

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO CIVIL
PRESENTA, HECTOR SANDOVAL GOMEZ.

TEMA: "EJERCICIOS PARA LA ASIGNATURA
INTRODUCCION AL COMPORTAMIENTO DE MATERIALES.
SEGUNDA PARTE"

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F. 1992.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

C O N T E N I D O

CAPITULO I

INTRODUCCION

CAPITULO II

VISCOSIDAD

2.1 Introducción

2.2 Propiedades físicas de los fluidos

2.2.1 Viscosidad dinámica

2.2.2 Viscosidad cinemática

2.2.3 Factores que influyen en la viscosidad

2.3 Ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos

2.3.1 Modelo analógico

2.3.2 Tensor velocidad de deformación $\left[\dot{\mathbf{E}} \right]$

2.3.3 Vector torbellino

2.3.4 Condiciones relevantes en flujos

2.3.5 Gasto

2.3.6 Ecuación de Navier-Stokes

2.3.7 Flujos incompresibles

2.3.8 Flujos laminares

2.3.9 Flujos no viscosos o turbulentos

2.3.10 Flujos no viscosos permanentes

2.3.11 Flujos viscosos

2.3.12 Flujo de Poiseuille

2.3.13 Influencia de la viscosidad en la ecuación

de bernoulli

2.4 Flujo viscométrico

2.4.1 Números adimensionales útiles en flujos

2.4.2 Flujos Bidimensionales

2.5 Problemas resueltos

2.6 Problemas propuestos

CAPITULO III

VISCOELASTICIDAD.

3.1 Introducción

3.2 Procedimiento general para el tratamiento de cuerpos viscoelásticos

3.2.1 Obtención de Ecuaciones Constitutivas

3.2.1.a Resorte

3.2.1.b Amortiguador

3.2.1.c Cuerpo de Kelvin

3.2.1.d Cuerpo de Maxwell

3.2.1.e Cuerpo sólido de tres constantes

3.2.1.f Fluido de tres constantes

3.2.1.g Cuerpo de Burgers

3.2.1.h Generalidades sobre ecuaciones constitutivas

3.2.2 Solución mediante la Transformada de Laplace

3.2.3 Integrales hereditarias

3.2.4 Comportamiento viscoelástico tridimensional

3.2.5 Principio de correspondencia

3.2.6 Método directo

3.3 Características de los modelos viscoelásticos

3.4 Problemas resueltos.

3.5 Problemas propuestos.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

CAPITULO I

INTRODUCCION

La elaboración de la presente tesis, tiene como objetivo primordial servir de apoyo al alumno, proporcionando - las herramientas teórico-prácticas necesarias en la solución- de problemas que se presentan en los temas de viscosidad y -- viscoelasticidad, que forman parte de la materia "Introduc- - ción al Comportamiento de Materiales", impartida en la Facul- tad de Ingeniería para la carrera de Ingeniero Civil.

Se pretende cumplir dicho objetivo a través de una breve exposición de los elementos teóricos fundamentales, a - continuación se presenta una serie de problemas resueltos en - forma detallada y ordenada, de manera que el alumno logre comprender la parte conceptual con claridad y reafirme sus cono- cimientos en los problemas aplicados de estos temas.

En el capítulo segundo, relativo a la viscosidad, - se estudian las relaciones existentes entre las fuerzas y las presiones que se desarrollan en los fluidos. Se hace una des- cripción de las propiedades físicas de los fluidos y de los - factores que influyen en ellas. Se presentan además las ca- racterísticas del tensor de velocidad de deformación $[\dot{E}]$. Se establece la ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos y se hace también la deducción de la ecuación de Navier-Sto- kes, así como de los casos particulares que de ésta se des- -

prenden, como son: flujos incompresibles, laminares, turbulentos, viscosos, etc. Se estudia también el caso del flujo viscoso además del teorema de Bernoulli, y se mencionan los parámetros adicionales de Reynolds y de Froude. Finalmente se expresan algunas ideas sobre flujo bidimensional y se plantea una serie de ejercicios resueltos y otra de ejercicios propuestos, ambas relativas a los temas vistos en el segundo capítulo.

En el tercer capítulo se describe el comportamiento viscoelástico de los materiales a través de las relaciones esfuerzo-deformación-tiempo. Este comportamiento se describe por medio de arreglos de elementos con respuesta elástica (resorte) y elementos con respuesta viscosa (amortiguador). Se estudian las generalidades del comportamiento viscoelástico y se obtienen las ecuaciones constitutivas de los cuerpos de Kelvin, Maxwell, sólido de tres constantes, fluido de tres constantes y cuerpo de Burgers. Se establecen los postulados fundamentales de las ecuaciones constitutivas y se menciona el procedimiento de solución por medio de la Transformada de Laplace. A continuación se hace referencia de las integrales hereditarias, que ponen de manifiesto que los materiales viscoelásticos tienen memoria. En seguida se estudia el comportamiento viscoelástico tridimensional y el principio de correspondencia que permite la solución del problema, y se plantea el método directo de solución, que permite relacionar las ecuaciones de equilibrio, relaciones cinemáticas y ecuaciones

constitutivas simultáneamente. Finalmente se describe gráficamente el comportamiento de los modelos estudiados y se plantea una serie de ejercicios resueltos y otra de ejercicios propuestos.

En el cuarto capítulo se dan las conclusiones de la presente tesis.

CAPITULO II

VISCOSIDAD

2.1 Introducción.

En este capítulo se estudiarán las relaciones existentes entre las presiones y las fuerzas que se aplican a los fluidos y los campos de velocidad y de torbellinos que se originan en ellos. Estas relaciones dependen del sistema en estudio, pudiendo ser orificios, vertedores, tuberías, canales, etc.

La mecánica del medio continuo es la herramienta -- que nos permite determinar el comportamiento de fenómenos asociados a los esfuerzos que se manifiestan en el interior de sólidos, líquidos y gases, así como las deformaciones o los flujos de dichos materiales, y descubre las relaciones mutuas entre los esfuerzos, por un lado, y las deformaciones o fluencias, por el otro.

Es necesario destacar que los principios de la mecánica del medio continuo se ven apoyados por la determinación experimental de las propiedades físicas de los fluidos, así como del trabajo sobre modelos a escala y prototipos para calibrar la teoría.

2.2 Propiedades físicas de los fluidos.

Desde el punto de vista mecánico, las propiedades -

que sobresalen son la densidad y la viscosidad.

La densidad de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{v}$$

Si tomamos límite cuando el volumen tiende a cero

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} ;$$

Se puede definir la densidad de la sustancia en un punto por:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Las dimensiones de la densidad son:

$$[\rho] = [M^1 L^{-3} T^0] = [FL^{-4} T^2]$$

En lo que a viscosidad se refiere, cabe destacar -- que existen las que se conocen como viscosidad dinámica y -- viscosidad cinemática.

2.2.1 Viscosidad dinámica

Es la propiedad que se manifiesta por la resistencia al desplazamiento relativo entre dos láminas de un fluido, provocado por la acción de un esfuerzo tangencial. Esta resistencia tiene un doble origen: por un lado, las moléculas se atraen entre sí mediante las fuerzas de cohesión que

dificultan el desplazamiento relativo entre ellas, y por otro, la agitación térmica produce una transferencia de cantidad de movimiento entre capas que no se mueven con la misma velocidad. Como resultado de este doble efecto la viscosidad resulta depender de la presión y la temperatura:

$$\mu = \mu(T, P)$$

Considerando la definición anterior se puede establecer una relación entre dicho esfuerzo y la velocidad de deformación del fluido de la siguiente forma:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

donde τ : esfuerzo tangencial $[F L^{-2}]$
 $\dot{\gamma}$: velocidad de deformación angular $[T^{-1}]$
 μ : viscosidad dinámica $[F L^{-2} T]$

de la relación anterior, se observa que al aumentar la viscosidad se requerirá un esfuerzo tangencial mayor para producir una velocidad de deformación dada, o también que para un esfuerzo dado existirá menor velocidad de deformación. Este fenómeno puede observarse al comparar el flujo de un aceite por una tubería con el flujo de agua por la misma, la cual fluye más rápidamente.

Cuando existe una relación lineal entre el esfuerzo tangencial τ y la velocidad de deformación angular $\dot{\gamma}$, de tal manera que la pendiente de esta línea es la viscosidad dinámica

ca μ , se dice que la viscosidad es newtoniana, ver figura - 2.1.

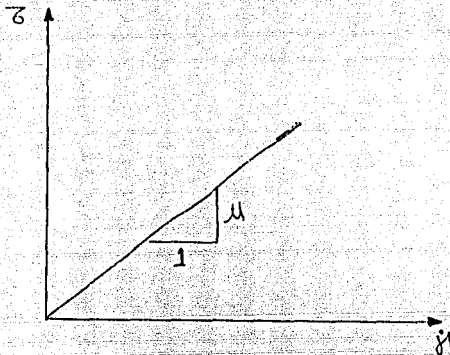


Figura 2.1

Todos los gases y la mayoría de los líquidos sencillos se comportan de acuerdo con esta relación.

En algunos fluidos la relación no es lineal y se dice entonces que tienen viscosidad no newtoniana. Su comportamiento en una gráfica $\dot{\gamma}$ VS τ es el siguiente:

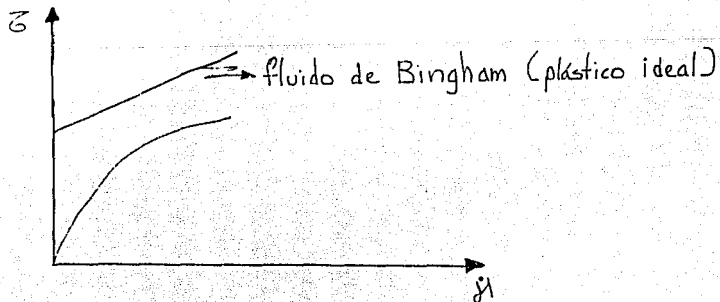


figura 2.2

Este comportamiento lo presentan algunas soluciones polimerizadas, pinturas líquidas con materia sólida en suspensión, algunos derivados del petróleo, el concreto no solidificado, etc. En la gráfica anterior puede observarse que la viscosidad disminuye al crecer la velocidad de deformación, puesto que la pendiente de la curva disminuye al aumentar $\dot{\gamma}$. Lo que ocurre físicamente es que al aumentar la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$; aumenta la separación entre moléculas, por lo tanto existen menores fricciones entre ellas.

En el Sistema Internacional de Unidades, las unidades de la viscosidad dinámica son:

$$\mu = \mu \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \right] = \mu \left[\text{F} \text{ L}^{-2} \text{T} \right]$$

o también

$$\mu = \mu \left[\frac{\text{g} \cdot \text{seg}}{\text{cm}^2} \right]$$

2.2.2 Viscosidad cinemática.

En muchos problemas en los que interviene la viscosidad absoluta (dinámica), frecuentemente aparece la viscosidad dividida por la densidad; este cociente se define como viscosidad cinemática, cuyo nombre proviene de que sus dimensiones son únicamente de tipo cinemático, esto es:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.2)$$

donde μ : viscosidad dinámica $\left[\frac{F L^{-2}}{T} \right]$
 ρ : densidad $\left[M L^{-3} \right]$ o $\left[\frac{F L^{-4}}{T^2} \right]$
 ν : viscosidad cinemática $\left[L^2 T^{-1} \right]$

Las unidades de la viscosidad cinemática en el Sistema Internacional de Unidades son:

$$\nu = \nu \left[\frac{m^2}{seg} \right] = \nu \left[L^2 T^{-1} \right]$$

2.2.3 Factores que influyen en la viscosidad.

Se puede decir al respecto que en los fluidos newtonianos la viscosidad depende del tipo de fluido, de la presión isotrópica actuante y de la temperatura. Para fluidos no newtonianos influye también la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$.

Si se tiene un flujo unidimensional en dirección X

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

donde v_x, y : velocidad en dirección X o y respectivamente.

μ o ν dependen del gradiente de velocidades en la dirección ortogonal al flujo.

En un flujo newtoniano, para un fluido líquido dado, la viscosidad aumenta con la presión isotrópica, en tanto que disminuye al crecer la temperatura, mientras que para un gas - la viscosidad aumenta con la temperatura.

Para el agua la viscosidad cinemática, casi no es afectada por la presión y depende exclusivamente de la temperatura.

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \alpha T + \beta T^2} \quad (2.3)$$

donde: ν_0 : viscosidad cinemática a 0°C (igual a 1.5×10^{-6} - m^2/seg)

T : Temperatura $[\text{°C}]$

α : parámetro adimensional experimental ($\alpha = 0.0337$)

β : parámetro adimensional experimental ($\beta = 0.00022$)

ver figuras anexas 2.3 y 2.4

2.3 Ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos.

Se llaman ecuaciones constitutivas de un medio continuo a aquellas que expresan sus propiedades físicas bajo un punto de vista macroscópico. El nombre se debe a que el comportamiento que describen es el resultado de la constitución interna del material. Desde este punto de vista, para todos los materiales, ya sean sólidos, líquidos o gases, existe un modelo matemático que define su comportamiento de una manera más completa, independientemente del sistema de referencia empleado, o de las cargas o presiones que sobre ellos actúan. El modelo se representa por una relación diferencial entre los tensores esfuerzo y deformación.

VISCOSIDAD DE FLUIDOS

T : temperatura, en grados centígrados
 μ : coeficiente de viscosidad dinámico, en kg s/m^2

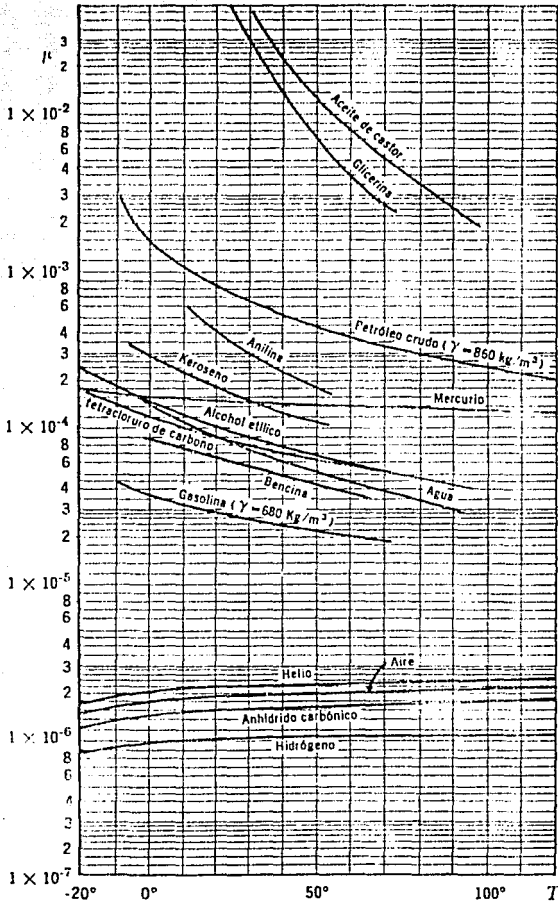


figura 2.3

VISCOSIDAD DE FLUIDOS

T : temperatura, en grados centígrados

μ/ρ : coeficiente de viscosidad cinemática, en m^2/s

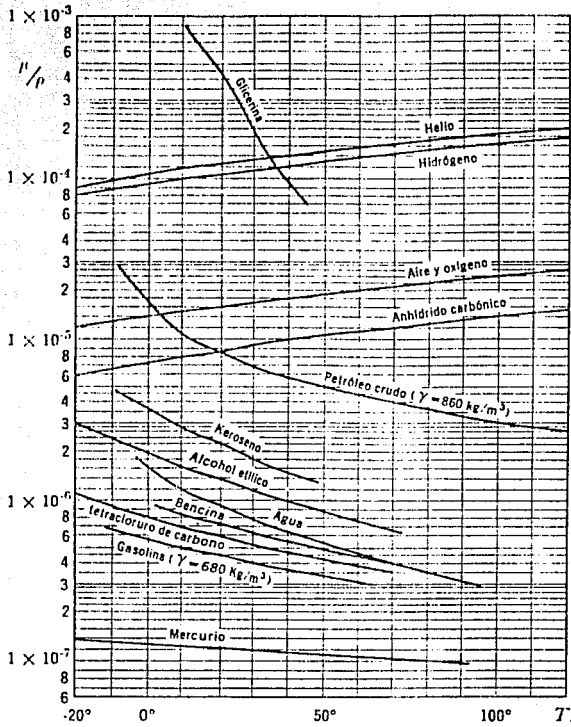


figura 2.4

Para los fluidos newtonianos esta relación es:

$$[T] = [\mu] [\dot{E}] \quad (2.4)$$

donde $[T]$: tensor esfuerzo

$[\mu]$: matriz que depende de la viscosidad del fluido

$[\dot{E}]$: tensor velocidad de deformación

Para fluidos no newtonianos, la relación es más general, por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial t} [T] = \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial t} [\dot{E}] \quad (2.5)$$

donde a_i y b_j son coeficientes; y m y n constantes dadas.

2.3.1 Modelo analógico

En el caso de fluidos newtonianos el modelo analógico está dado por la representación esquemática de un amortiguador, figura 2.5.

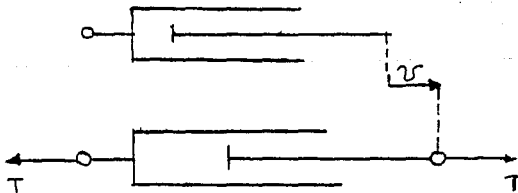


Figura 2.5

Como modelo analógico del medio viscoso suele tomarse un amortiguador móvil dentro de un cilindro lleno de aceite, sin inercia y sin que haya compresión del fluido. Para-

que esta última característica se realice, se supone que el pistón está perforado. La distancia recorrida por el pistón en un segundo representa la velocidad de deformación \mathcal{V} . La curva esfuerzos - deformaciones del cuerpo viscoso es una se mirecta paralela al eje E (deformaciones), en cuanto a que - un esfuerzo T determinado puede provocar cualquier deforma-- ción, con tal de que sea aplicado durante un tiempo sufi- -- cientemente prolongado, ver figura 2.6

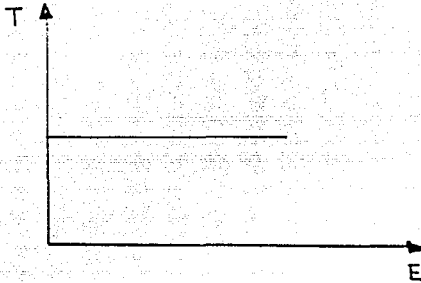


figura 2.6
Curva Esfuerzos- deformaciones del
cuerpo viscoso.

Para una información más completa acerca de las deformaciones, es necesario hacer intervenir a la variable tiempo. Supongamos, por ejemplo, que se aplica súbitamente cierto esfuerzo T_a , que luego se mantiene invariado: la deformación-aumentará linealmente según la ley de Newton, en cuanto su - derivada tiene que permanecer constante, figura 2.7

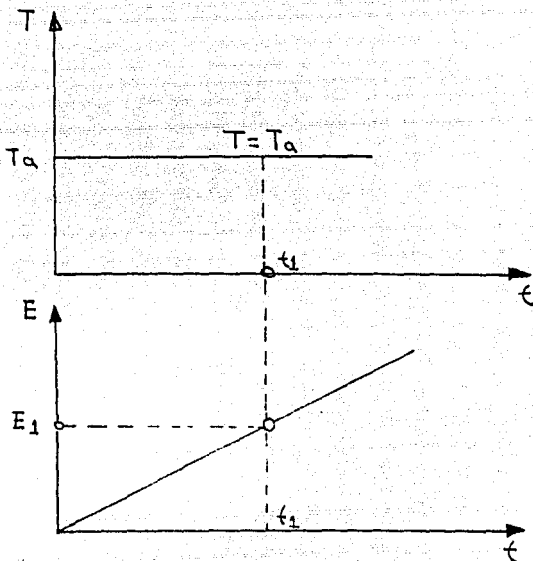


Figura 2.7 El cuerpo viscoso, sometido a un esfuerzo T constante, sufre una deformación E progresiva, que crece linealmente con el tiempo.

La utilización simultánea de las dos gráficas de la figura 2.7 permite determinar la deformación E_1 correspondiente a cierto instante $t = t_1$

Existen otros materiales por cuyo comportamiento pueden considerarse como fluidos, sus modelos analógicos son más complejos, como se verá en el capítulo de viscoelasticidad, y que por ejemplo, tienen el aspecto del modelo de Maxwell, (fig. 2.8), o el que se muestra en la figura 2.9, que corresponde a fluidos no newtonianos.



figura 2.8 Modelo analógico del cuerpo de Maxwell

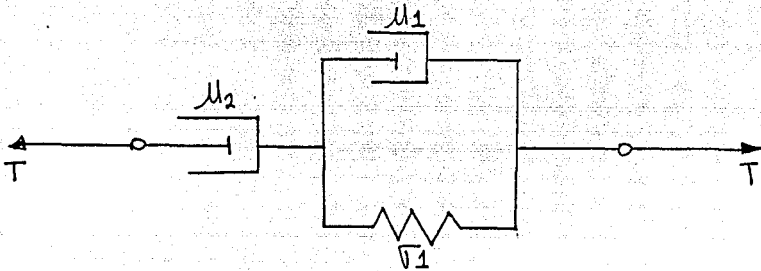


figura 2.9 Fluido de tres parámetros.

2.3.2 Tensor velocidad de deformación $[\dot{\epsilon}]$

Siendo la rapidez de deformación la derivada de la deformación con respecto al tiempo; entonces su relación cinemática es con el campo de velocidades que son las que interesan cuando se trabaja con fluidos. Para la dirección X, - por ejemplo:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial s_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{ds_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.6.a)$$

siendo "s" el desplazamiento y "v" la velocidad.

Considerando que el vector velocidad está dado por-

$$\vec{V} = V_x \vec{j}_x + V_y \vec{j}_y + V_z \vec{j}_z$$

De manera análoga, para las direcciones "y" y "z" - se tiene:

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial V_y}{\partial y} ; \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} ; \quad (2.6.b \text{ y } 2.6.c)$$

y se cumple que:

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right); \quad (2.6.d)$$

$$\dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right); \quad (2.6.e)$$

$$\dot{\epsilon}_{zx} = \dot{\epsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \quad (2.6.f)$$

estas ecuaciones constituyen el conjunto de relaciones cinemáticas entre las componentes del tensor de velocidad de deformación $[\dot{E}]$ y el campo de velocidades.

El tensor $[\dot{E}]$ queda dado por

$$[\dot{E}] = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

El tensor $[\dot{E}]$ tiene las mismas propiedades que el $[T]$ y el $[E]$ de esfuerzos y deformaciones, respectivamente, y por lo tanto se puede conocer la velocidad de deformación en una dirección \vec{n} con la siguiente expresión:

$$\overline{\dot{\epsilon}} = [\dot{\epsilon}] \{ \bar{n} \} \quad (2.8)$$

donde $\bar{n} = li + mj + nk$

De igual forma, el primer invariante está dado por:

$$I_1 = \sum \dot{\epsilon}_l = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \text{div } \bar{v} \quad (2.9)$$

De un análisis del movimiento de cuerpos deformables se encuentra una relación similar a la del desplazamiento y que es:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_0 + \overline{\dot{\epsilon}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \times \overrightarrow{v_0 x n} \quad (2.10)$$

lo cual indica que la velocidad en un punto "p" puede estimarse a partir de las características medidas en un punto 0, ver figura 2.10

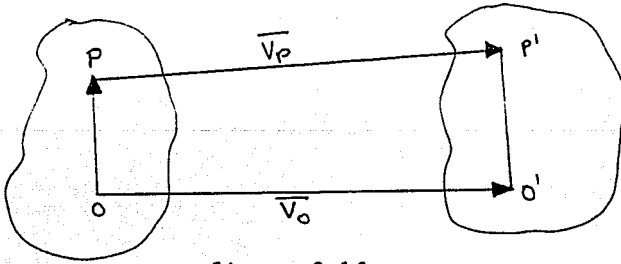


figura 2.10

En la expresión 2.10 se ve que la velocidad del punto p es la suma de una velocidad de traslación de cuerpo rígido v_0 , una velocidad de rotación de cuerpo rígido dada por el tensor término, y una velocidad de deformación dada por -

el vector $\dot{\epsilon}$

2.3.3 En la expresión anterior (2.10) aparece un vector importante en problemas de flujo que suele denominarse vector torbellino, el cual se representa por:

$$\frac{1}{2} \text{ rot } v_0$$

Campos de velocidades y torbellinos.- Con lo visto anteriormente se deduce que en un fluido en movimiento se presentará un campo de velocidades y uno de torbellinos, esto nos indica que existen translaciones y giros en cada una de sus partículas.

El campo de velocidades puede representarse en un instante dado por líneas llamadas de flujo o de corriente. En estas líneas, la tangente en cada punto lleva la dirección de la velocidad, además éstas no se entrecruzan. Si se traza una curva cualquiera por un plano no paralelo a estas líneas y por cada punto de ella se traza una línea de corriente, el conjunto definido por ellas se llama tubo de corriente, el cual se limita mediante dos secciones transversales no paralelas a él y origina un volumen llamado vena fluida.

De igual forma, para el campo de torbellinos pueden definirse líneas, tubo y vena vorticosas.

Los volúmenes que quedan definidos por las venas fluidas y vorticosas suelen utilizarse como volúmenes de con -

trol para el estudio del movimiento de fluidos.

2.3.4. Condiciones relevantes en flujos.

Considerando la ecuación de continuidad dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (2.11)$$

(válida para sistemas de referencia móvil)

o bien:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho v) = 0 \quad (2.12)$$

válida para sistemas fijos

A partir de 2.12 pueden obtenerse los siguientes casos particulares.

a) Para el caso de un flujo compresible permanente, donde el campo de velocidades es sólo función de la posición de las partículas pero no del tiempo, entonces la densidad en cada punto no varía.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ; \text{ por lo que de 2.12 se obtiene}$$
$$\operatorname{div} (\rho v) = 0 \quad (2.13)$$

b) Si se considera ahora que el fluido es incompresible (como se puede suponer para líquidos), entonces la densidad ρ permanece constante, independientemente de las coord

nadas del punto considerado; por lo que de 2.13 se tiene que:

$$\text{div} (\mathbf{v}) = 0 \quad (2.14)$$

que se conoce como condición de incompresibilidad

2.3.5 Gasto.

Si tomamos un tubo de flujo definido entre dos secciones transversales S_1 y S_2 , figura 2.11, como un volumen de control, en el caso de un flujo permanente se tiene que, puesto que se debe cumplir la condición de permanencia 2.13, entonces la integral sobre el volumen de control (V_c):

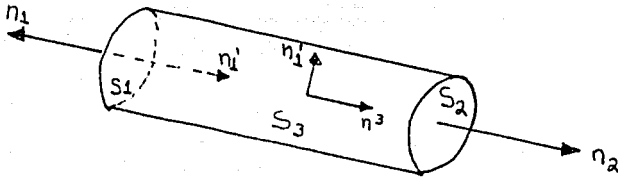


figura 2.11

$$\int_{V_c} \text{div} (\mathbf{v}) \, dV = 0 \quad \text{es nula.} \quad (2.15)$$

Aplicando el teorema de la integral de la divergencia se tiene que:

$$\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (2.16)$$

Tomando en cuenta que la superficie total de tubo -

es la suma de las dos secciones transversales S_1 y S_2 y la superficie S_3 , entonces:

$$\int_{S_1} \rho v \cdot n_1 ds + \int_{S_2} \rho v \cdot n_2 ds + \int_{S_3} \rho v \cdot n_3 ds = 0 \quad (2.17)$$

Dado que la velocidad en el tubo es siempre perpendicular a la normal a la superficie lateral, y ya que no existe flujo a través de ella, el tercer término es nulo. Además, si se considera que el vector \vec{n} es colineal y de sentido contrario a la normal \vec{n} , la cual es positiva, puesto que se dirige hacia afuera del volumen de control, entonces \vec{n}^1 tiene signo negativo, luego entonces se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} - \int_{S_1} \rho v \cdot n_1 ds + \int_{S_2} \rho v \cdot n_2 ds &= 0 \\ \therefore \int_{S_1} \rho v \cdot n_1 ds &= \int_{S_2} \rho v \cdot n_2 ds \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lo cual indica que para cualquier sección, la integral de superficie es la misma, es decir, es constante. A esta integral se le llama gasto Q del tubo de corriente.

$$Q = \int_S \rho v \cdot n ds \quad (2.19)$$

2.3.6 Ecuación de Navier-Stokes.-

A continuación se deducirá la ecuación diferencial fundamental que rige los problemas de mecánica de fluidos. Para ello debe considerarse que el movimiento de los --

fluidos viscosos resulta de esfuerzos de tipo distorsional (τ) , los cuales se relacionan con las velocidades de deformación $(\dot{\epsilon})$ mediante la ley de Newton antes vista, y que es:

$$[\tau_o] = 2 \mu [\dot{\epsilon}_o] \quad (2.20)$$

en donde se relacionan los tensores distorsionantes del esfuerzo y de las velocidades de deformación; a partir de dicha relación, se tiene que las componentes distorsionantes (de ambos tensores) están por tanto relacionadas de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_x - \tau_m &= 2 \mu (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m) \\ \tau_y - \tau_m &= 2 \mu (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_m) \\ \tau_z - \tau_m &= 2 \mu (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_m) \\ \tau_{xy} &= 2 \mu \dot{\epsilon}_{xy} \\ \tau_{xz} &= 2 \mu \dot{\epsilon}_{xz} \\ \tau_{yz} &= 2 \mu \dot{\epsilon}_{yz} \end{aligned} \quad (2.21)$$

siendo $\dot{\epsilon}_m = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z)$

Dado que el esfuerzo normal medio es igual a la presión hidrostática (la cual se considera negativa por ser de compresión) en el punto considerado entonces:

$$\tau_m = -p \quad (2.22)$$

donde P es la presión hidrostática

Además si consideramos que la velocidad de deformación promedio está dada por:

$$\dot{\epsilon}_m = \frac{1}{3} (\text{div } \bar{v}) \quad (2.23)$$

Sustituyendo 2.23 y 2.22 en 2.21 y tomando en cuenta las relaciones cinemáticas entre velocidades de deformación y las componentes del campo de velocidades, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\text{div } \bar{v}) \\ \bar{\sigma}_y &= -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\text{div } \bar{v}) \\ \bar{\sigma}_z &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\text{div } \bar{v}) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \bar{\tau}_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta ahora que las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \rho_{ax} &= \rho f_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{z} \\ \rho_{ay} &= \rho f_y + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} \\ \rho_{az} &= \rho f_z + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.25)$$

en donde $a = (a_x, a_y, a_z)$ corresponde al vector aceleración. Si tomamos la suma de los tres últimos términos del miembro de la derecha de la primera ecuación de equilibrio y se sustituyen los esfuerzos τ_x , τ_{yx} y τ_{zx} por las expresiones dadas en 2.24, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \\ &- \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \bar{v}) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{v_x}{z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \bar{v}) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \bar{v}) \quad (2.26a..) \end{aligned}$$

De manera análoga puede obtenerse para la 2a. y 3a. ecuaciones de equilibrio quedando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y + \\ &+ \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \bar{v}) \quad (2.26b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z + \\ &+ \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \bar{v}) \quad (2.26c) \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora 2.26 a, b y c en las ecuaciones de equilibrio 2.25 se tiene:

$$\rho a_x = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \bar{v})$$

$$\rho a_y = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \bar{v})$$

$$\rho a_z = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \bar{v})$$

Si estas expresiones se suman, agrupándolas en forma vectorial se obtiene:

$$\bar{\rho a} = \bar{\rho f} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad } (\text{div } \bar{v}) \quad (2.27)$$

que es la ecuación fundamental de la mecánica de fluidos (válida para líquidos y gases) conocida con el nombre de ecuación de Navier - Stokes.

Los problemas de mecánica de fluidos se resuelven a partir de la ecuación diferencial de Navier- Stokes 2.27, y tomando en cuenta las condiciones de carga y de frontera (según la geometría del sistema considerado).

Por lo general, la solución matemática rigurosa es muy complicada, por lo cual es necesario hacer algunas simplificaciones a dicha ecuación; a continuación se describen algunos casos particulares de ella, en los que se ha hecho necesario introducir algunas hipótesis simplificatorias.

2.3.7 Flujos incompresibles

Tomando la hipótesis de que el fluido es incompresible, lo que puede suponerse razonablemente válido para el agua, entonces se debe cumplir la condición de incompresibilidad. 2.14, o sea:

$$(\text{div } \bar{v}) = 0$$

por lo que la ecuación de Navier - Stokes queda -- reducida a:

$$\rho \bar{a} = \rho \bar{f} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \bar{v} \quad (2.28)$$

2.3.8 Flujos laminares

Cuando se consideran flujos en donde las aceleraciones y las fuerzas involucradas en ellas son despreciables en comparación con los otros términos que aparecen en la ecuación 2.28, se dice que son flujos laminares y para ellos, dicha ecuación se reduce a:

$$\mu \nabla^2 \bar{v} = \text{grad } P \quad (2.29)$$

que es la ecuación fundamental de los flujos laminares.

2.3.9 Flujos no viscosos o turbulentos

En este caso se considera que los términos debidos a aceleraciones y fuerzas de la ecuación 2.28 son relativamente más importantes que los debidos a la viscosidad, por lo --

tanto se reduce a:

$$\int a = \int f - \text{grad } P \tag{2.30}$$

es decir $a = f - \frac{1}{\rho} \text{ grad } P$ (2.30a)

2.3.10 Flujos no viscosos permanentes.

En este tipo de movimiento se cumple que:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \text{ es nulo, por lo que}$$

$$\bar{v} \times \text{rot } \bar{v} = \text{grad } E \tag{2.31}$$

Tomando en cuenta ahora que los vectores \vec{v} definen líneas de corriente, así como los vectores $\text{rot } \vec{v}$ a líneas vorticosas, se ve que las superficies definidas por familias de líneas de corriente flujo y vorticosas son equipotenciales; o sea que la energía E permanece constante.

Sobre una línea de corriente

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \phi = \text{constante} \tag{2.32}$$

que constituye el teorema de Bernoulli.

Para el caso en que el campo potencial ϕ es el gravitacional se tiene que:

$\phi = gz$, lo que al reemplazar en 2.32 y dividiéndola por la aceleración de la gravedad conduce a:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho} + z = \text{constante} \tag{2.33}$$

$$\gamma = \text{peso volumétrico} = \rho g$$

La expresión 2.33 puede interpretarse de manera sencilla puesto que cada uno de sus términos tiene unidades de longitud, fig. 2.12

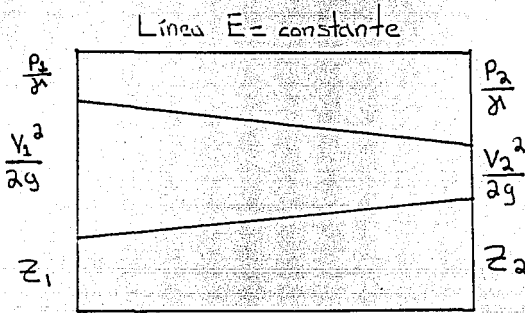


figura 2.12

es decir:

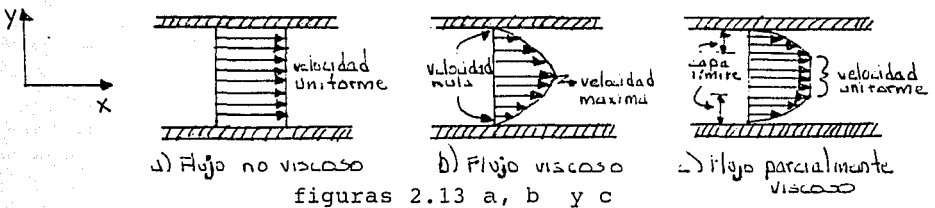
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \quad (2.34)$$

donde el primer término representa la carga de velocidad, el segundo la carga de presión y el tercero la carga de posición. Los índices 1 y 2 nos dicen que los datos deben tomarse en dos puntos diferentes sobre la misma línea de corriente.

En algunos casos será posible generalizar la ecuación 2.34 al caso de un tubo de corriente si se toman los valores promedio de velocidad, presión y posición en cada sección de él.

2.3.11 Flujos viscosos

En este caso se considera que la viscosidad μ no puede despreciarse, aún cuando sea pequeña, experimentalmente se ha encontrado que cuando fluye un líquido a través de una tubería, en una región cercana a las paredes del conducto, éstos no se desplazan libremente sino que se presentan esfuerzos tangenciales debidos a la viscosidad. A esta región se le llama capa límite y en ella el flujo es viscoso. fig. 2.13 a, b, c.



En las figuras anteriores se observan diferentes distribuciones de velocidad en una sección transversal de un tubo, notándose que la viscosidad se manifiesta por la aparición de un gradiente de velocidad que induce esfuerzos tangenciales entre las diferentes láminas del líquido. Estos esfuerzos se rigen de acuerdo con la ley de Newton, es decir, considerando que:

$$\tau = 2 \mu \dot{\epsilon}_{xy}$$

donde

$$2 \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Las figuras 13. a, b y c muestran un flujo unidimensional tal que sólo existe componente de velocidad en dirección "x" (V_x), la cual sólo puede variar según la dirección "y"; en tanto que V_y es nula, por lo que:

$$2 \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

y al reemplazar en la ley de Newton para esfuerzos tangenciales nos resulta:

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.35)$$

En esta ecuación se observa la relación que existe entre los esfuerzos tangenciales τ , la viscosidad dinámica μ , y el gradiente de velocidades ($\partial v_x / \partial y$).

2.3.12 Flujo de Poiseuille

Para este caso se considerará un flujo bidimensional entre dos paredes planas horizontales infinitamente grandes, figura 2.14.

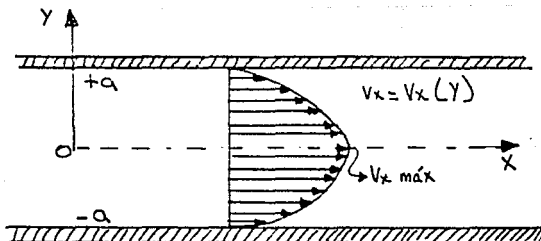


figura 2.14

se tiene además que:

$$V_y = V_z = 0$$

y que V_x sólo depende de Y , por lo tanto:

$$V_x = V_x(y)$$

Partiendo de la ecuación para flujos laminares se tiene:

$$\mu \nabla^2 V = \text{grad } P$$

como $\nabla^2 V = \nabla^2 V_x$ ya que V_y y V_z son nulas y

$$\nabla^2 V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}$$

por ser V_x solo función de y

$$\nabla^2 V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \tag{2.36}$$

considerando además que:

$$\text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial x} i + \frac{\partial P}{\partial y} j + \frac{\partial P}{\partial z} k$$

$$\text{donde } \text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial x} i \tag{2.37} \text{ ya que sólo existen com-}$$

ponentes en la dirección X .

Sustituyendo ahora en la ecuación para flujos laminares se tiene:

$$\mu \nabla^2 V = \text{grad } P$$

$$\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} i$$

por lo que:

$$\mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$$

Integrando ahora con respecto a "y" se obtiene

$$\mu \frac{dV_x}{dy} = \frac{dp}{dx} y + C_1$$

la constante C1 se determina considerando que para y = 0:

$$\frac{dV_x}{dy} = 0 \quad (\text{de la figura 14})$$

$$\therefore C_1 = 0$$

integrando nuevamente con respecto a "y" se tiene

$$\mu V_x = \frac{1}{2} y^2 \frac{dp}{dx} + C_2$$

como para y = 0 ; Vx = Vx máx.

de donde C2 = $\mu V_x \text{ máx}$

$$\text{por tanto } \mu V_x = \frac{1}{2} y^2 \frac{dp}{dx} + \mu V_x \text{ máx.} \quad (2.38)$$

de la figura 2.14 se observa que para

$y = \pm a$; la velocidad en x , $V_x = 0$ (ya que el flujo se --
adhiera a las paredes), entonces, reemplazando estos límites --
en la ecuación 2.38 se tiene:

$$0 = \frac{a^2}{2} \frac{dp}{dx} + \mu V_x \text{ máx}$$

$$\therefore V_x \text{ máx} = - \frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

sustituyendo nuevamente en 2.38 se obtiene

$$V_x = \frac{y^2 - a^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.39)$$

expresión que nos da la ley de variación de V_x en función de --
 Y , y que se ve que es parabólica. En ella debe observarse que
como $Y \leq a$ y dado que V_x siempre sera ≥ 0 , esto obliga a que --
la variación de la presión según la dirección X sea menor que
cero, ésto indica que la presión disminuye en la dirección del
flujo; lo cual es lógico ya que existen pérdidas de energía --
por la presión.

A partir de la ecuación 2.39 se puede estimar la --
velocidad media en un flujo viscoso, procediendo de la siguiente
te manera:

integrando a lo largo de Y la velocidad V_x , se tiene

$$\begin{aligned} V_{xm} &= \frac{1}{a} \int_0^a V_x dy = \frac{1}{2\mu a} \frac{dp}{dx} \int_0^a (y^2 - a^2) dy \\ &= \frac{a^2}{3\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.40) \end{aligned}$$

por lo que se ve que $V_{xm} = \frac{2}{3} V_{xm\acute{a}x}$, (2.41)

es decir, la velocidad promedio es igual a dos tercios de la velocidad máxima.

2.3.13 Influencia de la viscosidad en la ecuación de Bernoulli.

Dado que en un flujo real de líquidos existe casi-siempre una capa límite que produce pérdidas de presión por viscosidad, el esquema de Bernoulli debe representarse considerándolas como pérdidas de carga, como se muestra en la figura 2.15

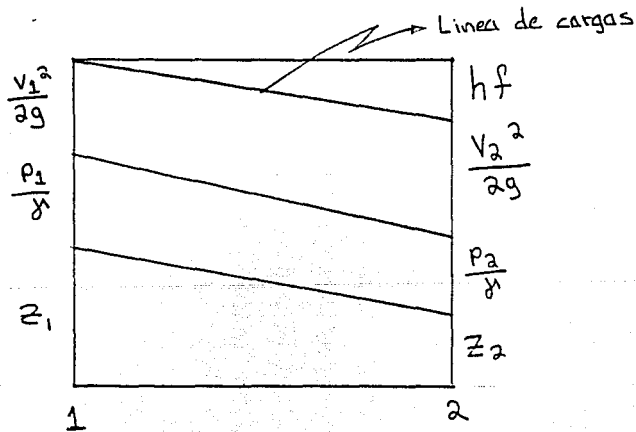


figura 2.15

La ecuación Bernoulli se plantea como

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \quad (2.42).$$

En esta expresión, el término hf en general es -- función de pérdidas por longitud (fricción) de tubería, los -- otros términos son debidos a la viscosidad; pero además tam-- bién es función de cambios de sección o de dirección de tube-- ría, las cuales comunmente se determinan en forma experimen-- tal.

2.4 Flujo Viscométrico.

Los fluidos cuya viscosidad es no newtoniana, pre-- sentan flujos en los cuales el gasto que pasa a través de un -- conducto no es proporcional al gradiente de presión en la di-- rección del tubo, como ocurre para el flujo de Poisseuille -- ya que en éste, de acuerdo con la ecuación 2.40, la velocidad medida es:

$$v_m = \frac{a^2}{3\mu} \frac{dp}{dx}$$

y como el gasto es:

$$Q = AV_m$$

donde A: área de un rectángulo de espesor unitario en senti-- do perpendicular al flujo.

$$\therefore A = 2 a t = 2a \quad (\text{ya que } t = 1)$$

$$\therefore Q = - \frac{2a^3}{3\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.43)$$

En esta última expresión se ve que el gasto es -- proporcional a dp/dx .

La figura siguiente muestra las variaciones del gas to con el gradiente de presión, para un fluido newtoniano y pa ra unc no newtoniano.

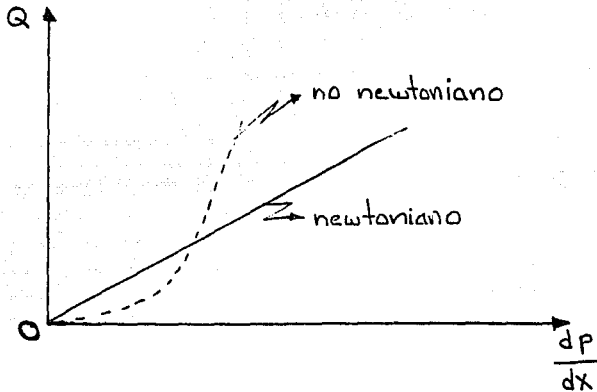


Figura 2.16

Para los fluidos no newtonianos, la ecuación constitutiva que los representa puede tener la forma siguiente:

$$[T] = -P [I] + \mu_1 [\dot{E}] = \mu_2 [\dot{E}] + \mu_3 [\dot{E}] \quad (2.44)$$

donde P es la presión isotrópica.

Para ilustrar el flujo viscométrico, consideremos un problema semejante al de Poiseuille, donde el flujo se -- realiza entre dos placas horizontales infinitas, figura 2.17

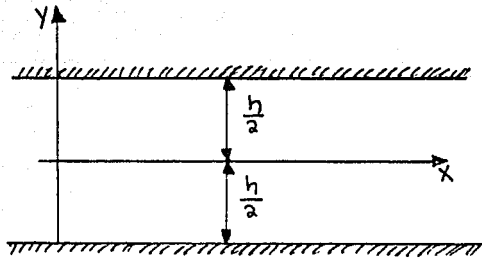


figura 2.17

Las condiciones para este caso son:

$$V_x = V_x(y)$$

$$V_y = V_z = 0$$

además

$$V_x = 0 \text{ para } y = \pm \frac{h}{2}$$

Procediendo de manera análoga al método utilizado para el flujo de Poiseuille se llega a la siguiente expresión:

$$Q = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \left(- \frac{f y}{\mu} \right) dx = \frac{f x^3}{\mu 3} \Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{f h^3}{12 \mu} \quad (2.45)$$

donde

$$Q = \text{Gasto}$$

$$f = - \frac{d \tau_z}{dy}$$

h; variación a partir del eje "y"

2.4.1 Números adimensionales útiles en flujos

A partir de análisis dimensionales empleados en la simulación de flujos en modelos a escala de prototipos, se obtienen parámetros adimensionales con los cuales puede juzgarse si tales flujos son laminares o turbulentos, a partir de la relación existente entre la viscosidad, la acción de la gravedad y las fuerzas de inercia.

La relación entre la viscosidad μ y la inercia (debida a las aceleraciones), hace que un flujo sea laminar o turbulento. Cuando las fuerzas producidas por la viscosidad ejercen mayor influencia en la relación, el flujo es laminar, mientras que si las fuerzas debidas a las aceleraciones dominan la relación, el flujo es turbulento.

Esta relación es el número de Reynolds, y es uno de los parámetros adimensionales mencionados, está dado por la siguiente expresión:

$$R = \frac{V L_r}{\nu} \quad (2.46)$$

donde

V = velocidad del flujo (media)

L = longitud característica, puede considerarse por ejemplo en un canal como la relación entre el área y el perímetro mojado.

ν = viscosidad cinemática del agua.

Las fronteras de los flujos se establecen de la

siguiente manera:

Si $R < 500$ el flujo es laminar

Si $R > 2500$ el flujo es turbulento

Si $500 < R < 2500$ el flujo no está bien definido.

El siguiente parámetro adimensional está dado por la relación entre las fuerzas de inercia y la acción de la gravedad, este parámetro se denomina número de Froude, el cual se puede definir como:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gd}} \quad (2.47)$$

donde:

V = velocidad del flujo

g = aceleración de la gravedad

d = longitud característica, que es igual, por ejemplo al área de un canal, dividido entre el ancho de la superficie libre del agua.

Los valores característicos de "F" definen los siguientes casos:

Si $F = 1 \Rightarrow V = \sqrt{gd}$ se dice que el régimen es crítico

Si $F < 1 \Rightarrow V < \sqrt{gd}$ se dice que el régimen es tranquilo

Si $F > 1 \Rightarrow V > \sqrt{gd}$ se dice que el régimen es rápido

2.4.2 Flujos bidimensionales.

Las consideraciones hechas hasta ahora acerca de los flujos de líquidos, se han desarrollado estableciendo que se sigue una trayectoria fija, ya que se encausa en conductos como tubos o canales; sin embargo, cuando la trayectoria no está bien definida, y ésta puede ocurrir en un espacio bidimensional o tridimensional, sobre el cual existe un número prácticamente infinito de posibles trayectorias, es necesario estudiar cuáles serán las trayectorias más probables entre ellas. El estudio de estos casos se realiza apoyándose en la función de corriente, cuya representación es el símbolo Ψ , y en la cual se cumple que:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad y \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.48)$$

es decir, que el campo vectorial de velocidades se deduce si se conoce el campo escalar definido por la función de corriente o de flujo.

Considerando un flujo de fluidos incomprensibles, se debe cumplir que:

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

o sea

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.49)$$

ya que $\vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$

Si se considera ahora que:

$$\text{rot } \vec{v} = \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{k} \quad (2.50)$$

sustituyendo la ecuación 2.48 en 2.50 se tiene:

$$\text{rot } \vec{v} = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \vec{k} = - (\nabla^2 \Psi) \vec{k} \quad (2.51)$$

dado que en flujos laminares

$$\nabla^2 (\text{rot } \vec{v}) = 0$$

entonces:

$$- \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = 0 \quad (2.52)$$

Para que la condición anterior se cumpla, Ψ debe ser una función biarmónica.

Para flujos irrotacionales $\text{rot } \vec{v} = 0$

de donde

$$\nabla^2 (\Psi) = 0 \quad , \quad (2.53)$$

en este caso Ψ basta que sea armónica.

La ecuación 2.53 es conocida con el nombre de ecuación de Laplace. En consecuencia, la solución del problema bi dimensional laminar e irrotacional se obtiene a partir de la solución de la ecuación de Laplace junto con las condiciones-

de frontera y de geometría del caso de que se trate. La solución nos dará el campo escalar Ψ y a partir de las relaciones 2.48 se obtendrá el campo de velocidades buscado, con lo que se tendrán también las trayectorias buscadas.

La aplicación directa de este estudio, por ejemplo en la ingeniería de suelos se usa para determinar las características del flujo de agua a través de presas de tierra, tablaestacas, etc; como se muestra en las figuras 2.18 a y b

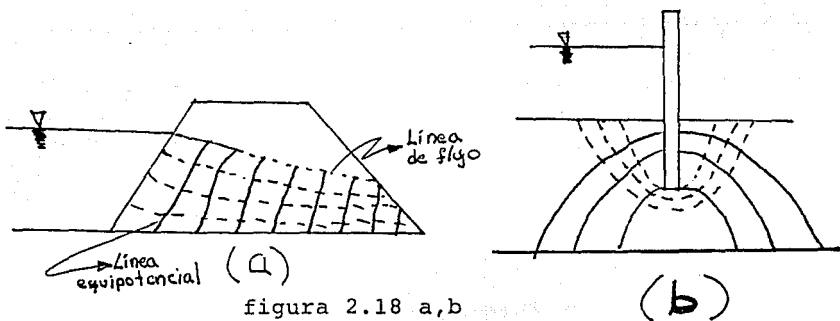


figura 2.18 a,b

Propiedades de la función de corriente.

Como en una línea de corriente

$$\vec{v} \times d\vec{v} = 0 \quad (\text{de la figura 2.19})$$

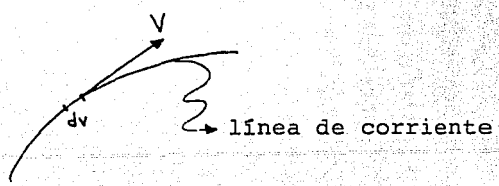


figura 2.19

ya que la velocidad, \vec{V} , es tangente a la línea de corriente, -
entonces:

$$V_y dx + V_x dy = 0 \quad (2.54)$$

(que es el producto vectorial)

Si sustituimos las relaciones (2.48) en 2.54) se
obtiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

lo cual implica que Ψ es constante a lo largo de una línea de corriente.

Gasto entre dos líneas de corriente.

Si se considera $\Psi = a$ y $\Psi = b$, como se muestra en la figura 2.20

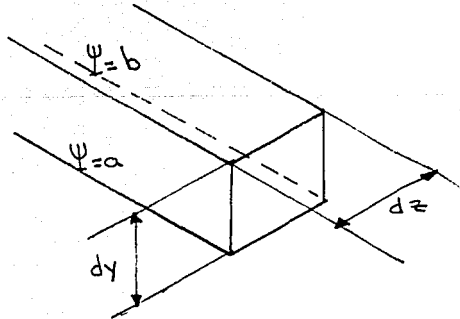


Figura 2.20

el gasto dq que cruza un elemento de área (dy -
 dz) en una sección normal al tubo es:

$$dq = V_x dy dz = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy dz$$

integrando:

$$q = \int_{y=a}^y=b \frac{\partial \Psi}{\partial y} \int_0^1 dz dy = \left[\Psi \right]_a^b = b-a$$

$$q = b-a \quad (2.55)$$

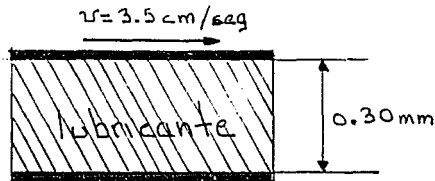
Lo cual significa que el gasto que recorre un tubo de flujo es igual a la diferencia entre los valores de la función Ψ en las fronteras del tubo. Se observa también que entre más cerca estén las líneas de corriente, en un tubo cuyo gasto está dado, la velocidad en esa parte aumentará, ya que el gasto es el mismo pero el área es menor, puesto que se considera espesor unitario constante en dirección perpendicular al plano bidimensional.

2.5 Problemas resueltos.

Problema 2.5.1

Entre una placa fija y una móvil sobrepuesta hay un espesor de 0.30 mm. de lubricante. La placa móvil tiene dimensiones de 8 x 10 cm, y resbala con una velocidad de 3.5 cm/seg cuando se le empuja con una fuerza de 15 g. Determinar la viscosidad dinámica del lubricante.

Solución:



De la ecuación 2.1 se tiene

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \mu &= \text{viscosidad dinámica} \\ \tau &= \text{esfuerzo tangencial} \\ \dot{\gamma} &= \text{velocidad de deformación} \\ &\quad \text{angular.} \end{aligned}$$

Las unidades para cada propiedad son:

$$\tau = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\text{m/s}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{seg}} = \frac{r}{h}$$

La conversión de unidades es la siguiente

$$0.30 \text{ mm} = \frac{0.30}{1000} \text{ m} = 0.0003 \text{ m}$$

$$3.5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = \frac{3.5}{100} \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 0.035 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

El área de la placa móvil es

$$A = 8 \times 10 = 80 \text{ cm}^2 = 0.008 \text{ m}^2$$

sustituyendo

$$\zeta = \frac{F}{A} = \frac{0.015 \text{ kg}}{0.008 \text{ m}^2} = 1.875 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{v}{h} = \frac{0.035 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{0.0003 \text{ m}} = 116.667 \frac{1}{\text{seg}}$$

finalmente

$$\mu = \frac{1.875 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}}{116.667 \frac{1}{\text{seg}}} = 0.0161 \frac{\text{kg} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2}$$

Problema 2.5.2

Determinar en que porcentaje disminuye la fuerza necesaria para mover los pistones de un motor de automóvil -- cuando, a causa del calentamiento, la viscosidad del lubricante que está entre el pistón y el cilindro baja de 1.85×10^{-5} a $21 \times 10^{-5} \frac{\text{kgs}}{\text{m}^2}$.

Solución

De acuerdo con la ecuación 2.1 que establece

$\tau = \mu \dot{\gamma}$ puede plantearse lo siguiente

$$\tau = \frac{F_1}{A_1} ; \dot{\gamma} = \frac{v}{h} :$$

donde

F_1 = Fuerza que se requiere para mover el pistón

A_1 = Area del pistón en contacto con el lubricante

v = velocidad con que el pistón se desplaza

h = espesor del lubricante

por lo que:

$$\frac{F_1}{A_1} = \mu_1 \frac{v_1}{h_1}$$

por otra parte

$$\frac{F_2}{A_2} = \mu_2 \frac{v_2}{h_2}$$

de las características geométricas del problema se tiene que

$$A_1 = A_2 ; \quad \nu_1 = \nu_2 ; \quad h_1 = h_2$$

ya que éstas permanecen constantes.

Al aumentar la temperatura, la viscosidad del lubricante disminuye y la velocidad de deformación angular se mantiene constante por lo que:

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = \frac{F_1}{\mu_1} = \frac{A_1}{\mu_1}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{F_2}{\mu_2} = \frac{A_2}{\mu_2}$$

haciendo $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2$ se tiene:

$$\frac{F_1}{\mu_1} = \frac{F_2}{\mu_2} = \frac{A_1}{\mu_1} = \frac{A_2}{\mu_2}$$

dado que $A_1 = A_2$; se tiene:

$$\frac{F_1}{\mu_1} = \frac{F_2}{\mu_2} ; \quad \text{por lo que } F_2 = \frac{F_1 \mu_2}{\mu_1}$$

sustituyendo valores

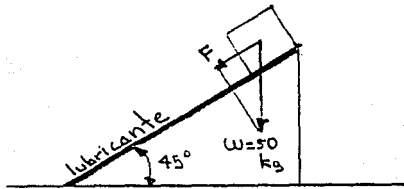
$$F_2 = F_1 \frac{21 \times 10^{-5}}{185 \times 10^{-5}} = 0.1135 F_1$$

Entonces la fuerza F_1 se reduce en $100 - 11.35 = \underline{88.65\%}$

Problema 2.5.3

Un cuerpo pesa 50 Kg y posee una base plana de --
2100 cm² de área, se apoya a un plano lubricado con aceite, -
inclinado 45° con la horizontal. Si el cuerpo desciende con-
velocidad de 92 cm/seg y la viscosidad del aceite es de - --
0.008 Kg s/m² ¿cuál es el espesor de la película lubricante?.

Solución



Partiendo de la ecuación 2.1 se tiene:

$$\tau = \mu \delta$$

o también

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{h}$$

donde:

F = fuerza tangente

A = área

μ = viscosidad dinámica

v = velocidad de desplazamiento

h = espesor de la película lubricante.

de la ecuación anterior

$$h = \frac{A \mu \mathcal{V}}{F}$$

de los datos

$$\begin{aligned} A &= 2100 \text{ cm}^2 = 0.21 \text{ m}^2 \\ &= 0.008 \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} = 92 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 0.92 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$F = 50 \text{ kg} \cos 45^\circ = 50 (0.7071) = 35.355$$

sustituyendo

$$h = \frac{0.21 (0.008) (0.92)}{35.355} = \underline{0.0000437 \text{ m}}$$

Análisis dimensional

$$m = \frac{\text{m}^2 \left(\frac{\text{kg s}}{\text{m}^2} \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{seg}} \right)}{\text{kg}} = \text{m}$$

$$\underline{h = 0.00437 \text{ cm}}$$

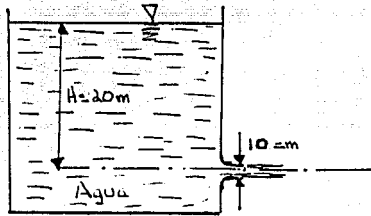
Problema 2.5.4

Con base en el teorema de Bernoulli:

a) Determinar la velocidad de salida por la boquilla del recipiente de la figura mostrada.

b) Calcular el caudal que sale por la boquilla.

Despreciar pérdidas.



Solución.

a) El chorro es cilíndrico con presión atmosférica alrededor de su periferia. La presión a lo largo de su línea central es prácticamente la presión atmosférica. La ecuación de Bernoulli se aplicará entre un punto de la superficie libre del agua y un punto de aguas abajo de la boquilla quedando como sigue:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

Tomando como origen de presiones la presión atmosférica local, $P_1 = P_2 = 0$; con el origen de cotas pasando por el punto 2 (eje del orificio), los valores de Z_1 y Z_2 son

$Z_1 = H = 20$ m y $Z_2 = 0$. La velocidad en la superficie libre del depósito es prácticamente cero; de aquí que sustituyendo valores se tiene

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$

de aquí

$$v_2^2 = 2 g H ; \quad v_2 = \sqrt{2 g H}$$

$$v_2 = \sqrt{2 (9.81) (20)} = 19.81 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

análisis dimensional

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} (\text{m})} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La expresión obtenida para calcular la velocidad de salida en el orificio establece que ésta es igual a la velocidad de caída libre desde la superficie del depósito. Esto se conoce como teorema de Torricelli.

b) La ecuación del gasto establece que

$$Q = AV ; \quad \text{donde:} \quad Q = \text{gasto en la sección}$$
$$A = \text{área de la sección}$$

Sustituyendo valores:

$$Q = \frac{(0.1)^2}{4} (19.81) = 0.1556 \frac{m^3}{seg}$$

Problema 2.5.5

Demostrar que el flujo, cuyo campo de velocidades - se indica en seguida, es irrotacional.

$$x = (2x + y + z)t$$

$$y = (x - 2y + z)t$$

$$z = (x + y)t$$

Solución:

Para que el flujo sea irrotacional se debe cumplir- que

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 ,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = t \quad ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = t$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = t \quad ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = t$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = t \quad ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = t$$

Sustituyendo valores:

$$\text{rot } v = (t - t) i + (t - t) j + (t - t) k = 0$$

$$\text{rot } V = 0$$

lo cual demuestra que el flujo es irrotacional.

Problema 2.5.6

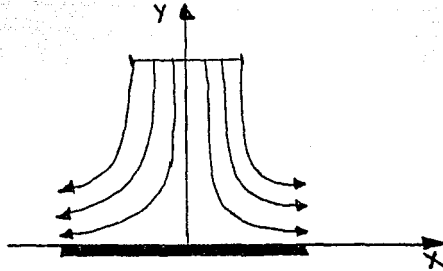
La figura mostrada representa un flujo permanente - bidimensional, simétrico respecto del eje "y", que choca -- contra una placa horizontal contenida en el plano x - z, cuyo campo de velocidades está definido por las componentes

$$U_x = 3x$$

$$U_y = -3y$$

$$U_z = 0$$

Determinar la ecuación de las líneas de corriente.



Solución.

De acuerdo con la ecuación diferencial de la línea- de corriente definida anteriormente, la cual establece que:

$$\frac{dx}{U_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{U_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{U_z(x,y,z,t)} ; y$$

sustituyendo los valores de las componentes se obtiene:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-3y}$$

La integración de esta igualdad determinará la ecuación de las líneas de corriente.

$$\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3} \ln x + C_1$$

$$\int \frac{dy}{-3y} = -\frac{1}{3} \ln y + C_2$$

sustituyendo

$$\frac{1}{3} \ln x + C_1 = -\frac{1}{3} \ln y + C_2$$

$$\frac{1}{3} \ln x = -\frac{1}{3} \ln y + C_2 - C_1 \quad ; \quad C_2 - C_1 = C_3$$

multiplicando por 3 ambos miembros

$$\ln x = -\ln y + 3C_3 \quad , \quad 3C_3 = C$$

finalmente

$$\ln x = -\ln y + C$$

o bien

$$\underline{xy = C}$$

ecuación que corresponde a una familia de hipérbolas rectangulares, asintóticas a los ejes "x" y "y".

Problema 2.5.7

Determinar la función de corriente del flujo bidimensional del problema anterior, verificar si éste es rotacional. Calcular también el gasto por unidad de ancho que fluye entre las líneas de corriente que pasan por los puntos A(1,1) y B(2,2)

Solución.

Para la función de corriente, las componentes vectoriales son:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

En el problema anterior $v_x = 3x$; $v_y = - 3y$ y

$$v_z = 0$$

Sustituyendo:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 3x$$

$$v_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - 3y$$

La ecuación diferencial de la función de corriente es:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

Integrando los dos sumandos de la ecuación por separado se obtiene:

$$\Psi = 3xy + f(x) + c$$

$$\Psi = 3xy + f(y) + c$$

se observa que $f(x) = f(y) = 0$; por lo que:

$$\Psi = 3xy + C$$

que es la ecuación de la familia de líneas de corriente que corresponde a una familia de hipérbolas rectangulares, $xy = \text{constante}$, por otra parte:

$$[\text{rot } \mathbf{V}]_z = 0, \text{ por lo que el flujo es irrotacional.}$$

La línea de corriente que pasa por el punto A es:

$$\Psi_A = 3(1)(1) = 3 + C, \text{ y por el punto B es}$$

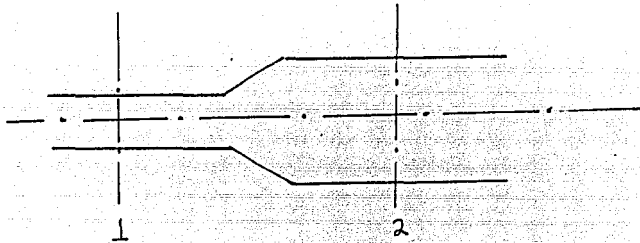
$\Psi_B = 3(2)(2) = 12 + C$; entonces el gasto entre las dos líneas de corriente por unidad de ancho es:

$$q = \Psi_B - \Psi_A = 12 + C - (3+C) = 9$$

Problema 2.5.8

Una tubería horizontal lleva un gasto de agua de - 30 l/seg. Si la tubería inicia en un tramo de 10 cm de diámetro y luego se amplía a 16 cm, y en el primer tramo la presión es de 12 kg/cm², calcular la presión en el segundo tramo. Despréciense las pérdidas de energía.

solución:



Las secciones en los tramos son:

$$A_1 = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \times 16^2}{4} = 201.062 \text{ cm}^2$$

Las velocidades en cada sección son por lo tanto:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{30 \times 1000 \text{ cm}^3/\text{seg}}{78.54 \text{ cm}^2} = 381.97 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{30000 \text{ cm}^3/\text{seg}}{201.062 \text{ cm}^2} = 149.208 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

Por otra parte

$$\gamma_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.001 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

además $z_1 = z_2$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli se tiene

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + hf$$

como $z_1 = z_2$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

despejando

$$P_2 = \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \right) \gamma$$

$$P_2 = \left(\frac{12}{0.001} + \frac{(381.97)^2}{2(981)} - \frac{(149.208)^2}{2(981)} \right) 0.001$$

$$P_2 = 12.063 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

El análisis dimensional es:

$$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = \left[\frac{\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}}{\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}} + \frac{\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}}{\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}} - \frac{\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}}{\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}} \right] \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = \left[\frac{\text{kg cm}^3}{\text{kg cm}^2} + \frac{-\text{cm}^2 \text{seg}^2}{\text{cm seg}^2} - \frac{\text{cm}^2 \text{seg}^2}{\text{seg}^2 \text{cm}} \right] \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

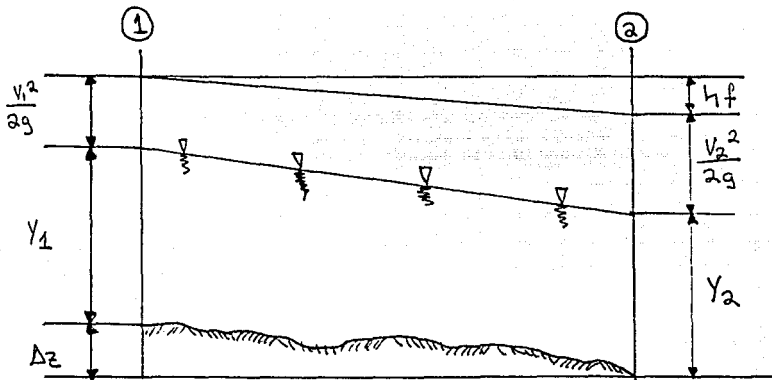
$$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = \left[\text{cm} + \text{cm} - \text{cm} \right] \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

finalmente:

$$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Problema 2.5.9

En la figura se muestran las condiciones generales del flujo en un río entre dos secciones del mismo. Conociendo las áreas A_1 y A_2 , la pérdida de energía h_f y el desnivel Δz de la superficie libre del agua, encontrar una ecuación para calcular el gasto.



Solución:

De la ecuación de la energía entre 1 y 2 se obtiene.

$$\Delta z + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_f ,$$

partiendo ahora de que $Q_1 = Q_2 = v_1 A_1 = v_2 A_2$

de aquí que $v_1 = \frac{v_2 A_2}{A_1}$; por lo que

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2 A_2^2}{A_1^2 2g} ;$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación de la energía se obtiene:

$$\Delta z + y_1 + \frac{v_2^2 A_2^2}{A_1^2 2g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + hf$$

haciendo $\Delta y = \Delta z + y_1 - y_2$ y sustituyendo, se tiene:

$$\Delta y + \frac{v_2^2 A_2^2}{A_1^2 2g} = \frac{v_2^2}{2g} + hf$$

de aquí que:

$$\frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1 \right) = hf - \Delta y$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{(hf - \Delta y) 2g}{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}}$$

dado que $Q_2 = v_2 A_2 = Q$

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{(hf - \Delta y) 2g}{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}}$$

A través de esta ecuación sería posible determinar en forma aproximada el gasto de una gran avenida en un río - si se puede obtener Δy a partir de las huellas dejadas por el agua en las orillas.

Problema 2.5.10

La componente de la velocidad v_x en un flujo incompresible bidimensional, está dada por $v_x = Ax^4 + By^2$.

a) Encontrar la ecuación para la componente v_y de la velocidad, suponiendo que en $y = 0$, $v_y = 0$ para cualquier valor de x .

b) Verificar si el flujo es rotacional o irrotacional.

Solución:

a)

$$v_x = Ax^4 + By^2$$

integrando resulta

$$\Psi = Ax^4y + \frac{1}{3}By^3 + f(x) + C_1$$

Considerando que para flujo bidimensional $v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

$$v_y = 4Ax^3y + \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

para $y = 0$, $v_y = 0$ se tiene que:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 ; \text{ por lo que } f(x) \text{ es una constante;}$$

entonces $v_y = \underline{4Ax^3y}$

b) La única componente del rotacional es $[\text{rot } \mathbf{V}]_z$

$$\text{rot } \mathbf{V}_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 12 A x^2 y - 2 B y \neq 0$$

por lo que se concluye que el flujo es rotacional.

2.6 Problemas propuestos

Problema 2.6.1

Aparte de que en $\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \right]$, el coeficiente de viscosidad μ puede medirse en poises, siendo esta unidad igual a $1 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{seg}} \right]$, hallar el factor de conversión de una unidad a otra.

Problema 2.6.2

¿Cuál es el número de Reynolds para un caudal de 566 l/seg, de aceite en una tubería de 152 mm. de diámetro, cuando $\mu = 10.5 \times 10^{-3} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \right]$? ¿El flujo es laminar o turbulento?. La densidad relativa es 0.8

Problema 2.6.3

La componente de la velocidad v_x en un flujo incompresible bidimensional, está dada por $v_x = A x^2 + B y$.

a) Encontrar la ecuación para la componente v_y de la velocidad, suponiendo que en $y = 0$, $v_y = 0$ para cualquier valor de x .

b) Verificar si el flujo es rotacional o irrotacional.

Problema 2.6.4

Un estrangulamiento de tipo venturi interpuesto -

en una tubería vertical que conduce agua (ver la figura aneja), reduce el diámetro de la tubería de 30 a 15 cm. Si la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2 es de 32 cm de mercurio, calcular el gasto que recorre el tubo. Supóngase que el flujo es incompresible y desprecie las pérdidas por fricción.

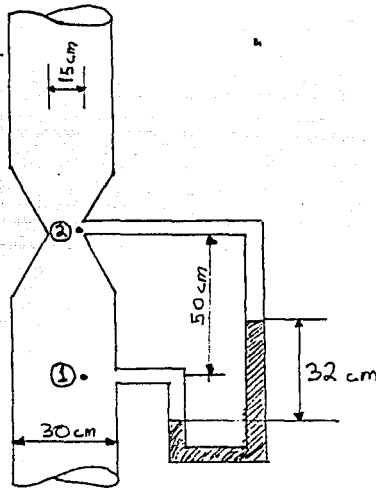


Fig. Problema 2.6.4

Problema 2.6.5

Determinar, para los siguientes campos de flujo incompresible, aquellos que satisfagan la ecuación de continuidad e indicar cuales son rotacionales y cuáles irrotacionales:

$$a) V_x = (x - 2y) t \quad ; \quad V_y = - (2x + y) t$$

$$b) V_x = x^2 \cos y \quad ; \quad V_y = - 2x \operatorname{sen} y$$

$$c) V_x = \ln x + y \quad ; \quad V_y = xy - \frac{y}{x}$$

CAPITULO III

VISCOELASTICIDAD

3.1 Introducción.

El análisis viscoelástico del comportamiento mecánico de los materiales se realiza mediante el estudio de las relaciones esfuerzo - deformación - tiempo. El conocimiento de estas relaciones es de vital importancia en el diseño de obras construídas con materiales cuyas propiedades cambian con el tiempo y, en las cuales, la variación de la magnitud de las cargas ejerce una influencia considerable. El comportamiento de los materiales viscoelásticos difiere de aquellos que tienen un comportamiento idealmente elástico o viscoso, ya que son materiales que se comportan con una combinación de ambos efectos.

Los materiales viscoelásticos presentan un comportamiento complejo, especialmente cuando algunas de sus moléculas pasan del estado sólido al fluido, fenómeno que además depende del tiempo y cuya distribución de zonas plastificadas es aleatoria. Debe añadirse que, en este comportamiento, la variación temporal y espacial de las cargas influye predominantemente.

Los análisis viscoelásticos deben aplicarse cuando la evolución de las deformaciones se aleja del comportamiento

to elástico, tal es el caso de los suelos.

De igual manera, son útiles cuando a los materiales con comportamiento elástico se les hace trabajar a esfuerzos superiores al rango elástico.

El uso de modelos viscoelásticos supone que cada molécula de material es en sí misma un sistema como el caracterizado por el modelo analógico correspondiente al caso viscoelástico empleado, el cual por lo tanto se presentará en todas las moléculas del sistema.

Estrictamente, estos sistemas no pueden representar el comportamiento de todas las moléculas con el mismo modelo; sin embargo, el sistema en su totalidad se comporta como si la hipótesis mencionada fuera correcta.

Cabe resaltar que los estudios viscoelásticos permiten considerar la variación con el tiempo de los estados de esfuerzos y deformaciones en obras civiles (como es el caso del comportamiento del suelo).

Los materiales viscoelásticos pueden agruparse en dos grandes conjuntos, los sólidos y los fluidos, los cuales a su vez pueden tener o no deformación elástica instantánea. Cada conjunto puede estudiarse con base en la representación de un cuerpo (modelo reológico), como el que a continuación se menciona.

- a) El cuerpo de Hooke que representa un sólido con respuesta inmediata.
- b) El cuerpo de Kelvin que representa un sólido sin respuesta inmediata.
- c) El cuerpo de Maxwell que representa un fluido -- con respuesta inmediata.
- d) El cuerpo de Newton que representa un fluido sin respuesta inmediata.

Posteriormente se mencionaran otros cuerpos, como -- el de Burgers, sólido de tres constantes, etc.

A continuación se detalla un procedimiento general para el tratamiento de los diferentes cuerpos viscoelásticos.

3.2 Procedimiento general para el tratamiento de cuerpos -- viscoelásticos.

Los pasos más relevantes son los siguientes:

- 3.2.1) Obtención de las ecuaciones constitutivas.
- 3.2.2) Utilización de la Transformada de Laplace para obtener la respuesta en las etapas de Creep y Relajación.
- 3.2.3) Empleo de integrales hereditarias (de convolución) -- para obtener la respuesta ante cualquier ley de carga.

3.2.4) Extensión del problema viscoelástico a tres dimensiones, tomando en cuenta el comportamiento en dilatación y en distorsión.

3.3.5) Aplicación del principio de correspondencia para la solución de problemas de valores en la frontera.

3.3.6) Empleo del método directo de solución del sistema de ecuaciones de equilibrio, relaciones cinemáticas y -- ecuaciones constitutivas.

3.2.1) Obtención de Ecuaciones Constitutivas.- Se logra partiendo de dos unidades fundamentales de los modelos analógicos que son el resorte y el amortiguador y de la forma en que se encuentren conectados o interconectados, ya sea en serie o paralelo.

3.2.1.a) Para el resorte (cuerpo de Hooke o elástico) la ecuación constitutiva es:

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{o también} \quad \sigma = \phi_0 \epsilon \quad (3.1)$$

donde:

$$\phi_0 = 2 E \quad ; \quad E = \text{Módulo elástico del resorte}$$

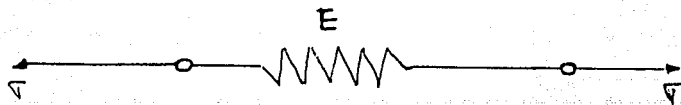


Figura 3.1

3.2.1b) Para el amortiguador (cuerpo de Newton o viscoso) -
la ecuación constitutiva es:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad \text{o sea} \quad \dot{\gamma} = \eta^{-1} \tau \quad (3.2)$$

donde:

$\eta^{-1} = 2\mu$; μ = coeficiente de viscosidad del amor--
tiguador

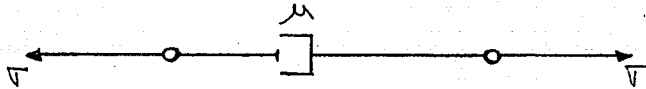


figura 3.2

Cuando la conexión de las unidades es en serie, la
relación energética es:

$$\dot{\epsilon}_T = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2$$

Lo que representa que la velocidad de deformación -
total es igual a la suma de las velocidades de deformación -
de cada unidad.

Para el caso de conexión en paralelo la relación --
energética es:

$$\dot{\gamma}_T = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2$$

Estas relaciones energéticas pueden servir para en-

contrar ecuaciones constitutivas de diferentes combinaciones de resortes y amortiguadores.

3.2.1.c) cuerpo de kelvin

Este cuerpo intenta representar materiales simultáneamente elásticos y viscosos, por ejemplo, ciertos tipos de vidrio. Su modelo analógico consiste en un resorte y un - - amortiguador dispuestos en paralelo (figura 3.3). Si se aplica al sistema un esfuerzo de tensión σ_T , éste actúa al mismo tiempo sobre el resorte y el amortiguador, de tal manera que en todo momento la deformación del resorte y la del amortiguador resultan iguales entre sí. En cuanto a los esfuerzos, el resorte tomará una parte σ_1 del esfuerzo total y el amortiguador tomará una parte σ_2 , de tal forma que el esfuerzo total σ_T será.

$$\sigma_T = \sigma_1 + \sigma_2$$

donde

$$\sigma_1 = q_0 \epsilon \quad (\text{de 3.1})$$

$$\text{y } \sigma_2 = q_1 \dot{\epsilon} \quad (\text{de 3.2})$$

$\therefore \sigma_T = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$ (3.3) que es la ecuación constitutiva de este cuerpo.

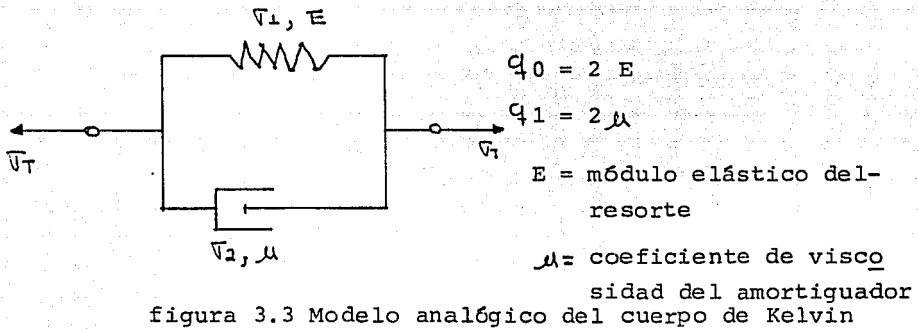


figura 3.3 Modelo analógico del cuerpo de Kelvin

En el cuerpo de kelvin no hay plastificación. Si después de cargado el material se descarga, el resorte siempre obligará al amortiguador a volver a su posición inicial.

Se trata, pues, de un cuerpo que, sin ser elástico, comparte con el cuerpo elástico la propiedad de recuperar, - ai suprimirse la carga, su forma primitiva.

3.2.1.d) Cuerpo de Maxwell.

Este cuerpo representa un material que, contrariamente al cuerpo de Kelvin responde de inmediato de manera elástica, posteriormente, si la carga se mantiene, tiende a comportarse de manera viscosa. Entre las sustancias reales con estas características podemos mencionar al asfalto: el asfalto duro reacciona elásticamente a cargas reducidas y no prolongadas, por ejemplo, al impacto de una piedra pequeña; pero una piedra grande apoyada en su superficie, se va sumergiendo lentamente hasta llegar al fondo.

El modelo analógico del cuerpo de Maxwell lo consti-
tuyen un resorte y un amortiguador dispuestos en serie (figu-
ra 3.4). Si se aplica al conjunto una tensión, las dos compo-
nentes soportan este esfuerzo, pero se deforman de manera --
desigual, resultando la deformación total:

$$E = E_1 + E_2$$

de igual forma, la suma de velocidades de deformación

$$\dot{\epsilon}_T = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2$$

donde: $\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{V}}{q_0}$ (de 3.1)

y $\dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{V}}{q_1}$ (de 3.2)

$$\therefore \dot{\epsilon} = \frac{\dot{V}}{q_0} + \frac{\dot{V}}{q_1}$$

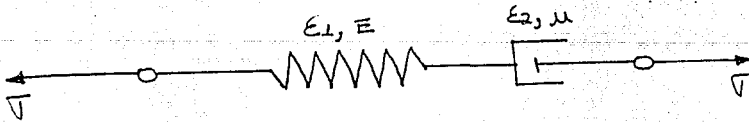


figura 3.4

multiplicando por q_0

$$q_0 \dot{\epsilon} = \dot{V} + P_1 \dot{V} \quad (3.4)$$

$$P_1 = \frac{q_0}{q_1}$$

que es la ecuación constitutiva correspondiente.

La solución de la ecuación (3.4) se obtiene integrando, por lo tanto:

$$\varepsilon_m(t) = \frac{\sqrt{\quad}}{q_0} + \frac{p_1 \sqrt{\quad}}{q_0} t + A$$

o sea:

$$\varepsilon_m(t) = C \sqrt{\quad} + B \sqrt{\quad} + A \quad (3.4')$$

A, B y C son constantes

$$B = \frac{p_1}{q_0} ; \quad C = \frac{1}{q_0} ; \quad q_0 = 2E$$
$$q_1 = 2\mu$$

3.2.1.e) Cuerpo sólido de tres constantes.

En este caso se combinan un cuerpo de kelvin y un resorte en serie. (figura 3.5)

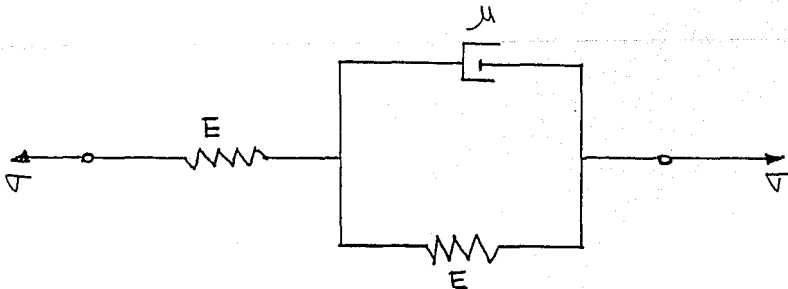


figura 3.5 Modelo analógico del cuerpo sólido de tres constantes.

Haciendo uso de las relaciones energéticas se tiene:

$$\dot{E} = \dot{E}_K + E_R \quad (\text{los subíndices K y R indican Kelvin y resorte, respectivamente})$$

$$\dot{E}_K = \frac{\dot{V}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} E_K \quad ; \quad \text{de (3.3)}$$

y

$$E_R = \frac{\dot{V}_0}{q_0} \quad ; \quad \text{de (3.1)}$$

de donde:

$$\dot{E} = \frac{\dot{V}}{1} - \frac{q_0}{q_1} E_K + \frac{\dot{V}_0}{q_0} \quad ; \quad q_0 = 2E; \\ q_1 = 2\mu$$

como

$$E_K = E - E_R = E - \frac{\dot{V}}{q_0}$$

entonces

$$\dot{E} = \frac{\dot{V}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \left(E - \frac{\dot{V}}{q_0} \right) + \frac{\dot{V}}{q_0}$$

$$\dot{E} = \frac{2\dot{V}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} E + \frac{\dot{V}}{q_0}$$

agrupando términos semejantes, y multiplicando por $q_1/2$ se tiene:

$$\dot{V} + p_1 \dot{V} = q_0 \left(E + \frac{\dot{V}}{2} \right) \quad (3.5)$$

donde:

$$p_1'' = \frac{q_1}{2q_0} ; \quad q_0'' = \frac{q_0}{2} ; \quad q_1'' = \frac{q_1}{2} ;$$

que es la ecuación constitutiva.

3.2.1.f) Fluido de tres constantes.

En este caso se combinan un cuerpo de kelvin y un amortiguador en serie (figura 3.6)

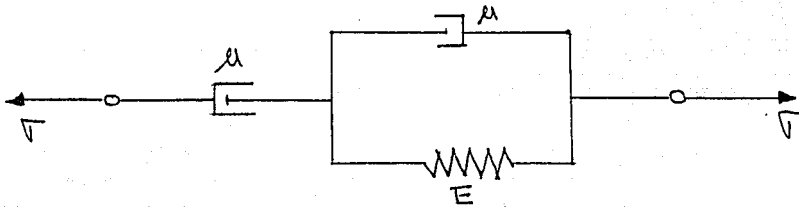


figura 3.6 Modelo analógico del fluido de 3 constantes.

Haciendo uso de las relaciones energéticas se obtiene:

$$\dot{E} = \dot{E}_k + \dot{E}_A \quad (\text{el subíndice A indica amortiguador})$$

de la ecuación 3.3 se deduce que:

$$\dot{E}_k = \frac{\sqrt{}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \epsilon_k$$

y de 3.2

$$\dot{E}_A = \frac{\sqrt{}}{q_1'}$$

$$\therefore \dot{\epsilon} = \frac{\sqrt{v}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \epsilon_k + \frac{\sqrt{v}}{q_1} \quad (3.6)$$

como: $\epsilon_k = \epsilon - \epsilon_A$ y $\epsilon_A = \frac{\sqrt{v}}{q_1} t + A$

entonces:

$$\epsilon_k = \epsilon - \frac{\sqrt{v}}{q_1} t + A$$

$$\therefore \dot{\epsilon} = \frac{\sqrt{v}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \left(\epsilon - \frac{\sqrt{v}}{q_1} t + A \right) + \frac{\sqrt{v}}{q_1'}$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sqrt{v}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \left(\dot{\epsilon} - \frac{\sqrt{v}}{q_1} \right) + \frac{\sqrt{v}}{q_1'}$$

multiplicando ahora por q_1^2/q_0 y agrupando términos se obtiene:

$$\sqrt{v} + p_1' \dot{v} = q_1' \dot{\epsilon} + q_2' \epsilon \quad (3.6')$$

donde

$$p_1' = \frac{q_1^2}{q_1' q_0} + \frac{q_1}{q_0} ; \quad q_2' = \frac{q_1^2}{q_0}$$

La ecuación 3.6' es la ecuación constitutiva del fluido de tres constantes.

3.2.1.g) Cuerpo de Burgers.

En este caso se tiene un cuerpo de Kelvin y uno de Maxwell en serie (fig. 3.7). Si aplicamos la suma de veloci

dades de deformación obtenemos:

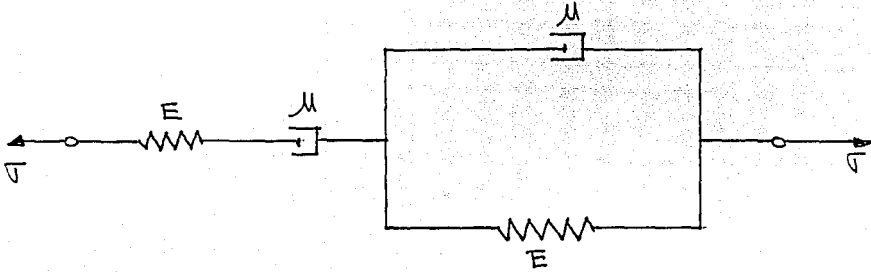


figura 3.7 Modelo analógico del cuerpo de Burgers

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_k + \dot{\epsilon}_M \quad ; \quad k \text{ representa al resorte y } M \text{ al--} \\ \text{cuerpo de Maxwell}$$

de 3.3 se obtiene que:

$$\dot{\epsilon}_k = \frac{\dot{\sigma}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} \epsilon_k$$

y de 3.4

$$\dot{\epsilon}_M = \frac{\dot{\sigma}}{q_0} + \frac{q_0}{q_1} \sigma$$

como: $\epsilon_k = \epsilon - \epsilon_M$

donde:

$$\epsilon_M = C \sigma + B \sigma t + A \quad (\text{de 3.4'})$$

luego:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\gamma}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} (\epsilon - (C\dot{\gamma} + B\dot{\gamma}t + A)) + \frac{\ddot{\gamma}}{q_0} + \frac{P_1 \dot{\gamma}}{q_0}$$

derivando con respecto al tiempo

$$\ddot{\epsilon} = \frac{\ddot{\gamma}}{q_1} - \frac{q_0}{q_1} (\dot{\epsilon} - (C\ddot{\gamma} + B\dot{\gamma})) + \frac{\dddot{\gamma}}{q_0} + \frac{P_1 \ddot{\gamma}}{q_0}$$

Multiplicando por $\frac{q_1}{B q_0}$ y agrupando términos se obtiene:

$$\dot{\gamma} + P_1' \ddot{\gamma} + P_2' \dddot{\gamma} = q_1' \dot{\epsilon} + q_2' \ddot{\epsilon} \quad (3.7)$$

(P_1' , P_2' , q_1' , q_2' , son constantes)

La ecuación 3.7 es la ecuación constitutiva del - - cuerpo de Burgers.

3.2.1.h) Generalidades sobre ecuaciones constitutivas

De las expresiones obtenidas para cada caso, puede-observarse que las ecuaciones constitutivas tienen la forma-general siguiente:

$$\phi_1 \dot{\gamma} = \phi_2 \epsilon \quad (3.8)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son operadores con las siguientes característi-
cas:

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{\partial \epsilon}{\partial t^i}$$

y

$$\sigma_2 = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \frac{\partial \epsilon}{\partial t^i}$$

en las cuales se realiza un ajuste de constantes, y por ser expresiones lineales, basta dividir por una constante para obtener el coeficiente p_0 igual a uno.

Dichas ecuaciones tienen la siguiente forma general.

$$\begin{aligned} \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots + p_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} &= q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} \\ &+ \dots + q_m \frac{\partial^m \epsilon}{\partial t^m} \end{aligned} \quad (3.8')$$

Las ecuaciones constitutivas deben cumplir con tres postulados fundamentales que son:

- a) Independientes de la velocidad y aceleración del sistema de referencia considerado.
- b) Independientes de las coordenadas del punto considerado.
- c) Independientes de las condiciones de carga.

3.2.2 Solución mediante la transformada de Laplace.

De las expresiones 3.8 y 3.8' se observa que si se conoce la ley de variación de esfuerzos $\sigma(t)$ se puede ob

tener la de deformaciones $\epsilon(t)$, al resolver la ecuación-diferencial ordinaria que resulta, se obtiene de igual manera $\dot{\gamma}(t)$ si lo que se conoce es $\epsilon(t)$. Entre los procedimientos de solución de este tipo de ecuaciones se tiene el de la Transformada de Laplace, por medio del cual una ecuación diferencial ordinaria se convierte en una ecuación algebraica más fácil de resolver.

Entonces al aplicar la Transformada de Laplace al operador:

$$\phi = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

se obtiene: $\mathcal{L}(\phi) = \phi = \sum_{i=0}^n a_i s^i = P(S)$

(siempre y cuando todas las condiciones iniciales sean nulas), con lo que se obtiene un polinomio en S, P(S), de grado n, en el cual las constantes a_i son las mismas que las del operador ϕ .

La metodología y uso de la Transformada de Laplace forman parte del temario de la asignatura "Ecuaciones diferenciales y en diferencias", por lo que se recomienda hacer un repaso de la misma.

3.2.3 Integrales hereditarias

Las integrales hereditarias ponen de manifiesto que los materiales viscoelásticos tienen "memoria", es decir que

su comportamiento depende de la historia de carga.

Si consideramos un caso en el que la carga es constante y está dada por:

$\sigma(t) = \sigma_0 \Delta(t)$; entonces la deformación

$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t)$ dado que el modelo es viscoelástico lineal, si posteriormente se da un incremento $\Delta\sigma'$, a un tiempo t' , entonces la deformación con respecto al tiempo será:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma' J(t-t')$$

Si ahora, en vez de $\Delta\sigma'$, se da una serie de incrementos infinitesimales, la velocidad de deformación se obtendrá integrando la parte que corresponde a $\Delta\sigma'$, por lo que:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma'}{dt'} dt' \quad (3.9)$$

Otra forma de expresar esta ecuación se obtiene al integrar por partes la ecuación (3.9) quedando:

$$\epsilon(t) = \sigma(t) J(0) + \int_0^t \sigma(t') \frac{dJ(t-t')}{dt-t'} dt' \quad (3.9')$$

De manera análoga, para el caso de relajación se obtienen las siguientes integrales hereditarias:

$$\nabla(t) = \epsilon_0 \gamma(t) + \int_0^t \gamma(t-t') \frac{d\epsilon'}{dt'} dt' \quad (3.10)$$

$$\gamma(t) = \epsilon(t) \gamma(0) + \int_0^t \epsilon(t') \frac{d\gamma(t-t')}{dt-t'} dt' \quad (3.10')$$

Se concluye entonces que mediante las expresiones 3.9 y 3.9' puede obtenerse la ley de variación de $\epsilon(t)$.

De igual forma, con las expresiones 3.10 y 3.10', se obtiene la ley de variación de $\nabla(t)$.

3.2.4 Comportamiento viscoelástico tridimensional

Los tensores de esfuerzo y deformación pueden descomponerse en una componente isotrópica y una distorsionante. Además, existen relaciones entre las componentes isotrópicas de esfuerzo y deformación y también entre las distorsionantes de ambos tensores, que en el caso elástico son:

$$\begin{aligned} [T]_i &= 3k [I] [E]_i \quad ; \gamma \\ [T]_d &= 2G [I] [E]_d \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde:

k : módulo de compresibilidad volumétrica

G ; módulo de rigidez al cortante

$[I]$: matriz identidad

ademas;

$$[T]_{ij} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}; \quad s = \frac{1}{3} (\nabla x + \nabla y + \nabla z)$$

$$[T]_{d} = \begin{bmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} S_x &= \nabla x - s \\ S_z &= \nabla z - s \\ S_y &= \nabla y - s = - (S_x + S_z) \end{aligned}$$

De igual manera, las componentes del tensor de deformación tienen las siguientes expresiones:

$$[E]_{ij} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}; \quad e = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$[E]_{d} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x - e \\ \epsilon_z &= \epsilon_z - e \\ \epsilon_y &= \epsilon_y - e = - (e_x + e_z) \end{aligned}$$

Los tensores distorsionantes pueden descomponerse en cinco componentes de cortante o distorsión, de tal forma que:

$$[T]_{d} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & -S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{yz} \\ 0 & \zeta_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$[E] d = \begin{bmatrix} ex & 0 & 0 \\ 0 & -ex & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ez & 0 \\ 0 & 0 & ez \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{yz} \\ 0 & \epsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa entonces, que existen relaciones entre - componentes isotrópicas y distorsionantes puras del tipo de la ecuación 3.8, es decir

$$\phi_1 S = \phi_2 e$$

$$\phi_3 S_d = \phi_4 e_d$$

donde:

$$S_d = S_x, S_z, \zeta_{xy}, \zeta_{xz} \text{ ó } \zeta_{yz}$$

$$e_d = e_x, e_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz} \text{ ó } \epsilon_{yz}$$

Entonces, para un material dado, se tendrá una pareja de ecuaciones constitutivas, una para la relación isotrópica y otra para la distorsionante

$$P'' S = Q'' e$$

$$P' S_d = Q' e_d \quad (3.12)$$

donde:

$$P'' = \emptyset 1 ; Q'' = \emptyset 2 ; P' = \emptyset 3 \quad Q' = \emptyset 4$$

La pareja de ecuaciones constitutivas caracteriza - el comportamiento tridimensional de un material dado.

La aplicación de los operadores P' y Q' a cualquiera de los cinco componentes distorsionantes implica un comportamiento isotrópico. Cuando el material no lo es, deberán tenerse operadores diferentes para cada una de ellas.

3.2.5. Principio de correspondencia

El principio de correspondencia se utiliza en la solución de las ecuaciones constitutivas del problema visco-elástico tridimensional. El procedimiento consiste en aplicar a las ecuaciones (3.12) la transformación de Laplace, de tal forma que se obtienen polinomios cuya similitud con las relaciones elásticas $\nabla_m = 3 k \xi_m$ y $\zeta = 2 G \epsilon$ permite establecer equivalencias con estas relaciones en función del módulo de compresibilidad volumétrica y el módulo de rigidez al cortante (k y G respectivamente).

Una vez obtenidas las equivalencias, la solución de éstas se ha transformado en un problema elástico, cuya solución es más simple. La solución elástica finalmente se anti

transforma y se obtiene la solución viscoelástica, es decir, se obtiene a partir de la solución elástica.

Limitaciones del principio de correspondencia.

En el punto anterior se mencionó que es posible emplear los métodos de solución elástica en problemas visco-elásticos a través del principio mencionado; sin embargo, -- existen situaciones donde no pueden aplicarse, éstas situaciones son las siguientes:

- a) Cuando existe modificación de la geometría de la frontera por las cargas aplicadas.
- b) En problemas donde por ciertas causas la geometría se deforma o se desintegra, por ejemplo; -- una vela que se derrite o la quemadura de combustible.
- c) Cuando no existe solución elástica conocida del problema en cuestión.

Cuando se presente alguno de estos casos, debe emplearse el método directo de solución de problemas viscoelásticos.

3.2.6 Método directo.

Este método plantea la solución en conjunto de las ecuaciones de equilibrio, relaciones cinemáticas y ecuaciones constitutivas de manera idéntica a la que se usa para --

deducir las ecuaciones fundamentales de la elasticidad y la mecánica de fluidos (Navier-Stokes). Estas ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} \int a_x &= \int x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \int a_y &= \int y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \int a_z &= \int z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de} \\ \text{equilibrio} \end{array}$$

además

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} ; \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \begin{array}{l} \text{Relaciones} \\ \text{cinemáticas} \end{array}$$

y las ecuaciones constitutivas:

$$P'' S = Q'' e$$

$$P' Sd = Q' ed$$

El procedimiento de solución es el siguiente:

- a) En las ecuaciones constitutivas se reemplazan -- las cantidades de deformación por las de desplazamiento de acuerdo con las relaciones cinemáticas

cas correspondientes.

- b) Las expresiones de esfuerzos del inciso anterior, se reemplazan en las ecuaciones de equilibrio.
- c) Se encuentra una expresión vectorial que sintetiza las tres ecuaciones de equilibrio anterior, - la cual es semejante a las de elasticidad o mecánica de fluidos. Esta variará según el modelo viscoelástico escogido para las componentes isotrópicas y para las distorsionantes.
- d) Se resuelve por algún método matemático la expresión resultante mencionada.

Observaciones importantes en relación con los problemas viscoelásticos.

- a) En los modelos viscoelásticos se nota la influencia de la velocidad de carga en la respuesta, y en general en toda la historia de carga.
- b) Por lo mencionado anteriormente, puede observarse que dichos materiales tienen "memoria".
- c) Se observa en sus gráficas de comportamiento, - que existe un defasamiento de la respuesta con respecto a la excitación.

- d) Además, se nota la inercia de los flujos existentes en un instante dado.
- e) La elección adecuada del modelo que simulará un material real, puede hacerse observando la forma de la función $\epsilon(t)$ de una probeta ante carga -- constante y determinando cuál de las curvas mostradas en la figura 3.8 se ajusta mejor, de donde se tendrá el modelo analógico buscado.

3.3 Características de los modelos viscoelásticos en función de la gráfica tiempo-deformación (figura 3.8)

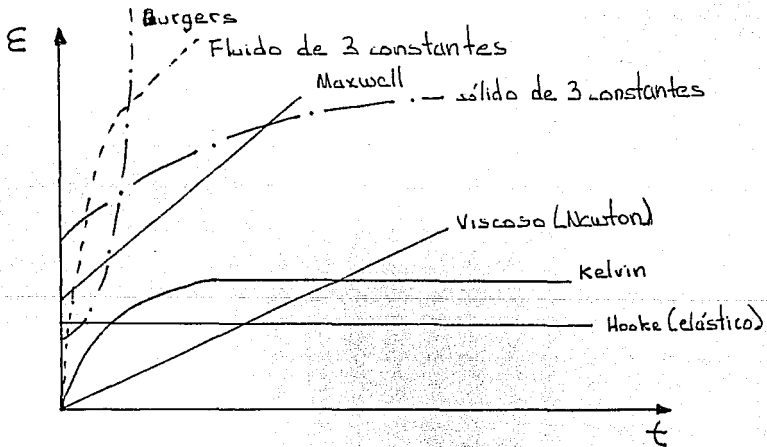


figura 3.8

De la figura pueden hacerse las siguientes observaciones.

a) Los cuerpos de Hooke, Maxwell, sólido de 3 - constantes y el de Burgers tienen respuesta elástica instantánea, además tienen en común un resorte aislado en serie. Los de Maxwell y Burgers son fluidos, ya que no tienen comportamiento asintótico horizontal.

b) Los cuerpos de Newton, Maxwell, fluido de tres constantes y el de Burgers muestran un comportamiento fluido.

c) Los cuerpos sólidos como el de Hooke, Kelvin y sólido de tres constantes tienen en su ecuación constitutiva el coeficiente η_0 no nulo, ver ecuaciones 3.1, 3.3 y 3.5.

A continuación se muestra una tabla de constantes viscoelásticas de diversos materiales.

CONSTANTES VISCOELÁSTICAS DE DIVERSOS MATERIALES ¹

T : temperatura, en grados centígrados

G_M : módulo elástico maxwelliano, en kg/cm²

G_K : módulo elástico kelviniano, en kg/cm²

μ_M : coeficiente de viscosidad maxwelliano, en kg s/cm²

μ_K : coeficiente de viscosidad kelviniano, en kg s/cm²

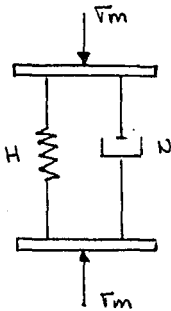
MATERIAL	T	Tipo de prueba	G_M	G_K	μ_M	μ_K
Suelo arcilloso	18°	cortante	de 2.058 a 7.621	de 3.173 a 12.176	de 0.6405×10^7 a 4.5477×10^7	de 0.1180×10^5 a 0.3945×10^5
Vigas de madera	26.5°	flexión	de 0.1882×10^6 a 0.2943×10^6	de 0.2644×10^6 a 0.4291×10^6	de 0.3005×10^{12} a 1.9689×10^{12}	de 1.8656×10^{10} a 4.6942×10^{10}
Concreto simple	21°	compresión	de 0.2439×10^6 a 0.3071×10^6	de 0.1465×10^6 a 0.3803×10^6	de 3.7085×10^{12} a 7.2460×10^{12}	de 1.0541×10^{11} a 2.7740×10^{11}
Concreto reforzado	ambiente	flexión	de 0.5125×10^6 a 0.6684×10^6	de 0.8694×10^6 a 1.1278×10^6	de 2.1580×10^{12} a 4.5571×10^{12}	de 1.4758×10^{12} a 2.5860×10^{12}
Probetas de acero	400 a 590°	tensión	de 1.6250×10^6 a 1.9270×10^6	de 0.5345×10^6 a 13.575×10^6	de 4.7030×10^{10} a 7.8832×10^{12}	de 0.8428×10^{10} a 2.6487×10^{11}

¹ Tomadas de: Rodríguez Cuevas, N., *Viscoelastic constants for a model representing the mechanical behaviour of materials*, Memorias de la Primera Conferencia Internacional de Estructuras, Mecánica de suelos y Diseño ingenieril. Southampton, Inglaterra, 1969.

3.4 Problemas resueltos.

3.4.1

Aplicación del modelo analógico del cuerpo de Kelvin a la mecánica de suelos.



Zevaert considera que el comportamiento de las arcillas debido a consolidación primaria, puede estudiarse por medio del modelo de Kelvin, el cual representa a un material sin plastificación.

Las consideraciones son las siguientes:

$$\sigma_m = \sigma_{Hooke} + \sigma_{Newton} \dots (1)$$

$$\epsilon_m = \epsilon_H = \epsilon_N \dots (2)$$

Para el cuerpo de hooke $\epsilon_H = \frac{1}{E_H} \sigma_H$

de aquí $\sigma_H = \epsilon_H E_H \dots (3)$

Para el cuerpo de Newton $\dot{\epsilon}_N = \phi_m \sigma_N$

de aquí: $\sigma_N = \frac{\dot{\epsilon}_N}{\phi_m} \dots (4); \text{ donde } \phi_m = \frac{1}{2\mu}$

sustituyendo (3) y (4) en (1) tenemos:

$$\sigma_m = \epsilon_H E_H \epsilon_m + \frac{\dot{\epsilon}_m}{\phi_m} \dots (5)$$

dejando todo en función de "m" dado que

$$\epsilon_m = \epsilon_H = \epsilon_N \quad \text{nos queda:}$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_m}{\phi_m} + \epsilon_m \quad \epsilon_m = \sqrt{m}$$

Multiplicando por ϕ_m

$$\dot{\epsilon}_m + \epsilon_m \quad \epsilon_m \phi_m = \sqrt{m} \phi_m \dots \quad \text{de aquí}$$

$$\frac{d \epsilon_m}{d t} + \epsilon_m \phi_m \epsilon_m = \sqrt{m} \phi_m \dots \dots (6)$$

Esta última expresión es la ecuación diferencial - del cuerpo de Kelvin.

La solución de esta ecuación es:

$$\epsilon_m = e^{- (\phi_m \epsilon_m) t} \int e^{(\phi_m \epsilon_m) t} \sqrt{m} \quad d t$$

como \sqrt{m} es constante

$$\epsilon_m = e^{- (\phi_m \epsilon_m) t} \int \frac{e^{(\phi_m \epsilon_m) t}}{\phi_m \epsilon_m} + C \dots (7)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\text{para } t = 0 \implies \epsilon_m = 0$$

sustituyendo en (7)

$$0 = e^{\circ} \phi_m \sqrt{m} \left[\frac{e^{\circ}}{\phi_m E_m} + C \right]$$

$$0 = \frac{\phi_m \sqrt{m}}{\phi_m E_m} + \phi_m \sqrt{m} C$$

$$0 = \frac{\sqrt{m}}{E_m} + \phi_m \sqrt{m} C \quad ; \quad \phi_m \sqrt{m} C = - \frac{\sqrt{m}}{E_m}$$

$$C = - \frac{\frac{\sqrt{m}}{E_m}}{\phi_m \sqrt{m}}$$

$$C = - \frac{\sqrt{m}}{\phi_m \sqrt{m} E_m} \quad ; \quad C = - \frac{1}{\phi_m E_m}$$

sustituyendo el valor de "C" en (7) se obtiene

$$E_m = e^{\frac{-(\phi_m E_m)t}{\phi_m \sqrt{m}}} \left[\frac{e}{\phi_m E_m} - \frac{1}{\phi_m E_m} \right]$$

factorizando

$$E_m = e^{\frac{-(\phi_m E_m)t}{\phi_m \sqrt{m}}} \frac{1}{E_m} \left[\frac{e}{\phi_m} - \frac{1}{\phi_m} \right]$$

$$\epsilon_m = e^{-\frac{(\phi_m \epsilon_m)t}{E_m}} \left[e^{\frac{(\phi_m \epsilon_m)t}{E_m}} - 1 \right]$$

$$\epsilon_m = \frac{\sqrt{m}}{E_m} - \frac{\sqrt{m}}{E_m} e^{-\frac{(\phi_m \epsilon_m)t}{E_m}}$$

$$\epsilon_m = \frac{\sqrt{m}}{E_m} \left[1 - e^{-\frac{(\phi_m \epsilon_m)t}{E_m}} \right] \dots (8)$$

Se hace la hipótesis de que el suelo está formado por un gran número de pequeños modelos de kelvin colocados en serie, por lo tanto;

$$\epsilon_{\text{suelo}} = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{m_i} \dots (9)$$

para $t = 0$; $\epsilon_m = 0$

para $t = \infty$; $\epsilon_m = \frac{\sqrt{m}}{E_m}$

por lo tanto

$$\epsilon = \sum \frac{\sqrt{m_i}}{E_{m_i}} \left[1 - e^{-\frac{(\phi_{m_i} \epsilon_{m_i})t}{E_{m_i}}} \right]$$

$$\epsilon = \sum \frac{\sqrt{m_i}}{E_{m_i}} - \sum e^{-\frac{(\phi_{m_i} \epsilon_{m_i})t}{E_{m_i}}} \frac{\sqrt{m_i}}{E_{m_i}}$$

Como los modelos están colocados en serie

$$V_{m_i} = V$$

$$E = V \left[\sum \frac{1}{E_{m_i}} - \sum \frac{1}{E_{m_i}} e^{-(\phi_{m_i} E_{m_i}) t} \right]$$

como $\sum \frac{1}{E_{m_i}} = \frac{1}{E \text{ suelo}} = \frac{1}{E}$

$$E = V \left[\frac{1}{E} - \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E}{E_{m_i}} e^{-(\phi_{m_i} E_{m_i}) t} \right] \dots (10)$$

Esta última expresión sirve para calcular los asentamientos a largo plazo debidos a consolidación primaria de un estrato de arcilla saturada.

Problema 3.4.2

Para cierto cuerpo de Kelvin el valor de G es =
 $9 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$,

$\mu = 2 \times 10^{-12} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2}$. Este material se somete a un
esfuerzo constante de $500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ durante 20 horas y luego se con-
fina, impidiéndole que siga deformándose.

Calcúlese la consiguiente reducción del esfuerzo.

Solución:

$$G = 9 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\mu = 2 \times 10^{-12} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2}$$

$$\bar{V} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$t = 20 \text{ horas}$$

sabemos que para el cuerpo de kelvin

$$E = \frac{\bar{V}}{2G} (1 - e^{-\lambda t})$$

E = deformación

G = módulo elástico del
resorte

μ = coeficiente de visco-
sidad del amortiguador

t = tiempo

\bar{V} = esfuerzo

Cuando el material se confina, la deformación tiene un límite $E = E_1$, que se alcanza en el instante $t = t_1$. Entonces el esfuerzo relativo resulta:

$\sigma_1 = 2 G E_1 = \sigma (1 - e^{-\lambda t})$ ya que el elemento confinante toma la parte del esfuerzo

$\sigma - \sigma_1 = \sigma e^{-\lambda t}$ de la carga.

Sustituyendo valores:

$$\lambda = \frac{G}{\mu} = \frac{9 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{2 \times 10^{12} \frac{\text{kgs}}{\text{cm}^2}} = 4.5 \times 10^{-7} \frac{1}{\text{seg}}$$

$$\sigma_1 = 500 \left[1 - e^{-(4.5 \times 10^{-7} \times 72000)} \right] = 15.94 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

∴ La reducción del esfuerzo es de $15.94 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

Problema 3.4.3

Un cuerpo de Maxwell tiene $G = 1.2 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $\mu = 3.42 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Calcúlese la deformación unitaria después de 1-segundo de habersele aplicado un esfuerzo de $5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Trácese la curva de relajación de esfuerzos, en la hipótesis de que precisamente en ese momento se impide que siga la deformación.

Solución:

Para el cuerpo de Maxwell, la deformación está dada por:

$$E = \frac{\sqrt{J}}{2} \left(\frac{t}{\mu} + \frac{1}{G} \right)$$

donde:

E = deformación

\sqrt{J} = esfuerzo

t = tiempo

μ = coeficiente de viscosidad del amortiguador

G = módulo elástico del resorte

sustituyendo valores

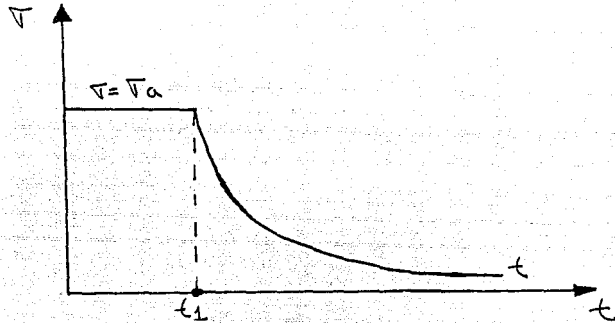
$$E = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{3.42} + \frac{1}{1.2 \times 10^4} \right)$$

$$E = 0.7312$$

Cuando existe relajación de esfuerzos (confinamiento) el comportamiento de los esfuerzos se rige por la ecuación

$$\sigma = \sigma_a e^{-\lambda(t-t_1)}$$

En una gráfica esfuerzo σ vs tiempo, el comportamiento es el siguiente:



Para el problema, los valores son:

$$\sigma = 5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$t_1 = 1 \text{ seg}$$

el valor de σ tiende a cero a medida que crece el valor de t .

Problema 3.4.4

Un cilindro de concreto tiene las siguientes características viscoelásticas:

$$G_M = 3.04 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} ; \quad G_k = 2.15 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} ,$$
$$\mu_M = 6.15 \times 10^{12} \frac{\text{kgs}}{\text{cm}^2} , \quad \mu_k = 2.42 \times 10^{11} \frac{\text{kgs}}{\text{cm}^2}$$

Calcúlese la deformación inicial bajo una carga de compresión axial de $37 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Determine cuánto tiempo debe transcurrir para que esta deformación aumente en un 20%. - El cilindro se supone confinado lateralmente.

Solución:

Este tipo de problemas puede resolverse usando como modelo el cuerpo de Burgers, el cual posee características - especialmente adecuadas para representar el comportamiento - de muchos metales y del concreto.

La deformación en el modelo de Burgers resulta de - la suma de las deformaciones de los cuerpos de Kelvin y Maxwell conectados en serie, es decir:

$$\epsilon_B = \epsilon_k + \epsilon_M$$

por lo tanto:

$$E = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[\frac{1}{Gk} (1 - e^{-\lambda kt}) + \frac{t}{\mu_M} + \frac{1}{GM} \right]$$

La deformación inicial se obtiene cuando $E = 0$

$$\therefore E = \frac{\sqrt{a}}{2} \frac{1}{GM}$$

sustituyendo valores

$$E = \frac{37}{2(3.04 \times 10^5)} = 6.09 \times 10^{-5}$$

Si la deformación aumenta en un 20%

$$E_1 = 6.09 \times 10^{-5} (1.20) = 7.308 \times 10^{-5}$$

debe cumplirse entonces que

$$7.308 \times 10^{-5} = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[\frac{1}{Gk} (1 - e^{-\lambda kt}) + \frac{t}{\mu_M} + \frac{1}{GM} \right]$$

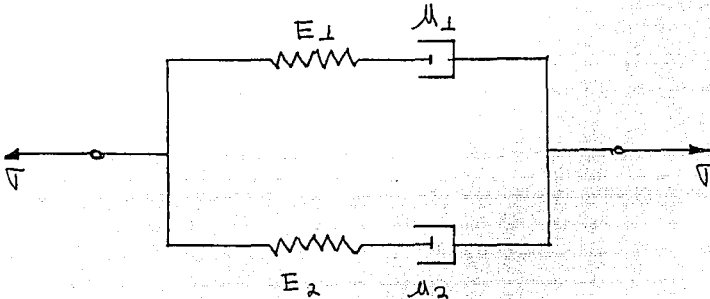
$$\text{donde } \lambda k = \frac{Gk}{\mu k} = \frac{2.15 \times 10^5}{2.42 \times 10^{11}} = 8.884 \times 10^{-7} \frac{1}{\text{seg}}$$

resolviendo por tanteos se obtiene $t = 1.7 \times 10^5 \text{ seg}$

3.5 Problemas propuestos

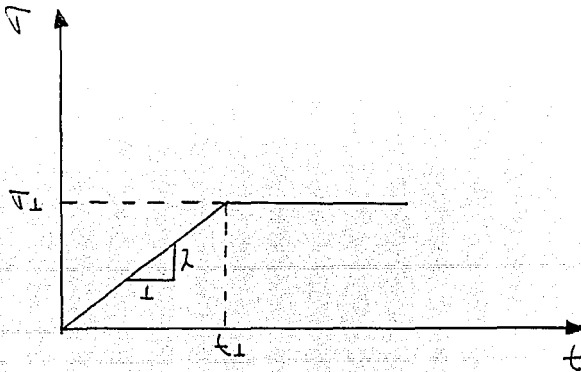
problema 3.5.1

Para el modelo mostrado, hallar la ecuación que relaciona el esfuerzo con la deformación.



Problema 3.5.2

Si a un material de kelvin se le aplica una tensión que aumenta linealmente y luego se mantiene constante a σ_1 , hallar la deformación resultante. Supongase que $\sigma_1 / \epsilon_1 = \lambda$.



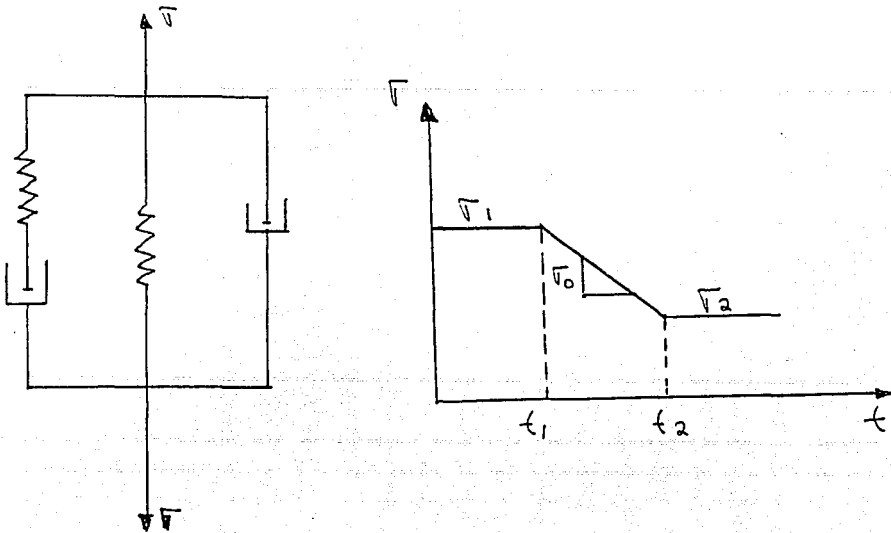
Problema 3.5.3

Un suelo arcilloso presenta las siguientes características viscoelásticas : $GM = 2.058 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$; $Gk = 3.173 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $\mu_M = 0.6405 \times 10^7 \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$; y $\mu_k = 0.1180 \times 10^5 \frac{\text{kg s}}{\text{cm}^2}$.

Calcular la deformación inicial bajo una carga de -
compresión axial de $10 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$. Determinar el tiempo que debe transcurrir para que la deformación inicial alcance un -
5% más.

Problema 3.5.4

Obtener la ley de comportamiento del modelo indicado y obtener la gráfica ϵ vs t para la historia de carga indicada.



Problema 3.5.5 .

Un cilindro de material dúctil colocado con sus bases haciendo contacto con dos placas y sometido a compresión por acercamiento de aquéllas, tiende a deformarse adoptando la apariencia de barril. Explicar la causa de este fenómeno. Indicar en qué parte del interior del cilindro resultan máximos los esfuerzos de corte.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

El estudio del comportamiento de los materiales con los que trabaja el ingeniero civil a través de la mecánica - del medio continuo, le permite tener una visión panorámica - de las bases en que sus diseños y especificaciones se sustentan.

Cuando se habla en particular de la viscosidad, se deducen de ella una serie de elementos de análisis que nos - permiten abordar una gran variedad de problemas relacionados con el flujo de fluidos. A partir de la deducción de la - ecuación diferencial fundamental de Navier - Stokes, la cual considera que el movimiento de los fluidos viscosos resulta de esfuerzos de tipo distorsional (τ), los cuales se relacionan con las velocidades de deformación ($\dot{\epsilon}$) mediante la ley de Newton, los problemas de mecánica de fluidos se resuelven tomando en cuenta las condiciones de carga y de frontera. Considerando que su solución matemática es muy rigurosa, lo más conveniente es hacer simplificaciones de dicha ecuación, dando como resultado casos particulares en los que se hace necesario introducir hipótesis simplificadoras. El tratamiento de la ecuación de Navier-Stokes bajo estas condiciones nos lleva a la determinación y descripción de los diferentes tipos de flujos, como son: flujo incompresible, la-

minar, turbulento, permanente, viscoso y de Poisseuille. -- Una deducción muy importante es la ecuación de Bernoulli, a partir de la consideración de un flujo no viscoso permanente. La ecuación de Bernoulli puede interpretarse de manera sencilla puesto que cada uno de sus términos tiene unidades de -- longitud.

Cuando la viscosidad de los fluidos es no newtoniana, no existe proporcionalidad entre el gasto que pasa a través de un conducto y el gradiente de presión en dirección -- del tubo.

El manejo de los números de "Reynolds" y de "Froude" así como de sus fronteras, permite una clasificación adecuada de los diferentes tipos de flujos y condiciones de escu-- rrimiento.

El estudio de los flujos bidimensionales debe realizarse apoyándose en la función de corriente Ψ , la cual determina que el campo vectorial de velocidades se deduce si -- se conoce el campo escalar definido por la función de co-- rriente o de flujo.

Un análisis viscoelástico debe aplicarse cuando la evolución de las deformaciones se aleja del comportamiento -- elástico. También son aplicables cuando a los materiales se les hace trabajar con esfuerzos superiores al rango elástico El uso del procedimiento general para el tratamiento de cuer

pos viscoelásticos facilita el estudio de éstos, ya que proporciona un orden lógico de solución.

Los modelos reológicos permiten establecer una analogía de comportamiento entre éstos y los materiales con los que trabaja el ingeniero civil, por lo tanto, la elección -- del modelo que representará al material en estudio debe hacerse mediante una observación minuciosa del comportamiento de los materiales, tomando como punto de partida su comportamiento descrito en gráficas que relacionan a los elementos-- o factores más importantes en su estudio, estos elementos -- son: el esfuerzo, la deformación y el tiempo.

Considero que el objetivo de la tesis se cumple, ya que se logra una aplicación relativamente sencilla de los -- conceptos utilizados en la misma, de tal manera que el estudiante puede de inmediato afrontar diversos problemas relacionados con el comportamiento viscoso y viscoelástico de -- los materiales aquí estudiados.

BIBLIOGRAFIA

Enzo Levi, "Elementos de Mecánica del Medio Continuo",
Ed. Limusa - Wiley, México, 1977.

Agustín Demeneghi, Roberto Magaña, Héctor Sangines, "Intro--
ducción al Comportamiento de los Materiales," México, 1986.

José Luis Sánchez Bribiesca, "Mecánica del Medio Continuo",--
U.N.A.M., Textos Universitarios, México, 1972.

Gilberto Sotelo Avila, "Hidráulica General", Ed. Limusa - --
Wiley, México, 1979.

Andrew L. Simon, "Hidráulica Básica", Ed. Limusa, México, --
1983.

Victor L. Streeter, "Mecánica de los Fluidos", Ed. Mc. Graw-
Hill, México, 1971.