$

Donde: n = Orden de franja más cercana al punto.

γ = Angulo que se rotó el analizador.

(Debe rotarse en sentido contrario a la franja n).

La expresión anterior puede combinarse de tal forma de que, por ejemplo: si para un punto del cual queremos conocer su orden de franja, el cual se encuentra entre la franja 2 y 3; en la expresión anterior el signo (+) puede cambiar a (-) si se toma como referencia la franja $n=3$ y el analizador se gira en sentido contrario a esta (hacia $n=2$); se tendrá la siguiente expresión.

$$N = n - \frac{\gamma}{\pi}$$

B 4. FOTOELASTICIDAD DINAMICA.

La fotoelasticidad es un método experimental que se aplica con muy buenos resultados para casos estáticos como para dinámicos. Este último se basa en el registro de imágenes, específicamente del desarrollo de los patrones de franja conforme las condiciones de carga están variando. La grabación de los patrones de franja viene limitada por el tiempo máximo permisible de exposición, la cual a su vez depende del índice de cambio del orden de franja y lo borroso de las franjas que puedan ser tolerados. La primera de las dos últimas observaciones depende de la geometría del modelo, espesor y sensibilidad; la segunda depende de la velocidad de propagación de las ondas elásticas, sobre la magnitud y variación de las cargas.

Para éste tipo de estudio se utiliza por lo general materiales fotoelásticos duros, donde la velocidad de propagación de ondas elásticas es alrededor de 1524 m/s y donde exposiciones de 10^{-6} seg. son usualmente aceptadas.

Dentro de los sistemas de grabación se tienen : técnicas de videocamaras-destellos de luz, fotografía de alta velocidad, camaras ópto-mecánicas de diferentes capacidades y diseños. Una vez grabados los patrones de franja dinámicos, se tiene la ventaja que puede disponerse de las imagenes que se deseen y se trabajan tal como si fuesen estáticas.